

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

**Rozwiązywanie równań i
układów równań nieliniowych**

Mateusz Łopaciński

18.05.2022 r.

I. Dane techniczne sprzętu

Obliczenia zostały wykonane na komputerze o następujących parametrach:

- Procesor: AMD Ryzen 7 4700U (8 rdzeni, 8 wątków),
- Pamięć RAM: 16 GB 3200 MHz

II. Zadanie 1

1. Wprowadzenie

1.1. Opis problemu

Zadanie polega na wyznaczeniu pierwiastków równania $f(x) = 0$ na danym przedziale $[a, b]$ przy pomocy metody Newtona oraz metody siecznych. Dla metody Newtona punkty startowe wybierane są z krokiem 0.1 na przedziale $[a, b]$ (tzn. bierzemy kolejno $a, a + 0.1, a + 0.2, \dots, b$). Dla metody siecznych, jako jeden z punktów startowych wybieramy jeden z końców przedziału $[a, b]$, natomiast drugi punkt wyznaczamy tak, jak w przypadku metody Newtona.

1.2. Wzór funkcji

Miejsca zerowe szukałem dla funkcji danej wzorem:

$$f(x) = x^n - (1 - x)^m \quad (1.1.1.)$$

gdzie

$$n = 10$$

$$m = 15$$

(1.1.2.)

na przedziale

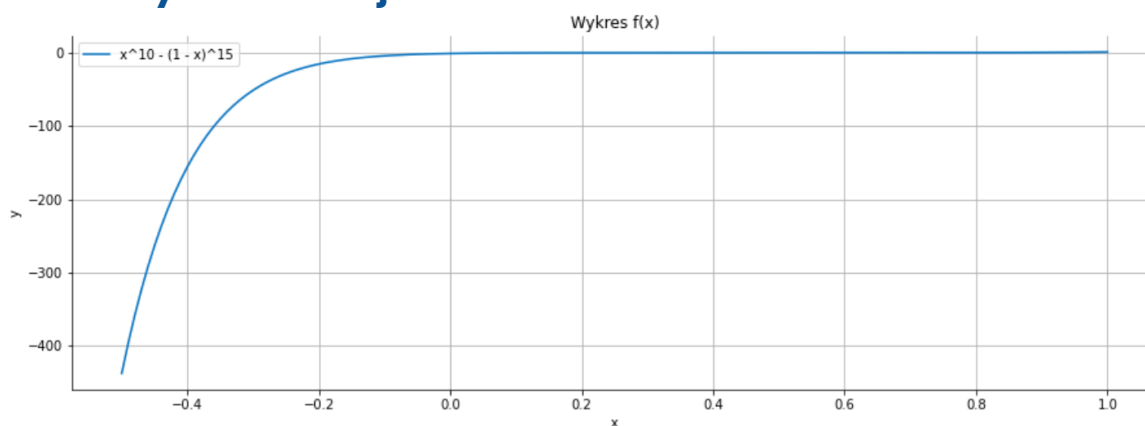
$$x \in [-0.5, 1]$$

(1.1.3.)

Finalnie, po podstawieniu (1.1.2.) do wzoru (1.1.1.), otrzymujemy wzór badanej funkcji:

$$f(x) = x^{10} - (1 - x)^{15} \quad (1.1.4.)$$

1.3. Wykres funkcji



Rys. 1.1.1. Wykres badanej funkcji

2. Kryteria stopu

W przypadku obu metod wyznaczania pierwiastka równania, wyznaczałem liczbę iteracji, jakie były konieczne, aby rozwiązanie spełniało warunek zwany *kryterium stopu*. Skorzystałem z dwóch kryteriów stopu, dla których doбираłem różne wartości ρ . Im mniejsza wartość ρ , tym dokładniejsze powinniśmy otrzymać rozwiązanie. Spodziewamy się również, że wraz ze zmniejszaniem ρ , wzrastać będzie liczba iteracji potrzebnych do wyznaczenia pierwiastka równania.

2.1. Wartość bezwzględna różnicy dwóch ostatnich przybliżeń pierwiastka

Pierwszym kryterium, z którego skorzystałem, jest bezwzględna wartość z różnicy dwóch ostatnio wyznaczonych przybliżeń pierwiastka równania $f(x) = 0$, gdzie funkcja $f(x)$ dana jest wzorem (1.1.2.4.).

$$|x_{i+1} - x_i| < \rho \quad (1.2.1.)$$

2.2. Wartość bezwzględna z wartości funkcji

Drugim kryterium jest wartość bezwzględna z wartości badanej funkcji (1.1.4.) w punkcie, będącym przybliżeniem pierwiastka równania $f(x) = 0$.

$$|f(x_i)| < \rho \quad (1.2.2.)$$

3. Metoda Newtona (Newtona-Raphsona)

Jedną z metod, które wykorzystałem do wyznaczania pierwiastka równania $f(x) = 0$ na przedziale (1.1.3.) jest metoda Newtona (zwana także metodą Newtona-Raphsona).

3.1. Opis metody

3.1.1. Założenia

W metodzie Newtona przyjmuje się następujące założenia dla funkcji $f(x)$:

- Funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale $[a, b]$,
- W przedziale $[a, b]$ znajduje się dokładnie jeden pierwiastek równania $f(x) = 0$,
- Funkcja $f(x)$ ma różne znaki na krańcach przedziału, czyli zachodzi: $f(a) \cdot f(b) < 0$, gdzie a i b są krańcami przedziału, na którym szukamy pierwiastka równania,
- Pierwsza i druga pochodna funkcji $f(x)$ mają stały znak na tym przedziale (funkcja jest albo wypukła, albo wklęsła na całym przedziale – nie ma punktów przegięcia).

Patrząc na wykres Rys. 1.1.1., możemy zauważyć, że badana funkcja spełnia założenia (1.3.1.), dzięki czemu możliwe jest skorzystanie z tej metody.

3.1.2. Sposób postępowania

1. Wybieramy punkt startowy x_0 (punkt startowy będziemy wybierać w taki sposób, jak zostało to opisane w punkcie 1.1.),

2. Prowadzimy styczną do wykresu funkcji w punkcie x_0 . Współrzędna x punktu x_1 przecięcia stycznej z osią OX jest pierwszym przybliżeniem rozwiązania równania,
3. Jeżeli przybliżenie nie jest wystarczająco dokładne, jako punkt startowy wybieramy otrzymany w punkcie 2. punkt x_1 i powtarzamy powyższe czynności, do momentu, w którym uzyskamy wystarczająco dokładne przybliżenie.

3.1.3. Wzór iteracyjny

Przedstawione w punkcie 3.1.2. postępowanie można opisać, przy pomocy wzoru iteracyjnego, z którego wyznaczamy kolejne przybliżenia pierwiastka równania $f(x) = 0$:

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (1.3.1.)$$

3.1.4. Warunek zbieżności

Może się zdarzyć sytuacja, w której, podczas obliczania kolejnych przybliżeń pierwiastka, korzystając ze wzoru (1.3.2.), będziemy otrzymywać rozwiązania coraz bardziej odbiegające od rzeczywistego pierwiastka równania $f(x) = 0$. Aby do tego nie dopuścić, musimy zapewnić, żeby $|\phi'(x)| \leq L < 1$, gdzie L jest pewną stałą.

Okazuje się, że jeżeli funkcja $f(x)$ spełnia założenia opisane w punkcie 3.1.1., wówczas będzie ona zbieżna na tym przedziale. Z tego powodu, podczas obliczeń nie sprawdzam dodatkowo tego warunku.

3.2. Otrzymane wyniki

W kolejnych punktach znajdują się wyniki uzyskane dla różnych punktów startowych x_0 oraz różnych wartości ρ .

3.2.1. Kryterium 1 (2.1.)

Zamieszczone niżej tabele przedstawiają uzyskane przybliżenia pierwiastka równania $f(x) = 0$ oraz liczbę iteracji, potrzebnych do jego wyznaczenia, w zależności od punktu startowego x_0 oraz ρ . W tym przypadku, jako kryterium stopu wykorzystałem kryterium 2.1. Jako rozwiązanie wzorcowe możemy potraktować $x = 0.43016$ (zaokrąglenie do 5 cyfr po przecinku) które zostało wyznaczone, przy pomocy programu *Wolfram Mathematica*.

▪ Wartości pierwiastka równania

Jak możemy zauważyć, większość wyników jest taka sama lub bardzo bliska dokładnemu wynikowi (dokładniejsze porównanie umieściłem na kolejnych stronach).

Punkt startowy x_0	Wartość ρ						
	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-10}	10^{-15}
-0.5	0,430159	0,430159	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
-0.4	0,430159	0,430159	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
-0.3	0,429888	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016

−0.2	0,430049	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
−0.1	0,43014	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
0.0	0,430159	0,430159	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
0.1	0,430122	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
0.2	0,429937	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
0.3	0,429847	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
0.4	0,430107	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
0.5	0,430158	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
0.6	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
0.7	0,43015	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
0.8	0,430134	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
0.9	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
1.0	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016

Tabela. 1.3.1. Wartości pierwiastków równania dla metody Newtona przy zastosowaniu 1. kryterium stopu (2.1.)

▪ Liczby iteracji

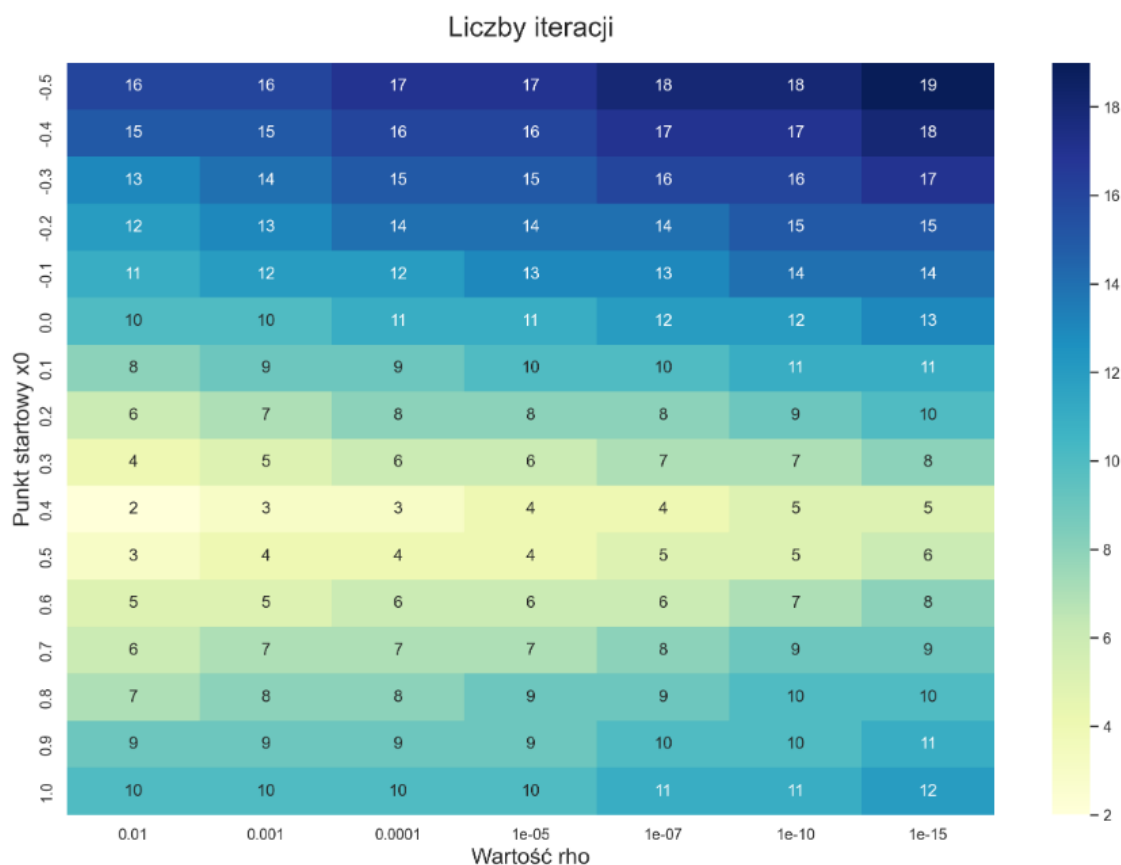
Poniższa tabela zawiera liczby iteracji, które zostały wykonane do momentu, w którym został spełniony warunek określony przez 1. kryterium stopu (2.1.) w zależności od punktu startowego x_0 oraz wartości ρ .

	Wartość ρ						
	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-10}	10^{-15}
−0.5	16	16	17	17	18	18	19
−0.4	15	15	16	16	17	17	18
−0.3	13	14	15	15	16	16	17
−0.2	12	13	14	14	14	15	15
−0.1	11	12	12	13	13	14	14
0.0	10	10	11	11	12	12	13
0.1	8	9	9	10	10	11	11
0.2	6	7	8	8	8	9	10
0.3	4	5	6	6	7	7	8
0.4	2	3	3	4	4	5	5

0.5	3	4	4	4	5	5	6
0.6	5	5	6	6	6	7	8
0.7	6	7	7	7	8	9	9
0.8	7	8	8	9	9	10	10
0.9	9	9	9	9	10	10	11
1.0	10	10	10	10	11	11	12

Tabela. 1.3.2. Liczby iteracji dla metody Newtona przy zastosowaniu 1. kryterium stopu (2.1.)

Jeszcze lepiej liczbę iteracji obrazuje poniższy wykres. Widzimy na nim dokładnie, że najmniej iteracji zostało wykonanych wtedy, gdy $x_0 = 0.4$ oraz $\rho = 0.01$. Jest tak dlatego, że $x_0 = 0.4$ jest punktem najbliższym położonym rzeczywistego pierwiastka równania, natomiast $\rho = 0.01$ jest największą wartością ρ spośród zastosowanych. Widzimy więc, że im mniejsza wartość ρ , tym więcej iteracji musimy wykonać. Widzimy również, że dla bardziej oddalonych punktów startowych od rzeczywistego rozwiązania, musimy także wykonać więcej iteracji.



Rys. 1.3.1. Wykres, przedstawiający zależność liczby iteracji od ρ oraz punktu startowego x_0 dla metody Newtona, przy zastosowaniu 1. kryterium stopu (2.1.)

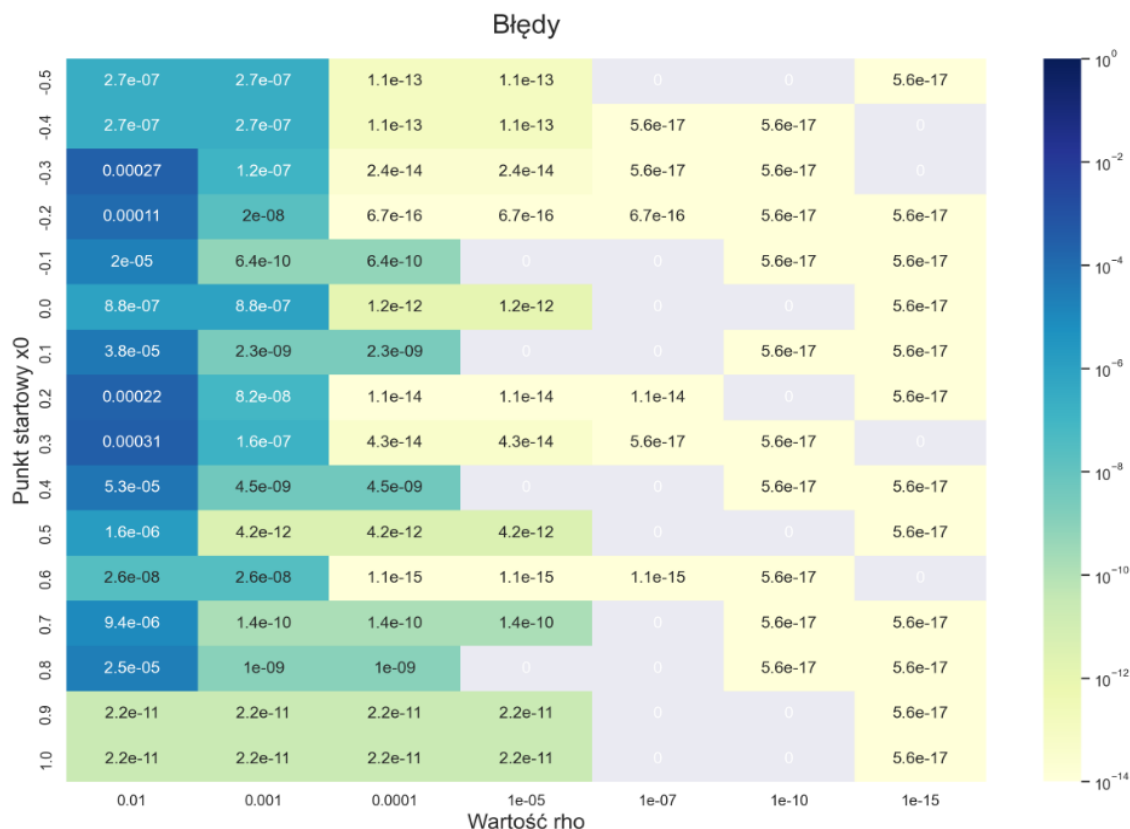
▪ Błędy obliczonych pierwiastków

Jako wzorcowe rozwiązanie traktuję wartość wyznaczoną, przy pomocy programu *Wolfram Mathematica* $x = 0.43015970900194673408860004188043$ (zaokrąglenie do 32 cyfr po przecinku). Wyznaczone błędy są błędami bezwzględnymi, które liczyłem jako wartość bezwzględną z różnicy między oczekiwaną wartością pierwiastka a wartością wyznaczoną, przy pomocy metody Newtona. Błędy zostały zebrane na poniższym wykresie.

Widzimy, że wraz ze zmniejszaniem wartości ρ (a więc także wzrostem liczby iteracji), maleją wartości błędów. Co ciekawe, mimo, że $x_0 = 0.4$ jest punktem położonym najbliżej rozwiązania wzorcowego, pierwiastka wtedy, gdy ρ ma niewielką wartość wcale nie uzyskujemy dla niego najlepszego przybliżenia. Dzieje się tak dlatego, że przedział wartości, dla których spełniony jest warunek z kryterium stopu, jest wtedy dość duży, przez co kończymy iterację nawet dla niezbyt dokładnego przybliżenia.

Na poniższym wykresie widzimy także przypadki, w których otrzymaliśmy idealnie rozwiązanie (oczywiście dokładność obliczeń w komputerze jest ograniczona i prawdopodobnie, po zwiększeniu dokładności obliczeń, błąd by nie był równy 0).

Moglibyśmy się spodziewać, że wraz ze zmniejszaniem wartości ρ , rosnać będzie dokładność przybliżenia. Nie dzieje się tak jednak cały czas, ponieważ dla $\rho = 10^{-15}$ mamy więcej gorszych przybliżeń niż dla $\rho = 10^{-10}$. Możemy także zauważyć, że dla wszystkich punktów startowych, dla których błąd wcześniej wynosił 0, dla $\rho = 10^{-15}$ błąd ten wzrósł. Dzieje się tak dlatego, że po pewnej liczbie iteracji, rośnie wartość błędu zaokrąglenia, a więc wyniki stają się mniej dokładne.



Rys. 1.3.2. Wykres błędów wyznaczonych pierwiastków w zależności od ρ oraz x_0 dla metody Newtona, przy zastosowaniu 1. kryterium stopu (2.1.)

3.2.2. Kryterium 2 (2.2.)

Podobnie jak dla kryterium 1., poniżej umieściłem tabelę z wynikami oraz wykresy liczb iteracji i błędów. W tym przypadku zrezygnowałem z tabeli z liczbą iteracji i ograniczyłem się do wykresu liczby iteracji, z który lepiej pokazuje zależność tej liczby od ρ oraz x_0 .

▪ Wartości pierwiastka równania

Od razu możemy zauważyć, że pojawiają się wyniki znacznie bardziej odbiegające od wzorcowej wartości pierwiastka równania, w szczególności wtedy, gdy ρ ma dużą wartość (np. $\rho = 0.01$). Spowodowane jest to tym, że badana funkcja (1.1.4.) jest prawie pozioma oraz przyjmuje wartości bardzo bliskie 0 wtedy, gdy dla $x > 0$. Z tego powodu, $|f(x_i)|$ ma niewielką wartość również dla x dość znacznie oddalonych od punktu, będącym rzeczywistym pierwiastkiem równania.

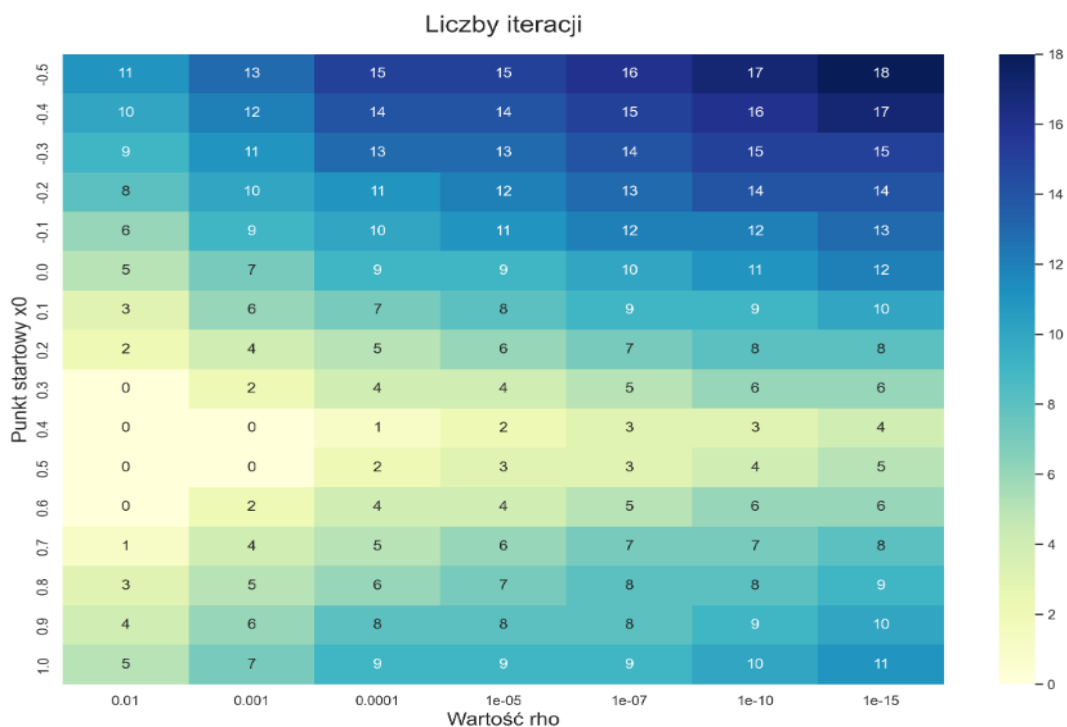
	Wartość ρ						
	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-10}	10^{-15}
Punkt startowy x_0	-0.5	0,297734	0,386835	0,429762	0,429762	0,430159	0,43016
	-0.4	0,297734	0,386835	0,429762	0,429762	0,430159	0,43016
	-0.3	0,301314	0,389712	0,429888	0,429888	0,43016	0,43016
	-0.2	0,308985	0,395736	0,423644	0,430049	0,43016	0,43016
	-0.1	0,272866	0,404871	0,427072	0,43014	0,43016	0,43016
	0.0	0,291748	0,381951	0,429446	0,429446	0,430159	0,43016
	0.1	0,268265	0,401783	0,426065	0,430122	0,43016	0,43016
	0.2	0,303098	0,391131	0,421422	0,429937	0,43016	0,43016
	0.3	0,3	0,38866	0,429847	0,429847	0,43016	0,43016
	0.4	0,4	0,4	0,425412	0,430107	0,43016	0,43016
	0.5	0,5	0,5	0,431213	0,430158	0,430158	0,43016
	0.6	0,6	0,486644	0,430288	0,430288	0,43016	0,43016
	0.7	0,63	0,461783	0,432993	0,43015	0,43016	0,43016
	0.8	0,583203	0,47369	0,437468	0,430134	0,43016	0,43016
	0.9	0,590492	0,479256	0,430156	0,430156	0,430156	0,43016
	1.0	0,590492	0,479256	0,430156	0,430156	0,430156	0,43016

Tabela. 1.3.3. Wartości pierwiastków równania dla metody Newtona przy zastosowaniu 2. kryterium stopu (2.2.)

▪ Liczby iteracji

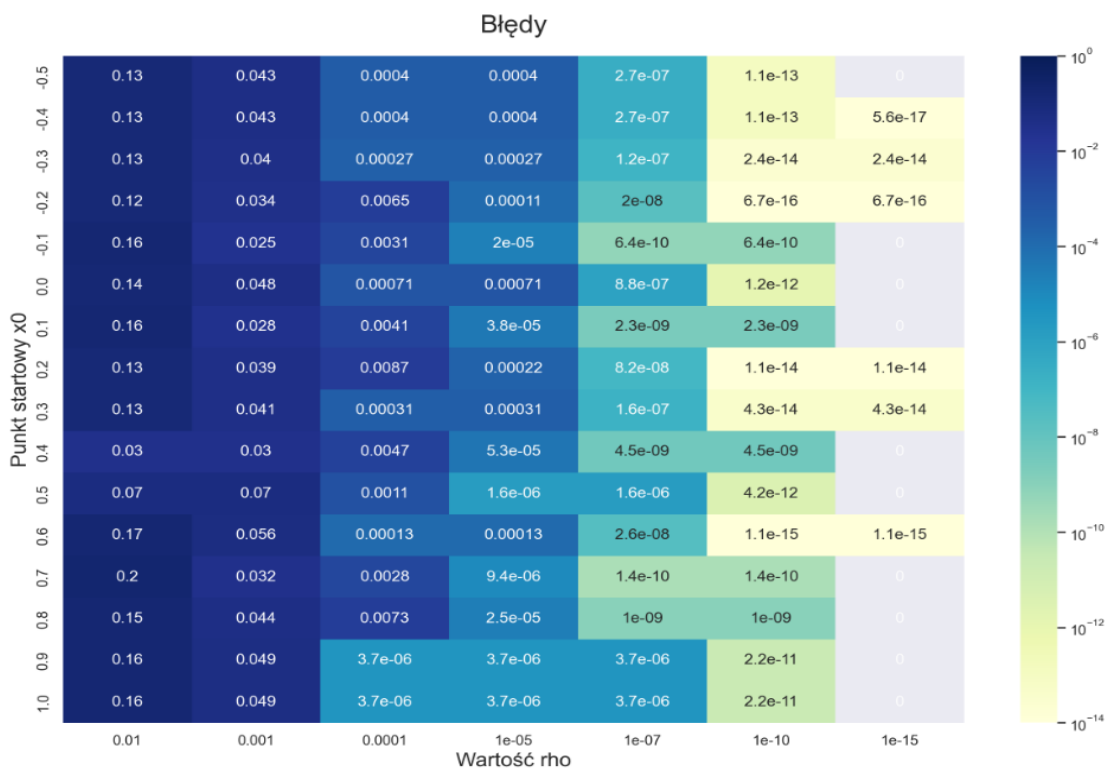
Wykres liczb iteracji jest bardzo zbliżony do poprzedniego, poza tym, że najmniejsza liczba iteracji teraz jest równa 0 (dla punktów bliskich rzeczywistego pierwiastka

równania oraz małych wartości ρ). Funkcja (1.1.4.) przecina oś OX w punkcie, w którym nachylenie krzywej względem osi OX jest bardzo niewielkie, przez co $|f'(x_0)| < 0$.



Rys. 1.3.3. Wykres, przedstawiający zależność liczby iteracji od ρ oraz punktu startowego x_0 dla metody Newtona, przy zastosowaniu 2. kryterium stopu (2.2.)

▪ Błędy obliczonych pierwiastków



Rys. 1.3.4. Wykres błędów wyznaczonych pierwiastków w zależności od ρ oraz punktu startowego x_0 dla metody Newtona, przy zastosowaniu 2. kryterium stopu (2.2.)

Wykres błędów został wykonany w tej samej skali, co poprzednio. Ponownie wykorzystałem skalę logarytmiczną, ustawiając najmniejszą wartość na 10^{-15} , a największą na 10^{-1} . Widzimy, że tym razem osiągamy dużo większe błędy niż dla 1. kryterium.

4. Metoda siecznych

Drugą z metod, które wykorzystałem do wyznaczania pierwiastka równania $f(x) = 0$ na przedziale (1.1.3.) jest metoda siecznych.

4.1. Opis metody

4.1.1. Założenia

W metodzie siecznych przyjmuje się następujące założenia dla funkcji $f(x)$:

- Funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale $[a, b]$.
- Funkcja $f(x)$ ma różne znaki na krańcach przedziału, czyli zachodzi: $f(a) \cdot f(b) < 0$, gdzie a i b są krańcami przedziału, na którym szukamy pierwiastka równania,

Zauważmy, że w przypadku metody siecznych nie mamy żadnego warunku z pochodną funkcji, która, w przeciwieństwie do metody Newtona, nie musi być teraz znana.

4.1.2. Sposób postępowania

1. Wybieramy dwa punkty startowe x_0 oraz x_1 .
2. Przez punkty x_0 i x_1 prowadzimy sieczną. Współrzędna x punktu x_1 przecięcia siecznej z osią OX jest pierwszym przybliżeniem rozwiązania,
3. Jeżeli otrzymane przybliżenie nie jest wystarczająco dokładne, jako punkt x_0 przyjmujemy poprzedni punkt x_1 , a jako punkt x_1 , obliczone w punkcie 2. przybliżenie pierwiastka równania. Powtarzamy powyższe czynności do momentu, w którym osiągniemy satysfakcjonujące przybliżenie.

4.1.3. Wzór

Przedstawione w punkcie 4.1.2. postępowanie można opisać, przy pomocy poniższego wzoru:

$$x_{i+2} = x_{i+1} - \frac{x_{i+1} - x_i}{f(x_{i+1}) - f(x_i)} \cdot f(x_{i+1}) \quad (1.4.1.)$$

Przy pomocy tego wzoru, wyznaczamy kolejne przybliżenia pierwiastka równania $f(x) = 0$, do momentu, w którym uzyskamy zadowalające przybliżenie.

4.2. Otrzymane wyniki

W kolejnych punktach znajdują się wyniki uzyskane dla różnych punktów startowych x_0 oraz różnych wartości ρ . Ponieważ tym razem mamy 2 punkty startowe, musimy ustalić wartości obu punktów. Początkowo przyjmuję, że $x_0 = a$, natomiast x_1 jest punktem z przedziału $[a, b]$ wyznaczanym, podobnie jak dla metody Newtona, z krokiem 0.1. Następnie, przyjmuję, że $x_1 = b$, natomiast x_0 jest punktem z przedziału $[a, b]$ wyznaczanym z krokiem 0.1. W zamieszczonych na kolejnych stronach tabelach,

w pierwszej kolumnie znajdują się pary postaci x_0, x_1 , oznaczające wartości startowe, kolejno x_0 i x_1 .

4.2.1. Kryterium 1 (2.1.)

Postępowanie jest analogiczne, jak w przypadku metody Newtona. Na kolejnych stronach znajdują się tabele/wykresy z wynikami.

- **Wartości pierwiastka równania**

		Wartość ρ						
		10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-10}	10^{-15}
Punkty startowe x_0, x_1	-0.5 - 0.4	0,43005	0,430159	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
	-0.5 - 0.3	0,430041	0,430159	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
	-0.5 - 0.2	-0,17922	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
	-0.5 - 0.1	-0,09246	0,430159	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
	-0.5 0.0	0,002272	0,430158	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
	-0.5 0.1	0,100563	0,100563	0,430159	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
	-0.5 0.2	0,200112	0,200112	0,200112	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
	-0.5 0.3	0,300017	0,300017	0,300017	0,300017	0,43016	0,43016	0,43016
	-0.5 0.4	0,400002	0,400002	0,400002	0,400002	0,43016	0,43016	0,43016
	-0.5 0.5	0,499996	0,499996	0,499996	0,499996	0,43016	0,43016	0,43016
	-0.5 0.6	0,59997	0,59997	0,59997	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
	-0.5 0.7	0,699845	0,699845	0,699845	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
	-0.5 0.8	0,799364	0,799364	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
	-0.5 0.9	0,897787	0,430159	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
	-0.5 1.0	0,993287	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016

Tabela. 1.4.1. Wartości pierwiastków równania dla metody siecznych przy zastosowaniu 1. kryterium stopu (2.1.) cz. 1.

		Wartość ρ						
		10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-10}	10^{-15}
Punkty startowe x_0, x_1	-0.5 1	0,996582	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
	-0.4 1	0,991058	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
	-0.3 1	0,430768	0,430155	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
	-0.2 1	0,430184	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016

-0.1	1	0,430286	0,430159	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
0.0	1	0,499527	0,499527	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
0.1	1	0,262817	0,430159	0,430159	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
0.2	1	0,429447	0,430148	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
0.3	1	0,306366	0,430144	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
0.4	1	0,400436	0,400436	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
0.5	1	0,499057	0,499057	0,430159	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
0.6	1	0,595217	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
0.7	1	0,68339	0,430154	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
0.8	1	0,430187	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016
0.9	1	0,430196	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016	0,43016

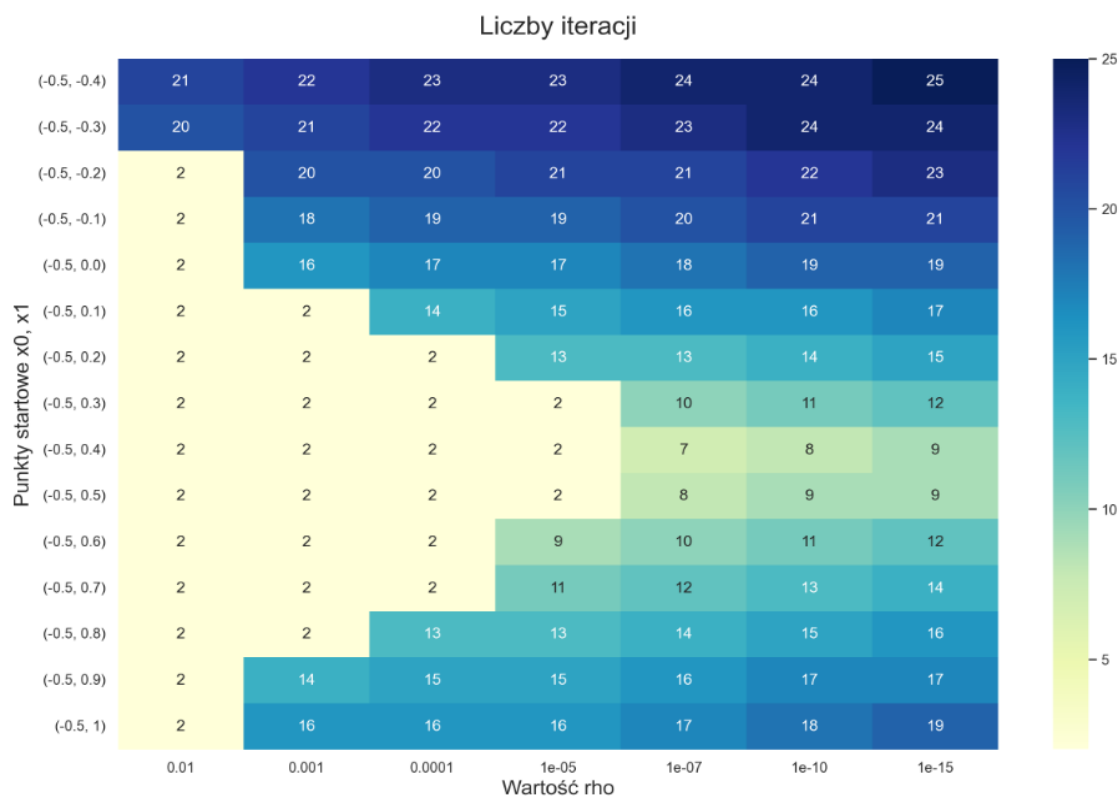
Tabela. 1.4.2. Wartości pierwiastków równania dla metody siecznych przy zastosowaniu 1. kryterium stopu (2.1.) cz. 2.

▪ Liczby iteracji

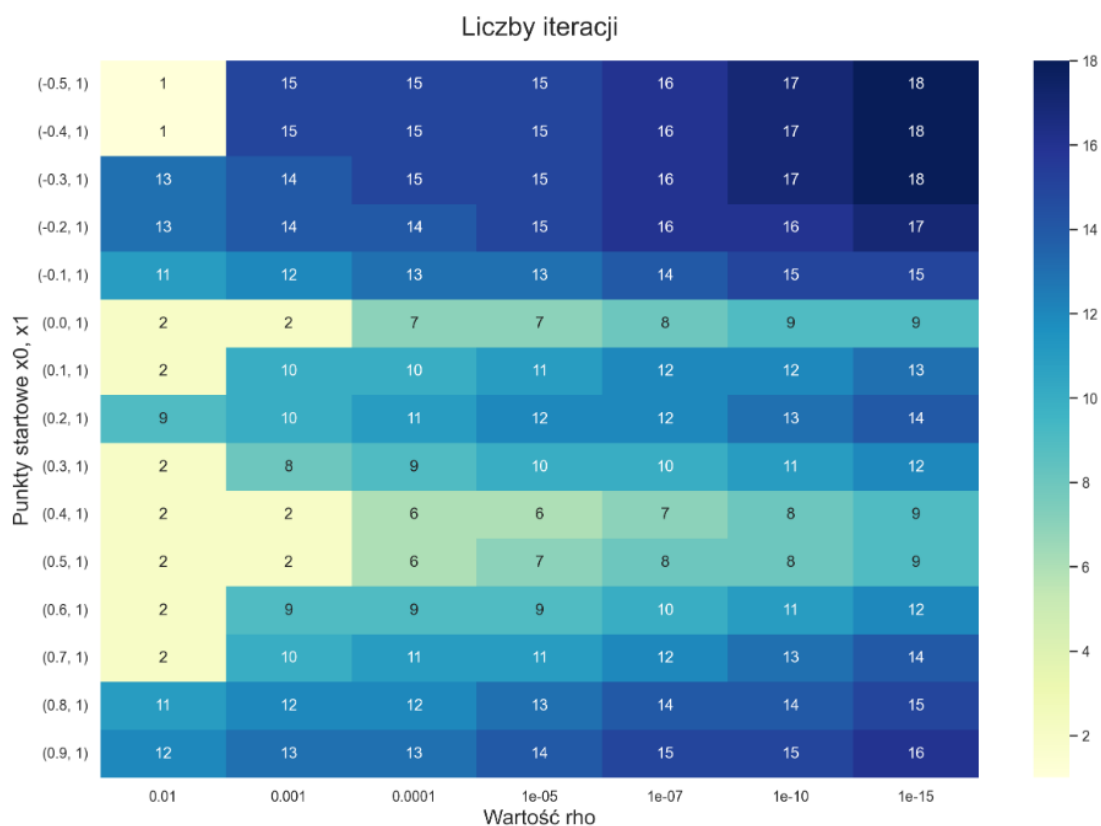
Ponownie wykorzystam wykresy zamiast tabel, ponieważ dobrze na nich widać zależność liczby iteracji od wyboru punktów startowych x_0 , x_1 oraz wartości ρ .

Widzimy, że w przypadku, gdy ustalimy wartość $x_0 = a = -0.5$ i jednocześnie zmieniamy wartość x_1 , najmniej iteracji wykonujemy dla punktów startowych $x_0 = -0.5$, $x_1 = 0.4$. Jest tak dlatego, że punkt $x_1 = 0.4$ znajduje się blisko rzeczywistego rozwiązania, dlatego potrzeba mniej iteracji, w celu znalezienia dobrego przybliżenia rzeczywistego pierwiastka równania $f(x) = 0$. W przypadku, gdy oba punkty są bardzo oddalone od rzeczywistego rozwiązania, obserwujemy gwałtowny wzrost liczby iteracji (np. dla $x_0 = -0.5$, $x_1 = -0.4$ zawsze musimy wykonać przynajmniej 21 iteracji).

W przypadku, gdy ustalimy wartość $x_1 = b = 1$ i jednocześnie zmieniamy wartość x_0 , najlepsze najmniej iteracji wykonamy, podobnie jak wyżej, wtedy, gdy x_0 ma wartość bliską 0.4. Co ciekawe, niewielką liczbę iteracji wykonamy także wtedy, gdy $x_0 = 0$ lub $x_0 \in \{-0.5, -0.4\}$ (dla $\rho = 0.01$). Później zweryfikujemy, kiedy otrzymujemy najlepsze przybliżenie.



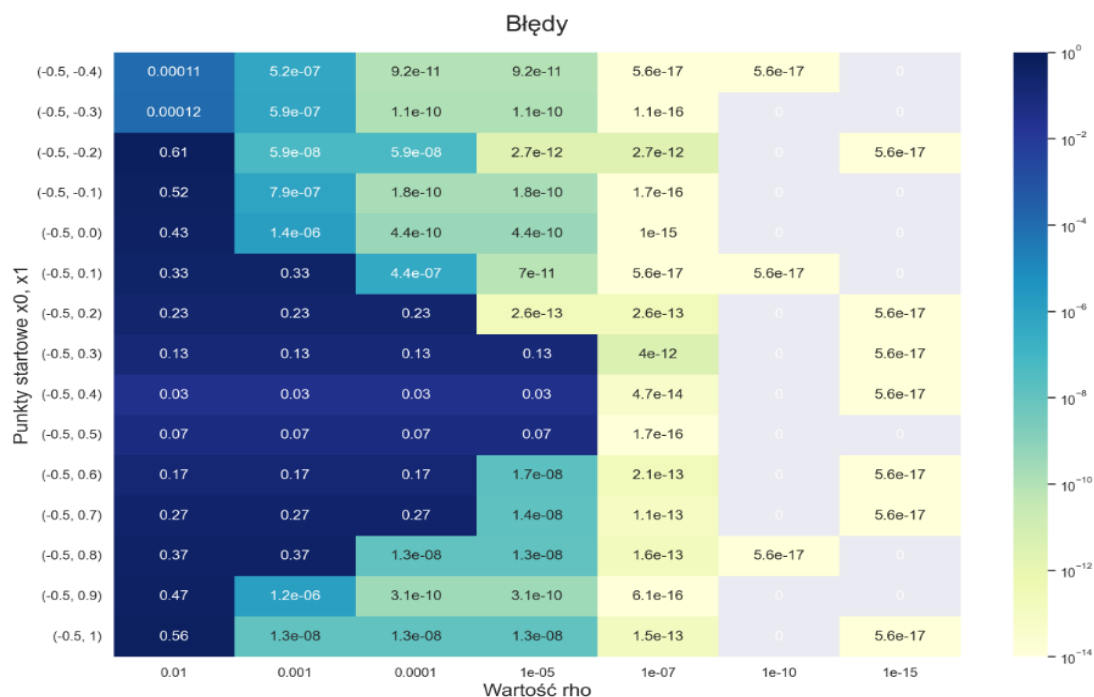
Rys. 1.4.1. Wykres, przedstawiający zależność liczby iteracji od ρ oraz punktów startowych x_0, x_1 dla metody siecznych, przy zastosowaniu 1. kryterium stopu (2.1.) cz.1.



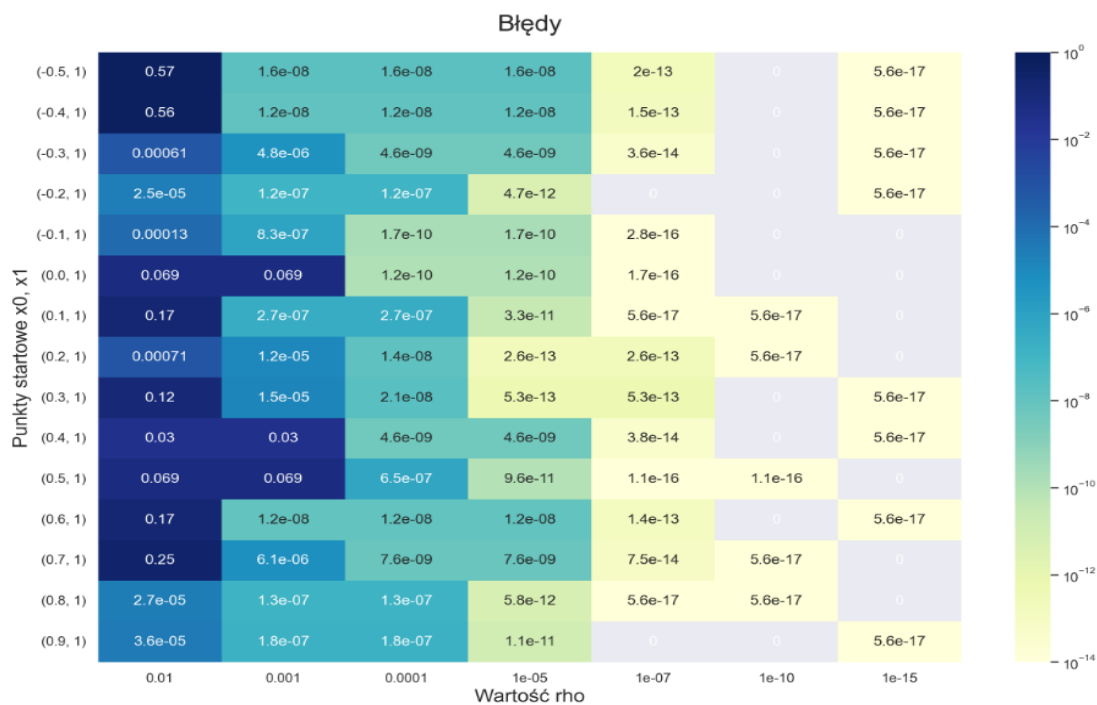
Rys. 1.4.2. Wykres, przedstawiający zależność liczby iteracji od ρ oraz punktów startowych x_0, x_1 dla metody siecznych, przy zastosowaniu 1. kryterium stopu (2.1.) cz. 2.

▪ Błędy obliczonych pierwiastków

Jak widzimy, największe błędy otrzymujemy wtedy, gdy wykonywaliśmy najmniej iteracji (dokł. gdy liczba iteracji znacznie odstawała od pozostałych liczb iteracji). Z tego powodu zawsze wtedy, gdy wykonywane były tylko 2 iteracje, otrzymywaliśmy bardzo niedokładny wynik. Znaczny wzrost dokładności przybliżenia obserwujemy dopiero dla $\rho = 10^{-7}$.



Rys. 1.4.3. Wykres błędów wyznaczonych pierwiastków w zależności od ρ oraz punktów startowych x_0, x_1 dla metody siecznych, przy zastosowaniu 1. kryterium stopu (2.1.) cz.1.



Rys. 1.4.4. Wykres błędów wyznaczonych pierwiastków w zależności od ρ oraz punktów startowych x_0, x_1 dla metody siecznych, przy zastosowaniu 1. kryterium stopu (2.1.) cz.2.

4.2.2. Kryterium 2 (2.2.)

▪ Wartości pierwiastka równania

Podobnie jak dla kryterium 1., także i teraz obserwujemy dużą niedokładność wtedy, gdy wartości ρ są duże. Niedokładność maleje wraz ze zmniejszaniem wartości ρ .

		Wartość ρ						
		10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-10}	10^{-15}
Punkty startowe x_0, x_1	-0.5 - 0.4	0,267755	0,3932	0,427556	0,43005	0,430159	0,43016	0,43016
	-0.5 - 0.3	0,267074	0,392693	0,427437	0,430041	0,430159	0,43016	0,43016
	-0.5 - 0.2	0,278183	0,373942	0,428949	0,430131	0,43016	0,43016	0,43016
	-0.5 - 0.1	0,265504	0,391525	0,427147	0,430018	0,430159	0,43016	0,43016
	-0.5 0.0	0,296936	0,389253	0,426531	0,429962	0,430158	0,43016	0,43016
	-0.5 0.1	0,268407	0,393852	0,427706	0,430061	0,430159	0,43016	0,43016
	-0.5 0.2	0,282801	0,379149	0,422878	0,429447	0,43016	0,43016	0,43016
	-0.5 0.3	0,300009	0,371762	0,428857	0,430127	0,43016	0,43016	0,43016
	-0.5 0.4	0,400001	0,400001	0,425413	0,429586	0,430154	0,43016	0,43016
	-0.5 0.5	0,499998	0,499998	0,436683	0,430268	0,430159	0,43016	0,43016
	-0.5 0.6	0,599985	0,471415	0,431613	0,430152	0,430152	0,43016	0,43016
	-0.5 0.7	0,629896	0,475391	0,432262	0,430155	0,430155	0,43016	0,43016
	-0.5 0.8	0,626176	0,469779	0,431306	0,430152	0,430152	0,43016	0,43016
	-0.5 0.9	0,608548	0,48948	0,43638	0,430326	0,430159	0,43016	0,43016
	-0.5 1.0	0,626516	0,469451	0,431261	0,430152	0,430152	0,43016	0,43016

Tabela. 1.4.3. Wartości pierwiastków równania dla metody siecznych przy zastosowaniu 2. kryterium stopu (2.2.) cz. 1.

		Wartość ρ						
		10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-10}	10^{-15}
Punkty startowe x_0, x_1	-0.5 1	0,628621	0,470895	0,431463	0,430152	0,430152	0,43016	0,43016
	-0.4 1	0,626424	0,469391	0,431253	0,430152	0,430152	0,43016	0,43016
	-0.3 1	0,619887	0,498252	0,430768	0,430768	0,430155	0,43016	0,43016
	-0.2 1	0,598492	0,481605	0,433747	0,430184	0,43016	0,43016	0,43016
	-0.1 1	0,606304	0,488023	0,435826	0,430286	0,430159	0,43016	0,43016
	0.0 1	0,5	0,5	0,436562	0,430262	0,430159	0,43016	0,43016

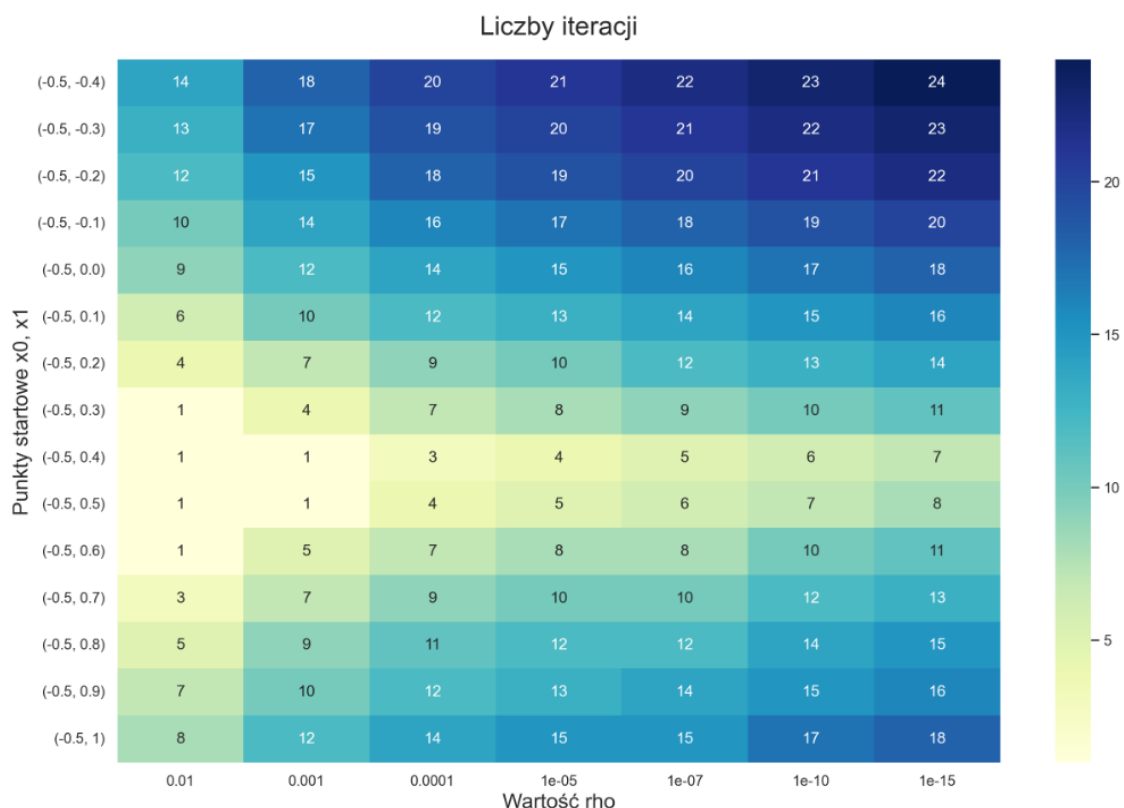
0.1	1	0,307815	0,368298	0,428072	0,430086	0,430159	0,43016	0,43016
0.2	1	0,286514	0,378951	0,422858	0,429447	0,43016	0,43016	0,43016
0.3	1	0,303303	0,376387	0,422125	0,429328	0,43016	0,43016	0,43016
0.4	1	0,400219	0,400219	0,425536	0,429613	0,430155	0,43016	0,43016
0.5	1	0,499527	0,499527	0,436386	0,430252	0,430159	0,43016	0,43016
0.6	1	0,597567	0,468661	0,431212	0,430153	0,430153	0,43016	0,43016
0.7	1	0,618527	0,500832	0,430965	0,430965	0,430154	0,43016	0,43016
0.8	1	0,598344	0,481887	0,433822	0,430187	0,43016	0,43016	0,43016
0.9	1	0,600087	0,482736	0,434076	0,430196	0,43016	0,43016	0,43016

Tabela. 1.4.4. Wartości pierwiastków równania dla metody siecznych przy zastosowaniu 2. kryterium stopu (2.2.) cz. 2.

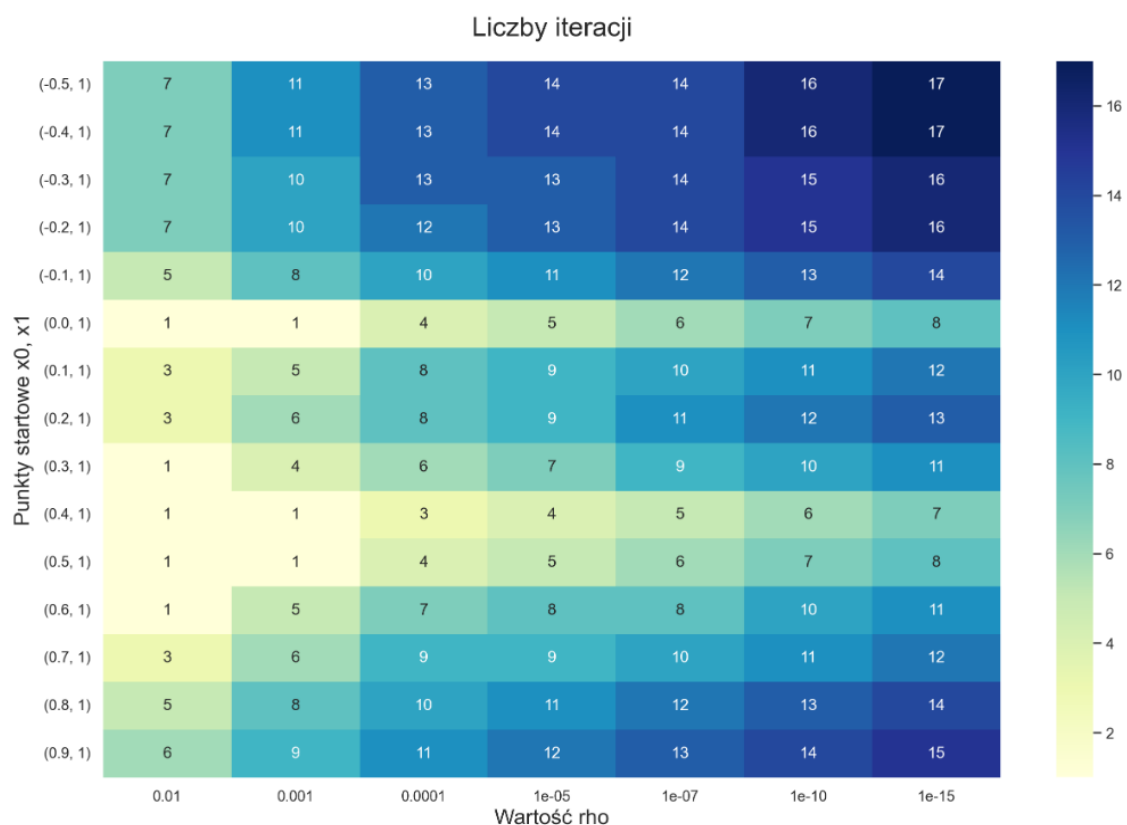
▪ Liczby iteracji

Ponownie wykorzystam wykresy zamiast tabel, ponieważ dobrze na nich widać zależność liczby iteracji od wyboru punktów startowych x_0 , x_1 oraz wartości ρ .

Jak możemy zauważyć, wykres liczby iteracji przypomina teraz wykresy, jakie obserwowaliśmy, w przypadku metody Newtona (patrz Rys. 1.3.1. i Rys. 1.3.3.). Liczba iteracji zmienia się znacznie płynniej, niż w przypadku 1. kryterium (Rys. 1.4.1. i Rys. 1.4.2.).



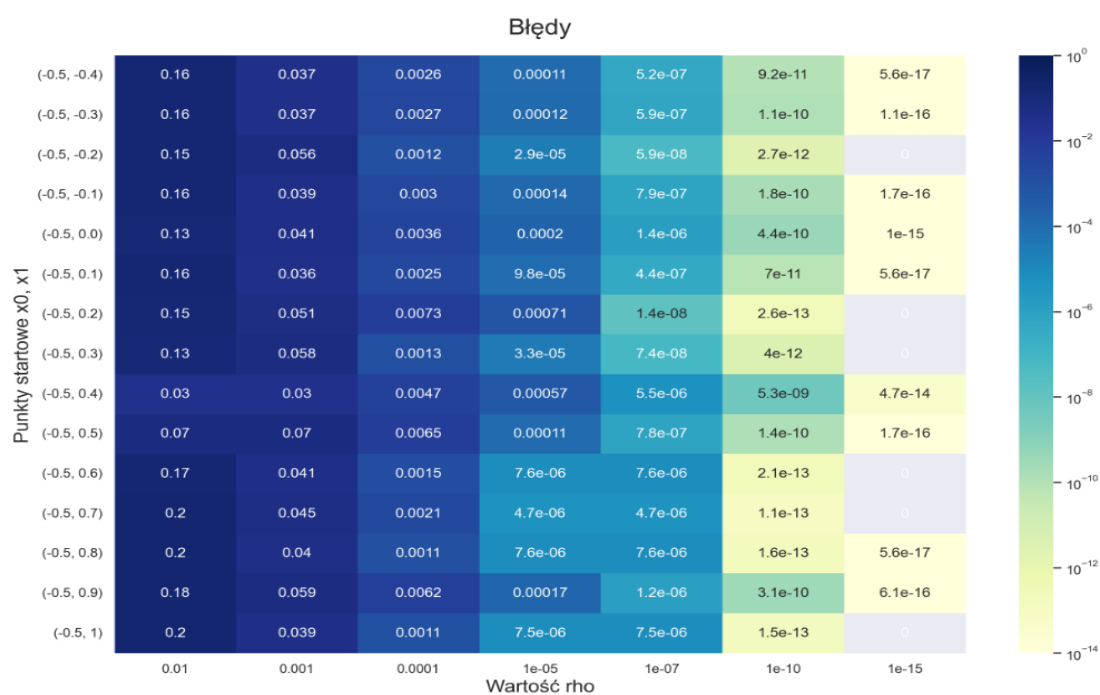
Rys. 1.4.5. Wykres, przedstawiający zależność liczby iteracji od ρ oraz punktów startowych x_0, x_1 dla metody siecznych, przy zastosowaniu 2. kryterium stopu (2.2.) cz.1.



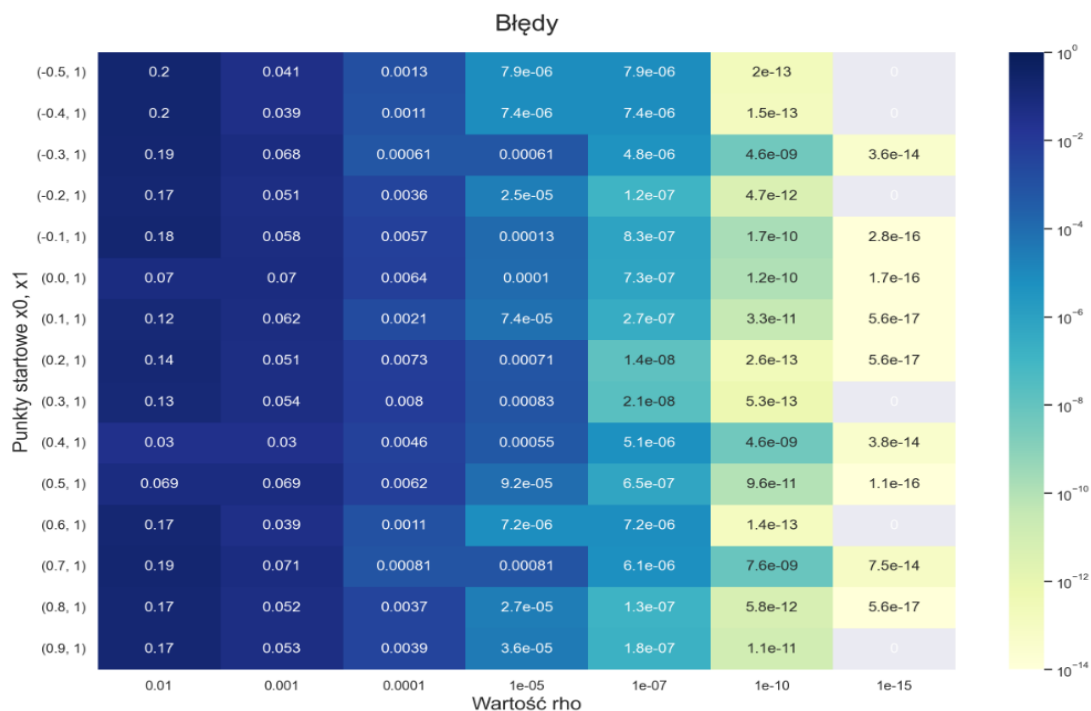
Rys. 1.4.6. Wykres, przedstawiający zależność liczby iteracji od ρ oraz punktów startowych x_0, x_1 dla metody siecznych, przy zastosowaniu 2. kryterium stopu (2.2.) cz.2.

▪ Błędy obliczonych pierwiastków

W przypadku tego kryterium, niezależnie od wyboru punktów startowych, dokładność przybliżenia zawsze rośnie wraz ze zmniejszaniem wartości ρ .



Rys. 1.4.7. Wykres błędów wyznaczonych pierwiastków w zależności od ρ oraz punktów startowych x_0, x_1 dla metody siecznych, przy zastosowaniu 2. kryterium stopu (2.2.) cz.1.



Rys. 1.4.8. Wykres błędów wyznaczonych pierwiastków w zależności od ρ oraz punktów startowych x_0, x_1 dla metody siecznych, przy zastosowaniu 2. kryterium stopu (2.2.) cz.2.

5. Wnioski

Porównując wyniki uzyskane dla obu metod, możemy dojść do następujących wniosków:

- Metoda Newtona pozwala na osiągnięcie znacznie bardziej dokładnych przybliżeń rzeczywistych wartości pierwiastków, wykonując przy tym mniejszą liczbę iteracji, niż w przypadku metody siecznych,
- Metoda siecznych ma znacznie mniej założeń i nie wymaga znajomości wartości pochodnych funkcji $f(x)$ we wszystkich punktach, które po kolei używamy jako przybliżenie rozwiązania.

III. Zadanie 2

1. Wprowadzenie

1.1. Opis problemu

Zadanie polega na rozwiązaniu układu 3 równań, przy pomocy metody Newtona. Wykorzystane zostaną różne wektory początkowe. Sprawdzane zostanie, dla których wektorów metoda nie zbiega do rozwiązania. Określona zostanie liczba różnych rozwiązań równania oraz sprawdzona zostanie zależność między otrzymywanym rozwiązaniem a użytym wektorem początkowym.

1.2. Rozwiązywany układ

$$\begin{cases} x_1^2 - 4x_2^2 + x_3^3 = 1 \\ 2x_1^2 + 4x_2^2 - 3x_3 = 0 \\ x_1^2 - 2x_2 + x_3^2 = 1 \end{cases}$$

(2.1.5.)

2. Kryteria stopu

Podobnie, jak w przypadku problemu 1-wymiarowego, rozwiązywanego w 1. zadaniu, ponownie wyznaczałem liczbę iteracji, które zostały wykonane zanim osiągnięty został warunek zwany *kryterium stopu*. Teraz także wykorzystałem dwa różne kryteria stopu, bardzo podobne do tych, co wcześniej (przekształciłem poprzednie kryteria stopu z jednowymiarowych na wielowymiarowe).

2.1. Wartości bezwzględne kolejnych współrzędnych różnicy wektorów

Pierwszym kryterium, z którego skorzystałem, polega na tym, że kolejne współrzędne różnicy dwóch ostatnich wektorów muszą być mniejsze niż kolejne współrzędne wektora P. Możemy to zapisać, przy pomocy poniższego wzoru:

$$\bigwedge_{k \in \{1,2,\dots,n\}} |X_{i+1}^{(k)} - X_i^{(k)}| < P^{(k)}$$

Gdzie (k) oznacza, że bierzemy wartość k . współrzędnej wektora. Analizowany układ równań ma tylko 3 niewiadome, dlatego w naszym przypadku $n = 3$.

(2.2.1.)

2.2. Wartości bezwzględne kolejnych współrzędnych wektora $F(X)$

Drugie kryterium polega na tym, że kolejne współrzędne wektora, który otrzymujemy jako wynik odwzorowania $F(X)$, muszą być mniejsze niż kolejne współrzędne wektora P. Możemy to zapisać, przy pomocy wzoru:

$$\bigwedge_{k \in \{1,2,\dots,n\}} |F(X_i)^{(k)}| < P^{(k)}$$

Gdzie (k) oznacza, że bierzemy wartość k . współrzędnej wektora. Ponownie, dla analizowanego układu równań, $n = 3$.

(2.2.2.)

3. Metoda Newtona dla problemu wielowymiarowego

3.1. Opis metody

3.1.1. Wykorzystywany wzór

W ogólności, problem możemy przedstawić jako:

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 - 4x_2^2 + x_3^3 - 1 \\ 2x_1^2 + 4x_2^2 - 3x_3 \\ x_1^2 - 2x_2 + x_3^2 - 1 \end{bmatrix} = 0$$

(2.3.1.)

gdzie:

X – wektor 3-wymiarowy, będący rozwiązaniem układu równań,

$F(X)$ – funkcja 3-wymiarowa.

W celu wyznaczenia kolejnych przybliżeń rozwiązania, wykorzystujemy poniższy wzór:

$$X_{i+1} = X_i - J^{-1}(X_i) \cdot F(X_i)$$

(2.3.2.)

Wzór ten jest analogiczny do wzoru dla metody Newtona dla problemu 1-wymiarowego. Ponieważ teraz mamy problem wielowymiarowy, konieczne jest wykorzystanie jacobianu macierzy $F(X)$, a nie jak wcześniej, pojedynczej pochodnej. Ponieważ jacobian jest macierzą, musimy pomnożyć macierz odwrotną do macierzy J przez $F(X_i)$.

Jacobian jest macierzą pierwszych pochodnych cząstkowych, postaci:

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1}{\delta x_2} & \frac{\delta f_1}{\delta x_3} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2}{\delta x_2} & \frac{\delta f_2}{\delta x_3} \\ \frac{\delta f_3}{\delta x_1} & \frac{\delta f_3}{\delta x_2} & \frac{\delta f_3}{\delta x_3} \end{bmatrix}$$

(2.3.3.)

W przypadku badanego układu równań, jacobian ma postać:

$$J(X) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -8x_2 & 3x_3^2 \\ 4x_1 & 8x_2 & -3 \\ 2x_1 & -2 & 2x_3 \end{bmatrix}$$

(2.3.4.)

Przekształcimy równanie (2.3.2.) do postaci macierzowego układu równań, przy pomocy której łatwiej będziemy w stanie otrzymać rozwiązanie:

$$J^{-1}(X_i) \cdot F(X_i) = X_i - X_{i+1}$$

$$F(X_i) = J(X_i) \cdot (X_i - X_{i+1}) \quad (2.3.5.)$$

Po zastąpieniu różnicy wektorów $X_i - X_{i+1}$ przez S , otrzymujemy układ równań w postaci macierzowej, gdzie S jest wektorem kolumnowym niewiadomych.

$$J(X_i) \cdot S = F(X_i) \quad (2.3.6.)$$

W celu wyznaczenia S , możemy skorzystać z algorytmu rozwiązującego układ równań w postaci macierzowej. Znając wartość wektora S , bez problemu wyznaczymy X_{i+1} , przy pomocy poniższego wzoru:

$$X_{i+1} = X_i - S \quad (2.3.7.)$$

3.1.2. Sposób postępowania

1. Wybieramy wektor początkowy X_0 ,
2. Jeżeli rozwiązanie nie jest wystarczająco dokładne, obliczamy kolejne przybliżenia wektora, będącego rozwiązaniem, korzystając ze wzoru (2.3.7.),
3. Powtarzamy powyższe kroki do momentu, w którym uzyskamy przybliżenie rzeczywistego rozwiązania o wystarczającej dokładności.

3.1.3. Spodziewane rozwiązania

Podobnie, jak w przypadku problemu 1-wymiarowego w 1. zadaniu, również teraz skorzystałem z programu *Wolfram Mathematica* do wyznaczenia spodziewanych rozwiązań układu równań. Otrzymałem 4 różne rozwiązania, które zaokrągliłem do 6 cyfr po przecinku:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1, \quad x_2 = 0.5, \quad x_3 = 1 \\ x_1 &= 1, \quad x_2 = 0.5, \quad x_3 = 1 \\ x_1 &= -0.917716, \quad x_2 = 0.084058, \quad x_3 = 0.570889 \\ x_1 &= 0.917716, \quad x_2 = 0.084058, \quad x_3 = 0.570889 \end{aligned} \quad (2.3.8.)$$

Rozwiązania te (zaokrąglone do 32 miejsc po przecinku zamiast, jak tutaj, do 6) będę traktował jako prawidłowe (wzorcowe) rozwiązania układu równań.

3.2. Sposób obliczeń

Rozwiązania wyznaczałem, przy pomocy pomocniczej funkcji, która na wejściu otrzymywała badany układ równań, wektor początkowy oraz kryterium stopu. Ustalana także była maksymalna liczba iteracji, po których osiągnięciu, iteracja była zatrzymywana (w każdym z tych przypadków, w których pętla została przerwana ze względu na osiągnięcie maksymalnej liczby iteracji, metoda nie była zbieżna do rozwiązania). Do wyznaczenia jakobianu wykorzystałem również napisaną pomocniczą funkcję, natomiast układ równań obliczałem, przy pomocy funkcji `linalg.solve` z biblioteki `numpy`.

Do reprezentacji układu równań oraz do obliczania pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu, w celu wyznaczenia jakobianu, wykorzystałem bibliotekę `sympy`.

Wektory początkowe, które wykorzystywałem do rozwiązywania układu równań, wyznaczałem w sposób rekurencyjny, zwiększając wartość kolejnych współrzędnych wektora o 0.1. Ponieważ wszystkie współrzędne każdego z wektorów, będących wzorcowym rozwiązaniem (2.3.8.), znajdują się w przedziale od -1 do 1 , jako wektory początkowe przyjmowałem wektory o współrzędnych z przedziału $[-1, 1]$. Otrzymałem łącznie 9261 różnych wektorów początkowych, dla badałem zadany układ równań (2.3.1.).

3.3. Otrzymane wyniki

3.3.1. Kryterium 1 (2.1.)

Zamieszczone w tej sekcji wyniki otrzymałem, wykorzystując 1. kryterium stopu. Ponieważ wyników jest bardzo dużo (mamy 9261 wektorów początkowych, a dla każdego wektora mamy jeszcze różne wartości P), ograniczyłem się jedynie do najbardziej istotnych.

- **Otrzymane rozwiązania**

Po wykonaniu obliczeń dla wszystkich 9261 wektorów początkowych oraz odrzuceniu przypadków, dla których metoda nie zbiega do rozwiązania, z otrzymanych wyników dla $P = (10^{-15}, 10^{-15}, 10^{-15})$ odfiltrowałem te wektory, których wszystkie współrzędne należą do przedziału $[-1, 1]$. Tym sposobem, otrzymałem 4 różne rozwiązania, które są identyczne jak rozwiązania wzorcowe (2.3.8.). Prawidłowe rozwiązania otrzymałem dla 7300 różnych wektorów początkowych.

- **Wektory początkowe, przy których metoda nie zbiega do rozwiązania**

Wektory początkowe, przy których metoda nie zbiega do rozwiązania, wyznaczyłem, ograniczając maksymalną dopuszczalną liczbę iteracji do 1000. Do tych wektorów również włączyłem te, dla których układ równań (2.3.6.) nie jest układem oznaczonym (ma nieskończenie wiele rozwiązań lub nie ma rozwiązania).

Okazuje się, że dla 441 wektorów, układ równań (2.3.6.) nie ma jednoznacznego rozwiązania rzeczywistego, natomiast dla 1520 wektorów, metoda nie jest zbieżna do rozwiązania. Sprawdziłem również, że wszystkie 441, dla których niemożliwe było wyznaczenie jednoznacznego rozwiązania układu równań, to wektory, które pierwszą współrzędną (x_1) mają równą 0, natomiast kolejne 2 współrzędne (x_1, x_2) są dowolne (oczywiście sprawdzam współrzędne z krokiem równym 0.1 na przedziale $[-1, 1]$, więc współrzędne przyjmują jedną z 21 różnych wartości ze zbioru $\{-1, -0.9, \dots, -0.1, 0, 0.1, \dots, 0.9, 1.0\}$.

Możemy zapisać w ogólności:

$$[0, x, x], \text{ gdzie } x = -1 + i \cdot 0.1, 0 \leq i \leq 20, i \in \mathbb{Z}$$

(2.3.9.)

W przypadku wektorów, dla których metoda jest rozbieżna, nie obserwujemy już zależności. Z tego powodu, poniżej umieściłem jedynie pierwsze 50 wektorów, dla których metoda jest rozbieżna.

Wybrane wektory początkowe				
[-1.0, -1.0, -0.7]	[-1.0, -1.0, -0.6]	[-1.0, -0.9, -0.8]	[-1.0, -0.9, -0.7]	[-1.0, -0.9, -0.6]
[-1.0, -0.8, -1.0]	[-1.0, -0.8, -0.9]	[-1.0, -0.8, -0.8]	[-1.0, -0.8, -0.6]	[-1.0, -0.7, -1.0]
[-1.0, -0.7, -0.9]	[-1.0, -0.7, -0.7]	[-1.0, -0.7, -0.6]	[-1.0, -0.6, -0.8]	[-1.0, -0.6, -0.7]
[-1.0, -0.6, -0.6]	[-1.0, -0.5, -0.8]	[-1.0, -0.5, -0.7]	[-1.0, -0.4, -0.9]	[-1.0, -0.4, -0.8]
[-1.0, -0.4, -0.7]	[-1.0, -0.3, -1.0]	[-1.0, 0.2, 0.2]	[-1.0, 0.2, 0.3]	[-1.0, 0.2, 0.4]
[-1.0, 0.3, -1.0]	[-1.0, 0.3, -0.9]	[-1.0, 0.3, -0.8]	[-1.0, 0.3, -0.3]	[-1.0, 0.3, -0.1]
[-1.0, 0.3, 0.0]	[-1.0, 0.3, 0.8]	[-1.0, 0.4, -1.0]	[-1.0, 0.4, -0.9]	[-1.0, 0.4, -0.7]
[-1.0, 0.4, -0.6]	[-1.0, 0.4, -0.5]	[-1.0, 0.4, -0.4]	[-1.0, 0.4, -0.2]	[-1.0, 0.4, -0.1]
[-1.0, 0.4, 0.4]	[-1.0, 0.5, -0.6]	[-1.0, 0.5, -0.5]	[-1.0, 0.5, -0.4]	[-1.0, 0.5, -0.2]
[-1.0, 0.5, -0.1]	[-1.0, 0.5, 0.3]	[-1.0, 0.6, -0.5]	[-1.0, 0.6, -0.4]	[-1.0, 0.6, -0.3]

Tabela. 2.3.1. Przykładowe wektory, dla których nie otrzymujemy rozwiązania układu równań (2.3.1.) w przypadku, gdy wykorzystujemy 1. kryterium stopu (2.1.)

▪ Wektory początkowe, które doprowadzają do odpowiednich rozwiązań

Poniżej umieściłem zestawienie, pokazujące, ile jest wektorów początkowych, dla których metoda jest zbieżna do odpowiedniego rozwiązania w zależności od wektora P. Każdy z wektorów P jest postaci $P = [\rho, \rho, \rho]$, więc w tabeli umieszczam wartości ρ odpowiadające poszczególnym wektorom P.

Rozwiązanie \ ρ	Liczba wektorów początkowych						
	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-10}	10^{-15}
[-1, 0.5, 1]	240	673	710	710	710	710	710
[1, 0.5, 1]	240	673	710	710	710	710	710
[0.917716, 0.084058, 0.570889]	580	2674	2940	2940	2940	2940	2940
[-0.917716, 0.084058, 0.570889]	580	2674	2940	2940	2940	2940	2940

Tabela. 2.3.2. Liczby wektorów początkowych, dla których metoda jest zbieżna do rozwiązania, przy zastosowaniu 1. kryterium stopu z wykorzystaniem wektora P o współrzędnych ρ .

Jak widzimy, już dla $P = [10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4}]$ mamy tyle samo wektorów początkowych, dla których otrzymamy prawidłowe rozwiązania, ile mamy dla $P = [10^{-15}, 10^{-15}, 10^{-15}]$.

Ponieważ wektorów początkowych jest bardzo dużo, poniżej umieszczam jedynie po kilka początkowych i kilka końcowych wektorów spośród wszystkich. Wektory, umieszczone w tabeli, są wektorami wyznaczonymi dla 1. kryterium, gdy $P = [10^{-15}, 10^{-15}, 10^{-15}]$.

Wybrane wektory początkowe dla rozwiązania $[-1, 0.5, 1]$				
$[-1.0, -0.7, -0.5]$	$[-1.0, 0.2, -0.9]$	$[-1.0, 0.3, -0.7]$	$[-1.0, 0.3, 0.1]$	$[-1.0, 0.3, 0.5]$
$[-1.0, 0.3, 0.6]$	$[-1.0, 0.3, 0.7]$	$[-1.0, 0.4, 0.0]$	$[-1.0, 0.4, 0.1]$	$[-1.0, 0.4, 0.5]$
$[-1.0, 0.4, 0.6]$	$[-1.0, 0.4, 0.7]$	$[-1.0, 0.4, 0.8]$	$[-1.0, 0.4, 0.9]$	$[-1.0, 0.4, 1.0]$
$[-1.0, 0.5, 0.0]$	$[-1.0, 0.5, 0.1]$	$[-1.0, 0.5, 0.4]$	$[-1.0, 0.5, 0.5]$	$[-1.0, 0.5, 0.6]$
$[-1.0, 0.5, 0.7]$	$[-1.0, 0.5, 0.8]$	$[-1.0, 0.5, 0.9]$	$[-1.0, 0.5, 1.0]$	$[-1.0, 0.6, 0.0]$
...
$[-0.1, 0.9, 0.7]$	$[-0.1, 0.9, 0.8]$	$[-0.1, 0.9, 0.9]$	$[-0.1, 0.9, 1.0]$	$[-0.1, 1.0, 0.4]$
$[-0.1, 1.0, 0.5]$	$[-0.1, 1.0, 0.6]$	$[-0.1, 1.0, 0.7]$	$[-0.1, 1.0, 0.8]$	$[-0.1, 1.0, 0.9]$
$[-0.1, 1.0, 1.0]$	$[0.1, 0.2, -0.9]$	$[0.1, 0.3, -0.7]$	$[0.1, 0.8, -0.8]$	$[0.2, 0.2, -0.9]$
$[0.2, 0.3, -0.7]$	$[0.3, 0.2, -0.9]$	$[0.3, 0.3, -0.7]$	$[0.4, 0.2, -0.9]$	$[0.4, 0.3, -0.7]$
$[0.5, 0.2, -0.9]$	$[0.5, 0.8, -0.8]$	$[0.8, 0.8, -0.8]$	$[0.9, 0.8, -0.8]$	$[1.0, 0.8, -0.8]$

Tabela. 2.3.3. Przykładowe wektory początkowe, dla których metoda jest zbieżna do $[-1, 0.5, 1]$, przy zastosowaniu 1. kryterium stopu z wykorzystaniem wektora $P = [10^{15}, 10^{15}, 10^{15}]$.

Wybrane wektory początkowe dla rozwiązania $[1, 0.5, 1]$				
$[-1.0, 0.8, -0.8]$	$[-0.9, 0.8, -0.8]$	$[-0.8, 0.8, -0.8]$	$[-0.5, 0.2, -0.9]$	$[-0.5, 0.8, -0.8]$
$[-0.4, 0.2, -0.9]$	$[-0.4, 0.3, -0.7]$	$[-0.3, 0.2, -0.9]$	$[-0.3, 0.3, -0.7]$	$[-0.2, 0.2, -0.9]$
$[-0.2, 0.3, -0.7]$	$[-0.1, 0.2, -0.9]$	$[-0.1, 0.3, -0.7]$	$[-0.1, 0.8, -0.8]$	$[0.1, -0.7, -0.5]$
$[0.1, 0.3, 0.1]$	$[0.1, 0.3, 0.5]$	$[0.1, 0.3, 0.6]$	$[0.1, 0.3, 0.7]$	$[0.1, 0.4, 0.0]$
$[0.1, 0.4, 0.1]$	$[0.1, 0.4, 0.5]$	$[0.1, 0.4, 0.6]$	$[0.1, 0.4, 0.7]$	$[0.1, 0.4, 0.8]$
...
$[1.0, 0.7, 1.0]$	$[1.0, 0.8, 0.1]$	$[1.0, 0.8, 0.3]$	$[1.0, 0.8, 0.4]$	$[1.0, 0.8, 0.5]$
$[1.0, 0.8, 0.6]$	$[1.0, 0.8, 0.7]$	$[1.0, 0.8, 0.8]$	$[1.0, 0.8, 0.9]$	$[1.0, 0.8, 1.0]$
$[1.0, 0.9, 0.1]$	$[1.0, 0.9, 0.4]$	$[1.0, 0.9, 0.5]$	$[1.0, 0.9, 0.6]$	$[1.0, 0.9, 0.7]$
$[1.0, 0.9, 0.8]$	$[1.0, 0.9, 0.9]$	$[1.0, 0.9, 1.0]$	$[1.0, 1.0, 0.4]$	$[1.0, 1.0, 0.5]$
$[1.0, 1.0, 0.6]$	$[1.0, 1.0, 0.7]$	$[1.0, 1.0, 0.8]$	$[1.0, 1.0, 0.9]$	$[1.0, 1.0, 1.0]$

Tabela. 2.3.4. Przykładowe wektory początkowe, dla których metoda jest zbieżna do $[1, 0.5, 1]$, przy zastosowaniu 1. kryterium stopu z wykorzystaniem wektora $P = [10^{15}, 10^{15}, 10^{15}]$.

Wybrane wektory początkowe dla rozwiązania [0.917716, 0.084058, 0.570889]				
[-1.0, -1.0, -0.8]	[-1.0, -0.9, -1.0]	[-1.0, -0.9, -0.9]	[-1.0, -0.8, -0.7]	[-1.0, -0.7, -0.8]
[-1.0, -0.5, -1.0]	[-1.0, -0.5, -0.9]	[-1.0, 0.3, -0.2]	[-1.0, 0.3, 0.4]	[-1.0, 0.4, -0.8]
[-1.0, 0.6, -1.0]	[-1.0, 0.6, -0.9]	[-1.0, 0.6, -0.8]	[-1.0, 0.6, -0.7]	[-1.0, 0.6, -0.6]
[-1.0, 0.7, -1.0]	[-1.0, 0.7, -0.9]	[-1.0, 0.7, -0.6]	[-1.0, 0.7, -0.5]	[-1.0, 0.8, -1.0]
[-1.0, 0.8, -0.9]	[-1.0, 0.8, -0.6]	[-1.0, 0.8, 0.2]	[-1.0, 0.9, -1.0]	[-1.0, 0.9, -0.7]
...
[1.0, 0.3, -0.5]	[1.0, 0.3, -0.4]	[1.0, 0.3, 0.2]	[1.0, 0.3, 0.3]	[1.0, 0.3, 0.9]
[1.0, 0.3, 1.0]	[1.0, 0.4, -0.3]	[1.0, 0.4, 0.2]	[1.0, 0.4, 0.3]	[1.0, 0.5, -1.0]
[1.0, 0.5, -0.9]	[1.0, 0.5, -0.8]	[1.0, 0.5, -0.7]	[1.0, 0.5, -0.3]	[1.0, 0.5, 0.2]
[1.0, 0.7, -0.7]	[1.0, 0.8, -0.5]	[1.0, 0.8, 0.0]	[1.0, 0.9, -0.8]	[1.0, 0.9, -0.4]
[1.0, 0.9, 0.3]	[1.0, 1.0, -0.8]	[1.0, 1.0, -0.4]	[1.0, 1.0, 0.1]	[1.0, 1.0, 0.3]

Tabela. 2.3.5. Przykładowe wektory początkowe, dla których metoda jest zbieżna do [0.917716, 0.084058, 0.570889], przy zastosowaniu 1. kryterium stopu z wykorzystaniem wektora $P = [10^{15}, 10^{15}, 10^{15}]$.

Wybrane wektory początkowe dla rozwiązania [-0.917716, 0.084058, 0.570889]				
[-1.0, -1.0, -1.0]	[-1.0, -1.0, -0.9]	[-1.0, -1.0, -0.5]	[-1.0, -1.0, -0.4]	[-1.0, -1.0, -0.3]
[-1.0, -1.0, -0.2]	[-1.0, -1.0, -0.1]	[-1.0, -1.0, 0.0]	[-1.0, -1.0, 0.1]	[-1.0, -1.0, 0.2]
[-1.0, -1.0, 0.3]	[-1.0, -1.0, 0.4]	[-1.0, -1.0, 0.5]	[-1.0, -1.0, 0.6]	[-1.0, -1.0, 0.7]
[-1.0, -1.0, 0.8]	[-1.0, -1.0, 0.9]	[-1.0, -1.0, 1.0]	[-1.0, -0.9, -0.5]	[-1.0, -0.9, -0.4]
[-1.0, -0.9, -0.3]	[-1.0, -0.9, -0.2]	[-1.0, -0.9, -0.1]	[-1.0, -0.9, 0.0]	[-1.0, -0.9, 0.1]
...
[1.0, -0.7, -0.8]	[1.0, -0.5, -1.0]	[1.0, -0.5, -0.9]	[1.0, 0.3, -0.2]	[1.0, 0.3, 0.4]
[1.0, 0.4, -0.8]	[1.0, 0.6, -1.0]	[1.0, 0.6, -0.9]	[1.0, 0.6, -0.8]	[1.0, 0.6, -0.7]
[1.0, 0.6, -0.6]	[1.0, 0.7, -1.0]	[1.0, 0.7, -0.9]	[1.0, 0.7, -0.6]	[1.0, 0.7, -0.5]
[1.0, 0.8, -1.0]	[1.0, 0.8, -0.9]	[1.0, 0.8, -0.6]	[1.0, 0.8, 0.2]	[1.0, 0.9, -1.0]
[1.0, 0.9, -0.7]	[1.0, 0.9, -0.5]	[1.0, 0.9, 0.0]	[1.0, 1.0, -0.7]	[1.0, 1.0, -0.5]

Tabela. 2.3.6. Przykładowe wektory początkowe, dla których metoda jest zbieżna do [-0.917716, 0.084058, 0.570889], przy zastosowaniu 1. kryterium stopu z wykorzystaniem wektora $P = [10^{15}, 10^{15}, 10^{15}]$.

3.3.2. Kryterium 2 (2.2.)

Zamieszczone w tej sekcji wyniki otrzymałem, wykorzystując 2. kryterium stopu. Podobnie jak wcześniej, ograniczam się jedynie najbardziej istotnych wyników.

▪ Otrzymane rozwiązania

Postępując analogicznie, jak w przypadku 1. kryterium stopu, wyznaczyłem rozwiązania układu równań. Ponownie uzyskałem takie same rozwiązania, jak wcześniej. Ponownie uzyskałem 7300 różnych wektorów początkowych, dla których metoda jest zbieżna do rozwiązania.

▪ Wektory początkowe, przy których metoda nie zbiega do rozwiązania

W celu wyznaczenia wektorów początkowych, dla których metoda nie zbiega do rozwiązania, postępowalem analogicznie, jak w przypadku 1. kryterium stopu. Tym razem ponownie uzyskałem takie same wyniki. Ponieważ wyniki są takie same, nie zamieszczam osobno tabeli w tym podpunkcie, dlatego, że wygląda on tak samo, jak tabela Tabela. 2.3.1.

▪ Wektory początkowe, które doprowadzają do odpowiednich rozwiązań

W tym przypadku postępowanie jest również analogiczne jak wcześniej. Poniżej umieściłem tabelę, która pokazuje, ile jest wektorów początkowych, dla których metoda jest zbieżna. Wektor P dobierałem w taki sam sposób jak w kryterium 1.

Rozwiązanie \ ρ	Liczba wektorów początkowych						
	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-10}	10^{-15}
$[-1, 0.5, 1]$	1	94	349	615	710	710	710
$[1, 0.5, 1]$	1	94	349	615	710	710	710
$[0.917716, 0.084058, 0.570889]$	0	184	1313	2315	2940	2940	2940
$[-0.917716, 0.084058, 0.570889]$	0	184	1313	2315	2940	2940	2940

Tabela. 2.3.7. Liczby wektorów początkowych, dla których metoda jest zbieżna do rozwiązania, przy zastosowaniu 2. kryterium stopu z wykorzystaniem wektora P o współrzędnych ρ .

Jak możemy zauważyć, w przypadku tego kryterium, dla dużych wartości ρ otrzymujemy bardzo mało wektorów początkowych, dla których metoda jest zbieżna. Widzimy więc, że 2. kryterium stopu powoduje, że uzyskujemy mniej dokładne wyniki niż w przypadku 1. kryterium.

Analogicznie, jak wcześniej, wektory, umieszczone w tabeli, są wektorami wyznaczonymi dla 2. kryterium, gdy $P = [10^{-15}, 10^{-15}, 10^{-15}]$.

Wybrane wektory początkowe dla rozwiązania $[-1, 0.5, 1]$				
$[-1.0, -0.7, -0.5]$	$[-1.0, 0.2, -0.9]$	$[-1.0, 0.3, -0.7]$	$[-1.0, 0.3, 0.1]$	$[-1.0, 0.3, 0.5]$
$[-1.0, 0.3, 0.6]$	$[-1.0, 0.3, 0.7]$	$[-1.0, 0.4, 0.0]$	$[-1.0, 0.4, 0.1]$	$[-1.0, 0.4, 0.5]$
$[-1.0, 0.4, 0.6]$	$[-1.0, 0.4, 0.7]$	$[-1.0, 0.4, 0.8]$	$[-1.0, 0.4, 0.9]$	$[-1.0, 0.4, 1.0]$

$[-1.0, 0.5, 0.0]$	$[-1.0, 0.5, 0.1]$	$[-1.0, 0.5, 0.4]$	$[-1.0, 0.5, 0.5]$	$[-1.0, 0.5, 0.6]$
$[-1.0, 0.5, 0.7]$	$[-1.0, 0.5, 0.8]$	$[-1.0, 0.5, 0.9]$	$[-1.0, 0.5, 1.0]$	$[-1.0, 0.6, 0.0]$
...
$[-0.1, 0.9, 0.7]$	$[-0.1, 0.9, 0.8]$	$[-0.1, 0.9, 0.9]$	$[-0.1, 0.9, 1.0]$	$[-0.1, 1.0, 0.4]$
$[-0.1, 1.0, 0.5]$	$[-0.1, 1.0, 0.6]$	$[-0.1, 1.0, 0.7]$	$[-0.1, 1.0, 0.8]$	$[-0.1, 1.0, 0.9]$
$[-0.1, 1.0, 1.0]$	$[0.1, 0.2, -0.9]$	$[0.1, 0.3, -0.7]$	$[0.1, 0.8, -0.8]$	$[0.2, 0.2, -0.9]$
$[0.2, 0.3, -0.7]$	$[0.3, 0.2, -0.9]$	$[0.3, 0.3, -0.7]$	$[0.4, 0.2, -0.9]$	$[0.4, 0.3, -0.7]$
$[0.5, 0.2, -0.9]$	$[0.5, 0.8, -0.8]$	$[0.8, 0.8, -0.8]$	$[0.9, 0.8, -0.8]$	$[1.0, 0.8, -0.8]$

Tabela. 2.3.8. Przykładowe wektory początkowe, dla których metoda jest zbieżna do $[-1, 0.5, 1]$, przy zastosowaniu 2. kryterium stopu z wykorzystaniem wektora $P = [10^{15}, 10^{15}, 10^{15}]$.

Wybrane wektory początkowe dla rozwiązania $[1, 0.5, 1]$				
$[-1.0, 0.8, -0.8]$	$[-0.9, 0.8, -0.8]$	$[-0.8, 0.8, -0.8]$	$[-0.5, 0.2, -0.9]$	$[-0.5, 0.8, -0.8]$
$[-0.4, 0.2, -0.9]$	$[-0.4, 0.3, -0.7]$	$[-0.3, 0.2, -0.9]$	$[-0.3, 0.3, -0.7]$	$[-0.2, 0.2, -0.9]$
$[-0.2, 0.3, -0.7]$	$[-0.1, 0.2, -0.9]$	$[-0.1, 0.3, -0.7]$	$[-0.1, 0.8, -0.8]$	$[0.1, -0.7, -0.5]$
$[0.1, 0.3, 0.1]$	$[0.1, 0.3, 0.5]$	$[0.1, 0.3, 0.6]$	$[0.1, 0.3, 0.7]$	$[0.1, 0.4, 0.0]$
$[0.1, 0.4, 0.1]$	$[0.1, 0.4, 0.5]$	$[0.1, 0.4, 0.6]$	$[0.1, 0.4, 0.7]$	$[0.1, 0.4, 0.8]$
...
$[1.0, 0.7, 1.0]$	$[1.0, 0.8, 0.1]$	$[1.0, 0.8, 0.3]$	$[1.0, 0.8, 0.4]$	$[1.0, 0.8, 0.5]$
$[1.0, 0.8, 0.6]$	$[1.0, 0.8, 0.7]$	$[1.0, 0.8, 0.8]$	$[1.0, 0.8, 0.9]$	$[1.0, 0.8, 1.0]$
$[1.0, 0.9, 0.1]$	$[1.0, 0.9, 0.4]$	$[1.0, 0.9, 0.5]$	$[1.0, 0.9, 0.6]$	$[1.0, 0.9, 0.7]$
$[1.0, 0.9, 0.8]$	$[1.0, 0.9, 0.9]$	$[1.0, 0.9, 1.0]$	$[1.0, 1.0, 0.4]$	$[1.0, 1.0, 0.5]$
$[1.0, 1.0, 0.6]$	$[1.0, 1.0, 0.7]$	$[1.0, 1.0, 0.8]$	$[1.0, 1.0, 0.9]$	$[1.0, 1.0, 1.0]$

Tabela. 2.3.9. Przykładowe wektory początkowe, dla których metoda jest zbieżna do $[1, 0.5, 1]$, przy zastosowaniu 2. kryterium stopu z wykorzystaniem wektora $P = [10^{15}, 10^{15}, 10^{15}]$.

Wybrane wektory początkowe dla rozwiązania $[0.917716, 0.084058, 0.570889]$				
$[-1.0, -1.0, -0.8]$	$[-1.0, -0.9, -1.0]$	$[-1.0, -0.9, -0.9]$	$[-1.0, -0.8, -0.7]$	$[-1.0, -0.7, -0.8]$
$[-1.0, -0.5, -1.0]$	$[-1.0, -0.5, -0.9]$	$[-1.0, 0.3, -0.2]$	$[-1.0, 0.3, 0.4]$	$[-1.0, 0.4, -0.8]$
$[-1.0, 0.6, -1.0]$	$[-1.0, 0.6, -0.9]$	$[-1.0, 0.6, -0.8]$	$[-1.0, 0.6, -0.7]$	$[-1.0, 0.6, -0.6]$
$[-1.0, 0.7, -1.0]$	$[-1.0, 0.7, -0.9]$	$[-1.0, 0.7, -0.6]$	$[-1.0, 0.7, -0.5]$	$[-1.0, 0.8, -1.0]$
$[-1.0, 0.8, -0.9]$	$[-1.0, 0.8, -0.6]$	$[-1.0, 0.8, 0.2]$	$[-1.0, 0.9, -1.0]$	$[-1.0, 0.9, -0.7]$

...
[1.0, 0.3, -0.5]	[1.0, 0.3, -0.4]	[1.0, 0.3, 0.2]	[1.0, 0.3, 0.3]	[1.0, 0.3, 0.9]
[1.0, 0.3, 1.0]	[1.0, 0.4, -0.3]	[1.0, 0.4, 0.2]	[1.0, 0.4, 0.3]	[1.0, 0.5, -1.0]
[1.0, 0.5, -0.9]	[1.0, 0.5, -0.8]	[1.0, 0.5, -0.7]	[1.0, 0.5, -0.3]	[1.0, 0.5, 0.2]
[1.0, 0.7, -0.7]	[1.0, 0.8, -0.5]	[1.0, 0.8, 0.0]	[1.0, 0.9, -0.8]	[1.0, 0.9, -0.4]
[1.0, 0.9, 0.3]	[1.0, 1.0, -0.8]	[1.0, 1.0, -0.4]	[1.0, 1.0, 0.1]	[1.0, 1.0, 0.3]

Tabela. 2.3.10. Przykładowe wektory początkowe, dla których metoda jest zbieżna do $[0.917716, 0.084058, 0.570889]$, przy zastosowaniu 2. kryterium stopu z wykorzystaniem wektora $P = [10^{15}, 10^{15}, 10^{15}]$.

Wybrane wektory początkowe dla rozwiązania $[-0.917716, 0.084058, 0.570889]$				
[-1.0, -1.0, -1.0]	[-1.0, -1.0, -0.9]	[-1.0, -1.0, -0.5]	[-1.0, -1.0, -0.4]	[-1.0, -1.0, -0.3]
[-1.0, -1.0, -0.2]	[-1.0, -1.0, -0.1]	[-1.0, -1.0, 0.0]	[-1.0, -1.0, 0.1]	[-1.0, -1.0, 0.2]
[-1.0, -1.0, 0.3]	[-1.0, -1.0, 0.4]	[-1.0, -1.0, 0.5]	[-1.0, -1.0, 0.6]	[-1.0, -1.0, 0.7]
[-1.0, -1.0, 0.8]	[-1.0, -1.0, 0.9]	[-1.0, -1.0, 1.0]	[-1.0, -0.9, -0.5]	[-1.0, -0.9, -0.4]
[-1.0, -0.9, -0.3]	[-1.0, -0.9, -0.2]	[-1.0, -0.9, -0.1]	[-1.0, -0.9, 0.0]	[-1.0, -0.9, 0.1]
...
[1.0, -0.7, -0.8]	[1.0, -0.5, -1.0]	[1.0, -0.5, -0.9]	[1.0, 0.3, -0.2]	[1.0, 0.3, 0.4]
[1.0, 0.4, -0.8]	[1.0, 0.6, -1.0]	[1.0, 0.6, -0.9]	[1.0, 0.6, -0.8]	[1.0, 0.6, -0.7]
[1.0, 0.6, -0.6]	[1.0, 0.7, -1.0]	[1.0, 0.7, -0.9]	[1.0, 0.7, -0.6]	[1.0, 0.7, -0.5]
[1.0, 0.8, -1.0]	[1.0, 0.8, -0.9]	[1.0, 0.8, -0.6]	[1.0, 0.8, 0.2]	[1.0, 0.9, -1.0]
[1.0, 0.9, -0.7]	[1.0, 0.9, -0.5]	[1.0, 0.9, 0.0]	[1.0, 1.0, -0.7]	[1.0, 1.0, -0.5]

Tabela. 2.3.11. Przykładowe wektory początkowe, dla których metoda jest zbieżna do $[-0.917716, 0.084058, 0.570889]$, przy zastosowaniu 2. kryterium stopu z wykorzystaniem wektora $P = [10^{15}, 10^{15}, 10^{15}]$.

3.4. Wnioski

- Metoda Newtona pozwala na obliczenie dokładnych rozwiązań układu równań, nie wykonując przy tym dużej liczby iteracji,
- Trzeba mieć na uwadze, żeby odpowiednio dobrać wektor początkowy, ponieważ dość często zdarza się, że metoda nie jest zbieżna do rozwiązania.