

Zadanie 4b

Aproksymacja

Aproksymacja średniokwadratowa
wielomianami trygonometrycznymi

Mateusz Łopaciński

1. Dane techniczne sprzętu

Obliczenia zostały wykonane na komputerze o następujących parametrach:

- Procesor: AMD Ryzen 7 4700U (8 rdzeni, 8 wątków),
- Pamięć RAM: 16 GB 3200 MHz

2. Aproksymowana funkcja

2.1. Wzór funkcji

Aproksymację przeprowadziłem dla poniższej funkcji

$$F(x) = e^{-k \cdot \sin(mx)} + k \cdot \sin(mx) - 1 \quad (2.1.1.)$$

gdzie

$$k = 2$$

$$m = 2$$

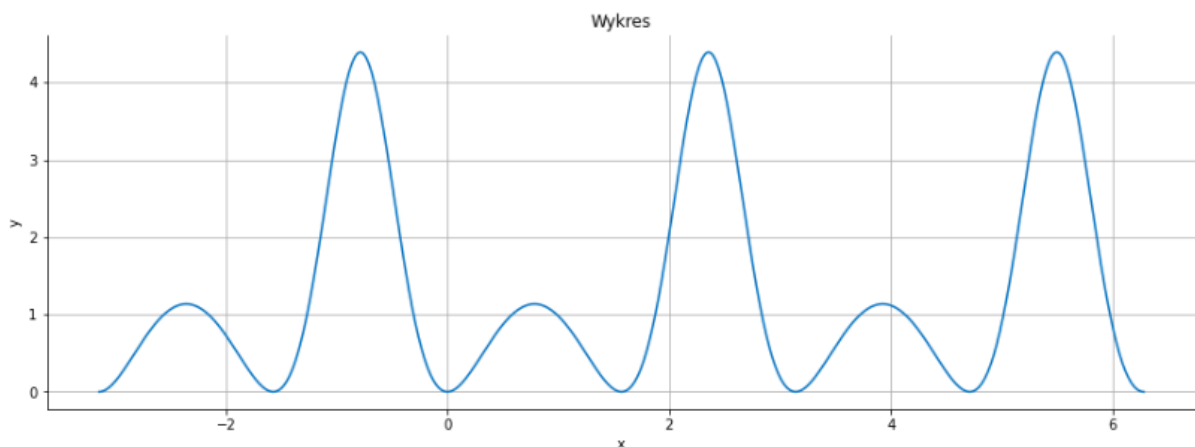
(2.1.2.)

na przedziale

$$x \in [-\pi, 2\pi]$$

(2.1.3.)

2.2. Wykres funkcji



Rys. 2.2.1. Wykres badanej funkcji

3. Opis aproksymacji średniokwadratowej wielomianami trygonometrycznymi

3.1. Szukanie wielomianu aproksymacyjnego

Szukamy wielomianu uogólnionego następującej postaci:

$$f(x) = \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(x) \quad (3.1.1.)$$

Zakładamy, że aproksymowana funkcja $F(x)$ jest funkcją ciągłą, okresową o okresie podstawowym równym 2π oraz, że znane są jej wartości w węzłach x_0, x_1, \dots, x_{n-1} , będących punktami odcinka $[-\pi, \pi]$, określonymi wzorem:

$$x_i = \frac{2\pi}{n-1}i - \pi$$

dla $i = 0, 1, \dots, n-1$

(3.1.2.)

Z przyjętych założeń wynika, że funkcja spełnia warunki Dirichleta:

- 1) $F: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona,
- 2) Funkcja F jest przedziałami monotoniczna na przedziale $[-\pi, \pi]$,
- 3) Funkcja F jest ciągła na przedziale $[-\pi, \pi]$,
- 4) Zachodzi warunek $F(-\pi) = F(\pi) = \frac{\lim_{x \rightarrow -\pi+} F(x) + \lim_{x \rightarrow \pi-} F(x)}{2}$

Zatem funkcja $F(x)$ jest rozwijalna w szereg trygonometryczny Fouriera na przedziale $[-\pi, \pi]$. Wówczas zachodzi:

$$\bigwedge_{x \in [-\pi, \pi]} F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(kx) dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin(kx) dx \end{aligned}$$

(3.1.3.)

Jako ciąg funkcji bazowych (bazę trygonometryczną) przyjmujemy:

$$(\varphi_k(x)) = 1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \dots, \sin(mx), \cos(mx)$$

(3.1.4.)

Wówczas, kolejne elementy bazy są do siebie ortogonalne, tj.:

$$\varphi_i(x) \cdot \varphi_{i+1}(x) = 0$$

dla $i = 0, 1, \dots, n$

(3.1.5.)

Ponieważ elementy bazy są do siebie ortogonalne, otrzymamy układ dobrze uwarunkowany, którego policzenie będzie bardzo łatwe, dlatego, że niezerowe elementy znajdują się jedynie na głównej przekątnej macierzy współczynników (nie musimy więc obliczać układu równań, bo od razu dostaniemy szukane wartości).

Ponieważ wzór (3.1.3) jest określony dla problemu ciągłego, a my mamy problem dyskretny (węzły aproksymacyjne, będące pojedynczymi punktami), konieczne jest przekształcenie tego wzoru. Po przekształceniu otrzymujemy wzór na wielomian aproksymacyjny m . stopnia:

$$W_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx))$$

gdzie:

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \cos(kx_i)$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \sin(kx_i)$$

(3.1.6.)

Przy pomocy powyższych wzorów, możemy wyznaczyć wielomian aproksymacyjny. Aby problem był dobrze uwarunkowany (żeby liczba funkcji bazowych nie przekraczała liczby węzłów aproksymacyjnych), stopień wielomianu m powinien wynosić:

$$m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

(3.1.7.)

3.2. Przekształcenie przedziału $[-\pi, 2\pi]$ na $[-\pi, \pi]$

Ponieważ mamy zadaną funkcję na przedziale $[-\pi, 2\pi]$ (na którym funkcja spełnia warunki Dirichleta), abyśmy mogli skorzystać ze wzoru (3.1.6.), musimy przeskalować ten przedział na $[-\pi, \pi]$. W tym celu, konieczne jest przeskalowanie węzłów aproksymacyjnych z wykorzystaniem wzoru:

$$x'_i = \frac{x_i - (-\pi)}{2\pi - (-\pi)} \cdot (\pi - (-\pi)) + (-\pi) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\pi$$

gdzie

x_i – węzeł aproksymacji przed przekształceniem,

x'_i – węzeł aproksymacji po przekształceniu,

(3.2.1.)

W ogólności, dla przekształcenia z dowolnego przedziału $[a, b]$ na dowolny przedział $[c, d]$, możemy zapisać wzór:

$$x'_i = \frac{x_i - a}{b - a} \cdot (d - c) + c$$

(3.2.2.)

Przy pomocy przeskalowanych węzłów oraz wzorów (3.1.6.) wyznaczamy trygonometryczny wielomian aproksymacyjny. Musimy pamiętać również o tym, że licząc wartość wielomianu dla dowolnego x , musimy również przeskalować wartość x w taki sam sposób, w jaki skalowaliśmy wartości węzłów, korzystając ze wzoru (3.2.2.).

4. Wyznaczanie dokładności przybliżenia funkcji przez funkcję aproksymującą

W celu wyznaczenia dokładności, z jaką funkcja aproksymująca przybliża zadaną funkcję $F(x)$ (daną wzorem (2.1.1.)), skorzystałem z wymienionych niżej wskaźników, pozwalających na określenie dokładności. Pomiar dokładności przeprowadzałem,

porównując wartości aproksymowanej funkcji z wartościami wyznaczonego aproksymującego wielomianu algebraicznego dla 1000 równoodległych punktów, rozmieszczonych na całym przedziale $x \in [-\pi, 2\pi]$.

4.1. Norma z różnicy wartości aproksymowanej funkcji i funkcji aproksymującej

Norma z różnicy między wartościami aproksymowanej funkcji $F(x)$ (2.1.1.) a wartościami wyznaczonej funkcji aproksymującej $f(x)$.

$$||F(x) - f(x)|| \quad (4.1.1)$$

Powyższy wzór wykorzystałem przy rysowaniu wykresów błędów aproksymacji.

4.2. Największa różnica między wartościami aproksymowanej funkcji i funkcji aproksymującej

Największa różnica między wartością przyjmowaną przez aproksymowaną funkcję $F(x)$ a wartością funkcji aproksymującej $f(x)$.

$$\max_k \{|F(x_k) - f(x_k)|\}$$

gdzie $k \in \{1, 2, \dots, 1000\}$ – ponieważ przeprowadzam pomiar dokładności dla 1000 punktów na przedziale $x \in [-\pi, 2\pi]$

(4.2.1.)

4.3. Suma kwadratów różnic aproksymowanej funkcji i funkcji aproksymującej

Suma kwadratów różnic między wartościami funkcji $F(x)$ a wartościami aproksymującej funkcji $f(x)$.

$$\sum_{i=1}^N (F(x_i) - f(x_i))^2$$

(4.3.1.)

5. Wstępne obserwacje

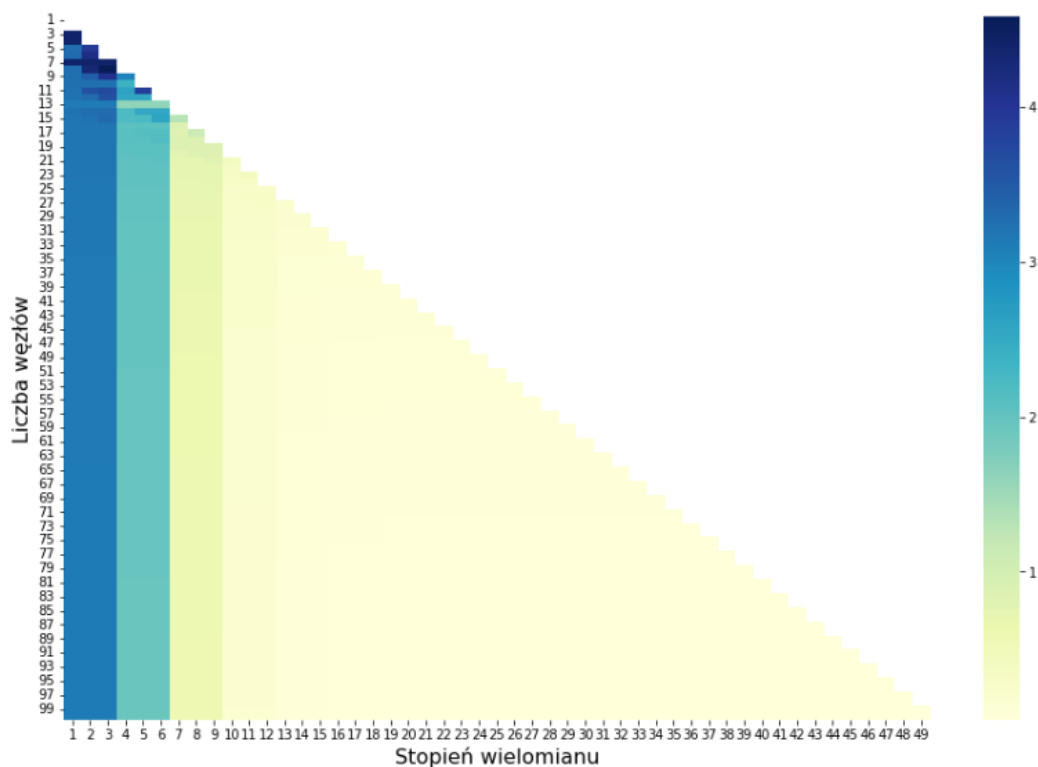
W tym podpunkcie umieściłem wykresy, prezentujące w sposób graficzny wartość błędu przybliżenia aproksymowanej funkcji przez wielomian aproksymujący, w zależności od liczby węzłów aproksymacyjnych i stopnia wielomianu. Wyzaczyłem błędy dla wszystkich wielomianów, dla których liczba węzłów $n \leq 100$ oraz stopień wielomianu $m \leq 49$, pamiętając o tym, że powinien zachodzić warunek $m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.

5.1. Wykresy błędów dla $n \leq 100$ oraz $m \leq 49$

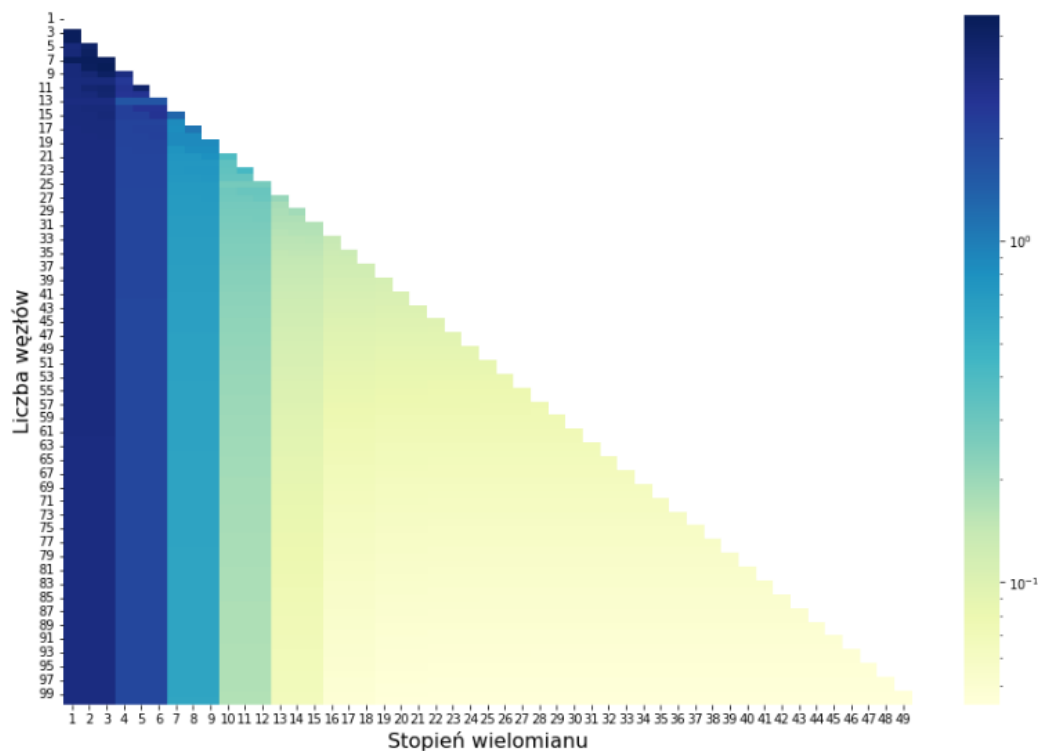
Na zamieszczonych na następnej stronie wykresach, możemy zauważyć, że ustalonego stopnia wielomianu, dokładność nieznacznie rośnie, podczas zwiększania liczby węzłów. Największy wzrost dokładności, przy zwiększaniu liczby węzłów, obserwujemy wtedy, gdy stopień wielomianu nie przekracza 10. Dla wielomianów o stopniach wyższych niż 16., nie obserwujemy dużych różnic w dokładności

(wszystkie z tych wielomianów przybliżają aproksymowaną funkcję (2.1.1.) z dużą dokładnością).

5.1.1. Błędy – największa bezwzględna różnica (4.2.)

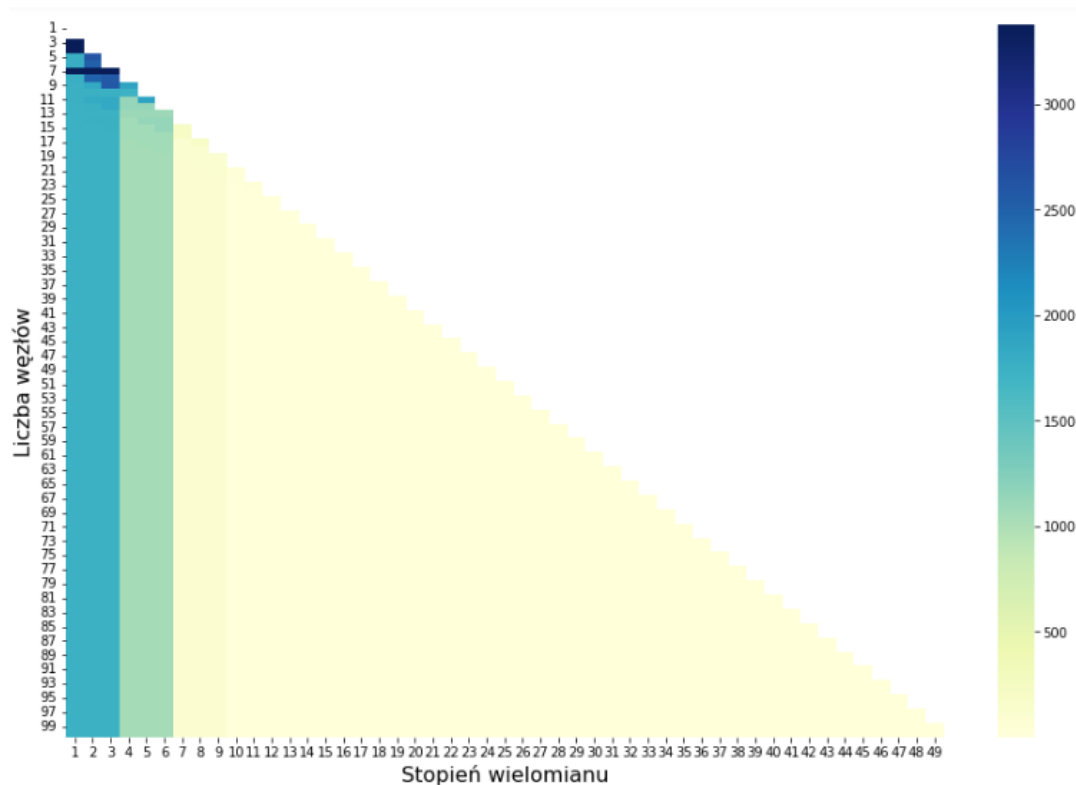


Rys. 5.1.1.1. Błędy aproksymacji dla $n \leq 100, m \leq 49$ dla błędu liczonego jako największa bezwzględna różnica (wykres w skali liniowej)

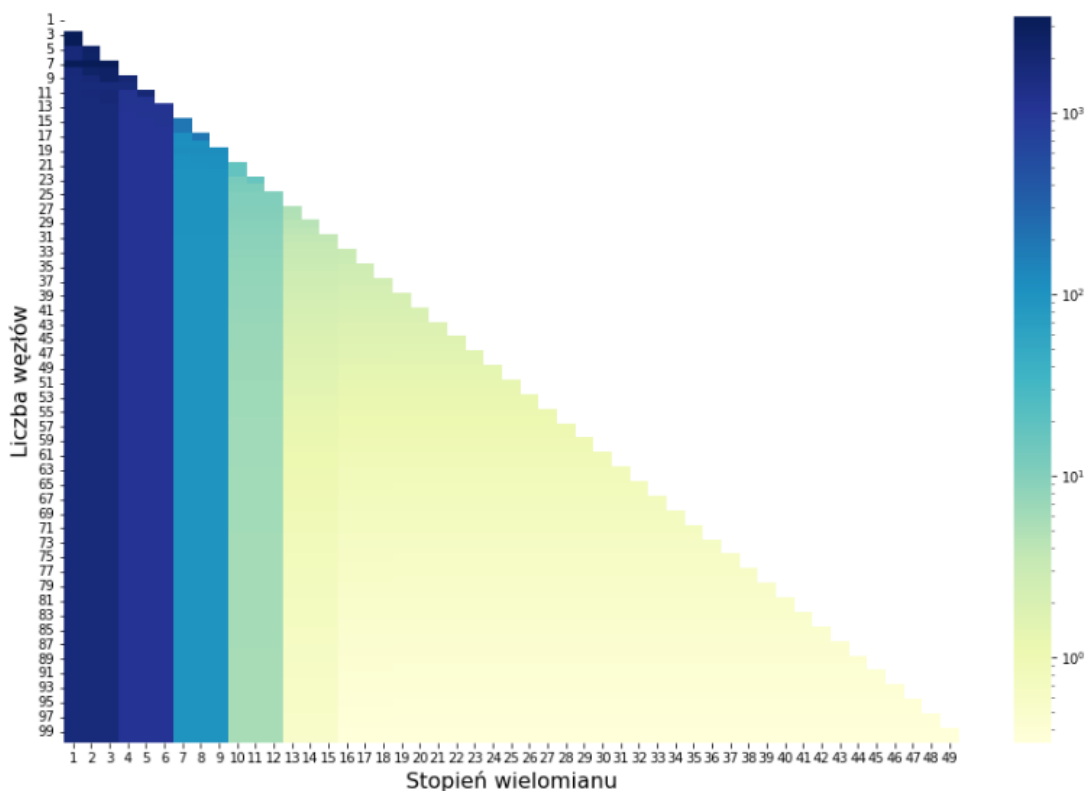


Rys. 5.1.1.2. Błędy aproksymacji dla $n \leq 100, m \leq 49$ dla błędu liczonego jako największa bezwzględna różnica (wykres w skali logarytmicznej)

5.1.2. Błędy – suma kwadratów różnic (4.2.)



Rys. 5.1.2.1. Błędy aproksymacji dla $n \leq 100, m \leq 49$ dla błędu liczonego jako suma kwadratów różnic (wykres w skali liniowej)

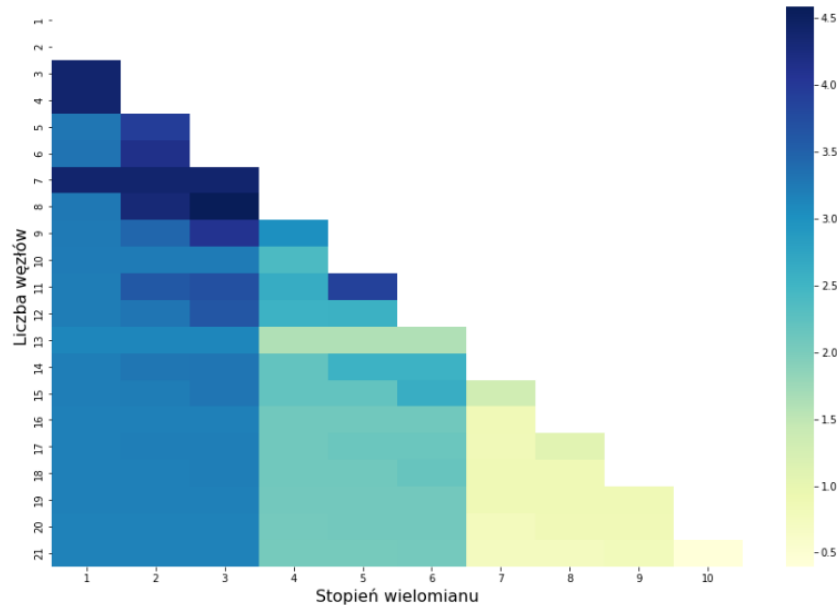


Rys. 5.1.2.2. Błędy aproksymacji dla $n \leq 100, m \leq 49$ dla błędu liczonego jako suma kwadratów różnic (wykres w skali logarytmicznej)

5.2. Wykresy błędów dla $n \leq 21$ oraz $m \leq 10$

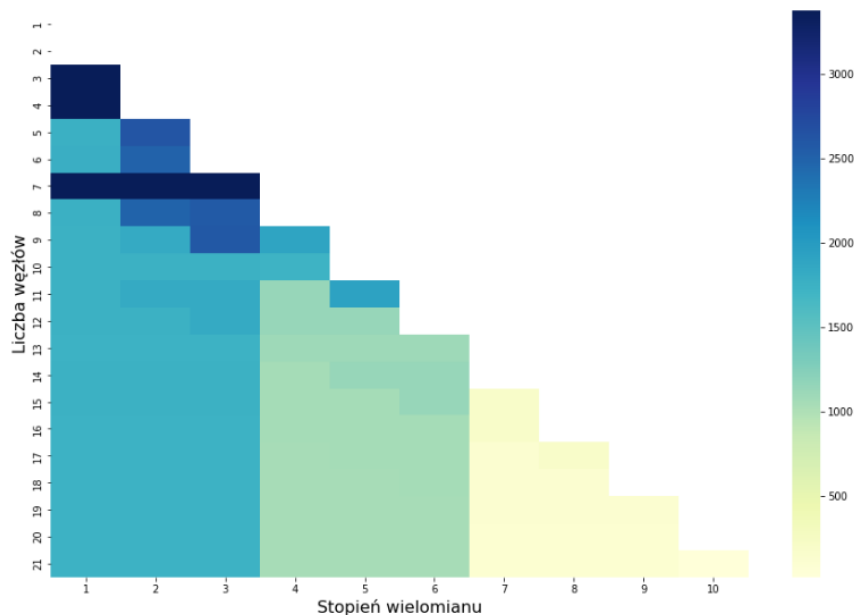
Przeglądając się bliżej wycinkom wcześniejszych wykresów, możemy zauważyć, że dla wielomianów niskich stopni, zwiększanie liczby węzłów zauważalnie poprawia dokładność przybliżenia. Widzimy również, że dla 2, 3, 4 oraz 7 węzłów błąd ma największą wartość. Jest to spowodowane tym, że wówczas wartości funkcji $F(x)$ w każdym z węzłów są równe, przez co, niezależnie od stopnia wielomianu, krzywa aproksymacyjna jest linią prostą, przechodzącą przez środki tych węzłów.

5.2.1. Błędy – największa bezwzględna różnica (4.2.)



Rys. 5.2.1. Błędy aproksymacji dla $n \leq 21, m \leq 10$ dla błędu liczonego jako największa bezwzględna różnica (wykres w skali liniowej)

5.2.2. Błędy – suma kwadratów różnic (4.2.)

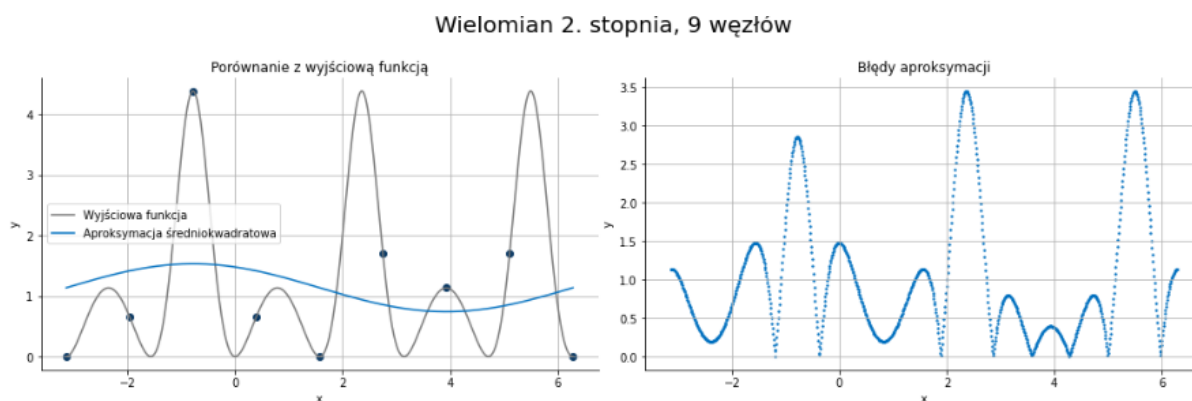


Rys. 5.2.2. Błędy aproksymacji dla $n \leq 21, m \leq 10$ dla błędu liczonego jako suma kwadratów różnic (wykres w skali liniowej)

6. Porównanie wielomianów dla ustalonej liczby węzłów (n)

6.1. Dla $n = 9$ węzłów

6.1.1. Wielomian $m = 2$ stopnia



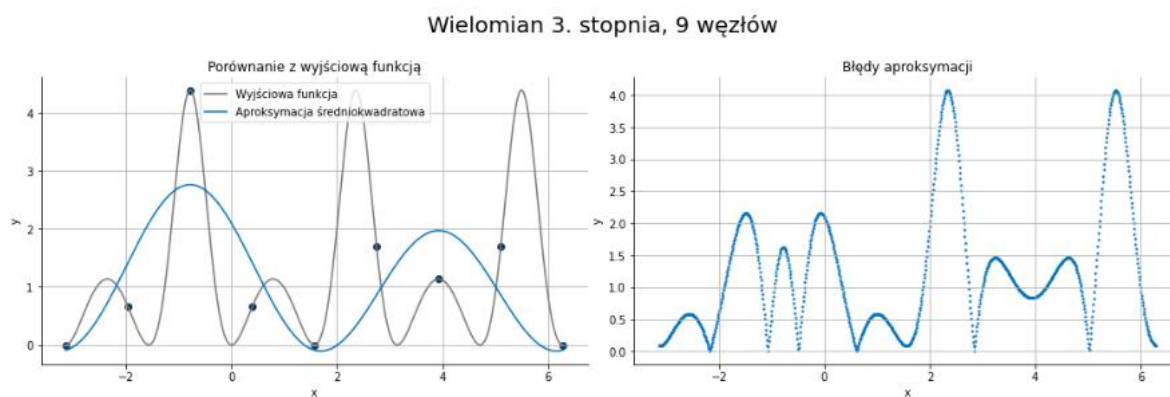
Rys. 6.1.1. Wykres wielomianu aproksymującego 2. stopnia dla 9 węzłów

Wartości błędów

Największy bezwzględny błąd	3.4498
Suma kwadratów różnic	$1.8408 \cdot 10^3$

Tabela. 6.1.1. Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego 2. stopnia dla 9 węzłów

6.1.2. Wielomian $m = 3$ stopnia



Rys. 6.1.2. Wykres wielomianu aproksymującego 3. stopnia dla 9 węzłów

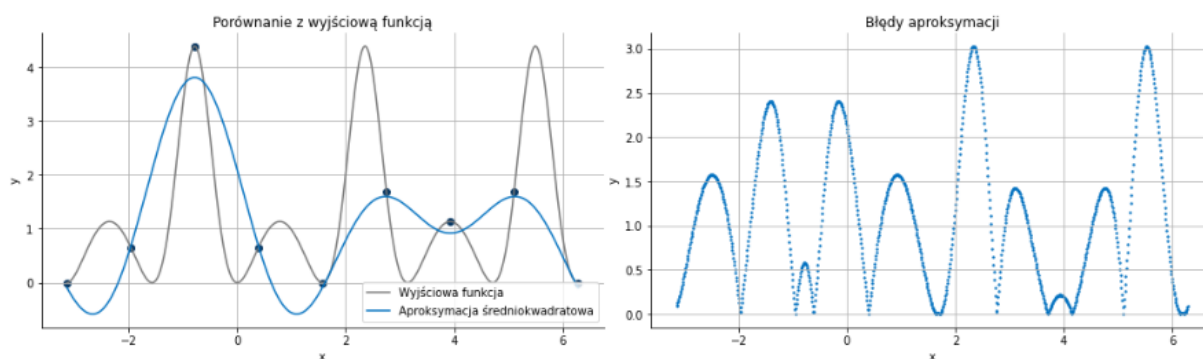
Wartości błędów

Największy bezwzględny błąd	4.0767
Suma kwadratów różnic	$2.5923 \cdot 10^3$

Tabela. 6.1.2. Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego 3. stopnia dla 9 węzłów

6.1.3. Wielomian $m = 4$ stopnia

Wielomian 4. stopnia, 9 węzłów



Rys. 6.1.3. Wykres wielomianu aproksymującego 4. stopnia dla 9 węzłów

Wartości błędów

Największy bezwzględny błąd	3.0275
Suma kwadratów różnic	$1.9039 \cdot 10^3$

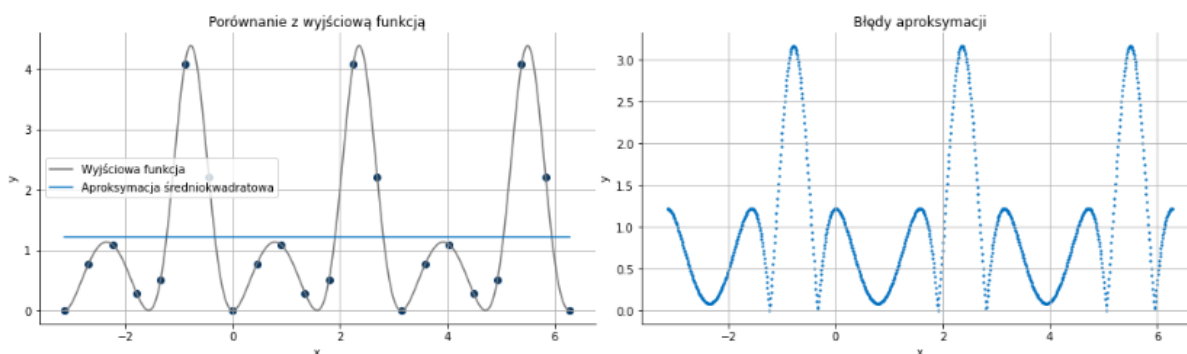
Tabela. 6.1.3. Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego 4. stopnia dla 9 węzłów

6.2. Dla $n = 22$ węzłów

Zwiększanie stopnia wielomianu powoduje, że otrzymujemy coraz bardziej dokładne przybliżenie.

6.2.1. Wielomian $m = 3$ stopnia

Wielomian 3. stopnia, 22 węzłów



Rys. 6.2.1. Wykres wielomianu aproksymującego 3. stopnia dla 22 węzłów

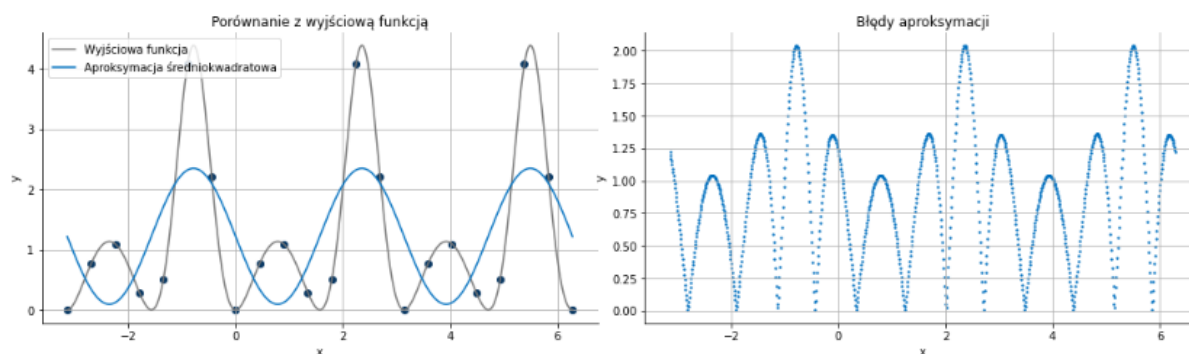
Wartości błędów

Największy bezwzględny błąd	3.1675
Suma kwadratów różnic	$1.7460 \cdot 10^3$

Tabela. 6.2.1. Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego 3. stopnia dla 22 węzłów

6.2.2. Wielomian $m = 6$ stopnia

Wielomian 6. stopnia, 22 węzłów



Rys. 6.2.2. Wykres wielomianu aproksymującego 3. stopnia dla 22 węzłów

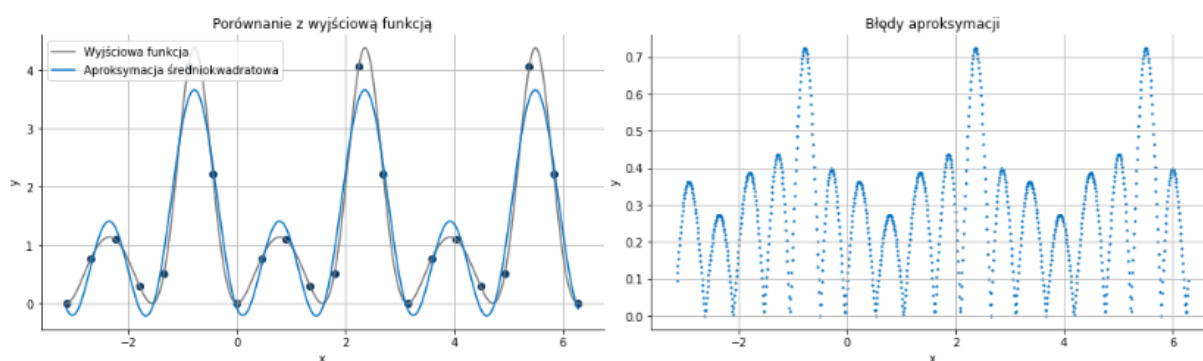
Wartości błędów

Największy bezwzględny błąd	2.0399
Suma kwadratów różnic	$1.0504 \cdot 10^3$

Tabela. 6.2.2. Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego 3. stopnia dla 22 węzłów

6.2.3. Wielomian $m = 9$ stopnia

Wielomian 9. stopnia, 22 węzłów



Rys. 6.2.3. Wykres wielomianu aproksymującego 9. stopnia dla 22 węzłów

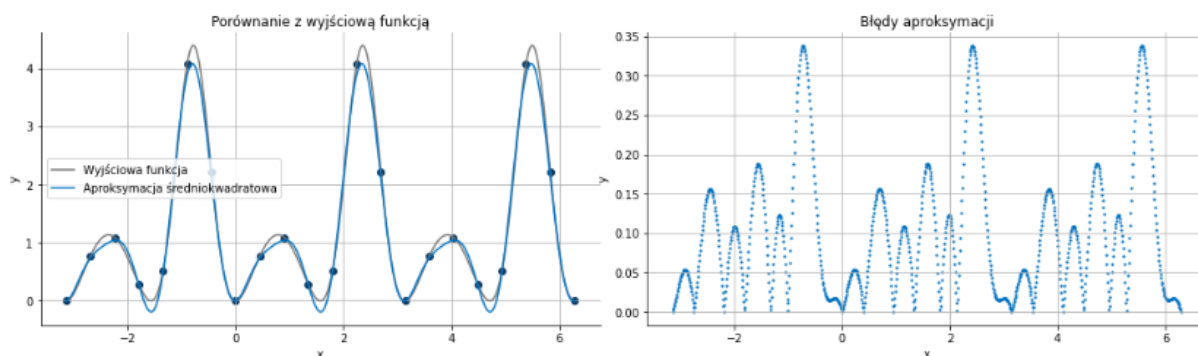
Wartości błędów

Największy bezwzględny błąd	$7.2491 \cdot 10^{-1}$
Suma kwadratów różnic	$1.0273 \cdot 10^2$

Tabela. 6.2.3. Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego 9. stopnia dla 22 węzłów

6.2.4. Wielomian $m = 10$ stopnia

Wielomian 10. stopnia, 22 węzłów



Rys. 6.2.4. Wykres wielomianu aproksymującego 10. stopnia dla 22 węzłów

Wartości błędów

Największy bezwzględny błąd	$3.3829 \cdot 10^{-1}$
Suma kwadratów różnic	$1.7171 \cdot 10^1$

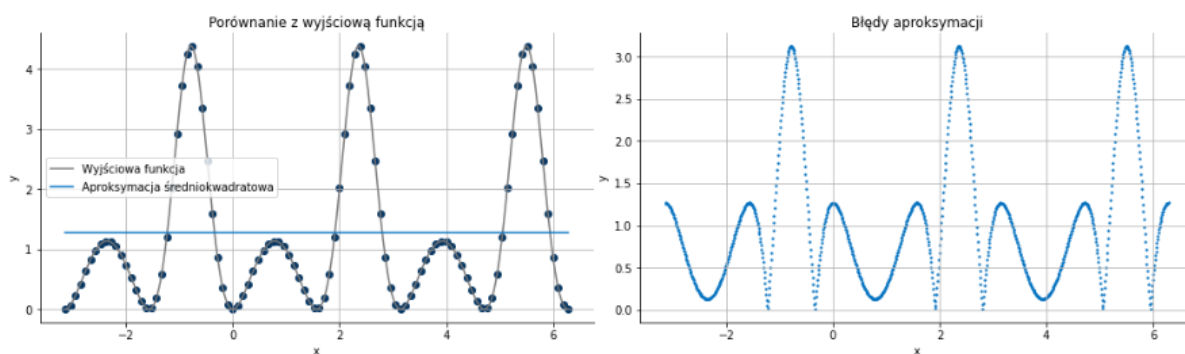
Tabela. 6.2.4. Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego 10. stopnia dla 22 węzłów

6.3. Dla $n = 100$ węzłów

Początkowo, zwiększanie stopnia wielomianu skutkuje zauważalnym wzrostem dokładności dopasowania wielomianu aproksymacyjnego do aproksymowanej funkcji. Wraz ze wzrostem liczby węzłów, przyrost dokładności maleje coraz bardziej (zwiększanie liczby węzłów skutkuje mniejszym niż wcześniej wzrostem dokładności dopasowania).

6.3.1. Wielomian $m = 3$ stopnia

Wielomian 3. stopnia, 100 węzłów



Rys. 6.3.1. Wykres wielomianu aproksymującego 3. stopnia dla 100 węzłów

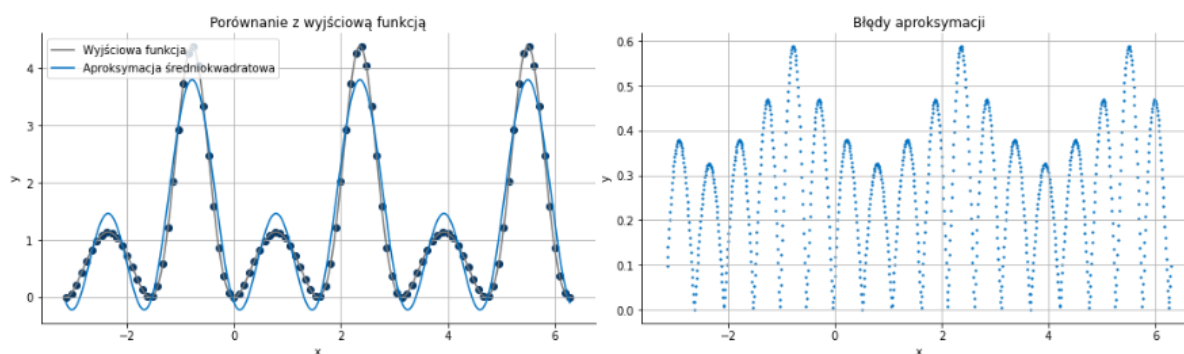
Wartości błędów

Największy bezwzględny błąd	3.1221
Suma kwadratów różnic	$1.7429 \cdot 10^3$

Tabela. 6.3.1. Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego 3. stopnia dla 100 węzłów

6.3.2. Wielomian $m = 7$ stopnia

Wielomian 7. stopnia, 100 węzłów



Rys. 6.3.2. Wykres wielomianu aproksymującego 7. stopnia dla 100 węzłów

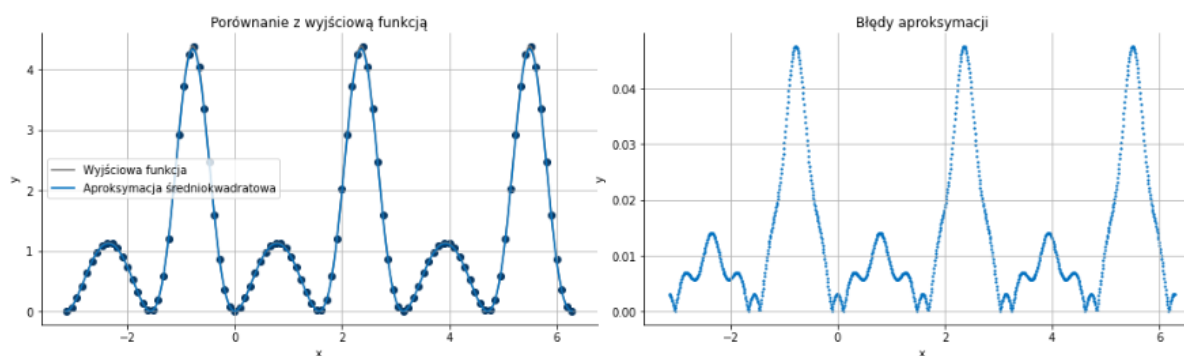
Wartości błędów

Największy bezwzględny błąd	$5.8862 \cdot 10^{-1}$
Suma kwadratów różnic	$9.6103 \cdot 10^1$

Tabela. 6.3.2. Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego 7. stopnia dla 100 węzłów

6.3.3. Wielomian $m = 18$ stopnia

Wielomian 18. stopnia, 100 węzłów



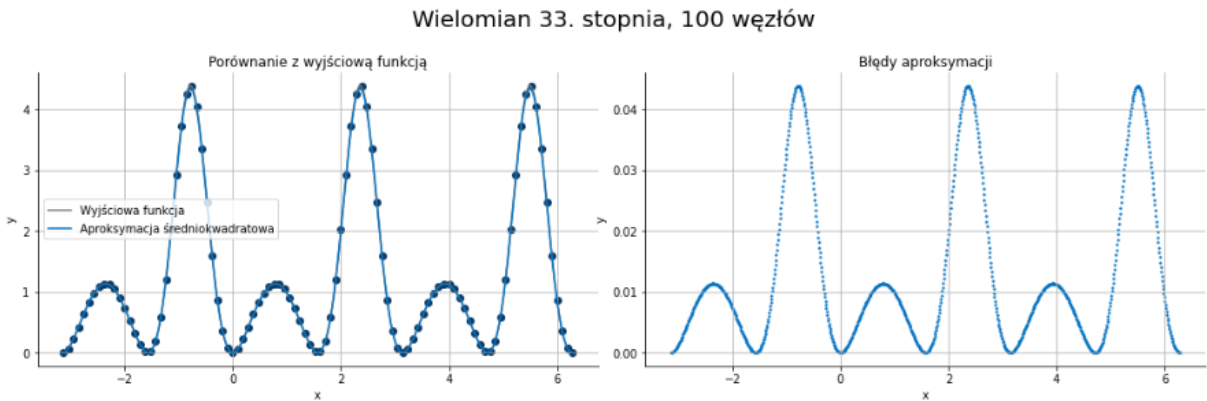
Rys. 6.3.3. Wykres wielomianu aproksymującego 18. stopnia dla 100 węzłów

Wartości błędów

Największy bezwzględny błąd	$4.7562 \cdot 10^{-2}$
Suma kwadratów różnic	$3.4291 \cdot 10^{-1}$

Tabela. 6.3.3. Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego 18. stopnia dla 100 węzłów

6.3.4. Wielomian $m = 33$ stopnia

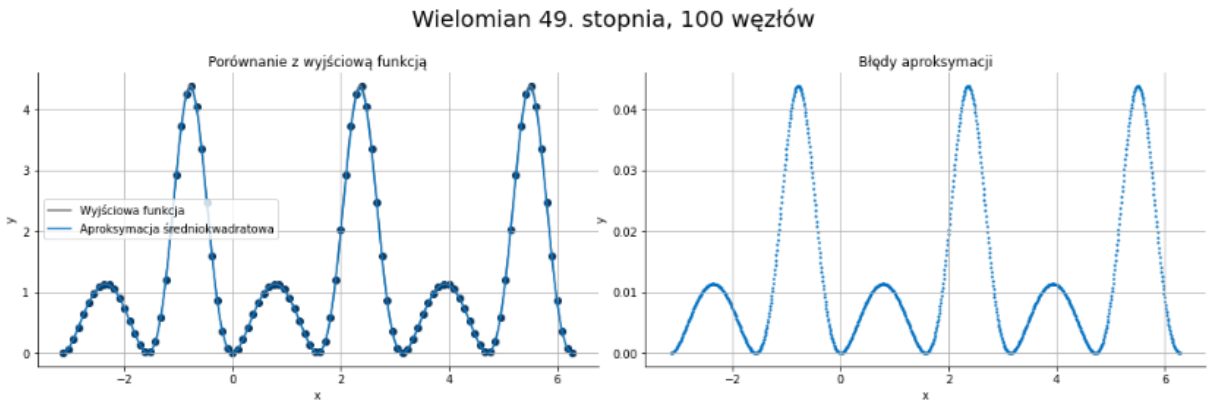


Rys. 6.3.4. Wykres wielomianu aproksymującego 33. stopnia dla 100 węzłów

Wartości błędów	
Największy bezwzględny błąd	$4.3889 \cdot 10^{-2}$
Suma kwadratów różnic	$3.3768 \cdot 10^{-1}$

Tabela. 6.3.4. Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego 33. stopnia dla 100 węzłów

6.3.5. Wielomian $m = 49$ stopnia



Rys. 6.3.5. Wykres wielomianu aproksymującego 49. stopnia dla 100 węzłów

Wartości błędów	
Największy bezwzględny błąd	$4.3889 \cdot 10^{-2}$
Suma kwadratów różnic	$3.3768 \cdot 10^{-1}$

Tabela. 6.3.5. Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego 49. stopnia dla 100 węzłów

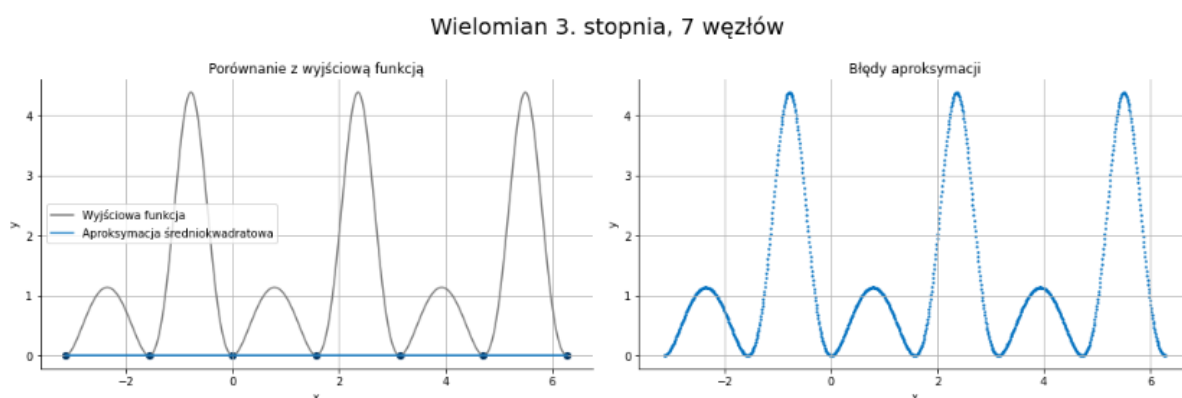
7. Porównanie wielomianów dla ustalonego stopnia wielomianu (m)

7.1. Wielomian $m = 3$ stopnia

W przypadku wielomianu 3. stopnia, zwiększanie liczby węzłów skutkuje uzyskaniem coraz bardziej spłaszczonego wykresu, przypominającego prostą. Dzieje się tak, ponieważ wielomian 3. stopnia ma tylko 2 ekstrema lokalne, a aproksymowana funkcja na przedziale $[-\pi, 2\pi]$ ma 11 ekstremów lokalnych, a więc znacznie rzadziej zmienia się jego monotoniczność, przez co dokładne dopasowanie wielomianu do aproksymowanej funkcji nie jest możliwe.

Widzimy także, że w przypadku, gdy liczba węzłów jest równa 7, wartości aproksymowanej funkcji we wszystkich punktach są sobie równe (wynoszą 0), a więc krzywa aproksymacyjna jest linią prostą, przechodzącą przez środki węzłów.

7.1.1. Dla $n = 7$ węzłów



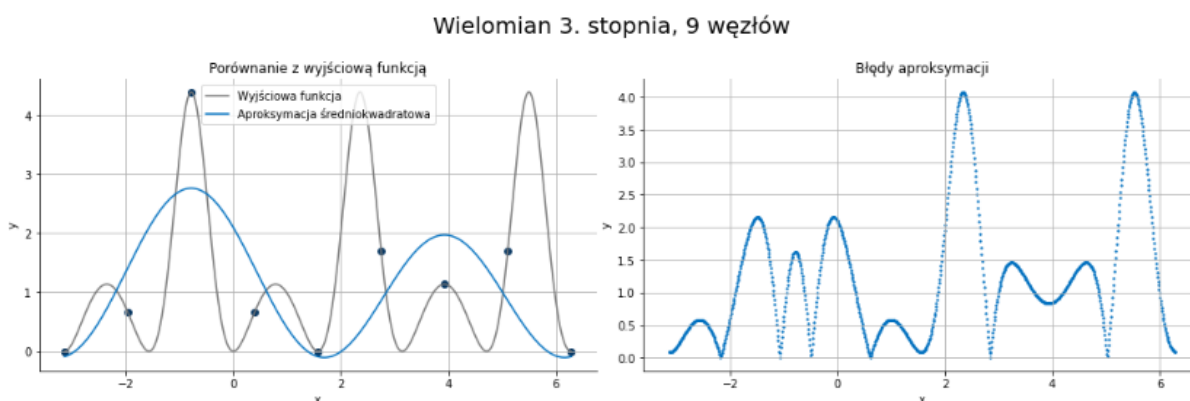
Rys. 7.1.1.1. Wykres wielomianu aproksymującego 3. stopnia dla 7 węzłów

Wartości błędów

Największy bezwzględny błąd	4.3889
Suma kwadratów różnic	$3.3768 \cdot 10^3$

Tabela. 7.1.1.1. Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego 3. stopnia dla 7 węzłów

7.1.2. Dla $n = 9$ węzłów



Rys. 7.1.1.2. Wykres wielomianu aproksymującego 3. stopnia dla 9 węzłów

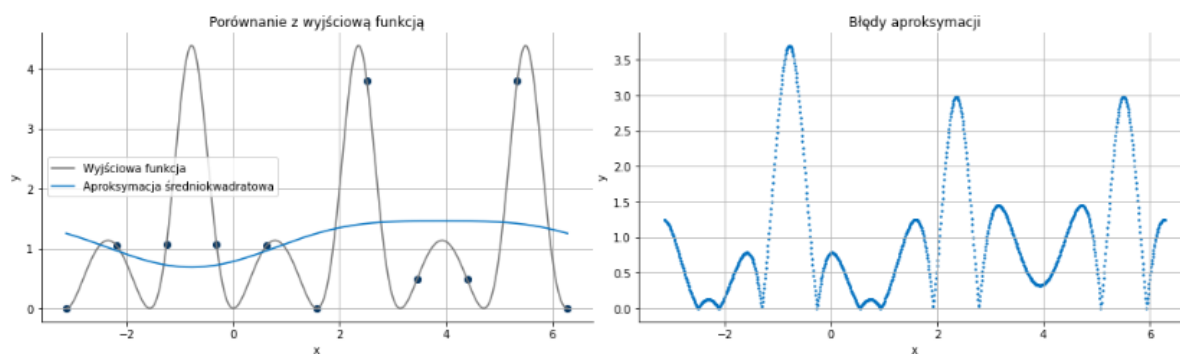
Wartości błędów

Największy bezwzględny błąd	4.0767
Suma kwadratów różnic	$2.5923 \cdot 10^3$

Tabela. 7.1.2. Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego 3. stopnia dla 9 węzłów

7.1.3. Dla $n = 11$ węzłów

Wielomian 3. stopnia, 11 węzłów



Rys. 7.1.3. Wykres wielomianu aproksymującego 3. stopnia dla 11 węzłów

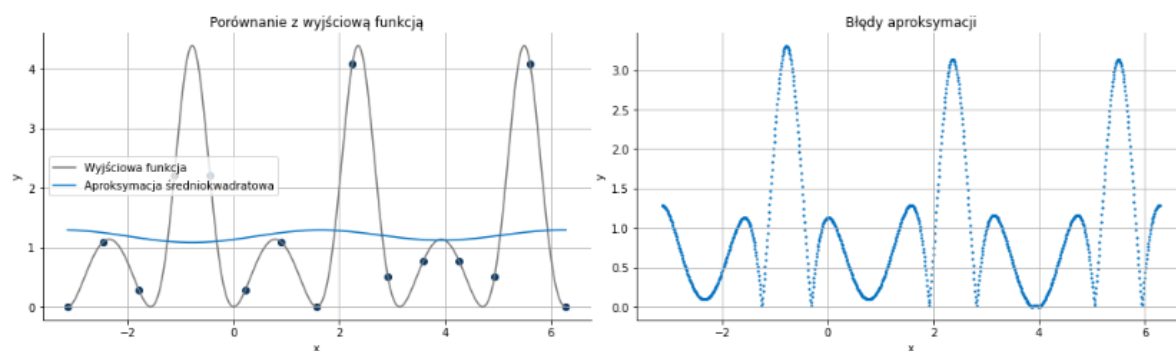
Wartości błędów

Największy bezwzględny błąd	3.7014
Suma kwadratów różnic	$1.8348 \cdot 10^3$

Tabela. 7.1.3. Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego 3. stopnia dla 11 węzłów

7.1.4. Dla $n = 15$ węzłów

Wielomian 3. stopnia, 15 węzłów



Rys. 7.1.4. Wykres wielomianu aproksymującego 3. stopnia dla 15 węzłów

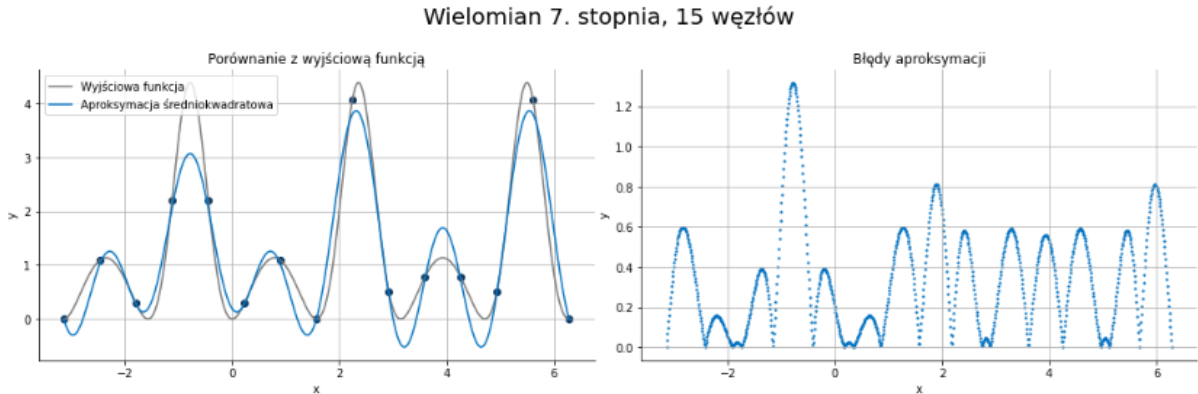
Wartości błędów

Największy bezwzględny błąd	3.3077
Suma kwadratów różnic	$1.7547 \cdot 10^3$

Tabela. 7.1.4. Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego 3. stopnia dla 15 węzłów

7.2. Wielomian $m = 7$ stopnia

7.2.1. Dla $n = 15$ węzłów

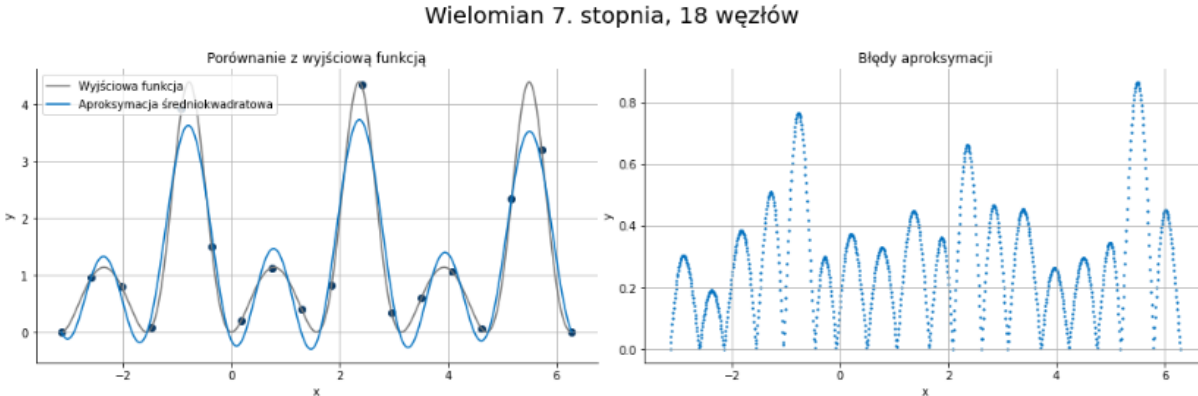


Rys. 7.2.1. Wykres wielomianu aproksymującego 7. stopnia dla 15 węzłów

Wartości błędów	
Największy bezwzględny błąd	1.3192
Suma kwadratów różnic	$1.9377 \cdot 10^2$

Tabela. 7.2.1. Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego 7. stopnia dla 15 węzłów

7.2.2. Dla $n = 18$ węzłów

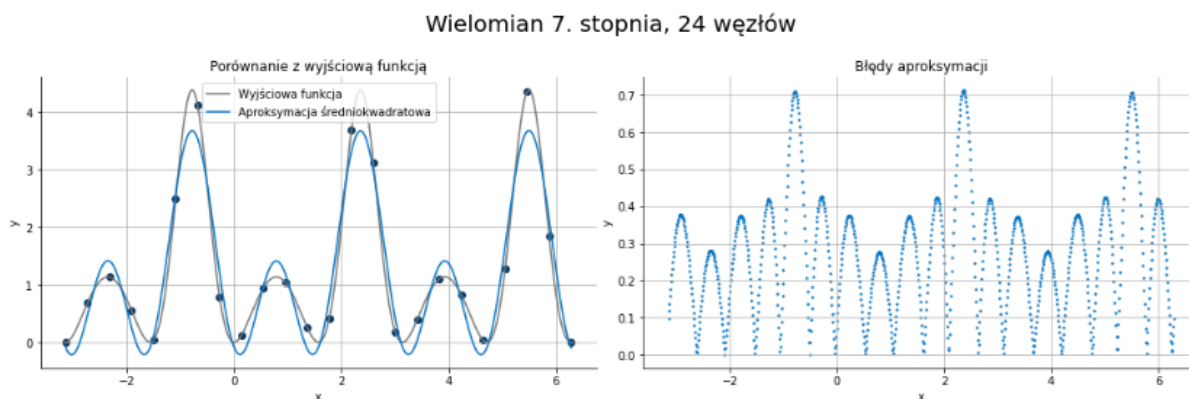


Rys. 7.2.2. Wykres wielomianu aproksymującego 7. stopnia dla 18 węzłów

Wartości błędów	
Największy bezwzględny błąd	$8.6614 \cdot 10^{-1}$
Suma kwadratów różnic	$1.1066 \cdot 10^2$

Tabela. 7.2.2. Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego 7. stopnia dla 18 węzłów

7.2.3. Dla $n = 24$ węzłów



Rys. 7.2.3. Wykres wielomianu aproksymującego 7. stopnia dla 24 węzłów

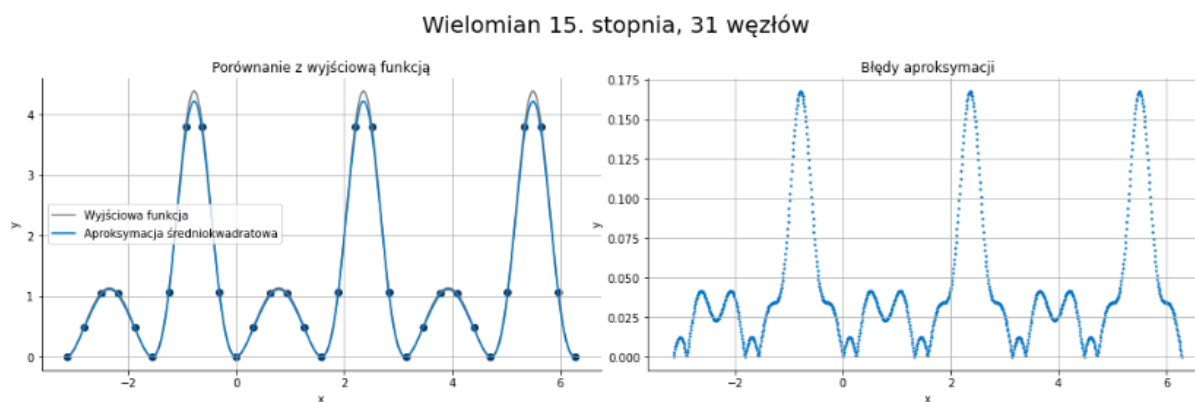
Wartości błędów

Największy bezwzględny błąd	$7.1327 \cdot 10^{-1}$
Suma kwadratów różnic	$1.0148 \cdot 10^2$

Tabela. 7.2.3. Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego 7. stopnia dla 24 węzłów

7.3. Wielomian $m = 15$ stopnia

7.3.1. Dla $n = 31$ węzłów



Rys. 7.3.1. Wykres wielomianu aproksymującego 15. stopnia dla 31 węzłów

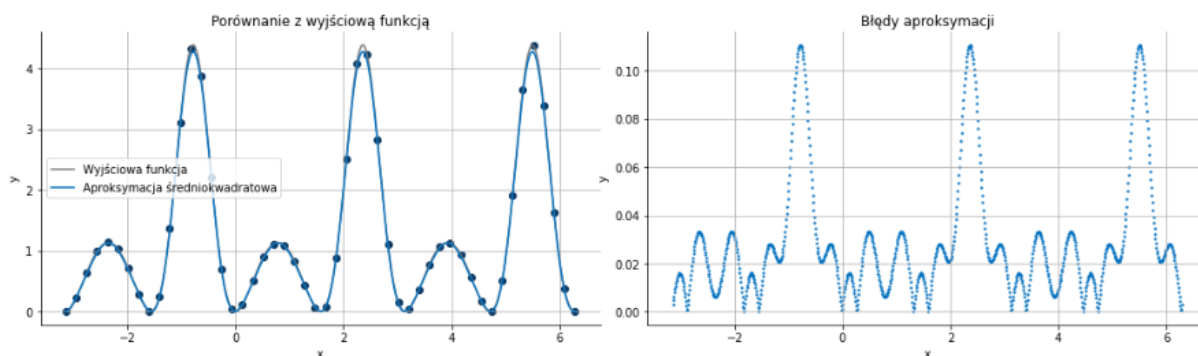
Wartości błędów

Największy bezwzględny błąd	$1.6777 \cdot 10^{-1}$
Suma kwadratów różnic	3.7354

Tabela. 7.3.1. Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego 15. stopnia dla 31 węzłów

7.3.2. Dla $n = 50$ węzłów

Wielomian 15. stopnia, 50 węzłów



Rys. 7.3.2. Wykres wielomianu aproksymującego 15. stopnia dla 50 węzłów

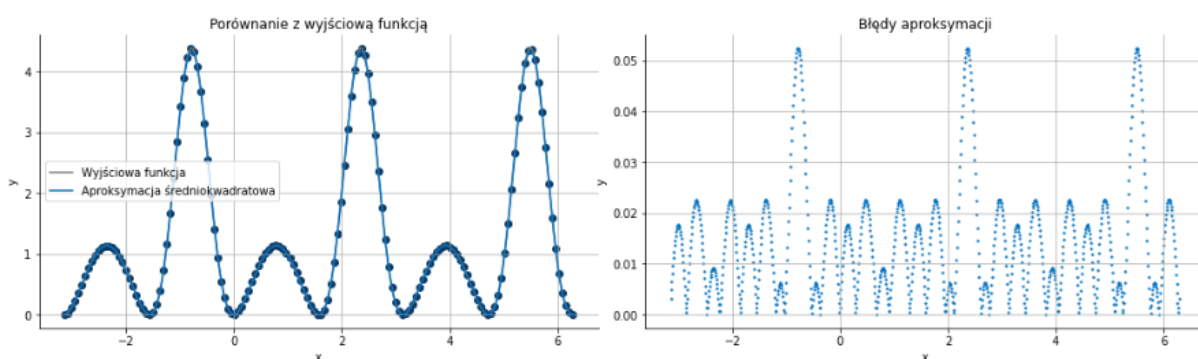
Wartości błędów

Największy bezwzględny błąd	$1.1067 \cdot 10^{-1}$
Suma kwadratów różnic	1.5488

Tabela. 7.3.2. Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego 15. stopnia dla 50 węzłów

7.3.3. Dla $n = 150$ węzłów

Wielomian 15. stopnia, 150 węzłów



Rys. 7.3.3. Wykres wielomianu aproksymującego 15. stopnia dla 150 węzłów

Wartości błędów

Największy bezwzględny błąd	$5.2460 \cdot 10^{-2}$
Suma kwadratów różnic	$3.4820 \cdot 10^{-1}$

Tabela. 7.3.3. Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego 15. stopnia dla 150 węzłów

8. Zestawienie błędów i porównanie z aproksymacją wielomianami algebraicznymi

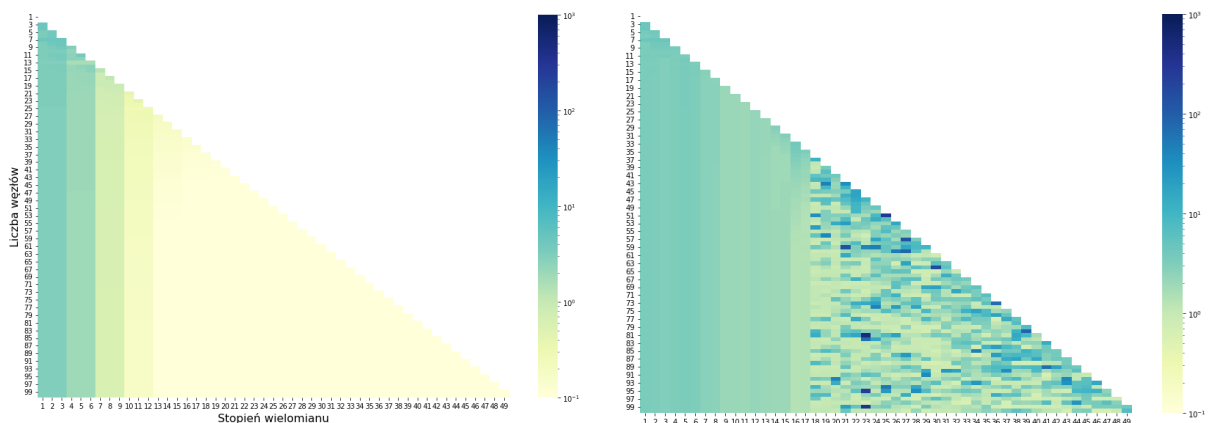
8.1. Wykresy błędów

Na zamieszczonych poniżej wykresach przedstawione zostały błędy (wyliczone jednym z 2 sposobów: 4.2. lub 4.3). Po lewej stronie znajdują się wykresy błędów dla aproksymacji wielomianami trygonometrycznymi, a po prawej stronie – dla aproksymacji wielomianami algebraicznymi. Za każdym razem na obu wykresach przyjęta została ta sama skala (liniowa lub logarytmiczna) oraz ten sam zakres na skali (ta sama najmniejsza wartość i największa wartość). W obu przypadkach rozważane były te same wielomiany dla takiej samej liczby węzłów ($n \leq 100, m \leq 49$). Dzięki temu, możemy w łatwy sposób porównać dokładność przybliżenia, porównując jedynie kolory obszarów na wykresach.

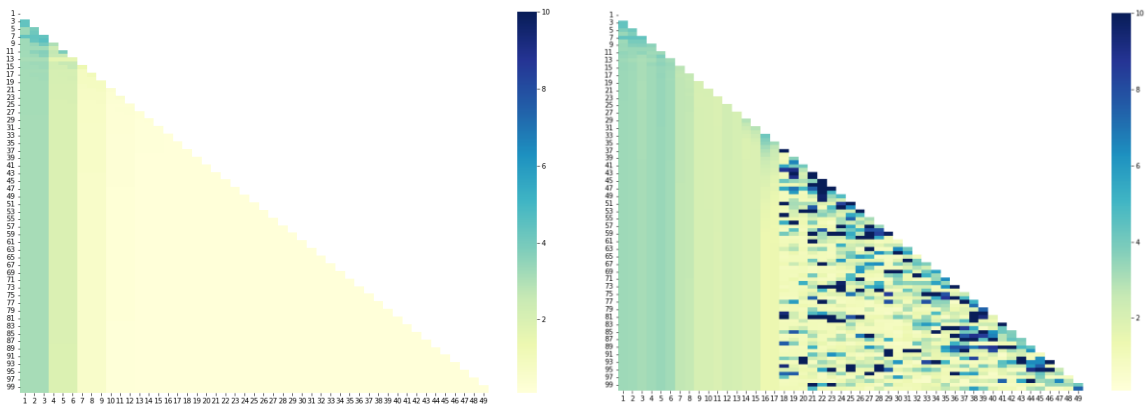
8.1.1. Błędy – największa bezwzględna różnica (4.2.)

W przypadku błędów liczonych jako największa bezwzględna różnica wartości, widzimy, że aproksymacja wielomianami trygonometrycznymi jest znacznie bardziej dokładna. W przypadku aproksymacji wielomianami trygonometrycznymi, bardzo dobrą dokładność uzyskujemy już dla wielomianu 13. stopnia, a w przypadku aproksymacji wielomianami algebraicznymi, nie jesteśmy w stanie otrzymać tak dobrego przybliżenia dla rozważanych wartości n, m .

Możemy także zaobserwować, że w przypadku aproksymacji wielomianami algebraicznymi, wynik nie jest wiarygodny dla wielomianów stopnia 18. i wyższych stopni, ponieważ błąd, jakim jest on obarczony, jest bardzo losowy (Nie ma widocznej zależności między zwiększaniem liczby lub stopnia wielomianu węzłów a wzrostem dokładności przybliżenia. Zwiększanie stopnia wielomianu prowadzi nawet do pogorszenia przybliżenia). W przypadku aproksymacji wielomianami trygonometrycznymi, opisywany problem nie występuje, a zwiększanie stopnia wielomianu, pozwala otrzymać jeszcze bardziej dokładne przybliżenie.



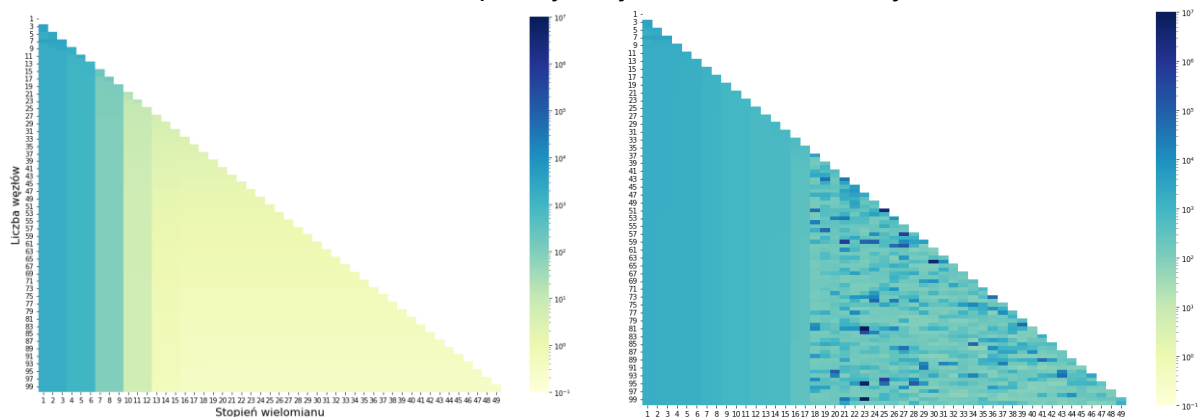
Rys. 8.1.1.1. Porównanie błędów aproksymacji, liczonych jako największa bezwzględna różnica (z lewej strony wykres dla aproksymacji wielomianami trygonometrycznymi, z prawej - algebraicznymi) (wykresy w skali logarytmicznej dla zakresu wartości $10^{-1} - 10^3$)



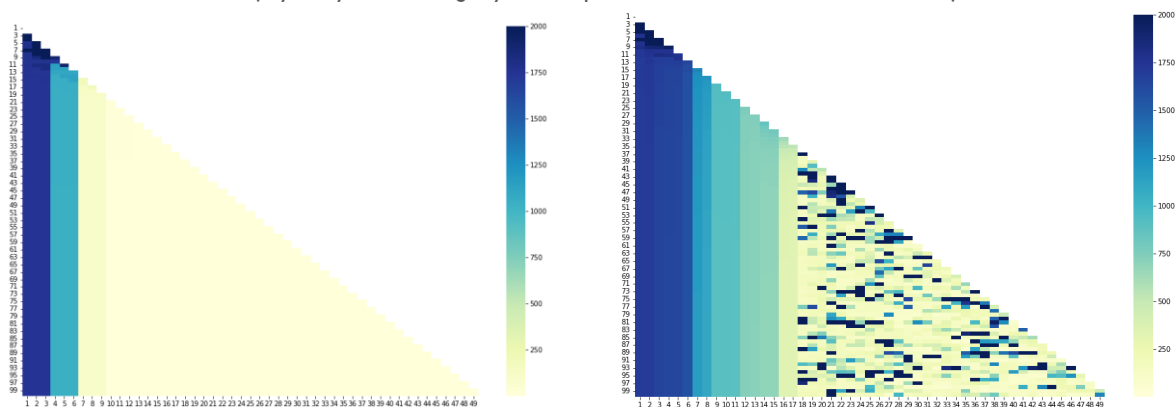
Rys. 8.1.1.2. Porównanie błędów aproksymacji, liczonych jako największa bezwzględna różnica (z lewej strony wykres dla aproksymacji wielomianami trygonometrycznymi, z prawej - algebraicznymi) (wykresy w skali liniowej dla zakresu wartości $10^{-1} - 10$)

8.1.2. Błędy – suma kwadratów różnic (4.3.)

Ponieważ dla sumy kwadratów różnic między wartościami funkcji aproksymującej i wartościami funkcji aproksymowanej zwykle uzyskujemy większy co do wartości błąd niż dla największej bezwzględnej różnicy wartości, na poniższych wykresach obserwujemy jeszcze lepiej widoczną różnicę w dokładności przybliżenia z zastosowaniem obu metod aproksymacji średniokwadratowej.



Rys. 8.1.2.1. Porównanie błędów aproksymacji, liczonych jako suma kwadratów różnic (z lewej strony wykres dla aproksymacji wielomianami trygonometrycznymi, z prawej - algebraicznymi) (wykresy w skali logarytmicznej dla zakresu wartości $10^{-1} - 10^7$)



Rys. 8.1.2.2. Porównanie błędów aproksymacji, liczonych jako suma kwadratów różnic (z lewej strony wykres dla aproksymacji wielomianami trygonometrycznymi, z prawej - algebraicznymi) (wykresy w skali liniowej dla zakresu wartości $10^{-1} - 2000$)

8.2. Tabele błędów aproksymacji

8.2.1. Błędy – największa bezwzględna różnica (4.2.)

Tak jak już wcześniej dało się zaobserwować, w poniższej tabeli możemy zobaczyć, że wartości błędów aproksymacji ulegają niewielkiemu poprawieniu przy zwiększaniu liczby węzłów, dla ustalonego stopnia wielomianu, natomiast przy ustalonej liczbie węzłów, zwiększanie stopnia wielomianu, powoduje wzrost dokładności przybliżenia (jeżeli spełnione jest założenie (3.1.7.)).

	Stopień wielomianu								
	3	4	5	7	10	15	25	35	49
7	4.3889	—	—	—	—	—	—	—	—
10	3.2402	2.3936	—	—	—	—	—	—	—
15	3.3077	2.2052	2.2081	1.3192	—	—	—	—	—
20	3.1763	2.0541	2.0703	$7.6144 \cdot 10^{-1}$	—	—	—	—	—
25	3.1605	2.0260	2.0260	$7.0022 \cdot 10^{-1}$	$2.7293 \cdot 10^{-1}$	—	—	—	—
35	3.1459	1.9984	1.9984	$6.5991 \cdot 10^{-1}$	$2.4663 \cdot 10^{-1}$	$1.4858 \cdot 10^{-1}$	—	—	—
40	3.1413	1.9896	1.9896	$6.4620 \cdot 10^{-1}$	$2.3140 \cdot 10^{-1}$	$1.3249 \cdot 10^{-1}$	—	—	—
50	3.1349	1.9896	1.9773	$6.2701 \cdot 10^{-1}$	$2.1008 \cdot 10^{-1}$	$1.1067 \cdot 10^{-1}$	—	—	—
60	3.1307	1.9691	1.9691	$6.1421 \cdot 10^{-1}$	$1.9586 \cdot 10^{-1}$	$9.6115 \cdot 10^{-2}$	$7.3155 \cdot 10^{-2}$	—	—
75	3.1264	1.9609	1.9609	$6.0141 \cdot 10^{-1}$	$1.8165 \cdot 10^{-1}$	$8.1564 \cdot 10^{-2}$	$5.8526 \cdot 10^{-2}$	$5.8519 \cdot 10^{-2}$	—
85	3.1244	1.9570	1.9570	$5.9539 \cdot 10^{-1}$	$1.7496 \cdot 10^{-1}$	$7.4716 \cdot 10^{-2}$	$5.1641 \cdot 10^{-2}$	$5.1634 \cdot 10^{-2}$	—
100	3.1221	1.9527	1.9527	$5.8862 \cdot 10^{-1}$	$1.6744 \cdot 10^{-1}$	$6.7012 \cdot 10^{-2}$	$4.3896 \cdot 10^{-2}$	$4.3889 \cdot 10^{-2}$	$4.3889 \cdot 10^{-2}$

Tabela. 8.2.1. Wartości błędów aproksymacji wielomianami trygonometrycznymi, liczonych jako największa bezwzględna różnica wartości dla wybranych liczb węzłów i stopni wielomianów

8.2.2. Błędy – suma kwadratów różnic (4.3.)

W przypadku tego sposobu obliczania błędu, widoczna jest taka sama zależność, jak w podpunkcie 8.2.1..

	Stopień wielomianu								
	3	4	5	7	10	15	25	35	49
Liczba węzłów	7	$3.3768 \cdot 10^3$	—	—	—	—	—	—	—
	10	$1.7595 \cdot 10^3$	$1.7296 \cdot 10^3$	—	—	—	—	—	—
	15	$1.7547 \cdot 10^3$	$1.0608 \cdot 10^3$	$1.0608 \cdot 10^3$	$1.9377 \cdot 10^2$	—	—	—	—
	20	$1.7467 \cdot 10^3$	$1.0514 \cdot 10^3$	$1.0516 \cdot 10^3$	$1.0416 \cdot 10^2$	—	—	—	—
	25	$1.7452 \cdot 10^3$	$1.0493 \cdot 10^3$	$1.0493 \cdot 10^3$	$1.0083 \cdot 10^2$	$1.0410 \cdot 10^1$	—	—	—
	35	$1.7440 \cdot 10^3$	$1.0476 \cdot 10^3$	$1.0476 \cdot 10^3$	$9.8453 \cdot 10^1$	8.1011	2.9546	—	—
	40	$1.7437 \cdot 10^3$	$1.0471 \cdot 10^3$	$1.0471 \cdot 10^3$	$9.7826 \cdot 10^1$	7.4561	2.3085	—	—
	50	$1.7433 \cdot 10^3$	$1.0466 \cdot 10^3$	$1.0466 \cdot 10^3$	$9.7088 \cdot 10^1$	6.6976	1.5488	—	—
	60	$1.7432 \cdot 10^3$	$1.0463 \cdot 10^3$	$1.0463 \cdot 10^3$	$9.6687 \cdot 10^1$	6.2856	1.1361	$9.3801 \cdot 10^{-1}$	—
	75	$1.7430 \cdot 10^3$	$1.0461 \cdot 10^3$	$1.0461 \cdot 10^3$	$9.6359 \cdot 10^1$	5.9485	$7.9841 \cdot 10^{-1}$	$6.0032 \cdot 10^{-1}$	$6.0032 \cdot 10^{-1}$
	85	$1.7429 \cdot 10^3$	$1.0460 \cdot 10^3$	$1.0460 \cdot 10^3$	$9.6229 \cdot 10^1$	5.8158	$6.6548 \cdot 10^{-1}$	$4.6738 \cdot 10^{-1}$	$4.6738 \cdot 10^{-1}$
	99	$1.7429 \cdot 10^3$	$1.0460 \cdot 10^3$	$1.0460 \cdot 10^3$	$9.6110 \cdot 10^1$	5.6932	$5.4264 \cdot 10^{-1}$	$3.4454 \cdot 10^{-1}$	$3.4454 \cdot 10^{-1}$

Tabela. 8.2.2. Wartości błędów aproksymacji wielomianami trygonometrycznymi, liczonych jako suma kwadratów różnic wartości dla wybranych liczb węzłów i stopni wielomianów

9. Wnioski

- Dla ustalonego stopnia wielomianu, zwiększanie liczby węzłów tylko nieznacznie poprawia dokładność aproksymacji. Początkowo wzrost dokładności jest zauważalny, ale wraz ze zwiększaniem liczby węzłów, dokładność rośnie coraz wolniej. W tabeli 8.2.2., umieszczonej na poprzedniej stronie, możemy zauważyć, że dla wielomianów 3., 4. oraz 5. stopnia, w przypadku, gdy liczba węzłów wynosi 85 lub 100, obserwujemy taki sam błąd (dla dokładności błędu do 5 cyfr znaczących),
- Dla ustalonej liczby węzłów, zwiększanie stopnia wielomianu (mając na uwadze założenie (3.1.7.)), powoduje zwiększanie dokładności przybliżenia funkcji aproksymowanej przez trygonometryczny wielomian aproksymacyjny. Ponownie widzimy, że im większy jest stopień wielomianu, tym przyrost dokładności, po jego zwiększeniu o tę samą wartość, jest mniejszy (np. dla 99 węzłów dokładność jest taka sama dla wielomianu 25., 35. oraz 49. stopnia – w przypadku, gdy dokładność wyznaczamy do 5 cyfr znaczących),
- Graficzne porównanie błędów aproksymacji w punkcie 8. pokazuje, że dla ciągłej funkcji okresowej możemy uzyskać znacznie lepsze przybliżenie, wykorzystując aproksymację średniokwadratową wielomianami trygonometrycznymi niż w przypadku wykorzystania wielomianów algebraicznych do aproksymacji,
- W punkcie 8. mogliśmy również zaobserwować, że w przypadku wielomianów trygonometrycznych otrzymujemy bardzo dobre przybliżenie już dla wielomianów 13. stopnia, a dalsze zwiększanie stopnia wielomianu nie powoduje pojawienia się błędów. W przypadku aproksymacji wielomianami algebraicznymi, sytuacja jest nieco inna, ponieważ dokładność aproksymacji rośnie, gdy zwiększamy stopień wielomianu, dopóki nie przekraczamy stopnia 17. Dla wielomianów stopnia 18. i wyższych pojawiają się już błędy znacznie zaburzające dokładność wyników. Porównanie to pokazuje również, jak bardzo może różnić się dokładność przybliżenia pomiędzy problemem dobrze uwarunkowanym (aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi) a problemem źle uwarunkowanym (aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi).