

Rozwiązywanie układów równań liniowych metodami iteracyjnymi

I. Dane techniczne sprzętu

Obliczenia zostały wykonane na komputerze o następujących parametrach:

- Procesor: AMD Ryzen 7 4700U (8 rdzeni, 8 wątków),
- Pamięć RAM: 16 GB 3200 MHz

II. Zadanie 1

1. Wprowadzenie

1.1. Opis problemu

Dany jest układ równań liniowych $Ax = b$. Macierz A składa się z elementów, wyznaczanych zgodnie z poniższym wzorem:

$$\begin{cases} a_{i,i} = k \\ a_{i,j} = (-1)^j \cdot \frac{m}{j} & \text{dla } j > 1 \\ a_{i,i-1} = \frac{m}{i} \\ a_{i,j} = 0 & \text{dla } j < i - 1 \end{cases} \quad \text{gdzie } i, j = 1, \dots, n$$

(1.1.1.)

Za wektor x przyjęta miała zostać dowolna n -elementowa permutacja liczb ze zbioru $\{-1, 1\}$, a następnie, wykorzystując wektor x , obliczony miał zostać wektor b .

W kolejnym kroku, dla znanych wartości macierzy A oraz wektora b (takich, jak otrzymane w poprzednim kroku zadania) obliczony miał zostać wektor x . Tak obliczony wektor x miał zostać następnie porównany z zadanym wcześniej wektorem x i sprawdzone miały zostać liczby iteracji potrzebnych do wyznaczenia wektora x , będącego rozwiązaniem, błędy obliczeń oraz czas obliczeń. Obliczenia miały zostać przeprowadzone dla różnych rozmiarów układu równań (różnych wartości n), różnych wektorów początkowych oraz dla dwóch różnych kryteriów stopu, opisanych w punkcie 2., a następnie, otrzymane dla różnych kryteriów wyniki, miały zostać ze sobą porównane.

2. Kryteria stopu

2.1. Kryterium 1

Pierwsze kryterium stopu porównywało normę z różnicy dwóch ostatnio obliczonych wektorów, będących przybliżeniem rozwiązania z zadaną wartością ρ . Skorzystałem z normy euklidesowej, którą można obliczyć, przy pomocy poniższego wzoru:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

(1.2.1.)

Wzór, służący do sprawdzania opisywanego kryterium, ma postać:

$$\|x^{(i+1)} - x^{(i)}\| < \rho \quad (1.2.2.)$$

2.2. Kryterium 2

W przypadku drugiego kryterium, ponownie wykorzystałem normę euklidesową. To kryterium określone jest, przy pomocy poniższego wzoru:

$$\|Ax^{(i)} - b\| < \rho \quad (1.2.3.)$$

3. Kryterium pomiaru błędu

Jako kryterium, według którego wyznaczałem wartości błędów dla obliczonego wektora x , porównując go ze wcześniej zadany wektorem \bar{x} , wykorzystałem ponownie normę euklidesową. Wzór, służący do wyznaczania błędu, ma więc postać:

$$\|x - \bar{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2}$$

gdzie:

x – obliczony wektor,

\bar{x} – zadany wektor x ,

x_i – i . współrzędna wyznaczonego wektora x ,

\bar{x}_i – i . współrzędna zadanego wektora \bar{x} .

(1.3.1.)

4. Opracowanie zagadnienia

4.1. Metoda postępowania

Program zastosowany do rozwiązania problemu napisałem w języku Python. Korzystałem z biblioteki `numpy`. Do obliczeń wykorzystałem typ zmiennoprzecinkowy `float64` (dostarczony przez bibliotekę `numpy` – jest to odpowiednik typu `float` w Pythonie). Obliczenia przeprowadzałem dla kolejnych wartości n z przedziału $2 - 500$. Przyjęty wektor x miał postać $x = [-1, 1, -1, 1, -1, \dots]$, czyli składał się z na przemian występujących wartości -1 oraz 1 .

4.2. Wyniki obliczeń dla ustalonego wektora początkowego

Jako wektor początkowy przyjąłem w tym podpunkcie wektor, którego wszystkie współrzędne są zerami. W podpunkcie 4.3. sprawdzony został wpływ wyboru wektora początkowego na rozwiązanie.

4.2.1. Liczby iteracji

- Zestawienie liczb iteracji w zależności od wartości n oraz ρ (dla 1. kryterium stopu – 2.1.)

Jak możemy zauważyć, zwiększanie wartości n ma bardzo niewielki wpływ na liczbę wykonywanych iteracji, w celu obliczenia wektora x , będącego rozwiązaniem układu równań, natomiast, zmniejszanie wartości ρ powoduje zauważalny wzrost liczby iteracji.

		ρ					
		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-10}	10^{-15}
n	2	3	4	4	6	11	16
	15	3	4	5	6	11	16
	30	3	4	5	6	11	16
	45	3	4	5	7	11	16
	60	3	4	5	7	11	16
	75	3	4	5	7	11	16
	90	3	4	5	7	11	16
	105	3	4	5	7	11	16
	120	3	4	5	7	11	16
	135	3	4	5	7	11	16
	150	3	4	5	7	11	16
	165	3	4	5	7	11	16
	180	3	4	5	7	11	16
	195	3	4	5	7	11	16
	210	3	4	5	7	11	16
	225	3	4	5	7	11	16
	240	3	4	5	7	11	16
	255	3	4	5	7	11	16
	270	3	4	5	7	11	16
	285	3	4	5	7	11	16
	300	3	4	5	7	11	16
	315	3	4	5	7	11	16
	330	3	4	5	7	11	16
	345	3	4	5	7	11	16
	360	3	4	5	7	11	16
	375	3	4	5	7	11	16
	390	3	4	5	7	11	16
	405	4	4	5	7	11	16
	420	4	4	5	7	11	16
	435	4	4	5	7	11	16
	450	4	4	5	7	11	16
	465	4	4	5	7	11	16

480	4	4	5	7	11	16
495	4	4	5	7	11	16
500	4	4	5	7	11	16

Tabela. 1.4.2.1. Liczby iteracji w zależności od n oraz ρ (dla 1. kryterium stopu)

- **Zestawienie liczb iteracji w zależności od wartości n oraz ρ (dla 2. kryterium stopu – 2.2)**

W przypadku tego kryterium, konieczne jest wykonanie większej liczby iteracji, aby to kryterium zostało spełnione. Okazuje się również, że dla $\rho = 10^{-15}$ nie jest możliwe obliczenie rozwiązania dla większości wartości n . Prawdopodobnie wynika to stąd, że błąd zaokrągleń jest na tyle duży, że wartość normy euklidesowej, którą wyznaczamy podczas sprawdzania tego kryterium, zawsze przekracza $\rho = 10^{-15}$.

Podczas obliczeń ustawiłem limit iteracji na 100, co pozwoliło mi na wykrycie przypadków, w których niemożliwe jest wyznaczenie rozwiązania, które spełniałoby kryterium stopu dla $\rho = 10^{-15}$. Jeżeli liczba iteracji osiągnęła 100, przerywałem działanie funkcji, obliczającej rozwiązanie układu równań. Uznałem, że 100 iteracji jest wystarczającą wartością, ponieważ we wszystkich pozostałych przypadkach, otrzymujemy kilkakrotnie mniejsze liczby iteracji.

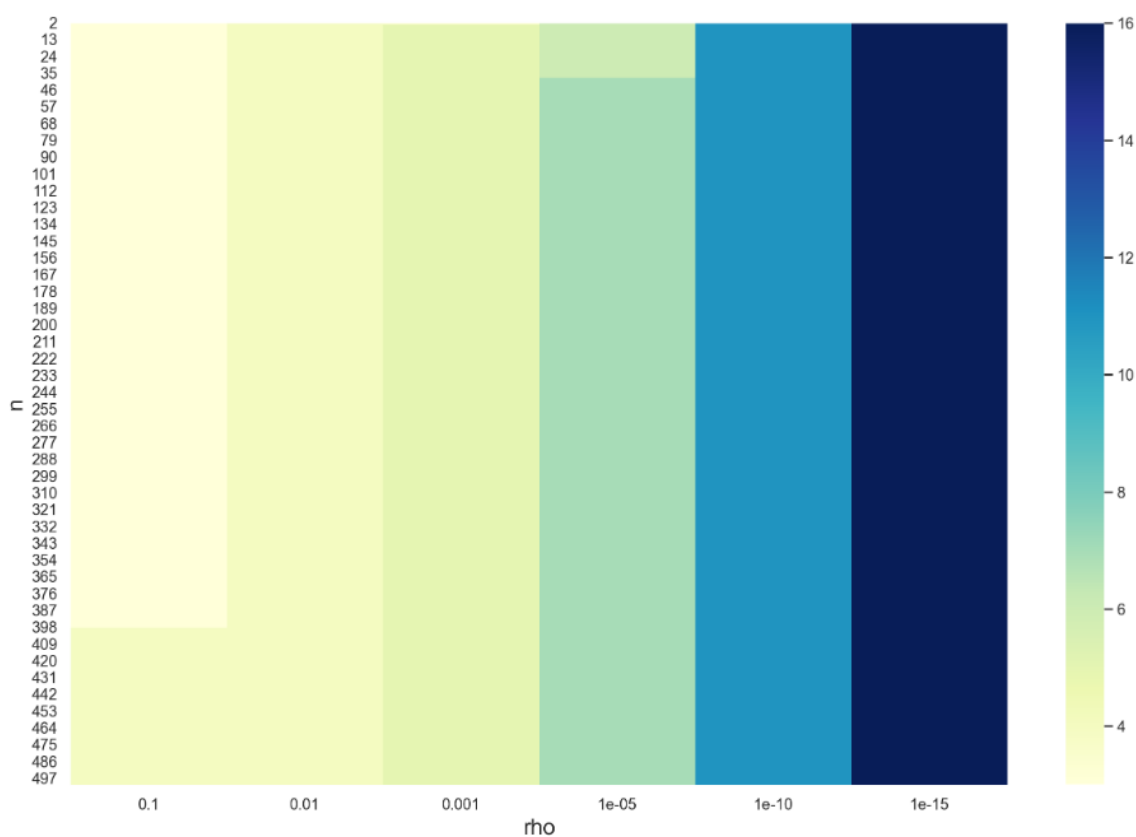
		ρ					
		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-10}	10^{-15}
n	2	4	5	5	7	12	17
	15	4	5	6	8	12	—
	30	4	5	6	8	12	—
	45	4	5	6	8	12	—
	60	4	5	6	8	12	—
	75	4	5	6	8	12	—
	90	4	5	6	8	12	—
	105	4	5	6	8	12	—
	120	4	5	6	8	12	—
	135	4	5	6	8	12	—
	150	4	5	6	8	12	—
	165	4	5	6	8	12	—
	180	4	5	6	8	12	—
	195	4	5	6	8	12	—
	210	4	5	6	8	12	—
	225	4	5	6	8	12	—
	240	4	5	6	8	12	—
	255	4	5	6	8	12	—
	270	4	5	6	8	12	—
	285	4	5	6	8	12	—
	300	4	5	6	8	12	—

315	4	5	6	8	12	—
330	4	5	6	8	12	—
345	4	5	6	8	12	—
360	4	5	6	8	12	—
375	4	5	6	8	12	—
390	4	5	6	8	12	—
405	4	5	6	8	12	—
420	4	5	6	8	12	—
435	4	5	6	8	12	—
450	4	5	6	8	12	—
465	4	5	6	8	12	—
480	4	5	6	8	12	—
495	4	5	6	8	12	—
500	4	5	6	8	12	—

Tabela. 1.4.2.2. Liczby iteracji w zależności od n oraz ρ (dla 2. kryterium stopu)

▪ **Wykres liczb iteracji w zależności od wartości n oraz ρ
(dla 1. kryterium stopu – 2.1.)**

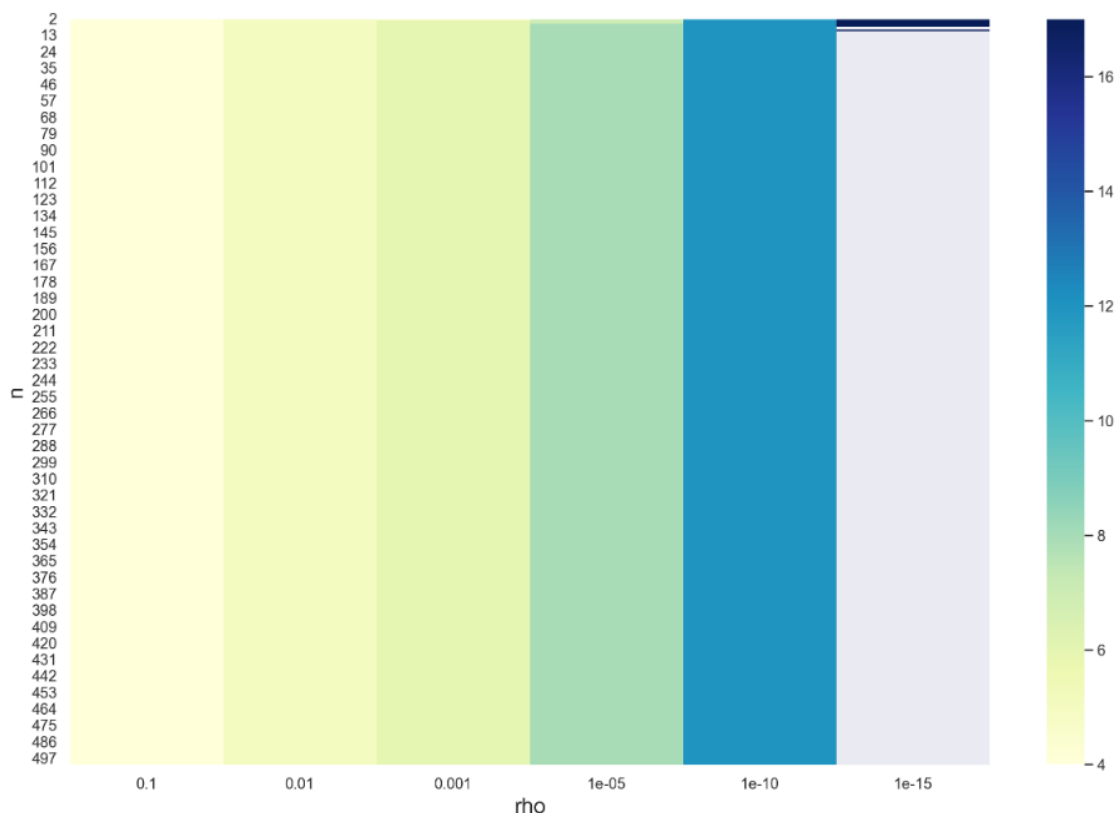
Poniższy wykres pozwala dokładniej zaobserwować zależność liczby iteracji od wartości n oraz ρ .



Rys. 1.4.2.1. Wykres liczb iteracji w zależności od wartości n oraz ρ (skala liniowa)
(dla 1. kryterium stopu)

- **Wykres liczb iteracji w zależności od wartości n oraz ρ (dla 2. kryterium stopu – 2.2.)**

W tym przypadku, nieprawidłowe wartości są zaznaczone przez szary obszar na wykresie.



Rys. 1.4.2.2. Wykres liczb iteracji w zależności od wartości n oraz ρ (skala liniowa) (dla 2. kryterium stopu)

4.2.2. Czasy obliczeń

- **Zestawienie czasów obliczeń w zależności od wartości n oraz ρ (dla 1. kryterium stopu – 2.1.)**

Jak możemy zauważyć, czas obliczeń rośnie zarówno podczas zmniejszania ρ , jak i podczas zwiększania n .

		ρ					
		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-10}	10^{-15}
n	2	1,62800E-04	8,83001E-05	8,46999E-05	1,61300E-04	1,95500E-04	2,69900E-04
	15	6,88001E-05	6,69000E-05	7,66000E-05	8,68001E-05	1,41700E-04	1,96800E-04
	30	6,34000E-05	6,72000E-05	8,55001E-05	2,87500E-04	3,78100E-04	2,28300E-04
	45	6,71000E-05	7,37000E-05	7,67000E-05	1,02100E-04	1,46200E-04	2,04500E-04
	60	9,02000E-05	6,53000E-05	7,46000E-05	9,79000E-05	2,46800E-04	2,06100E-04
	75	1,72000E-04	7,22001E-05	8,10000E-05	1,07900E-04	1,41100E-04	1,90900E-04
	90	1,08700E-04	6,89001E-05	7,56000E-05	9,38000E-05	1,32700E-04	2,00600E-04
	105	5,86900E-04	7,68700E-04	7,12800E-04	9,21800E-04	1,36700E-03	1,84720E-03

120	6,88800E-04	1,16620E-03	8,40900E-04	1,13180E-03	1,89440E-03	2,43300E-03
135	6,33900E-04	7,40000E-04	9,63100E-04	1,14160E-03	1,63170E-03	2,46260E-03
150	7,93400E-04	7,54700E-04	8,02500E-04	1,13190E-03	1,79860E-03	2,63080E-03
165	7,35900E-04	7,20600E-04	8,28500E-04	9,58800E-04	1,80400E-03	2,52860E-03
180	6,71200E-04	6,70400E-04	6,91000E-04	1,01090E-03	1,42120E-03	2,30220E-03
195	7,38800E-04	7,22900E-04	7,31900E-04	1,14920E-03	1,86250E-03	2,68600E-03
210	9,08800E-04	1,12530E-03	7,85100E-04	1,22320E-03	1,73130E-03	2,24340E-03
225	6,63000E-04	7,39100E-04	6,49300E-04	8,46600E-04	1,35080E-03	2,55290E-03
240	1,11360E-03	7,90500E-04	1,01830E-03	1,31860E-03	1,82810E-03	2,48720E-03
255	7,03200E-04	8,97000E-04	1,02820E-03	8,50200E-04	1,32470E-03	1,78110E-03
270	1,01820E-03	1,02570E-03	1,19050E-03	1,36640E-03	1,61780E-03	3,01220E-03
285	1,22750E-03	7,94000E-04	9,23000E-04	1,29760E-03	1,75230E-03	2,46010E-03
300	1,46610E-03	1,43290E-03	1,46620E-03	1,88460E-03	2,09680E-03	3,22530E-03
315	1,01860E-03	7,66900E-04	8,63100E-04	9,32400E-04	1,32000E-03	2,19870E-03
330	1,72530E-03	1,63220E-03	1,90580E-03	1,79650E-03	2,23830E-03	2,50350E-03
345	1,48720E-03	2,12100E-03	1,56810E-03	2,06530E-03	3,04350E-03	3,07390E-03
360	1,70940E-03	1,18350E-03	1,16820E-03	1,33120E-03	1,87010E-03	1,89620E-03
375	1,43680E-03	1,29800E-03	1,34400E-03	2,20570E-03	2,19510E-03	2,41600E-03
390	1,75530E-03	1,41730E-03	1,56290E-03	1,88340E-03	2,53210E-03	2,46360E-03
405	1,76050E-03	1,69390E-03	2,30450E-03	2,61630E-03	3,08350E-03	3,53050E-03
420	1,98630E-03	1,77580E-03	2,25350E-03	2,49790E-03	2,95390E-03	3,49900E-03
435	1,68460E-03	1,70930E-03	2,18870E-03	1,64760E-03	1,98270E-03	3,38190E-03
450	2,21540E-03	2,00090E-03	1,82340E-03	2,39300E-03	3,08940E-03	3,18660E-03
465	1,84830E-03	1,76780E-03	2,22700E-03	2,63970E-03	3,33050E-03	3,32150E-03
480	2,62280E-03	2,11130E-03	2,14230E-03	2,87540E-03	3,23740E-03	3,21550E-03
495	3,01410E-03	2,03360E-03	2,02930E-03	2,60450E-03	3,59710E-03	4,05840E-03
500	2,40280E-03	2,22260E-03	2,41460E-03	2,75600E-03	3,43520E-03	3,80140E-03

Tabela. 1.4.2.3. Czasy obliczeń w zależności od n oraz ρ (dla 1. kryterium stopu)

- **Zestawienie czasów obliczeń w zależności od wartości n oraz ρ (dla 2. kryterium stopu – 2.2.)**

W przypadku tego kryterium nie umieszczam czasów obliczeń dla przypadków, w których nie zostało wyznaczone rozwiązanie.

	ρ					
	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-10}	10^{-15}
ϵ 2	1,90100E-04	1,15000E-04	1,14800E-04	1,37700E-04	2,14900E-04	3,09100E-04
15	1,03800E-04	7,99000E-05	8,99000E-05	1,19900E-04	1,60500E-04	-
30	9,67000E-05	7,50000E-05	8,82000E-05	1,55600E-04	1,53100E-04	-
45	2,64600E-04	1,11200E-04	1,13300E-04	2,92200E-04	5,54300E-04	-
60	1,81700E-04	1,30200E-04	1,00300E-04	1,24700E-04	1,73500E-04	-

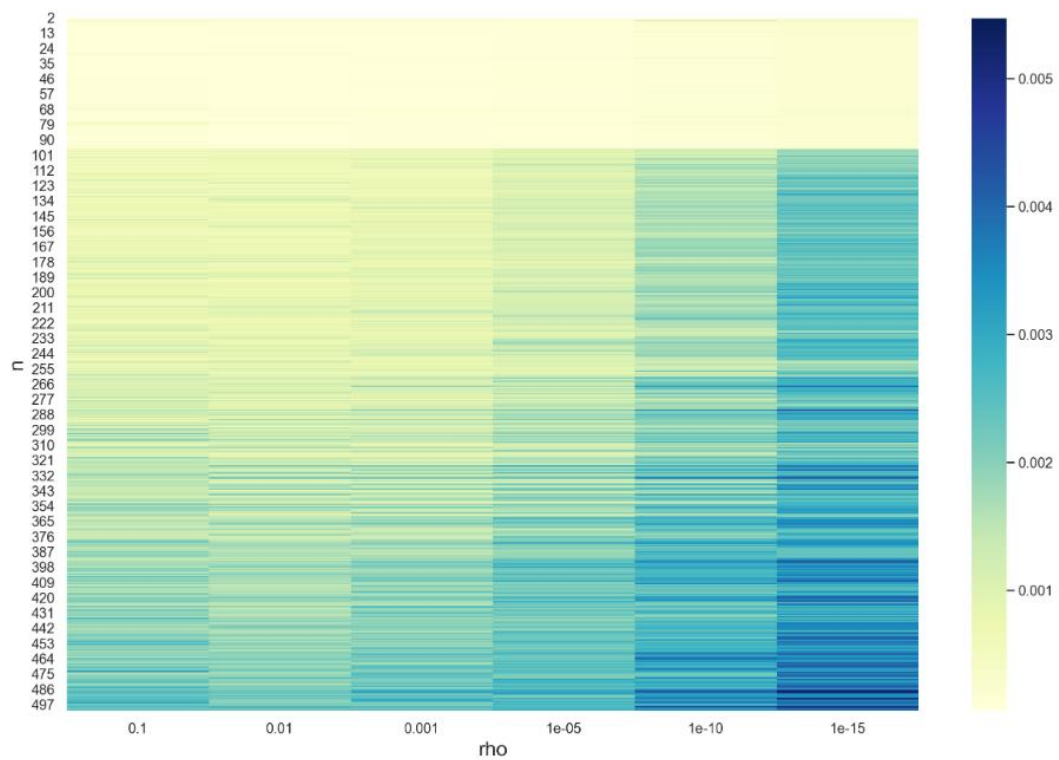
75	1,53700E-04	1,06000E-04	1,21300E-04	1,47800E-04	2,07600E-04	-
90	1,97900E-04	1,12800E-04	1,91300E-04	1,48000E-04	2,08200E-04	-
105	1,28780E-03	1,38400E-03	1,30200E-03	1,68040E-03	2,60870E-03	-
120	1,68980E-03	1,50460E-03	1,48180E-03	1,43960E-03	2,45460E-03	-
135	9,45000E-04	1,02700E-03	1,21060E-03	1,76190E-03	2,60380E-03	-
150	1,59070E-03	1,07700E-03	1,13930E-03	1,47770E-03	2,84690E-03	-
165	1,60710E-03	1,17270E-03	1,03390E-03	1,33670E-03	2,06480E-03	-
180	1,17640E-03	1,38700E-03	1,50420E-03	1,65170E-03	2,58440E-03	-
195	1,24610E-03	1,34400E-03	1,57250E-03	2,15140E-03	2,91620E-03	-
210	1,17570E-03	1,24830E-03	1,70900E-03	2,37070E-03	2,90650E-03	-
225	1,08320E-03	1,68250E-03	1,51460E-03	2,01600E-03	3,25080E-03	-
240	1,31120E-03	1,39510E-03	1,65590E-03	2,27340E-03	3,14340E-03	-
255	1,46600E-03	1,70920E-03	2,16290E-03	2,53960E-03	3,60860E-03	-
270	1,64620E-03	1,37950E-03	1,74380E-03	2,37280E-03	4,20790E-03	-
285	1,63710E-03	1,83980E-03	2,20780E-03	3,90690E-03	3,82390E-03	-
300	2,07470E-03	2,09110E-03	2,49680E-03	2,67950E-03	3,73330E-03	-
315	1,96300E-03	1,88330E-03	2,35370E-03	2,98100E-03	2,97720E-03	-
330	2,28760E-03	1,88580E-03	1,89280E-03	1,85730E-03	3,47410E-03	-
345	2,25750E-03	3,22140E-03	3,46580E-03	3,56410E-03	5,23110E-03	-
360	2,00210E-03	3,01840E-03	2,84420E-03	2,71540E-03	3,81410E-03	-
375	2,41730E-03	1,87410E-03	1,92960E-03	3,18190E-03	2,94340E-03	-
390	2,31780E-03	2,19490E-03	2,42440E-03	3,31410E-03	3,82230E-03	-
405	2,66140E-03	2,25160E-03	2,47540E-03	3,19970E-03	4,08600E-03	-
420	2,85320E-03	2,41250E-03	2,65730E-03	3,50100E-03	4,23710E-03	-
435	1,98460E-03	2,10440E-03	3,08750E-03	2,73070E-03	4,57550E-03	-
450	2,14390E-03	2,25290E-03	3,30660E-03	3,20770E-03	4,37650E-03	-
465	3,42770E-03	2,67400E-03	3,07660E-03	3,70220E-03	5,04480E-03	-
480	3,16860E-03	3,10210E-03	3,14860E-03	3,61680E-03	5,21620E-03	-
495	3,54790E-03	3,65250E-03	3,85520E-03	4,68510E-03	5,10880E-03	-
500	3,44830E-03	3,72370E-03	3,60750E-03	4,01280E-03	7,53240E-03	-

Tabela. 1.4.2.4. Czasy obliczeń w zależności od n oraz ρ (dla 2. kryterium stopu)

- **Wykresy czasów obliczeń w zależności od wartości n oraz ρ (dla 1. kryterium stopu – 2.1.)**

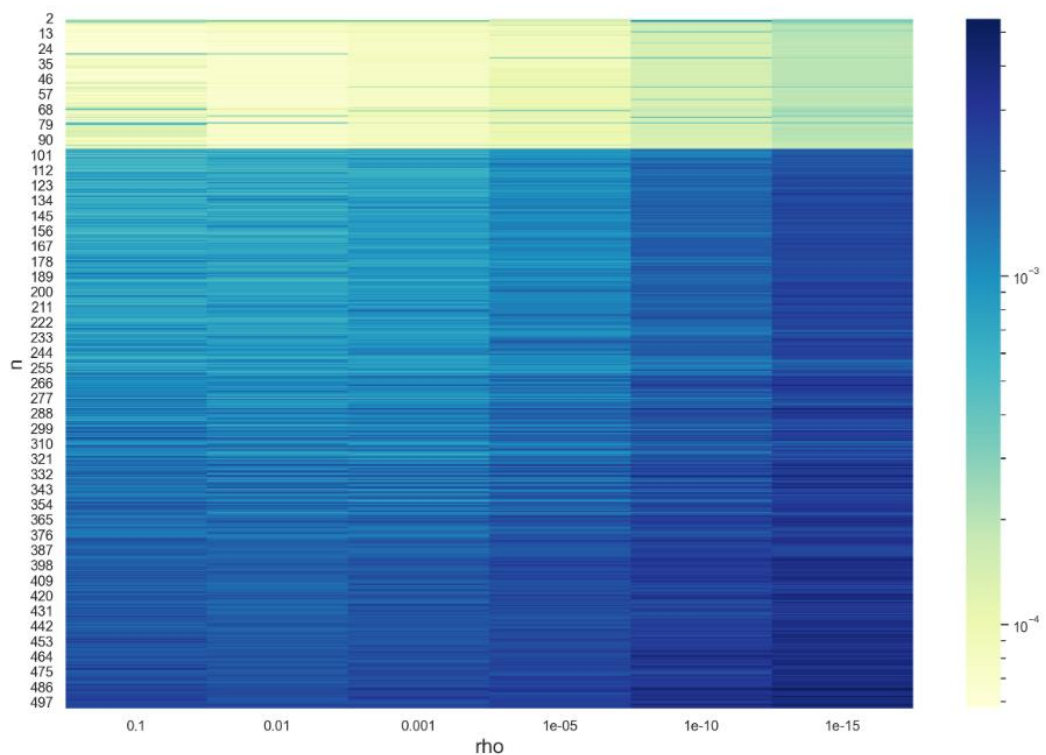
Opisywaną w poprzednim punkcie zależność czasu obliczeń od n oraz p jeszcze dokładniej przedstawiają zamieszczone na kolejnej stronie wykresy (Rys. 1.4.2.3. oraz Rys. 1.4.2.4.). Co ciekawe, czas obliczeń dość gwałtownie rośnie, gdy n przekracza wartość ok. 100.

○ Wykres w skali liniowej



Rys. 1.4.2.3. Wykres czasów obliczeń w zależności od wartości n oraz ρ (skala liniowa)
(dla 1. kryterium)

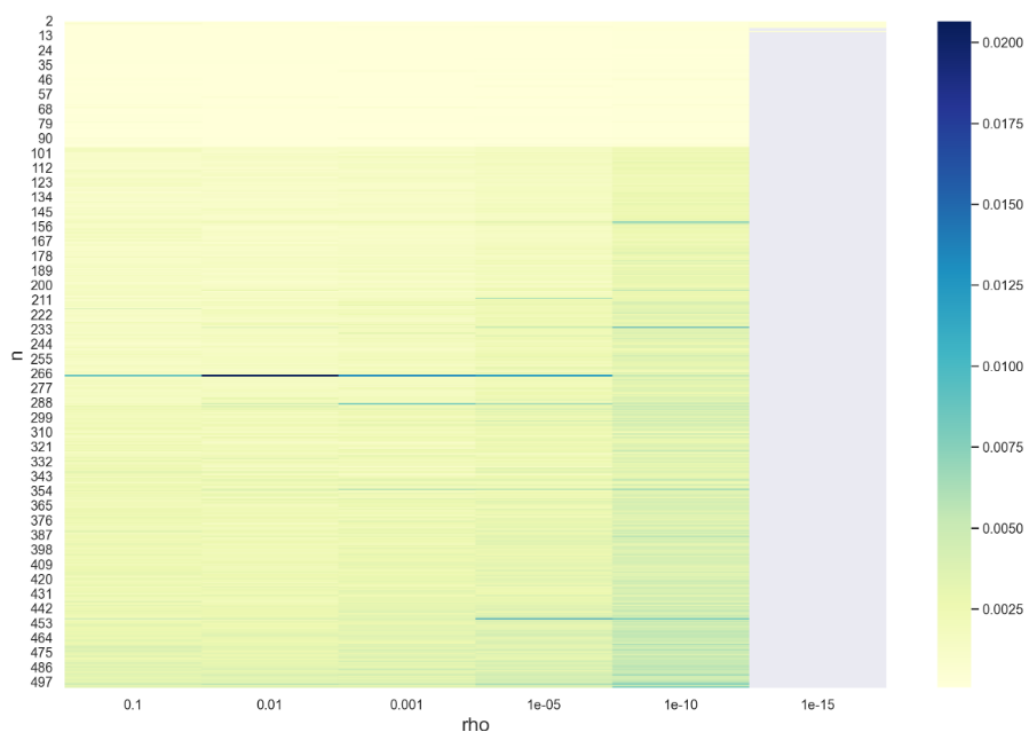
○ Wykres w skali logarytmicznej



Rys. 1.4.2.4. Wykres czasów obliczeń w zależności od wartości n oraz ρ (skala logarytmiczna)
(dla 2. kryterium)

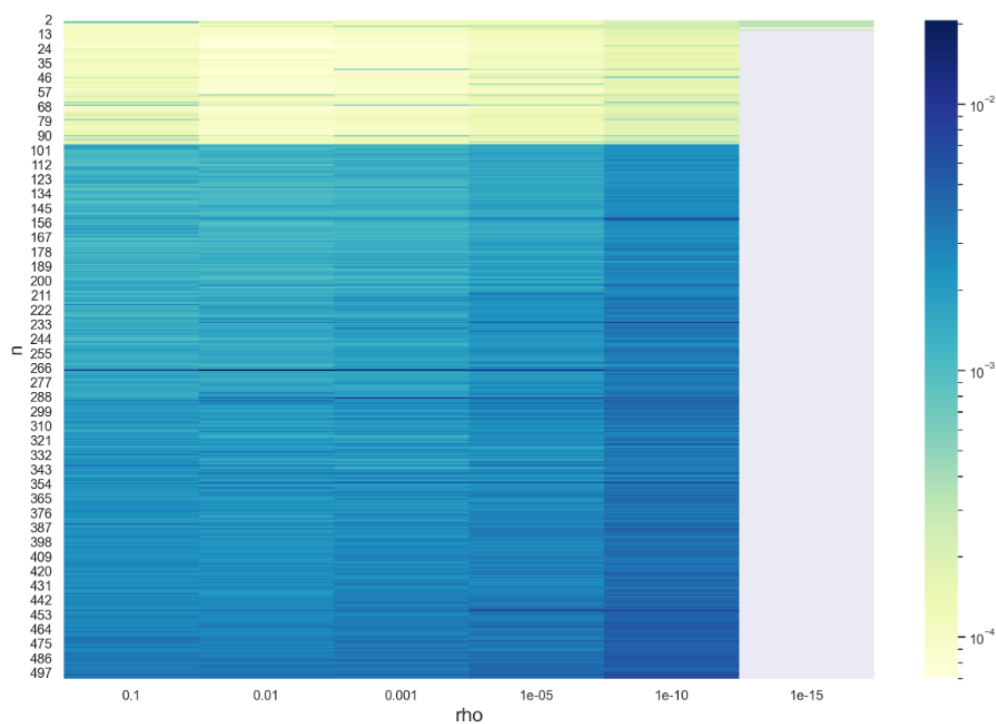
- Wykresy czasów obliczeń w zależności od wartości n oraz ρ (dla 2. kryterium stopu – 2.2.)

- Wykres w skali liniowej



Rys. 1.4.2.5. Wykres czasów obliczeń w zależności od wartości n oraz ρ (skala liniowa)
(dla 1. kryterium)

- Wykres w skali logarytmicznej



Rys. 1.4.2.6. Wykres czasów obliczeń w zależności od wartości n oraz ρ (skala logarytmiczna)
(dla 2. kryterium)

4.2.3. Błędy obliczeń

- Zestawienie błędów obliczeń w zależności od wartości n oraz ρ (dla 1. kryterium stopu – 2.1.)

W poniższej tabeli możemy zaobserwować, że podobnie, jak w liczby iteracji, największy wpływ na błąd obliczeń ma wartość ρ . Im mniejsza wartość ρ tym otrzymujemy lepsze przybliżenie.

	ρ					
	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-10}	10^{-15}
2	1,06252E-03	9,65927E-05	9,65927E-05	7,98287E-07	4,95662E-12	0,00000E+00
15	1,60687E-03	1,31020E-04	9,67970E-06	1,14652E-06	5,92070E-12	3,33067E-16
30	1,68947E-03	1,60293E-04	1,01264E-05	1,27148E-06	6,01330E-12	5,97873E-16
45	1,82284E-03	1,82319E-04	1,06501E-05	7,89554E-08	6,07160E-12	6,47366E-16
60	1,96172E-03	1,99593E-04	1,11246E-05	7,95869E-08	6,11435E-12	1,17495E-15
75	2,09412E-03	2,13817E-04	1,15478E-05	8,02083E-08	6,14842E-12	1,43042E-15
90	2,21701E-03	2,25861E-04	1,19241E-05	8,07969E-08	6,17678E-12	1,61269E-15
105	2,33030E-03	2,36326E-04	1,22633E-05	8,13521E-08	6,20093E-12	1,87098E-15
120	2,43488E-03	2,45560E-04	1,25705E-05	8,18730E-08	6,22203E-12	2,51950E-15
135	2,53163E-03	2,53838E-04	1,28520E-05	8,23641E-08	6,24121E-12	2,37339E-15
150	2,62157E-03	2,61326E-04	1,31109E-05	8,28268E-08	6,25804E-12	3,57519E-15
165	2,70543E-03	2,68173E-04	1,33512E-05	8,32652E-08	6,27387E-12	2,80867E-15
180	2,78401E-03	2,74471E-04	1,35748E-05	8,36806E-08	6,28826E-12	3,33252E-15
195	2,85782E-03	2,80310E-04	1,37844E-05	8,40762E-08	6,30137E-12	3,20237E-15
210	2,92747E-03	2,85746E-04	1,39812E-05	8,44530E-08	6,31401E-12	3,62994E-15
225	2,99332E-03	2,90837E-04	1,41671E-05	8,48136E-08	6,32527E-12	3,55791E-15
240	3,05582E-03	2,95620E-04	1,43429E-05	8,51586E-08	6,33624E-12	3,60780E-15
255	3,11524E-03	3,00133E-04	1,45099E-05	8,54899E-08	6,34647E-12	4,55191E-15
270	3,17190E-03	3,04402E-04	1,46688E-05	8,58082E-08	6,35579E-12	4,45890E-15
285	3,22601E-03	3,08456E-04	1,48205E-05	8,61150E-08	6,36497E-12	4,20568E-15
300	3,27782E-03	3,12312E-04	1,49654E-05	8,64106E-08	6,37370E-12	3,81051E-15
315	3,32749E-03	3,15992E-04	1,51044E-05	8,66963E-08	6,38178E-12	4,93144E-15
330	3,37522E-03	3,19508E-04	1,52377E-05	8,69724E-08	6,39014E-12	5,40942E-15
345	3,42113E-03	3,22877E-04	1,53660E-05	8,72399E-08	6,39796E-12	5,48297E-15
360	3,46537E-03	3,26109E-04	1,54894E-05	8,74990E-08	6,40529E-12	4,95886E-15
375	3,50804E-03	3,29215E-04	1,56085E-05	8,77505E-08	6,41239E-12	5,80191E-15
390	3,54927E-03	3,32205E-04	1,57234E-05	8,79948E-08	6,41896E-12	6,32925E-15
405	3,35088E-04	3,35088E-04	1,58346E-05	8,82323E-08	6,42601E-12	6,76690E-15
420	3,37869E-04	3,37869E-04	1,59421E-05	8,84633E-08	6,43236E-12	8,30963E-15
435	3,40558E-04	3,40558E-04	1,60463E-05	8,86884E-08	6,43849E-12	7,95109E-15
450	3,43159E-04	3,43159E-04	1,61474E-05	8,89076E-08	6,44424E-12	8,94539E-15
465	3,45679E-04	3,45679E-04	1,62455E-05	8,91216E-08	6,45003E-12	8,62694E-15

480	3,48121E-04	3,48121E-04	1,63408E-05	8,93303E-08	6,45577E-12	9,56920E-15
495	3,50491E-04	3,50491E-04	1,64335E-05	8,95341E-08	6,46110E-12	8,56312E-15
500	3,51265E-04	3,51265E-04	1,64638E-05	8,96010E-08	6,46271E-12	8,14786E-15

Tabela. 1.4.2.5. Błędy obliczeń w zależności od n oraz ρ (dla 1. kryterium stopu)

- Zestawienie błędów obliczeń w zależności od wartości n oraz ρ (dla 2. kryterium stopu – 2.2.)

	ρ					
	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-10}	10^{-15}
2	9,65927E-05	8,78115E-06	8,78115E-06	7,25715E-08	4,50617E-13	0
15	1,31020E-04	9,67970E-06	1,14652E-06	8,24348E-09	5,13335E-13	-
30	1,60293E-04	1,01264E-05	1,27148E-06	8,36403E-09	5,09271E-13	-
45	1,82319E-04	1,06501E-05	1,34960E-06	8,43557E-09	5,07205E-13	-
60	1,99593E-04	1,11246E-05	1,40652E-06	8,48783E-09	5,05776E-13	-
75	2,13817E-04	1,15478E-05	1,45169E-06	8,53030E-09	5,04496E-13	-
90	2,25861E-04	1,19241E-05	1,48905E-06	8,56597E-09	5,03761E-13	-
105	2,36326E-04	1,22633E-05	1,52107E-06	8,59717E-09	5,02779E-13	-
120	2,45560E-04	1,25705E-05	1,54902E-06	8,62477E-09	5,02237E-13	-
135	2,53838E-04	1,28520E-05	1,57390E-06	8,64976E-09	5,01848E-13	-
150	2,61326E-04	1,31109E-05	1,59627E-06	8,67247E-09	5,01221E-13	-
165	2,68173E-04	1,33512E-05	1,61665E-06	8,69345E-09	5,00913E-13	-
180	2,74471E-04	1,35748E-05	1,63534E-06	8,71285E-09	5,00371E-13	-
195	2,80310E-04	1,37844E-05	1,65261E-06	8,73100E-09	5,00335E-13	-
210	2,85746E-04	1,39812E-05	1,66866E-06	8,74799E-09	5,00264E-13	-
225	2,90837E-04	1,41671E-05	1,68367E-06	8,76403E-09	4,99648E-13	-
240	2,95620E-04	1,43429E-05	1,69774E-06	8,77918E-09	4,99639E-13	-
255	3,00133E-04	1,45099E-05	1,71101E-06	8,79358E-09	4,99301E-13	-
270	3,04402E-04	1,46688E-05	1,72355E-06	8,80727E-09	4,98901E-13	-
285	3,08456E-04	1,48205E-05	1,73545E-06	8,82035E-09	4,98551E-13	-
300	3,12312E-04	1,49654E-05	1,74676E-06	8,83286E-09	4,98149E-13	-
315	3,15992E-04	1,51044E-05	1,75755E-06	8,84486E-09	4,97973E-13	-
330	3,19508E-04	1,52377E-05	1,76785E-06	8,85638E-09	4,97986E-13	-
345	3,22877E-04	1,53660E-05	1,77772E-06	8,86748E-09	4,98016E-13	-
360	3,26109E-04	1,54894E-05	1,78718E-06	8,87817E-09	4,97874E-13	-
375	3,29215E-04	1,56085E-05	1,79627E-06	8,88850E-09	4,98105E-13	-
390	3,32205E-04	1,57234E-05	1,80502E-06	8,89847E-09	4,97525E-13	-
405	3,35088E-04	1,58346E-05	1,81346E-06	8,90814E-09	4,97593E-13	-
420	3,37869E-04	1,59421E-05	1,82159E-06	8,91749E-09	4,97703E-13	-
435	3,40558E-04	1,60463E-05	1,82946E-06	8,92658E-09	4,97513E-13	-
450	3,43159E-04	1,61474E-05	1,83707E-06	8,93540E-09	4,97498E-13	-

465	3,45679E-04	1,62455E-05	1,84444E-06	8,94397E-09	4,97291E-13	-
480	3,48121E-04	1,63408E-05	1,85158E-06	8,95231E-09	4,97377E-13	-
495	3,50491E-04	1,64335E-05	1,85852E-06	8,96043E-09	4,97101E-13	-
500	3,51265E-04	1,64638E-05	1,86078E-06	8,96309E-09	4,96835E-13	-

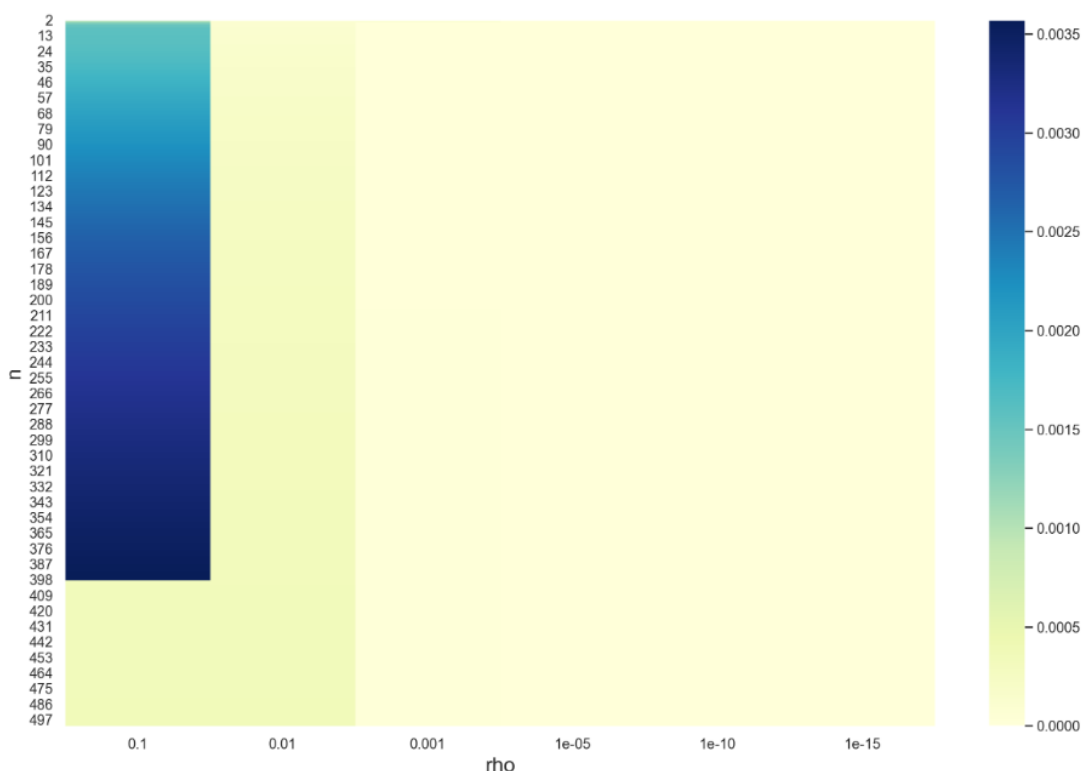
Tabela. 1.4.2.6. Błędy obliczeń w zależności od n oraz ρ (dla 2. kryterium stopu)

- **Wykres błędów obliczeń w zależności od wartości n oraz ρ (dla 1. kryterium stopu – 2.1.)**

Jak możemy zauważyć, zmniejszanie wartości ρ powoduje znaczny wzrost dokładności obliczeń. Możemy również zaobserwować, że zwiększanie wartości n nie powoduje jednoznacznie pogorszenia dokładności obliczeń.

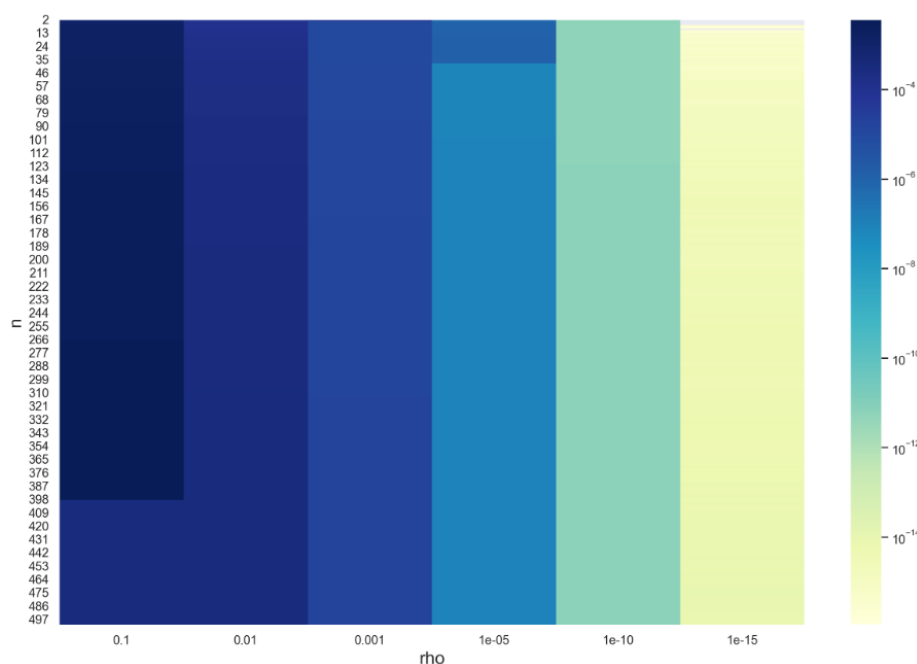
Wyjaśnienie tego zjawiska jest proste. Dzieje się tak, dlatego, że wykonujemy różną liczbę iteracji (tyle, ile potrzeba, aby spełnione zostało kryterium stopu). Może się więc zdarzyć, że wartość, dla której uzyskujemy bardzo duży błąd (w porównaniu do pozostałych wartości) zostanie uznana za wystarczająco dokładną, ponieważ spełnione będzie kryterium stopu. Wówczas, dalsze zwiększanie wartości n powoduje, że błąd obliczeń jest większy (przy takiej samej jak poprzednio liczbie iteracji), więc może się okazać, że tym razem, dla tej samej liczby iteracji, co poprzednio, wynik nie jest wystarczająco dokładny. Wówczas konieczne jest wykonanie jeszcze jednej iteracji, które powoduje, że otrzymujemy znacznie wyższą dokładność wyniku niż wcześniej, a więc na poniższym wykresie, obserwujemy gwałtowną zmianę barwy podczas zwiększania wartości n .

- **Wykres w skali liniowej**



Rys. 1.4.2.7. Wykres błędów obliczeń w zależności od wartości n oraz ρ (skala liniowa) (dla 1. kryterium stopu)

○ Wykres w skali logarytmicznej

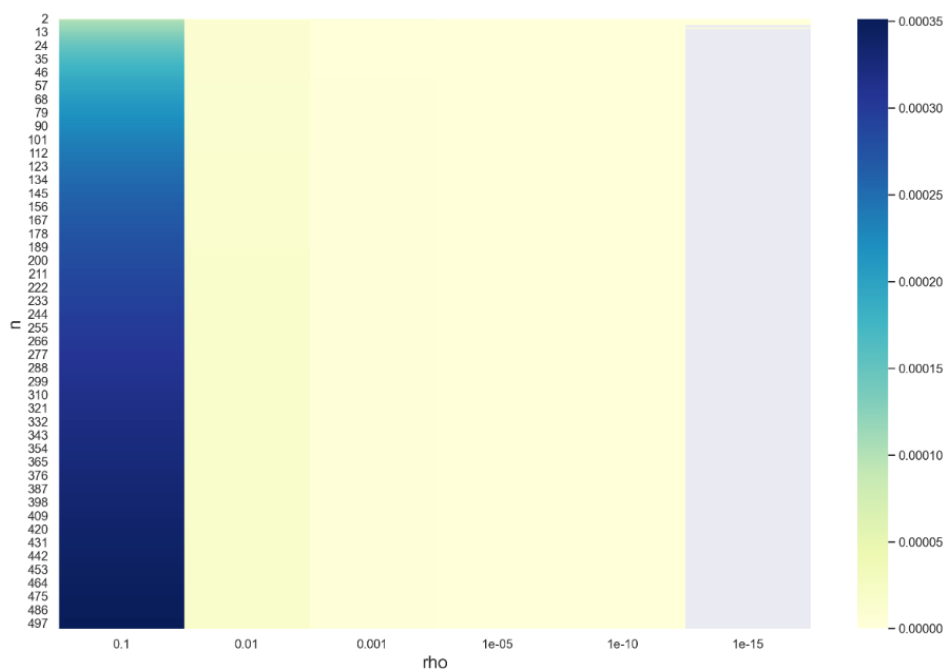


Rys. 1.4.2.8. Wykres błędów obliczeń w zależności od wartości n oraz ρ (skala logarytmiczna)
(1. Kryterium stopu)

- Wykres błędów obliczeń w zależności od wartości n oraz ρ
(dla 2. kryterium stopu – 2.2.)

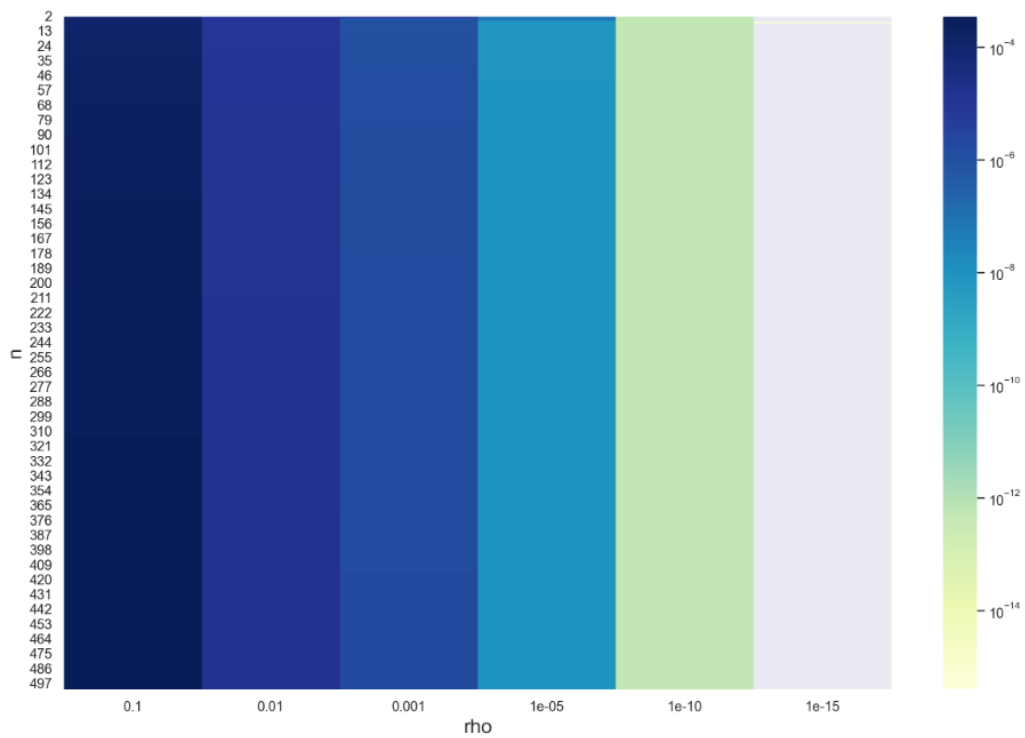
W przypadku tego kryterium, obserwujemy zależność podobną jak poprzednio. Ponownie, zmniejszanie wartości ρ prowadzi do zmniejszenia błędów, natomiast zwiększanie wartości n , zwiększa błąd.

○ Wykres w skali liniowej



Rys. 1.4.2.9. Wykres błędów obliczeń w zależności od wartości n oraz ρ (skala liniowa)
(2. kryterium stopu)

○ Wykres w skali logarytmicznej



Rys. 1.4.2.10. Wykres błędów obliczeń w zależności od wartości n oraz ρ (skala logarytmiczna)
(2. kryterium stopu)

4.3. Wpływ wektora początkowego na rezultaty obliczeń

W celu sprawdzenia wpływu wektora początkowego na rezultat obliczeń, **TODO**

III. Zadanie 2

1. Wprowadzenie

1.1. Opis problemu

Zadanie polegało na znalezieniu wartości promienia spektralnego **macierzy iteracji** dla różnych rozmiarów układu z zadania 1. (różnych wartości n). Należało również sprawdzić, czy spełnione są założenia o zbieżności metody dla zadanego układu, a także opisana miała zostać metoda znajdowania promienia spektralnego.

2. Rozwiązanie

2.1. Sposób znajdowania promienia spektralnego

2.1.1. Wyznaczanie macierzy iteracji

Mamy do rozwiązania układ równań postaci:

$$Ax = b$$

gdzie:

- A jest macierzą o wymiarach $n \times n$,
- x jest wektorem n niewiadomych,
- b jest wektorem danych.

(2.2.1.)

Zapisujemy macierz A w postaci sumy macierzy:

$$A = B + R$$

gdzie:

- B jest macierzą, dla której łatwo można wyznaczyć macierz odwrotną B^{-1} (w naszym przypadku będzie to macierz diagonalna),
- R jest pozostałą częścią macierzy A ($R = A - B$),

(2.2.2.)

Po połączeniu wzorów (2.2.1.) oraz (2.2.2), otrzymujemy:

$$A \cdot x = (B + R) \cdot x = b$$

$$B \cdot x = -R \cdot x + b$$

$$B \cdot x = -(A - B) \cdot x + b$$

(2.2.3.)

Wyznaczone w poprzednim punkcie równanie, możemy zapisać w postaci iteracyjnej:

$$B \cdot x^{(i+1)} = -(A - B) \cdot x^{(i)} + b$$

$$x^{(i+1)} = -B^{-1} \cdot (A - B) \cdot x^{(i)} + B^{-1} \cdot b$$

$$x^{(i+1)} = I - B^{-1} \cdot A \cdot x^{(i)} + B^{-1} \cdot b$$

(2.2.4.)

Macierz $I - B^{-1} \cdot A$ oznaczamy jako M i nazywamy macierzą iteracji, a więc:

$$M = I - B^{-1} \cdot A$$

(2.2.5.)

2.1.2. Obliczanie promienia spektralnego

Promień spektralny macierzy jest wartością własną macierzy o maksymalnej wartości bezwzględnej. Szukamy więc takiej wartości własnej, która spełnia poniższy warunek:

$$\rho(A) = \max \{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\} \quad (2.2.1.)$$

Wartości własne macierzy A są pierwiastkami jej wielomianu charakterystycznego, który dany jest wzorem:

$$\omega_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

gdzie:

- λ jest wartością własną macierzy A ,
- I jest macierzą jednostkową.

(2.2.2.)

**Macierz A w zamieszczonych wyżej równaniach nie jest macierzą A z pierwszego zadania, lecz oznacza dowolną macierz o wymiarach $n \times n$. W przypadku tego zadania, macierz A z powyższych wzorów odpowiada macierzy iteracji M .*

Do wyznaczenia wartości własnych macierzy iteracji M wykorzystałem funkcję `linalg.eigvals` z biblioteki `numpy`. Z wartości zwróconych przez funkcję wybrałem tę, która jest największa co do wartości bezwzględnej, będącą promieniem spektralnym.

2.1.3. Sprawdzanie warunku zbieżności

Warunkiem koniecznym i wystarczającym zbieżności metody jest poniższy warunek:

$$\rho(M) < 1 \quad (2.2.3.)$$

Tak więc, żeby sprawdzić, czy metoda jest zbieżna, wystarczy zbadać, czy promień spektralny macierzy iteracji jest mniejszy niż 1.

3. Rezultaty

Tabela poniżej zawiera wybrane wartości promieni spektralnych (dla wybranych n).

n	$\rho(M)$	n	$\rho(M)$	n	$\rho(M)$	n	$\rho(M)$
10	0,0909090909090909	110	0,0909090909090914	210	0,0909090909090911	310	0,0909090909090911
20	0,0909090909090909	120	0,0909090909090909	220	0,0909090909090911	320	0,0909090909090911
30	0,0909090909090911	130	0,0909090909090908	230	0,0909090909090914	330	0,0909090909090912
40	0,0909090909090908	140	0,0909090909090911	240	0,0909090909090912	340	0,0909090909090910
50	0,0909090909090911	150	0,0909090909090908	250	0,0909090909090908	350	0,0909090909090910
60	0,0909090909090907	160	0,0909090909090908	260	0,0909090909090912	360	0,0909090909090914
70	0,0909090909090909	170	0,0909090909090910	270	0,0909090909090909	370	0,0909090909090911
80	0,0909090909090913	180	0,0909090909090914	280	0,0909090909090914	380	0,0909090909090912
90	0,0909090909090911	190	0,0909090909090912	290	0,0909090909090906	390	0,0909090909090908
100	0,0909090909090911	200	0,0909090909090910	300	0,0909090909090909	400	0,0909090909090909

Tabela. 2.3.1.1. Promienie spektralne macierzy iteracji dla wybranych wartości n .

Obserwując wartości w tabeli 2.3.1.1., możemy dojść do wniosku, że wartość promienia spektralnego, w przypadku macierzy iteracji badanego układu równań, nie zależy od n . Różnice między promieniami spektralnymi dla różnych n są marginalne, dlatego zamieściłem tylko część z obliczonych wartości.

Sprawdziłem również, czy dla wszystkich n od 2 do 500 włącznie, spełniony jest warunek zbieżności (2.2.3.). Okazuje się, że każda z wyznaczonych wartości promienia spektralnego spełnia ten warunek, więc metoda jest zbieżna dla wszystkich badanych n .

W tym miejscu warto jeszcze zauważyć, że widzieliśmy, iż w przypadku 2. kryterium stopu, nie otrzymaliśmy rozwiązań dla większości n , gdy ρ miało wartość 10^{-15} . Tak jak już wcześniej pisałem, nie wynikało to z niezbieżności metody (ponieważ metoda jest zbieżna), a jedynie problemem był błąd zaokrągleń liczb (niewystarczająca dokładność reprezentacji liczb zmiennoprzecinkowych w komputerze).

IV. Wnioski

TODO