СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ

Спосіб запису чисел за допомогою символів називається **системою числення**.

Унарна (одинична, різна) система числення - непозиційних система числення з єдиною цифрою, яка позначає 1.У якості єдиної «цифри» використовується «1», риска (|), камінчик, кісточка рахунків, вузлик, зарубка і ін. У цій системі число n записується за допомогою n одиниць. Наприклад, 3 в цій системі буде записано як |||. Мабуть, це хронологічно перша система числення кожного народу, хто заволодів рахунком

Зазвичай ми користуємося **десятковою системою числення**. Вона використовує для запису чисел цифри від ***0*** до ***9***, тобто всього десятьма символами.

Також на значення чисел, записаних десятковою системою числення, впливає не тільки символи, з яких складається запис, а й їх розташування. Тобто 245 і 452 це різні числа, на відміну від унарної системи числення, в якій не важливе місце розташування засічок/вузликів, а тільки їхня кількість. Ця властивість називається **позиційністю**, а система числення, що її має, називається **позиційною системою числення**.

Місця розташування символів у числі називаються **розрядами**, нумеруються вони з права наліво. Розглянемо число 333. Найправіша трійка означає просто три. Лівіша трійка означає тридцять. Найлівіша трійка означає 300. Тепер складемо докупи значення розрядів: 300+30+3 = 333. Значення цифри ***3*** змінюється в залежності від розташування в 10 раз. Як відомо, зазвичай лічать якісь величини починаючи з одиниці, але розряди починають лічити з нуля, тобто найправіший розряд нульовий, а лівіший за нього - перший і т.д. Розглянемо десяткове число 238. Цифра 8 знаходиться в нульовому розряді, або **розряді одиниць** і важить як 8 одиниць, тобто 8. Цифра 3 знаходиться в першому розряді, або **розряді десяток** і важить як 3 десятки, тобто 30. Цифра ***2*** знаходиться в другому розряді, або **розряді сотень** і важить як дві сотні тобто 200. Тепер додаємо значення всіх розрядів числа і отримаємо його значення: 200+30+8=238 . Довжину чисел визначають за його розрядністю. Тобто 2345 - чотирирозрядне число, а 43 - дворозрядне.

Десяткову систему числення іноді також називають **системою числення з десятковою основою**. Значення кожного окремого розряду в десятковій системі числення дорівнює: число*$10^{\text{Номер розряду}}$

Розглянемо десяткове число 1981:

Розряд одиниць - 0 розряд: $10^0*1=1$
Розряд десятків - 1 розряд: $10^1*8=80$
Розряд сотень - 2 розряд: $10^2*9=900$
Розряд тисяч - 3 розряд: $10^3*1=1000$
Підсумуємо значення всіх розрядів: 1 + 80 + 900 + 1000 = 1981

Двійкова система числення використовує для запису чисел тільки два символи, зазвичай 0 (нуль) та 1 (одиницю). Двійкова система числення є позиційною системою числення, база якої дорівнює двом. Завдяки тому, що таку систему доволі просто використовувати у електричних схемах, двійкова система отримала широке розповсюдження у світі обчислювальних пристроїв.

Основа (кількість цифр): 2

Алфавіт (використовувані цифри): 0, 1

Двійкове число можна представити як послідовність будь-яких об'єктів, які можуть знаходитися в одному з двох можливих станів. Наприклад:

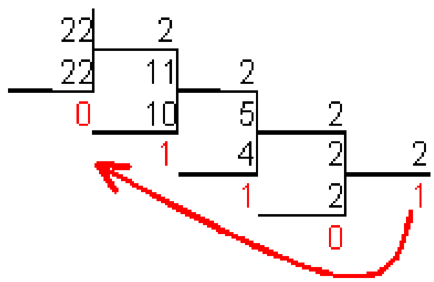
- числа, що можуть приймати значення 0 або 1:
- позиції, на яких можуть стояти хрестики або нулики: x o x o o x x
- вузли електричної схеми, які може бути, а може не бути заструмлено
- ділянки магнітної смужки, які можуть бути, а можуть не бути намагнічено

Застосування: у дискретній математиці, інформатиці, програмуванні.

Найпоширенішою для подання чисел у пам'яті комп'ютера є двійкова система числення. За допомогою двійкового коду кодується вся інформація к комп’ютері. Для зображення чисел у цій системі необхідно дві цифри: 0 і 1, тобто достатньо двох стійких станів фізичних елементів. Ця система є близькою до оптимальної за економічністю.

Переведення цілого числа з десяткової системи числення у будь-яку іншу здійснюється шляхом послідовного ділення числа на основу нової системи числення. Ділення виконується до тих пір, поки остання частка не стане менше дільника. Отримані остачі від ділення, взяті у зворотному порядку, будуть значеннями розрядів числа в новій системі числення. Остання частка дає старшу цифру числа.

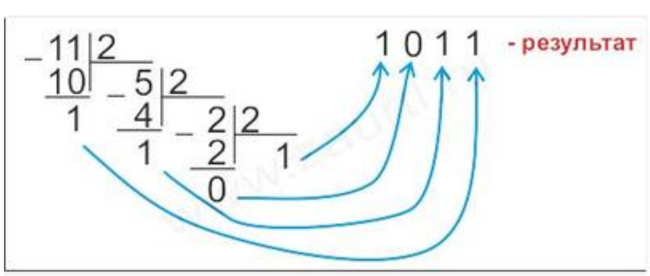
Приклад 1. Число 22_{10} перевести в двійкову систему числення.



1. Спершу ділимо 22 (число, яке треба перевести з десяткової системи числення в двійкову) на 2 (основу двійкової системи числення). Ділитися без остачі, результат 11 записуємо, залишок від ділення - 0.
2. Ділимо 11 (результат попереднього розподілу) на 2, результат - 5 - записуємо, залишок від ділення - 1.
3. Ділимо 5 (результат попереднього розподілу) на 2, результат - 2 - записуємо, залишок від ділення - 1.
4. Ділимо 2 (результат попереднього розподілу) на 2, результат - 1 - записуємо, залишок від ділення - 0.
5. Результатом попереднього розподілу було 1, так що зупиняємо поділу, переходимо до записування результату
6. двійкового числа - еквівалентом десятеричного числа 22 - буде число, отримане записуванням залишків від ділення всіх кроків в зворотному порядку: від 1 отриманої на кроці 4, до 0 отриманого на кроці 1. В результаті отримуємо 10110

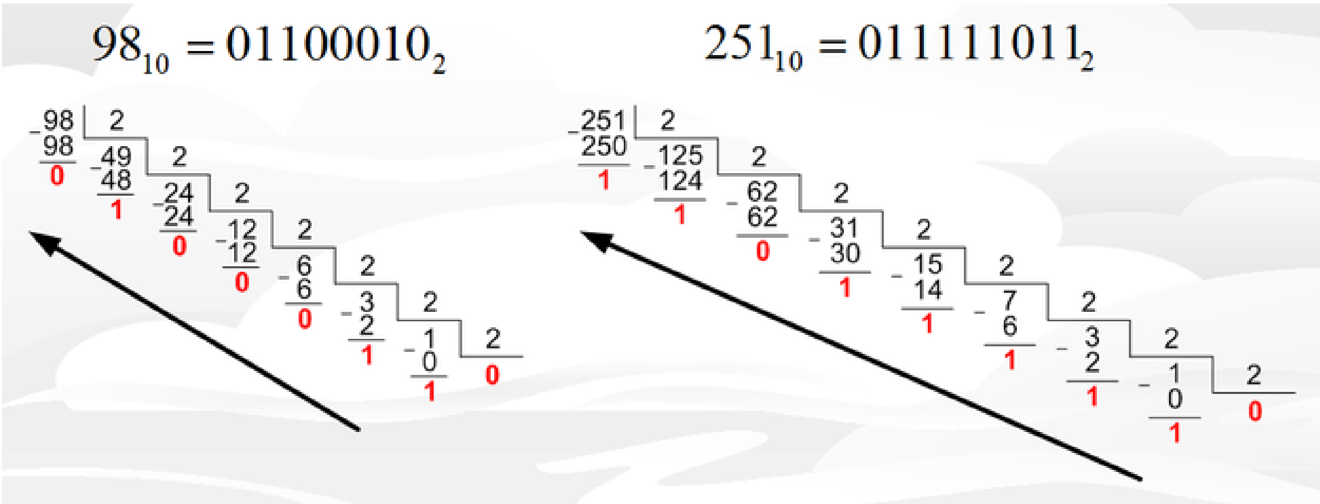
$22_{10}=10110_2$ (в даному записі 10-ка та 2-ка в нижньому індексі позначає систему числення — десяткову та двійкову відповідно)

Приклад. Перевести число 11_{10} в двійкову систему числення



Приклад. $98_{10} = (?)_2$

Приклад. $251_{10} = (?)_2$



Переведення **дробових чисел у двійкову систему**:

1. Можна перевести окремо цілу частину числа і дробову
2. Вибирається ціла частина і переводиться за алгоритмом, наведеним вище
3. Дробова частина множиться на 2. Ціла частина результату множення записується до дробової частини результуючого числа.
4. Крок 3 повторюється, доки в дробовій частині не вийде 0

Приклад 1. Перевести $6{,}25_{10}$ в двійкову систему числення

1. Ціла частина 6_{10}. $6 = 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0 = 110_2$
2. Дробова частина $0{,}25_{10}$
   a. 0,25 * 2 = 0,5 (нуль записується, дробова частина залишається) – $110{,}\mathbf{0}_2$
   b. 0,5 * 2 = 1,0 (одиниця записується, у дробовій частині нуль – алгоритм завершено) – $110{,}0\mathbf{1}_2$

	Ціла частина	Дробова частина
×	0	25
	2	
×	0	5
	2	
	1	0

Для **переведення двійкового числа в десяткове** необхідно його записати у вигляді многочлена, що складається з творів цифр числа і відповідного ступеня числа 2, і обчислити за правилами десяткової арифметики:

$$X_2 = A_n \cdot 2^{n-1} + A_{n-1} \cdot 2^{n-2} + A_{n-2} \cdot 2^{n-3} + \ldots + A_2 \cdot 2^1 + A_1 \cdot 2^0$$

Той самий алгоритм, але простіше: Кожна цифра числа помножається на базу системи числення, в якій це число знаходиться, (для двійкової — 2) в степені його розряду. Число-еквівалент в десятковій системі числення знаходиться як сума усіх результатів множення.

Розглянемо на прикладі

43210 розряди

$$10011_2 = 1 \cdot 2^4 + \cancel{0 \cdot 2^3} + \cancel{0 \cdot 2^2} + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$
$$= 16 + 2 + 1 = 19$$

1. Починаємо з нумерації розрядів двійкового числа: починаючи з 0 для найправішого числа. Для числа 10011_2 , що має 5 розрядів (4, 3, 2, 1, 0), бачимо розряди написані над кожною цифрою числа

2. Далі помножаємо кожну цифру числа у двійковій системі на 2 в степені його розряду. І сумуємо результаті для кожної цифри. Для числа 10011_2 маємо:

- першу цифру 1, що має розряд 4, множимо на $2^{4:}$ $1 * 2^4 = 16$
- другу цифру 0, що має розряд 3, множимо на $2^{3:}$ $0 * 2^3 = 0$
- третю цифру 0, що має розряд 2, множимо на $2^{2:}$ $0 * 2^2 = 0$
- четверту цифру 1, що має розряд 1, множимо на $2^{1:}$ $1 * 2^1 = 2$
- п’яту цифру 1, що має розряд 0, множимо на $2^{0:}$ $1 * 2^0 = 1$
- сумуємо результати множення 16 + 0 + 0 + 2 + 1 = 19
- отже $10011_2 = 19_{10}$

Для дробових чисел все те саме.

$110{,}001_2 = 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0 + 0 * 2^{-1} + 0 * 2^{-2} + 1 * 2^{-3} = 1 * 4 + 1 * 2 + 0 * 1 + 0 * 0{,}5 + 0 * 0{,}25 + 1 * 0{,}125 = 6{,}125$

При переведенні зручно користуватися таблицею ступенів:

	1^n	2^n	3^n	4^n	5^n	6^n	7^n	8^n	9^n	10^n
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
4	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561	10000
5	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049	100000
6	1	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441	1000000
7	1	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969	10000000
8	1	256	6561	65536	390625	1679616	5764801	16777216	43046721	100000000
9	1	512	19683	262144	1953125	10077696	40353607	134217728	387420489	1000000000
10	1	1024	59049	1048576	9765625	60466176	282475249	1073741824	3486784401	10000000000

Приклад. $11101000_2 = (?)_{10}$

$$11101000_2 = 1\cdot 2^7 + 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 232_{10}$$

Арифмечні дії в двійковій системі проводиться за тими ж правилами, що і в десятковій системі числення. Проте оскільки в двійковій системі числення використовуються тільки дві цифри 0 і 1, то арифметичні дії виконуються простіше, ніж десятковій системі.

Арифметика в двійковій системі числення заснована на використанні таблиць додавання, віднімання та множення.

Таблиця ***додавання***				
0	+	0	=	0
0	+	1	=	1
1	+	0	=	1
1	+	1	=	(1)0

Таблиця ***множення***				
0	·	0	=	0
0	·	1	=	0
1	·	0	=	0
1	·	1	=	1

Таблиця ***віднімання***				
0	–	0	=	0
1	–	0	=	1
1	–	1	=	0
(1)0	–	1	=	1

Складання двійкових чисел.

Додавання виконується поразрядно стовпчиком, починаючи з молодшого розряду і використовуючи таблиці двійкового складання вище:

Приклад 1. Виконати додавання двійкових чисел $1101_2 + 1110_2$

	1			
	+1	1	0	1
	1	1	1	0
1	1	0	1	1

1. Складаємо 0-ві розряди чисел: 1 + 0 = 1
2. Складаємо 1-ші розряди чисел   0 + 1 = 1
3. Складаємо 2-гі розряди чисел 1 + 1 = 0 і переносимо 1цю в наступний розряд
4. Складаємо 3-ті розряди чисел 1 + 1 + 1 (від попереднього розряду) = 1 і переносимо 1цю в наступний розряд
5. 4го розряду в вихідних числах немає, але є перенесена 1ця з попереднього розряду, тож записуємо 1цю попереду результуючого числа
6. Отже в результаті складання двійкових чисел $1101_2 + 1110_2$ отримуємо число 11011_2

Примітка. Верхній рядок на зображенні – допоміжний, він відображає перенесені 1ці в наступний розряд

Отже, $1101_2 + 1110_2 = 11011_2$.

Зробимо перевірку в десятковій системі числення :

$$\overset{3}{1}\overset{2}{1}\overset{1}{0}\overset{0}{1}{}_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13_{10};$$

$$\overset{3}{1}\overset{2}{1}\overset{1}{1}\overset{0}{0}{}_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 14_{10};$$

$$\overset{4}{1}\overset{3}{1}\overset{2}{0}\overset{1}{1}\overset{0}{1}{}_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 27_{10}.$$

Розглянемо **додавання двійкових чисел с дробовою частиною**. Виконати додавання двійкових чисел $10101,11_2 + 111,101_2$

		1	1	1	1				
	+1	0	1	0	1	,	1	1	
			1	1	1	,	1	0	1
	1	1	1	0	1	,	0	1	1

Додавання здійснюється таким самим чином, як цілі двійкові числа, але ми завжди записуємо числа таким чином, щоб коми були одна над іншою (додаємо 0 в кінці числа якщо необхідно)

1. Оскільки перше число має 2 цифри після коми, а друге – 3 цифри, дописуємо 0 в кінці першого числа
2. Додаємо -3 розряд чисел (після коми розряди нумеруються з -, перша цифра після коми має -1 розряд, друга -2 розряд, третя -3, и т.д.): 0 + 1 = 1
3. Додаємо -2 розряди: 0 + 1 = 1
4. Додаємо -1 розряди: 1 + 1 = 0, і переносимо одиницю у наступний 0й розряд (можете її побачити у верхньому рядку таблиці)
5. Додаємо 0й розряд: 1 + 1 + 1 (додаємо одиницю перенесену з -1го розряду) = 1 і переносимо одиницю у наступний 1й родряд
6. Додаємо 1й розряд: 0 + 1 + 1 = 0, переносимо одиницю в 2й розряд
7. Додаємо 2й розряд: 1 + 1 + 1 = 1, переносимо одиницю в 3й розряд
8. Додаємо 3й розряд: 0 + 0 + 1 = 1
9. Додаємо 4й розряд: 1 + 0 = 1

Отже $10101,11_2 + 111,101_2 = 11101,011_2$

Примітка. При додаванні кількох додатків необхідно стежити за одиницями перенесення в старші розряди, тому що ці одиниці можуть переходити не тільки в сусідні старші розряди, але і вище.

Розглянемо приклад **додавання декількох двійкових чисел**. Виконати додавання двійкових чисел $1111_2 + 1101_2 + + 10001_2 + 0111_2$.

		+1	1	1	1
		+1	1	0	1
		+0	1	1	1
	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0

Складаючи перший розряд отримують число 4, яке є трирозрядним двійковим числом 100. Отже, у цьому розряді буде 0, а перенесення одиниці роблять у 3-й вищий розряд. У 2-му розряді отримують 2, у цьому випадку перенесення роблять у сусідній вищий розряд. У 3-му розряді з урахуванням перенесення двох одиниць виходить число 5, яке дорівнює числу трирозрядному 101 у двійковій системі числення, тому одиницю в цьому розряді залишають, а 100 переносять через один розряд. У 4-му розряді отримують 2, отже, залишають 0, а одиницю переносять у сусідній вищий розряд. У 5-му розряді отримують 3, яке дорівнює дворозрядному числу 11, одиницю залишають, а другу одиницю переносять у вищий розряд.

Отже, $1111_2 + 1101_2 + 10001_2 + 0111_2 = 110100_2$.

Зробимо перевірку в десятковій системі числення:

$1111_2 = 15_{10}$;

$1101_2 = 13_{10}$;

$10001_2 = 17_{10}$;

$0111_2 = 7_{10}$;

$15 + 13 + 17 + 7 = 52_{10}$.

$\overset{5}{1}\overset{4}{1}\overset{3}{0}\overset{2}{1}\overset{1}{0}\overset{0}{0}{}_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 32 + 16 + 4 = 52_{10}$.

Віднімання двозначних чисел.

При відніманні двійкових чисел, якщо віднімається 0 – 1, то в даному випадку займається 1 зі старшого розряду. Ця займана одиниця зі старшого розряду переходить у молодший як дві одиниці (тобто старший розряд подається двійкою більшого степеня) 2 – 1 = 1. Відповідь записуємо 1.

Приклад. Виконати віднімання двійкових чисел $11001_2 - 1101_2$

	– 1	1	0	0	1
		1	1	0	1
		1	1	0	0

1. Спочатку віднімаємо 0й розряд чисел: 1-1 = 0

2. Віднімаємо 1й розряд чисел 0-0 = 0

3. Віднімаємо 2й розряд чисел 0-1 = 1 (займаємо 2 з наступного розряду, тобто нам необхідно відняти 1цю від наступного розряду)

4. Віднімаємо 3й розряд 1-1-1(віднімаємо 1цю тому що ми її займали в попереньому розряді) = 1 (займаємо 2 з найступного розряду)

5. Віднімаємо 4й розряд 1-1 (віднімаємо 1цю тому що її займали в попередньому розряді) = 0

6. Записуємо результат 01100_2

Таким чином, $11101_2 - 1101_2 = 1100_2$.

Зробимо перевірку в десятковій системі числення:

$\overset{4}{1}\overset{3}{1}\overset{2}{0}\overset{1}{0}\overset{0}{1}{}_2 = 25_{10}$;

$\overset{3}{1}\overset{2}{1}\overset{1}{0}\overset{0}{1}{}_2 = 13_{10}$;

$25_{10} - 13_{10} = 12_{10}$;

$\overset{3}{1}\overset{2}{1}\overset{1}{0}\overset{0}{0}{}_2 = 12_{10}$.

Розглянемо **віднімання двійкових чисел з дробовими числами**. Виконати віднімання двійкових чисел $11{,}01_2 - 1{,}1_2$

	–1	1	,	0	1
		1	,	1	
		1	,	1	1

Віднімання дробових двійкових чисел виконується таким самим чином, як віднімання цілих двійкових чисел, але ми завжди записуємо числа один над одним таким чином, щоб кома була на комою.

1. Віднімаємо -2й розряд: 1 – 0 = 1

2. Віднімаємо -1й розряд: 0 – 1 = 1 (займаємо 2 з наступного розряду)

3. Віднімаємо 0й розряд: 1 – 1 – 1 (віднімаємо 1цю оскільки ми її займали в попередньому розряді) = 1 (займаємо 2 з наступного розряду)
4. Віднімаємо 1й розряд: 1 – 1 (віднімаємо 1цю оскільки ми її займали в попередньому розряді)

Таким чином: $11,01_2 - 1,1_2 = 1,11_2$.

Зробимо перевірку в десятковій системі числення:

$\overset{1}{1}\overset{0}{1},\overset{-1}{0}\overset{-2}{1}{}_2 = 3,25_{10}$;

$\overset{0}{1},\overset{-1}{1}{}_2 = 1,5_{10}$;

$3,25_{10} - 1,5_{10} = 1,75_{10}$;

$\overset{1}{1},\overset{-1}{1}\overset{-2}{1}{}_2 = 1,75_{10}$.

Множення двійкових чисел.

При множенні в двійковій системі числення двох *n*-розрядних чисел отримуємо 2^n – розрядний добуток. Множення виконується за допомогою операцій зсуву і додавання.

Приклад 8. Виконати множення двійкових чисел $111_2 \cdot 101_2$

			1	1	1
			1	0	1
			+1	1	1
		+0	0	0	
	1	1	1		
1	0	0	0	1	1

1. Виконуємо множення 0го розряду другого двійкового числа (1) на перше число (111) порозрядово (за допомогою таблиці множення вище).

- множимо на 0й розряд 1 * 1 = 1
- множимо на 1й розряд 1 * 1 = 1
- множимо на 2й розряд 1 * 1 = 1
- отримуємо 111_2 в результаті множення 0го розряду 2го числа на 1ше число

2. Множимо 1й розряд 2го числа на 1ше число порозрядово (1й розряд 2го числа = 0, так що в результаті множення завжди отримуємо 0_2)

3. Множимо 2й розряд 2го числа на 1ше число порозрядово (ми вже маємо результат множення 1_2 на $111_2 = 111_2$)

4. Додаємо результати множення кожного розряду 2го числа на 1ше число з урахуванням зсуву (для 1го розряду — зсув вліво на 1 розряд, для 2го розряду — зсув вліво на 2 розряди) : $111_2 + 0000_2 + 11100_2 = 100011_2$

Зробимо перевірку в десятковій системі числення:

$\overset{2}{1}\overset{1}{1}\overset{0}{1}{}_2 = 7_{10}$;

$\overset{2}{1}\overset{1}{0}\overset{0}{1}{}_2 = 5_{10}$;

$7_{10} \cdot 5_{10} = 35_{10}$;

$\overset{5}{1}\overset{4}{0}\overset{3}{0}\overset{2}{0}\overset{1}{1}\overset{0}{1}{}_2 = 1\cdot2^5 + 0\cdot2^4 + 0\cdot2^3 + 0\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 1\cdot2^0 = 32 + 2 + 1 = 35_{10}$.

Результати множення суммуються з урахування розряду (зсуву). Як видно з наведених прикладів, операція множення може бути представлена як операції зсуву і підсумовування.

Розглянемо множення двійкових чисел з дробовими частинами. Виконати множення двійкових чисел $10{,}1_2 \cdot 1{,}01_2$

*		1	0	.	1	
			1	.	0	1
			1		0	1
+		0	0		0	
+	1	0	1			
	1	1	0		0	1

Множення дробових двійкових чисел виконується таким самим чином, як множення цілих двійкових чисел, але вкінці кома зсувається вліво на кількість знаків, що дорівнює сумі знаків після ком у множниках. $10{,}1_2$ - один знак після коми, $1{,}01_2$ – два знаки після коми. Таким чином для отриманого числа потрібно кому змістити на 1 + 2 = 3 знаки від кінця.

1. Записуємо числа один над одним таким чином, щоб кома була над комою. Далі множимо числа як цілі

2. Множимо -2й розряд 2го числа (1_2) на перше число без урахування коми (101_2) порозрядно, отримуємо 101_2
3. Множимо -1й розряд 2го числа 0_2 на перше число без урахування коми (101_2) порозрядно, отримуємо 000_2
4. Множимо 0й розряд 2го числа 1_2 на перше число без урахування коми (101_2) порозрядно, отримуємо 101_2
5. Додаємо результати множення з рахуванням зсуву (для -1 розряду зсув на 1 позицію вліво, для 0го розряду – на 2 позиції вліво): $101_2 + 0000_2 + 10100_2 = 11001_2$
6. Оскільки перше число мало 1 знак після кома, а друге – 2 знаки, результат множення повинен мати 1 + 2 = 3 знаки. Тож ставимо кому після трьох знаків зліва: $11{,}001_2$

Таким чином: $10{,}1_2 \cdot 1{,}01_2 = 11{,}001_2$.

Зробимо перевірку в десятковій системі числення:

$10{,}1_2 = 2{,}5_{10}$;

$1{,}01_2 = 1{,}25_{10}$;

$2{,}5_{10} \cdot 1{,}25_{10} = 3{,}125_{10}$;

$11{,}001_2 = 3{,}125_{10}$.

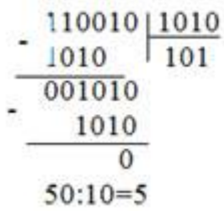
Поділ двозначних чисел.

Ділення двійкових чисел здійснюється за тими ж правилами, що й для десяткових. При цьому використовуються таблиці двійкового множення і віднімання.

Поділ у двійковій системі проводиться вирахуванням дільника зі зрушенням вправо, якщо залишок більше нуля.

Приклад. Знайти частку двох чисел, якщо:

1. Ділене більше дільника:



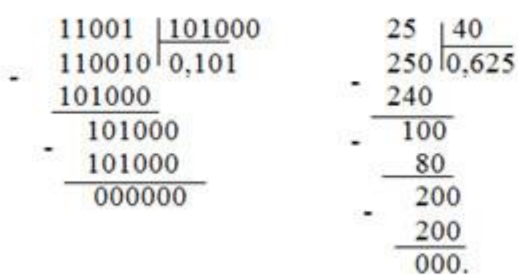
1) Так як дільник — 4розрядне число, від останніх 4х розрядів діленого числа віднімаємо дільник: 1100_2 — 1010_2 = 0010_2. До результату додаємо 1

2) До результату ділення на попередньому кроці додаємо дві цифри, що залишилися в діленого числа: 1010_2 -. До результату додаємо 0

3) Від отриманого числа віднімаємо дільник 1010_2 — 1010_2 = 0. До результату додаємо 1. Ділиться націло

4) В результаті отримуємо 101_2. Перевірку через 10річну системи числення наведено вище.

2. Ділене менше дільника:



1) Так як дільник більше діленого, результат ділення буде менше 1, тож пишемо до результату 0 та кому. До діленого додаємо 0

2) Від отриманого числа віднімаємо дільник 110010_2 — 101000_2 = 1010_2. В результат записуємо 1

3) До отриманого числа додаємо 0. Отримаємо число, яке менше дільника, тож додаємо ще один 0. До результату додаємо 0

4) Від отриманого числа віднімаємо дільник 101000_2 — 101000_2 = 0_2. В результат додаємо 1

5) Отримуємо $0{,}101_2$. Перевірку через 10річну системи числення наведено вище.

3. **Ділення дробових чисел**:

1) Привести дільник і ділене до цілих значень

2) Виконати ділення для цілих чисел.

$110.111_2 \div 101.1_2$ -> 110111 ÷ 101100

```
-   110111     | 101100
    101100     | 1.01
   ---------
-   00101100
      101100
   ---------
           0
```

1) Так як дільник — 6розрядне число, від останніх 6х розрядів діленого числа віднімаємо дільник: 110111_2 — 101100_2 = 001011_2. До результату додаємо 1

2) Так як у відніманні на першому кроці взяли участь всі цифри діленого, а результат віднімання менший за дільник, то до результату віднімання на попередньому кроці додаємо один 0 і ставимо кому в результаті ділення. Результат віднімання є 0010110_2 (перші нулі не мають значення, у прикладі нулі для наглядності), а результат ділення зараз 1,
0010110_2 = 10110_2. Це число все ще менше від дільника.

3) До 10110_2 (результат віднімання) додаємо 0, а до результату ділення також додаємо 0. Маємо 101100_2 і $1{,}0_2$ у результаті.

4) Від отриманого числа віднімаємо дільник 101100_2 — 101100_2 = 0. До результату додаємо 1. Результат $1{,}01_2$

Перевірка:

$110{,}111_2 = 6{,}875_{10}$

$101{,}1_2 = 5{,}5_{10}$

$1{,}01_2 = 1{,}25_{10}$

$6{,}875_{10} \div 5{,}5_{10} = 1{,}25_{10}$

Як видно з наведених прикладів, операція поділу може бути представлена як операції порівняння, зсуву і підсумовування.

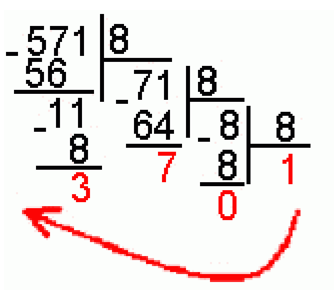
Вісімко́ва систе́ма чи́слення — позиційна цілочисельна система числення з основою 8. Для представлення чисел в ній використовуються цифри від 0 до 7.

Основа (кількість цифр): 8

Алфавіт (використовувані цифри): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

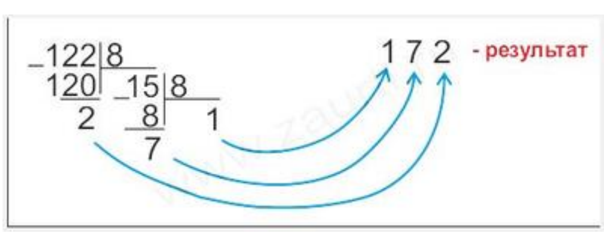
Переведення чисел з десяткової системі числення в будь-яку іншу здійснюється таким самим чином як переведення в двійкову: початкове число ділиться послідовно на базу системи числення, в яку мі це число переводимо. Результатом буде остатки ділення записані в зворотному напрямку.

Приклад 1. Число 571_{10} перевести в вісімкову систему числення.

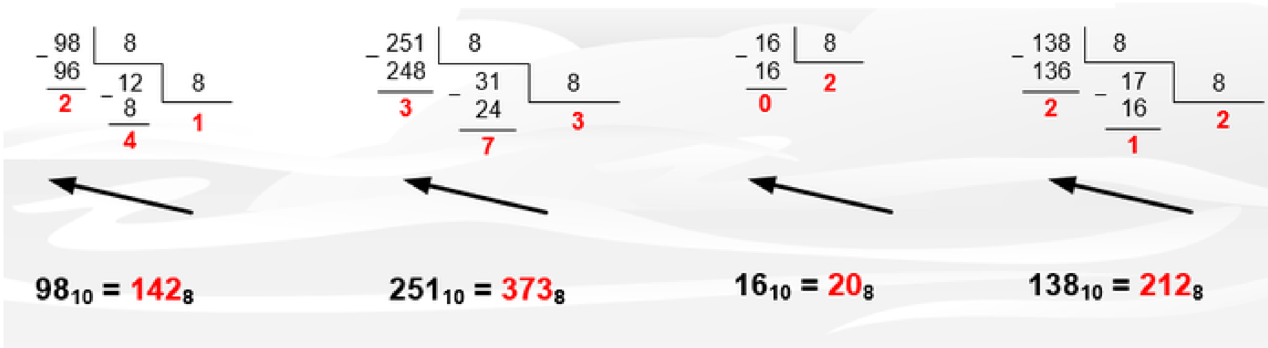


1. Початкове число 571 ділимо на 8 (основа вісімкової системи числення). Результат 71 записуємо, залишок від ділення — 3.
2. Результат ділення на попередньому кроці — 71 — ділимо на 8, отримуємо 8, залишок від ділення — 7.
3. Результат ділення на попередньому кроці — 8 — ділимо на 8, отримуємо 1, залишок від ділення 0
4. Результат ділення на попередньому кроці був 1, тож зупиняємо ділення на записуємо результат
5. Число в вісімковій системі числення - це послідовно записання залишки від ділення в зворотному порядку, тож $571_{10}=1073_8$

Приклад 2. Перевести число 122_{10} в вісімкову систему числення.



Ще декілька прикладів для перевірки:



Переведення **дробових десяткових чисел у вісімкову систему**

1. Переводиться ціла частина окремо і дробова окремо
2. Переводиться ціла частина
3. Дробова частина переводиться аналогічно до двійкової системи
   a. Дробова частина множиться на 8. Вся ціла частина добутку записується до результату як дробова частина
   b. Дробова частина добутку знову множиться на 8
   c. Процес повторюється доки дробова частина не стане 0

Приклад. Перевести $31{,}90625_{10}$ у вісімкову систему числення

1) Оберемо цілу частину та переведемо до вісімкової системи (значення - 31)

```
   31 | 8
 - 24 |-----
   -- |  3 | 8
    7  - 0 |---
         --| 0
         3
```

Результат – 37

2) Візьмемо дробову частину (значення – 0,90625)

3) Множимо дробову частину на 8 (0,90625 * 8 = 7,25) 7 додаємо до дробової частини результату (37). Зараз маємо 37,7

4) Залишок дробової частини (0,25) знову множимо на 8 (0,25 * 8 = 2). 2 додаємо до дробової частини і отримуємо $37{,}72_8$

5) Дробова частина добутку дорівнює 0. Алгоритм завершено

Для **переведення вісімкового числа в десяткове** необхідно його записати у вигляді многочлена, що складається з творів цифр числа і відповідного ступеня числа 8, і обчислити за правилами десяткової арифметики:

$$X_8 = A_n \cdot 8^{n-1} + A_{n-1} \cdot 8^{n-2} + A_{n-2} \cdot 8^{n-3} + \ldots + A_2 \cdot 8^1 + A_1 \cdot 8^0$$

Для зворотного переведення вісімкового числа в десяткове, застосовується той самий алгоритм, що й для переведення двійкового числа у десяткове:

Кожна цифра числа помножається на базу системи числення, в якій це число знаходиться, в степені його розряду. Число-еквівалент в десятковій системі числення знаходиться як сума усіх результатів множення.

2 1 0 розряди

$$\begin{aligned} 144_8 &= 1\cdot 8^2 + 4\cdot 8^1 + 4\cdot 8^0 \\ &= 64 + 32 + 4 = 100 \end{aligned}$$

1. Починаємо з нумерації розрядів вісімкового числа: починаючи з 0 для найправішого числа. Для числа 144_8 , що має 3 розряди (2, 1, 0), бачимо розряди написані над кожною цифрою числа

2. Далі помножаємо кожну цифру числа у вісімковій системі числення на 8 в степені його розряду. І сумуємо результаті для кожної цифри. Для числа 144_8 маємо:

- першу цифру 1, що має розряд 2, множимо на 8^{2}: $1 * 8^2 = 64$
- другу цифру 4, що має розряд 1, множимо на 8^{1}: $4 * 8^1 = 32$
- третю цифру 4, що має розряд 0, множимо на 8^{0}: $4 * 8^0 = 4$
- сумуємо результати множення 64 + 32 + 4 = 100
- отже $144_8 = 100_{10}$

Приклад. Число 75013_8 перевести в десяткову систему числення.

$$75013_8 = 7 \cdot 8^4 + 5 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 31243_{10}$$

Переведення дробового числа з вісімкової системи числення у десяткову

Переведення відбувається порозрядним множенням на 8 у відповідній степені і складанням (розряди після коми нумеруються з -, перша цифра після коми маж розряд -1, друга -2, третя -3, и т.д.)

Приклад. Перевести $145{,}01_8$ у десяткову систему

$145{,}01_8 = 1*8^2 + 4*8^1 + 5*8^0 + 0*8^{-1} + 1*8^{-2} = 64 + 32 + 5 + 0*0{,}125 + 1*0{,}015625 = 101{,}015625$

- першу цифру 1, що має розряд 2, множимо на $8^{2:}$ $1 * 8^2 = 64$
- другу цифру 4, що має розряд 1, множимо на $8^{1:}$ $4 * 8^1 = 32$
- третю цифру 4, що має розряд 0, множимо на $8^{0:}$ $5 * 8^0 = 5$
- першу цифру після коми, що має розряд -1, множимо на 8^{-1} $0 * 8^{-1} = 0$
- другу цифру після коми, що має розряд -2, множимо на 8^{-2} $1 * 8^{-2} = 0{,}015625$
- сумуємо результати множення 64 + 32 + 5 + 0 + 0,015625 = 101,015625
- отже $145{,}01_8 = 101{,}015625_{10}$

У вісімковій системі числення всі арифметичні операції проводяться за тими ж правилами, за якими ці дії виконуються в десятковій системі числення. При виконанні операцій додавання і віднімання зручно використовувати вісімкову таблицю складання, при виконання операції множення використовуємо таблицю множення

Приклад. Додавання вісімкових чисел $741_8 + 252_8$

	7	4	1
	+2	5	2
1	2	1	3

1. Додаємо 0ві розряди чисел $1_8 + 2_8 = 3_8$
2. Додаємо 1ші розряди чисел $4_8 + 5_8 = 11_8$ (1цю залишаємо і 1цю переносимо в наступний розряд)
3. Додаємо 2гі розряди чисел $7_8 + 2_8 + 1_8$ (перенесена 1ця з попереднього розряду) $= 12_8$ (2ку залишаємо, 1цю переносимо в наступний розряд)
4. Записуємо результат 1213_8

Зробимо перевірку в десятковій системі числення:

$\overset{2}{7}\overset{1}{4}\overset{0}{1}{}_8 = 7{\cdot}8^2 + 4{\cdot}8^1 + 1{\cdot}8^0 = 481_{10};$

$\overset{2}{2}\overset{1}{5}\overset{0}{2}{}_8 = 2{\cdot}8^2 + 5{\cdot}8^1 + 2{\cdot}8^0 = 170_{10};$

$\overset{3}{1}\overset{2}{2}\overset{1}{1}\overset{0}{3}{}_8 = 1{\cdot}8^3+2{\cdot}8^2+1{\cdot}8^1+3{\cdot}8^0=651_{10};$

$481_{10} + 179_{10} = 651_{10}.$

Приклад. **Додавання дробових чисел** $777{,}23_8 + 201{,}17_8$

1. Записуємо числа так, щоб дробові частини були одна під одною
2. Виконуємо додавання як для цілих чисел
   a. Для розряду -2 сума 7 + 3 буде 12. 2 записуємо, а 1 переходить у старший розряд
   b. Для розряду -1 сума 2 + 1 = 3 і додаємо одиницю, що перейшла з попереднього розряду – сума = 4
   c. Для розряду 0 сума 7 + 1 = 10. 0 пишемо, 1 перейде у наступний розряд
   d. Для розряду 1 сума 7 + 0 = 7 і ще одиниця з попереднього розряду = 10. 0 запишемо і 1 перейде в наступний розряд
   e. Для розряду 2 сума 7 + 2 = 11 + 1 (з попереднього розряду) = 12. 2 запишемо і 1 у наступний розряд

		7	7	7	,	2	3
-		2	0	1	,	1	7
	1	2	1	0	,	4	2

Результат $777{,}23_8 + 201{,}17_8$ $1210{,}42_8$

Приклад. **Віднімання вісімкових чисел** $346_8 – 154_8$

_3	4	6
1	5	4
1	7	2

1. Віднімаємо 0ві розряди 6_8 - 4_8 = 2_8

2. Віднімаємо 1ші розряди 4_8 — 5_8 = 7_8 (займаємо 1цю у наступного розряду)

3. Віднімаємо 2гі розряди 3_8 - 1_8 - 1_8 (віднімаємо додаткову 1цю, бо вона була займана попереднім розрядом)

4. Записуємо результат 172_8

Зробимо перевірку в десятковій системі числення:

$\overset{2}{3}\overset{1}{4}\overset{0}{6}_8 = 3{\cdot}8^2 + 4{\cdot}8^1 + 6{\cdot}8^0 = 230_{10}$;

$\overset{2}{1}\overset{1}{5}\overset{0}{4}_8 = 1{\cdot}8^2 + 5{\cdot}8^1 + 4{\cdot}8^0 = 108_{10}$;

$230_{10} – 154_{10} = 122_{10}$;

$\overset{2}{1}\overset{1}{7}\overset{0}{2}{}_8 = 1 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 = 122_{10}.$

Приклад 2. **Віднімання дробових вісімкових чисе**л $37{,}72_8 - 25{,}2_8$

1. Для віднімання дробових потрібно записати числа одне під іншим так, щоб кома була над комою
2. Віднімаємо порозрядно
3. Записуємо результат

	3	7	,	7	2
-	2	5	,	2	
	1	2	,	5	2

Результат: $12{,}52_8$

Для множення вісімкових чисел необхідно використовувати наступну таблицю множення:

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Приклад. Виконати **множення вісімкових чисел** $31_8 \cdot 23_8$

	3	1	
	2	3	
7	3	3	

1. Виконуємо множення 0го розряду другого числа на 1ше число порозрядно: $3_8 * 31_8 = 113_8$ (спочатку множимо 3_8 на 0й розряд 1шого числа: $3_8 * 1_8 = 3_8$, потім множимо на 1й розряд 1го числа: $3_8 * 3_8 = 11_8$, отримуємо 113_8)

2. Виконуємо множення 1го розряду другого числа на 1ше число порозрядно: $2_8 * 31_8 = 62_8$ (спочатку множимо 2_8 на 0й розряд 1шого числа: $2_8 * 1_8 = 2_8$, потім множимо на 1й розряд 1го числа: $2_8 * 3_8 = 6_8$, отримуємо 62_8)

3. Додаємо результати множення з урахуванням зсуву для 1го розряду (на 1 цифру вліво): $113_8 + 620_8 = 733_8$

Зробимо перевірку в десятковій системі числення:

$\overset{1}{3}\overset{0}{1}_8 = 3 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 = 25_{10}$;

$\overset{1}{2}\overset{0}{3}_8 = 2 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 19_{10}$;

$25_{10} \cdot 19_{10} = 475_{10}$;

$\overset{2}{7}\overset{1}{3}\overset{0}{3}_8 = 7 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 475_{10}$.

Приклад 2, Множення дробових чисел $14{,}1_8 * 30{,}54_8$

*			1	4	1	
			3	0	5	4
				6	0	4
+			7	4	5	
+		0	0	0		
+	4	4	3			
	4	5	4	2	5	4

1. Можна записати числа в стовпчик без зап’ятих. Як цілі числа, але таким чином, щоб 0й розряд чисел був один на одним)
2. Множимо 0 розряд другого числа на перше число. За табличкою 4 * 4 = 20. Тож 0 запишемо, а 2 піде в 2 розряд першого числа. Для 2 розряду першого числа 4 * 1 = 4 + 2(з попереднього розряду) = 6
3. Множимо 1 розряд другого числа на перше число. Для 1 розряду першого числа 5 * 4 = 24 за табличкою. 4 запишемо, 2 в наступний розряд. Для 2 розряду першого числа 5 * 1 = 5 + 2(з попереднього розряду) = 7
4. Повторюємо для розрядів другого числа, що залишилися.
5. Сумуємо отримані добутки, враховуючи зсув на 1 для кожного наступного розряду. 604 + 7450 + 0 + 443000 = 454254_8
6. В першому множнику 1 цифра після коми, у другому – 2 цифри. Отже в результаті кома має бути зсунута на 3 цифри. 454254 -> $454{,}254_8$

Перевіримо:

$14{,}1_8 = 12{,}125_{10}$

$30{,}54_8 = 24{,}6875_{10}$

$12{,}125 * 24{,}6875 = 299{,}3359375_{10}$

$454{,}254_8 = 299{,}3359375_{10}$

Приклад. **Ділення вісімкових чисел** $31{,}306_8 \div 14{,}1_8$

1. Позбавимося від дробу. $31306_8 \div 14100_8$
2. Поділимо

$$
\begin{array}{r|l}
31306 & 14100 \\ \cline{2-2}
-\;30200 & 2{,}06 \\ \cline{1-1}
110600 & \\
-\;110600 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

3. Підбираємо таке число, яке б при множення на дільник дало максимальне число, яке менше діленого – записуємо це число в результаті (зпочатку беремо від діленого ту саму кількість цифр, як і в дільнику, якщо отримане число менше від дільника – додаємо ще одну)
4. Множимо підібране число на дільник та записуємо під діленим
5. Віднімаємо отримане число від діленого.
6. До отриманого результату додаємо наступну «не застосовану» цифру діленого. Якщо всі цифри діленого застосовані – в результаті ставиться кома, та до отриманої різниці додається 0. Якщо всі цифри діленого застосовані і результатом віднімання на попередньому кроці є 0 – ділення закінчене, результат отриманий, якщо ж ні – переходимо до наступного кроку
7. Повертаємся до кроку 3, повторюємо кроки 3-6 доки остача не буде 0 (для чисел, що діляться нарівно) або доки необхідна точність (кількість знаків після коми) не буде реалізована – в такому разі буде остача від ділення

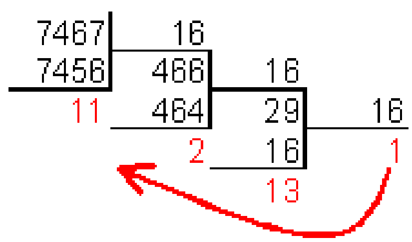
Шістнадцяткова систе́ма чи́слення — це позиційна система числення з основою 16. Тобто кожне число в ній записується за допомогою 16 символів. Арабські цифри від 0 до 9 відповідають значенням від нуля до дев'яти, а 6 літер латинської абетки A, B, C, D, E, F відповідають значенням від десяти до п'ятнадцяти. Шістнадцяткова система числення широко використовується розробниками комп'ютерів та програмістами.

Цю систему часто називають також Hex (початкові літери англ. hexadecimal — шістнадцятковий).

Основа (кількість цифр): 16

Алфавіт (використовувані цифри): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F ($A_{16} = 10_{10}$, $B_{16} = 11_{10}$, $C_{16} = 12_{10}$, $D_{16} = 13_{10}$, $E_{16} = 14_{10}$, $F_{16} = 15_{10}$)

Приклад 1. Число $7467{,}125_{10}$ перевести в шістнадцяткову систему числення.



1. Відкидуємо дробову частину и спочатку переводи цілу частину. Число 7467 ділимо на 16 (основа шістнадцятирічної системи числення). Результат 466 записуємо, залишок від ділення — 11.

2. Результат ділення на попередньому кроці — 466 — ділимо на 16, отримуємо 29, залишок від ділення — 2.

3. Результат ділення на попередньому кроці — 29 — ділимо на 16, отримуємо 1, залишок від ділення 13

4. Результат ділення на попередньому кроці був 1, тож зупиняємо ділення та записуємо результат

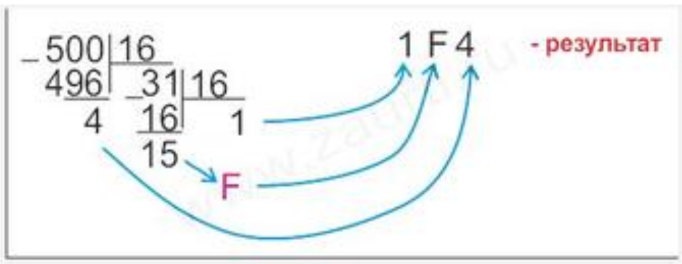
5. Число в шістнадцятковій системі числення - це послідовно записаня залишків від ділення в зворотньому порядку, тож $7467_{10} = 1D2B_{16}$ ($A_{16} = 10_{10}$, $B_{16} = 11_{10}$, $C_{16} = 12_{10}$, $D_{16} = 13_{10}$, $E_{16} = 14_{10}$, $F_{16} = 15_{10}$)

6. Дробова частина десяткового числа переводиться окремо таким самим чином, як для будь-якої іншої системи числення:

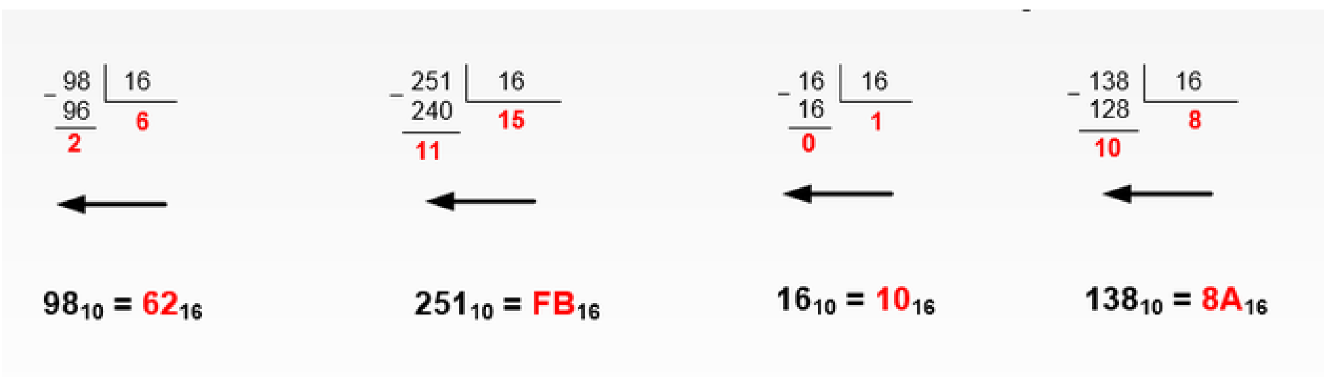
- Дробова частина множиться на базу системи числення (16 в данному випадку): 0,125 * 16 = 2

- Ціла частина результату множення записується послідовно в дробову частину результуючого числа в шістнадцятковій системі числення: $1D2B,2_{16}$
- Дробова частина результату множення множиться на 16 знову, знову ціла частина записується в дробову частину результуючого шістнадцяткового числа, а дробова множиться на 16 доти, доки дробова частина не буде 0.

Приклад 2. Перевести число 500_{10} в шістнадцяткову систему числення.



Ще декілька прикладів для перевірки:



Для **переводу шіснадцяткового числа в десяткове** необхідно його записати у вигляді многочлена, що складається з творів цифр числа і відповідного ступеня числа 16, і обчислити за правилами десяткової арифметики:

$$X_{16} = A_n \cdot 16^{n-1} + A_{n-1} \cdot 16^{n-2} + A_{n-2} \cdot 16^{n-3} + \ldots + A_2 \cdot 16^1 + A_1 \cdot 16^0$$

Кожна цифра числа помножається на базу системи числення, в якій це число знаходиться, в степені його розряду. Число-еквівалент в десятковій системі числення знаходиться як сума усіх результатів множення.

2 1 0 розряди

$$1C5_{16} = 1 \cdot 16^2 + \overset{C}{12} \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0$$
$$= 256 + 192 + 5 = 453$$

1. Починаємо з нумерації розрядів шіснадцяткового числа: починаючи з 0 для найправішого числа. Для числа $1C5_{16}$, що має 3 розряди (2, 1, 0), бачимо розряди написані над кожною цифрою числа

2. Далі помножаємо кожну цифру числа у вісімковій системі числення на 16 в степені його розряду. І сумуємо результаті для кожної цифри. Для числа $1C5_{16}$ маємо:

- першу цифру 1, що має розряд 2, множимо на $16^{2:}$ $1 * 16^2 = 256$
- другу цифру $C_{16} = 12_{10}$, що має розряд 1, множимо на $16^{1:}$ $12 * 16^1 = 192$
- третю цифру 5, що має розряд 0, множимо на $16^{0:}$ $5 * 16^0 = 5$
- сумуємо результати множення 256 + 192 + 5 = 453
- отже $1C5_{16} = 453_{10}$

Приклад. Число $FDA1{,}39_{16}$ перевести в десяткову систему числення.

$FDA1{,}39_{16} = 15 * 16^3 + 13 * 16^2 + 10 * 16^1 + 1 * 16^0 + 3 * 16^{-1} + 9 * 16^{-2} = 64929.22265625_{10}$

Арифметичні дії в шіснадцятковій системі проводиться за тими ж правилами, що і в десятковій системі числення. Проте оскільки в двійковій системі числення використовуються тільки дві цифри 0 і 1, то арифметичні дії виконуються простіше, ніж десятковій системі.

Додавання у шістнадцятковій системі числення виконується порозрядно, починаючи з молодших розрядів. Кожний символ перетворюється в десяткову систему числення, потім виконується додавання, а результат обернено переводиться назад у шістнадцяткову систему.

Приклад. Виконати додавання двох чисел у шістнадцятковій системі числення $FB_{16} + C6_{16}$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{F}\,B \\ +\;C\,6 \\ \hline 1C1 \end{array}$$

$B_{16} + 6_{16} = 11_{10} + 6_{10} = 17_{10} = 16_{10} + 1_{10} = 11_{16}$;

$F_{16} + C_{16} + 1_{16} = 15_{10} + 12_{10} + 1_{10} = 28_{10} = 16_{10} + 12_{10} = 1C_{16}$; - перенесення з молодших розрядів

$FB_{16} + C6_{16} = 1C1_{16}$.

Зробимо перевірку в десятковій системі числення:

$FB_{16} = 15 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = 251_{10}$;

$C6_{16} = 13 \cdot 16^1 + 6 \cdot 16^0 = 198_{10}$;

$251_{10} + 198_{10} = 449_{10}$;

$1C1_{16} = 1 \cdot 16^2 + 13 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 = 449_{10}$.

Віднімання в шістнадцятковій системі числення здійснюється за тими ж правилами, що й для десятирічної системи

Приклад. Відняти шестнадцяткові числа $59AC2{,}C_{16}$ — $EB78{,}B_{16}$

$$\begin{array}{r|l} -\;5\ 9\ A\ C\ 2, & C \\ E\ B\ 7\ 8, & B \\ \hline 4\ A\ F\ 4\ A, & 1 \end{array}$$

1. Віднімаємо дробові розряди C_{16} — B_{16} = 1_{16}

1. Віднімаємо 0ві розряди: 2_{16} — 8_{16} = A_{16} (займаємо 1цю у наступного розряду)

2. Віднімаємо 1ші розряди: C_{16} — 7_{16} — 1_{16}= 4_{16}

3. Віднімаємо 2гі розряди: A_{16} — B_{16} = F_{16} (займаємо одиницю у наступного розряду)

4. Віднімаємо 3ті розряди 9_{16} — E_{16} — 1_{16} = A_{16} (займаємо одиницю у наступного розряду)

5. Віднімаємо 4ті розряди 5_{16} — 1_{16} = 4_{16}

6. В результаті отримуємо $4AF4A,1_{16}$ (зберігаємо кому в тому самому місці, де вона була у початкових числах (при віднімання в стовпчик усі коми мають бути одна над одною)

Перевіримо результати за допомогою 10річної системи

$59AC2_{16} = 367298.75$

$EB78,B_{16} = 60280.6875$

$367298.75_{10} – 60280.6875_{10} = 307\ 018,0625_{10}$

$307\ 018,0625_{10} = 4AF4A.1_{16}$

Для **множення шістнадцяткових чисел** необхідно користуватися наступною таблицею множення:

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

Розглянемо **приклад множення** $CF1,3_{16}$ * $D4,F_{16}$

1. Множимо дробові розряди F_{16} * 3_{16} = $2D_{16}$. D записується, а 2 переходить у старший розряд. F_{16} * 1_{16} = F_{16} + 2_{16} = 11_{16}. 1 записується, а 1 переходить у наступний розряд. Далі F_{16} * F_{16} = $E1_{16}$ + 1_{16} = $E2_{16}$. 2 записується, а E в наступний розряд. Далі F_{16} * C_{16} = $B4_{16}$ + E_{16} = $C2_{16}$. Добуток дробового розряду другого числа на перше число становить C221D
2. Аналогічні дії виконуються для наступних розрядів. При цьому для кожного наступного розряду відбувається зсув на 1 вліво.
3. Сумуємо усі добутки: $C221D_{16}$ + $33C4C0_{16}$ + $A83F700_{16}$ = $AC3DDDD_{16}$
4. Кома зсувається на 2 розряди (1 розряд від першого числа і 1 розряд від другого). Таким чином результат: AC3DD,DD

				C	F	1	3
*					D	4	F
			C	2	2	1	D
+		3	3	C	4	C	
	A	C	3	D	D	D	D

Приклад. **Ділення шістнадцяткового числа** $CF1,3_{16}$ на число $D,4_{16}$

1. Позбудемося дробів – помножимо кожне число на 16 (основа числення). Отримаємо: $CF13_{16} \div D4_{16}$
2. Далі ділення цілих шістнадцяткових чисел.
3. $CF1_{16}$ уміщує F цілих разів D4. $D4_{16}$ * F_{16} = $C6C_{16}$
4. Віднімаємо $C6C_{16}$ від $CF1_{16}$. Буде 85_{16}
5. Додаємо цифру з нульового розряду (3). Маємо 853_{16}
6. 853_{16} уміщує A цілих разів $D4_{16}$. $D4_{16}$ * A_{16} = 848_{16}
7. Віднімаємо 848_{16} від 853_{16} і отримуємо B_{16}

8. На цьому ціла частина числа закінчилась. Шукаємо дробову частину. До B дописуємо 0 і в результаті дописуємо кому. $B0_{16}$ все ще менше від $D4_{16}$, дописуємо ще 0 до B0 і дописуємо 0 в результат. (Результат зараз: $FA,0_{16}$)

9. $B00_{16}$ вміщує $D4_{16}$ цілих D разів. $D4_{16} * D_{16} = AC4_{16}$

10. Віднімаємо від $B00_{16}$ $AC4_{16}$ і отримуємо $3C_{16}$. $3C_{16}$ остача на даному кроці. Алгоритм продовжується доки остача не буде 0.

$$
\begin{array}{l r|l}
 & \text{C F 1 3} & \text{D 4} \\ \cline{3-3}
- & \text{C 6 C} & \text{F A , 0 D} \\ \cline{2-2}
 & \text{8 5 3} & \\
- & \text{8 4 8} & \\ \cline{2-2}
 & \text{B 0 0} & \\
- & \text{A C 4} & \\ \cline{2-2}
 & \text{3 C} &
\end{array}
$$

Перевід чисел із 2-кової с.ч. у 8-кову та 16-кову с.ч. та навпаки

Щоб перевести число **з двійкової системи в вісімкову**, його потрібно розбити на тріади (трійки цифр), починаючи з молодшого розряду, в разі необхідності доповнивши старшу тріаду нулями, і кожну тріаду замінити відповідної вісімковій цифрою.

Десяткова СЧ P=10	Двій-кова СЧ P=2	Вісімко-ва СЧ P=8	Шістнацят-кова СЧ P=16
1	2	3	4
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10

Приклад. Число $1001011{,}111_2$ перевести в вісімкову систему числення.

$$001\ 001\ 011\ ,\ 111_2 = 113{,}7_8$$

$$1\quad 1\quad 3\ ,\ 7$$

1. Розбиваемо число $1001011,111_2$ на тріади починаючи з 0го розряду (доповнюємо першу тріаду двома 0 спочатку):

$001 \quad 001 \quad 011 \ , \ 111_2$

2. Кожну тріаду переводимо в вісімкову систему числення за допомогою таблиці:

- $001_2 = 1_8$
- $001_2 = 1_8$
- $011_2 = 3_8$
- $111_2 = 7_8$

3. Поєднуємо результати в одне число: $113,7_8$

Щоб перевести число з **двійкової системи в шістнадцяткову**, його потрібно розбити на тетради (четвірки цифр), починаючи з молодшого розряду, в разі необхідності доповнивши старшу тетраду нулями, і кожну тетраду замінити відповідної вісімковій цифрою.

Приклад. Число $1011100011,1110_2$ перевести в шістнадцяткову систему числення.

$$0010 \quad 1110 \quad 0011 \ , \ 1110_2 \ = \ 2E3,E_{16}$$

1. Розбиваемо число $1011100011,1110_2$ на тетради (4 цифри) починаючи з 0го розряду (доповнюємо першу тріаду двома 0 зпочатку):

$0010 \quad 1110 \quad 0011 \ , \ 1110_2$

2. Кожну тетраду переводимо в шістадцяткову систему числення за допомогою таблиці:

- $0010_2 = 2_{16}$
- $1110_2 = E_{16}$
- $0011_2 = 3_{16}$
- $1110_2 = E_{16}$

3. Поеднуємо результати в одне число: $2E3,E_{16}$

Для переведення **вісімкового числа в двійкове** необхідно кожну цифру замінити еквівалентною їй двійковою тріадою.

Приклад. Число $531{,}6_8$ перевести в двійкову систему числення.

$$531{,}6_8 = 101\ 011\ 001\ ,\ 110_2$$

1. Кожну цифру вісімкового числа замінюємо на відповідну тріаду двійкового числа користуючись таблицею вище.

- $5_8 = 101_2$
- $3_8 = 011_2$
- $1_8 = 001_2$
- $6_8 = 110_2$

2. Об'єднуємо тріади разом: $531{,}6_8 = 101011001{,}110_2$

Для переведення **шістнадцяткового числа в двійкове** необхідно кожну цифру замінити еквівалентною їй двійковою тетрадою.

Приклад. Число $EE8{,}AD_{16}$ перевести в двійкову систему числення.

$$EE8{,}AD_{16} = 1110\ 1110\ 1000,\ 1010\ 1101_2$$

1. Кожну цифру шістнадцяткового числа замінюємо на відковідну тетраду двійкого числа користуючись таблицею вище.

- $E_{16} = 1110_2$
- $E_{16} = 1110_2$
- $8_{16} = 1000_2$
- $A_{16} = 1010_2$
- $D_{16} = 1101_2$

2. Об'єднуємо тріади разом: $EE8{,}AD_{16} = 1110\ 1110\ 1000,\ 1010\ 1101_2$

При переході з **вісімковій системи числення в шістнадцяткову** і назад, необхідний проміжний переклад чисел в двійкову систему.

Приклад 1. Число FEA_{16} перевести в вісімкову систему числення.

$$FEA_{16} = 111111101010_2$$
$$111\ 111\ 101\ 010_2 = 7752_8$$

Приклад 2. Число 6635_8 перевести в шістнадцяткову систему числення.

$$6635_8 = 110110011101_2$$
$$1101\ 1001\ 1101_2 = D9D_{16}$$

Ще декілька прикладів переходу **від вісімкової до шістнадцяткової** системи числення

$$142_8 = 0110\ 0010_2 = 62_{16}$$
$$373_8 = 1111\ 1011_2 = FB_{16}$$
$$20_8 = 0001\ 0000_2 = 10_{16}$$
$$212_8 = 1000\ 1010_2 = 8A_{16}$$

Ще декілька прикладів переходу **від шістнадцяткової до вісімкової** системи числення

$$62_{16} = 001\ 100\ 010_2 = 142_8$$
$$FB_{16} = 011\ 111\ 011_2 = 373_8$$
$$10_{16} = 010\ 000_2 = 20_8$$
$$8A_{16} = 010\ 001\ 010_2 = 212_8$$