Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

Департамент анализа данных, принятия решений и финансовых технологий

И.Э. Гурьянова

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ EXCEL

Для студентов, обучающихся
по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика»
(программа подготовки бакалавров)

Москва – 2019

Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

**Департамент анализа данных, принятия решений и
финансовых технологий**

И.Э. Гурьянова

Сборник задач по теории вероятностей с применением Excel

Для студентов, обучающихся
по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика»
(программа подготовки бакалавров)

*Одобрено на заседании Совета департамента
анализа данных, принятия решений и финансовых технологий
(протокол № 11 от 19 марта 2019 г.)*

Москва – 2019

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171
Г 95

Рецензент: В.А. Газарян, к.ф-м.н., доцент Департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий.

Гурьянова И.Э. «Сборник задач по теории вероятностей с применением Excel» М.: Финансовый университет при Правительстве РФ, Департамент анализа данных, принятия решений и финансовых технологий, 2019. 95 с.
Сборник задач, где каждая глава предваряется подробными теоретическими сведениями, предназначен для бакалавров очной формы обучения по направлению подготовки: 38.03.01 «Экономика», профиль «Экономическая безопасность».

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171

Учебное издание
Гурьянова Ирина Эдуардовна

«Сборник задач по теории вероятностей»

Компьютерный набор **Гурьянова И.Э.**
Компьютерная верстка **Гурьянова И.Э.**
Формат 60x90/16. Гарнитура *Times New Roman*
Усл. п.л. 6

Оглавление

Введение

Предлагаемый сборник задач по теории вероятностей охватывает разделы этой дисциплины, входящие в учебные программы для студентов вузов, обучающихся по инженерным и экономическим специальностям. Сборник задач содержит основные теоретические сведения по теории вероятностей и предназначен для закрепления теоретических знаний по этому курсу. В основу курса положены учебники В.И. Соловьева «Анализ данных в экономике: теория вероятностей, прикладная статистика, обработка и визуализация данных в Microsoft Excel», А.С. Солодовникова, В.А. Бабайцева, А. В. Браилова «Математика в экономике. Часть 3. Теория вероятностей и математическая статистика». Курс соответствует первой половине программы дисциплины «Анализ данных» для профилей «Финансы и кредит», «Мировая экономика» и «Налоги налогообложение». В условиях стремительных изменений экономики, протекающих одновременно с нарастающей ее глобализацией, будущий специалист должен уметь решать стоящие перед ним профессиональные задачи, применяя программные продукты, распространенные во всем мире. Для студентов младших курсов основными программами для решения учебных задач являются процессор электронных таблиц Excel и язык программирования Rstudio. Предлагаемый сборник может быть полезным студентам и преподавателям ВУЗов, а также лицам, изучающим теорию вероятностей и программу Excel самостоятельно. Изложенный в сборнике материал может быть использован для самостоятельного изучения курса студентами, обучающимися заочно.

ВАЖНО! В файле Excel для ячеек, в которых будут располагаться вычисляемые величины, через меню «Формат ячеек» установить формат «Числовой» и указать число десятичных знаков не менее трех.

КОМБИНАТОРИКА

***Комбинаторика* – раздел математики, изучающий методы решения задач, связанных с выбором и расположением элементов конечного множества, в частности, комбинаторных задач на подсчет числа различных комбинаций.**

Будем рассматривать последовательности данной длины $n\ (x_1, x_2, \dots, x_n)$, состоящие из некоторых элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ (не обязательно различных).

Правило произведения (принцип логического умножения).

Если элемент x_1 может быть выбран n_1 способами, после каждого такого выбора элемент x_2 может быть выбран n_2 способами и т.д. после каждого $(k-1)$ выбора элемент x_k может быть выбран n_k способами, то выбор всех элементов $x_1, x_2, \dots, x_k$ в указанном порядке может быть осуществлен $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ способами.

Пример.

В группе 30 человек. Нужно выбрать старосту, его заместителя и профорга. Сколькими способами это можно сделать?

$30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360.$

Правило суммы (принцип логического сложения).

Если элемент x_1 может быть выбран n_1 способами, элемент x_2 другими n_2 способами, x_3–отличными от первых двух n_3 способами и т.д. x_k–n_k способами, отличными от первых $(k-1)$, то выбор одного из элементов или x_1, или x_2, или x_k может быть осуществлен $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ способами.

Пример.

В ящике 300 деталей. Из них 150 деталей 1 сорта, 120 – второго, а остальные – третьего сорта. Сколькими способами можно извлечь из ящика одну деталь 1 или 2 сорта?

Решение. $n_1 = 150, n_2 = 120$; $n_1 + n_2 = 150 + 120 = 270.$

Пусть дано множество из n различных элементов. Из этого множества могут быть образованы подмножества из mэлементов, $0 \le m \le n$.

Если комбинации из n элементов по m отличаются только составом элементов (т.е. представляют собою просто подмножества), то их ***называют сочетаниями*** *из n элементов по m.*

Число сочетаний из n элементов по m равно

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Свойства:

Свойство 1. $C_n^0 = C_n^n = 1$, ибо $0! = 1$;

Свойство 2. $C_n^m = C_n^{n-m}$– свойство симметрии;

Свойство 3. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$ – рекуррентное соотношение;

Свойство 4. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$ – следствие бинома Ньютона;

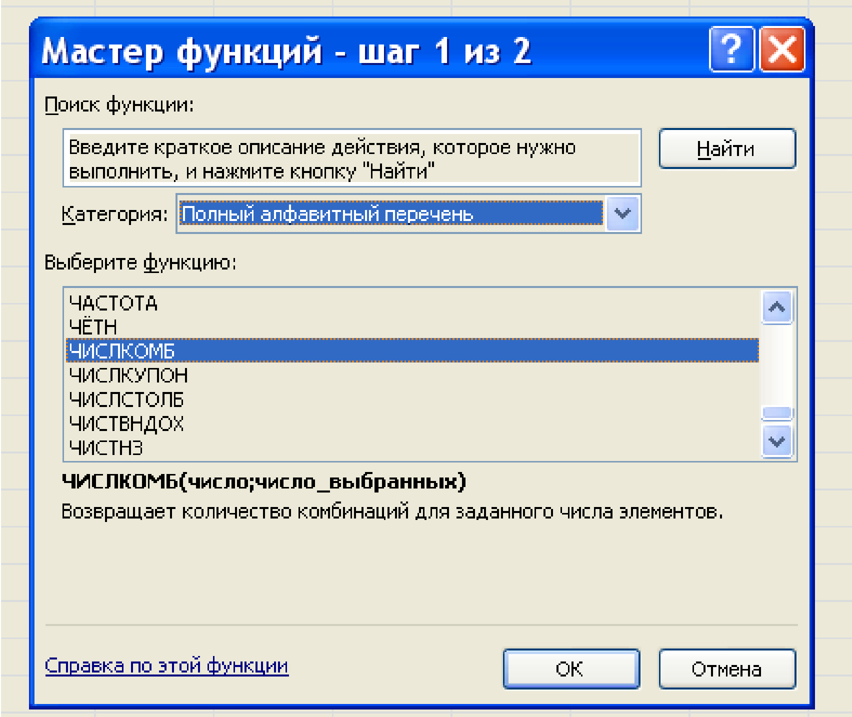
Свойство 5. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$.

Свойство 5 означает, что сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, то есть

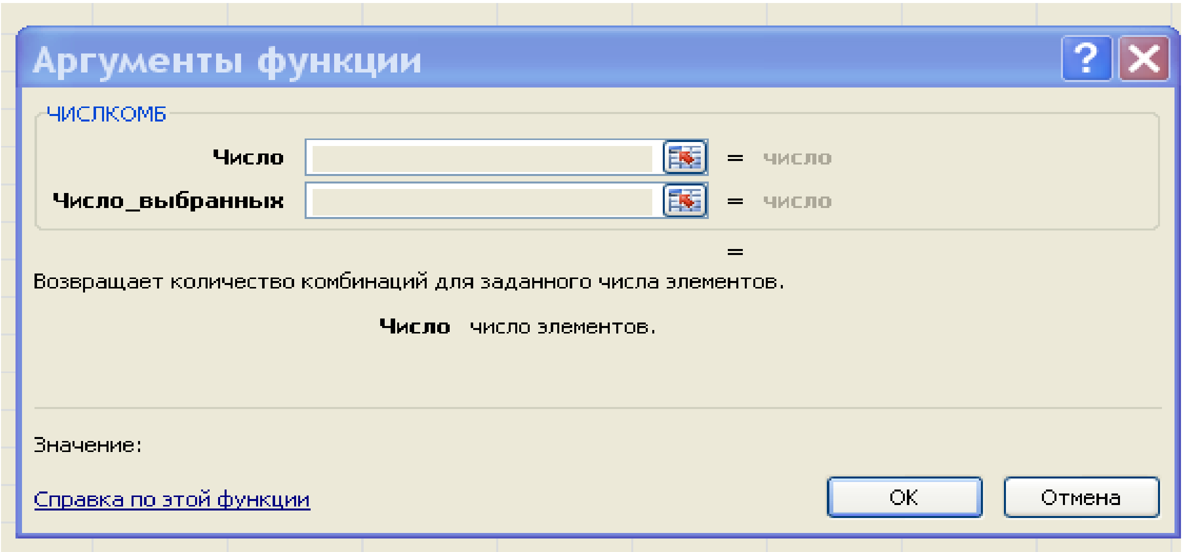
$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots$$

В программе Excel число сочетаний вычисляется с помощью *функции* ЧИСЛКОМБ.

Эту функцию надо искать в общем алфавитном списке функций, ее нет в списке статистических функций.



ЧИСЛКОМБ(n,m)=C_n^m.



В поле «Число» надо ввести значение n, а в поле «Число выбранных ввести значение m.

Если комбинации из n элементов по m отличаются либо составом элементов, либо порядком их расположения (либо и тем и другим), то такие комбинации ***называются размещениями*** *из n элементов по m. Таким образом, размещения – это упорядоченные подмножества из n элементов по m.*

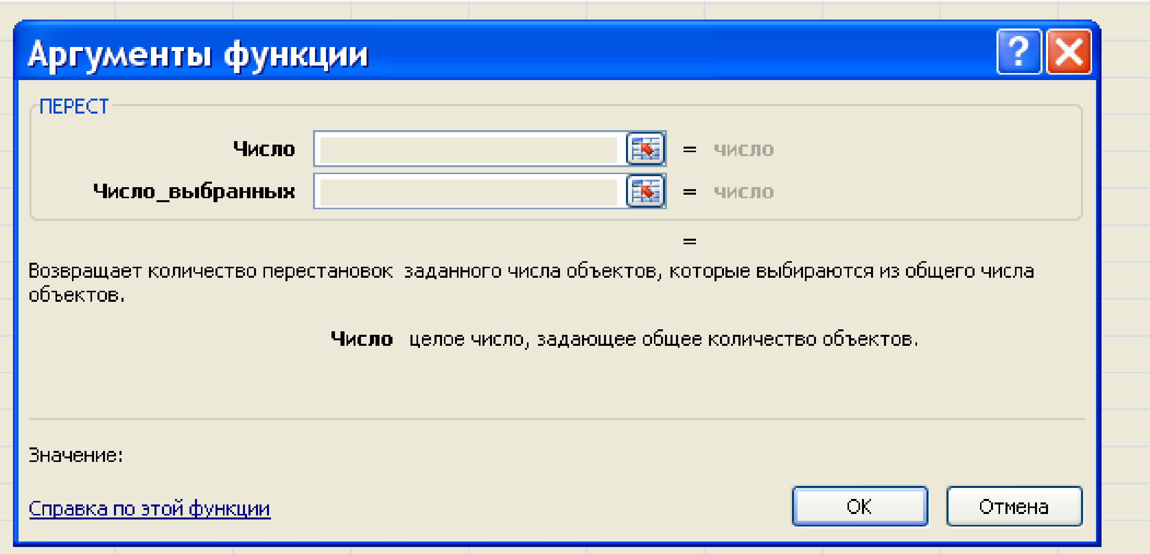
Число размещений равно

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) \text{ или}$$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

В программе Excel число размещений вычисляется с помощью *функции* ПЕРЕСТ. *Эта функция есть в списке статистических функций*

ПЕРЕСТ(n,m) = A_n^m



В поле «Число» надо ввести значение n, а в поле «Число выбранных ввести значение m.

Если комбинации из n элементов отличаются только порядком расположения этих элементов, то их ***называют перестановками*** *из n элементов.*

Число перестановок

$$P_n = n!$$

Функция ПЕРЕСТ, если m=n , вычисляет число перестановок.

ПЕРЕСТ (n,n) = P_n = n!.

Если в сочетаниях (размещениях) из n элементов по m некоторые из элементов (или все) могут оказаться одинаковыми, то такие сочетания (размещения) ***называются сочетаниями (размещениями) с повторениями из*** *n* ***элементов*** *по m.*

Замечание: в этом случае m может быть больше n.

Число сочетаний с повторениями

$$\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m.$$

Пример.

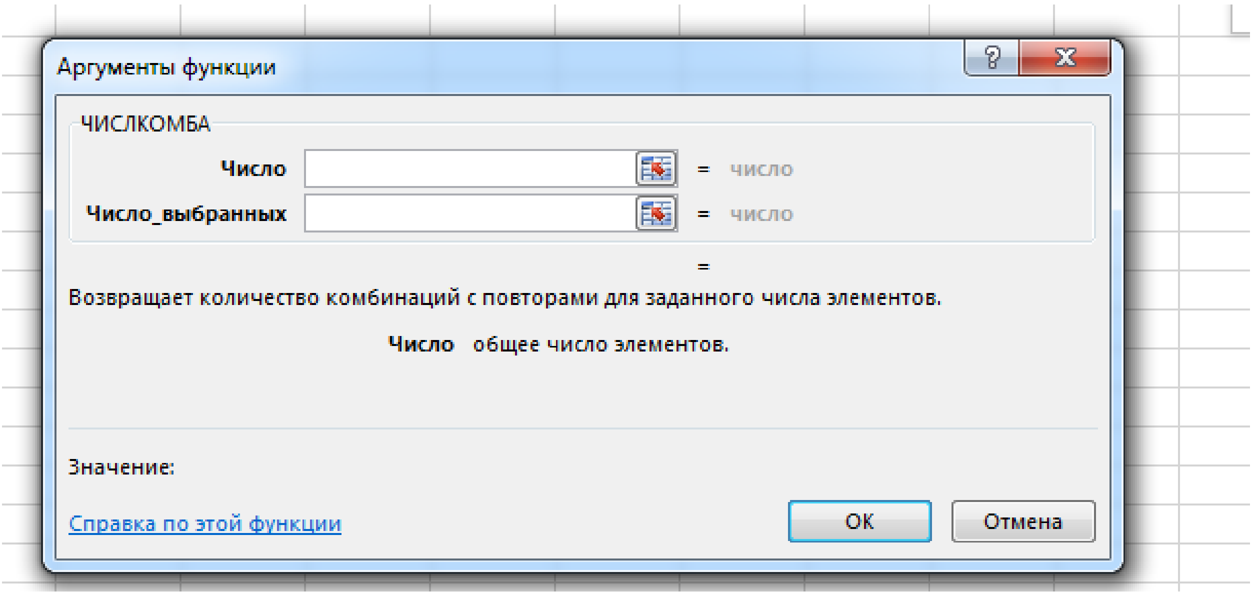
Сколькими способами можно выбрать 6 пирожных в кондитерской, где есть 4 сорта пирожных?

$m > n$

$$\tilde{C}_4^6 = C_{4+6-1}^6 = C_9^6 = \frac{9!}{6!\,3!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$$

Число сочетаний с повторениями вычисляется с помощью функции ЧИСЛКОМБА. *Эту функцию также надо искать в общем алфавитном списке функций.*

ЧИСЛКОМБА(n,m)=C_n^m (с повторениями).



В поле «Число» надо ввести значение n, а в поле «Число выбранных ввести значение m.

Число размещений с повторениями

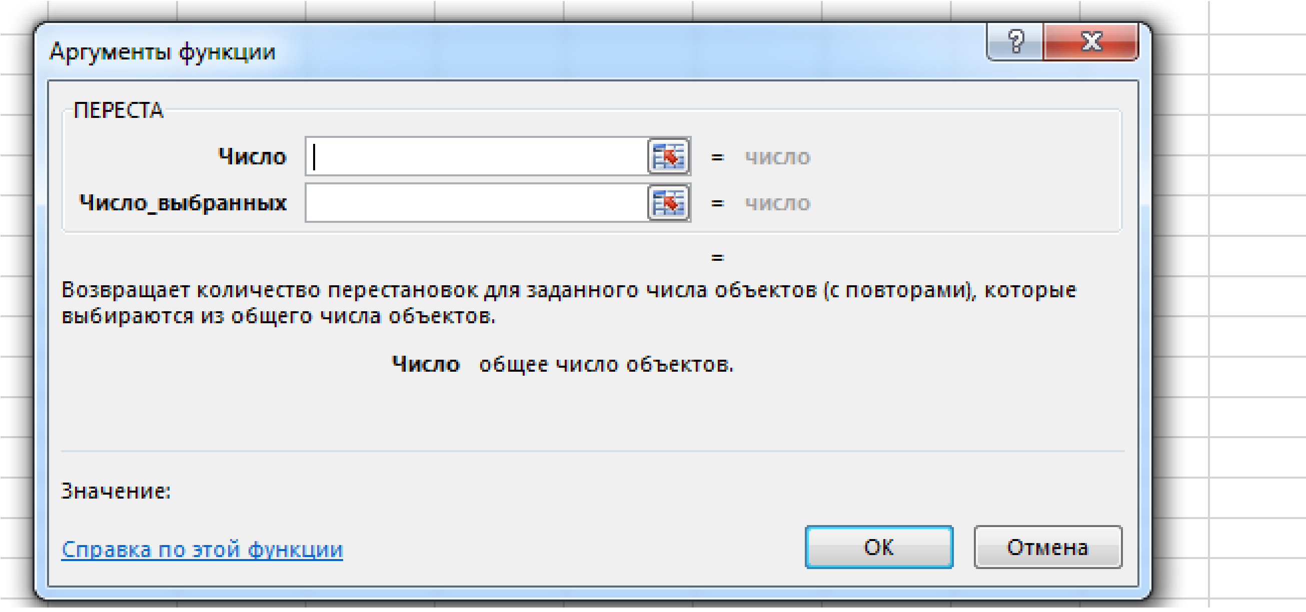
$$\tilde{A}_n^m = n^m.$$

Пример.

Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, при условии, что цифры могут повторяться?

$\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9.$

Число размещений с повторениями вычисляется с помощью функции ПЕРЕСТА



В поле «Число» надо ввести значение n, а в поле «Число выбранных ввести значение m.

ПЕРЕСТА(n,m) = A_n^m = n^m, с повторениями.

Пример.

Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, при условии, что цифры могут повторяться?

$\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9.$

Если в множестве из n элементов есть n_1 элементов первого вида, n_2 элементов второго вида, ..., n_k элементов k-того вида, причем $n_1 + n_2 + \cdots + +n_k = n$, то такие перестановки из этих n элементов ***называются перестановками с повторениями****.*

Число перестановок с повторениями

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}.$$

Пример.

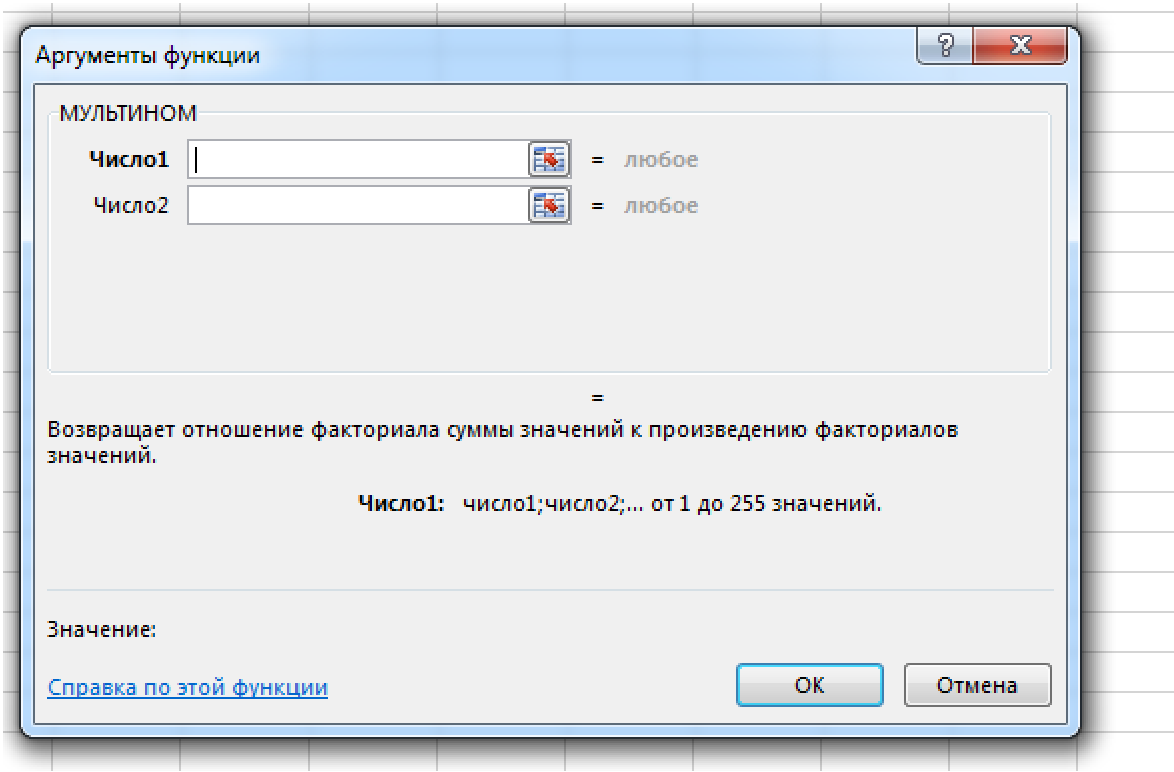
Сколькими способами можно расположить в ряд 2 зеленые и 4 красные лампочки?

Решение.

$$P_6(2,4) = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15\,.$$

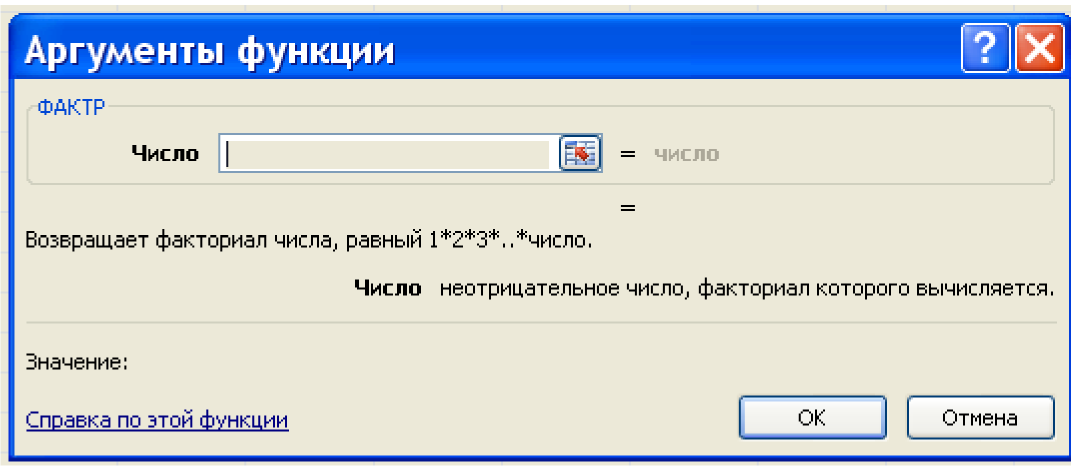
Число перестановок с повторениями вычисляется с помощью функции МУЛЬТИНОМ. (возвращает отношение факториала суммы значений к произведению факториалов значений). *Эту функцию также надо искать в общем алфавитном списке функций.*

МУЛЬТИНОМ $(n_1, n_2,\ldots) = P_n(n_1, n_2,\ldots,n_k)$.



В поле «Число 1» нужно ввести значение n_1, в поле «Число 2» нужно ввести значение n_2, после этого откроется поле «Число 3», в которое нужно ввести значение n_3 и т.д. (само число n при этом нигде не вводится).

Отметим, что в Excel имеется также функция ФАКТР, вычисляющая факториал числа n.



Задачи для самостоятельного решения

1.В группе 22 студента, из них 5 отличников. Сколькими способами можно сформировать делегацию из 5 студентов, в числе которых двое отличников?

Ответ: 6800.

2. Сколькими способами можно выбрать 5 чисел из 36 в карточке «Спортлото», чтобы 3 числа были счастливыми?

Ответ: 4650.

3. Сколько различных трехцветных флагов с тремя горизонтальными полосами можно получить, если использовать красный, синий, белый цвета?

Ответ: 6.

4. Сколькими способами можно составить список из 9 студентов?

Ответ: 362880.

5. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли бить друг друга?

Ответ: 40320

6.Сколькими способами можно рассадить 5 гостей за круглым столом?

Ответ: 120.

7. Сколькими способами можно разложить 8 различных писем по восьми различным конвертам, если в каждый конверт кладется только одно письмо?

Ответ: 40320.

8. Сколькими способами могут разместиться на скамейке 10 человек?

Ответ: 3628800.

9. Сколькими способами можно расположить в ряд две зеленые и четыре красные лампочки?

Ответ: 15 способами.

10. Сколько всего семизначных чисел, у каждого из которых цифра 6 встречается три раза, а цифра 5 – четыре раза?

Ответ: 35.

11. Сколькими способами можно переставить буквы в слове: а) математика; б) абракадабра; в) какао, чтобы получались всевозможные различные наборы букв?

Ответ: а) 151200; б) 83160; в) 30.

12. Сколько различных шестизначных чисел можно написать с помощью цифр 1; 1; 1; 2; 2; 2?

Ответ: 20.

13. Сколькими способами можно выбрать 4 человек на 4 различные должности из 9 кандидатов на эти должности?

Ответ: 3024.

14. В группе 25 студентов. Они обменялись друг с другом фотокарточками. Сколько всего было роздано фотокарточек?

Ответ: 600.

15. Из скольких различных элементов можно составить 210 размещений по два элемента в каждом?

Ответ: из 15 элементов.

16. Сколькими способами можно рассадить 4 учащихся на 25 местах?

Ответ: 303600.

17. Собрание, на котором присутствуют 20 человек, избирает в президиум двух человек, один из которых должен быть председателем, а другой – секретарем. Каким числом способов это можно сделать?

Ответ: 380.

18. Профком учреждения, состоящий из 9 человек, на своем заседании должен избрать председателя, его заместителя и казначея. Сколько различных случаев при этом может быть? Ответ: 504.

19. На станции имеется 6 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 поезда?

Ответ: 360.

20. Сколько всего семизначных телефонных номеров, в каждом из которых ни одна цифра не повторяется?

Ответ: 604800.

21.Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 1,3,5, при условии, что цифры могут повторяться?

Ответ: 9.

22. Сколько четырехзначных чисел можно образовать из нечетных цифр, если цифры могут повторяться?

Ответ: 625.

23. Сколько различных комбинаций появления орла и решки может быть при n–кратном бросании монеты?

Ответ: 2^n.

24. Замок камеры хранения открывается при наборе определенной комбинации из четырех цифр от 0 до 9. Сколько существует таких комбинаций?

Ответ: 10000.

25. Каждый телефонный номер состоит из семи цифр. Сколько можно составить телефонных номеров из цифр 2, 3, 5, и 7?

Ответ: 16384.

26. Список экзаменационных вопросов состоит из 19 вопросов. Из них нужно составить экзаменационные билеты, причем в каждом билете – ровно 2 вопроса. Сколько билетов можно составить?

Ответ:171.

27. Из 20 рабочих нужно выделить 6 для работы на определенном участке. Сколькими способами можно это сделать?

Ответ: 38760.

28. Сколькими способами можно выбрать три краски из имеющихся пяти?

Ответ: 10.

29. В группе 25 студентов. Из них нужно избрать 4 делегата на конференцию. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 12650.

30. Сколько чисел можно составить из простых делителей числа 2310, которые содержат только два простых делителя?

Ответ: 10.

31. В турнире принимали участие n шахматистов, и каждые 2 шахматиста встретились 1 раз. Сколько партий было сыграно в турнире?

Ответ: ½ n(n-1).

32. Сколько хорд можно провести через 4 точки, лежащие на одной окружности? Ответ: 6.

33. Сколькими способами группу учащихся из 8 человек можно разбить на 2 подгруппы, состоящие из трех и пяти учеников?

Ответ: 56.

34. Из 12 разведчиков надо послать в разведку четверых. Сколькими способами можно сделать выбор?

Ответ: 495

35. При встрече 12 человек обменялись рукопожатиями. Сколько при этом было сделано рукопожатий?

Ответ: 66.

36. Из группы студентов в 16 человек создаются две строительные бригады в 10 и 6 человек. Сколькими способами можно создать эти бригады?

Ответ: 8008.

37. На шахматном турнире было сыграно 45 партий, причем каждый из шахматистов сыграл с остальными по одной партии. Сколько шахматистов участвовало в турнире? Ответ: 10.

38. Решить уравнение $11C_x^3 = 24C_{x+1}^2$. Ответ: 10.

39. Решить уравнение $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1)$.

Ответ: x = 5 (корень x = 1 не подходит по смыслу).

40. В кондитерской есть пять разных сортов пирожных. Сколькими способами можно выбрать набор из четырех пирожных?

Ответ: 70.

41. В одной коробке – красные карандаши, во второй – желтые, в третьей – зеленые. Сколько существует вариантов выбора 7 карандашей? Предполагаем, что в каждой коробке больше семи карандашей.

Ответ: 36.

42. В цветочном магазине продаются цветы четырех сортов. Сколько можно составить различных букетов из трех цветов в каждом? Из пяти цветов в каждом? (Букеты, отличающиеся лишь расположением цветов, считаются одинаковыми.)

Ответ: 20; 56.

43. В хлебном отделе имеются булки белого и черного хлеба. Сколькими способами можно купить 6 булок хлеба?

Ответ: 7.

44. В группе 21 студент из них 11 девушек и 10 юношей. Нужно сформировать из состава группы делегацию из 3 человек. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы туда вошли ровно 2 девушки? Не менее двух девушек?

Ответ: 550; 715.

45. В группе 17 студентов, из них 6 отличников. Из группы формируется делегация их 5 чел. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы из этих 5-ти трое были отличниками? Не менее трех были отличниками?

Ответ: 1100; 1271.

Бином Ньютона

Для любых действительных чисел a, b, отличных от нуля и для всех натуральных чисел n

$$(a+b)^n = \sum_{K=0}^{n} C_n^K a^{n-K} b^K$$

Числа $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$ называются биномиальными коэффициентами.

Пример.

Найти $(a+b)^5$.

Полиномиальная формула – *формула разложения степени многочлена по степеням его членов:*

$$(a_1 + a_2 + \cdots a_K)^n = \sum \frac{n!}{m_1!\, m_2! \dots m_K!} \cdot a_1^{m_1} \cdot a_2^{m_2} \cdot \dots a_K^{m_K},$$

где суммирование проводится по всем последовательностям неотрицательных целых чисел $m_1, m_2, \dots, m_K$, для которых $m_1 + m_2, + \cdots + m_K = n$.

Например,

при $k = 3$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + +3b^2c + 3bc^2 + c^3 .$$

Бином Ньютона есть частный случай полиномиальной формулы при $a_1 = a, a_2 = b,\ m_1 = n - k,\ m_2 = k.$

Задачи для самостоятельного решения

1.Найти 6-й член в разложении бинома $(a^2 - b^2)^{14}$.

Решение. $(-1)^5 C_{14}^5 (b^2)^5 (a^2)^{14-5} = \dfrac{10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} b^{10} a^{18} = -2002 a^{18} b^{10}$.

2. В разложении $(1 + x)^n$ найти значение показателя n, если известно, что коэффициент пятого члена равен коэффициенту девятого члена. (считая с первого, а не с нулевого)

Ответ: 12.

3. Найти пятый член разложения бинома $(\dfrac{a}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{a})^n$, если отношение коэффициента третьего члена к коэффициенту второго равно $\dfrac{11}{2}$. (считая с первого, а не с нулевого)

Решение. По условию $\dfrac{C_n^2}{C_n^1} = \dfrac{11}{2}$, получаем n = 12. Пишем пятый член бинома

$$T_5 = C_{12}^4 (\frac{\sqrt{x}}{a})^4 (\frac{a}{\sqrt{x}})^8 = 495 a^4 x^{-2} .$$

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей – ***математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений.***

Теория вероятностей зародилась в середине XVII в. на основе теории азартных игр, когда было замечено, что на базе массовых случайных событий возникают четкие закономерности.

В развитие теории вероятностей большой вклад внесли такие выдающиеся ученые как Гюйгенс, Паскаль, Ферма, Якоб Бернулли.

Испытание (опыт, эксперимент) – это выполнение определенного комплекса условий.

Событием (случайным событием) называется исход (результат) испытания, т.е. любой факт, который в условиях испытания может произойти или не произойти.

События обозначаются латинскими буквами A, B, C.

Виды случайных событий

1. Событие называется ***достоверным***, если в результате испытания оно обязательно должно произойти. Достоверное событие обозначается буквой $\boldsymbol{\Omega}$.

2. Событие называется ***невозможным***, если в результате испытания оно не может произойти. Невозможное событие обозначается $\varnothing$.

3. События называется ***несовместными***, если наступление одного из них исключает наступление любого другого. В противном случае события называются ***совместными***.

4. Событие B, заключающееся в том, что некоторое событие A не произошло, называется ***противоположным*** к событию A и обозначается $\bar{A}$, $B = \bar{A}$ (не A).

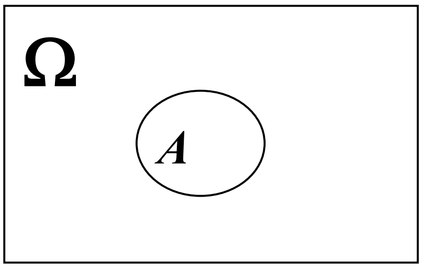
5. События называются ***равновозможными***, если в результате испытания считают, что ни одно из них не является более возможным, чем другие.

6. Несколько событий называются ***единственно возможными***, если в результате испытания обязательно должно произойти хотя бы одно из них.

7. Несколько событий образуют ***полную группу*** (полную систему), если они являются единственно возможными и несовместными исходами испытания.

Геометрически случайные события удобно изображать с помощью диаграмм Эйлера – Венна.

Весь прямоугольник – это достоверное событие Ω, случайные события - это замкнутые области, обычно круги.



Вероятностью события называется число, характеризующее степень объективной возможности наступления события.

Классическое определение вероятности

Пусть исходы некоторого испытания образуют полную группу событий и равновозможны. Такие исходы называются ***элементарными исходами*** или ***элементарными событиями***. При этом говорят, что задача сводится к схеме случаев.

Элементарное событие (исход) называется ***благоприятствующим*** событию A, если его появление влечет наступление события A.

Вероятность события A равна отношению числа m элементарных исходов, благоприятствующих ему, к общему числу всех элементарных исходов

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Свойства вероятности:

Свойство 1. $0 \le P(A) \le 1$;

Свойство 2. $P(\Omega) = 1$– вероятность достоверного события равна 1;

Свойство 3. $P(\varnothing) = 0$ – вероятность невозможного события равна 0.

Статистическое определение вероятности

Статистической вероятностью $P(A)$ события A называется относительная частота (частость) $W(A)$ появления события A после n произведенных испытаний.

$$W(A) = \frac{m_n}{n},$$

где m_n–число испытаний, в которых событие A произошло.

Статистическая вероятность является величиной опытной, экспериментальной. Результат, как правило, тем точнее, чем больше произведено испытаний, причем при больших n отношение $\frac{m_n}{n}$ остается примерно постоянным, мало отклоняется от некоторой постоянной величины. Это свойство называется статистической устойчивостью.

За вероятность случайного события A на практике принимают либо наблюдаемую частость, либо число, близкое этому значению, т.е. $P(A) \approx W(A)$.

Вообще $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} W(A)$.

Пример.

Английский ученый Пирсон произвел 23000 бросаний монеты, герб появился 11512 раз.

$$W(A) = \frac{11512}{23000} \approx 0{,}5005.$$

Геометрическое определение вероятности

Классическое определение вероятности основывается на том, что число всех возможных случаев конечно.

Если распределение возможных исходов испытания непрерывно и бесконечно, то при решении задач часто используется понятие **геометрической вероятности**.

Полагают, что имеется область Ω и в ней меньшая область A. На Ω наудачу бросается точка. Событие A – попадание точки в область A.

Геометрической вероятностью называется отношение меры области A, благоприятствующей событию A к мере всей области Ω.

$$P(A) = \frac{\mathrm{mes}A}{\mathrm{mes}\Omega} = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Замечание. *Область Ω может быть одномерной, двумерной, трехмерной и n-мерной.*

Пример.

В круг радиуса $R = 50$ бросается точка. Найти вероятность ее попадания во вписанный в круг квадрат.

Решение.

$$P(A) = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}; \qquad \left(R = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad a = \sqrt{2} \cdot R\right)$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Двое друзей условились встретиться в определенном месте между восемью и девятью часами вечера. Первый ждет второго 10 минут, затем уходит. Аналогичным образом, второй друг может ждать первого не более 20 минут. Какова вероятность того, что встреча состоится?

Ответ: 0,431.

2. Двое друзей условились встретиться в определенном месте между восемью и девятью часами вечера. Первый ждет второго 15 минут, затем уходит. Аналогичным образом, второй друг может ждать первого не более 5 минут. Какова вероятность того, что встреча состоится?

Ответ: 0,299.

3. Двое друзей условились встретиться в определенном месте между шестью и семью часами вечера. Первый ждет второго 15 минут, затем уходит. Аналогичным образом, второй друг может ждать первого не более 20 минут. Какова вероятность того, что встреча состоится?

Решение. $0 \le x \le 60$; $0 \le y \le 60$; $x - y \le 15$; $y - x \le 20$. Ответ: 0,4965.

4. Двое друзей условились встретиться в определенном месте между десятью и одиннадцатью часами вечера. Первый ждет второго 15 минут, затем уходит. Аналогичным образом, второй друг может ждать первого не более 25 минут. Какова вероятность того, что встреча состоится?

Отв. 0,549.

5. Двое друзей условились встретиться в определенном месте между восемью и девятью часами вечера. Первый ждет второго 20 минут, затем

уходит. Аналогичным образом, второй друг может ждать первого не более 25 минут. Какова вероятность того, что встреча состоится?

Ответ: 0,608.

6. Два грузовых теплохода должны подойти к одному и тому же причалу, причём время подхода каждого из них равновозможно в течение суток. Определить вероятность того, что ни одному из теплоходов не придётся ожидать освобождения причала, если время разгрузки первого из них составляет два часа, а второго – пять часов.

Ответ: 0,734.

7. Два грузовых теплохода должны подойти к одному и тому же причалу, причём время подхода каждого из них равновозможно в течение суток. Определить вероятность того, что ни одному из теплоходов не придётся ожидать освобождения причала, если время разгрузки каждого из них составляет четыре часа. Ответ: 0,694.

8.Внутрь круга радиуса 50 наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата? правильного треугольника? правильного шестиугольника? (Многоугольник вписан в круг в том случае, когда все его вершины находятся на окружности – границе круга) Ответ: а) $\frac{2}{\pi}$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; в) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

Теорема умножения вероятностей

События A и B называются **зависимыми**, если вероятность одного из них зависит от наступления или не наступления другого.

В противном случае события называются **независимыми**.

Замечание. *Несовместные события зависимы, так как появление любого из них обращает в нуль вероятности появления всех остальных.*

Вероятность события B, найденная при условии, что некоторое событие A произошло, называется условной вероятностью события B и обозначается $P(B/A)$ или $P_A(B)$.

Можно доказать, что

$$P(B/A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}.$$

(если $P(A) \neq 0$).

Теорема умножения вероятностей (принцип Ферма)

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие произошло.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Пример.

В урне 7 белых и 12 черных шаров. Из нее вынимают один за другим 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара – белые.

Решение. Всего шаров в урне - 19.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B) = \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18} = \frac{7}{57} \approx 0{,}1228.$$

Для произведения n событий формула принимает вид:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cdot A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots A_{n-1}).$$

Пример.

В урне 7 белых и 12 черных шаров. Из нее вынимают один за другим 4 шара. Найти вероятность того, что все четыре шара – белые.

Решение. $P(A) = \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18} \cdot \frac{5}{17} \frac{4}{16} = \frac{35}{3876} \approx 0{,}009$.

Определение.

Будем говорить, что событие A не зависит от B, если $P(A/B) = P(A)$. Таким образом, для независимых событий A и B

$$P(B/A) = P(B) \qquad \text{и} \qquad P(A/B) = P(A).$$

Тогда для независимых событий теорема умножения вероятностей приобретает вид

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \qquad (*),$$

то есть вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей.

В дальнейшем независимость событий A и B будет пониматься как выполнение равенства (*), т.к. это критерий независимости двух событий.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются **независимыми в совокупности** (или просто независимыми), если вероятность любого из них не меняется при наступлении какого угодно числа событий из остальных.

Например, три события A, B, C независимы в совокупности, если независимы события A и B, A и C, B и C, A и BC, B и AC, C и AB.

Попарная независимость некоторых событий (то есть независимость взятых из них любых двух событий) еще не означает их независимость в совокупности.

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, то

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Теорема сложения вероятностей (принцип Лапласа)

Для несовместных событий A и B вероятность суммы равна сумме вероятностей

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

(смотри 3-ю аксиому вероятности).

Для n несовместных событий (попарно несовместных)

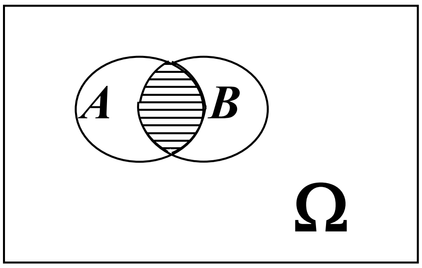
$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

Следствие.

Сумма вероятностей событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу, равна 1.

Для совместных событий A и B

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) =$$



$$= \begin{cases} P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) - \text{для независимых} \\ P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B/A) - \text{для зависимых} \end{cases}$$

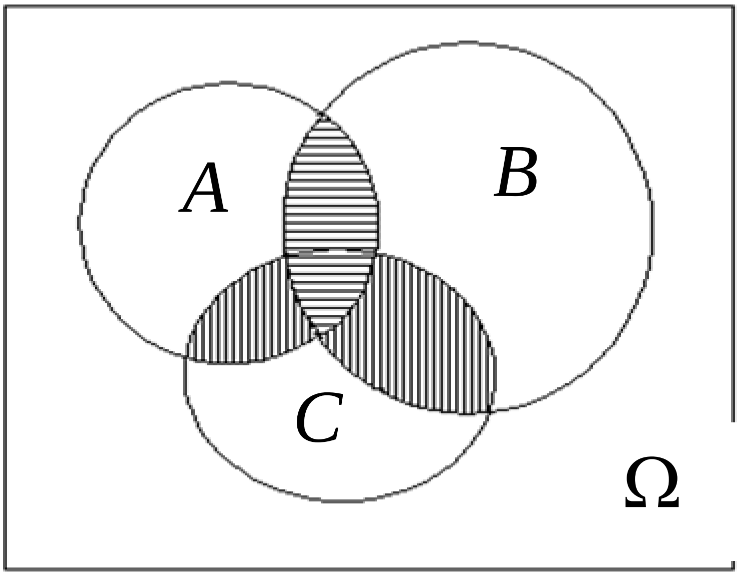
Пример.

В урне 11 шаров = 7 белых и 4 черных. Один за другим вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что хотя бы один из них – белый.

Решение. Событие А состоит в том, что первый шар – белый, событие В состоит в том, что второй шар белый. Эти события совместны и зависимы.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) =$$
$$= \frac{7}{11} + \frac{7}{11} - \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{49}{55} \approx 0{,}8909.$$

Для трех совместных событий:



формула приобретает вид:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) -$$
$$-P(A \cdot B) - P(A \cdot C) - P(B \cdot C) + P(A \cdot B \cdot C).$$

Из закона де Моргана следует:

$$P(A_1+\dots+A_n)=1-P(\overline{A_1+\dots+A_n})=1-P(\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot\ldots\cdot\bar{A}_n)=$$

$$=\begin{cases}1-P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot\ldots\cdot P(\bar{A}_n), & \text{если независимы}\\ 1-P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2/\bar{A}_1)\cdot\ldots\cdot P(\bar{A}_n/\bar{A}_1\cdot\ldots\cdot\bar{A}_{n-1}), & \text{если зависимы}\end{cases}$$

Пример.

Доказать, что если события A и B независимы, то $\bar{A}$ и B также независимы.

Решение.

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

Нужно доказать, что

$$P(\bar{A}\cdot B)=P(\bar{A})\cdot P(B)$$

$\boldsymbol{B=B\cdot A+B\cdot\bar{A}}\Rightarrow$

$P(B)=P(B\cdot A+B\cdot\bar{A})=P(B\cdot A)+P(B\cdot\bar{A})$

$=P(B)\cdot P(A)+P(B\cdot\bar{A})\Rightarrow$

$P(B)-P(B)\cdot P(A)=P(B\cdot\bar{A})\Rightarrow$

$P(B)\big(1-P(A)\big)=P(B\cdot\bar{A})\Rightarrow$

$P(B)\cdot P(\bar{A})=P(B\cdot\bar{A})$.

Дважды применяя доказанное утверждение, получим, что если независимы события A и B, то и события $\bar{A}$ и $\bar{B}$ также независимы.

Доказать самостоятельно, что если независимы A и B, то независимы A и $\bar{B}$.

Задачи для самостоятельного решения.

1.Вероятность попадания в мишень первого стрелка равна 0,6, второго-0,4. Найти вероятность того, что, сделав по одному выстрелу, попадут оба. Ответ: 0,24.

2. В течение года две фирмы имеют возможность независимо друг от друга обанкротиться с вероятностями 0,06 и 0,09 соответственно. Найти вероятность того. Что в конце года обе фирмы будут функционировать.

Ответ: 0,8554.

3. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 7 цифр. Какова вероятность того, что в нем все цифры, кратные 3?

Ответ: 0,0002187.

4. В ящике имеется 20 деталей, из которых 4 бракованные. Найти вероятность того, что две вынутые детали окажутся бракованными.

Ответ: 3/95.

5. Студент пришел на экзамен, изучив 20 из 30 вопросов программы по математике. Билет содержит 2 вопроса. Найти вероятность того, что студент ответит на билет.

Ответ: 0,437.

6. В урне 7 красных и 12 желтых шаров. Из нее вынимают один за другим 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара – красные.

Ответ: 0,123.

7. В урне находится 5 белых, 4 черных и 3 синих шара. Из урны извлекают один за другим 3 шара. Найти вероятность того, что первый шар окажется белым, второй – черным, третий – синим.

Ответ: 1/22.

8. В группе 24 студента. Из них 15 готовы к семинару, остальные – нет. Найти вероятность того, что вызванные наугад 3 студента готовы к семинару. Ответ: 0,22.

9. Из полной колоды карт (52 листа) последовательно вынимают 3 карты. Найти вероятность того, что первая из них – тройка, вторая – семерка, третья – туз.

Ответ: 0,00048.

10. Студент знает ответы на 25 вопросов из 30. Вопросы задаются последовательно, один за другим. Найти вероятность того, что на три подряд заданных вопроса студент знает ответ.

Ответ: $\frac{115}{203} \approx 0{,}567$.

11.В урне 7 белых, 11черных, 16 красных и 6 желтых шаров. Вынимают последовательно 4 шара. Найти вероятность того, что первый шар – белый, второй – черный, третий - красный, четвертый – желтый.

Ответ: 0,00337.

12. В партии из 100 деталей 50 деталей 1 сорта, 30 – второго, 17 – третьего сорта и 3 бракованных детали. Найти вероятность того, что отобранная наугад деталь будет не ниже второго сорта.

Ответ: 0,8.

13. Вероятность того, что стрелок, произведя выстрел, выбьет 10 очков, равна 0,4, 9 очков - 0,3, 8 или меньше очков - 0,3. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет не менее 9 очков.

Ответ: 0,7.

14. В денежно-вещевой лотерее серия состоит из 10000 билетов. В серии разыгрывается 120 денежных выигрыша и 80 вещевых. Найти вероятность того, что на приобретенный билет лотереи выпадает какой-либо выигрыш.

Ответ: 0,02.

15. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок потребует его внимания, равна 0,2; второй – 0,3; третий- 0,4. Найти вероятность того, что в течение часа хотя бы один из станков потребует внимания рабочего.

Ответ: 0,664.

16. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 2, либо 5, либо тому и другому одновременно.

Ответ: 0,6.

17. Брошены 2 игральные кости. Найти вероятность того, что хотя бы на одной из них выпадет 5 очков.

Ответ: 11/36.

18. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания для первого из них равна 0,7, для второго – 0,8. Какова вероятность того, что хотя бы один из них попадет в цель?

Ответ: 0,94.

19. Студент разыскивает нужную формулу в трех справочниках. Вероятность того, что эта формула содержится в первом справочнике, равна 0,8, во втором – 0,7, в третьем – 0,6. Найти вероятность того, что студент найдет формулу. Найти вероятность того, что формула есть хотя бы в двух из них.

Ответ: 0,976.

20. Вероятность сдать каждый из трех экзаменов сессии на отлично для студента М равны соответственно 0,8; 0,7 и 0,75. Найти вероятность того, что студент сдаст на отлично:

а) все три экзамена;

б) два экзамена;

в) хотя бы один экзамен.

Ответ: а) 0,42; б) 0,425; в) 0,985.

21. Из 10 имеющихся на складе деталей 4 имеют скрытый дефект. Рабочему выдано 2 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна деталь годная.

Ответ: 13/15 =0,87.

22. Из полной колоды карт (52 листа) наугад вынуты 2 карты. Найти вероятность того, что среди них хотя бы одна трефа.

Ответ: 15/34 =0,44.

23. Из полной колоды карт (52 листа) наугад вынуты 3 карты. Найти вероятность того, что среди них хотя бы одна трефа.

Ответ: 0,59.

24. В ящике 50 деталей, из них 7 – брак. Вынуто 4 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них брак.

Ответ: 0,46.

25. В урне 13 белых и 14 черных шаров. Из нее вынимают один за другим 5 шаров. Найти вероятность того, что хотя бы один из них – белый.

Ответ: 0,975.

26. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиабомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если сбросить на него 4 бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны 0,3; 0,4; 0,6 и 0,7. Ответ: 0,9496.

27. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень при трех выстрелах равна 0,875. Найти вероятность попадания при одном выстреле.

Ответ: 0,5.

28. В ящике 20 деталей, из них 8 – брак. Вынимают последовательно 3 детали. Найти вероятность того, что

а) все три годные;

б) хотя бы одна годная;

в) ровно одна годная.

Ответ: а) 0,1928; б) 0,91; в) 0,29.

29. В урне 10 шаров = 7 белых и 3 черных. Один за другим вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что

а) оба шара белые;

б) хотя бы один белый;

в) ровно один белый;

Ответ: а) 0,4666…; б) 0,9333…; в) 0,4666….

30. В урне 18 шаров = 11 белых и 7 черных. Один за другим вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что

а) все три шара белые; ответ: $\frac{55}{272} \approx 0{,}202$;

б) хотя бы один белый; ответ: $\frac{781}{816} \approx 0{,}957$;

в) ровно один белый; ответ: $\frac{77}{272} \approx 0{,}283$.

31. В урне 21 шар = 9 белых и 12 черных. Один за другим вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что

а) все три шара белые; ответ: 42/665=6/95≈0,0632;

б) хотя бы один белый; ответ: 111/133≈0,834;

в) ровно один белый. Ответ: $\frac{297}{665} \approx 0{,}45$.

32. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность поражения цели первым равна 0,7, вторым – 0,6. Найти вероятность того, что

а) только один попал в мишень Ответ: 0,46;

б) хотя бы один попал в мишень Ответ: 0,88;

в) оба попали Ответ: 0,42;

г) ни один не попал Ответ: 0,12;

д) хотя бы один не попал Ответ: 0,58.

33. В урне 12 шаров = 7 белых и 5 черных. Вынимают 3 шара. Какова вероятность того, что

а) все 3 шара белые;
б) хотя бы один белый;
в) ровно один белый?
Ответ: а) 7/44; б) 21/22; в) 7/22.

34. В урне 12 шаров = 7 белых и 5 черных. Вынимают 4 шара. Какова вероятность того, что среди них
а) все 4 шара белые;
б) 3 белых шара и один черный;
в) не более трех белых?
Ответ: а) 7/99; б) 35/99; в) 92/99.

35. Собрание из 25 человек, из которых 5 женщин, выбирает делегацию из трех человек. Какова вероятность того, что в делегацию войдут 2 женщины и один мужчина? Не менее двух женщин?
Ответ: 2/23=0,0869; 0,0913.

36. Из 20 коммерческих банков 5 являются банкротами. Предприятие сделало вклады в 6 банков. Какова вероятность того, что 2 банка из них будут банкротами? Не более двух будут банкротами?
Ответ: 0,352; 0,869.

37. События A, B, C независимы. Известны их вероятности P(A)=0,3, P(B)=0,6, P(C)=0,7. Найти $P(A+\bar{B}+C)$. Ответ: 0,874.

38. События A, B, C независимы. Известны их вероятности P(A)=0,2, P(B)=0,5, P(C)=0,9. Найти $P(\overline{A}+B+C)$ Ответ: 0,99.

39. События A, B, C независимы. Известны их вероятности P(A)=0,1, P(B)=0,5, P(C)=0,9. Найти вероятность того, что из событий A, B, C наступит ровно одно событие. Ответ: 0,455.

40. События A, B, C независимы. Известны их вероятности P(A)=0,2, P(B)=0,6, P(C)=0,9. Найдите вероятность события $AB+\bar{B}C$ при условии, что наступило событие A. Ответ: 0,96.

41. События A, B, C независимы. Известны их вероятности P(A)=0,3, P(B)=0,4, P(C)=0,7. Найдите вероятность события $AB+\bar{B}C$ при условии, что наступило событие A. Ответ: 0,82.

42. События A, B, C независимы. Известны их вероятности P(A)=0,1, P(B)=0,5, P(C)=0,7. Найти $P(A+\bar{A}B|C)$. Ответ: 0,55.

Формула полной вероятности

Пусть событие A может произойти только при условии появления одного из событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу. Так как заранее неизвестно, какое именно из событий $H_1, H_2, \dots, H_n$ произойдет, то их называют гипотезами.

Пусть известны вероятности гипотез $P(H_i)$ и условные вероятности события A $P(A/H_i)$.

ТЕОРЕМА (формула полной вероятности).

Вероятность события А, которое может наступить лишь вместе с одной из n *гипотез, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из этих гипотез на соответствующую условную вероятность события* A.

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \cdots + P(H_n) \cdot P(A/H_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i) .$$

Пример.

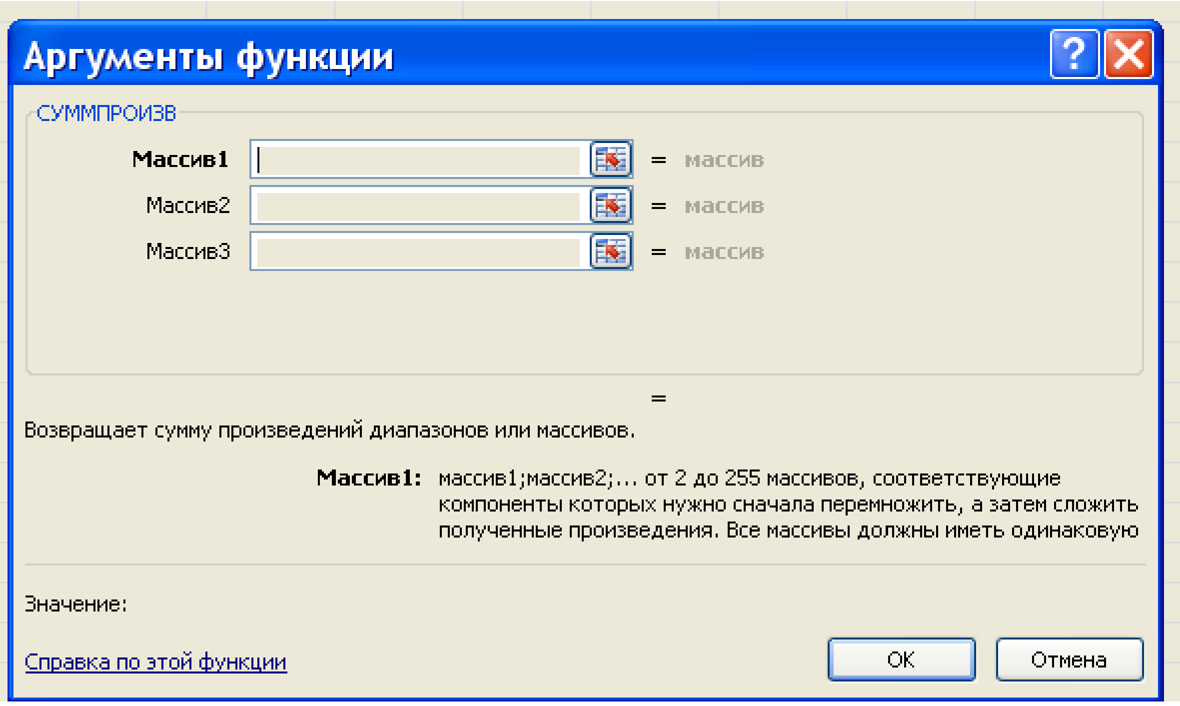
Имеется 2 урны с шарами. В первой урне - 17 белых и 11 черных шаров, во второй – 4 белых и 9 черных шаров. Из первой урны во вторую переложили 2 шара. После этого из второй урны вынули 1 шар. Найти вероятность того, что он белый.

Решение: $P(H_1)=0,36$; $P(H_2)=0,145$; $P(H_3)=0,495$; $P(A/H_1) = \frac{6}{15} = 0,4$;

$P(A/H_2) = \frac{4}{15} = 0,267$; $P(A/H_3) = \frac{5}{15} = 0,333$;

$P(A)= 0,36 \cdot 0,4 + 0,1450 \cdot ,267 + 0,495 \cdot 0,333 = 0,34755$.

При решении задач на применение формулы полной вероятности можно использовать функцию СУММПРОИЗВ. *Эту функцию также надо искать в общем алфавитном списке функций,* Введем в один столбец значения вероятностей гипотез, в другой – значения условных вероятностей события А.



В поле «Массив 1» введем диапазон, содержащий вероятности гипотез, в поле «Массив 2» введем диапазон, содержащий условные вероятности события А.

Формулы Байеса

В тех случаях, когда стало известно, что событие A произошло, возникает потребность в определении условной вероятности гипотез $P(H_i/A)$ (это не $P(H_i)$!!!).

Найдем вероятность события $H_i \cdot A$.

По теореме умножения

$$P(H_i \cdot A) = P(H_i) \cdot P(A/H_i) = P(A) \cdot P(H_i/A) \Rightarrow$$

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A/H_k)}.$$

$$i = 1,2, \dots, n.$$

Формулы Байеса служат для оценки вероятностей гипотез после того, как стало известно, что событие A наступило.

Пример.

Пусть в условиях предыдущей задачи вынутый из второй урны шар оказался белым. Найти вероятность того, что были переложены 2 черных шара.

Решение. Применим формулы Байеса:

$$P_A(H_2)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}145\cdot 0{,}267}{0{,}34755}=0{,}1114.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго автомата. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй – 84%. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь отличного качества. Найти вероятность того, что деталь отличного качества произведена вторым автоматом. Ответ: 0,68; 7/17.

2. Три автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Первый автомат производит 40% деталей, из которых 2% брака, второй автомат 35% деталей, из которых 3 % брака, третий – 25% деталей, из них – 5% брака. Найти вероятность того, что наугад взятая с конвейера деталь бракованная. Ответ: 0,031.

Найти вероятность того, что бракованная деталь произведена вторым автоматом. Ответ: 0,3387.

3. Три завода выпускают болванки, которые попадают на общий склад. Первый завод выпускает 60% болванок, из них - 15% брака, второй выпускает 30% болванок, из них - 10% брака, третий – 10%, из них – 2% брака. Найти вероятность того, что наугад взятая со склада болванка – годная.

Ответ: 0,878.

Наугад взятая на складе болванка оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она выпущена вторым заводом. Ответ: 0,24590.

4. Имеется 2 урны с шарами. В первой урне - 14 белых и 9 черных шаров, во второй – 8 белых и 11 черных шаров. Из первой урны во вторую переложили шар. После этого из второй урны вынули 1 шар. Найти вероятность того, что он белый. Вынутый из второй урны шар оказался белым. Найти вероятность того, что был переложен черный шар. Ответ: $P(A)=\dfrac{99}{230}\approx 0{,}4304$; $P_A(H_2)=\dfrac{4}{11}\approx 0{,}3636$.

5. Имеется 2 урны с шарами. В первой урне - 11 белых и 18 черных шаров, во второй – 4 белых и 7 черных шаров. Из первой урны во вторую переложили шар. После этого из второй урны вынули 1 шар. Найти вероятность того, что он белый. P(A)=127/348=0,36.

6. Имеется 2 урны с шарами. В первой урне - 17 белых и 11 черных шаров, во второй – 4 белых и 9 черных шаров. Из первой урны во вторую переложили 2 шара. После этого из второй урны вынули 1 шар. Найти

вероятность того, что он белый. Ответ: $P(H_1)=0{,}36$; $P(H_2)=0{,}145$; $P(H_3)=0{,}495$; $P(A)= 0{,}348$; $P_A(H_2)=0{,}111$.

7. Имеется 2 урны с шарами. В первой урне - 5 белых и 9 черных шаров, во второй – 12 белых и 10 черных шаров. Из первой урны во вторую переложили 2 шара. После этого из второй урны вынули 1 шар. Найти вероятность того, что он белый. Вынутый из второй урны шар оказался белым. Найти вероятность того, что был переложен один белый и один черный шар. Ответ: $P(A)=\dfrac{1157}{2184}\approx 0{,}529$; $P_A(H_3)=\dfrac{585}{1157}\approx 0{,}506$.

8. В семье трое дочерей – Алла, Белла, Стелла. Алла моет посуду по понедельникам и вторникам, Белла – по средам, четвергам и пятницам, Стелла – по субботам и воскресеньям. Вероятность того, что Алла разобьет что-то из посуды, равна 0,03, Белла – 0,06, Стелла – 0,08. Придя в гости, вы услышали звон разбитой посуды. Найти вероятность того, что посуду мыла Стелла.

Ответ: 0,4.

9. Имеется 2 урны с шарами. В первой урне - 7 белых и 16 черных шаров, во второй – 14 белых и 5 черных шаров. Из первой урны во вторую переложили шар. После этого из второй урны вынули 1 шар, оказавшийся белым. Найти вероятность того, что был переложен черный шар.

Ответ: $P(A)=0{,}715$. $P_A(H_2)=0{,}68$.

Повторные независимые испытания. Схема Бернулли

Когда производится серия повторных испытаний, в каждом из которых некоторое событие A может произойти или не произойти, то обычно интересуются не результатом отдельного испытания, а общим числом (частотой) появления события A. Возникает необходимость вычисления вероятности того, что событие A произойдет m раз после n испытаний $P_{n,m}=P_n(m)$.

Пусть все испытания независимы и вероятность появления события A в каждом испытании постоянна и равна p. При этом

$$P(A)=p, \qquad P(\bar{A})=1-p=q.$$

Описанная последовательность независимых испытаний получила название **схемы Бернулли**. (Якоб Бернулли XVII в.)

Формула Бернулли

$$P_{n,m} = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad 0 \le m \le n.$$

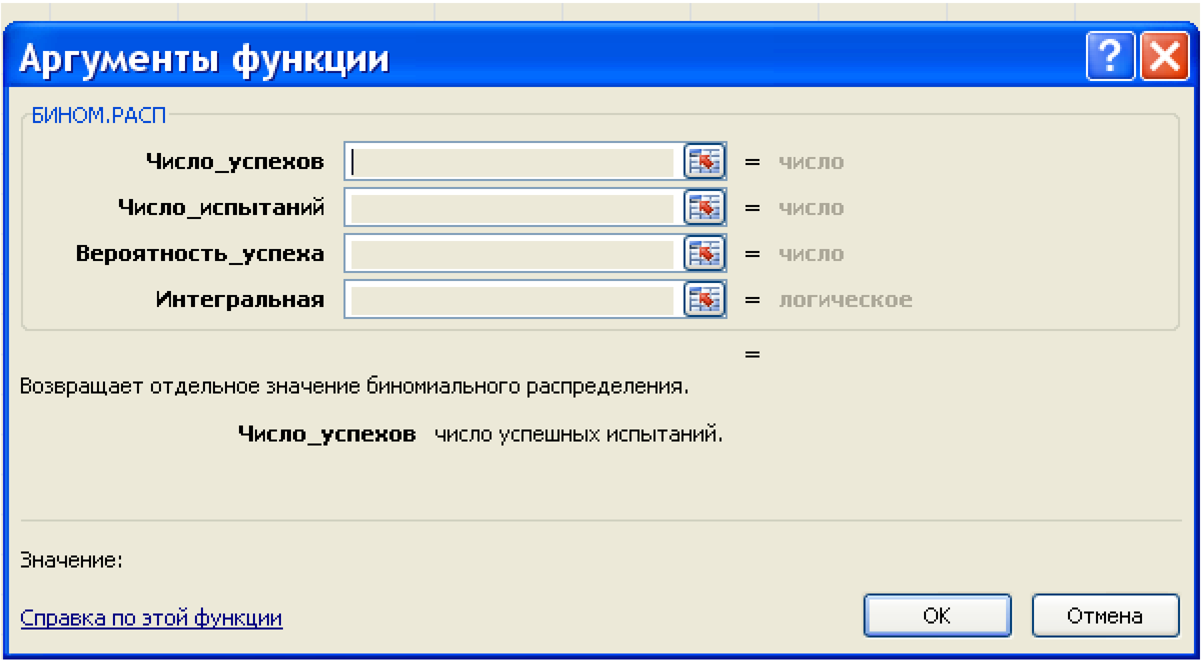
$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Пример.

Стрелок поражает мишень с вероятностью $p = 0{,}75$. Найти вероятность, что при 10 выстрелах он поразит мишень 8 раз.

$$P_{10,8} = C_{10}^8 \cdot p^8 \cdot q^2 = 45 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \approx 0{,}2816.$$

Для вычислений по формуле Бернулли используется функция БИНОМ.РАСП.



В поле «Число успехов» вводим значение m, в поле «Число испытаний» вводим значение n, в поле «Вероятность успеха» значение p , в поле «Интегральная» вводим ЛОЖЬ или 0.

БИНОМ.РАСП(m,n,p,ложь)=$C_n^m p^m q^{n-m}$.

Следствие.

Вероятность того, что после nиспытаний событие A произойдет не более m раз, равна

$$P_{n,\le m} = P_{n,0} + P_{n,1} + \cdots + P_{n,m};$$

не менее m раз

$$P_{n,\le m} = P_{n,m} + P_{n,m+1} + \cdots + P_{n,n};$$

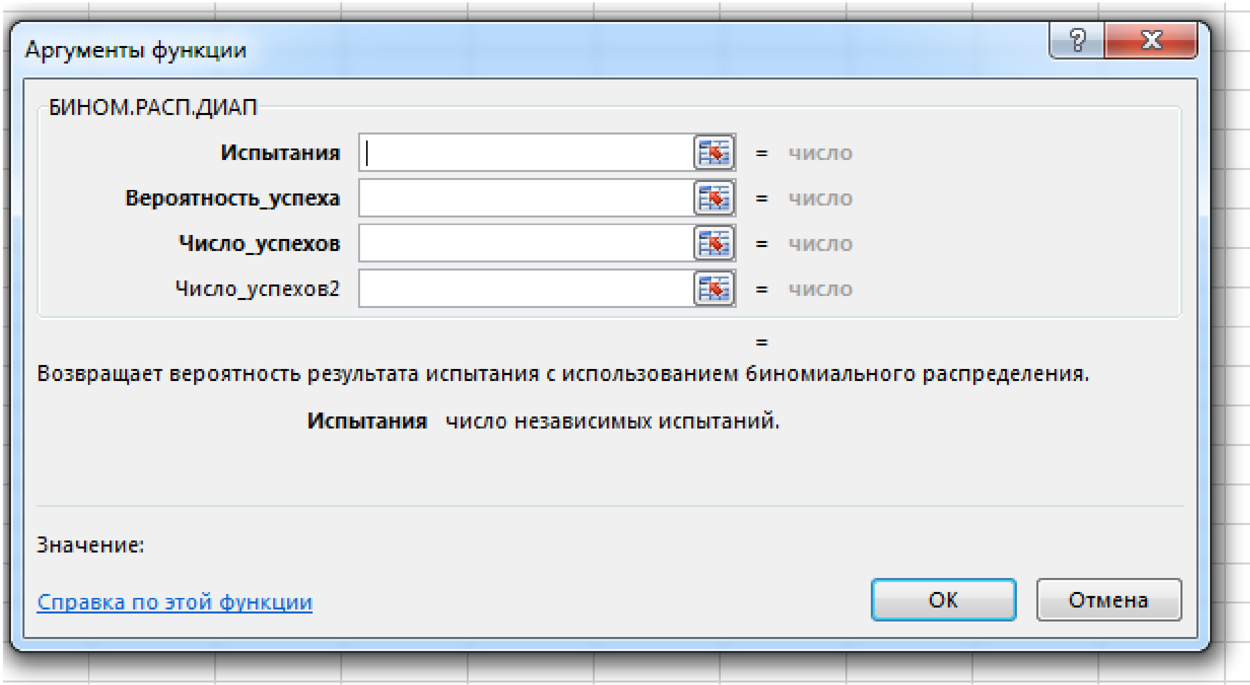
хотя бы 1 раз

$$P_{n,\ge 1} = 1 - P_{n,0} = 1 - q^n.$$

Для вычисления вероятности P_n ($\le$m), то есть того, что событие A произошло не более m раз, также вычисляется с помощью функции БИНОМ.РАСП, только теперь в поле «Интегральная» вводим ИСТИНА или 1.

БИНОМ.РАСП(m, n, p, истина) = P_n ($\le$m).

Для вычисления вероятности того, что случайная величина Bin(n,p) попадет в диапазон [m_1;m_2], используется функция БИНОМ.РАСП.ДИАП.



В поле «Испытания2 введем значение n, в поле «Вероятность успеха» ввести значение p, в поле «Число успехов» значение m_1, в поле «Число успехов 2» значение m_2.

БИНОМ.РАСП.ДИАП(n,p,m_1,m_2) = $P_n(m_1 \le m \le m_2)$,

Наиболее вероятное число успехов

Очевидно, что каждому значению частоты m соответствует свое значение вероятности $P_{n,m} = P_n(m)$.

То есть, $P_n(m)$– является функцией аргумента m.

Вопрос: при каком значении m значение $P_n(m)$ является наибольшим?

Число m_0 наступления события A в n независимых испытаниях называется **наивероятнейшим** (называется наивероятнейшей частотой), если P_{n,m_0} по крайней мере не меньше $P_{n,m}$ при $\forall\ m$.

Значение наивероятнейшей частоты находится из неравенства:

$$np - q \le m_0 \le np + p \text{ (длина отрезка равна1).}$$

Замечание.

Если $(np + p)$ *– дробное число, то* $\exists$ *только одно значение* m_0.

Если $(np + p)$ *– целое число, то* $\exists$ *2 значения наивероятнейшей частоты.*

Если np *– целое, то* $m_0 = np$.

Пример.

Вероятность того, что кошка ловит в день 1 мышку, равна 0,4. Найти наивероятнейшее число мышей, пойманных за 17 дней.

Ответ. 7.

Пример.

Из 10 яблок в среднем – 2 испорченных. Найти наивероятнейшее число хороших яблок из 9.

Ответ. 7 или 8.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Монету бросили 4 раза. Найти вероятность того, что герб выпадет 2 раза.

Ответ: 0,375.

2. Всхожесть семян ржи составляет 90%. Чему равна вероятность того, что из 7 посеянных семян взойдет 5? Не менее 5? Ответ: 0,124; 0,974.

3. Игральная кость подброшена 10 раз. Найти вероятность выпадения единицы 7 раз.

Ответ: 0,0002537.

4. Вероятность выигрыша по облигации займа равна 0,25. Какова вероятность того, что некто, приобретя 8 облигаций, выиграет по 6 из них? Ответ: 0,0038.

5. Приняв вероятность рождения мальчика равной 0,515, найти вероятность того, что среди 10 новорожденных будет 4 девочки.

Ответ: 0,217.

6. В результате наблюдений найдено, что из каждой тысячи новорожденных в среднем рождается 515 мальчиков и 485 девочек. В семье шестеро детей. Найти вероятность того, что среди них две девочки; не больше двух девочек.

Ответ: 0,248201072; 0,372279625.

7. Вероятность попадания снаряда в цель равна 0,3. Сколько должно быть произведено независимых выстрелов, чтобы вероятность по меньшей мере одного попадания в цель была больше, чем 0,9?

Ответ: $n \geq 7$. Указание. Вероятность того, что ни один из снарядов не попадет в цель, равна $(1 - 0{,}3)^n = 0{,}7^n$. Искомое n находим из неравенства $1 - (0{,}7)^n \geq 0{,}9$.

8. Вероятность попадания снаряда в цель равна 0,4. Сколько должно быть произведено независимых выстрелов, чтобы вероятность по меньшей мере одного попадания в цель была больше, чем 0,95?

Ответ: $n \geq 6$.

9. Стрелок поражает мишень с вероятностью $p=0{,}75$. Найти вероятность того, что после 10 выстрелов он попадет не менее 8 раз.

Ответ: 0,5263.

10. Производится 21 выстрел по цели, вероятность попадания в которую при одном выстреле равна 0,25. Найти наивероятнейшее число попаданий в цель.

Ответ: 5.

11. Вероятность того, что кошка ловит в день одну мышку, равна 0,3. Найти наивероятнейшее число пойманных за 19 дней мышей.

Ответ: 5 или 6.

12. Что вероятнее выиграть в шахматы у равносильного противника:

1) 3 партии из 4 или 5 партий из 8?
2) Не менее 3 партий из 4 или не менее 5 партий из 8?

Ничьи во внимание не принимать.

Ответ: 1) $P_{4,3} = 0{,}25$; $P_{8,5} = 0{,}215$; 2) $P_{4,\geq 3} = 0{,}3102$; $P_{8,\geq 5} = 0{,}3586$.

13. Игральную кость подбрасывают 100 раз. Найти наивероятнейшее число выпадений шестерки.

Ответ: 16.

14. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Производится 179 выстрелов. Найти наивероятнейшее число попаданий. Ответ: 125 или 126.

15. Игральную кость подбрасывают 219 раз. Найти наивероятнейшее число выпадений шестерки.

Ответ: 36.

16. Вероятность того, что данный баскетболист забросит мяч в корзину, равна 0,4. Произведено 24 броска. Найти наивероятнейшее число попаданий и соответствующую вероятность.

Ответ: 9 или 10; P = 0,161.

Локальная приближенная формула Лапласа

Формула Бернулли дает точный результат, но ее применение при большом числе испытаний n становится технически малопригодным. Возникает необходимость в отыскании приближенных формул.

Локальная приближенная формула Лапласа (Муавра – Лапласа).

При больших значениях n и $npq \geq 10$

$$P_{n,m} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} -$$

функция Гаусса (затабулирована).

Чем больше n, тем точнее формула. Более определенно: точность улучшается с ростом npq. Обычно формулой пользуются, когда $npq \geq 10$. Видно, что чем ближе p или q к нулю, тем бо́льшим следует брать n. Поэтому в случае p или q близких к нулю используются другие формулы (Пуассона).

Пример.

Монету бросают 100 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет 55 раз?

Решение.

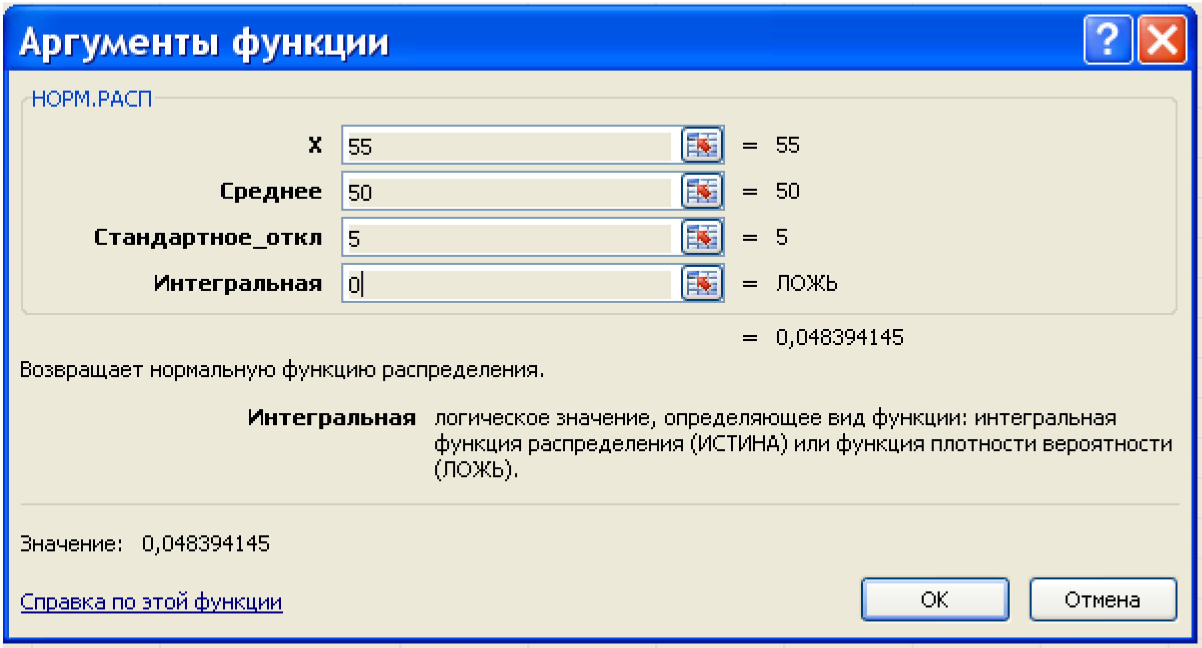
Так как $npq = 100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 25 > 10$,

$$P_{100,55} \approx \frac{1}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} \cdot \varphi\left(\frac{55 - 100 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}\right) = \frac{1}{5}\varphi\left(\frac{5}{5}\right) = \frac{1}{5}\varphi(1)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 0{,}2420 = 0{,}0484.$$

При проведении вычислений в программе Excel отпадает необходимость в использовании приближенных формул. Точный результат получим, использовав функцию БИНОМ.РАСП (55; 50; 5; 0) = 0,048474297.

Проведем вычисления в приближенной формуле Лапласа с помощью функции НОРМ,РАСП.



В поле X введено значение m = 55; в поле «Среднее» введено значение np; в поле «Стандартное откл» введено значение $\sqrt{npq}$, в поле «Интегральная» значение ЛОЖЬ. Ответ: 0,048394145.

Интегральная приближенная формула Лапласа

По этой формуле приближенно вычисляется не $P_{n,m}$, а суммы

$$\sum_{m=m_1}^{m=m_2} P_{n,m}\,,$$

то есть, вероятности $P_n(m_1 \le m \le m_2)$. Это вероятность того, что событие A произойдет не менее m_1 раз и не более m_2 раз. При $npq \ge 10$

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2/2}dt -$$

– функция Лапласа или интеграл вероятностей (затабулирована). $npq \geq 10$.

Пример.

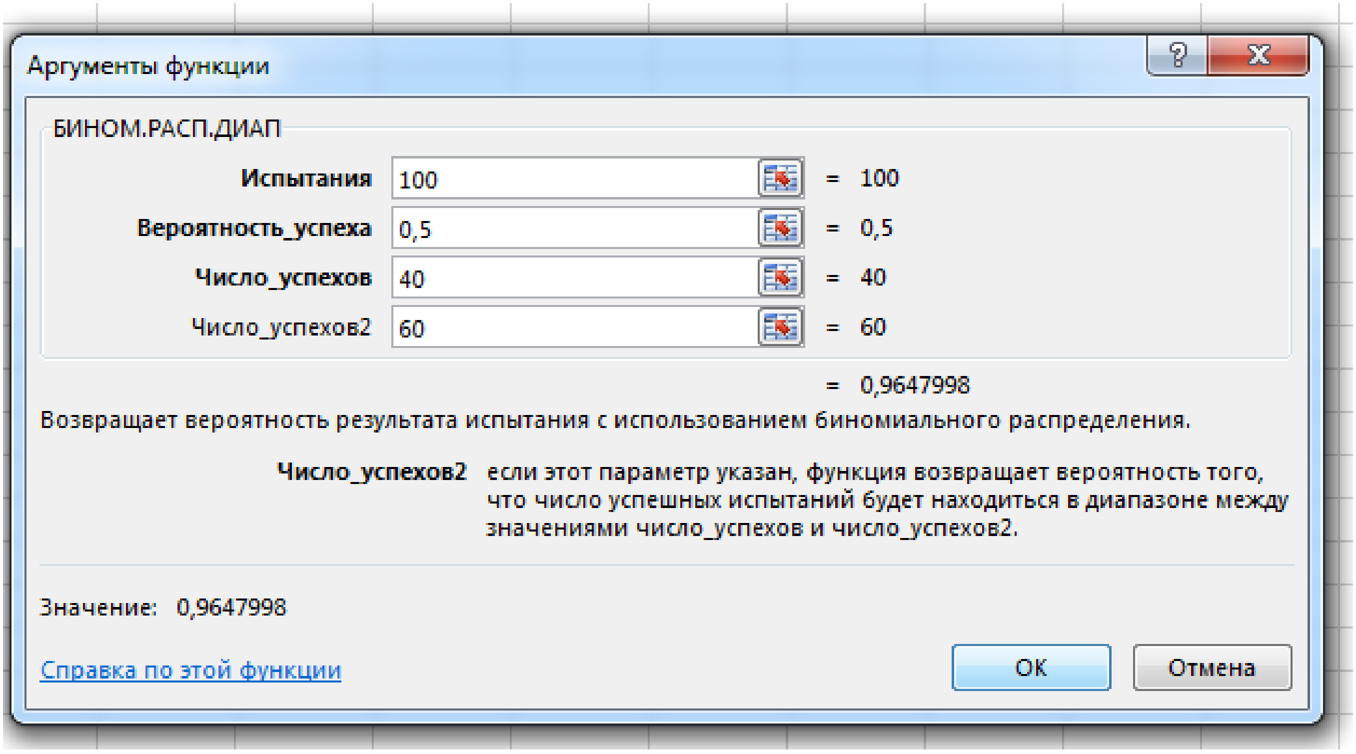
Монету бросают 100 раз. Найти вероятность, что число появлений герба $40 \leq m \leq 60$.

Так как $npq = 100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 25 \succ 10$,

$$P_{100}(40 \leq m \leq 60) = \Phi\left(\frac{60 - 100 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}\right) - \Phi\left(\frac{40 - 100 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}\right)$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

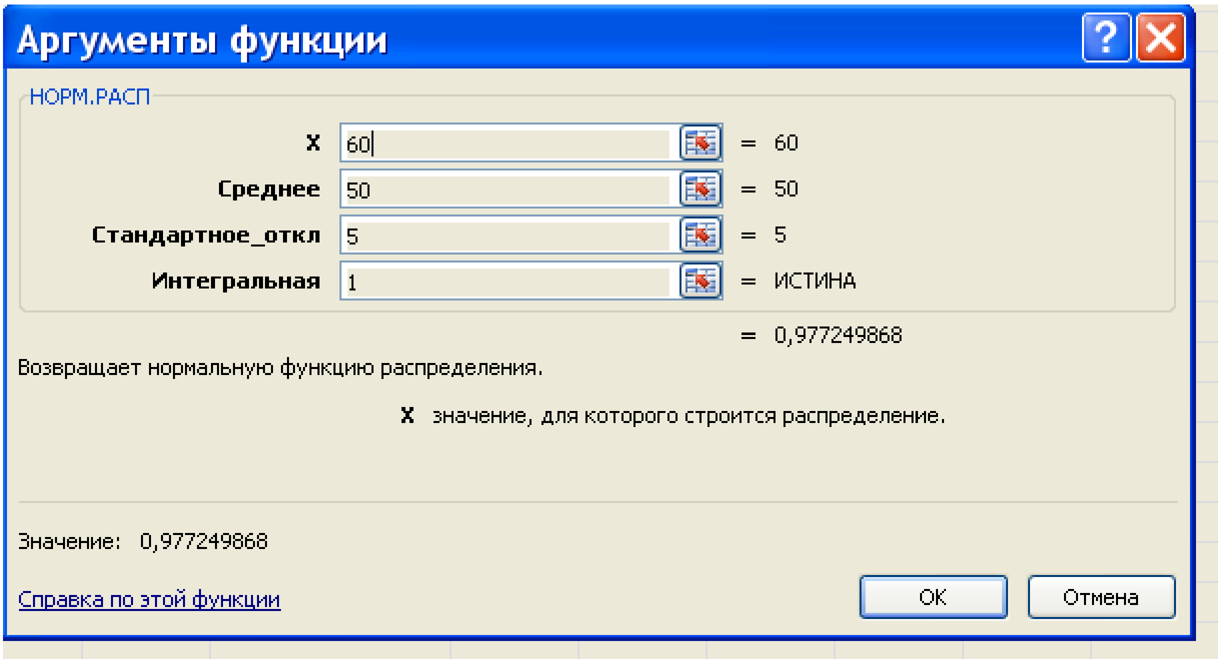
Вычислим точное значение вероятности, используя функцию БИНОМ.РАСП.ДИАП.



Проведем вычисления в приближенной формуле Лапласа с помощью функции НОРМ,РАСП.

$$P_{100}(40 \leq m \leq 60) =$$

$= НОРМ.РАСП\,(60;50;5;1) - НОРМ.РАСП\,(40;50;5;1) =$
0,977249868051821 - 0,0227501319481792 = 0,954499736103642



Задачи для самостоятельного решения.

В следующих задачах произвести вычисления дважды: с использованием функции БИНОМ.РАСП и по локальной формуле Лапласа с использованием функции НОРМ.РАСП.

1. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 1000 новорожденных ровно 500 мальчиков.

Ответ: 0,0207.

2. С какой вероятностью можно утверждать, что при 100 бросаниях монеты герб появится ровно 55 раз? Не более 55 раз?

Ответ: 0,048474297; 0,864373488.

3. С какой вероятностью, бросая 150 раз игральную кость, можно ожидать появления шести очков ровно 30 раз? Не более 30 раз?

Ответ: 0,045872504; 0,884150732.

4. 100 станков работают независимо друг от друга, причем вероятность бесперебойной работы каждого из них в течение смены равна 0,8. Найти вероятность того, что в течение смены будут бесперебойно работать ровно 85 станков. Ответ: 0,04565.

В следующих задачах произвести вычисления дважды: с использованием функции БИНОМ.РАСП.ДИАП и по интегральной формуле Лапласа с использованием функции НОРМ.РАСП.

5. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 1000 новорожденных от 490 до 530 мальчиков.

Ответ: 0,796.

6. С какой вероятностью можно утверждать, что при 100 бросаниях монеты герб появится от 40 до 60 раз?

Ответ: 0,9544.

7. С какой вероятностью, бросая 360 раз пару игральных костей, можно ожидать появления двенадцати очков от 8 до 12 раз?

Ответ 0,48.

8. Найти вероятность того, что из 500 отливок число годных окажется в пределах от 460 до 475, если известно, что бракуют в среднем 10% отливок. Ответ: 0,068.

Предельная теорема и приближенные формулы Пуассона

Будем считать, для определенности, что число p мало (в противном случае, если q мало, события A и $\bar{A}$ поменяем местами). Такие события называются массовыми (n велико) и редкими (p мало).

Предельная ТЕОРЕМА Пуассона.

Предположим, что m фиксировано, а n и p меняются, $n \to \infty$, а $p \to 0$, притом так, что величина $np = \lambda$ остается постоянной $\lambda = const$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Замечание.

Строго говоря, условие теоремы Пуассона $p \to 0$ при $n \to \infty$, противоречит условиям схемы Бернулли, где $p = const$. Однако, если вероятность p постоянна и мала, число n – велико, то получаем приближенную формулы Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

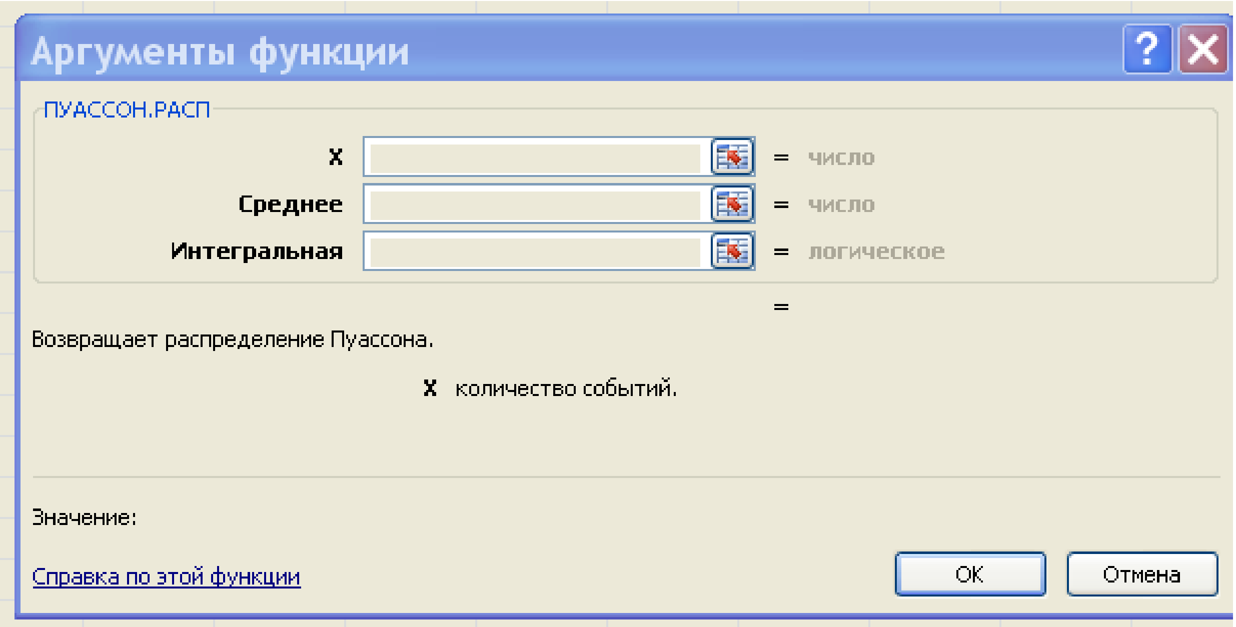
$$P_m(m_1 \le m \le m_2) \approx \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

При этом

$$\left| P_n(m) - \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \right| < np^2.$$

Для формулы Пуассона удается точно оценить ошибку приближения, она равна np^2, поэтому условие ее применимости имеет вид: $np^2 \ll 1$.

При проведении вычислений в программе Excel отпадает необходимость в использовании приближенных формул. Точный результат получим, использовав функцию $P_n(m)$=БИНОМ.РАСП(m,n,p,ложь), результат приближенной формулы Пуассона получим, используя функцию ПУАССОН.РАСП(m, λ, ложь) = P_n (m).



В поле X введем значение m, в поле «Среднее» введем значение λ, в поле «Интегральная» значение ЛОЖЬ.

Вероятность $P_n(\le m)$ вычисляется точно с помощью функции БИНОМ.РАСП.ДИАП, а по формуле Пуассона его можно получить применив функцию ПУАССОН.РАСП(m, λ, истина).

Задачи для самостоятельного решения.

В следующих задачах произвести вычисления дважды: с использованием функции БИНОМ.РАСП и с использованием функции ПУАССОН.РАСП.

1. Среди семян ржи имеется 0,4% сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 5000 семян обнаружить 5 семян сорняков?

Ответ: $5{,}5\cdot 10^{-5}$.

2. Среди семян ржи имеется 0,1% сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 7000 семян обнаружить не более 4 семян сорняков?

Ответ: 0,1726.

3. Автоматическая телефонная станция получает в среднем за час 300 вызовов. Какова вероятность того, что за данную минуту она получит точно 2 вызова?

Ответ: 0,09.

4. Книга в 1000 страниц имеет 100 опечаток. Какова вероятность того, что на случайно выбранной странице не более трех опечаток?

Ответ: 0,999996.

5. Завод отправил в сеть магазинов 3000 доброкачественных телевизоров. Вероятность того, что при транспортировке телевизор будет поврежден, равна 0, 001. Найти а) вероятность того, что потребитель получит 5 телевизоров с дефектами; б) не более 5.

Ответ: а) 0,1008; б) 0,9161.

6. Известно, что вероятность выпуска бракованного сверла равна 0,02. В коробке 100 штук. Найти вероятность того, что а) в коробке 3 бракованных сверла; б) в коробке не более трех бракованных сверл.

Ответ: а) 0,180447; б) 0,85712.

Случайные величины

Случайная величина – это переменная, которая в результате испытания принимает одно из своих возможных [числовых] значений, причем заранее неизвестно, какое именно, так как это зависит от случая. Случайные величины обозначаются латинскими буквами $X,Y,\ Z$. Их возможные значения $x_1, x_2, \ldots$.

Примеры.

Число студентов на лекции. Рост наугад отобранного студента.

Случайные величины описываются **законом распределения вероятностей**, то есть соответствием между возможными значениями случайных величин и их вероятностями. Закон распределения имеет различные формы.

Функция распределения вероятностей (интегральная функция распределения)

Функцией распределения случайной величины X называется функция, определенная равенством

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Свойства.

Свойство 1. $0 \leq F(x) \leq 1$, так как это вероятность.

Свойство 2. $F(x)$ – неубывающая функция, то есть если $x_1 < x_2, \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$.

Свойство 3.

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \ \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

Свойство 4. $F(x)$ непрерывна справа в любой точке.

Свойство 5. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$,

Свойство 6. Скачок функции в точке x=x$_1$ равен $P(X = x_1)$.

Независимость случайных величин

Две случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не меняется от того, какое возможное значение приняла другая случайная величина.

Пусть задана система случайных величин (X, Y). Будем говорить, что X и Y независимы, если независимы события $X' \in A$ и $Y' \in B$, где A и B – любые два подмножества возможных значений X и Y соответственно.

Иными словами выполняется равенство

$$P(X' \in A, Y' \in B) = P(X' \in A) \cdot P(Y' \in B).$$

В дальнейшем понятие независимости случайных величин будет уточнено.

Дискретные случайные величины

Наиболее удобными для изучения являются так называемые дискретные случайные величины. Они характеризуются тем, что их множество возможных значений конечно или счетно.

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан **рядом распределения**.

X:

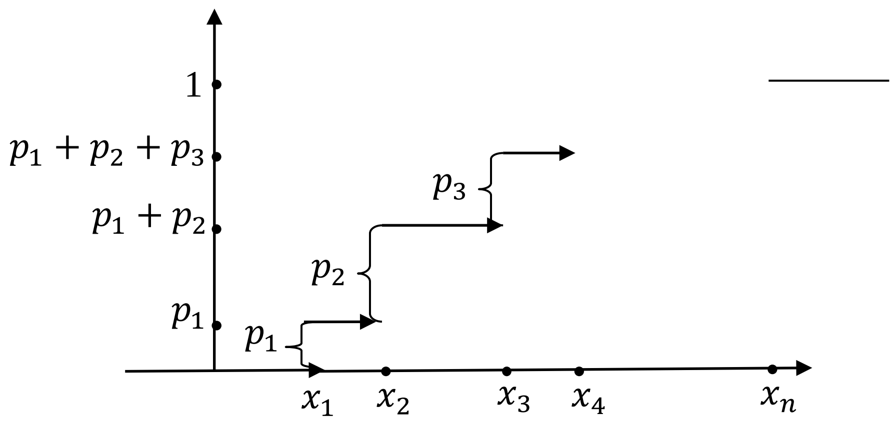
x_i	x_1	x_2	…	x_n	…
p_i	p_1	p_2	…	p_n	…

(1)

Свойство.

$$\sum p_i = 1.$$

Для дискретной случайной величины функция распределения $F(x)$– это функция ступенчатого типа (кусочно-постоянная). Она терпит разрыв в точках $x_1, x_2, \ldots$ причем имеет в этих точках скачки $p_1, p_2, \ldots$.



Независимость дискретных случайных величин X и Y означает независимость событий $X = x_i$ и $Y = y_j$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.

$$P\left((X = x_i)(Y = y_j)\right) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j).$$

Функция от случайной величины

Пусть X – случайная величина. Часто возникает необходимость в рассмотрении случайной величины Y вида $Y = g(X)$, где $g(x)$ – заданная числовая функция.

Если $g(x)$ – непрерывная функция, то соотношение $Y = g(X)$ определяет случайную величину Y.

Если закон распределения случайной величины X задан таблицей (1), то закон распределения Y задан таблицей

Y:

y_i	$g(x_1)$	$g(x_2)$	…
p_i			

Если среди y_i имеются равные, то соответствующие столбцы надо объединить в один столбец, сложив соответствующие вероятности.

Пример.

X:

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

$Y = X^2$

Y:

y_i	4	1	0	1	4
p_i	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

Y:

y_i	0	1	4
p_i	0,2	0,4	0,4

Суммой (разностью или произведением) случайных величин X и Y называется случайная величина, которая принимает все возможные значения вида $x_i + y_j$ ($x_i - y_j$ или $x_i \cdot y_j$), где $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ с вероятностями $p_{ij} = P\left[(X = x_i)(Y = y_j)\right]$.

Если случайные величины X и Y независимы, то есть независимы любые события $X = x_i$, $Y = y_j$, то по теореме умножения

$$p_{ij} = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) = p_i q_j.$$

Пример.

X:

x_i	0	2	4
p_i	0,5	0,2	0,3

Y:

Y_i	-2	0	2
p_i	0,1	0,6	0,2

Найти а) $Z = X - Y$, б) $Z = X \cdot Y$

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Закон распределения случайной величины дает исчерпывающую информацию о ней. Однако, во многих случаях удобно ограничиться так называемыми числовыми характеристиками.

Математическое ожидание

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется величина

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$ (если число возможных значений конечно)

или

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$ (если число возможных значений бесконечно, причем, математическое ожидание $\exists$, если ряд сходится абсолютно)

(так как, ряд может и расходиться, то соответствующая случайная величина может и не иметь математического ожидания)

Пример.

X:	x_i	2	2^2	2^3	$\ldots$	2^n	$\ldots$
	p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\ldots$	$\frac{1}{2^n}$	$\ldots$

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

У этой случайной величины математическое ожидание не существует.

Математическое ожидание случайной величины – это неслучайная постоянная величина. Она имеет размерность случайной величины.

Математическое ожидание – это среднее значение случайной величины, центр ее распределения.

Нельзя путать математическое ожидание с наиболее вероятным значением случайной величины.

Неправильно говорить «среднее ожидаемое».

Пример.

Пусть случайная величина X – число очков на игральной кости. Ее ряд распределения

X:	x_i	1	2	3	4	5	6

p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

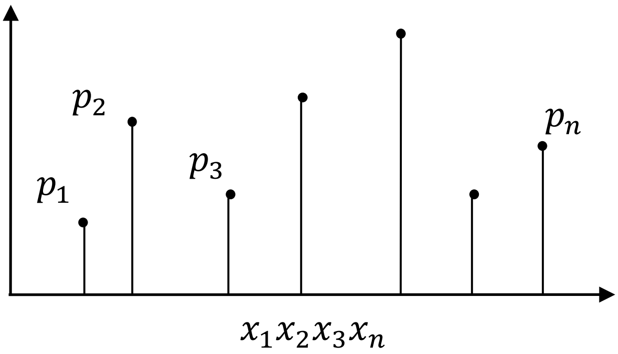
Математическое ожидание X равно

$$E(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = 3{,}5\,.$$

Очевидно, бесполезно ожидать, что на кубике выпадет 3,5 очка.

Пример из механики.

Если массы $p_1, p_2, \dots, p_n$расположены в точках с абсциссами $x_1, x_2, \dots, x_n$, то абсцисса центра тяжести системы материальных точек



вычисляется по формуле

$$x_c = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right) / \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = M(X)$$

Можно сказать, что математическое ожидание - «средневзвешенное» значение случайной величины.

Интерпретация математического ожидания в финансовом анализе.

Пример из финансового анализа.

Пусть случайная величина X– доходность некоторого актива (например, акции), известно ее распределение, то есть значения доходности x_i и их вероятности p_i за рассматриваемый промежуток времени. Тогда математическое ожидание $E(X)$ выражает среднюю (прогнозную) доходность актива.

Свойства.

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной величины равно ей самой.

$$E(C) = c.$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания.

Доказательство.

X:

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

cX:

x_i	cx_1	cx_2	$\cdots$	cx_n	$\cdots$
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

$$E(cX) = \sum p_i c x_i = c \sum p_i x_i = cE(X).$$

Свойство 3. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

Замечание.

Формула обобщается на любое число слагаемых

$$E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n).$$

Свойство 4. Если случайные величины X и Y независимы, то математическое ожидание их произведения равно произведению математических ожиданий:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y).$$

Свойство 5. Если $\varphi(x)$ – числовая функция и X – дискретная случайная величина, то

$$E\big(\varphi(X)\big) = \varphi(x_1)p_1 + \varphi(x_2)p_2 + \cdots$$

Свойство 6. Если $\varphi(x)$ – выпуклая функция, то

$$E\big(\varphi(X)\big) \geq \varphi\big(E(X)\big)$$ – неравенство Йенсена.

(Выпуклость функции – это выпуклость вниз $f\big((1-\tau)x_1+\tau x_2\big) \le (1-\tau)f(x_1)+\tau f(x_2)$, где $\tau \in [0,1]$).

Для вычисления математического ожидания можно использовать функцию СУММПРОИЗВ.

Дисперсия

Рассмотрим **пример:**

X:

x_i	-100	-50	50	100
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y:

y_j	-0,02	-0,01	0,01	0,02
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$E(X) = E(Y) = 0.$$

Математическое ожидание не полностью характеризует случайную величину; нужно выяснить, насколько рассеяны ее возможные значения вокруг центра, то есть математического ожидания. Для этого вводят новую числовую характеристику, называемую дисперсией. Слово «дисперсия» означает «рассеяние».

Назовем случайную величину $X - m$, где $m = E(X)$ отклонением.

$X - m$:

$x_1 - m$	$x_2 - m$	…	$x_n - m$	…
p_1	p_2	…	p_n	…

На первый взгляд, кажется, что нужно найти среднее значение (математическое ожидание) отклонения случайной величины от ее центра, но

$$E(X-m) = E(X) - m = m - m = 0.$$

Поэтому вычисляют среднее значение квадрата отклонения. Это и есть дисперсия.

(Величина $E(|X-m|)$- среднее значение модуля отклонения, называемая средним линейным отклонением неудобна в пользовании).

Определение.

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(X) = E[(X-m)^2] = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right].$$

Для дискретной случайной величины

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p_i \quad \text{(если число возможных значений конечно)}$$

и

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - m)^2 p_i \quad \text{(если число возможных значений бесконечно)}$$

$D(X) \geq 0$, это неслучайная постоянная величина, она имеет размерность квадратаслучайной величины, что не всегда удобно, Поэтому в качестве меры рассеяния (разброса) возможных значений случайной величины вокруг ее математического ожидания используют величину $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$, имеющую ту же размерность и называемую средним квадратичным (квадратическим) отклонением случайной величины или стандартным отклонением.

Если дисперсия характеризует средний размер квадрата отклонения, то $\sigma(X)$ можно рассматривать как некоторую среднюю характеристику самого отклонения, точнее, величины $|X-m|$.

$$\boldsymbol{D(X) = \sigma^2(X).}$$

В финансовом анализе.

Если случайная величина X – доходность некоторого актива, то дисперсия $D(X)$ или $\sigma(X)$ – выражает меру отклонения доходности от ожидаемого среднего значения, то есть риск данного актива.

ТЕОРЕМА.

Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания.

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X). \qquad (*)$$

Следствие.

$$D(X) = \sum p_i x_i^2 - m^2.$$

Свойства.

Свойство 1. Дисперсия постоянной величины равна нулю. $D(C) = 0$ (постоянная величина не имеет рассеяния).

Свойство 2. Постоянный множитель выносится за знак дисперсии в квадрате $D(cX) = c^2 D(X)$.

Свойство 3. Рассмотрим дисперсию суммы

Величина $E\big[\big(X - E(X)\big) \cdot \big(Y - E(Y)\big)\big]$ называют **ковариацией** или корреляционным моментом случайных величин X и Y, и обозначают $Cov(X, Y)$ или σ(X,Y).

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2Cov(X, Y).$$

Ковариация имеет размерность произведения размерностей случайных величин X и Y.

ТЕОРЕМА.

Если X и Y независимы, то их ковариация равна нулю.

Если X и Y независимы, то дисперсия суммы $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$равна сумме дисперсии и дисперсия разности

$$D(X - Y) = D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y)–$$

тоже равна сумме дисперсий.

Следствие. $D(C + X) = D(X)$

Величины C и X независимы $D(C+X) = D(C) + D(X) = 0 + D(X)$.

Свойства ковариации.

Свойство 1. $Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$

Свойство 2. $Cov(X,X) = D(X)$

Свойство 3. $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2Cov(X,Y)$

Свойство 4. Если X и Yнезависимы, то $Cov(X,Y) = 0$

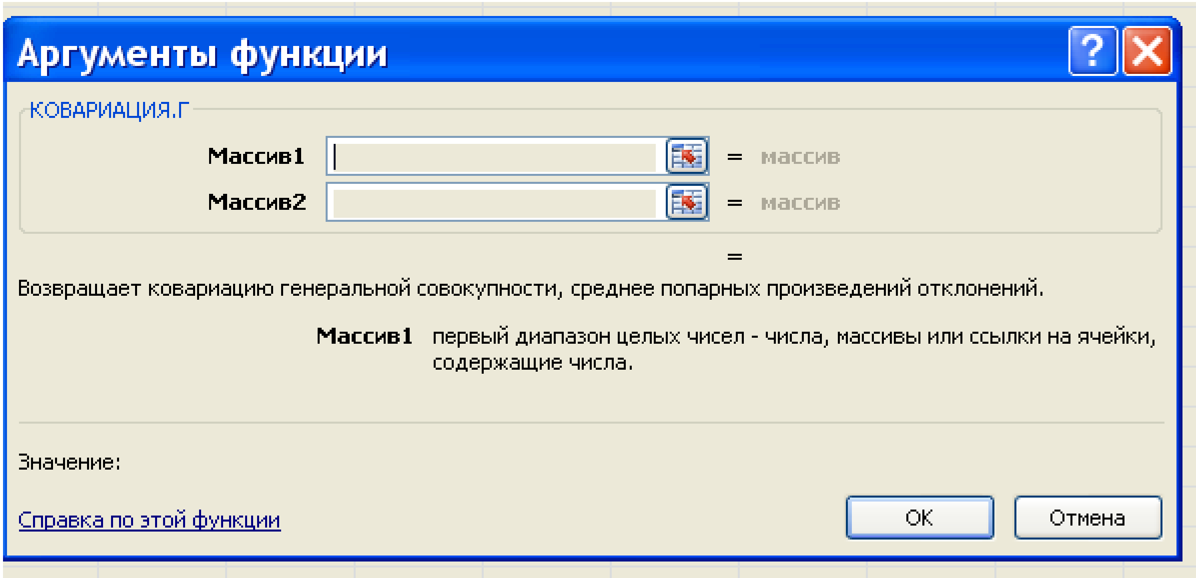
Свойство 5. $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

Свойство 6. $Cov(aX,Y) = Cov(X,aY) = aCov(X,Y)$

Свойство 7. $Cov(X+Y,Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$

Свойство 8. $Cov(X,Y+Z) = Cov(X,Y) + Cov(X,Z)$.

Ковариация вычисляется с помощью функции КОВАРИАЦИЯ.Г



В поля «Массив 1» и «Массив 2» вводим диапазоны, содержащие значения случайной величины X и случайной величины Y.

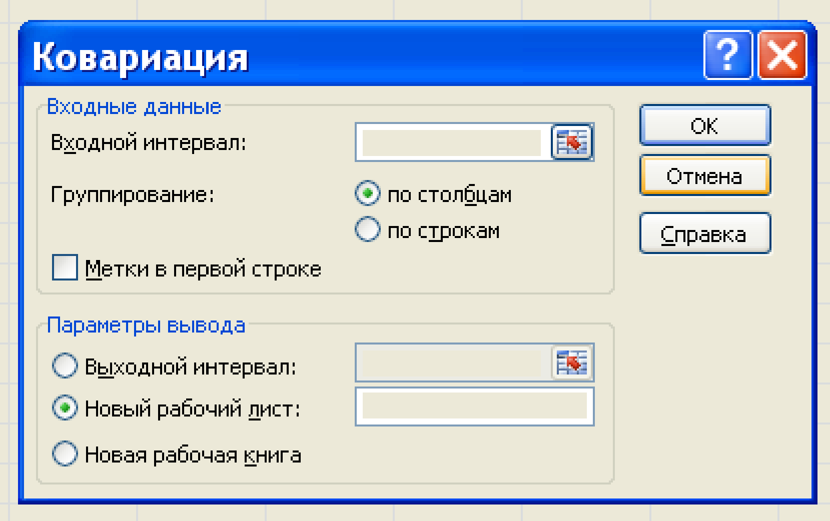
Если $Cov(X,Y) = 0$, то случайные величины X и Y называются некоррелированными. Таким образом, по свойству 4 из независимости X и Y следует их некоррелированность. Обратное неверно.

Ковариация $Cov(X,Y)$ может использоваться как характеристика линейной взаимосвязи X и Y.

Ковариационной матрицей называется матрица вида:

$$K(X,Y) = \begin{pmatrix} \sigma^2(X) & \sigma(X,Y) \\ \sigma(X,Y) & \sigma^2(Y) \end{pmatrix}.$$

Ковариационную матрицу можно вычислить, используя **Пакет анализа** программы Excel: «Данные» → «Анализ данных» → «Ковариация»



В поле «Входной интервал» указать столбцы, содержащие значения случайной величины X и случайной величины Y (эти столбцы должны быть смежными); в поле «Метки» галочку надо ставить, только, если эти столбцы имеют заголовки.

Для характеристики уровня линейной взаимосвязи между X и Y больше подходит безразмерная характеристика

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}$$

–коэффициент корреляции.

Свойства.

Свойство 1. $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$

Свойство 2. $|\rho(X,Y)| \le 1$

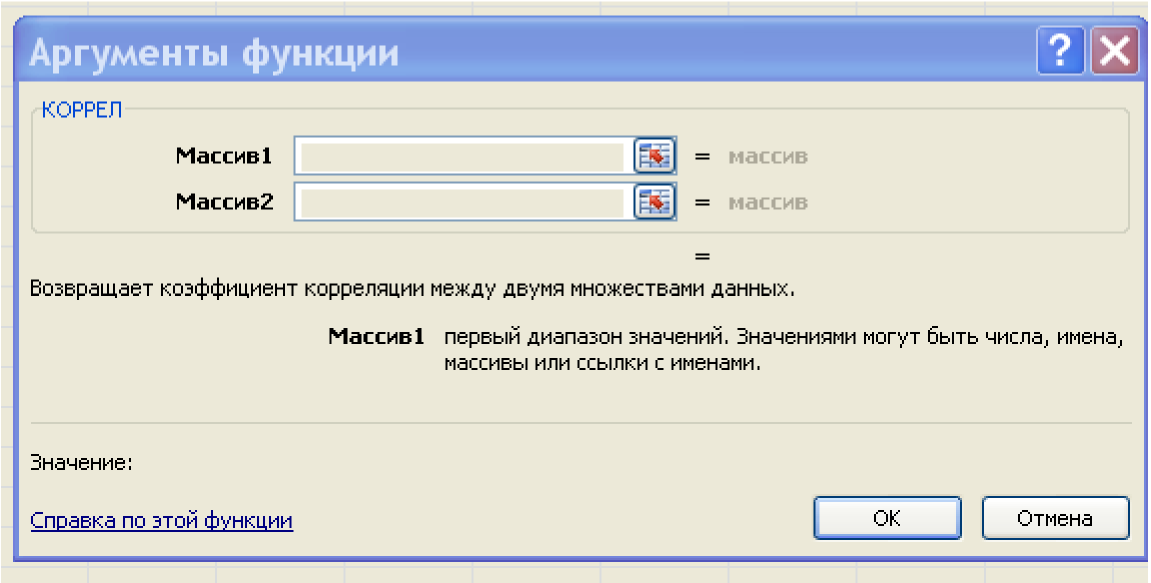
Свойство 3. Условие $\rho(X,Y) = \pm 1$ равнозначно существованию констант a и b таких, что равенство $Y = aX + b$ выполняется с вероятностью 1.

При этом, если $\rho = 1$, то $a > 0$, если $\rho = -1$, то $a < 0$ – при $|\rho| = 1$ корреляционная связь между признаками X и Y представляет собой линейную функциональную зависимость;

при $\rho = 0$ линейная корреляционная связь между X и Y отсутствует, но может присутствовать нелинейная.

Чем ближе $|\rho|$ к единице, тем теснее линейная связь между признаками X и Y.

Коэффициент корреляции вычисляется с помощью функции КОРРЕЛ.

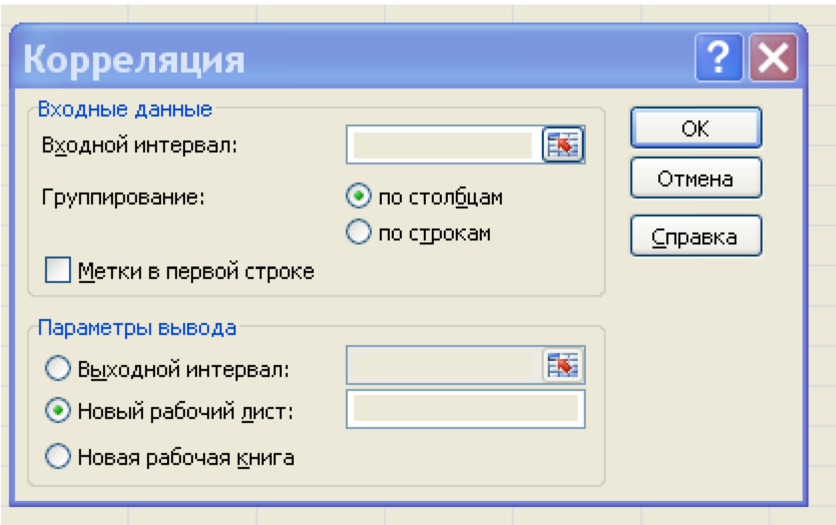


В поля «Массив 1» и «Массив 2» вводим диапазоны, содержащие значения случайной величины X и случайной величины Y.

Корреляционная матрица имеет вид:

$$R(X,Y) = \begin{pmatrix} 1 & \rho(X,Y) \\ \rho(X,Y) & 1 \end{pmatrix}.$$

Ковариационную матрицу можно вычислить, используя **Пакет анализа** программы Excel: «Данные» → «Анализ данных» → «Корреляция»



В поле «Входной интервал» указать столбцы, содержащие значения случайной величины X и случайной величины Y (эти столбцы должны быть смежными); в поле «Метки» галочку надо ставить, только, если эти столбцы имеют заголовки.

Задачи для самостоятельного решения

1. Случайная величина имеет ряд распределения:

x_i	10	20	30	40	50
p_i	0,2	0,3	0,35	0,1	0,05

Найти мат. ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, построить график функции F (x).
Ответ: E(X)=25; D(X)=115.

2. Из урны, содержащей три белых и четыре черных шара, извлекают 4 шара без возвращения. Пусть X – число белых шаров из четырех извлеченных. Составить закон распределения X, найти мат. ожидание, дисперсию и вычислить P (X > 8/3), построить график F(x).
Ответ:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	1/35	12/35	18/35	4/35	0

E(X)=12/7; D(X)=24/49; P=4/35.

3. В ящике 5 шаров, один из которых – черный. Из ящика извлекают один шар за другим, пока не будет вынут черный шар. Найти распределение СВ X, равной числу вынутых шаров. Найти E(X) и D(X).
Ответ:.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

E(X)=3; D(X)=2.

4. Стрелок производит 3 выстрела по одной мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Чему равна дисперсия случайной величины X, равной числу попаданий в мишень?

Ответ: m=1,8; D(X)=0,72.

5. Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу в мишень. Вероятности попадания для них равны соответственно 0,8 и 0,6. Случайная величина X - число попаданий в мишень. Найти ее мат. ожидание и дисперсию. Ответ: m=1,4; D(X)=0,4.

6. Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу в мишень. Вероятности попадания для них равны соответственно 0,7 и 0,6. Случайная величина X - число попаданий в мишень. Найти ее мат. ожидание и дисперсию. Ответ: m=1,3; D(X)=0,45.

7. Три стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу в мишень. Вероятности попадания для них равны соответственно 0,7, 0,8 и 0,9. Случайная величина X - число попаданий в мишень. Составить закон распределения СВ X. Найти ее мат. ожидание и дисперсию.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,006	0,092	0,398	0,504

Ответ: m=2,492; D(X)= 0.009936.

8.Закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей:

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Вычислить дисперсию случайной величины 4X.
Ответ: 19,2.

9. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

x_i	-2	-1	2	5
p_i	0,2	0,3	0,3	0,2

Вычислить математическое ожидание случайной величины $Y = X^2 + 3X - 5$ и ее дисперсию.
Ответ: 5; 252.

10. Случайные величины X и Y независимы. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

x_i	1	2	3
p_i	0,3	0,2	0,5

Дискретная случайная величина Y имеет закон распределения

y_i	4	5
p_i	0,3	0,7

Найти закон распределения СВ $Z = X + Y$.

Ответ:

z_i	5	6	7	8
p_i	0,09	0,27	0,29	0,35

11. Случайные величины X и Y независимы. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

x_i	-3	2
p_i	0,4	0,6

Дискретная случайная величина Y имеет закон распределения

y_i	-2	3	4
p_i	0,1	0,4	0,5

Найти закон распределения СВ $Z = X \cdot Y$.

Ответ:

z_i	-12	-9	-4	6	8
p_i	0,2	0,16	0,06	0,24	0,3

12. Случайные величины X и Y независимы. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

x_i	1	2	5
p_i	0,1	0,6	0,3

Дискретная случайная величина Y имеет закон распределения

y_i	-1	0
p_i	0,2	0,8

Найти математическое ожидание случайной величины $Z = -2XY - 3$ и дисперсию случайной величины $V = -X + Y - 3$.
Ответ: -4,12; 2,32.

13. Случайные величины X и Y независимы, причем M(X) = 6, M(Y) = 5, M(Z) = 4, D(X) = 3, D(Y) = 2, D(Z) = 1. Найти мат. ожидание и дисперсию случайной величины U = 7X – 2Y – 5Z+14.

14. Для случайных величин X и Y мат. ожидания равны 10 и -6 соответственно, а ковариационная матрица имеет вид

$$K(X,Y) = \begin{pmatrix} 1 & -1{,}5 \\ -1{,}5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти мат. ожидание и дисперсию случайной величины
Z = X – 3Y +32.
Ответ: 60; 37.

15. Для случайных величин X и Y мат. ожидания равны 3 и 2 соответственно, а ковариационная матрица имеет вид

$$K(X,Y) = \begin{pmatrix} 3{,}60 & 0{,}72 \\ 0{,}72 & 0{,}40 \end{pmatrix}.$$

Найти а) коэффициент корреляции; б) мат. ожидание и дисперсию случайной величины Z = 3X – 4Y +2
Ответ: а) 0,6; б) 21,52; 3.

16. Задана ковариационная матрица

$$K(X,Y) = \begin{pmatrix} 2{,}00 & 2{,}25 \\ 2{,}25 & 4{,}50 \end{pmatrix}.$$

Вычислить коэффициент корреляции.

Ответ: 0,75.

17. Задана ковариационная матрица

$$K(X,Y) = \begin{pmatrix} 14{,}4 & -2{,}4 \\ -2{,}4 & 2{,}5 \end{pmatrix}.$$

Вычислить коэффициент корреляции.

Ответ: -0,4.

18. Задано совместное распределение случайных величин X и Y

X	0,1	0,2	0,3	0,6	0,8
Y	2,8	2,4	2,4	1,1	0,8

Вычислить ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин X и Y. Записать ковариационную матрицу.

Ответ: -0,204; -0,984.

$$K(X,Y) = \begin{pmatrix} 0{,}068 & -0{,}204 \\ -0{,}204 & 0{,}632 \end{pmatrix}.$$

19. Задано совместное распределение случайных величин X и Y

X	0,1	0,2	0,3	0,6	0,8
Y	0,1	0,5	0,9	1,8	2,2

Вычислить ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин X и Y. Записать ковариационную матрицу.

Ответ: 0,204; 0,99352744.

$$K(X,Y) = \begin{pmatrix} 0{,}068 & 0{,}204 \\ 0{,}204 & 0{,}62 \end{pmatrix}.$$

Основные законы распределения дискретных случайных величин

Биноминальное распределение

Дискретная случайная величина X имеет биноминальный закон распределения, если она принимает целочисленные неотрицательные значения $0,1,2,3,\dots,n$ с вероятностями, вычисляемыми по формуле Бернулли:

X:

x_i	0	1	…	m	…	n
p_i	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	…	$C_n^m p^m q^{n-m}$	…	p^n

Вероятность P(X=m)= БИНОМ.РАСП(m,n,p,ложь)

Случайная величина X может быть представлена в виде суммы n независимых случайных величин X_i (представляющих собой число наступления события A в i-том испытании), каждая из которых имеет один и тот же **закон распределения Бернулли**:

X_i:

x_i	0	1
p_i	q	p

$i = 1,2,\dots,n$

Следовательно $E(X_i = p)$.

$$D(X_i) = E(X^2) - E(X) = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

Учитывая, что случайные величины X_i независимы, согласно свойствам математического ожидания и дисперсии, получим

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np.$$

$$D(X) = D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = npq.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{npq}$$

Закон распределения Пуассона

Дискретная случайная величина X имеет закон распределения Пуассона с параметром λ, если она принимает целочисленные, неотрицательные значения $0,1,2,3,\dots,n,\dots$ (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями, вычисляемыми по формуле Пуассона:

X:

x_i	0	1	2	…	m	…
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	…

где $\lambda = np$– параметр распределения Пуассона.

Вероятность P(X=m)= ПУАССОН.РАСП(m,n,p,ложь)

Числовые характеристики случайной величины X.

$$E(X) = \lambda.$$

$$D(X) = \lambda$$

Таким образом,

$$E(X) = D(X) = \lambda = np$$

Сумма независимых случайных величин $X + Y$, распределенных по закону Пуассона с параметрами λ и μ, распределена так же по закону Пуассона с параметром $\lambda + \mu$.

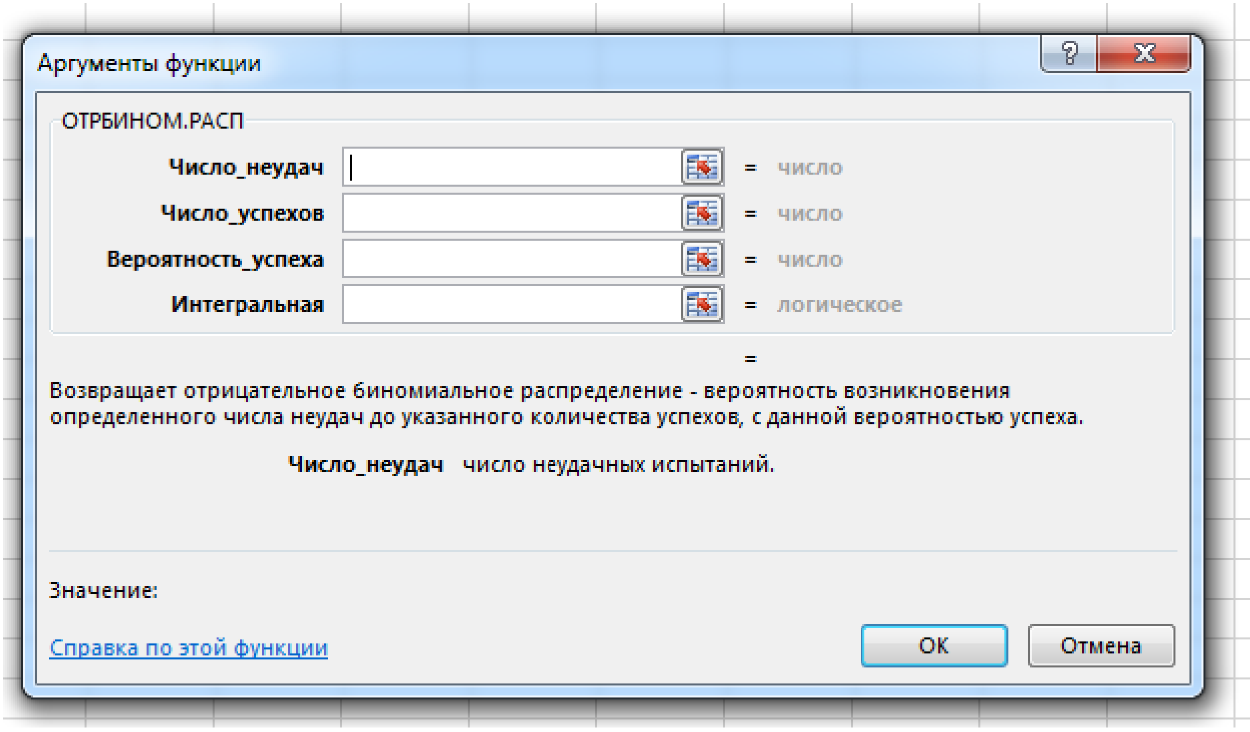
Геометрический закон распределения

Геометрическое распределение имеет случайная величина X, равная числу испытаний по схеме Бернулли до первого успеха, с вероятностью успеха в единичном испытании p . Закон распределения имеет вид:

X:

x_i	1	2	3	…	n	…
p_i	p	pq	pq^2	…	pq^{n-1}	…

Для вычисления вероятности P(X=m) используется функция ОТРБИНОМ.РАСП .



P(X=m) = ОТРБИНОМ.РАСП(m-1, 1, p, ложь).

В поле «Число неудач» вводим значение m-1, в поле «Число успехов вводим единицу, в поле «Вероятность успеха» введем p, в поле «Интегральная» введем ЛОЖЬ.

Числовые характеристики для геометрического распределения:

$$E(X) = \frac{1}{p}.$$

$$D(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Непрерывные и абсолютно непрерывные случайные величины

Определение.

Случайная величина X называется непрерывной, если ее функция распределения вероятностей $F(x)$ непрерывна в любой точке x.

Свойство $\boldsymbol{F(x)}$.

Для непрерывной случайной величины вероятность того, что она примет любое определенное значение равна нулю $P(X = x_1) = 0$ для $\forall x_1$.

Замечание.

В свете классического определения вероятности событие, вероятность которого равна нулю, невозможно. Однако было бы неверным считать событие $X = x_1$ невозможным. Дело в том, что классическое определение вероятности не подходит для непрерывных случайных величин. Но на практике это не приводит к недоразумениям, просто вместо вероятности $P(X = x_1)$ нужно находить вероятность попадания случайной величины X в интервал, содержащий x_1, пусть даже сколь угодно малый.

Следствие.

Для непрерывных случайных величин

$$P(a \le X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \le b) =$$

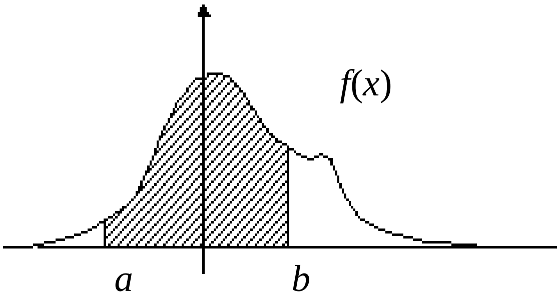
$$= P(a \le X \le b) = F(b) - F(a).$$

Можно дать другое определение непрерывной случайной величины: случайная величина непрерывна, если вероятность каждого ее отдельного значения равна нулю.

Определение.

Случайная величина X называется абсолютно непрерывной, если найдется такая неотрицательная функция $f(x) \ge 0$ называемая плотностью распределения (плотностью вероятности), такая, что вероятность попадания X в промежуток $[a, b]$ равна

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx.$$



Полагая $a = -\infty$, $b = x$, получаем

$$P(-\infty < X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Поэтому $F(x)$ называют еще интегральной функцией распределения.

Свойства.

Свойство 1. $f(x) \geq 0$ по определению

Свойство 2. Функция плотности обладает свойством нормированности

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Свойство 3. Во всех точках, где функция плотности непрерывна выполняется равенство

$f(x) = F'(x)$, поэтому

$f(x)$ – называют еще дифференциальной функцией распределения.

Определение.

Абсолютно непрерывная случайная величина X называется сосредоточенной на отрезке $[a, b]$, если функция плотности равна нулю вне этого отрезка.

Математическим ожиданием абсолютно непрерывной случайной величины называется величина

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

(при этом математическое ожидание $\exists$, если сходится интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx$).

Свойства. Для непрерывных случайных величин.

Свойство 1. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Свойство 2. $E(cX) = cE(X)$

Свойство 3. Если случайные величины X и Y независимы, то $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$.

Свойство 4. Пусть X – **абсолютно** непрерывная случайная величина, $f(x)$ – ее непрерывная плотность вероятности, и пусть $g(x)$– некоторая непрерывная функция, тогда

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx,$$

если интеграл сходится абсолютно.

Дисперсией абсолютно непрерывной случайной величины X называется величина

$$D(X) = E[(X-m)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x) dx,$$

где $m = E(X)$.

Из формулы $D(X) = E(X^2) - E(X)$ следует

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - m^2.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Свойства.

Свойство 1. $D(cX) = c^2 D(X)$

Свойство 2. $D(c + X) = D(X)$

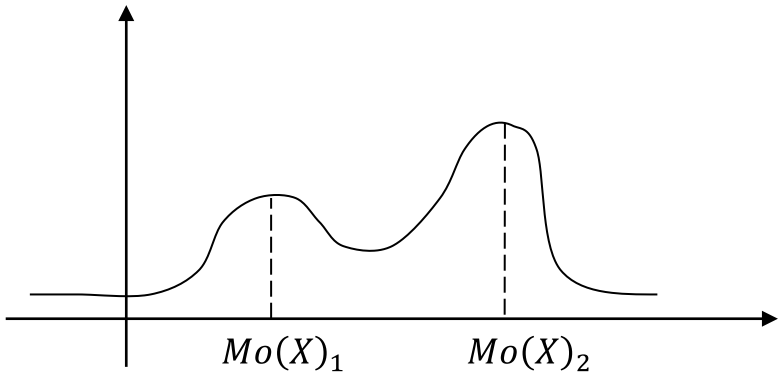
Свойство 3. Если X и Y независимы, то $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

Замечание.

Возможные значения непрерывной случайной величины как бы «размазаны» по числовой оси или по отрезку с неравномерной плотностью, а возможные значения дискретной случайной величины сосредоточены в точках с весами p_i.

Кроме математического ожидания и дисперсии, в теории вероятностей применяется еще ряд числовых характеристик, отражающих те или иные особенности распределения.

Модой $Mo(X)$абсолютно непрерывной случайной величины называют ее наиболее вероятное значение, для которого плотность вероятности достигает максимума.



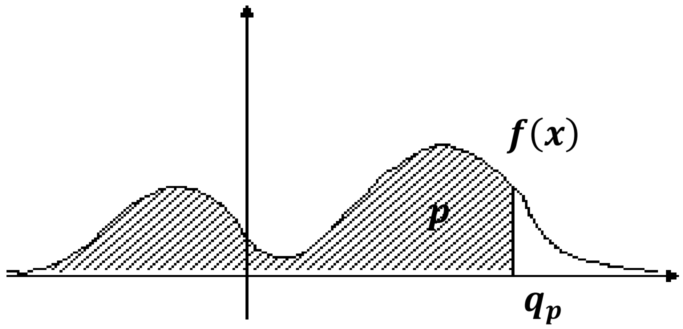
Для дискретной случайной величины мода – это значение с наибольшей вероятностью.

Если наиболее вероятных значений у распределения несколько, оно называется полимодальным, если оно единственно – унимодальным. Если распределение моды не имеет, оно называется немодальным.

Вероятностный смысл моды – в ее окрестность наиболее вероятно попадание случайной величины.

Квантилем уровня p (квантилем порядка p) называется такое значение q_p случайной величины, при котором

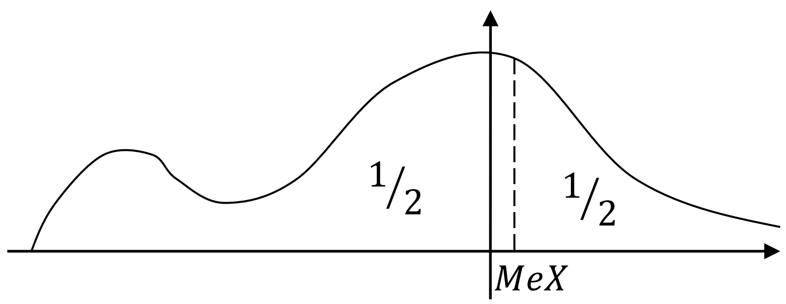
$$F(q_p) = P(X \leq q_p) = \int_{-\infty}^{q_p} f(x)dx = p.$$



С понятием квантиля тесно связано понятие **процентной точки**.

$100p$ %-ой точкой называют квантиль порядка $1 - p$.

Квантиль уровня (порядка) 0,5 называют **медианой** случайной величины X и обозначают MeX.



Задачи для самостоятельного решения

1. СВ задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ (x-1)/2, & 1 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найти функцию плотности вероятности, мат. ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, вычислить вероятность попадания СВ в интервалы (1,5; 2,5) и (2,5; 3,5).

Ответ: m=2, D =1/3, $\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}$, P(1;2,5)=0,5, P(2,5;3,5)=0,25.

2. СВ задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ (x-1)^2, & 1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти функцию плотности вероятности, мат. ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, вычислить вероятность попадания СВ в интервалы (1; 2,5) и (2,5; 3,5).

Ответ: m=5/3, D=1/18, $\sigma = \frac{\sqrt{2}}{6}$, P(1;2,5)=1.

3. СВ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ a(3x-x^2), & 0 \le x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Найти коэффициент a, построить график f(x) , найти функцию F(x), вероятность попадания СВ в интервал (1;2).

Ответ: a=2/9,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{x^2}{3} - \frac{2}{27}x^3, & 0 < x \le 3, \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

P(1,2)=13/27; E(X) = 1,5; D(X)= 0,45; σ(X) = 0,67.

4. СВ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ a \sin x & 0 \le x \le \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Найти коэффициент a, доказать, что функция f(x) может служить плотностью вероятности некоторой СВ, построить график f(x) , найти функцию F(x), мат.ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, медиану, вероятность попадания СВ в интервал $(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2})$.

Ответ: a = 0,5; m = $\frac{\pi}{2}$; D(X) = $\frac{\pi^2}{4} - 2$; $\sigma = 0{,}68$; Me X=MoX= $\frac{\pi}{2}$; p = 0,25, F(x) = ½(1-cosx).

5. СВ задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2, \\ x/4 + 1/2, & -2 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти функцию плотности вероятности, мат. ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

Ответ: E(X) = 0, D(X) = 4/3.

6. СВ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ c(x+1), & -1 \le x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найти c, функцию F(x), мат. ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение P(-0,5<X<0,5).

Ответ: c = 2/9

.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ (2/9)(x^2/2 + x), & -1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

E(X) = 1; D(X)= 0,5; σ(X) = 0,71; P(-0,5<X<0,5) = 2/9.

7. СВ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ ax^2, & 0 \le x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найти a, функцию F(x), мат. ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, P(1/2<X<3/2).

Ответ: a = 3/8;

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ (x^3/8, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

E(X) = 1,5; D(X)= 0,15; σ(X) = 0,387; P(0,5<X<1,5) = 13/32= 0,40625.; MeX = 1,5874.

8. СВ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ax, & 0 < x \le 6, \\ 0, & x > 6. \end{cases}$$

Найти a, функцию F(x), мат.ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, P(1,5<X<3,5) .

Ответ: a =1/18; E(X) = 4; D(X)= 2; σ(X) = 1,4.

9. СВ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \angle 1, \\ 1/8(5-x), & 1 \le x \le 5, \\ 0, & x > 5. \end{cases}$$

Найти интегральную функцию F(x).

Ответ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \angle 1, \\ 1/8(5x-x^2) - 9/8, & 1 \le x \le 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Некоторые законы распределения непрерывных случайных величин

Закон равномерного распределения на отрезке

Определение.

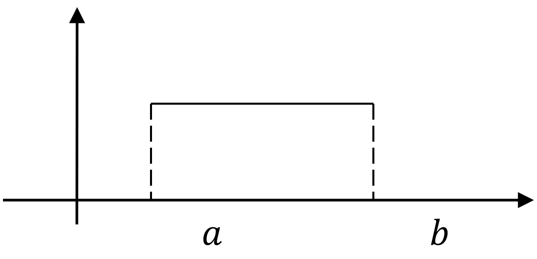
Будем говорить, что абсолютно непрерывная случайная величина имеет равномерный закон распределения на отрезке $[a,b]$ (или равномерно распределена на этом отрезке), если ее плотность вероятности $f(x)$ постоянна на этом отрезке и равна нулю вне его, то есть $f(x)=c$, если $x \in [a,b]$.

Найдем c из условия:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

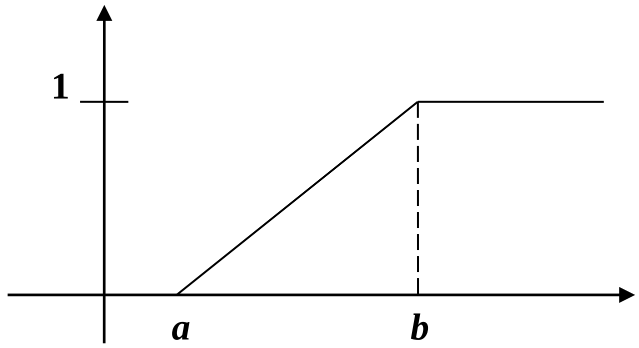
$$\int_{a}^{b} c dx = 1; \qquad c(b-a)=1; \qquad c = \frac{1}{b-a}$$

Таким образом, для равномерного распределения $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$



Функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$



$$E(X) = m; \quad D(X) = \frac{(a-b)^2}{12}; \qquad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Мода не определена – распределение не модальное.

Медиана равна

$$M(X) = \frac{a+b}{2}.$$

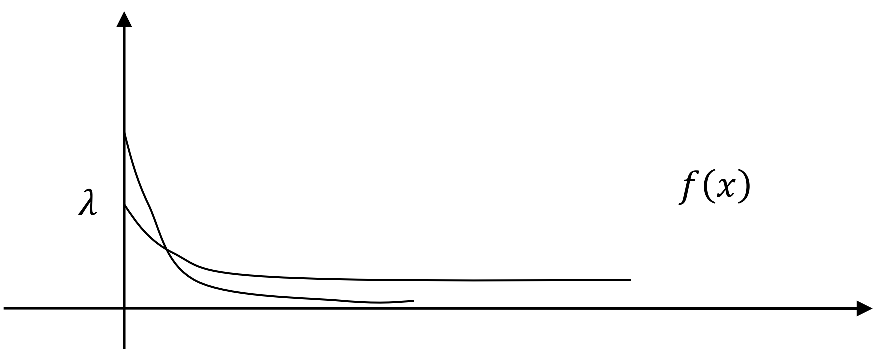
Вероятность попадания на отрезок [c,d] , содержащийся в исходном отрезке [a,b] равна $\mathrm{P(X)} = \frac{d-c}{b-a}$

Показательный (экспоненциальный) закон распределения

Определение.

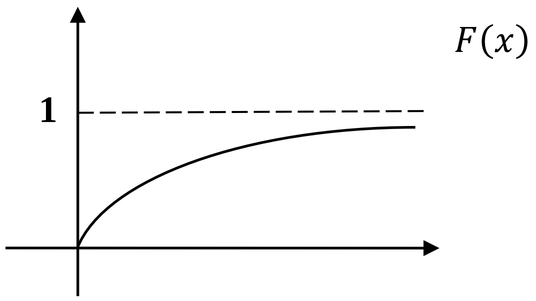
Будем говорить, что абсолютно непрерывная случайная величина имеет показательный (экспоненциальный) закон распределения с параметром $\lambda > 0$, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



Для показательного распределения функцию распределения вероятностей $F(x)$ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



Числовые характеристики показательного распределения:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}; \;\; D(X) = \frac{1}{\lambda^2}\; ; \; \sigma(X) = \frac{1}{\lambda} = E(X)\,.$$

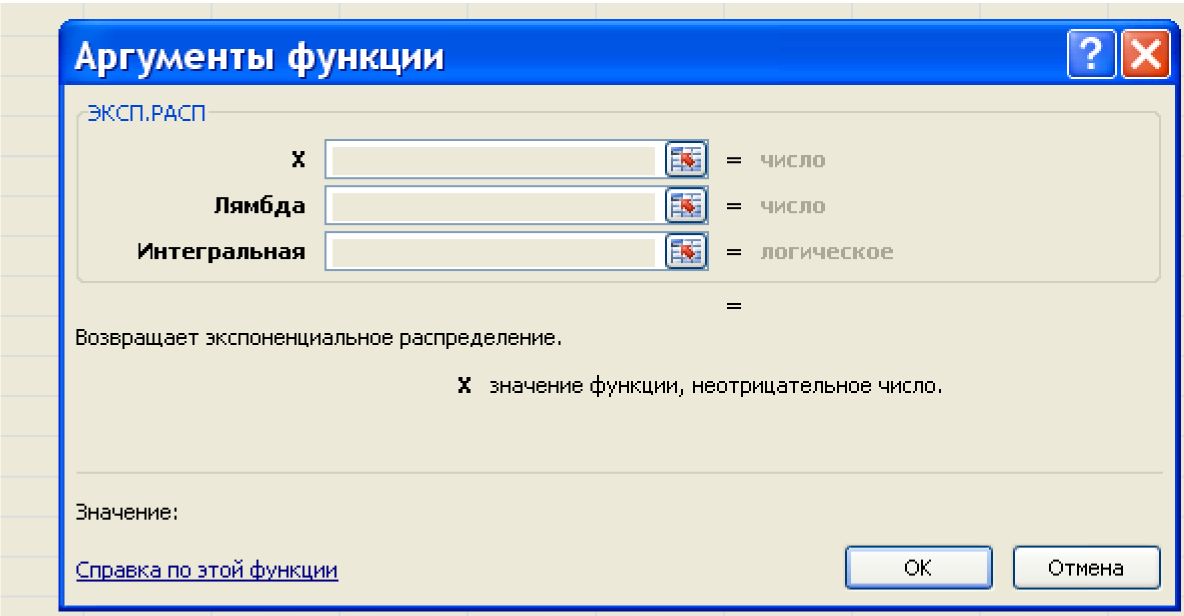
Мода не определена.

Медиана $MeX = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Для показательного распределения

$$P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} \text{ при } a \geq 0.$$

Вероятность $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$. Ее можно получить, используя для вычисления $F(b)$ и $F(a)$ функцию ЭКСП.РАСП.



В поле X вводится значение аргумента функции, в поле «Лямбда» вводится значение параметра $\boldsymbol{\lambda}$, в поле «Интегральная» значение ИСТИНА.

Нормальный закон распределения

Определение.

Будем говорить, что абсолютно непрерывная случайная величина X имеет нормальное распределение или подчинена нормальному закону, если она имеет плотность вероятности вида:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

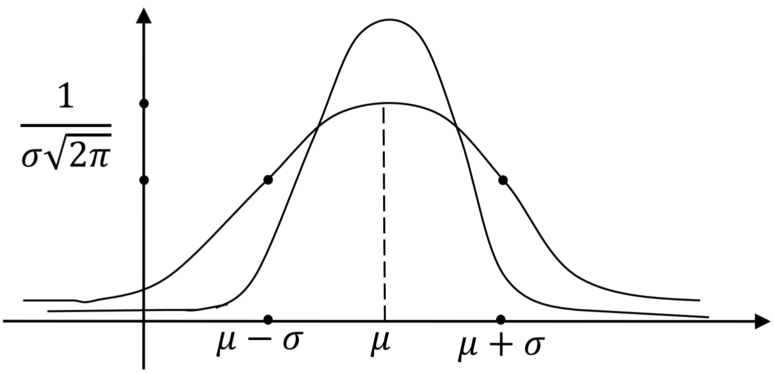
Принадлежность случайной величины к нормальному распределению обозначается $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\quad X \in N(\mu, \sigma)$.

μ, σ– два параметра.

Стандартным или нормированным нормальным законом называется случай, когда $\mu = 0, \sigma = 1$.

Нормальный закон распределения наиболее часто встречается на практике. Главная его особенность состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях.

Функция $f(x)$ называется – кривая Гаусса. Ее график



Вычислим функцию распределения вероятностей $F(x)$ для нормальной случайной величины. По общей формуле

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа или интеграл вероятности

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\ .$$

Непосредственно из этой формулы получим

$$P(a \le X \le b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

Значение вероятности $P(a \le X \le b)$ = F(b)-F(a) , где значение функции распределения F(x) получаем с помощью функции НОРМ.РАСП.

F(x) = НОРМ.СТ.РАСП(x,истина); отметим, что F(x) = Φ (x) + 0,5.

Вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания на величину меньше заданного числа δ, вычисляется по формуле $P(|X-\mu| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

В частности, вероятность попадания случайной величины на отрезок $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$, равна

$$\Phi\left(\frac{\mu + 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0{,}4987 = 0{,}9974\ .$$

Таким образом, $P(|X-\mu| > 3\sigma) = 0{,}0026.$

Этот факт называется «правило трех сигм». То есть, практически достоверно, что все значения случайной величины, подчиненной нормальному закону, $\in (\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

Для нормального распределения $E(X) = \mu$, то есть параметр μ совпадает с математическим ожиданием, а $D(X) = \sigma^2;\ \sigma(X) = \sigma$.

$Mo(X) = Me(X) = M(X) = \mu.$

Если X – нормальная случайная величина, то случайная величина $a + bX$– также нормальна.

Сумма нескольких независимых нормальных случайных величин является нормальной случайной величиной.

Задачи для самостоятельного решения

1. Стрельба ведется из точки 0 вдоль прямой Ох. Средняя дальность полета снаряда равна m. Предполагая, что дальность полета X распределена по нормальному закону со средним квадратическим отклонением σ = 80м, найти, какой процент выпускаемых снарядов даст перелет от 120м до 160 м.

Ответ: 4,4%.

2. Ведется стрельба из орудия по заданному направлению. Дальность полета снаряда подчинена нормальному закону с мат. ожиданием 3 км и средним квадратическим отклонением 0,5 км. Найти вероятность того, что выпущенный из орудия снаряд пролетит от 2 до 5 км.

Ответ: 0,977168.

3. СВ X распределена по нормальному закону с мат. ожиданием m = 40 и дисперсией D = 200. Вычислить вероятность попадания СВ в интервал (30;80).

Ответ: 0,512.

4. Какова вероятность того, что наугад опрошенный инженер получает зарплату от 160 до 190 р., если известно, что зарплата распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 150 р. и средним квадратическим отклонением 30 р.

Ответ: 0,2789.

5. Диаметр изготовляемых деталей распределен по нормальному закону со средним квадратическим отклонением 5 мм. Найти вероятность того, что диаметр наугад взятой детали имеет отклонение от среднего значения не более 7 мм.

Ответ: 0,8384.

6. Средний диаметр ствола деревьев на некотором участке равен 25 см, среднее квадратическое отклонение 5 см. Считая диаметр ствола случайной величиной, распределенной нормально, найти процент деревьев, имеющих диаметр ствола свыше 20 см.

Ответ: 84,13%.

7. Средний вес зерна 0,2 г, среднее квадратическое отклонение 0,05 г. Определить вероятность того, что вес наугад взятого зерна ожидается в пределах от 0,16 г до 0,22 г.

Ответ: 0,4435.

8. Вес изготовляемых деталей распределен по нормальному закону со средним квадратическим отклонением 0,5 г. Найти вероятность того, что вес наугад взятой детали имеет отклонение от среднего значения не более 0,5 г. Ответ: 0,6826.

9. Масса яблока является нормально распределенной случайной величиной со средним квадратическим отклонением 20 г и средним весом

150 г. Найти вероятность того, что масса наугад взятого яблока будет заключена в пределах от 130 г до 250 г.

Ответ: 0,8413.

10. Рост мужчин призывного возраста распределен нормально со средним значением 170 см и средним квадратическим отклонением 5 см. Чему равен процент мужчин призывного возраста, имеющих рост от 160 до 174 см? Ответ: 81,85%

11. Диаметр деталей, изготовляемых автоматов распределен по нормальному закону с математическим ожиданием 4,8 см и средним квадратическим отклонением 0,9 см. Чему равна вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали будет заключен в пределах от 5,7 см до 7,5 см.

Ответ: 0,1574.

12. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. Найти вероятность того, что цена акции а) не выше 15,3 ден. ед.; б) не ниже 15,4 ден. ед.; в) находится в пределах от 14,9 до 15,3 ден. ед. С помощью правила трех сигм найти границы, в которых будет находиться текущая цена акции.

Ответ: а) 0,4332; б) 0,0228; в) 0,6246; $14{,}4 \le X \le 15{,}6$.

Дискретные случайные векторы

Для простоты будем рассматривать случай, когда компоненты дискретного случайного вектора (X, Y) случайные величины X и Y принимают конечное число значений.

Определение.

Законом распределения дискретного случайного вектора (X, Y) называется набор его возможных значений, то есть пар чисел (x_i, y_j), и их вероятностей $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1,2, \dots, n$.

Закон распределения удобно задавать таблицей:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	…
y_1	p_{11}	p_{21}	…

y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Отметим, что $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$

Зная закон распределения случайного вектора, (X, Y), легко найти законы распределения его компонент. Так как все события $\left(X = x_i, Y = y_j\right)$ несовместны, то

$$P(X = x_1) = p_{11} + p_{12} + \cdots + p_{1n},$$

$$P(X = x_2) = p_{21} + p_{22} + \cdots + p_{2n},$$

……………………………………..

$P(X = x_i) = p_{i1} + p_{i2} + \cdots + p_{in}$– то есть вероятность равна сумме чисел в i-том столбце таблицы.

Аналогично,

$$P(Y = y_1) = p_{11} + p_{21} + \cdots + p_{m1}.$$

$$P(Y = y_2) = p_{12} + p_{22} + \cdots + p_{m2}.$$

……………………………………..

$$P\left(Y = y_j\right) = p_{1j} + p_{2j} + \cdots + p_{mj}.$$

Независимость компонент случайного вектора

Определение.

Говорят, что случайные величины X и Y независимы, если для любых борелевских множеств A и B на прямой

$$P\big((X \in A) \cdot (Y \in B)\big) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B).$$

Сформулируем условие независимости компонент случайного вектора (X, Y).

ТЕОРЕМА.

Для случайного вектора (X, Y) его компоненты независимы тогда и только тогда, когда

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

Числовые характеристики случайного вектора

Математическое ожидание функции $\varphi(x,y)$ от компонент случайного дискретного вектора (X,Y) вычисляется по формуле:

$$E[\varphi(X,Y)] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi(x_i,y_j)p_{ij}.$$

Важный частный случай:

$$E(X\cdot Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j p_{ij} \quad .$$

Ковариация компонент случайного вектора находится по формуле:

$$cov(X,Y) = E\Big(\big(X - E(X)\big)\cdot\big(Y - E(Y)\big)\Big) = E(X\cdot Y) - E(X)E(Y).$$

Для дискретного случайного вектора:

$$cov(X,Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i y_j p_{ij} - E(X)E(Y).$$

В финансовых приложениях часто используется ковариационная и корреляционная матрицы.

Ковариационная матрица набора случайных величин $X_1,\dots,X_n$ $c = \Big(cov\big(X_i,X_j\big)\Big)$ – квадратная матрица порядка n, составленная из парных ковариаций.

Корреляционная матрица порядка n составлена из всех парных коэффициентов корреляции.

$$R = \Big(\rho\big(X_i,X_j\big)\Big).$$

В двумерном случае

$$c(X,Y) = \begin{pmatrix} \sigma^2(X) & cov(X,Y) \\ cov(X,Y) & \sigma^2(Y) \end{pmatrix}$$

$$R(X,Y) = \begin{pmatrix} 1 & \rho(X,Y) \\ \rho(X,Y) & 1 \end{pmatrix}.$$

Свойства.

Свойство 1. Ковариационная и корреляционная матрицы являются симметричными.

Свойство 2. Ковариационная и корреляционная матрицы неотрицательно определены.

Свойство 3. Определители этих матриц неотрицательны. $\det c \geq 0, \det R \geq 0$. Более того, $\det R \leq 1$.

Условные распределения и условные математические ожидания

Определение.

Условным законом распределения одной из компонент случайного вектора (X,Y) называется ее закон распределения, вычисленный при условии, что другая компонента приняла определенное значение или попала в какой-то интервал.

Если случайные величины X и Y дискретные, то их условные законы распределения вычисляются с помощью теоремы умножения вероятностей.

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = p_{ij} / \sum_i p_{ij}$$

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = p_{ij} / \sum_j p_{ij}$$

Пример.

Случайная величина (X,Y) распределена по закону

$Y \backslash X$	$X=1$	$X=2$
$Y=1$	0,16	0,15
$Y=2$	0,14	0,18
$Y=3$	0,12	0,25

Найти $P(Y=2|X=1)$.

Решение.

$$P(Y=2|X=1)=\frac{P(Y=2,X=1)}{P(X=1)}=\frac{0.14}{0{,}16+0{,}14+0{,}12}$$
$$=\frac{0{,}14}{0{,}42}=\frac{14}{42}=\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$$

Ответ. $\frac{1}{3}$

Чтобы получить условный закон распределения случайной величины Y при условии, что $X=1$, надо еще вычислить

$$P(Y=1|X=1)=\frac{P(Y=1,X=1)}{P(X=1)}=\frac{0{,}16}{0{,}42}=\frac{16}{42}=\frac{8}{21}$$

$$P(Y=3|X=1)=\frac{P(Y=3,X=1)}{P(X=1)}=\frac{0{,}12}{0{,}42}=\frac{12}{42}=\frac{2}{7}$$

Условный закон распределения имеет вид

Y	1	2	3
$P(Y\|X=1)$	$\frac{8}{21}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$

Отметим, что $\frac{8}{21}+\frac{1}{3}+\frac{2}{7}=1$

Аналогично, вычисляются условные вероятности

$$P(X = x_i | Y \in B) = \frac{P(X = x_i, Y \in B)}{P(Y \in B)}.$$

Определение.

Функция условного распределения X при условии, что Y принимает значение y имеет вид:

$$F_{X|Y}(x|y) = \lim_{h \to 0} \frac{P(X \le x, y \le Y < y + h)}{P(y \le Y < y + h)}.$$

Функция условного распределения Y при условии, что X принимает значения x.

$$F_{Y|X}(y|x) = \lim_{h \to 0} \frac{P(x \le X < x + h, Y \le y)}{P(x \le X < x + h)}.$$

Определение.

Условным математическим ожиданием случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла значение x_i, называется величина (**число**)

$$E(Y|X = x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot P\big(Y = y_j \big| X = x_i\big).$$

Аналогично,

$$E\big(X \big| Y = y_j\big) = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot P\big(X = x_i \big| Y = y_j\big).$$

Аналогично,

$$E(Y|X \in B) = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot P\big(Y = y_j \big| X \in B\big).$$

$$E(X|Y \in B) = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot P(X = x_i | Y \in B).$$

Условные распределения удовлетворяют всем свойствам распределения вероятностей, поэтому и условные математические ожидания удовлетворяют всем свойствам математического ожидания.

Пример.

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$
$Y = 0$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{24}$
$Y = 1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

Найти $E(Y|X \geq 1)$.

Решение.

$P(Y = 0|X \geq 1) =$

$$= \frac{P(Y = 0, X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{\frac{1}{24} + \frac{5}{24}}{\frac{1}{24} + \frac{5}{24} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

$P(Y = 1|X \geq 1) =$

$$= \frac{P(Y = 1, X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{24} + \frac{5}{24}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}.$$

Имеем условный закон распределения:

Y	0	1
$P(Y|X \geq 1)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$$E(Y|X \geq 1) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Определение.

Условным математическим ожиданием случайной величины Y относительно случайной величины X называется **случайная величина** $E(Y|X)$, которая принимает значения $E(Y|X = x)$ при $X = x$.

Аналогично, условным математическим ожиданием случайной величины X относительно случайной величины Y называется **случайная величина** $E(X|Y)$, которая принимает значения $E(X|Y=y)$ при $Y=y$.

Свойства условного математического ожидания.

Свойство 1. $E(c|X)=c$, где $c=const$.

Свойство 2. $E(aY+b|X)=aE(Y|X)+b$, где a и b– постоянные.

Свойство 3. $E(X+Y|Z)=E(X|Z)+E(Y|Z)$.

Свойство 4. Если X и Y– независимые случайные величины, то $E(Y|X)=E(Y)$ и $E(X|Y)=E(X)$.

Свойство 5. $E[\varphi(X)\cdot Y|X]=\varphi(X)\cdot E(Y|X)$.

Пример.

Распределение случайного вектора задано таблицей:

	$Y=10$	$Y=20$	$Y=30$
$X=1$	0,2	0,2	0,1
$X=2$	0,3	0,1	0,1

Найти условное математическое ожидание $E(X|Y)$.

Решение.

$$E(X|Y=10)=1\cdot P(X=1|Y=10)+2\cdot(X=2|Y=10)=$$

$$=1\cdot\frac{P(X=1,Y=10)}{P(Y=10)}+2\cdot\frac{P(X=2,Y=10)}{P(Y=10)}=$$

$$=1\cdot\frac{0,2}{0,2+0,3}+2\cdot\frac{0,3}{0,2+0,3}=\frac{8}{5}.$$

$$E(X|Y=20)=1\cdot P(X=1|Y=20)+2\cdot(X=2|Y=20)$$

$$=1\cdot\frac{P(X=1,Y=20)}{P(Y=20)}+2\cdot\frac{P(X=2,Y=20)}{P(Y=20)}=$$

$$=1\cdot\frac{0,2}{0,2+0,1}+2\cdot\frac{0,1}{0,2+0,1}=\frac{4}{3}.$$

$$E(X|Y=30)=1\cdot P(X=1|Y=30)+2\cdot(X=2|Y=30)=$$

$$=1\cdot\frac{P(X=1,Y=30)}{P(Y=30)}+2\cdot\frac{P(X=2,Y=30)}{P(Y=30)}=$$

$$= 1 \cdot \frac{0,1}{0,1 + 0,1} + 2 \cdot \frac{0,1}{0,1 + 0,1} = \frac{3}{2}.$$

$E(X|Y)$	$E(X|Y = 10)$	$E(X|Y = 20)$	$E(X|Y = 30)$
	$\frac{8}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$
	0,5	0,3	0,2
	$P(Y = 10)$	$P(Y = 20)$	$P(Y = 30)$

Понятие условного математического ожидания можно распространить на абсолютно непрерывные случайные величины, при этом сохраняются все свойства.

ТЕОРЕМА – формула полного математического ожидания.

$$E(X) = E\big(E(X|Y)\big); \qquad E(Y) = E\big(E(Y|X)\big).$$

Если Y– дискретная случайная величина, то это означает, что выполняется равенство

$$E(X) = \sum_j E\big(X\big|Y = y_j\big) \cdot P\big(Y = y_j\big).$$

Пример.

Для иллюстрации формулы полного математического ожидания в условиях предыдущего примера вычислим

$$E\big(E(X|Y)\big) = \frac{8}{5} \cdot 0,5 + \frac{4}{3} \cdot 0,3 + \frac{3}{2} \cdot 0,2 = 0,8 + 0,4 + 0,3 = 1,5.$$

Распределение X имеет вид:

X	$X = 1$	$X = 2$
P	0,5	0,5

E(X) = 1· 0,5 + 2· 0,5 = 1,5.

Замечание.

Отметим, что $E(X \cdot Y) = E[X \cdot E(Y|X)]$; $E(X \cdot Y) = E[Y \cdot E(X|Y)]$.

Определение.

Условной дисперсией случайной величины X относительно случайной величины Y называется случайная величина $D(X|Y)$.

$$D(X|Y) = E\left[\left(X - E(X|Y)\right)^2 |Y\right],$$

которая принимает значение $D(X|Y = y)$ при $Y = y$.

Значение $D(X|Y = y)$ определяется формулой:

$$D(X|Y = y) = E\left[\left(X - E(X|Y = y)\right)^2 |Y = y\right] =$$

$$= \sum_i [x_i - E(X|Y = y)]^2 \cdot P(X = x_i|Y = y).$$

(для дискретной случайной величины).

Свойства условной дисперсии.

Свойство 1. $D(c|Y) = 0$.

Свойство 2. $D(aX + b|Y) = a^2 D(X|Y)$.

Свойство 3. $D(X|Y) = E(X^2|Y) - E(X|Y)^2$.

Свойство 4. Если X и Y– независимые случайные величины, то $D(X|Y) = D(X)$.

Свойство 5. $D(\varphi(Y) \cdot X|Y) = \varphi^2(Y) \cdot D(X|Y)$.

Понятие условной дисперсии можно распространить на абсолютно непрерывные случайные величины, при этом все ее свойства сохраняются.

ТЕОРЕМА – формула полной дисперсии.

$$D(X) = E\big(D(X|Y)\big) + D\big(E(X|Y)\big).$$

$$D(Y) = E\big(D(Y|X)\big) + D\big(E(Y|X)\big).$$

Пример.

В условиях предыдущего примера найдем дисперсию $D(X|Y)$.

$$D(X|Y) = E(X^2|Y) - E(X|Y)^2.$$

$$E(X^2|Y=10) = 1 \cdot \frac{0{,}2}{0{,}2+0{,}3} + 4 \cdot \frac{0{,}3}{0{,}2+0{,}3} = \frac{14}{5}.$$

$$D(X|Y=10) = \frac{14}{5} - \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{6}{25}.$$

$$E(X^2|Y=20) = 1 \cdot \frac{0{,}2}{0{,}2+0{,}1} + 4 \cdot \frac{0{,}1}{0{,}2+0{,}1} = 2.$$

$$D(X|Y=20) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.$$

$$E(X^2|Y=30) = 1 \cdot \frac{0{,}1}{0{,}1+0{,}1} + 4 \cdot \frac{0{,}1}{0{,}1+0{,}1} = 2{,}5.$$

$$D(X|Y=20) = 2{,}5 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$D(X\|Y)$	$D(X\|Y=10)$	$D(X\|Y=20)$	$D(X\|Y=30)$
	$\frac{6}{25}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{4}$
	0,5	0,3	0,2

Проиллюстрируем формулу полной дисперсии:

$\mathrm{E}(D(X|Y)) = \frac{6}{25} \cdot 0{,}5 + \frac{2}{9} \cdot 0{,}3 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}2 = \frac{3}{25} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} = \frac{71}{300}$;

$\mathrm{D}(\mathrm{E}((X|Y)) = \frac{64}{25} \cdot 0{,}5 + \frac{16}{9} \cdot 0{,}3 + \frac{9}{4} \cdot 0{,}2 - \frac{9}{4} = \frac{32}{25} + \frac{8}{15} + \frac{9}{20} - \frac{9}{4} =$

$= \frac{4}{300} = \frac{1}{75}$;

$\mathrm{D}(\mathrm{X}) = \frac{71}{300} + \frac{4}{300} = \frac{75}{300} = \frac{1}{4}$.

С другой стороны, вычисляя D(X) обычным способом, получаем:

$\mathrm{D}(\mathrm{X}) = 1 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}5 - (1{,}5)^2 = 0{,}5 + 2 - 2{,}25 = 0{,}25$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти ковариацию компонент случайного вектора, распределенного по закону.

	$X=-2$	$X=1$	$X=3$
$Y=0$	0,3	?	0
$Y=2$	0,1	0,2	0,3

Ответ: 1,32.

2. Найти коэффициент корреляции компонент случайного вектора, распределенного по закону:

	X = 5	X = 6
Y = 3	0,2	0,1
Y = 4	?	0,1
Y = 5	0,4	0,1

Ответ: --0,13246.

3. Случайный дискретный вектор распределен по закону

	$X = -1$	$X = 1$	$X = 10$
Y = -2	0,3	?	0,1
$Y = 2$	0	0,1	0,4

Найти вероятность события X < 2 при условии, что произошло событие

Y = 2.

Ответ: 0,8.

4. Случайный дискретный вектор распределен по закону

	$X = -1$	$X = 0$	$X = 4$
Y = -2	0,1	?	0
$Y = 2$	0	0,1	0,7

Найти вероятность события X < 1 при условии, что произошло событие

Y = -2.

Ответ: 1.

5. Случайный дискретный вектор распределен по закону

	$X = 3$	$X = 6$	$X = 11$
$Y = -11$	0	0	?
$Y = -3$	0,2	0,1	0,6

Найти вероятность события X + Y = 0 при условии, что произошло событие

X > 3.

Ответ: 0,125.

6. Случайный дискретный вектор распределен по закону

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$Y = 1$	0,1	0,2	?
$Y = 2$	0,2	0,1	0,1

Найти условное мат. ожидание E(Y| X) и проиллюстрировать формулу полного мат. ожидания.

Ответ: 1,4

E(Y|X)	$E(Y\|X = 1)$	$E(Y\|X = 2)$	$E(Y\| X = 3)$
	5/3	4/3	5/4
	0,3	0,3	0,4

7. Случайный дискретный вектор распределен по закону

	X = 2	X = 3	X = 4
$Y = 1$	0,2	0,1	?
$Y = 2$	0,2	0,1	0,1

Найти условное мат. ожидание E(Y| X) и проиллюстрировать формулу полного мат. ожидания.

Ответ: 1,4

E(Y|X)	$E(Y\|X = 2)$	$E(Y\| X = 3)$	E(Y| X=4)
	1,5	1,5	1,25
	0,4	0,2	0,4

8. Случайный дискретный вектор распределен по закону

	X = 3	X = 4	X = 5
$Y = 2$	0,2	0,1	?
Y = 3	0,3	0,1	0,1

Найти условное мат. ожидание E(Y| X) и проиллюстрировать формулу полного мат. ожидания.

Ответ: 2,5

E(Y|X)	$E(Y\| X = 3)$	E(Y| X=4)	E(Y|X=5)
	2,6	2,5	7/3
	0,5	0,2	0,3

9. Случайный дискретный вектор распределен по закону

	X = 3	X = 4	X = 5
$Y = 2$	0,2	0,1	?
Y = 3	0,3	0,1	0,1

Найти условное мат. ожидание E(X| Y) и проиллюстрировать формулу полного мат. ожидания.

Ответ: 3,8

E(X|Y)	E(X|Y=2)	E(X| Y=3)
	4	3,6
	0,5	0,5

10. Случайный дискретный вектор распределен по закону

	X = 4	X = 5	X = 6
$Y = 2$	0,1	0	?
Y = 3	0,2	0,1	0,3

Найти условное мат. ожидание E(Y| X) и проиллюстрировать формулу полного мат. ожидания.

Ответ: 2,6

E(Y|X)	E(Y| X=4)	E(Y| X=5)	E(Y|X=6)
	8/3	3	2,5
	0,3	0,1	0,6

11. Случайный дискретный вектор распределен по закону

	X = 4	X = 5	X = 6
$Y = 2$	0,1	0	?
Y = 3	0,2	0,1	0,3

Найти условное мат. ожидание E(X| Y) и проиллюстрировать формулу полного мат. ожидания.

Ответ: 5,3

E(X|Y)	E(X|Y=2)	E(X| Y=3)
	5,5	31/6

	0,4	0,6

12.Случайный дискретный вектор распределен по закону

	X = 5	X = 6	X = 7
Y = 3	0,2	0,1	0,4
Y = 4	?	0,1	0,1

Найти условное мат. ожидание E(Y| X) и проиллюстрировать формулу полного мат. ожидания.

Ответ: 3,3

E(Y|X)	E(Y| X=5)	E(Y| X=6)	E(Y|X=7)
	10/3	3,5	3,2
	0,3	0,2	0,5

Случайный дискретный вектор распределен по закону

	X = 5	X = 6	X = 7
Y = 3	0,2	0,1	0,4
Y = 4	?	0,1	0,1

Найти условное мат. ожидание E(X| Y) и проиллюстрировать формулу полного мат. ожидания.

Ответ:6,2

E(X|Y)	E(X|Y=3)	E(X| Y=4)
	44/7	6
	0,7	0,3

13. Случайный дискретный вектор распределен по закону

	X = 5	X = 6
Y = 3	0,2	0,1
Y = 4	?	0,1
Y = 5	0,4	0,1

Найти условное мат. ожидание E(Y| X) и проиллюстрировать формулу полного мат. ожидания.

Ответ:4,2

E(Y|X)	E(Y|X=5)	E(Y| X=6)
	30/7	4
	0,7	0,3

14. Случайный дискретный вектор распределен по закону

	X = 5	X = 6
Y = 3	0,2	0,1
Y = 4	?	0,1
Y = 5	0,4	0,1

Найти условное мат. ожидание E(X| Y) и проиллюстрировать формулу полного мат. ожидания.

Ответ: 5,3

E(X|Y)	E(X| Y=3)	E(X| Y=4)	E(X|Y=5)
	16/3	5,5	5,2
	0,3	0,2	0,5

ЛИТЕРАТУРА

1. В.И. Соловьев. Анализ данных в экономике: теория вероятностей, прикладная статистика, обработка и визуализация данных в Microsoft Excel. М., КНОРУС, 2019.
2. В.Н. Калинина, В.И. Соловьев. Анализ данных. Компьютерный практикум. М., КНОРУС, 2017.
3. Л.В. Рудикова. Microsoft Office Excel 2016. СПб.: БХВ-Петербург, 2017.
4. Р.Н. Вадзинский. Статистические вычисления в среде Excel. Библиотека пользователя. СПб.: Питер, 2008.
5. А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А. В. Браилов. Математика в экономике. Часть 3. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Финансы и статистика, 2008.
6. Браилов А. В., Зададаев С. А., Рябов П. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Методические рекомендации по самостоятельной работе. Часть 1.
7. Браилов А. В., Рябов П. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Методические рекомендации по самостоятельной работе. Часть 2.

8. Браилов А. В., Рябов П. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Методические рекомендации по самостоятельной работе. Часть 3.
9. Браилов А. В., Рябов П. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Методические рекомендации по самостоятельной работе. Часть 4.
10. Браилов А.В., Гончаренко В.М., Зададаев С.А., Коннов В.В. Вопросы и задачи по теории вероятностей. Для студентов бакалавриата экономики. М.: Финансовый университет при Правительстве РФ, кафедра «Теория вероятностей и математическая статистика», 2010.
11. А.В. Браилов, А.С. Солодовников. Сборник задач по курсу «Математика в экономике». Часть 3. М.: Финансы и статистика, ИНФРА-М, 2010.
12. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики. Н.Ш. Кремер [и др.]; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. М.: Издательство Юрайт; ИД Юрайт, 2011.
13. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика - М., Высш.шк., 2003.
14. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М., Высш.шк., 1979.
15. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. — 2-е изд., перераб. и доп.— М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.
16. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Айрис-пресс, 2004.
17. В.С. Мхитарян, Л.И. Трошин, Е.В. Астафьева, Ю.Н. Миронкина. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб пособие. Под ред. В.С. Мхитаряна. М.: Маркет ДС, 2010.
18. А.А. Гусак, Е.А. Бричикова. Теория вероятностей. Справочное пособие к решению задач. Минск.:ТетраСистемс,2003.
19. Ниворожкина Л.И., Морозова З.А., Гурьянова И.Э.; под ред проф. Л.И. Ниворожкиной. Математическая статистика с элементами теории вероятностей в задачах с решениями: Учебное пособие. Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015.
20. Ниворожкина Л.И., Морозова З.А. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Эксмо, 2008.
21. В.А. Колемаев, О.В. Староверов, В.Б. Турундаевский. Теория вероятностей и математическая статистика. Под ред. В.А. Колемаева. М.: Высш. шк.. 1991.
22. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения. Под ред. К.А. Рыбникова. М.: Наука. Главная редакции физико-математической литературы, 1982.
23. И.П. Кирилловская, Г.В. Егорова. Теория вероятностей и математическая статистика. Тольятти: Изд-во ТГУС, 2006.

24. В.А. Карасев, Г.Д. Левшина. Теория вероятностей и математическая статистика: теория вероятностей: практикум. М.: Изд. Дом МИСиС, 2015.