

一、随机事件与概率

公式名称	公式表达式
德摩根公式	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
古典概型	$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$
几何概型	$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, 其中 μ 为几何度量 (长度、面积、体积)
求逆公式	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
加法公式	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 当 $P(AB) = 0$ 时, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
减法公式	$P(A - B) = P(A) - P(AB)$, $B \subset A$ 时 $P(A - B) = P(A) - P(B)$
条件概率公式 与乘法公式	$P(B A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ $P(AB) = P(A)P(B A) = P(B)P(A B)$ $P(ABC) = P(A)P(B A)P(C AB)$
全概率公式	$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A B_i)$
贝叶斯公式 (逆概率公式)	$P(B_i A) = \frac{P(B_i)P(A B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A B_j)}$
两个事件 相互独立	$P(AB) = P(A)P(B)$; $P(B A) = P(B)$; $P(B A) = P(B \overline{A})$;

分布名称	密度函数	分布函数
指数分布 $X \sim E(\lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$
正态分布 $x \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty < x < +\infty$	$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$
标准正态分布 $x \sim N(0, 1)$	$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $-\infty < x < +\infty$	$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$

分布函数

对连续型随机变量 $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$

对离散型随机变量 $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} P(X = k)$

分布函数与密度函数的重要关系: $F'(x) = f(x)$

4、随机变量函数 $Y=g(X)$ 的分布

离散型: $P(Y = y_i) = \sum_{g(x_j)=y_i} p_j, i=1, 2, \dots$

连续型: ①分布函数法,

②公式法 $f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot |h'(y)| (x = h(y) \text{ 单调})$
 $h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数

三、多维随机变量及其分布

1、离散型二维随机变量及其分布

分布律: $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$ 分布函数 $F(X, Y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}$

边缘分布律: $p_i = P(X = x_i) = \sum_j p_{ij}, p_j = P(Y = y_j) = \sum_i p_{ij}$

条件分布律: $P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_j}, i = 1, 2, \dots, P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_i}, j = 1, 2, \dots$

2、连续型二维随机变量及其分布

①分布函数及性质

分布函数: $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$

性质: $F(+\infty, +\infty) = 1, \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y), P((x, y) \in G) = \iint_G f(x, y) dx dy$

②边缘分布函数与边缘密度函数

分布函数: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv du$ 密度函数: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v) dv$

$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du dv, f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y) du$

③条件概率密度

$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}, -\infty < y < +\infty, f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, -\infty < x < +\infty$

3、随机变量的独立性

随机变量 X, Y 相互独立 $\Leftrightarrow F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$

离散型: $p_{ij} = p_i p_j$, 连续型: $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$

4、二维随机变量和函数的分布(卷积公式)

离散型: $P(Z = z_k) = \sum_{x_i + y_j = z_k} P(X = x_i, Y = y_j)$ 注意部分可加性

连续型: $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy$

四、随机变量的数字特征

1、数学期望

①定义: 离散型 $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$, 连续型 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$

②性质: $E(C) = C, E[E(X)] = E(X), E(CX) = CE(X), E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

$E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$, 当 X, Y 相互独立时: $E(XY) = E(X)E(Y)$ (正对逆错)

2、方差

①定义: $D(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E^2(X)$

②性质: $D(C) = 0, D(aX \pm b) = a^2 D(X), D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2Cov(X, Y)$

当 X, Y 相互独立时: $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$

3、协方差与相关系数

①协方差: $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, 当 X, Y 相互独立时: $Cov(X, Y) = 0$

②相关系数: $\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$, 当 X, Y 相互独立时: $\rho_{XY} = 0$ (X, Y 不相关)

③协方差和相关系数的性质: $Cov(X, X) = D(X)$, $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
 $Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$, $Cov(aX + c, bY + d) = abCov(X, Y)$
 $Cov(X, a) = 0$ (a为常数), $D(aX \pm bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y) \pm 2abCov(X, Y)$

4. 常见随机变量分布的数学期望和方差

分布	数学期望 EX	方差 DX
0-1 分布 $b(1, p)$	p	$p(1-p)$
二项分布 $b(n, p)$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $P(\lambda)$	λ	λ
均匀分布 $U(a, b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2
指数分布 $e(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

五、大数定律与中心极限定理

1. 切比雪夫不等式

若 $E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$, 对于任意 $\varepsilon > 0$ 有 $P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

2. 大数定律(普通班不重要):

①切比雪夫大数定律: 若 X_1, \dots, X_n 相互独立,

$E(X_i) = \mu_i$, $D(X_i) = \sigma_i^2$ 且 $\sigma_i^2 \leq C$, 则: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i), (n \rightarrow \infty)$

②伯努利大数定律: 设 n_A 是 n 次独立试验中事件 A 发生的次数, p 是事件 A 在每次试验中发生的概率, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 有: $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$

③辛钦大数定律: 若 X_1, \dots, X_n 独立同分布, 且 $E(X_i) = \mu$, 则 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \mu$

3. ★中心极限定理

①列维-林德伯格中心极限定理: 独立同分布的随机变量 $X_i (i=1, 2, \dots)$, 均值为 μ , 方差为 $\sigma^2 > 0$, 当 n 充分大时有: $Y_n = \left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right) / \sqrt{ns} \xrightarrow{\sim} N(0, 1)$

②棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理: 随机变量 $X \sim B(n, p)$, 则对任意 x 有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

③近似计算: $P(a \leq \sum_{k=1}^n X_k \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - n\mu}{\sqrt{ns}}\right) - \Phi\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{ns}}\right)$

六、数理统计的基本概念

1、总体和样本的分布函数

设总体 $X \sim F(x)$ ，则样本的联合分布函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n F(x_k)$

2、统计量

样本均值: $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ，样本方差: $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - n\bar{X}^2)$

样本标准差: $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$ ，样本 k 阶原点距: $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, k=1, 2, \dots$

样本 k 阶中心距: $B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k, k=1, 2, 3, \dots$

3、三大抽样分布

(1) χ^2 分布: 设随机变量 $X \sim B(0, 1)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 且相互独立，则称统计量

$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记为 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$

性质: ① $E[\chi^2(n)] = n, D[\chi^2(n)] = 2n$ ② 设 $X \sim \chi^2(m), Y \sim \chi^2(n)$ 且相互独立，则 $X+Y \sim \chi^2(m+n)$

(2) t 分布: 设随机变量 $X \sim N(0, 1), Y \sim \chi^2(n)$ ，且 X 与 Y 独立，则称统计量:

$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布，记为 $T \sim t(n)$

性质: ① $E(T) = 0 (n > 1), D(T) = \frac{n}{n-2} (n > 2)$ ② $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

(3) F 分布: 设随机变量 $X \sim \chi^2(m), Y \sim \chi^2(n)$ ，且 X 与 Y 独立，则称统计量

$F(m, n) = \frac{X/m}{Y/n}$ 服从第一自由度为 m ，第二自由度为 n 的 F 分布，记为

$F \sim F(m, n)$ ，性质：设 $F \sim F(m, n)$ ，则 $1/F \sim F(n, m)$ 。

七、参数估计

1. 参数估计

①定义：用 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 估计总体参数 θ ，称 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为 θ 的估计量，相应的 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为总体 θ 的估计值。

2. 点估计中的极大似然估计

设 X_1, X_2, \dots, X_n 取自 X 的样本，设 $X \sim f(x, \theta)$ 或 $X \sim P(x, \theta)$ ，求法步骤：

①似然函数： $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$ (连续型) 或 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n P_i(x_i, \theta)$ (离散型)

②取对数： $\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, \theta)$ 或 $\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln p_i(x_i, \theta)$

③解方程： $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} = 0, \dots, \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_k} = 0$ ，解得：
$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ \hat{\theta}_k = \hat{\theta}_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

3. 估计量的评价标准

估计量的评价标准	无偏性	设 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为未知参数 θ 的估计量。若 $E(\hat{\theta}) = \theta$ ，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量。
	有效性	设 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是未知参数 θ 的两个无偏估计量。若 $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$ ，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效。
	一致性	设 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的一串估计量，如 $\forall \varepsilon > 0$ ，有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\hat{\theta}_n - \theta > \varepsilon) = 0$ ，则称 $\hat{\theta}_n$ 为 θ 的一致估计量（或相合估计量）。

正态总体中，样本均值 \bar{X} 是 μ 的无偏估计量

修正样本方差 S^2 是 σ^2 的无偏估计量

5. 区间估计 单正态总体参数的置信区间

条件	估计参数	枢轴量	枢轴量分布	置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间
已知 σ^2	μ	$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$	$N(0,1)$	$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$
未知 σ^2	μ	$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$\left(\bar{x} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$
未知 μ	σ^2	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right)$
未知 μ	σ^2	$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2$	$\chi^2(n)$	$\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)} \right)$

八、假设检验

1. 假设检验的基本概念

基本思想	假设检验的统计思想是小概率原理。 小概率事件的概率就是显著性水平 α ，常取 $\alpha=0.05, 0.01$ 或 0.10 。
基本步骤	①提出原假设 H_0 ；②选择检验统计量 $g(X_1, \dots, X_n)$ ；③对于 α 查表找分位数 λ ，使 $P(g(X_1, \dots, X_n) \in W) = \alpha$ ，从而定出拒绝域 W ； ④由样本观测值计算统计量实测值 $g(x_1, \dots, x_n)$ ；并作出判断：当实测值落入 W 时拒绝 H_0 ，否则认为接受 H_0 。