علیرضا حبیب زاده 99109393

1

$$f(x) = e^{x} + \cos x \qquad f_{i+1} = f(x+h) = e^{x+h} + \cos(x+h)$$

$$(1) \quad f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = \frac{e^{x+h} + \cos(x+h) - e^{x} - \cos(x)}{h}$$

$$= \frac{e^{h}-1}{h} \cdot e^{x} + \frac{\cos(x)\left(\cos(h) - 1\right) - \sin(h)\sin(x)}{h}$$

$$= \frac{e^{h}-1}{h} \cdot e^{x} + \frac{\cos(h)-1}{h}\cos(x) - \frac{\sin(h)}{h}\sin(x)$$

h را برابر با 0.1 درنظر میگیریم , $x = 2$

$$(1) \quad f_i' = 6.884 \qquad (h = 0.1)$$

$$(2) \quad f_i' = \frac{2f_{i+1} - 1/2\, f_{i+2} - 3/2\, f_i}{h} = \frac{2f(x+h) - 1/2\, f(x+2h) - 3/2\, f(x)}{h}$$

$$= 6.450$$

$$, \quad f'(x) = e^{x} - \sin x = 6.480$$

$$\delta_{f_1'} = \left| \frac{6.884 - 6.480}{6.480} \right| \approx 6\% \quad , \quad \delta_{f_2'} = 0.4\%$$

پس رابطه ی (1) با $h = 0.1$ در $x = 2$ مشتق را با 6% خطای نسبی تخمین میزند و رابطه ی (2) با همان h در همین نقطه با 0.4% خطا . که رابطه ی دوم بهتر است .

رابطه ی اول اینجا بیشتر تقریب زده و رابطه ی (2) کمتر .

I

ب ۱ $f'(x_i + h/2) = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{h}$

(3) $f'(x + h/2) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \xRightarrow{x \to x - h/2} f'(x) = \dfrac{f(x+h/2) - f(x-h/2)}{h}$

$f'(5) = \dfrac{f(5.25) - f(4.75)}{0.5} = 107.9$ (رابطه (3) تشیفت خورده)

(4) $f''_{i+1} = \dfrac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} \xRightarrow{i \to i-1} f''_i = \dfrac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$

$f''(5) = \dfrac{f(5.5) - 2f(5) + f(4.5)}{0.5^2} = 45.12$ (رابطه (4) شیفت خورده)

---

2 با فرض تحلیلی بودن f:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(c)\frac{h^4}{4!}$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} - f'''(x)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(c')\frac{h^4}{4!}$$

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + f''(x)h^2 + \frac{h^4}{4!}\left(f^{(4)}(c) + f^{(4)}(c')\right)$$

$$\Longrightarrow f''(x) = \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x) + f(x-h)}{h^2}}_{O(h^2) \text{ خواسته‌ی سوال البته با خطای }} - \underbrace{\frac{h^2}{4!}\left(f^{(4)}(c) + f^{(4)}(c')\right)}_{\text{خطای تقریب}}$$

$$\Delta f''(x) = \max\left|\frac{h^2}{4!}\left(f^{(4)}(c) + f^{(4)}(c')\right)\right| = \frac{h^2}{12} \cdot \max\left(f^{(4)}(x')\right) \quad (x' \in [x-h, x+h])$$

II

$$f''_{(x)} \approx \frac{f_{(x+h)} - 2f_{(x)} + f_{(x-h)}}{h^2} \quad , \quad f_{(x)} = \frac{x^2}{\cos(x)}$$

$h = 0.4 \longrightarrow f''_{(x)} \approx 4.646$

$h = 0.2 \longrightarrow f''_{(x)} \approx 4.128$

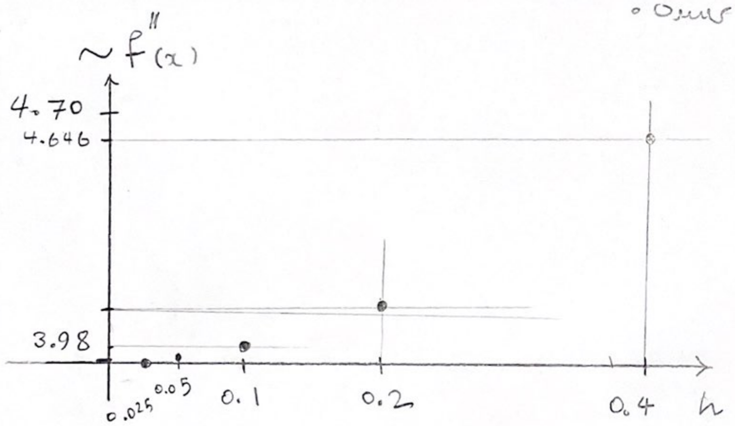
$h = 0.1 \longrightarrow f''_{(x)} \approx 4.015$

$h = 0.05 \longrightarrow f'_{(x)} \approx 3.988$

$h = 0.025 \longrightarrow f'_{(x)} \approx 3.981$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{x^2}{\cos x}\right] = \frac{1}{\cos x}\left[1 + \frac{2x^2}{\cos^2 x} + 4x\tan x\right]\Bigg|_{x=0.5} = \underline{3.9789}$$

که یعنی تقریب های ما به درستی همگرا شده.

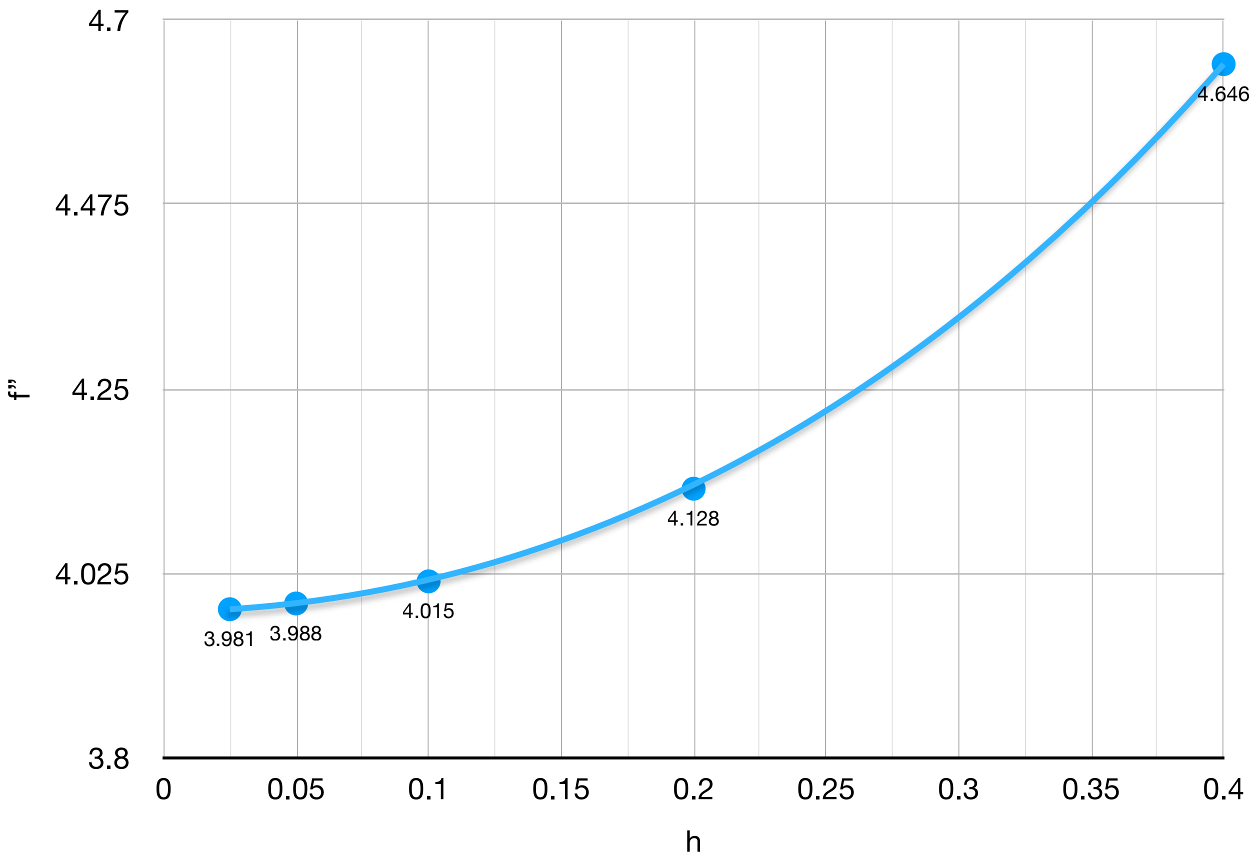


III

مقادیر سوال ۲

h	f”
0.4	4.646
0.2	4.128
0.1	4.015
0.05	3.988
0.025	3.981

نمودار سوال ۲



f” تقریب زده شده بر حسب h

$\boxed{3}$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\Longrightarrow \int_0^{6h} f(x)\,dx = \left[a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx \right]\Bigg|_0^{6h}$$

$$= a\frac{(6h)^3}{3} + b\frac{(6h)^2}{2} + c(6h)$$

$$= w_1 f(h) + w_2 f(3h) + w_3 f(5h)$$

$$= w_1[ah^2 + bh + c] + w_2[a(3h)^2 + b(3h) + c] + w_3[a(5h)^2 + b(5h) + c]$$

رابطه باید به ازای همه‌ی چندجمله‌ای‌ها برقرار باشد پس با صفر گرفتن ضرایب و غیرصفر گرفتن یکی درمی‌یابیم که ضرایب طرفین باید یکی باشد :

$$\begin{array}{ll} \text{ضریب } a \longrightarrow & \\ b \sim \longrightarrow & \\ c \sim \longrightarrow & \end{array} \left\{ \begin{array}{l} h^2 w_1 + (3h)^2 w_2 + (5h)^2 w_3 = \frac{(6h)^3}{3} \\ h w_1 + 3h w_2 + 5h w_3 = \frac{(6h)^2}{2} \\ w_1 + w_2 + w_3 = 6h \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} h^2 & 9h^2 & 25h^2 \\ h & 3h & 5h \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72h^3 \\ 18h^2 \\ 6h \end{bmatrix}$$

سه معادله سه مجهول

حل دستگاه

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/4\,h \\ 3/2\,h \\ 9/4\,h \end{bmatrix}$$

الف)

$\boxed{IV}$

یک چند جمله ای درجه ۳ دلخواه را بررسی می‌کنیم : (دلخواه یعنی کلی)

اثبات زشت

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\Rightarrow \omega_1 f(h) + \omega_2 f(3h) + \omega_3 f(5h)$$

$$= \tfrac{9}{4}h\left(ah^3 + bh^2 + ch + d\right) + \tfrac{3}{2}h\left(a(3h)^3 + b(3h)^2 + c(3h) + d\right)$$

$$+ \tfrac{9}{4}h\left(a(5h)^3 + b(5h)^2 + c(5h) + d\right)$$

معادله‌ی اول قسمت قبل

$$= a\overbrace{\left[\frac{9}{4} + \frac{3^4}{2} + \frac{9}{4}\cdot 5^3\right]}^{6^4/4} h^4 + b\overbrace{\left[\tfrac{9}{4} + \frac{27}{2} + \frac{25\times 9}{4}\right]}^{(6h)^3/3} h^3$$

$$+ c\underbrace{\left[\tfrac{9}{4} + \frac{9}{2} + \frac{45}{4}\right]}_{h\omega_1 + 3h\omega_2 + 5h\omega_3 = (6h)^2/2} h + d\underbrace{\left[\tfrac{9}{4} + \frac{3}{2} + \tfrac{9}{4}\right]}_{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 6h} h$$

$$= a\frac{(6h)^4}{4} + b\frac{(6h)^3}{3} + c\frac{(6h)^2}{2} + d = \int_0^{6h} (ax^3 + bx^2 + cx + d)\,dx$$

اثبات تمیز

از این که ضرایب همان معادلات خطی قبل شدند نمی‌توانیم ایده‌ای بگیریم . معادلات خطی اند. می‌توانیم

از برقرار بودن رابطه برای درجه ۲ ها استفاده کنیم :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = \underbrace{(ax^3)}_{:=g(x)} + \underbrace{(bx^2 + cx + d)}_{:=q(x)} \rightarrow f(x) = g(x) + q(x)$$

$$\omega_1 f(h) + \omega_2 f(3h) + \omega_3 f(5h) = \left[\omega_1 g(h) + \omega_2 g(3h) + \omega_3 g(5h)\right]$$

$$+ \underline{\left[\omega_1 q(h) + \omega_2 q(3h) + \omega_3 q(5h)\right]}$$

چون q درجه ۲ است می‌دانیم رابطه برای آن برقرار

$$= \int_0^{6h} q(x)\,dx$$

است .

$$= w_1 a h^3 + w_2 a (3h)^3 + w_3 a (5h)^3 + \int_0^{6h} q(x)\, dx$$

$$= a \frac{(6h)^4}{4} + \int_0^{6h} q(x)\, dx = \int_0^{6h} g(x)\, dx + \int_0^{6h} q(x)\, dx = \int_0^{6h} f(x)\, dx$$

$f(x) = ax^3$

* درواقع چون روابط خطی هستند و می‌دانیم برای درجه ۲ برقرار ، می‌توانستیم تنها برای چندجمله‌ای شرط را چک کنیم .

برحسب کاست
از کس

$\boxed{4}$

الف) $I = \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{f(x)} dx$

با $h = 0.25$ ، $n = 4$ می‌شود :

$f_0 = f(0)$

$f_1 = f(0.25)$ $\quad f_2 = f(0.5)$ $\quad f_3 = f(0.75)$ $\quad f_4 = f(1)$

~~چون تعداد نقاط کم است ، h زیاد است ، سیمپسون 3/8 که دقیق‌تر است را استفاده می‌کنیم :~~

$\cancel{I = \frac{3}{8}[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + f_4}$ (n مضرب 3 نیست)

ولی نزدیک هست : (سیمپسون 1/3) :

$$I = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4] = 0.78539$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}(x)\Big|_0^1 = \tan^{-1}(1) = \pi/4 \approx 0.78540$$

خطای نسبی بسیار کم !

$\delta I \approx 8 \times 10^{-6}$

VI

ا ب

می‌دانیم خطای روش ذوزنقه‌ای حداکثر عبارت زیر است:

$$E(T(h)) = \frac{b-a}{12} h^2 |f''(z)| \qquad z \in [a,b]$$

برای کمتر شدن خطا از ϵ باید رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$h < \sqrt{\frac{12\epsilon}{(b-a)m_2}} \qquad m_2 = \max|f''(z)| \quad z \in [a,b]$$

$$f''(x) = \frac{6}{(1+x^2)^2} - \frac{8}{(1+x^2)^3}$$

برای یافتن بیشینه باید نقاط مرزی و نقاط موضعی را بررسی کنیم.

$$f'''(x) = \frac{24x}{(1+x^2)^3} - \frac{48x^3}{(1+x^2)^4}$$

$$= 0 \Rightarrow \underset{(1+x^2 \neq 0)}{} \quad 24x(1+x^2) = 48x^3 \rightarrow 24x^3 - 24x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ -1 \end{cases}$$

نقطه‌ی -1 خارج بازه است اما نقاط 0 و 1 هم موضعی هستند و هم سر و ته بازه پس باید بررسی شوند:

$$f''(0) = -2 \qquad f''(1) = 1/2$$

$$\max|f''(x)| = 2$$

* از بین این‌ها $x = 0$ $|f''(x)|$ بزرگ‌تری می‌سازد و

$$h < \sqrt{\frac{12 \times 10^{-3}}{1 \times 2}} = 0.0775$$

$$n = \underbrace{1 + \left\lceil \frac{1}{h} \right\rceil}_{\simeq 12.9} = 14$$

* باید حداقل 14 نقطه از جمله 0 و 1 را داشته باشیم. (شماره‌ی نقاط از 0 تا 13 هستند)

(مثلا در مثال قبلی با $h = 0.25$، $n = 1 + \left\lceil \frac{1}{h} \right\rceil$ بود.)

$$= 1 + 4 = 5 \longrightarrow 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$$

VII

$\boxed{5}$

$$\int_0^2 x\tan^{-1}(x)\,dx = \int \tan^{-1}(x)\, d\left(x^2/2\right) = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{2}\frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}(x)\Big|_0^2 - \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\int_0^2 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx}_{I} =$$

$$I = \int_0^2 dx - \int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[x - \tan^{-1}(x)\right]\Big|_0^2$$

مقدار واقعی

$$\Rightarrow \int_0^2 x\tan^{-1}(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}(x)\,(x^2+1) - x\right]\Big|_0^2 = 1.7679$$

$$I = \int_0^2 x\tan^{-1}(x)\,dx = \underbrace{\int_{-1}^{1} (x'+1)\tan^{-1}(x'+1)\,dx'}_{:=g(x')}$$

n = نقطه‌های گاوس

1	$I \approx 2\times g(0) = \pi/2 \approx 1.5708$
2	$I \approx g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = 1.7555$
3	$I \approx \frac{5}{9}\left(g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right) + \frac{8}{9}g(0) \approx 1.7686$

خواسته‌های سوال

$$\delta_{I_2} = \frac{|1.7555 - 1.7679|}{1.7679} = 0.7\,\%$$

$$\delta_{I_1} = \frac{|1.7686 - 1.7679|}{1.7679} = 0.04\,\%$$

خطاهای نسبی دونقطه‌ای و سه‌نقطه‌ای که تقریبا یک مرتبه تفاوت دارند.
و سه‌نقطه‌ای خیلی کم است.

VIII

ب)

h_i	ذوزنقه‌ای	1st level	2nd level
0.4	0.06714		
0.2	0.07178	0.07333	
0.1	0.07288	0.07325	0.07324

ج)

$$I = \int_0^{0.4} \underbrace{\frac{\sin x}{1+x^2}}_{= f(x)} \, dx$$

$$I(h=0.4) \approx \frac{h}{2}\left[f(0) + f(0.4) \right] = \frac{0.4}{2}\left[0 + \frac{\sin 0.4}{1+0.4^2} \right] = 0.06714$$

$$I(h=0.2) \approx \frac{h}{2}\left[f(0) + 2f(0.2) + f(0.4) \right] = 0.07178$$

$$I(h=0.1) = \frac{h}{2}\left[f(0) + 2f(0.1) + 2f(0.2) + 2f(0.3) + f(0.4) \right] = 0.07288$$

مقدار دقیق انتگرال 0.0732501 است که ما با دقت خیلی خوبی آن را با رامبرگ و تنها سه h حساب کردیم و دقت از خود h=0.1 هم بیشتر شد.

روش رامبرگ:

$$T(h_0, h_1, \ldots h_p) = \frac{4^p T(h_1, \ldots h_p) - T(h_0, \ldots, h_{p-1})}{4^p - 1}$$

مربوط به سوال ۶ (عملی)