99109393 علیرضا حبیب زاده

$\boxed{1}$

$$y' = xe^{3x} - 2y = f(x,y)$$

الف)

$x_0 = 0$

$y_0 = 0$

$x_1 = 0.5$

$$y_1^* = y_0 + h y'_{(0,0)} = 0 + 0.5 \times 0 = 0$$

$$y_1'^* = f(x_1, y_1^*) = f(0.5, 0) = 0.5e^{1.5} \approx 2.24084$$

$$y_1 = \cancel{y_0} + \frac{0.5}{2}\left(0 + 0.5e^{1.5}\right) \approx 0.56021$$

0

$x_2 = 1.0$

$$y_2^* = y_1 + h y'(x_1, y_1) = y_1 + 0.5 \times \left(x_1 e^{3x_1} - 2y_1\right) = 1.12042$$

$$y_2'^* = f(x_2, y_2^*) = e^3 - 2y_2^* = 17.84469$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\left(y_1' + y_2'^*\right) = 5.30149$$

step	x	y	y^*	y'^*
0	0.0	0	0	0
1	0.5	0.56021	0	2.24084
2	1.0	5.30149	1.12042	17.84469

پاسخ الف)

ب)

$x_0 = 2$

$y_0 = 1$

$x_1 = 2.5$

$$y' = 1 + (x-y)^2 := f(x,y)$$

$$y_1 = y_0 + h f\left(x_0 + h/2,\ y_0 + f(x_0, y_0) h/2\right)$$

$$= 1 + 0.5\left(1 + \left(1 + \frac{0.5}{2}(1+1) - 2.25\right)\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$$

$$\begin{cases} x_{i+1/2} = x_i + h/2 \\ y_{i+1/2} = y_i + h/2\, f(x_i, y_i) \end{cases}$$

I

midpoints

i	x_i	y_i	$x_{i+1/2}$	$y_{i+1/2}$
0	2.0	1	2.25	1.5
1	2.5	1.78125	2.75	2.16040
2	3.0	2.45506	—	—

پاسخ ب)

ج) $k_{1_i} = h f(x_i, y_i)$ $\qquad y_i' = f(x_i, y_i) = \dfrac{1+x_i}{1+y_i}$

$$k_{2_i} = h f(x_i + 2/3 h, y_i + 2/3 k_{1_i})$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{4}(k_{1_i} + 3k_{2_i})$$

i	x_i	y_i	k_{1_i}	k_{2_i}
0	1.0	2	0.33333	0.36207
1	1.5	2.35489	0.37259	0.39316
2	2.0	2.74290	—	—

پاسخ ج

$\boxed{2}$ $\qquad y_{n+1} = y_n + h\, y'\big|_{x_n, y_n} = y_n + h(\lambda y_n) = (1+\lambda h) y_n$

حل رابطه ی بازگشتی $\Longrightarrow \quad y_n = (1+\lambda h)^n y_0 = (1+\lambda h)^n \qquad (y_0 = 1)$

برای آن که پایایی برقرار شود شرط لازم و کافی $|1+\lambda h| < 1$ است زیرا :

* $\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (1+\lambda h)^n = 0 \Longrightarrow |1+\lambda h| < 1$

* $|1+\lambda h| < 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} (1+\lambda h)^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = 0$

$$|1+\lambda h| < 1 \iff -1 < 1+\lambda h < 1 \iff -2 < \lambda h < 0$$

II

$\boxed{3}$ $z := y' \Longrightarrow y'' = z' \Longrightarrow z' - 2z + 2y = e^{2x}\sin x$

$y' = z$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} z' = 2z - 2y + e^{2x}\sin x & := g(x,y,z) \\ y' = z & := f(x,y,z) \end{array} \right]$$

با نوتیشن اسلاید ها

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = -0.4 \\ y'(0) = z(0) = -0.6 \end{array} \right]$$

مقادیر اولیه‌ی z و y

i	x_i	y_i	z_i (y'_i)	$k_{f_1 i}$	$k_{f_2 i}$	$k_{f_3 i}$	$k_{f_4 i}$
0	0.0	-0.4	-0.6	-0.6	-0.62	-0.61623	-0.63152
1	0.1	-0.46173	-0.63163	-0.63163	-0.64252	-0.63647	-0.63998
2	0.2	-0.52556	-0.64015	—	—	—	—

پاسخ

$k_{g_1 i}$	$k_{g_2 i}$	$k_{g_3 i}$	$k_{g_4 i}$
-0.40000	-0.32476	-0.31524	-0.21786
-0.21786	-0.09670	-0.08349	0.06718
—	—	—	—

$\boxed{4}$

$$y'(x) = f(x,y) \implies y''(x) = f_x + f_y\, y' = f_x + f_y f$$

1

که اینجا اندیس به معنای مشتق گیری است . وقتی بدون آرگومان گذاشته شده منظور در x_i و y_i است .

$$\implies y'''(x) = f_{xx} + f_{xy} f + f_{yx} f + f_y f_x + f_y^2 f + f_{yy} f^2$$

توابع پیوسته مشتق پذیر

$(f_{xy} = f_{yx})$

$$y'''(x) = f_{xx} + 2f_{xy} f + f_y f_x + f_y^2 f + f_{yy} f^2$$

$$f(x+\delta x, y+\delta y) = f(x,y) + \delta x f_x + \delta y f_y + \delta x \delta y f_{xy} + \frac{\delta x^2}{2} f_{xx} + \frac{\delta y^2}{2} f_{yy} + O(\delta^3)$$

برای x_{i-1} , y_{i-1} $\implies \delta y = -hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_y f)$ و $\delta x = -h$

2

$$\implies f(x_{i-1}, y_{i-1}) = f - hf_x + \left(-hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_y f)\right) f_y + h^2 f f_{xy} + \frac{h^2}{2} f_{xx} + \frac{h^2 f^2}{2} f_{yy} + O(h^3)$$

$h \to 2h$

$$\implies f(x_{i-2}, y_{i-2}) = f - 2hf_x + \left(-2hf + 2h^2(f_x + f_y f)\right) f_y + 4h^2 f f_{xy} + 2h^2 f_{xx} + 2h^2 f^2 f_{yy} + O(h^3)$$

در این تا مرتبه‌ی h^3 نگه داشتیم اما این توابع در h ضرب می‌شوند پس تا h^2 کافی است .

$$y_{i+1} = y(x+h) = y + hy' + \frac{h^2}{2!} y'' + \frac{h^3}{3!} y''' + O(h^4)$$

3

$$= y + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_y f) + \frac{h^3}{6}\left(f_{xx} + 2f_{xy} f + f_y f_x + f_y^2 f + f_{yy} f^2\right) + O(h^4)$$

$$= y + ahf + bh\left[f - hf_x + \left(-hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_y f)\right) f_y + h^2 f f_{xy} + \frac{h^2}{2} f_{xx} + \frac{h^2 f^2}{2} f_{yy}\right]$$

$$+ ch\left[f - 2hf_x + \left(-2hf + 2h^2(f_x + f_y f)\right) f_y + 4h^2 f f_{xy} + 2h^2 f_{xx} + 2h^2 f^2 f_{yy}\right] + O(h^4)$$

IV

حال باید ضرایب را طوری تعیین کنیم که تساوی برقرار باشد :

$$h^0 : y = y \quad \checkmark$$

$$h^1 : f = (a+b+c) f \implies a+b+c = 1$$

4

$$h^2 : \frac{1}{2}(f_x + f_y f) = (-b-2c)(f_x + f_y f) \implies b+2c = -1/2$$

$$h^3 : \frac{1}{6}(f_{xx} + 2f_{xy} f + f_x f_y + f_y^2 f + f_{yy} f^2) = b\left(\frac{(f_x + f_y f) f_y}{2} + f f_{xy} + \frac{f_{xx}}{2} + \frac{1}{2} f^2 f_{yy}\right)$$

$$+4c\left(\sim \right)$$

$$\implies b + 4c = 1/3$$

5

$$\begin{cases} a+b+c = 1 \\ b+2c = -1/2 \\ b+4c = 1/3 \end{cases} \implies 2c = \frac{5}{6} \implies c = \frac{5}{12}, \; b = \frac{-16}{12}, \; a = \frac{23}{12}$$

$$\implies y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}\left[5 f_{(x_i, y_i)} - 16 f_{(x_{i-1}, y_{i-1})} + 23 f_{(x_{i-2}, y_{i-2})}\right]$$

$\boxed{V}$

$\boxed{5}$

$$y' = x + y = f(x, y)$$

$$h = 0.2$$

(رانگ‌کوتای مرتبه 3 برای y_1)

$i = 0$

$$k_1 = h f(x_0, y_0) = 0.2$$

$$k_2 = h f(x_0 + h/2, y_0 + k_1/2) = 0.24$$

$$k_3 = h f(x_0 + h, y_0 + 2k_2 - k_1) = 0.296$$

$$y_1 = y(0.2) = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) = 1.24267$$

$i = 1$

(رانگ‌کوتای مرتبه 3 برای y_2)

$$k_1 = h f(x_1, y_1) = 0.28853$$

$$k_2 = h f(x_1 + h/2, y_1 + k_1/2) = 0.33739$$

$$k_3 = h f(x_1 + h, y_1 + 2k_2 - k_1) = 0.40578$$

$$y_2 = y_1 + 1/6 (k_1 + 4k_2 + k_3) = 1.58331$$

$$y_3^* = y_2 + \frac{h}{12}(23 f_2 - 16 f_1 + 5 f_0) = 2.04220$$

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{12}(5 f_3^* + 8 f_2 - f_1) = 2.04389$$

(آدامز مرتبه سوم (predictor-corrector))

$$y_4^* = y_3 + \frac{h}{12}(23 f_3 - 16 f_2 + 5 f_1) = 2.64872$$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{12}(5 f_4^* + 8 f_3 - f_2) = \boxed{2.65075 = y(0.8)}$$

$$y' - y = x \implies b - (bx + c) = x$$

$$y = ae^x + bx + c \qquad \implies b = -1, \quad c = -1$$

$$y(0) = 1 \implies a = 2$$

$$y = 2e^x - 1 - x$$

(جهت اطمینان قلبی)

$$\implies y(0.8) = 2.65108$$

تقریب قابل قبول ✓

$\boxed{16}$

$$y' = \lambda y := f(y)$$

$$k_1 = hf(y_i) = h\lambda y_i$$

$$k_2 = hf\left(y_i + \frac{k_1}{2}\right) = (h\lambda)\left(y_i + \frac{h\lambda}{2} y_i\right)$$

$$k_3 = hf\left(y_i + \frac{k_2}{2}\right) = h\lambda\left(y_i + \frac{h\lambda}{2}\left(y_i + \frac{h\lambda}{2} y_i\right)\right)$$

$$= h\lambda\left(1 + \frac{h\lambda}{2} + \frac{(h\lambda)^2}{4}\right) y_i$$

$$k_4 = hf(y_i + k_3) = h\lambda\left(y_i + h\lambda\left(1 + \frac{h\lambda}{2} + \frac{(h\lambda)^2}{4}\right) y_i\right)$$

$$= h\lambda\left(1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{4}\right) y_i$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

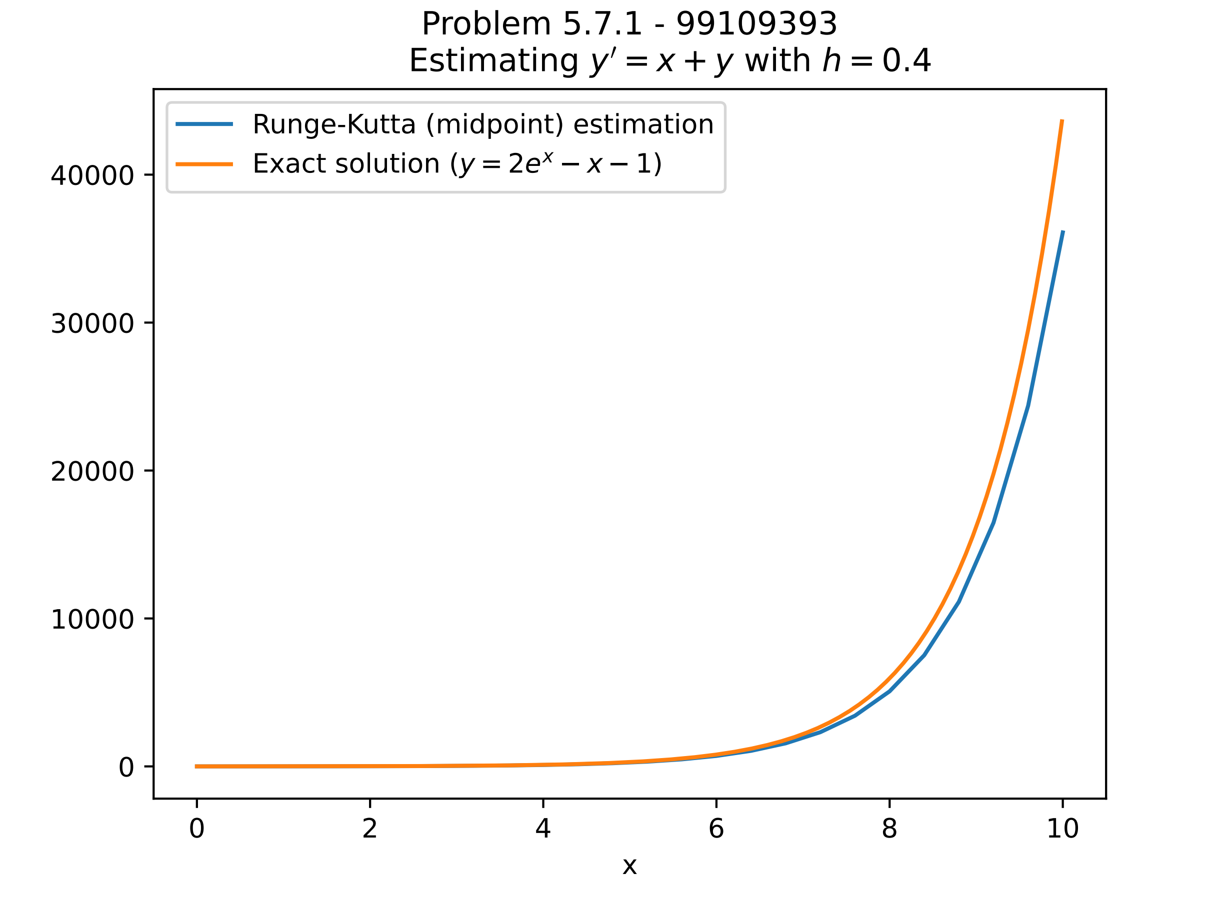
$$= y_i + \frac{y_i}{6}\left[h\lambda + 2h\lambda + (h\lambda)^2 + 2h\lambda + (h\lambda)^2 + \frac{(h\lambda)^3}{2} + h\lambda + (h\lambda)^2 + \frac{(h\lambda)^3}{2} + \frac{(h\lambda)^4}{4}\right]$$

$$= y_i + \frac{y_i}{6}\left[6h\lambda + 3(h\lambda)^2 + (h\lambda)^3 + \frac{(h\lambda)^4}{4}\right]$$

$$= \left[1 + (h\lambda) + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{6} + \frac{(h\lambda)^4}{24}\right] y_i$$

* میشد به شکل غیر مستقیم هم اثبات کرد. خطای رانگ‌کوتا درجه ۴ از $O(h^5)$ است و جواب معادله دیفرانسیل $y(x+h) = e^{\lambda h} y(x)$ است. پس $y_{i+1} = e^{\lambda h} y_i \approx [1 + (h\lambda) + \cdots] y_i$ که باید تا مرتبه h^4 همان پاسخ رانگ‌کوتا را بدهد.

VII


Problem 5.7.1 - 99109393
Estimating $y' = x + y$ with $h = 0.4$
Runge-Kutta (midpoint) estimation
Exact solution ($y = 2e^x - x - 1$)
40000
30000
20000
10000
0
0
2
4
6
8
10
x