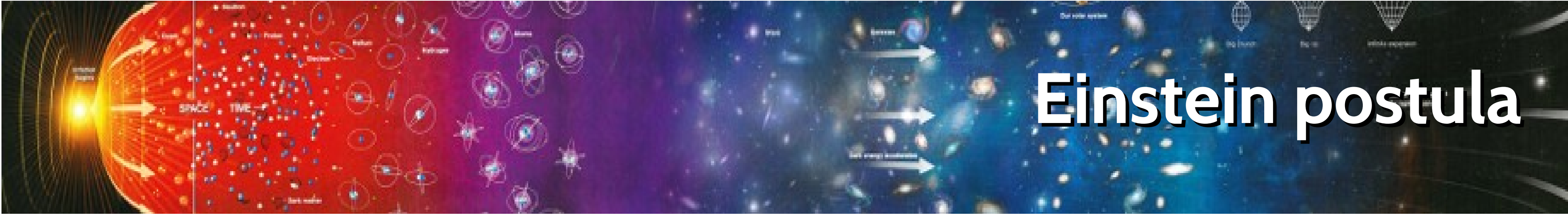
# Universidad Nacional de Río Negro
# Int. Partículas, Astrofísica & Cosmología - 2016

- **Unidad** 01 – Relatividad
- **Clase** U01 C03
- **Fecha** 05 Sep 2018
- **Cont** Dinámica relativista
- **Cátedra** Asorey
- **Web** https://asoreyh.github.io/unrn-ipac/
- **Youtube** https://goo.gl/UZJzLk



# Einstein postula

- **El principio de la relatividad:**

  Las leyes que gobiernan los cambios en los estados de los sistemas físicos son iguales para todos los observadores inerciales

- **El principio de la invarianza de la velocidad de la luz**

  La luz se propaga en el vacío siempre con la misma velocidad, sin importar la velocidad de la fuente emisora de luz

**... y paso a la historia**

# Cambio de paradigma 2

- La luz también se mueve en el espacio, entonces:

$$\vec{c}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \text{ y } \vec{c}\,'=\frac{\Delta\vec{r}\,'}{\Delta t}$$

- Pero por el segundo postulado

$$\vec{c}=\vec{c}\,'\rightarrow\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta\vec{r}\,'}{\Delta t}$$

- Pero los desplazamientos “no deberían” ser iguales, ya que un sistema se mueve respecto al otro...
- ... o los intervalos temporales... (!!!)

# Transformaciones de Lorentz

- Las ecuaciones que transforman dos marcos de referencia, y que verifican ambos postulados, son

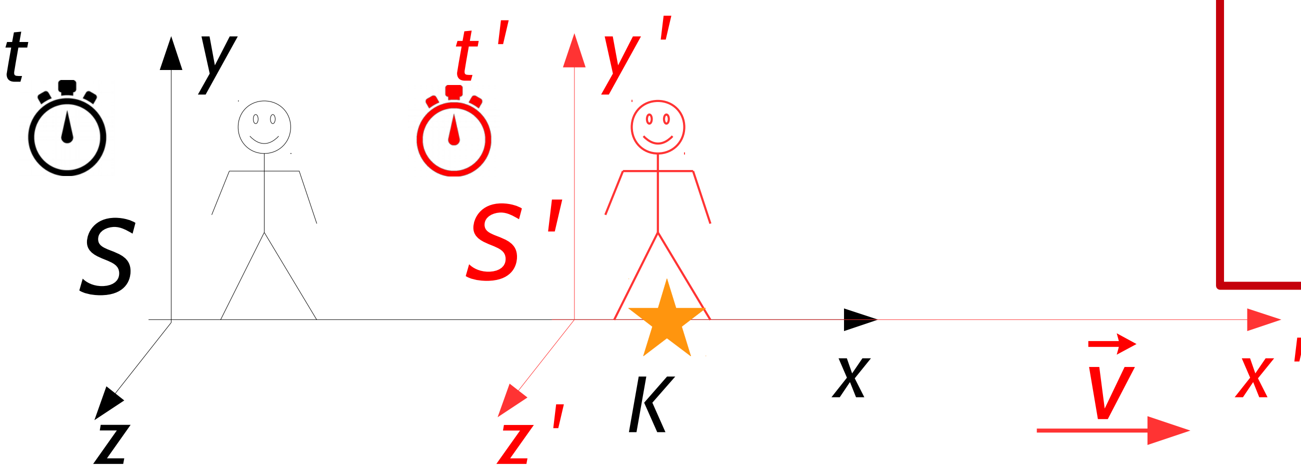
Recordar que estas transformaciones son válidas para un sistema S' que se mueve con velocidad *v* en la dirección *x*, entonces K=(t,x,y,z) y K'=(t',x',y,z), ya que z'=z e y'=y

$$t' = \gamma\left(t - \frac{1}{c^2} v\, x\right)$$

$$x' = \gamma\left(x - v\, t\right)$$

$$y' = y$$

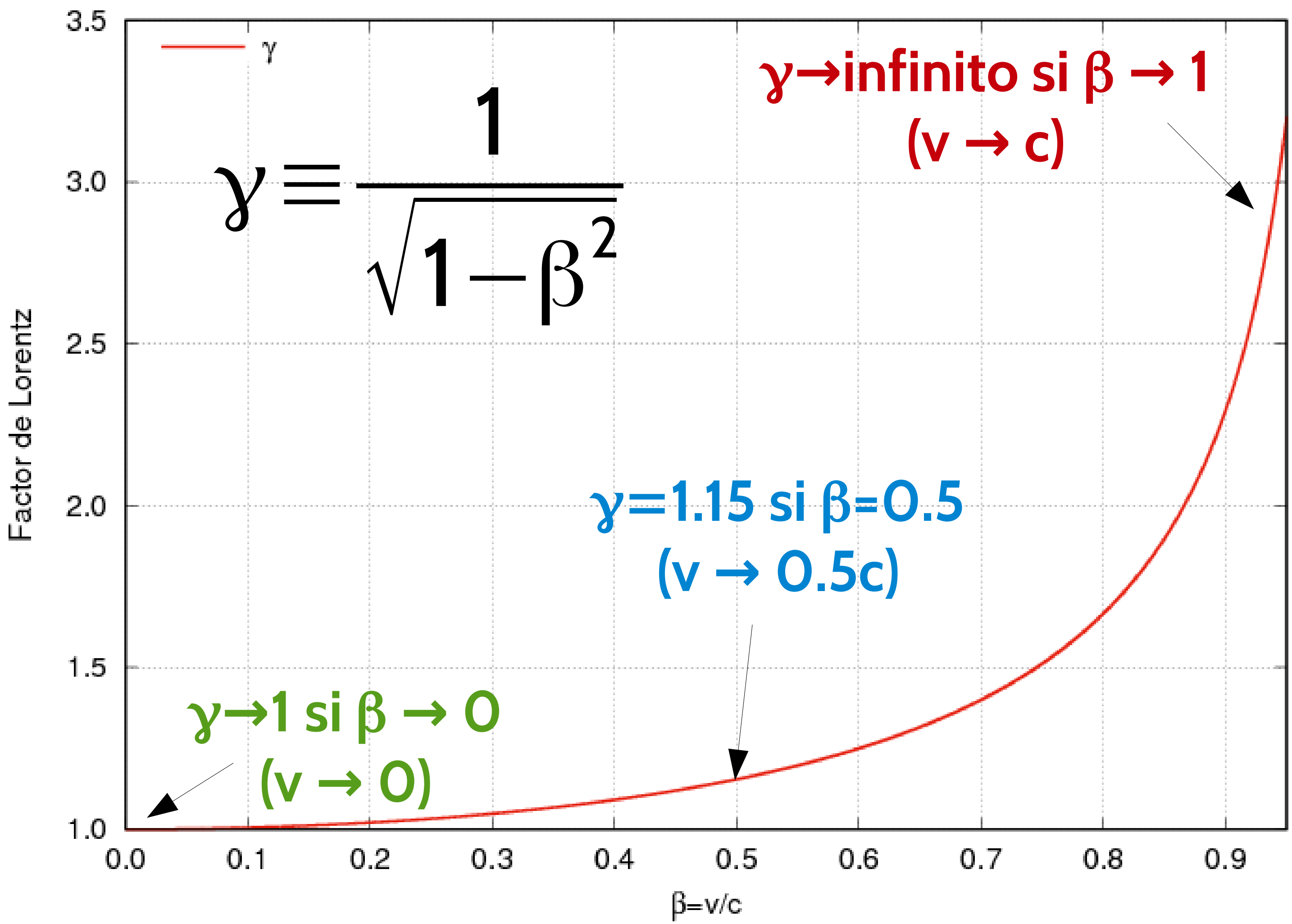
$$z' = z$$




$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta \equiv \frac{v}{c}$$

# Factor de Lorentz

- Estudiemos la función gamma, ecuación (10)



# La velocidad de la luz es constante

- Casos límites.
- Sea $u \to 0$ (objeto lento) $\Rightarrow$

$$u' = \frac{u - v}{1 - \cancel{\frac{uv}{c^2}}} \xrightarrow{} 0 \Rightarrow \boxed{u' = u - v}$$

Galileo si $u \to 0$ ($u \ll c$)

**Si u << c → u' = u - v**
**¡Recupero Galileo! :-)**

- Sea $u = c$ (luz) $\Rightarrow$

$$u' = \frac{c - v}{1 - \frac{\cancel{c}v}{c^{\cancel{2}}}} = \frac{c\,\cancel{(1 - v/c)}}{\cancel{(1 - v/c)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{u' = c}$$

segundo principio!

**Si u = c → u'=c**
**!Segundo postulado! :-)**

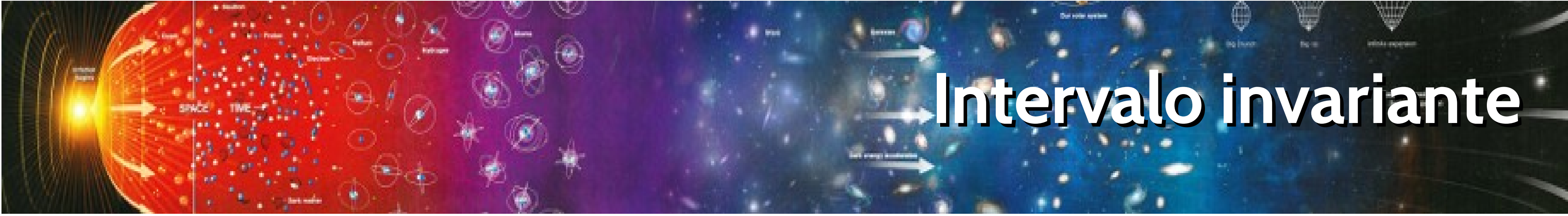
# Dilatación temporal y Contracción espacial

- El lapso de tiempo entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \quad \text{para eventos} \quad \Delta x = 0$$

- La distancia espacial entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} \quad \text{para eventos} \quad \Delta t' = 0$$



# Intervalo invariante

- La velocidad de la luz es invariante, entonces:

$$c=\frac{dr}{dt}=\frac{dr'}{dt'} \text{ con } r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \text{ y } r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$$

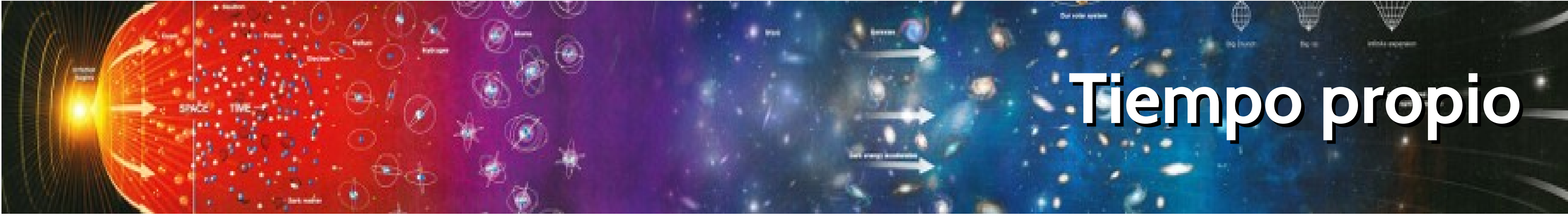
- Luego, para un fotón: $c\,\Delta t=\Delta r \rightarrow c^2(\Delta t)^2=(\Delta r)^2$

**Convención (+,-,-,-)**

$$s^2=c^2(\Delta t)^2-(\Delta x)^2-(\Delta y)^2-(\Delta z)^2$$
$$s'^2=c^2(\Delta t')^2-(\Delta x')^2-(\Delta y')^2-(\Delta z')^2$$

- La invariancia de la velocidad de la luz implica (**probarlo**):

$$c=c' \Leftrightarrow s^2=s'^2$$



# Tiempo propio

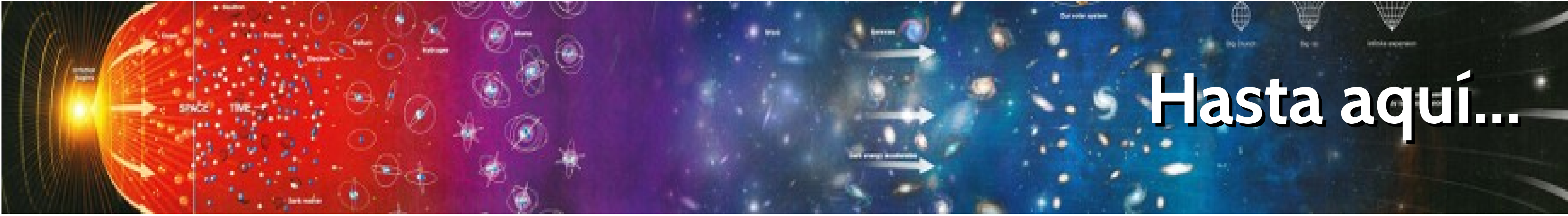
- Dado que cada marco de referencia tiene su propio tiempo, **podemos definir un marco de referencia adherido a un objeto en movimiento**.
- **El tiempo de ese marco es el tiempo que “percibe” un observador que se mueve junto con el objeto**. Llamaremos a este marco “**comóvil**”.
- El tiempo del marco comóvil es el tiempo propio: es independiente de las coordenadas.

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dr^2 = ds'^2 = c\,d\tau^2$$

**Tiempo propio**

$$\Rightarrow \boxed{c^2\,dt^2 - dr^2 = c^2\,d\tau^2}$$

$$dt = \gamma\,d\tau$$



# Hasta aquí...

- Los postulados de Einstein implican cambios profundos en la concepción de la Naturaleza.
  - Estos afectan nuestra percepción de distancia y lapso temporal, de espacio y tiempo.
- Las transformaciones de Lorentz indican como transforman las leyes de la física entre dos marcos de referencia inerciales.
  - Son las transformaciones válidas entre marcos de referencia.
- La mecánica Newtoniana es una aproximación válida para velocidades bajas respecto a la velocidad de la luz.
  - ¿Cómo puede ser generalizada?

# Diálogo entre dos mundos: movimiento y fuerzas

- Newton: - Un cuerpo sujeto a una fuerza constante *F* durante un tiempo *t* tendrá una velocidad *v=(F/m)t* que aumenta con *t*
- Einstein: - Pero Isaac, ¡v<c siempre!
- N: ¿Qué? Vos estás equivocado Alberto ¿sino que pasa con mi 2da ley?

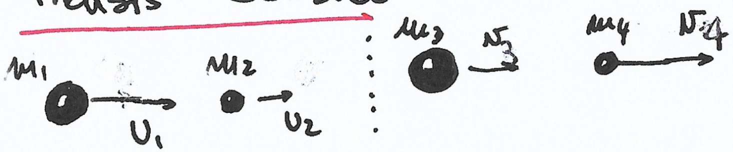
$$\vec{F}=\frac{d\,\vec{p}}{dt}=\frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt}$$

- E: ¡Ahh! ¿Pero cuál *t* estarás usando en tu derivada? ¿En que marco de referencia?
- N: ¿Cómo? ¿el tiempo no es absoluto? ¿Acaso *t* no es el mismo para todos los observadores inerciales?
- E: Jejejeje.... (sonrisa con mirada pícara)

# Pasen y vean

Colisiones (u es inicial, v es final, puede haber cambio de masas).

## Análisis Clásico




En el marco S, conservación de $\vec{p}$ implica

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_3 v_3 \quad m_4 v_4 \qquad (1)$$

En S'

$$m_1 u_1' + m_2 u_2' = m_3 v_3' + m_4 v_4' \qquad (2)$$

y $v_3' = v_3 - V$ (3) (V es la vel. relativa ent. S y S') ⇒

En S'

$$\underbrace{m_1 u_1 + m_2 u_2}_{(1)} - (m_1+m_2)V = \underbrace{m_3 v_3 + m_4 v_4}_{(1)} - V(m_3+m_4)$$

⇒ $(m_1+m_2)V = (m_3+m_4)V$ y para todo V:

(4) $\boxed{m_1+m_2 = m_3+m_4}$ Conservación de la masa.

La conservación de la cantidad de movimiento implica la conservación de la masa

## Análisis Relativista

Imaginemos que en el caso relativista $\vec{p} = m\vec{v}$ y $\vec{p}' = m v'$ (suponemos por validez Post. 1 y $m = m'$) ⇒ (1) y (2) se mantienen. Cambiando (3) por la relativista:

$$v_3' = \frac{v_3 - V}{1 - v_3 V/c^2} \qquad (5)$$

⇒ reemplazando en (2):

$$m_1 \frac{u_1 - V}{1 - u_1 V/c^2} + m_2 \frac{u_2 - V}{1 - u_2 V/c^2} = m_3 \frac{v_3 - V}{1 - v_3 V/c^2} + m_4 \frac{v_4 - V}{1 - v_4 V/c^2}$$

¿Y ahora? V no se cancela, entonces esta ecuación (conservación de la cant. de movimiento) ¡no vale en general! ó tenemos que cambiar las masas para ajustar.

La definición estándar no se verifica.

# Principios de conservación

- En una colisión, el análisis relativista usando la ley de suma de velocidades,

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} \qquad u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad ,$$

resulta qué:

  - o bien no se conserva la cantidad de movimiento;
  - o bien la cantidad de movimiento está mal definida en el caso relativista

Clásico: $\vec{p} = m\vec{v}$ , Relativistiva $\vec{p} = ?$

# La conservación de *p* es un principio básico

- Al igual que nos pasó con *u*, debemos recordar lo que dijo Alberto: al derivar, el tiempo depende del marco de referencia. Antes eso no nos preocupaba:

$$\text{Clásico: } \vec{p}=\frac{d}{dt}\left(m\vec{r}\right) \ \text{ y } \ \vec{p}\,'=\frac{d}{dt}\left(m\vec{r}\,'\right)$$

$$\text{Correcto: } \vec{p}=\frac{d}{dt}\left(m\vec{r}\right) \ \text{ y } \ \vec{p}\,'=\frac{d}{dt'}\left(m\vec{r}\,'\right)$$

- Y como todos los marcos son equivalentes, ¡podemos usar el marco comovil!

**Cant. de movimiento relativista**

$$\boxed{\vec{p}=m\frac{d\vec{r}}{d\tau}}$$

# Magia algebráica (como ejercicio)

Definición de $\vec p$ : $\boxed{\vec p = m\, d\vec r/d\tau}$

Pero ¿qué es $(d\vec r/d\tau)$? Recordando:

$dt = \gamma\, d\tau \Rightarrow dt/d\tau = \gamma \Rightarrow$

$$\boxed{\vec p} = m\frac{d\vec r}{d\tau}\cdot\frac{dt}{dt} = m\frac{d\vec r}{dt}\,\frac{dt}{d\tau} = \boxed{m\vec v\gamma}$$

Donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ y $\beta = |\vec v|/c$

$$\Rightarrow \boxed{\vec p = m\vec v\gamma}$$

Definimos $\gamma_i := (1-\beta_i^2)^{-1/2}$ y $\beta_i = v_i/c \Rightarrow$

En S:

$$m_1 v_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 v_2 = m_3 v_3\gamma_3 + m_4 v_4\gamma_4$$

En S':

$$m_1 v_1'\gamma_1' + m_2 v_2'\gamma_2' = m_3 v_3'\gamma_3' + m_4 v_4'\gamma_4'$$

Magia Algebráica (Problema en la guía):

$$\boxed{m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 = m_3\gamma_3 + m_4\gamma_4}$$

Es una cantidad conservada dentro de la conservación del momento.

- Con la nueva definición de p,

$$\vec p = m\gamma\vec v$$

- aparece una nueva magnitud conservada

$$m\gamma = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

- m es la masa del objeto
- Notar que si v>0, entonces mγ>m

# Interpretandomos el nuevo invariante... Richard Feynman dijo:

- *"For those who want to learn just enough about it so they can solve problems, that is all there is to the [special] theory of relativity – it just changes Newton's laws by introducing a correction factor to the mass"*
- Luego:

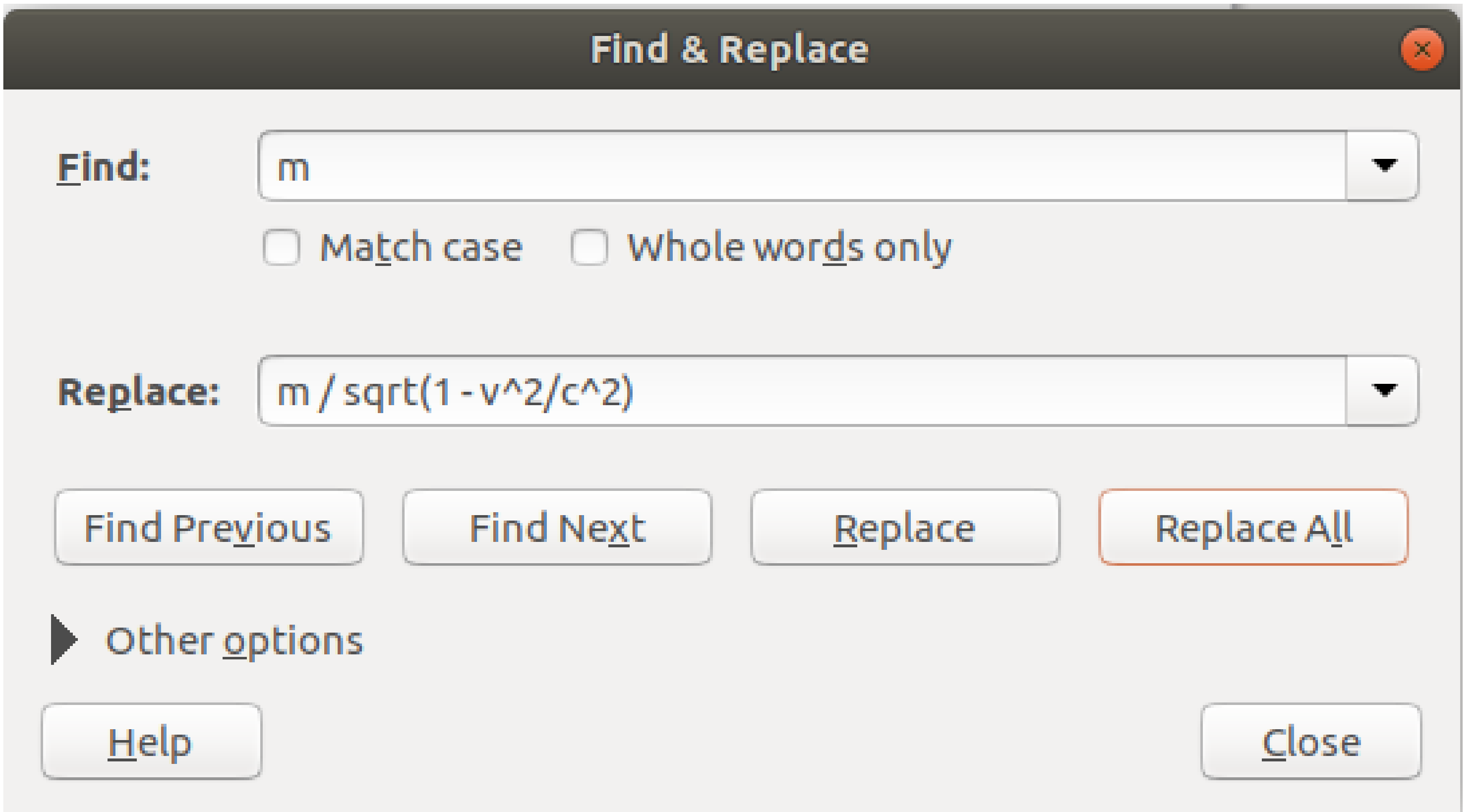
$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

- donde

$$m \rightarrow m\gamma = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

# Aprendiendo relatividad en Word

- Search & replace (CTRL+F)



- Serie de Taylor para

$$(1+\epsilon)^n = 1 + n\epsilon + \frac{1}{2}n(n-1)\epsilon^2 + \dots$$

- y tenemos:

$$\gamma = \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \Rightarrow \begin{array}{l} n=-1/2 \\ \epsilon = -\beta^2 \ll 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{3}{8}\beta^4 + \dots$$

- Entonces para nuestro invariante tenemos:

$$\Rightarrow \gamma m = \frac{\cancel{\gamma}\, m}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq m + \frac{1}{2}m\beta^2 - \frac{3}{8}m\cdot\beta^4 + \dots$$

$$\Rightarrow \gamma m \simeq m + \frac{1}{2}m\frac{v^2}{c^2} - \frac{3}{8}m\, v^4/c^4$$

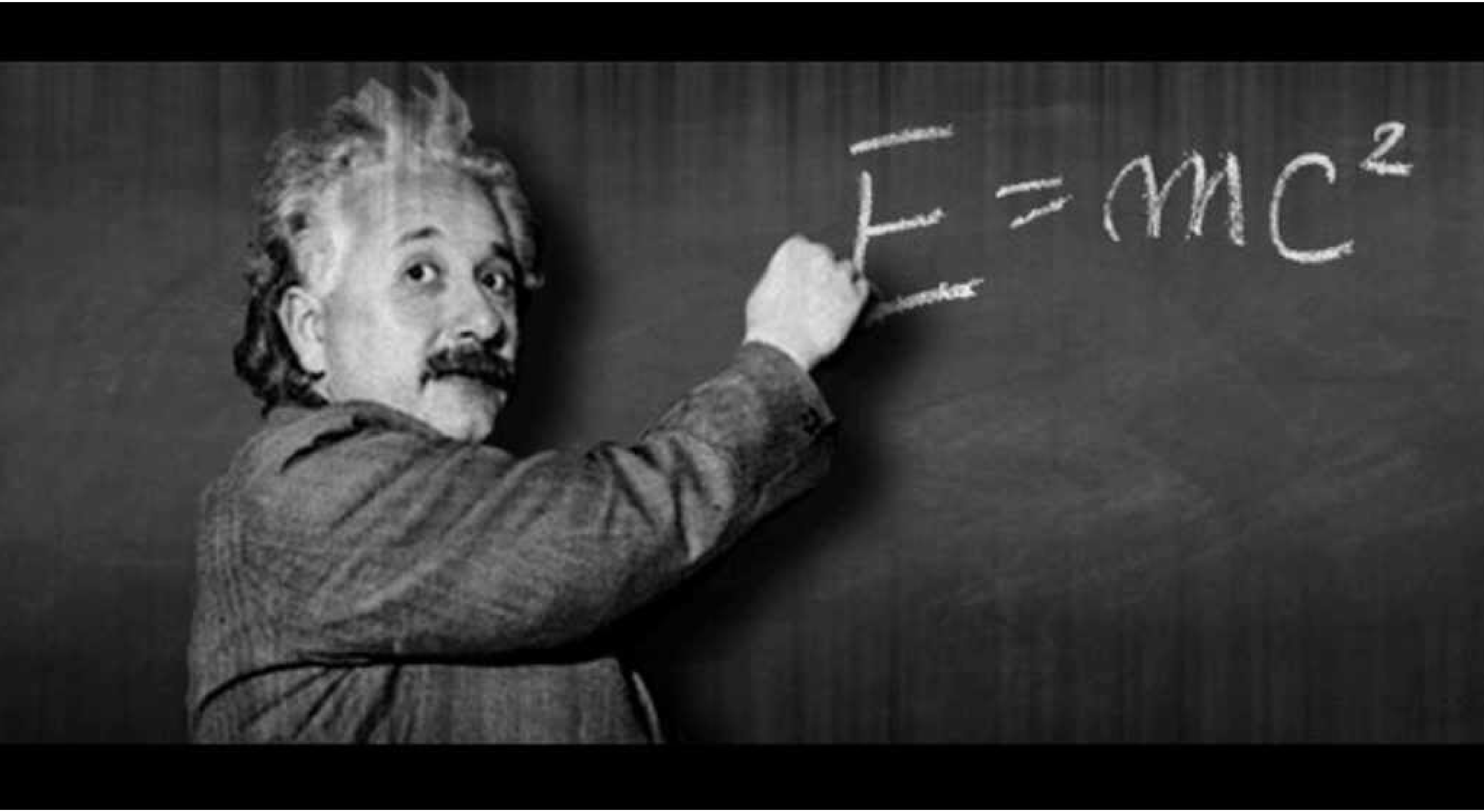
- Multiplicando ambos lados por $c^2$:

$$\gamma m c^2 \simeq mc^2 + \frac{1}{2}m\frac{v^2}{\cancel{c^2}}\cdot\cancel{c^2} - \frac{3}{8}m v^4/c^{\cancel{4}2}\cdot\cancel{c^2}$$

- y descartando el término $v^4/c^2 = 0$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\gamma m c^2 \simeq \underbrace{mc^2}_{\text{energía}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{Energía cinética}}} \Rightarrow \boxed{\gamma mc^2 = E}$$

# Gracias Isaac, seguí participando....



# Una nueva magnitud conservada

- Hemos visto que al aplicar los principios relativistas y pedir conservación de la cantidad de movimiento, una nueva magnitud conservada aparece naturalmente:

**La energía se conserva**

$$\boxed{E=\gamma m c^2 \simeq m c^2 + \boxed{\frac{1}{2} m v^2}}$$

**Energía cinética clásica**

- Recordar que la energía de un cuerpo es $E=\gamma m c^2$
- $E=\frac{1}{2} m v^2$ es una aproximación válida si v<<c.

$$\boxed{E_K \equiv E - m c^2 = (\gamma - 1) m c^2}$$

**Energía cinética (en ausencia de otras interacciones)**

# Un nuevo invariante

Cant. de movimiento relativista: $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$

Energía total relativista: $E = \gamma m c^2$

Elevamos al cuadrado: $E^2 = \gamma^2 m^2 c^4$ (1)

$p^2 = \gamma^2 m^2 v^2 \Rightarrow p^2 c^2 = \gamma^2 m^2 v^2 c^2$ (2)

Restando (1) − (2):

$$E^2 - p^2c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 - \gamma^2 m^2 c^2 v^2$$

Sacando factor común: $E^2 - p^2c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \left(1 - v^2/c^2\right) = \gamma^2 m^2 c^4 \overbrace{\left(1 - \beta^2\right)}^{1/\gamma^2}$

$$\Rightarrow E^2 - p^2c^2 = \cancel{\gamma^2} m^2 c^4 \cdot \frac{1}{\cancel{\gamma^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E^2 - p^2c^2 = m^2 c^4}$$

invariante relativista.
(no depende del sist. de ref).

# Resumen hasta aquí

- Cantidad de movimiento relativista (correcto siempre):

$$\vec{p} = \gamma\, m\, \vec{v}$$

- Energía relativista (correcta siempre):

$$E = \gamma\, m\, c^2$$

- Un nuevo invariante relativista:

$$\boxed{E^2 - (p\,c)^2 = (m\,c^2)^2}$$

**Invariante relativista**

# ¿y si no la partícula no tiene masa?

- ¡No importa, tiene energía y tiene cantidad de movimiento!

$$m=0 \rightarrow E^2-(p\,c)^2=(m\,c^2)^2 \Rightarrow E^2-(p\,c)^2=0$$

**Cantidad de movimiento de partículas sin masa**

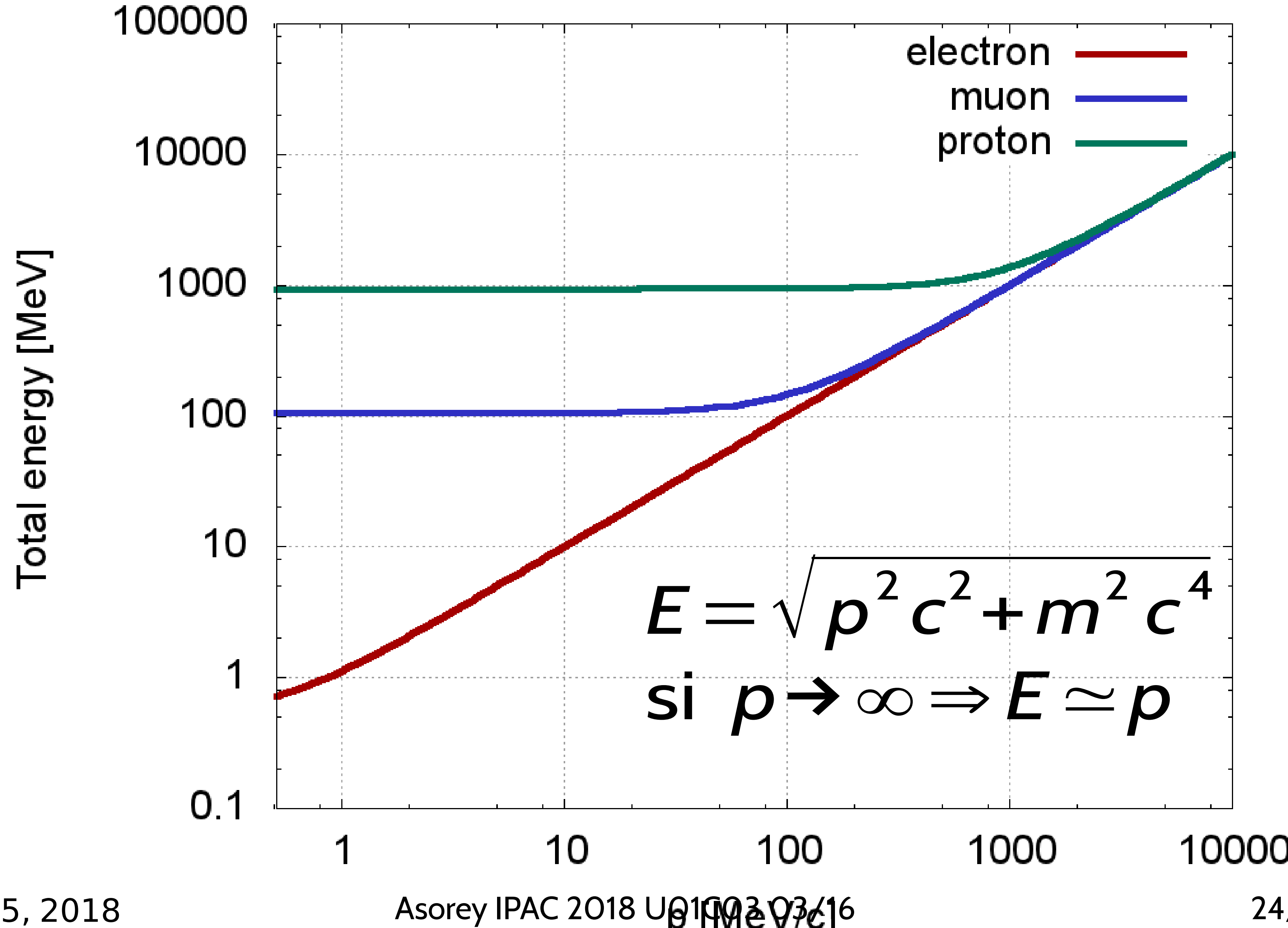
$$\boxed{E=p\,c}$$

- Por ejemplo, un fotón violeta:

$\lambda$=420 nm → E = hc/$\lambda$ = 0.473 aJ (attojoules, atto=$10^{-18}$)

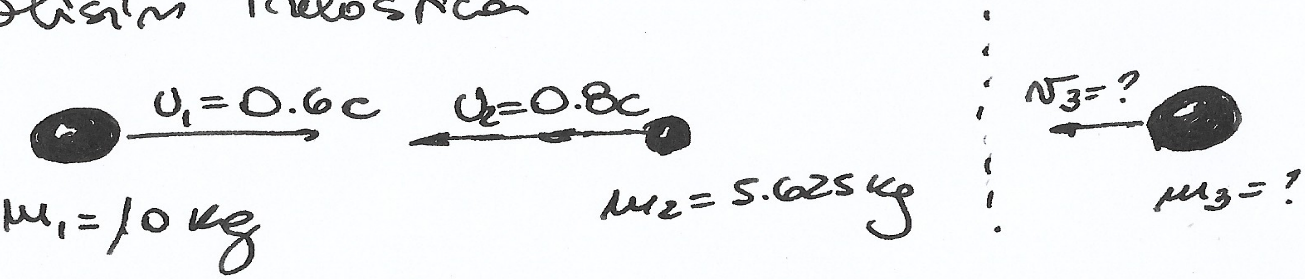
→ p = 1.58 x $10^{-27}$ kg m/s

# Mil palabras



# Choque inelástico: ¡¡$m_3 > m_1 + m_2$!! energía a masa

Colisión inelástica:




Clásicamente diríamos: $m_3 = 15.625$ kg y $v_3 = 0.01 \neq 0$.

Relativísticamente:

$$\gamma_1 = (1-\beta_1^2)^{-1/2} = 1.25 \quad \text{y} \quad \gamma_2 = (1-\beta_2^2)^{-1/2} = 5/3$$

$$\Rightarrow p_T^i = \Sigma p_i^i = \Sigma m_i \gamma_i v_i = 10\,\text{kg} \cdot 1.25 \cdot 0{,}6c + 5.625\,\text{kg} \cdot \frac{5}{3}(-0.8c)$$

$$\Rightarrow p_T^i = 7.5\,\text{kg}\,c - 7.5\,\text{kg}\,c \Rightarrow p_T^i = 0 \Rightarrow v_3 = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{p_f = 0.} \quad \text{y} \quad \gamma_3 = 1$$

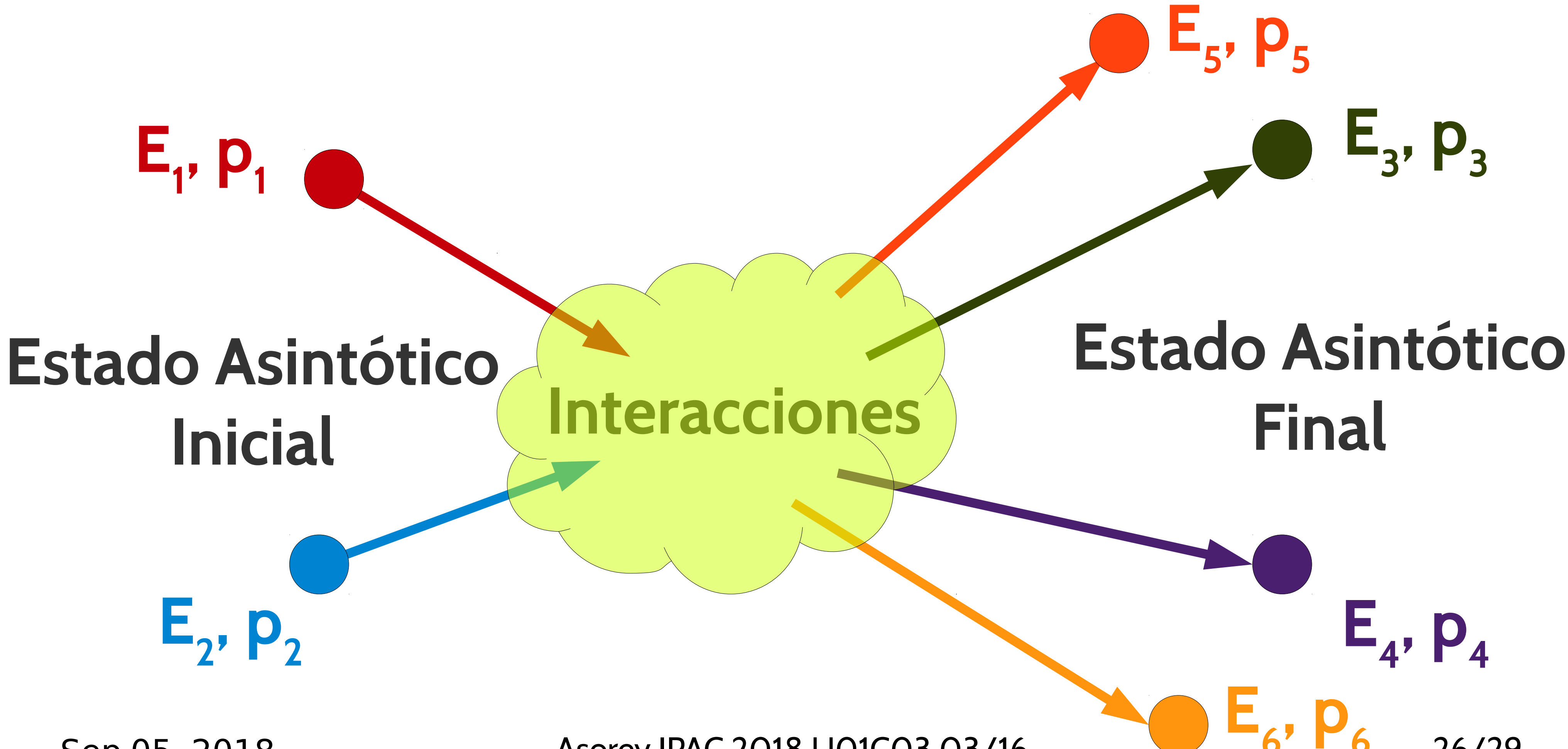
Conservación energía.

$$E_i = \Sigma m_i \gamma_i c^2 \Rightarrow E_i = E_f \Rightarrow 10\,\text{kg} \cdot 1.25 + 5.625 \cdot 5/3 = m_3 \gamma_3$$

$$\Rightarrow m_3 = 21.875\,\text{kg} \Rightarrow m_3 > m_1 + m_2 \text{ !!!}$$

# ¿Cómo funciona la conservación?

- Y todo por pedir que *c* tiene que tener el mismo valor para todos los observadores inerciales.




- **La Energía total se conserva**

$$\left.\begin{aligned} E^{\text{inicial}} &= \sum_j^{n^{\text{inicial}}} E_j^{\text{inicial}} = \sum_j m_j \gamma_j c^2 \\ E^{\text{final}} &= \sum_k^{n^{\text{final}}} E_k^{\text{final}} = \sum_k m_k \gamma_k c^2 \end{aligned}\right\} E^{\text{inicial}} = E^{\text{final}}$$

- **La cantidad de movimiento total se conserva**

$$\left.\begin{aligned} \vec{p}^{\,\text{inicial}} &= \sum_j^{n^{\text{inicial}}} \vec{p}_j^{\,\text{inicial}} = \sum_j m_j \gamma_j \vec{v}_j \\ \vec{p}^{\,\text{final}} &= \sum_k^{n^{\text{final}}} \vec{p}_k^{\,\text{final}} = \sum_k m_k \gamma_k \vec{v}_k \end{aligned}\right\} \vec{p}^{\,\text{inicial}} = \vec{p}^{\,\text{final}}$$

# Comentario sobre unidades

- Es conveniente trabajar en otro sistema de unidades
- 1 eV es la energía ganada por un electrón en una diferencia de potencial de 1 V

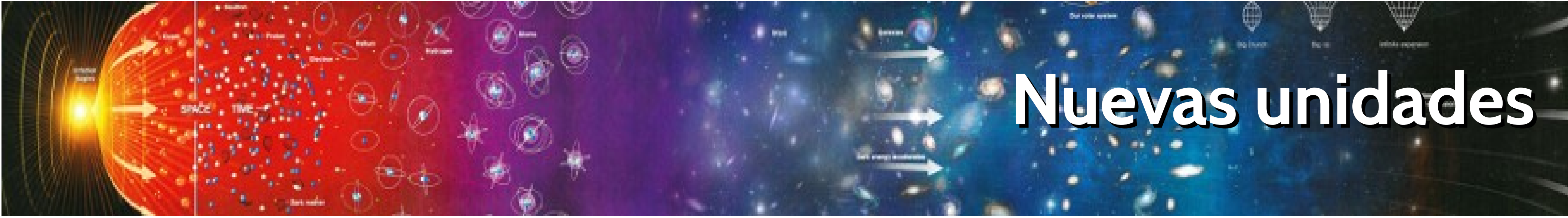
$$E=qV \rightarrow E=(1.602\times10^{-19}\,\mathrm{C})(1\,\mathrm{V}) \rightarrow E=1.602\times10^{-19}\,\mathrm{J}$$

**electronvolt** $\boxed{\Rightarrow 1\,\mathrm{eV}=1.602\times10^{-19}\,\mathrm{J}}$

**meV eV keV MeV GeV TeV PeV EeV**

**Microndas R X Partículas R.C. Gal**

**Visible Gamma C. Galáctico R.C.E.G.**



# Nuevas unidades

| Magnitud | Ecuación | Unidad |
|---|---|---|
| Energía | E | eV |
| Cant. de movimiento | p = E/c | eV/c |
| Masa | $m = E / c^2$ | $eV/c^2$ |

- A veces, se usan las unidades naturales:

$$h = c = 1$$

- Entonces, todo se mide en eV