

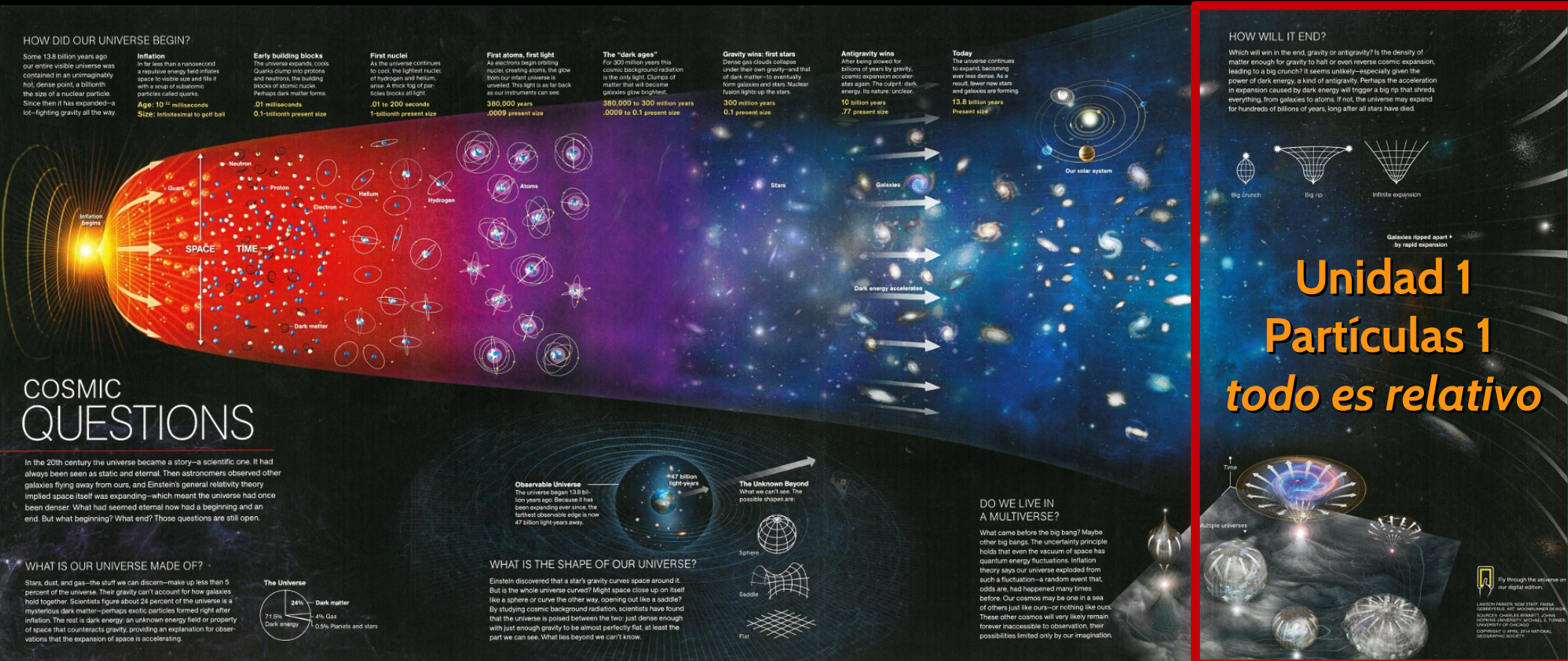
Universidad Nacional de Río Negro

Int. Partículas, Astrofísica & Cosmología - 2017

- **Unidad** 01 – Relatividad
- **Clase** U01 C05 – 05
- **Fecha** 12 Sep 2017
- **Cont** Mecánica relativista
- **Cátedra** Asorey
- **Web** github.com/asoreyh/unrn-ipac
www.facebook.com/fisicareconocida/
- **Archivo** ipac-2017-U01-C05-0912-relatividad-5



Contenidos: un viaje en el tiempo



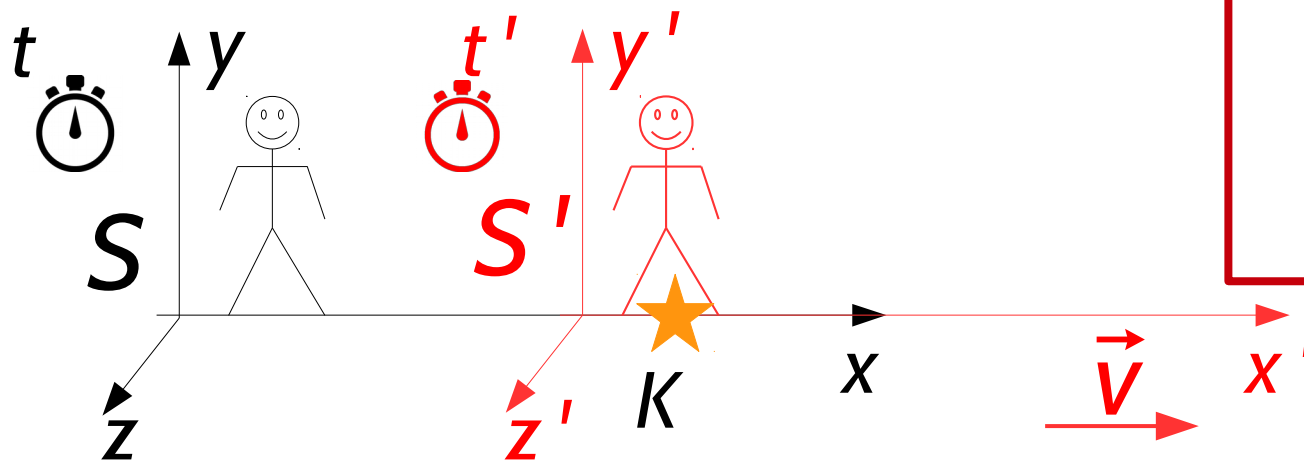
Transformaciones de Lorentz

- Las ecuaciones que transforman dos marcos de referencia, y que verifican ambos postulados, son

Recordar que estas transformaciones son válidas para un sistema S' que se mueve con velocidad v en la dirección x , entonces $K=(t,x,y,z)$ y $K'=(t',x',y',z')$, ya que $z'=z$ e $y'=y$

$$\begin{aligned}t' &= \gamma \left(t - \frac{1}{c^2} v x \right) \\x' &= \gamma (x - v t) \\y' &= y \\z' &= z\end{aligned}$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \beta \equiv \frac{v}{c}$$





Simultaneidad y co-localidad relativista

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{1}{c^2} v \Delta x \right)$$

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{1}{c^2} v \Delta x' \right)$$

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x - v \Delta t)$$

$$\Delta x = \gamma (\Delta x' + v \Delta t')$$

Eventos simultáneos en un marco

$$\Delta t = 0, \Delta x \neq 0 \rightarrow \Delta t' \neq 0 \text{ y eventualmente } \Delta x' = 0$$

Eventos co-locales en un marco

$$\Delta x = 0, \Delta t \neq 0 \rightarrow \Delta x' \neq 0 \text{ y eventualmente } \Delta t' = 0$$



Dilatación temporal

- El lapso de tiempo entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia
- Imaginen en S un reloj ($\rightarrow \Delta t = s$) en reposo $\rightarrow \Delta x = 0$

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{1}{c^2} v \Delta x \right) \rightarrow \Delta t' = \gamma \Delta t \rightarrow \Delta t' = \gamma s$$

y dado que $\gamma > 1$ si $v > 0$, luego $\Delta t' > \Delta t$

- Por ejemplo, $v = 259807 \text{ km/s}$
 $\rightarrow \beta = v/c = 0.866 \rightarrow \gamma = 2 \Rightarrow \Delta t' = 2 s$

El intervalo medido en el marco S (reloj en reposo) dura 1 segundo.
El mismo intervalo visto en el marco en movimiento S' dura 2 segundos

Contracción espacial

- La distancia entre dos eventos (p.ej. la longitud de un objeto) no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia
- Imaginen una regla ($\rightarrow \Delta x = l$) en el sistema S. En el sistema S' se mide la distancia entre los extremos de la regla de manera simultánea ($\rightarrow \Delta t' = 0$)

$$\Delta x = \gamma (\Delta x' + v \Delta t') \rightarrow \Delta x = \gamma \Delta x' \rightarrow \Delta x' = \Delta x \frac{x}{\gamma} \rightarrow \Delta x' = \frac{l}{\gamma}$$

y dado que $\gamma > 1$ si $v > 0$, luego $\Delta x' < \Delta x$

- Por ejemplo, $v = 259807 \text{ km/s} \rightarrow \gamma = 2 \rightarrow \Delta x' = l/2$

La longitud medida en el marco S' (reloj en movimiento) es menor que la longitud medida en el marco con el reloj en reposo



Dilatación temporal y Contracción espacial

- El lapso de tiempo entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \quad \text{para eventos} \quad \Delta x = 0$$

- La distancia espacial entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} \quad \text{para eventos} \quad \Delta t' = 0$$



Tiempo propio

- Dado que cada marco de referencia tiene su propio tiempo, **podemos definir un marco de referencia adherido a un objeto en movimiento.**
- **El tiempo de ese marco es el tiempo que “percibe” un observador que se mueve junto con el objeto.**
Llamaremos a este marco “**comóvil**”.
- El tiempo del marco comóvil es el tiempo propio: es independiente de las coordenadas.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 = ds'^2 = c^2 d\tau^2$$

Tiempo propio

$$\Rightarrow c^2 dt^2 - dr^2 = c^2 d\tau^2$$

$$dt = \gamma d\tau$$



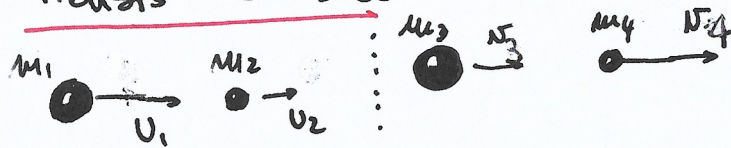
Hasta aquí...

- Los postulados de Einstein implican cambios profundos en la concepción de la Naturaleza.
 - Estos afectan nuestra percepción de distancia y lapso temporal, de espacio y tiempo.
- Las transformaciones de Lorentz indican como transforman las leyes de la física entre dos marcos de referencia inerciales.
 - Son las transformaciones válidas entre marcos de referencia.
- La mecánica Newtoniana es una aproximación válida para velocidades bajas respecto a la velocidad de la luz.
 - ¿Cómo puede ser generalizada?

Pasen y vean

Colisiones (V es inicial, v es final, puede haber cambio de masas).

Análisis Clásico



En el marco S, conservación de \vec{p} implica

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_3 v_3 + m_4 v_4 \quad (1)$$

En S'

$$m_1 u'_1 + m_2 u'_2 = m_3 v'_3 + m_4 v'_4 \quad (2)$$

y $v'_3 = v_3 - V$ (3) (V es la vel. relativista S y S')

En S'

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 - (m_1 + m_2)V = m_3 v_3 + m_4 v_4 - V(m_3 + m_4) \quad (4)$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2)V = (m_3 + m_4)V \quad \text{y para todo } V:$$

(4) $m_1 + m_2 = m_3 + m_4$ **Conservación de la masa.**

La conservación de la cantidad de movimiento implica la conservación de la masa

Análisis Relativista

Imaginemos que en el caso relativista $\vec{p} = m\vec{v}$ y $\vec{p}' = m\vec{v}'$ (Suponemos que v y v' son paralelos a V y $m = m'$) \Rightarrow (1) y (2) se mantienen. Cambiando (3) por lo relativista:

$$v'_3 = \frac{v_3 - V}{1 - v_3 V/c^2} \quad (5)$$

\Rightarrow reemplazando en (2):

$$m_1 \frac{u_1 - V}{1 - u_1 V/c^2} + m_2 \frac{u_2 - V}{1 - u_2 V/c^2} = m_3 \frac{v_3 - V}{1 - v_3 V/c^2} + m_4 \frac{v_4 - V}{1 - v_4 V/c^2}$$

¿y ahora? V no se cancela, entonces esta ecuación (conservación de la cant. de movimiento) no vale en general! o tenemos que cambiar las masas para ajustar.

La definición estándar no se verifica.



Principios de conservación

- En una colisión, el análisis relativista usando la ley de suma de velocidades,

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} \qquad u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} ,$$

resulta qué:

- o bien no se conserva la cantidad de movimiento;
- o bien la cantidad de movimiento está mal definida en el caso relativista

Clásico: $\vec{p} = m\vec{v}$, Relativística $\vec{p} = ?$

La conservación de p es un principio básico

- Al igual que nos pasó con u , debemos recordar lo que dijo Alberto: al derivar, el tiempo depende del marco de referencia. Antes eso no nos preocupaba:

$$\text{Clásico: } \vec{p} = \frac{d}{dt}(m \vec{r}) \quad \text{y} \quad \vec{p}' = \frac{d}{dt}(m \vec{r}')$$

$$\text{Correcto: } \vec{p} = \frac{d}{dt}(m \vec{r}) \quad \text{y} \quad \vec{p}' = \frac{d}{dt'}(m \vec{r}')$$

- Y como todos los marcos son equivalentes, ¿podemos usar el marco comovil!

**Cant. de movimiento
relativista**

$$\vec{p} = m \frac{d \vec{r}}{d \tau}$$

Magia algebraica (como ejercicio)

Definición de \vec{p} : $\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{d\tau}$

Pero ¿qué es $(d\vec{r}/d\tau)$? Recordando:

$$dt = \gamma d\tau \Rightarrow dt/d\tau = \gamma \Rightarrow$$

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{d\tau} \cdot \frac{dt}{dt} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = m \vec{v} \gamma$$

$$\text{Donde } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \gamma \beta = |\vec{v}|/c$$

$$\Rightarrow \vec{p} = m \vec{v} \gamma$$

$$\text{Definimos } \gamma_i = (1 - \beta_i^2)^{-1/2} \quad \gamma \beta_i = v_i/c \Rightarrow$$

En S:

$$m_1 v_1 \gamma_1 + m_2 v_2 \gamma_2 = m_3 v_3 \gamma_3 + m_4 v_4 \gamma_4$$

En S':

$$m_1 v_1' \gamma_1' + m_2 v_2' \gamma_2' = m_3 v_3' \gamma_3' + m_4 v_4' \gamma_4'$$

Magia Algebraica (Problema análogo):

$$m_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2 = m_3 \gamma_3 + m_4 \gamma_4$$

Es una cantidad conservada derivada de la conservación del momento.

- Con la nueva definición de p,

$$\vec{p} = m \gamma \vec{v}$$

- aparece una nueva magnitud conservada

$$m \gamma = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

- m es la masa del objeto
- Notar que si $v > 0$, entonces $m\gamma > m$



Richard Feynman dijo

- *“For those who want to learn just enough about it so they can solve problems, that is all there is to the [special] theory of relativity – it just changes Newton’s laws by introducing a correction factor to the mass”*

- Luego:

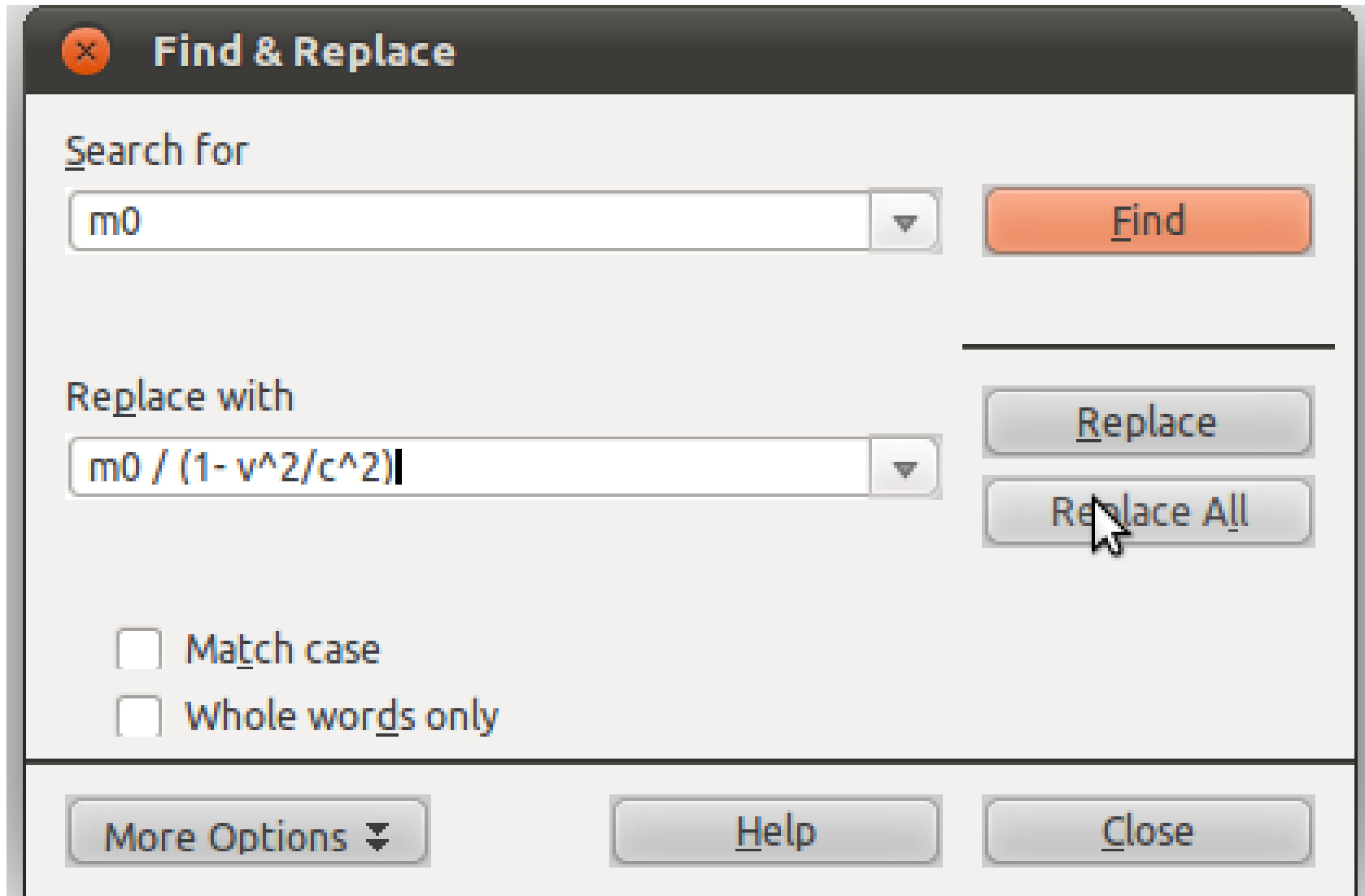
$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

- donde

$$m \rightarrow m\gamma = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Aprendiendo relatividad en Windows

- Search & replace (CTRL+F)



- Serie de Taylor para

$$(1+\epsilon)^n = 1 + n\epsilon + \frac{1}{2}n(n-1)\epsilon^2 + \dots$$

- y tenemos:

$$\gamma = \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \epsilon = -\beta^2 \quad n = 1/2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{3}{8}\beta^4 + \dots$$

- Entonces para nuestro invariante tenemos:

$$\Rightarrow \gamma m = \frac{\gamma m}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx m + \frac{1}{2}m\beta^2 - \frac{3}{8}m\beta^4 + \dots$$

$$\Rightarrow \gamma m \approx m + \frac{1}{2}m \frac{v^2}{c^2} - \frac{3}{8}m \frac{v^4}{c^4}$$

- Multiplicando ambos lados por c^2 :

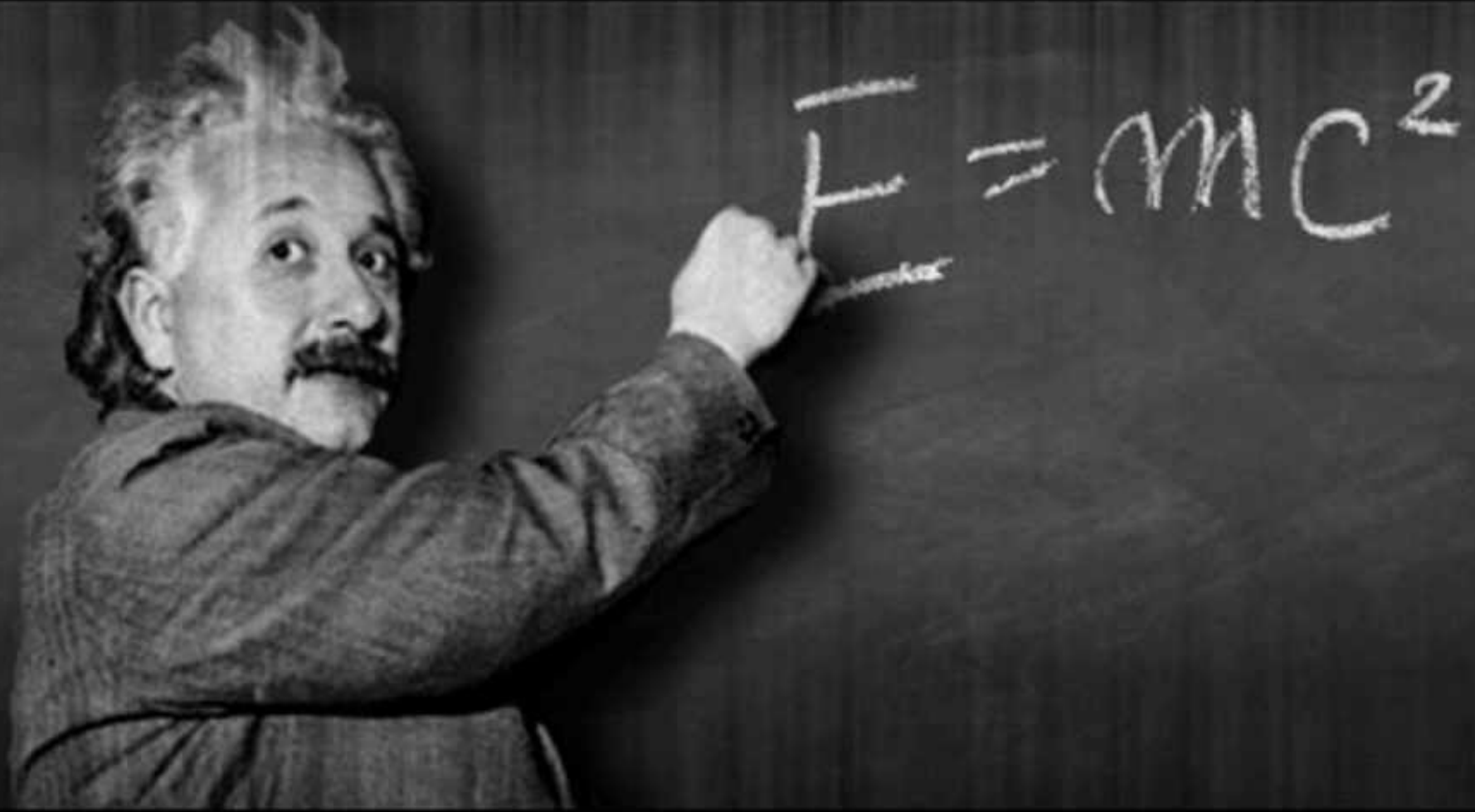
$$\gamma mc^2 \approx mc^2 + \frac{1}{2}m \frac{v^2}{c^2} \cdot c^2 - \frac{3}{8}m \frac{v^4}{c^4} \cdot c^2$$

- y descartando el término v^4/c^2 obtenemos \Rightarrow

$$\boxed{\gamma mc^2 \approx \underbrace{mc^2}_{\text{Energía}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{Energía cinética}}} \quad \boxed{\gamma mc^2 = E}$$



Gracias Isaac, seguí participando....



Una nueva magnitud conservada

- Hemos visto que al aplicar los principios relativistas y pedir conservación del impulso, una nueva magnitud conservada aparece naturalmente:

La energía se conserva

$$E = \gamma m c^2 \simeq m c^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

Energía cinética clásica

- Recordar que la energía de un cuerpo es $E = \gamma m c^2$
- $E = \frac{1}{2} m v^2$ es una aproximación válida si $v \ll c$.

$$E_K \equiv E - m c^2 = (\gamma - 1) m c^2$$

Energía cinética
(en ausencia de otras
interacciones)



Resumen hasta aquí

- Cantidad de movimiento relativista (correcto siempre):

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

- Energía relativista (correcta siempre):

$$E = \gamma m c^2$$

- Un nuevo invariante relativista:

$$E^2 - (p c)^2 = (m c^2)^2$$

**Invariante
relativista**

Un nuevo invariante

Cant. de momento relativista: $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$

Energía total relativista: $E = \gamma m c^2$

Elección al cuadrado: $E^2 = \gamma^2 m^2 c^4$ (1)
 $p^2 = \gamma^2 m^2 v^2 \Rightarrow p^2 c^2 = \gamma^2 m^2 v^2 c^2$ (2)

Restando (1) - (2):

$$E^2 - p^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 - \gamma^2 m^2 c^2 v^2$$

Sacando factor común: $E^2 - p^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \left(1 - v^2/c^2\right) = \gamma^2 m^2 c^4 \left(1 - \beta^2\right)$

$$\Rightarrow E^2 - p^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \cdot \frac{1}{\gamma^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4}$$

invariante relativista.
(No depende del Sist. de ref).



¿y si no la partícula no tiene masa?

- ¡No importa, tiene energía y tiene cantidad de movimiento

$$m=0 \rightarrow E^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2 \Rightarrow E^2 - (pc)^2 = 0$$

**Cantidad de
movimiento de
partículas sin masa**

$$E = pc$$

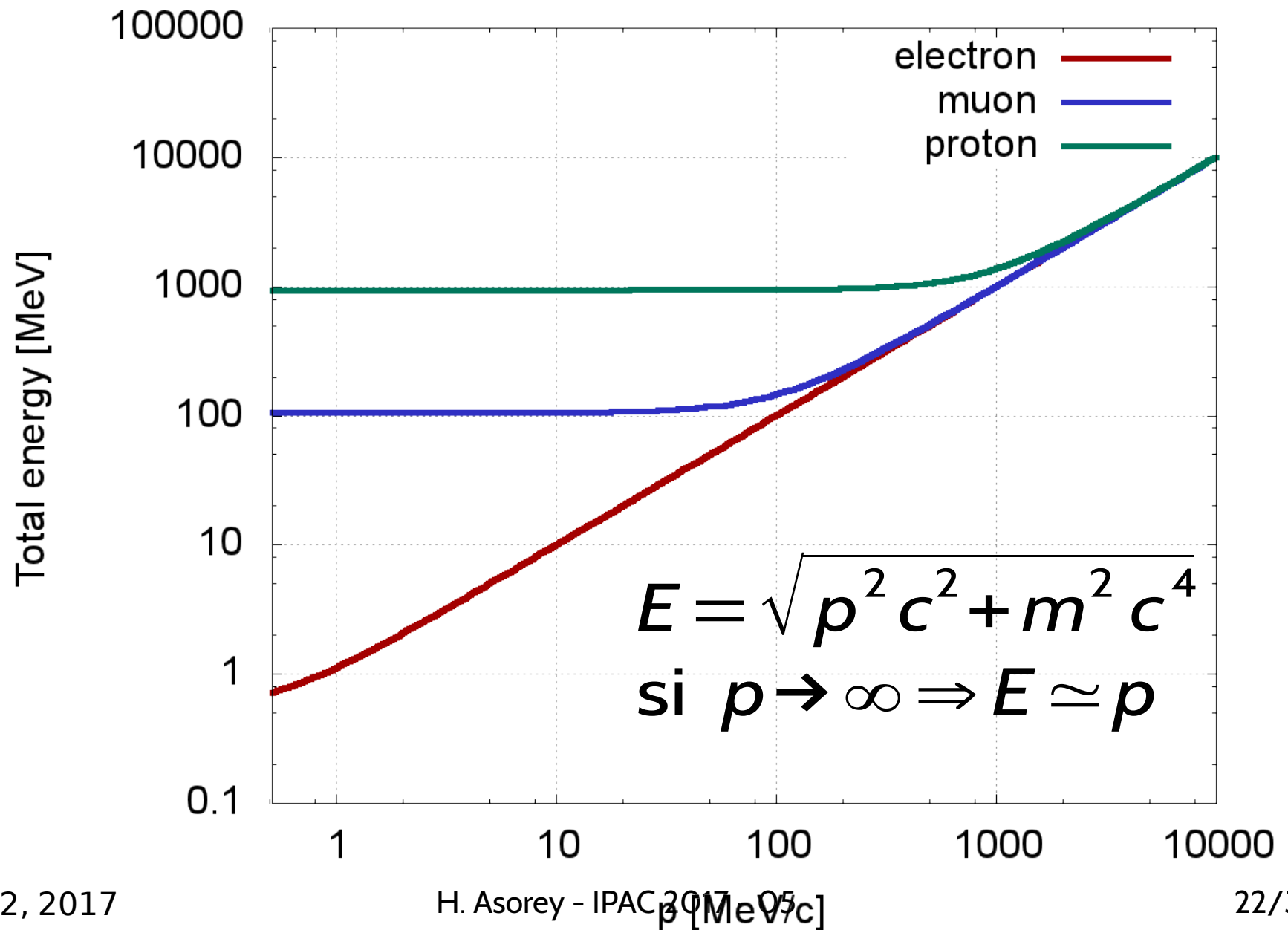
- Por ejemplo, un fotón violeta:

$$\lambda = 420 \text{ nm} \rightarrow E = hc/\lambda = 0.473 \text{ aJ (attojoules, atto=10}^{-18}\text{)}$$

$$\rightarrow p = 1.58 \times 10^{-27} \text{ kg m/s}$$

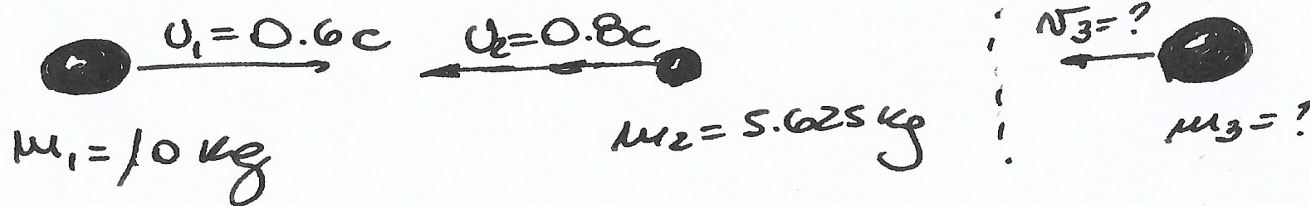


Mil palabras



Choque inelástico: $m_3 > m_1 + m_2$!! energía a masa

Colisión inelástica.



Claramente d'íctum: $m_3 = 15.625 \text{ kg}$ y $v_3 = 0.0170$.

Relativísticamente:

$$\gamma_1 = (1 - \beta_1^2)^{-1/2} = 1.25 \quad \text{y} \quad \gamma_2 = (1 - \beta_2^2)^{-1/2} = 5/3$$

$$\Rightarrow p_T^i = \sum p_i^i = \sum m_i \gamma_i u_i = 10 \text{ kg} \cdot 1.25 \cdot 0.6c + 5.625 \text{ kg} \cdot \frac{5}{3} (-0.8c)$$

$$\Rightarrow \cancel{p_T^i} = 7.5 \text{ kg}c - 7.5 \text{ kg}c \Rightarrow \cancel{p_T^i} \quad p_T^i = 0 \Rightarrow \underline{v_3 = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_f = 0} \quad \text{y} \quad \gamma_3 = 1$$

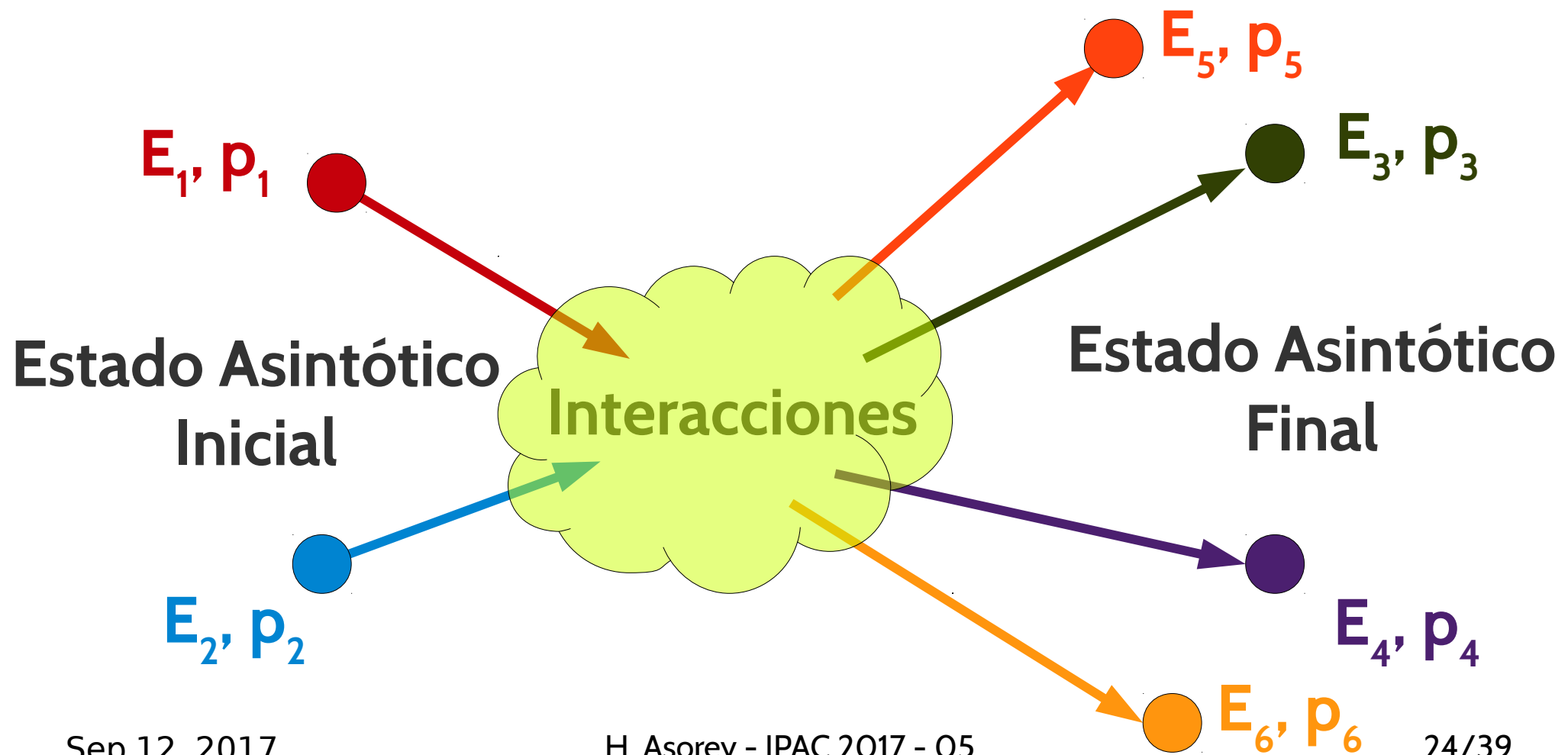
Conservación Energía.

$$E_i = \sum m_i \gamma_i c^2 \Rightarrow E_i = E_f \Rightarrow 10 \text{ kg} \cdot 1.25 + 5.625 \cdot \frac{5}{3} = m_3 \gamma_3$$

$$\Rightarrow m_3 = 21.875 \text{ kg} \quad \Rightarrow m_3 > m_1 + m_2 !!!$$

¿Cómo funciona la conservación?

- Y todo por pedir que c tiene que tener el mismo valor para todos los observadores inerciales.



Así funciona la Naturaleza

- **La Energía total se conserva**

$$\left. \begin{aligned} E^{\text{inicial}} &= \sum_j^{n^{\text{inicial}}} E_j^{\text{inicial}} = \sum_j m_j \gamma_j c^2 \\ E^{\text{final}} &= \sum_k^{n^{\text{final}}} E_k^{\text{final}} = \sum_k m_k \gamma_k c^2 \end{aligned} \right\} E^{\text{inicial}} = E^{\text{final}}$$

- **La cantidad de movimiento total se conserva**

$$\left. \begin{aligned} \vec{p}^{\text{inicial}} &= \sum_j^{n^{\text{inicial}}} \vec{p}_j^{\text{inicial}} = \sum_j m_j \gamma_j \vec{v}_j \\ \vec{p}^{\text{final}} &= \sum_k^{n^{\text{final}}} \vec{p}_k^{\text{final}} = \sum_k m_k \gamma_k \vec{v}_k \end{aligned} \right\} \vec{p}^{\text{inicial}} = \vec{p}^{\text{final}}$$



Comentario sobre unidades

- Es conveniente trabajar en otro sistema de unidades
- 1 eV es la energía ganada por un electrón en una diferencia de potencial de 1 V

$$E = qV \rightarrow E = (1.602 \times 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ V}) \rightarrow E = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

electronvolt

$$\Rightarrow 1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

meV

eV

keV

MeV

GeV

TeV

PeV

EeV

Microndas

R X

Partículas

R.C. Gal

Visible

Gamma

C. Galáctico

R.C.E.G.



Nuevas unidades

Magnitud	Ecuación	Unidad
Energía	E	eV
Cant. de movimiento	$p = E/c$	eV/c
Masa	$m = E / c^2$	eV/c ²

- A veces, se usan las unidades naturales:

$$h = c = 1$$

- Entonces, todo se mide en eV

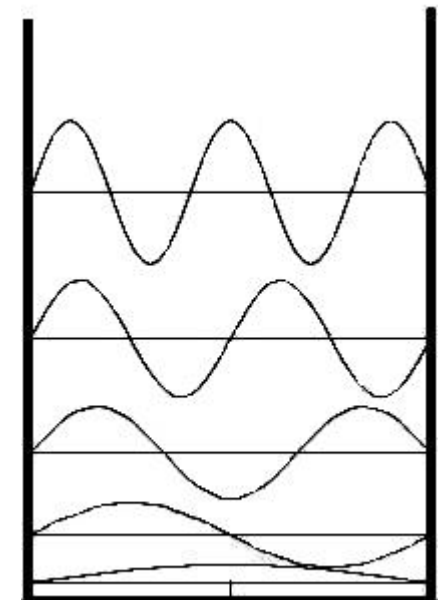
Y la cuántica?

- También tenemos

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \rightarrow E = -\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

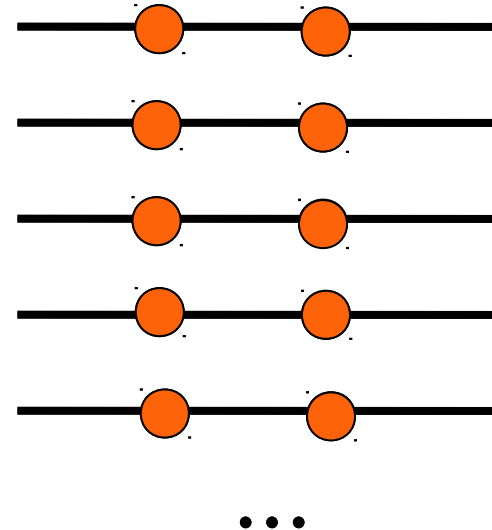
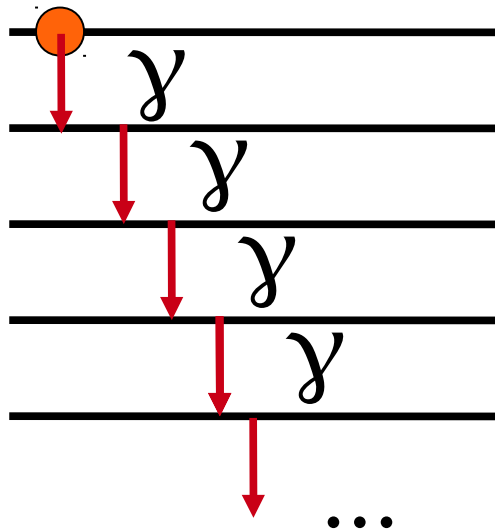
- La relatividad anticipa estados con energía total negativa... → **PROBLEMAS**
- Y encima son infinitos → **MÁS PROBLEMAS**
- Partícula en una caja

$$E_n = \left(\frac{h^2}{8mL^2} \right) n^2$$



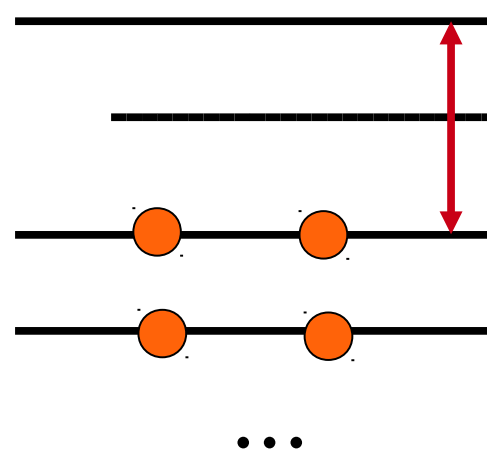
- Dirac (1928) obtiene la versión relativista de la ec. de Schrödinger y observa ese problema
- Propone que todos los estados de energía negativa están ocupados
- Los electrones obedecen el principio de exclusión de Pauli
- Solución: el “vacío” es el estado en el cual todos los estados de energía negativos están llenos

- No hay colapso porque no hay estados vacíos



$E < 0$

$$E = 2mc^2 = 1.022 \text{ MeV}$$



$E > 0$

$E < 0$

$$E = \pm mc^2$$



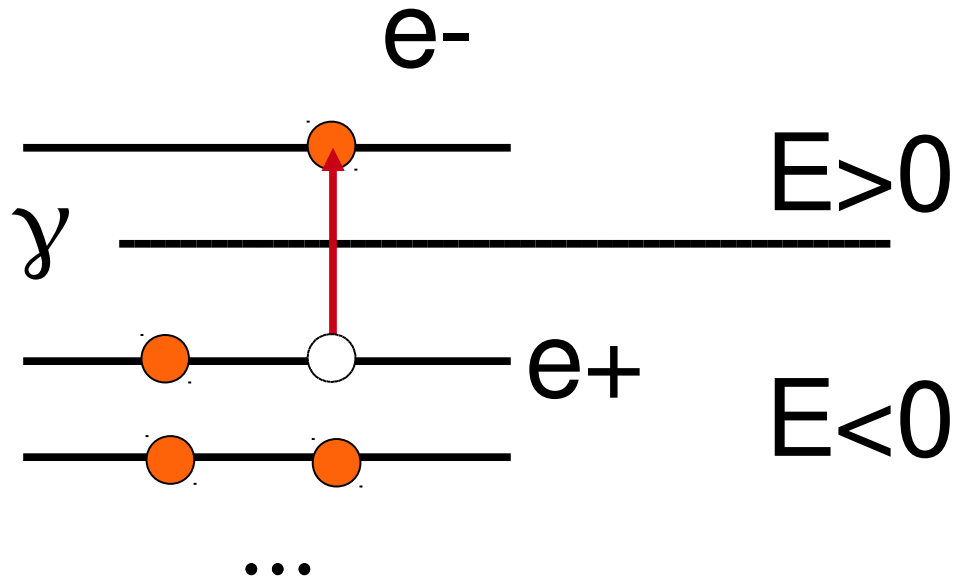
Algunas cosas

- El espacio está lleno con infinitas partículas
- Energía infinita
- Energía de punto 0 (como el oscilador armónico)

No olvidar que son Modelos

Materia-Antimateria

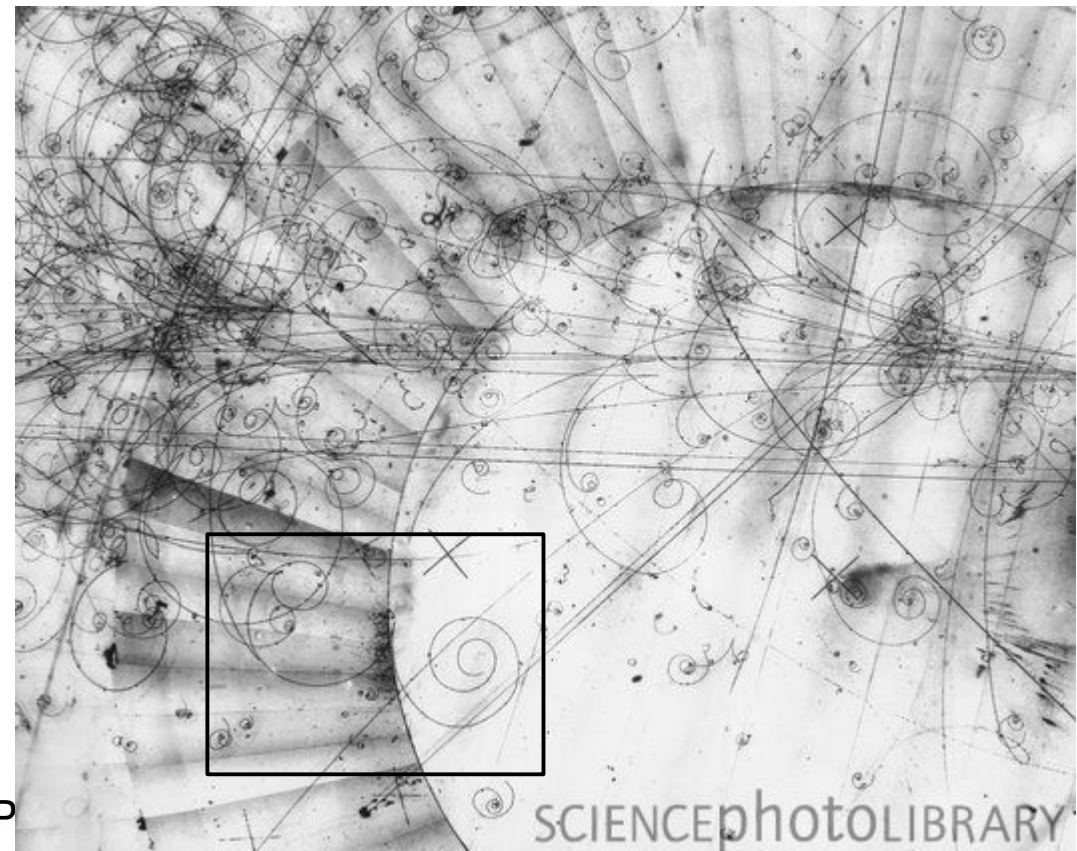
- En una interacción EM (scattering) es posible sacar un electrón del mar
- El “hueco” se ve como un electrón positivo



$$E_{\gamma} \geq 1.022 \text{ MeV}$$

Sep 12, 2017

H. Asorey - IP





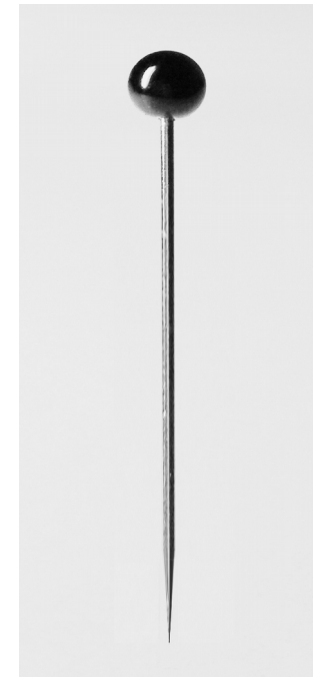
En esa época

- Se conocían cuatro partículas:
 - Protón (+)
 - Electrón (-)
 - Fotón (0) ← interacciones cargadas
 - Neutrón (0)
- Si existía el antielectrón, ¿por qué no un antiprotón?
- La idea del antineutrón es más compleja (sin carga)



El modelo atómico

- Un simple modelo atómico
- Radio atómico: $a_0 \sim 53 \text{ pm} = 53000 \text{ fm}$
- Radio núcleo: $f_0 \sim 1.2 \text{ fm}$
- Relación: ~ 44200
- Núcleo $4 \text{ mm} \rightarrow$ electrones 177 m
- La naturaleza es esencialmente vacío





El núcleo es estable

- Tiene que haber una fuerza más fuerte que la fuerza eléctrica

$$F_E = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{e^2}{f_0^2}$$

$$F_E = 160 N$$

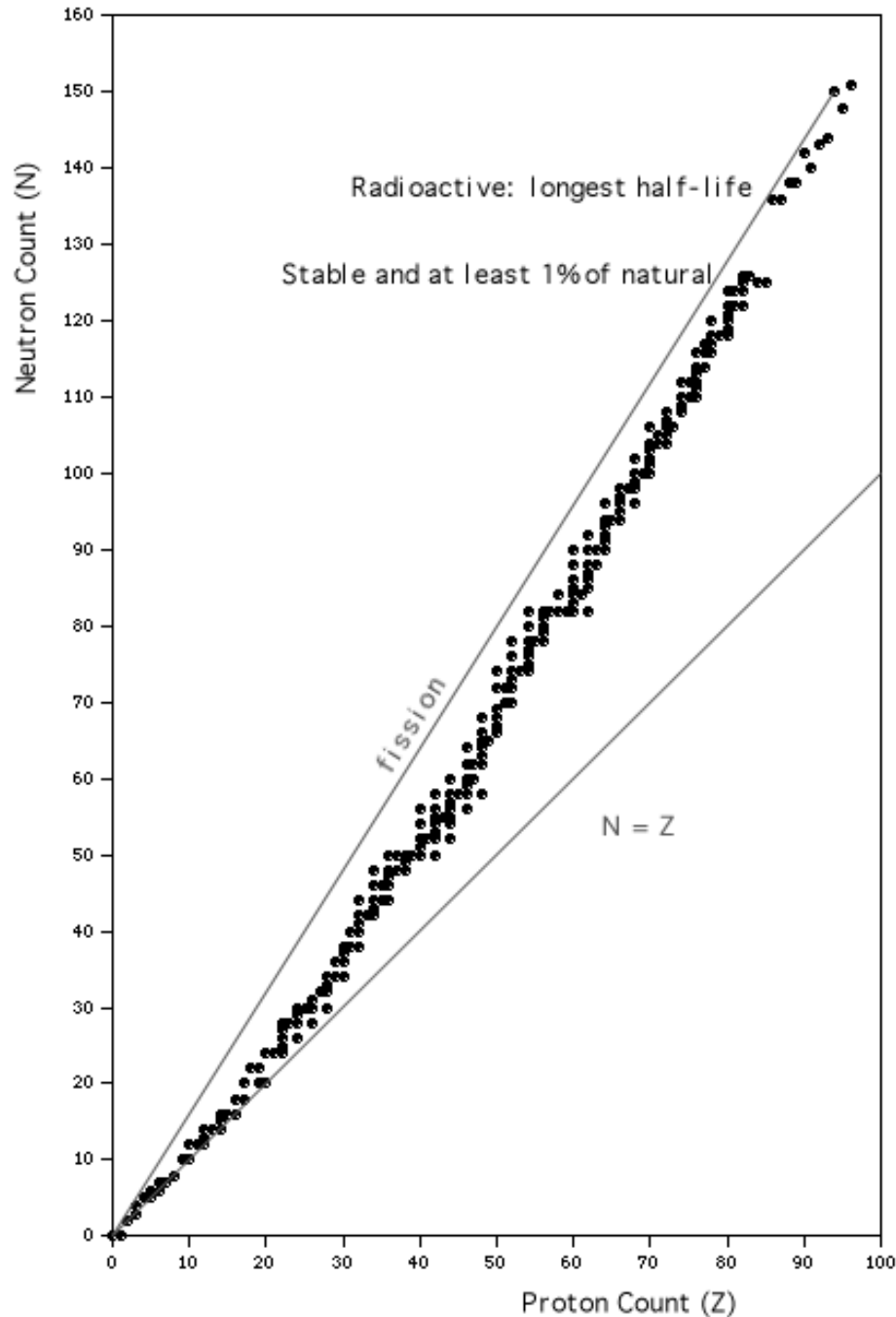
$$F_E = 1.2 \times 10^{36} F_G$$

Ayuda: En general el núcleo tiene más neutrones que protones

$$A = Z + N$$

$$N \geq Z$$

Tabla de nucléidos

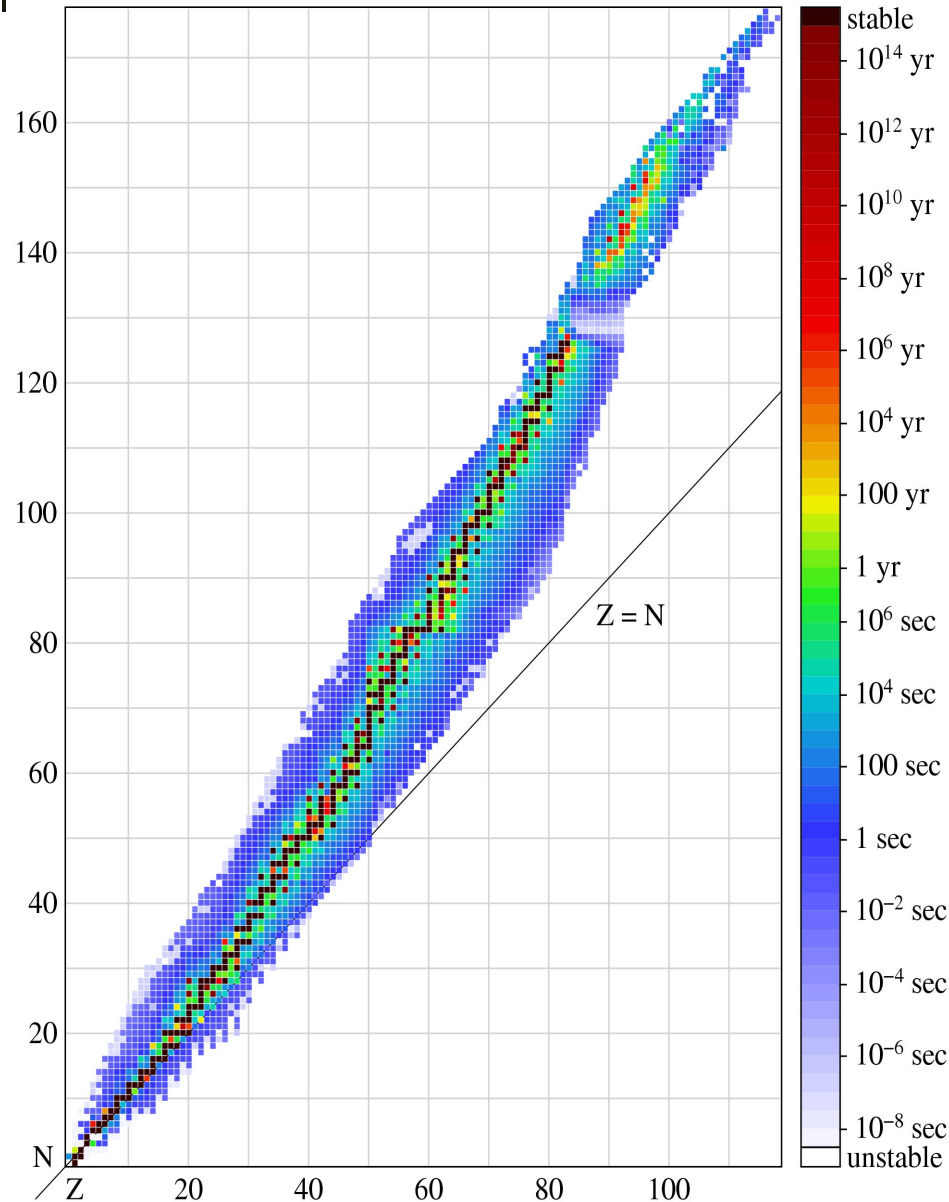


- $F_E \sim Z^2$
- Neutrones sin carga
- ${}^1\text{H}_1$ ${}^4\text{He}_2$ ${}^{238}\text{U}_{92}$

Los neutrones ayudan a la cohesión

Fuerza Fuerte
Matrimonio

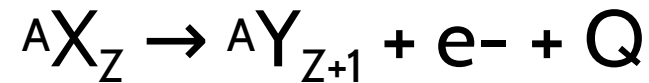
Emisión radioactiva de electrones



Sep 12, 2017

H. Asorey - IPAC 2017 - 05

- Reacción nuclear

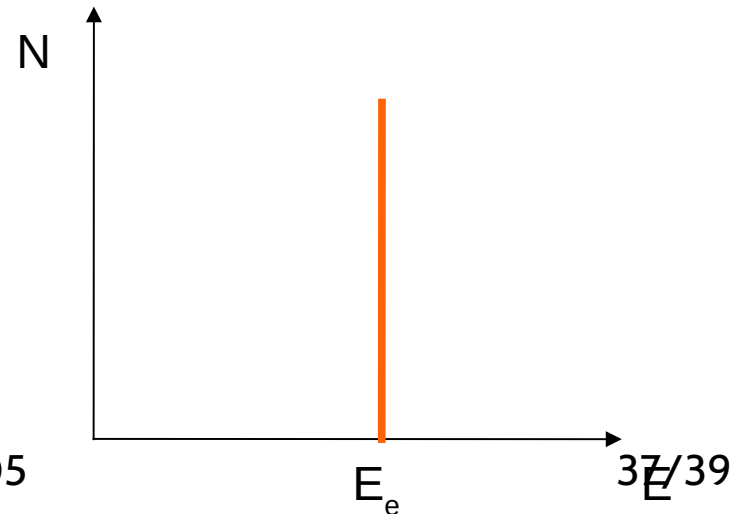


P. ej:



$$m_{\text{Bi}} c^2 = m_{\text{Po}} c^2 + m_e c^2 + Q$$

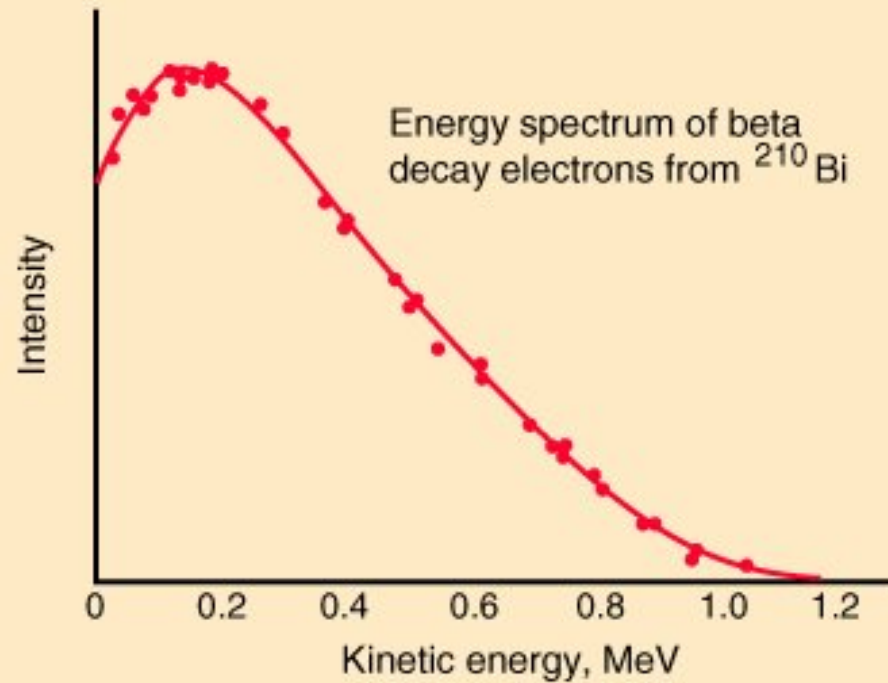
$$Q = (m_{\text{Bi}} - m_{\text{Po}} - m_e) c^2 \simeq E_e$$



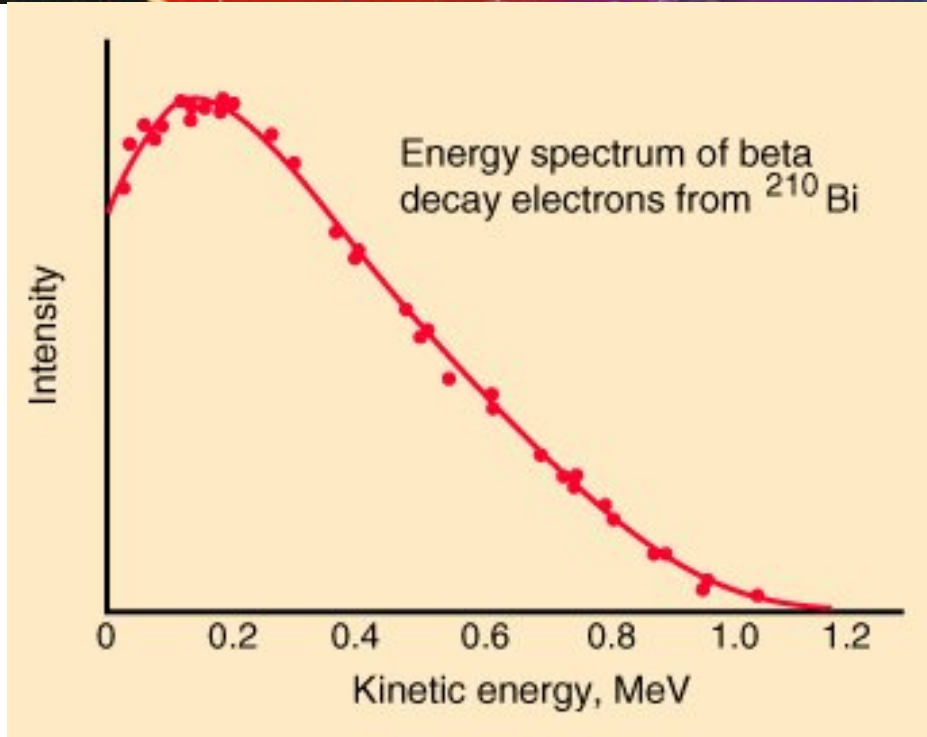
37/39



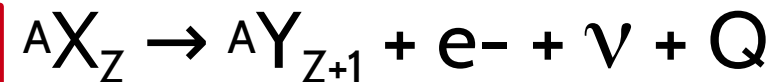
La medición



La medición



- Oops...
- Bohr: La energía no se conserva
- Pauli: La energía se conserva si existe otra partícula:



$$Q = (m_{Bi} - m_{Po} - m_e - m_\nu) c^2$$

$$Q \simeq E_e + E_\nu$$