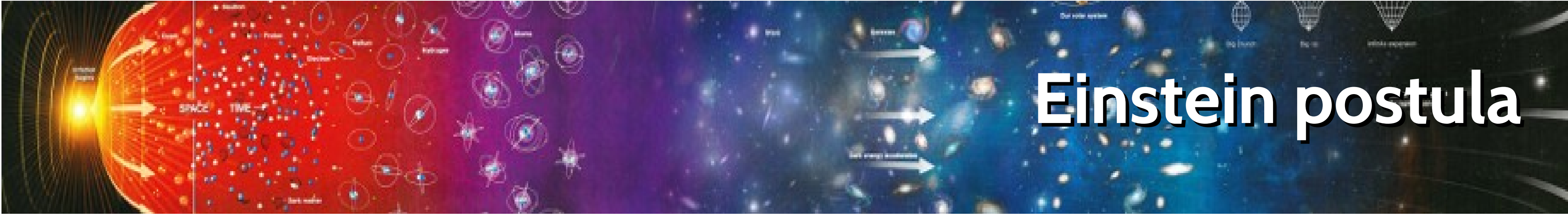
Universidad Nacional de Río Negro
Int. Partículas, Astrofísica & Cosmología - 2016

- **Unidad** 01 – Relatividad
- **Clase** U01 C03
- **Fecha** 05 Sep 2018
- **Cont** Dinámica relativista
- **Cátedra** Asorey
- **Web** https://asoreyh.github.io/unrn-ipac/
- **Youtube** https://goo.gl/UZJzLk



Einstein postula

- **El principio de la relatividad:**

  Las leyes que gobiernan los cambios en los estados de los sistemas físicos son iguales para todos los observadores inerciales

- **El principio de la invarianza de la velocidad de la luz**

  La luz se propaga en el vacío siempre con la misma velocidad, sin importar la velocidad de la fuente emisora de luz

... y paso a la historia

Cambio de paradigma 2

- La luz también se mueve en el espacio, entonces:

$$\vec{c}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \text{ y } \vec{c}\,'=\frac{\Delta\vec{r}\,'}{\Delta t}$$

- Pero por el segundo postulado

$$\vec{c}=\vec{c}\,'\rightarrow\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta\vec{r}\,'}{\Delta t}$$

- Pero los desplazamientos “no deberían” ser iguales, ya que un sistema se mueve respecto al otro...
- ... o los intervalos temporales... (!!!)

Transformaciones de Lorentz

- Las ecuaciones que transforman dos marcos de referencia, y que verifican ambos postulados, son

Recordar que estas transformaciones son válidas para un sistema S' que se mueve con velocidad *v* en la dirección *x*, entonces K=(t,x,y,z) y K'=(t',x',y,z), ya que z'=z e y'=y

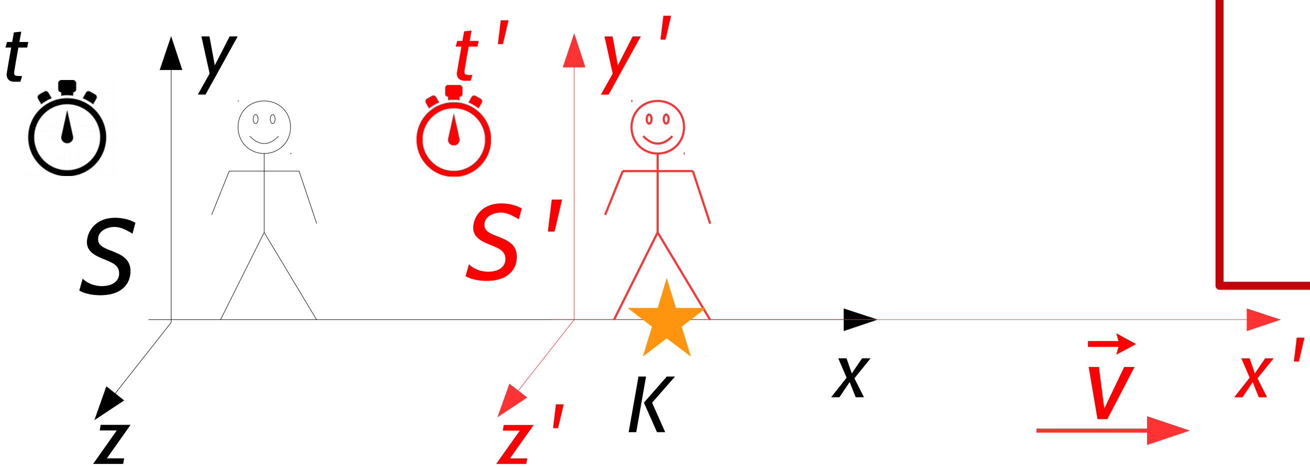
$$t' = \gamma\left(t - \frac{1}{c^2} v x\right)$$

$$x' = \gamma\left(x - v t\right)$$

$$y' = y$$

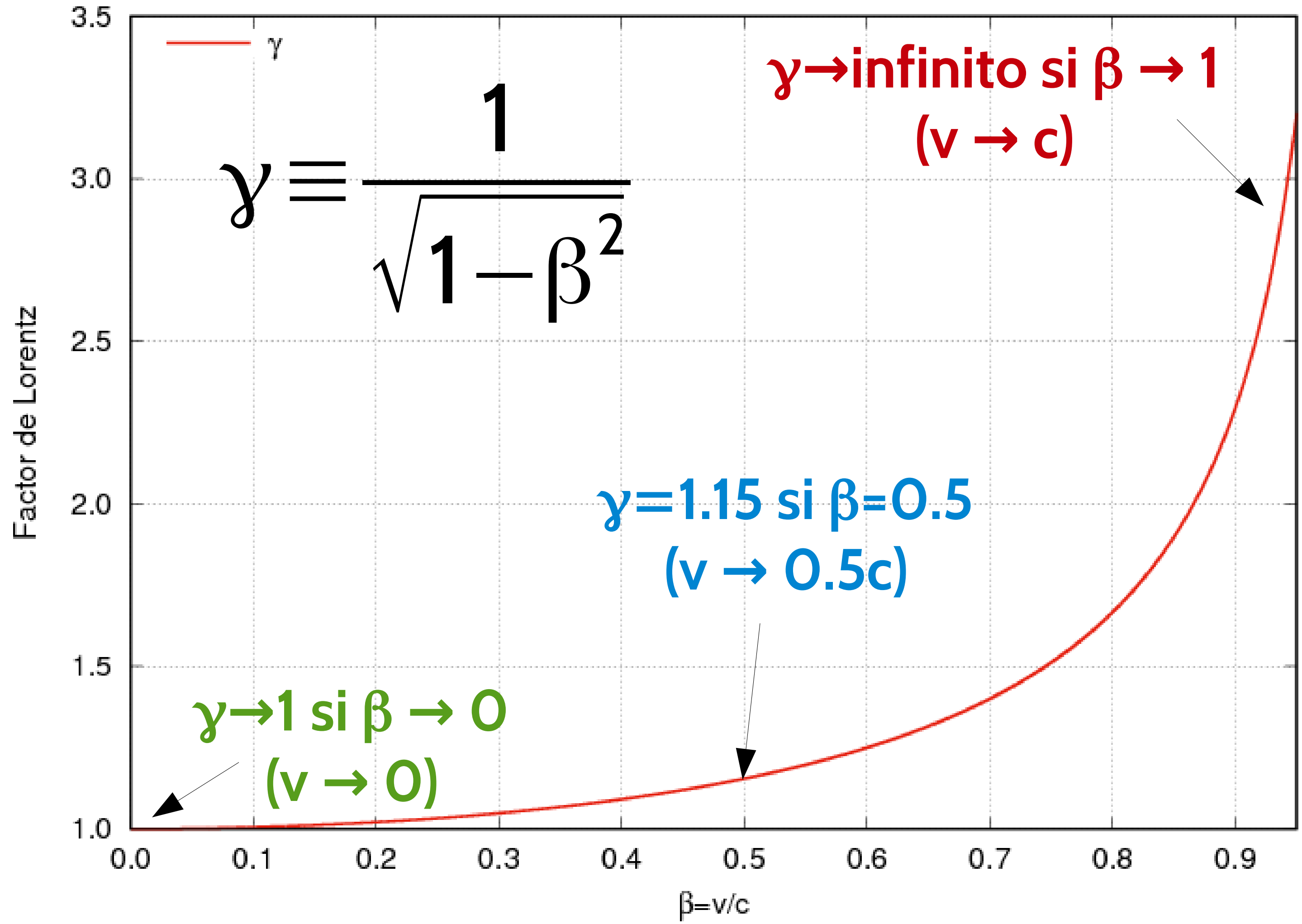
$$z' = z$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta \equiv \frac{v}{c}$$



Factor de Lorentz

- Estudiemos la función gamma, ecuación (10)



La velocidad de la luz es constante

- Casos límites.

- Sea $u \to 0$ (objeto lento) $\Rightarrow$

$$u' = \frac{u - v}{1 - \cancel{\frac{uv}{c^2}}^{\,0}} \Rightarrow \boxed{u' = u - v}$$

Galileo si $u \to 0$ $(u \ll c)$

Si u << c → u' = u - v
¡Recupero Galileo! :-)

- Sea $u = c$ (luz) $\Rightarrow$

$$u' = \frac{c - v}{1 - \frac{\cancel{c}v}{c^{\cancel{2}}}} = \frac{c\,\cancel{(1 - v/c)}}{\cancel{(1 - v/c)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{u' = c}$$

Segundo principio!

Si u = c → u'=c
!Segundo postulado! :-)

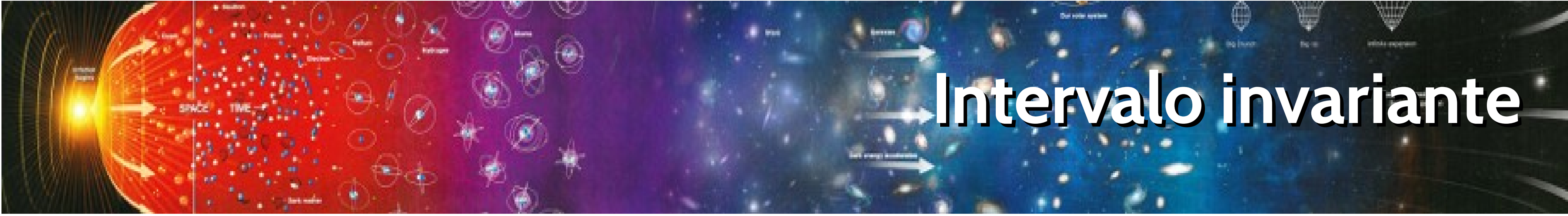
Dilatación temporal y Contracción espacial

- El lapso de tiempo entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \quad \text{para eventos} \quad \Delta x = 0$$

- La distancia espacial entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} \quad \text{para eventos} \quad \Delta t' = 0$$



Intervalo invariante

- La velocidad de la luz es invariante, entonces:

$$c=\frac{dr}{dt}=\frac{dr'}{dt'} \text{ con } r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \text{ y } r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$$

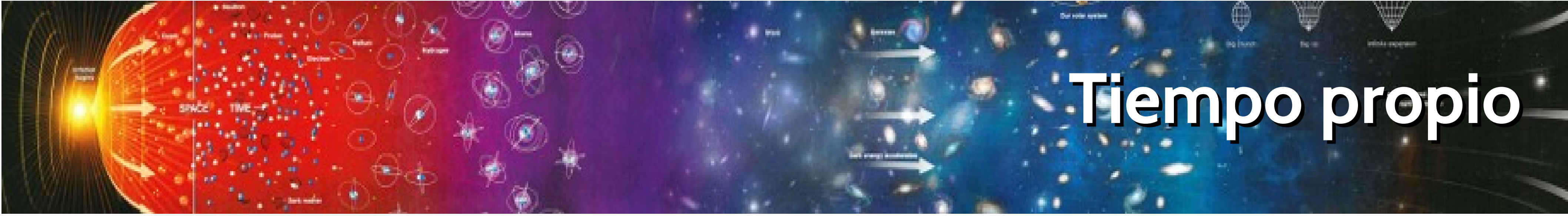
- Luego, para un fotón: $c\,\Delta t=\Delta r \rightarrow c^2(\Delta t)^2=(\Delta r)^2$

Convención (+,-,-,-)

$$s^2=c^2(\Delta t)^2-(\Delta x)^2-(\Delta y)^2-(\Delta z)^2$$
$$s'^2=c^2(\Delta t')^2-(\Delta x')^2-(\Delta y')^2-(\Delta z')^2$$

- La invariancia de la velocidad de la luz implica (**probarlo**):

$$c=c' \Leftrightarrow s^2=s'^2$$



Tiempo propio

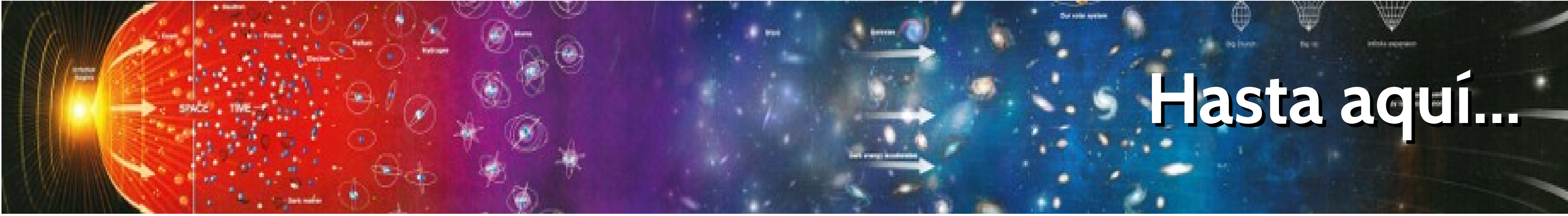
- Dado que cada marco de referencia tiene su propio tiempo, **podemos definir un marco de referencia adherido a un objeto en movimiento**.
- **El tiempo de ese marco es el tiempo que "percibe" un observador que se mueve junto con el objeto**. Llamaremos a este marco "**comóvil**".
- El tiempo del marco comóvil es el tiempo propio: es independiente de las coordenadas.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 = ds'^2 = c\, d\tau^2$$

$$\Rightarrow \boxed{c^2 dt^2 - dr^2 = c^2 d\tau^2}$$

Tiempo propio

$$dt = \gamma\, d\tau$$



Hasta aquí...

- Los postulados de Einstein implican cambios profundos en la concepción de la Naturaleza.
  - Estos afectan nuestra percepción de distancia y lapso temporal, de espacio y tiempo.
- Las transformaciones de Lorentz indican como transforman las leyes de la física entre dos marcos de referencia inerciales.
  - Son las transformaciones válidas entre marcos de referencia.
- La mecánica Newtoniana es una aproximación válida para velocidades bajas respecto a la velocidad de la luz.
  - ¿Cómo puede ser generalizada?

Diálogo entre dos mundos: movimiento y fuerzas

- Newton: - Un cuerpo sujeto a una fuerza constante *F* durante un tiempo *t* tendrá una velocidad *v=(F/m)t* que aumenta con *t*
- Einstein: - Pero Isaac, ¡v<c siempre!
- N: ¿Qué? Vos estás equivocado Alberto ¿sino que pasa con mi 2da ley?

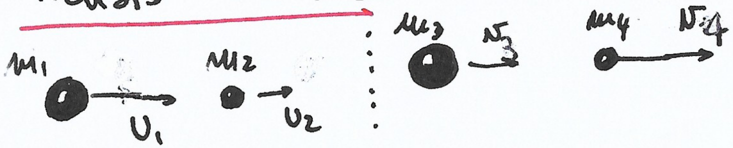
$$\vec{F}=\frac{d\,\vec{p}}{dt}=\frac{d\left(m\,\vec{v}\right)}{dt}$$

- E: ¡Ahh! ¿Pero cuál *t* estarás usando en tu derivada? ¿En que marco de referencia?
- N: ¿Cómo? ¿el tiempo no es absoluto? ¿Acaso *t* no es el mismo para todos los observadores inerciales?
- E: Jejejeje.... (sonrisa con mirada pícara)

Pasen y vean

Colisiones (u es inicial, v es final, puede haber cambio de masa).

Análisis Clásico



En el marco S, conservación de $\vec{p}$ implica

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_3 v_3 \quad m_4 v_4 \qquad (1)$$

En S'

$$m_1 u_1' + m_2 u_2' = m_3 v_3' + m_4 v_4' \qquad (2)$$

y $v_3' = v_3 - V$ (3) (V es la vel. relativa entre S y S') ⇒

En S'

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 - (m_1+m_2) V = \underbrace{m_3 v_3 + m_4 v_4}_{(1)} - V(m_3+m_4)$$

⇒ $(m_1+m_2) V = (m_3+m_4) V$ y para todo V:

(4) $\boxed{m_1 + m_2 = m_3 + m_4}$ Conservación de la masa.

La conservación de la cantidad de movimiento implica la conservación de la masa

Análisis Relativista

Imaginemos que en el caso relativista $\vec{p} = m\vec{v}$ y $\vec{p}' = m v'$ (suponemos por ahora Post. 1 y $m = m'$) ⇒ (1) y (2) se mantienen. Cambiando (3) por la relativista:

$$v_3' = \frac{v_3 - V}{1 - v_3 V/c^2} \qquad (5)$$

⇒ reemplazando en (2):

$$m_1 \frac{u_1 - V}{1 - u_1 V/c^2} + m_2 \frac{u_2 - V}{1 - u_2 V/c^2} = m_3 \frac{v_3 - V}{1 - v_3 V/c^2} + m_4 \frac{v_4 - V}{1 - v_4 V/c^2}$$

¿y ahora? V no se cancela, entonces esta ecuación (conservación de la cant. de movimiento) ¡no vale en general! ó tenemos que cambiar las masas para ajustar.

La definición estándar no se verifica.

Principios de conservación

- En una colisión, el análisis relativista usando la ley de suma de velocidades,

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} \qquad u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad ,$$

resulta qué:

  - o bien no se conserva la cantidad de movimiento;
  - o bien la cantidad de movimiento está mal definida en el caso relativista

Clásico: $\vec{p} = m\vec{v}$, Relativistiva $\vec{p} = ?$

La conservación de *p* es un principio básico

- Al igual que nos pasó con *u*, debemos recordar lo que dijo Alberto: al derivar, el tiempo depende del marco de referencia. Antes eso no nos preocupaba:

Clásico: $\vec{p}=\frac{d}{dt}(m\vec{r})$ y $\vec{p}\,'=\frac{d}{dt}(m\vec{r}\,')$

Correcto: $\vec{p}=\frac{d}{dt}(m\vec{r})$ y $\vec{p}\,'=\frac{d}{dt'}(m\vec{r}\,')$

- Y como todos los marcos son equivalentes, ¡podemos usar el marco comovil!

Cant. de movimiento relativista

$$\boxed{\vec{p}=m\frac{d\vec{r}}{d\tau}}$$

Magia algebráica (como ejercicio)

Definición de $\vec{p}$: $\boxed{\vec{p} = m\, d\vec{r}/d\tau}$

Pero ¿qué es $(d\vec{r}/d\tau)$? Recordando:

$dt = \gamma\, d\tau \Rightarrow dt/d\tau = \gamma \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{p}} = m\frac{d\vec{r}}{d\tau}\cdot\frac{dt}{dt} = m\frac{d\vec{r}}{dt}\,\frac{dt}{d\tau} = \boxed{m\vec{v}\gamma}$$

Donde $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ y $\beta = |\vec{v}|/c$

$\Rightarrow \boxed{\vec{p} = m\vec{v}\gamma}$

Definimos $\gamma_i := (1-\beta_i^2)^{-1/2}$ y $\beta_i = v_i/c \Rightarrow$

En S:

$$m_1 v_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2 v_2 = m_3 v_3 \gamma_3 + m_4 v_4 \gamma_4$$

En S':

$$m_1 v_1' \gamma_1' + m_2 v_2' \gamma_2' = m_3 v_3' \gamma_3' + m_4 v_4' \gamma_4'$$

Magia Algebráica (Problema en la guía):

$$\boxed{m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 = m_3\gamma_3 + m_4\gamma_4}$$

Es una cantidad conservada dentro de la conservación del momento.

- Con la nueva definición de p,

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v}$$

- aparece una nueva magnitud conservada

$$m\gamma = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

- m es la masa del objeto
- Notar que si v>0, entonces mγ>m

Interpretandomos el nuevo invariante... Richard Feynman dijo:

- *"For those who want to learn just enough about it so they can solve problems, that is all there is to the [special] theory of relativity – it just changes Newton's laws by introducing a correction factor to the mass"*
- Luego:

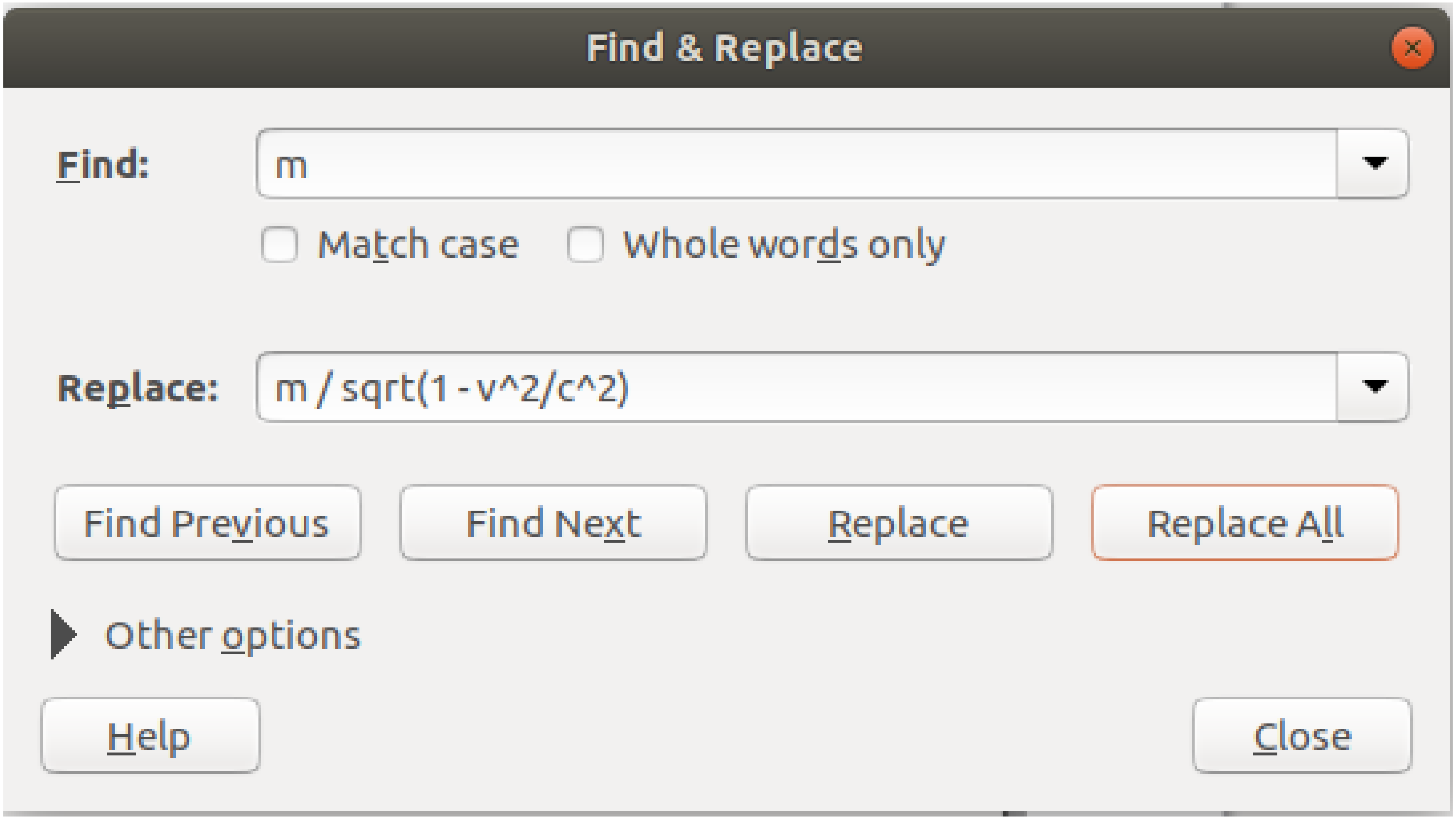
$$\vec{F}=\frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt}$$

- donde

$$m\rightarrow m\gamma=\frac{m}{\sqrt{1-\beta^{2}}}$$

Aprendiendo relatividad en Word

- Search & replace (CTRL+F)



- Serie de Taylor para

$$(1+\epsilon)^n = 1 + n\epsilon + \frac{1}{2}n(n-1)\epsilon^2 + \cdots$$

- y tenemos:

$$\gamma = \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \Rightarrow \begin{array}{l} n=-1/2 \\ \epsilon = -\beta^2 \ll 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{3}{8}\beta^4 + \cdots$$

- Entonces para nuestro invariante tenemos:

$$\Rightarrow \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq m + \frac{1}{2}m\beta^2 - \frac{3}{8}m\,\beta^4 + \cdots$$

$$\Rightarrow \gamma m \simeq m + \frac{1}{2}m\frac{v^2}{c^2} - \frac{3}{8}m\, v^4/c^4$$

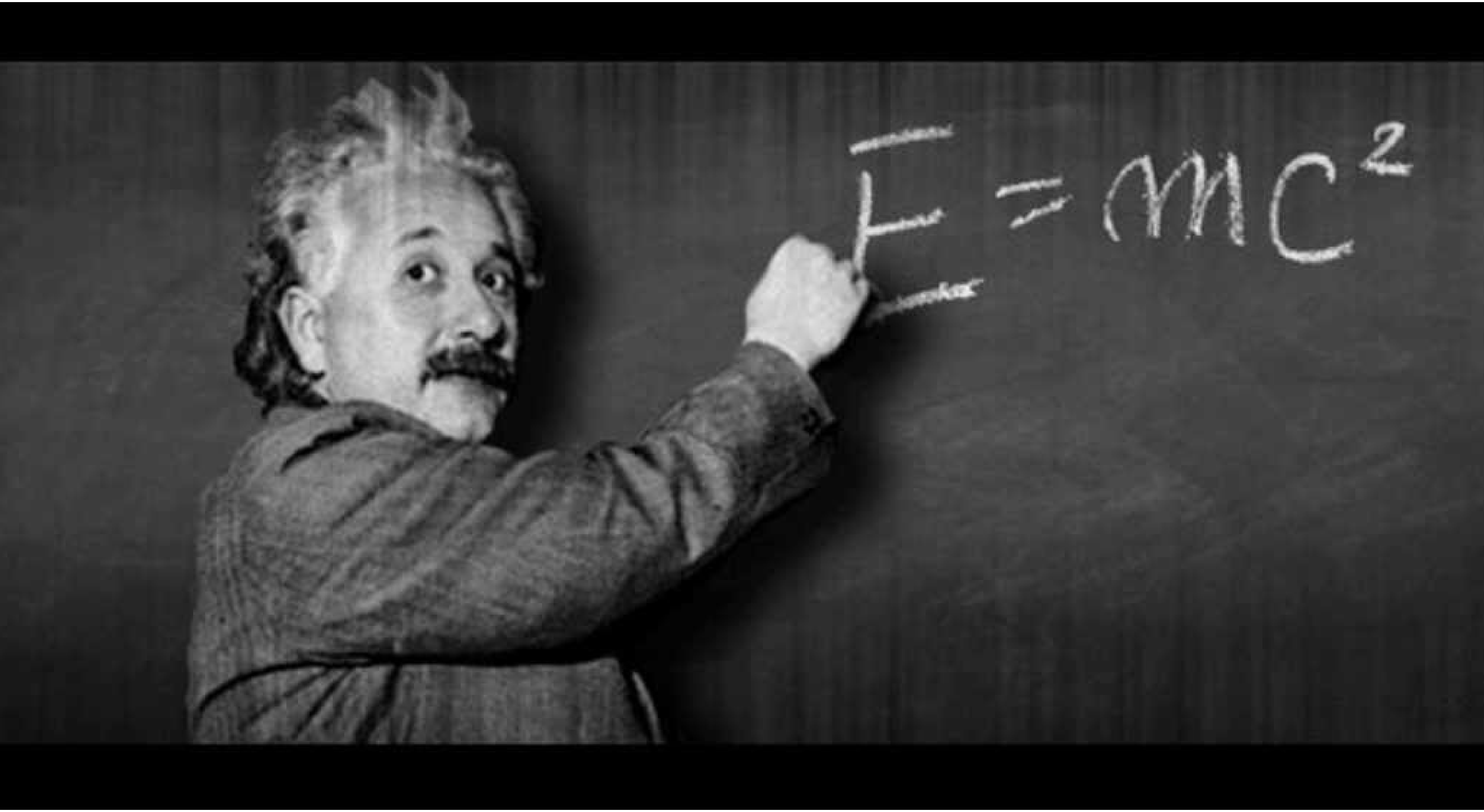
- Multiplicando ambos lados por c^2:

$$\gamma m c^2 \simeq m c^2 + \frac{1}{2}m\frac{v^2}{\cancel{c^2}}\cdot\cancel{c^2} - \frac{3}{8}m v^4/c^{\cancel{4}\,2}\cdot\cancel{c^2}$$

- y descartando el término $v^4/c^2 = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\gamma m c^2 \simeq \underbrace{m c^2}_{\text{energía}} + \underbrace{\frac{1}{2}m v^2}_{\text{Energía cinética}}} \Rightarrow \boxed{\gamma m c^2 = E}$$

Gracias Isaac, seguí participando....



Una nueva magnitud conservada

- Hemos visto que al aplicar los principios relativistas y pedir conservación de la cantidad de movimiento, una nueva magnitud conservada aparece naturalmente:

La energía se conserva

$$\boxed{E=\gamma m c^2 \simeq m c^2 + \boxed{\frac{1}{2} m v^2}}$$

Energía cinética clásica

- Recordar que la energía de un cuerpo es $E=\gamma m c^2$
- $E=\frac{1}{2} m v^2$ es una aproximación válida si v<<c.

$$\boxed{E_K \equiv E - m c^2 = (\gamma - 1) m c^2}$$

Energía cinética
(en ausencia de otras interacciones)

Un nuevo invariante

Cant. de movimiento relativista: $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$

Energía total relativista: $E = \gamma m c^2$

Elevamos al cuadrado: $E^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \quad (1)$

$p^2 = \gamma^2 m^2 v^2 \Rightarrow p^2 c^2 = \gamma^2 m^2 v^2 c^2 \quad (2)$

Restando (1) - (2):

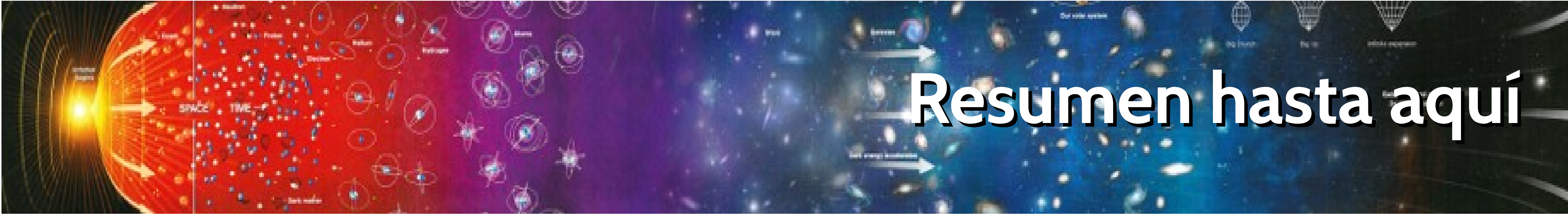
$$E^2 - p^2c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 - \gamma^2 m^2 c^2 v^2$$

Sacando factor común: $E^2 - p^2c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \left(1 - v^2/c^2\right) = \gamma^2 m^2 c^4 \overbrace{\left(1 - \beta^2\right)}^{1/\gamma^2}$

$$\Rightarrow E^2 - p^2c^2 = \cancel{\gamma^2} m^2 c^4 \cdot \frac{1}{\cancel{\gamma^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E^2 - p^2c^2 = m^2 c^4}$$

invariante relativista.
(no depende del Sist. de ref).



Resumen hasta aquí

- Cantidad de movimiento relativista (correcto siempre):

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

- Energía relativista (correcta siempre):

$$E = \gamma m c^2$$

- Un nuevo invariante relativista:

$$\boxed{E^2 - (p c)^2 = (m c^2)^2}$$

Invariante relativista

¿y si no la partícula no tiene masa?

- ¡No importa, tiene energía y tiene cantidad de movimiento!

$$m=0 \rightarrow E^2-(p\,c)^2=(m\,c^2)^2 \Rightarrow E^2-(p\,c)^2=0$$

Cantidad de movimiento de partículas sin masa

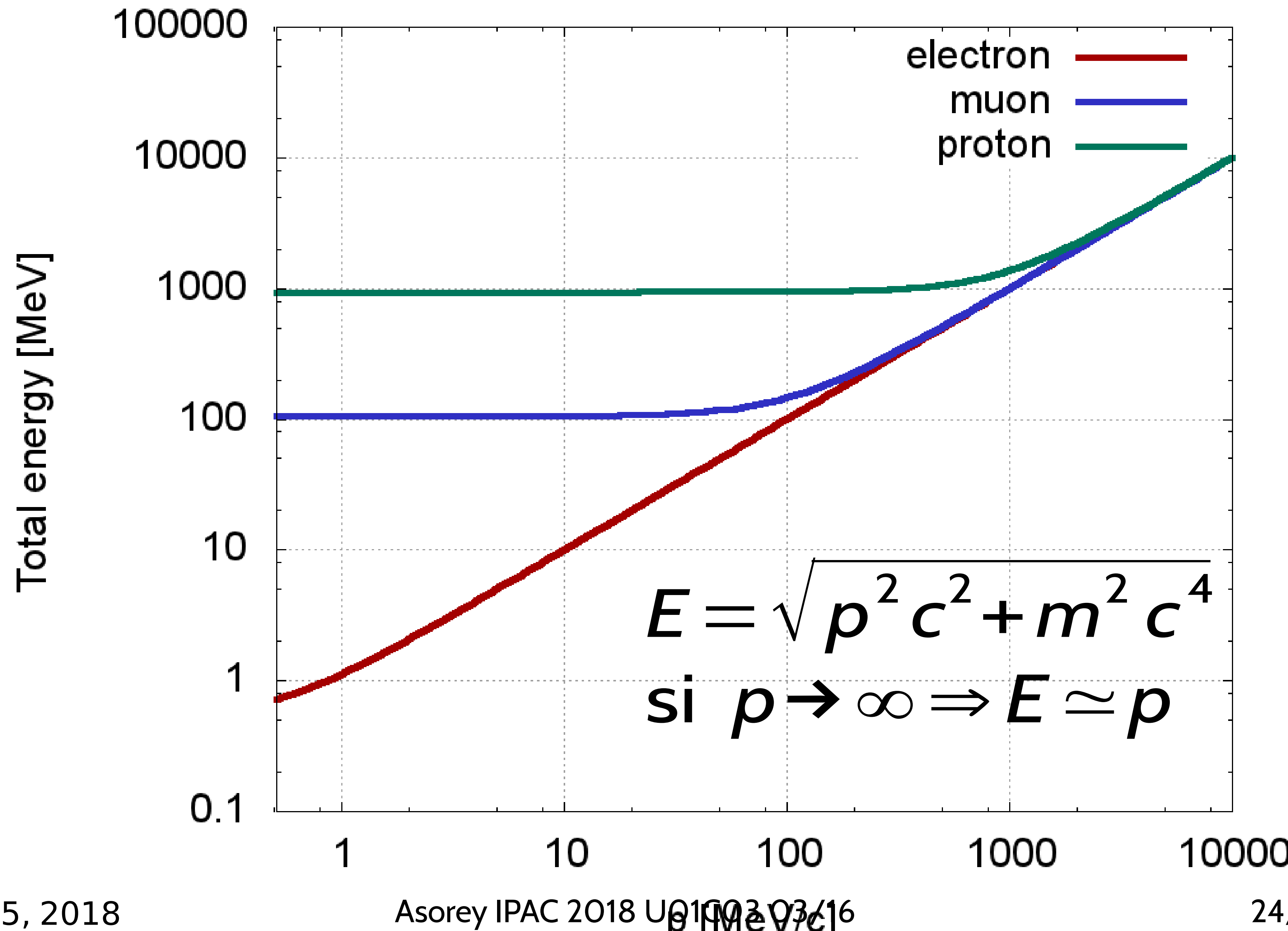
$$\boxed{E=p\,c}$$

- Por ejemplo, un fotón violeta:

λ=420 nm → E = hc/λ = 0.473 aJ (attojoules, atto=10^{-18})

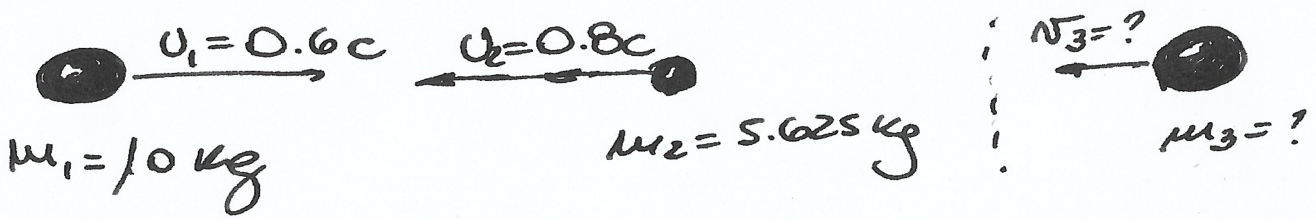
→ p = 1.58 x 10^{-27} kg m/s

Mil palabras



Choque inelástico: ¡¡$m_3 > m_1 + m_2$!! energía a masa

Colisión inelástica:



Clásicamente diríamos: $m_3 = 15.625$ kg y $v_3 = 0.01 > 0$.

Relativísticamente:

$$\gamma_1 = (1-\beta_1^2)^{-1/2} = 1.25 \quad \text{y} \quad \gamma_2 = (1-\beta_2^2)^{-1/2} = 5/3$$

$$\Rightarrow p_T^i = \sum p_i^i = \sum m_i \gamma_i u_i = 10\,\text{kg} \cdot 1.25 \cdot 0{,}6c + 5.625\,\text{kg} \cdot \tfrac{5}{3} (-0.8c)$$

$$\Rightarrow p_T^i = 7.5\,\text{kg}\,c - 7.5\,\text{kg}\,c \Rightarrow p_T^i = 0 \Rightarrow v_3 = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{p_f = 0.} \quad \text{y} \quad \gamma_3 = 1$$

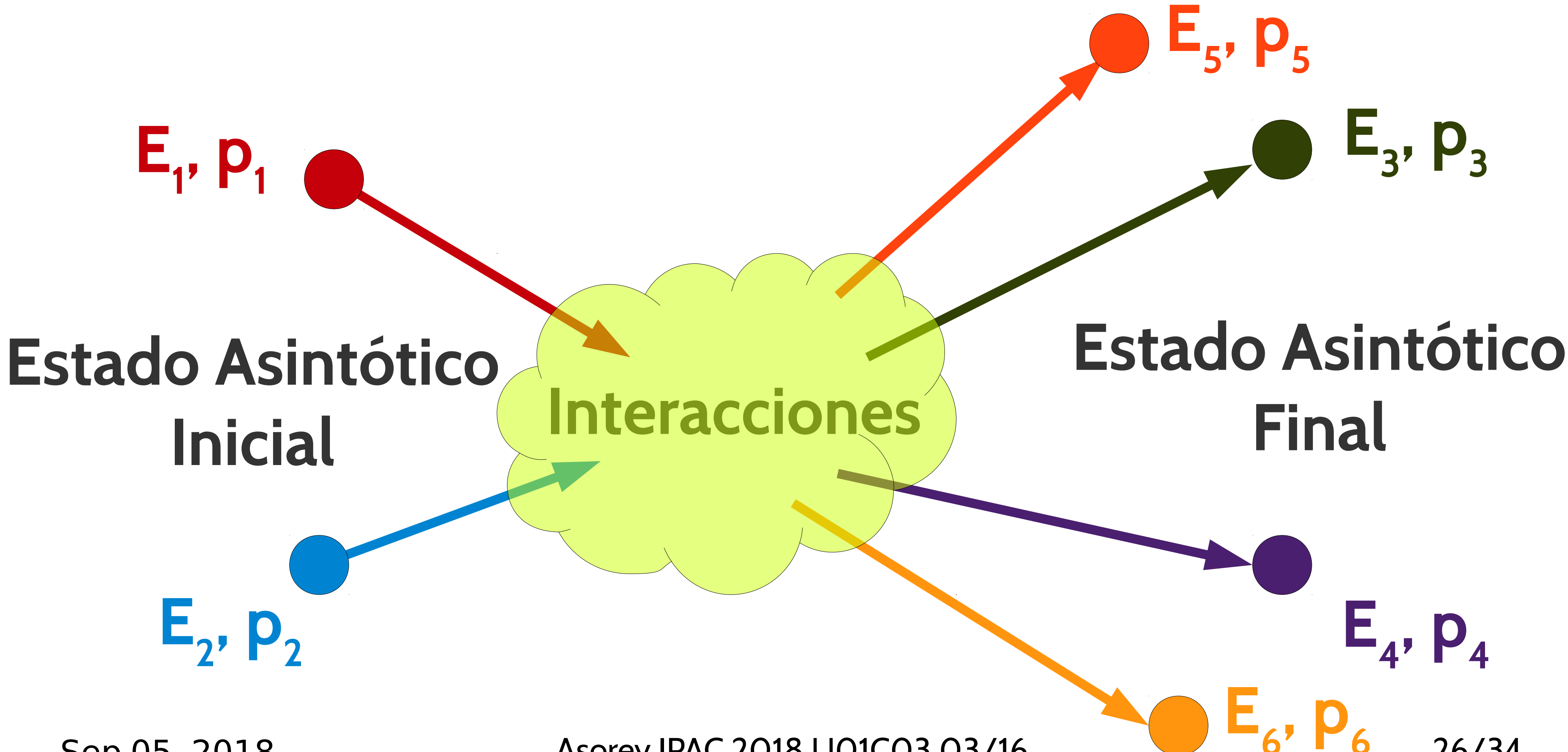
Conservación energía.

$$E_i = \sum m_i \gamma_i c^2 \Rightarrow E_i = E_f \Rightarrow 10\,\text{kg} \cdot 1.25 + 5.625 \cdot 5/3 = m_3 \gamma_3$$

$$\Rightarrow m_3 = 21.875\,\text{kg} \Rightarrow m_3 > m_1 + m_2 \;!!!$$

¿Cómo funciona la conservación?

- Y todo por pedir que *c* tiene que tener el mismo valor para todos los observadores inerciales.



Así funciona la Naturaleza

- **La Energía total se conserva**

$$\left.\begin{array}{l} E^{\text{inicial}}=\sum_{j}^{n^{\text{inicial}}} E_j^{\text{inicial}}=\sum_j m_j\gamma_j c^2 \\ E^{\text{final}}=\sum_{k}^{n^{\text{final}}} E_k^{\text{final}}=\sum_k m_k\gamma_k c^2 \end{array}\right\} E^{\text{inicial}}=E^{\text{final}}$$

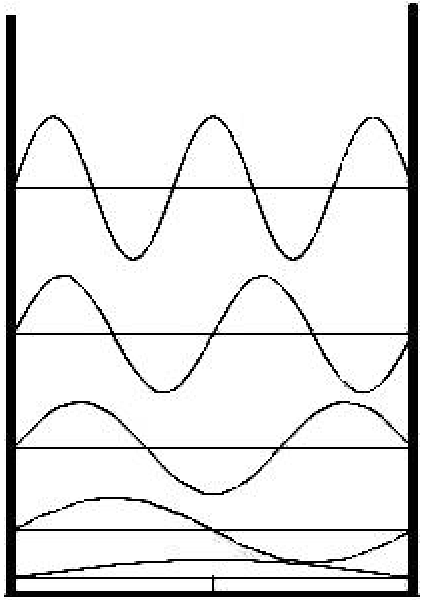
- **La cantidad de movimiento total se conserva**

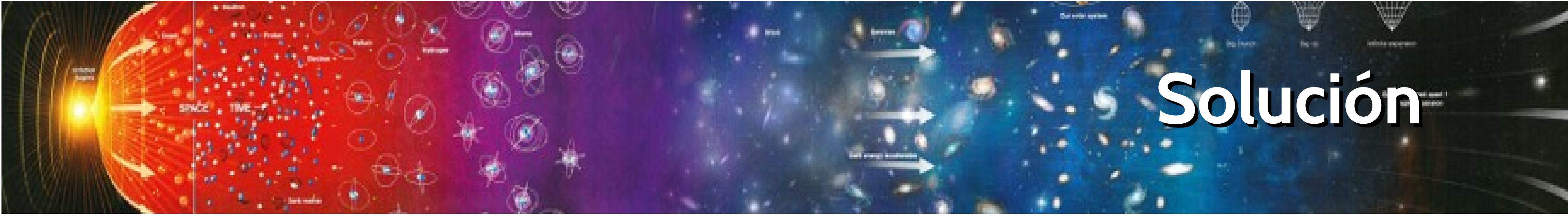
$$\left.\begin{array}{l} \vec{p}^{\,\text{inicial}}=\sum_{j}^{n^{\text{inicial}}} \vec{p}_j^{\,\text{inicial}}=\sum_j m_j\gamma_j \vec{v}_j \\ \vec{p}^{\,\text{final}}=\sum_{k}^{n^{\text{final}}} \vec{p}_k^{\,\text{final}}=\sum_k m_k\gamma_k \vec{v}_k \end{array}\right\} \vec{p}^{\,\text{inicial}}=\vec{p}^{\,\text{final}}$$

¿Cuántica + Relatividad?

- Del invariante $E^2-(pc)^2=(mc^2)^2 \rightarrow E^2=(pc)^2+(mc^2)^2 \rightarrow$
$$E=\pm\sqrt{(pc)^2+(mc^2)^2}$$
- La relatividad anticipa estados con energía total negativa... → **PROBLEMAS**
- Y encima son infinitos → **MÁS PROBLEMAS**
- Por ejemplo, para la partícula en una caja los estados están acotados a E>0:

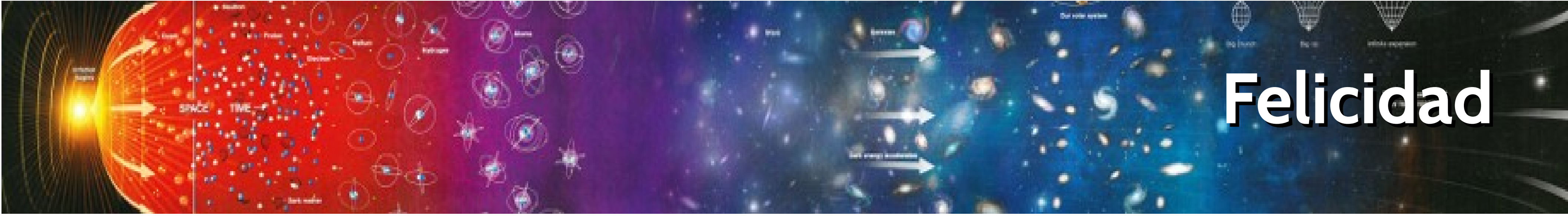
$$E_n=\left(\frac{h^2}{8mL^2}\right)n^2$$





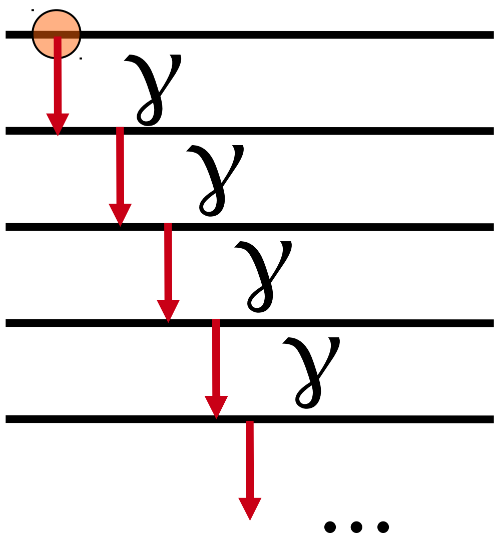
Solución

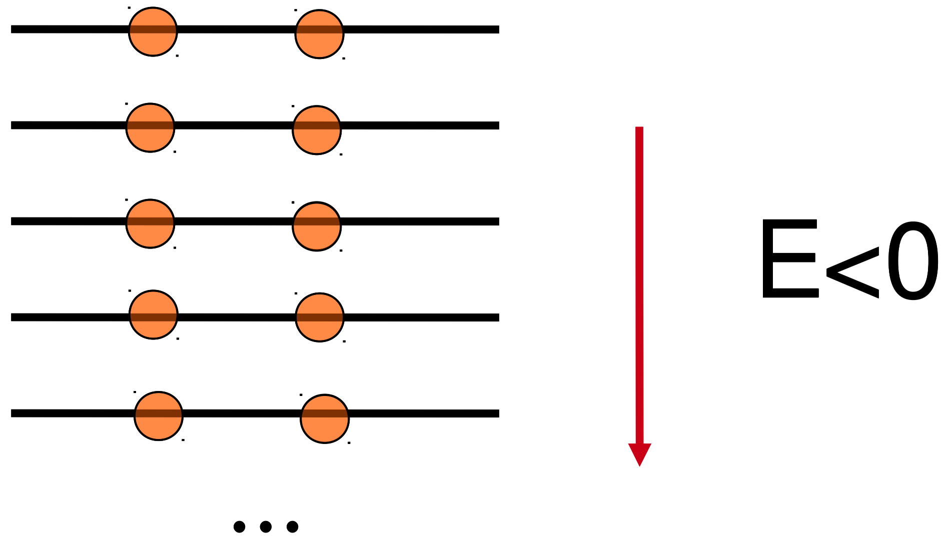
- Dirac (1928) obtiene la versión relativista de la ec. de Schrödinger y observa ese problema
- Propone que todos los estados de energía negativa están ocupados
- Los electrones obedecen el principio de exclusión de Pauli
- **Solución**
  el “**vacío**” es el estado en el cual todos los estados de energía negativos están “**llenos**”



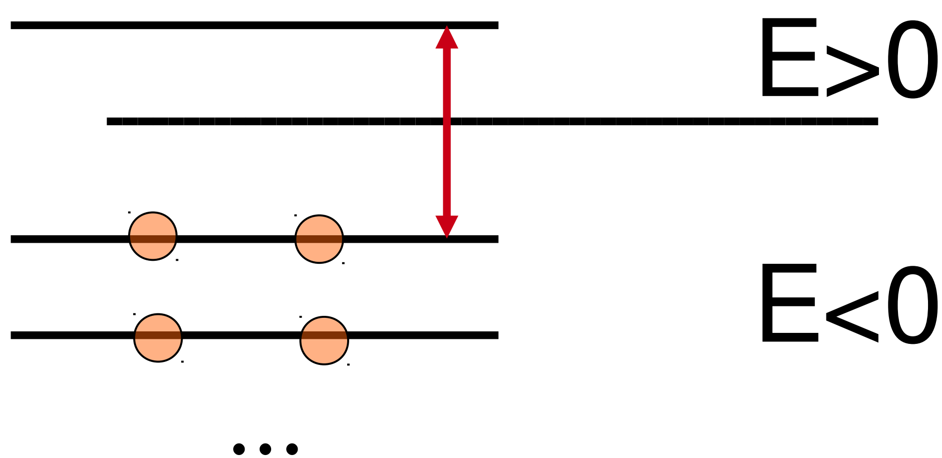
Felicidad

- No hay colapso porque no hay estados vacíos

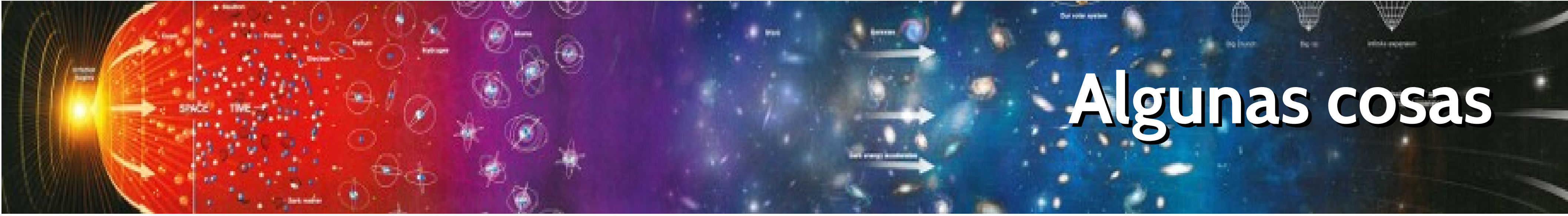




$$E = 2mc^2 = 1.022\,\mathrm{MeV}$$



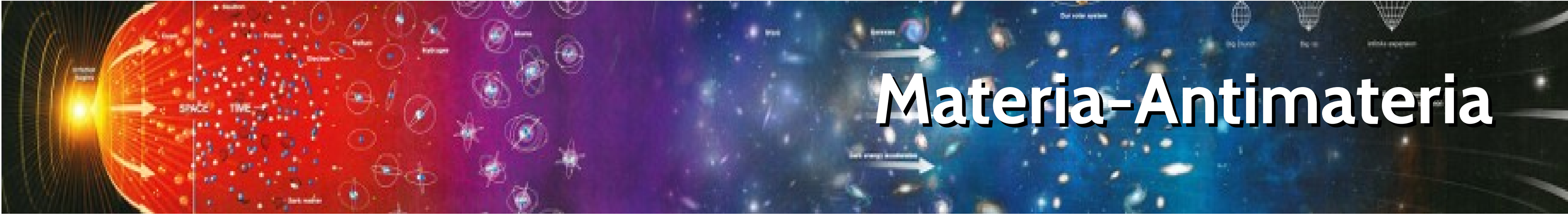
$$E = \pm mc^2$$



Algunas cosas

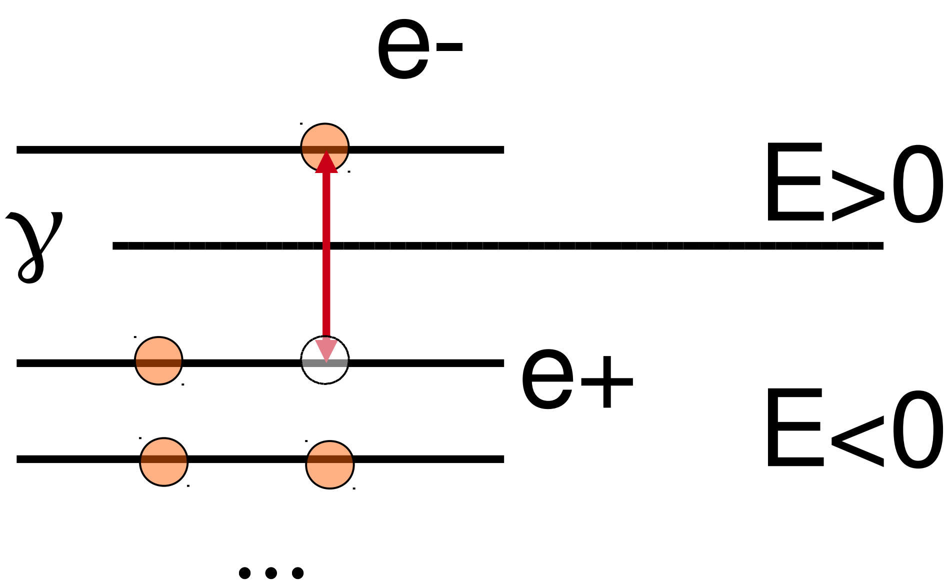
- El espacio está lleno con infinitas partículas
- Energía infinita
- Energía de punto 0 (como el oscilador armónico)

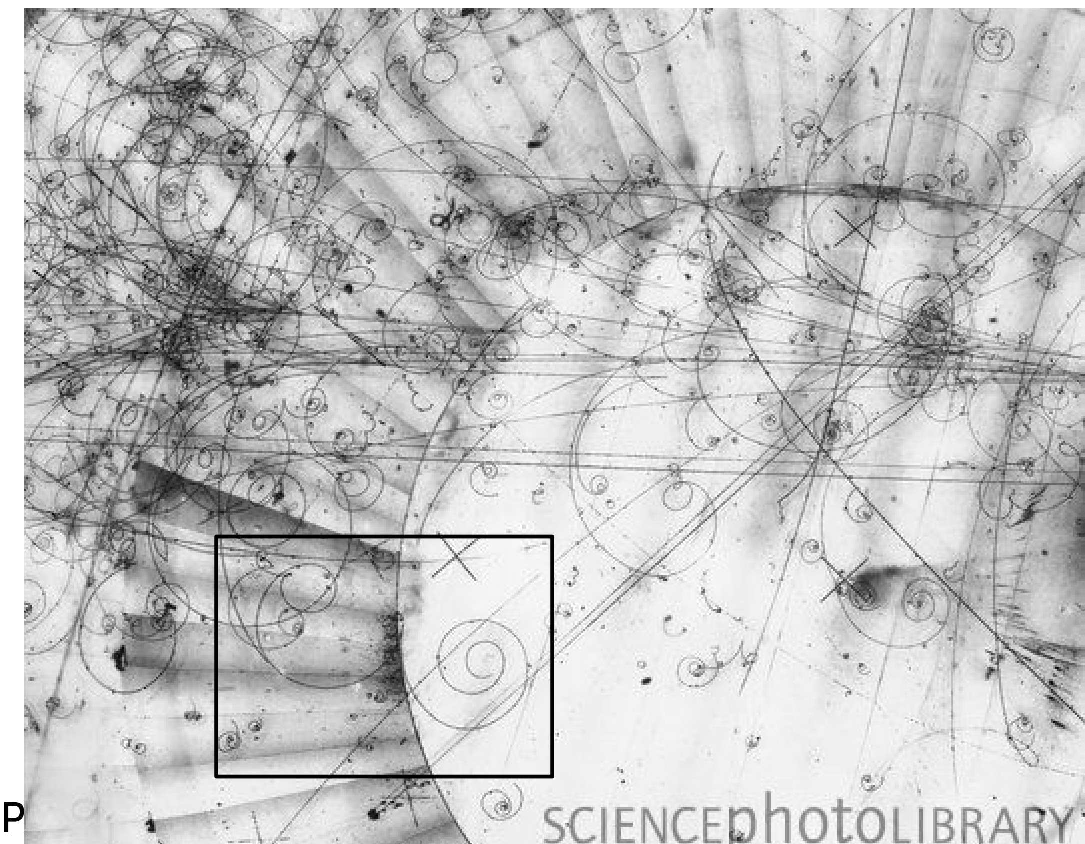
No olvidar que son Modelos



Materia-Antimateria

- En una interacción EM (scattering) es posible sacar un electrón del mar
- El "hueco" se ve como un electrón positivo





$$E_{\gamma} \geqslant 1.022\, MeV$$

Comentario sobre unidades

- Es conveniente trabajar en otro sistema de unidades
- 1 eV es la energía ganada por un electrón en una diferencia de potencial de 1 V

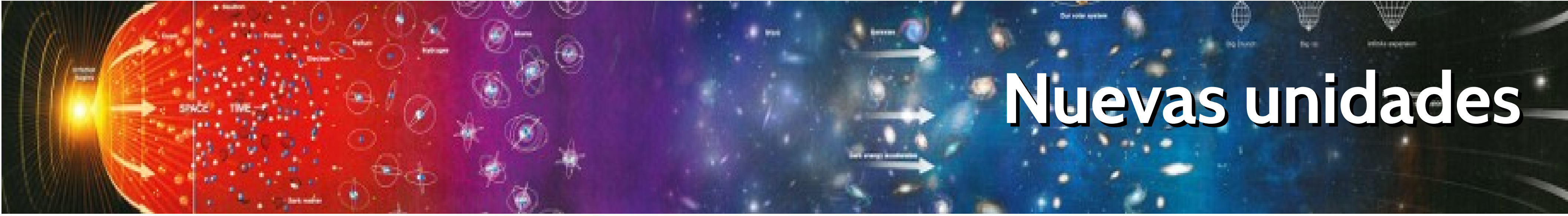
$$E=qV \rightarrow E=(1.602\times10^{-19}\,\mathrm{C})(1\,\mathrm{V}) \rightarrow E=1.602\times10^{-19}\,\mathrm{J}$$

electronvolt $\boxed{\Rightarrow 1\,\mathrm{eV}=1.602\times10^{-19}\,\mathrm{J}}$

meV eV keV MeV GeV TeV PeV EeV

Microndas RX Partículas R.C. Gal

Visible Gamma C. Galáctico R.C.E.G.



Nuevas unidades

Magnitud	Ecuación	Unidad
Energía	E	eV
Cant. de movimiento	p = E/c	eV/c
Masa	$m = E / c^2$	eV/c^2

- A veces, se usan las unidades naturales:

$$h = c = 1$$

- Entonces, todo se mide en eV