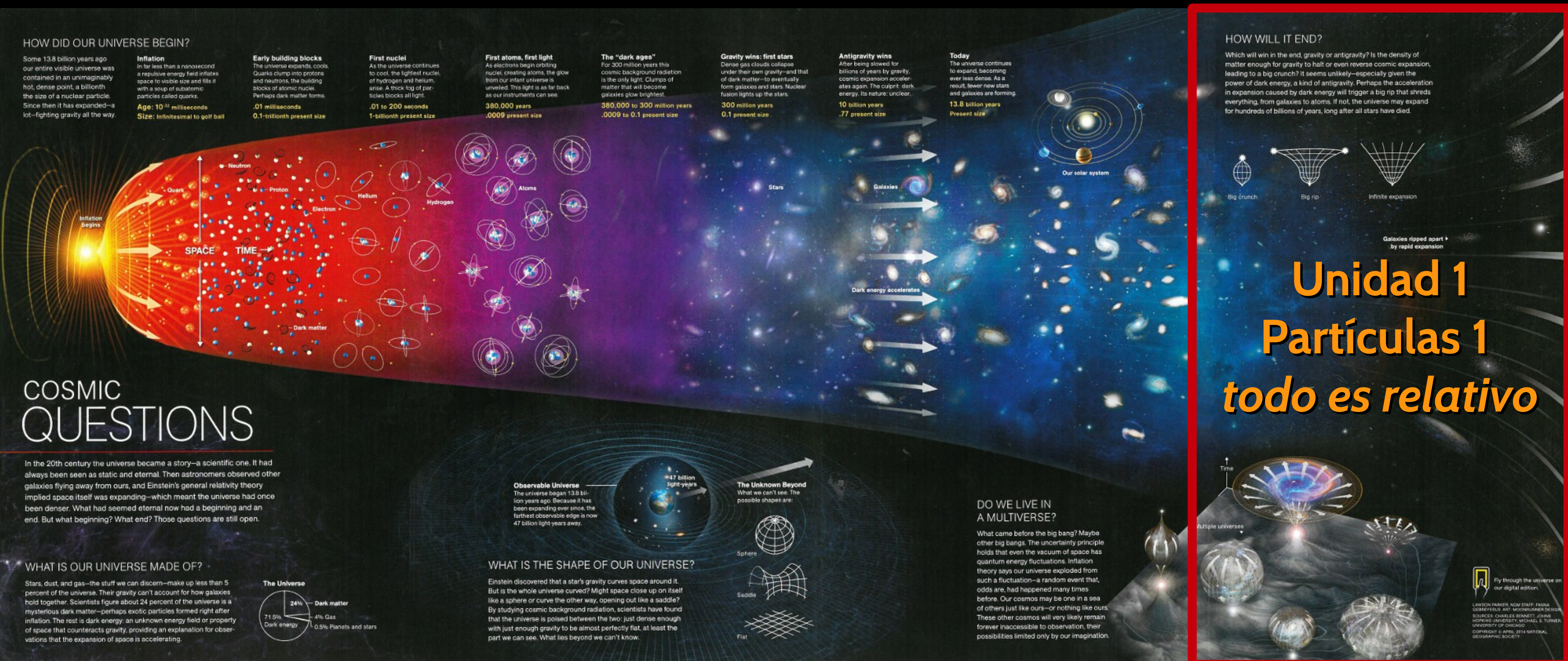
Universidad Nacional de Río Negro
Int. Partículas, Astrofísica & Cosmología - 2017

- **Unidad** 01 – Relatividad
- **Clase** U01 C05 – 05
- **Fecha** 12 Sep 2017
- **Cont** Mecánica relativista
- **Cátedra** Asorey
- **Web** github.com/asoreyh/unrn-ipac
  www.facebook.com/fisicareconocida/
- **Archivo** ipac-2017-U01-C05-0912-relatividad-5

RIO NEGRO

Contenidos: un viaje en el tiempo



Unidad 1

Partículas 1

todo es relativo

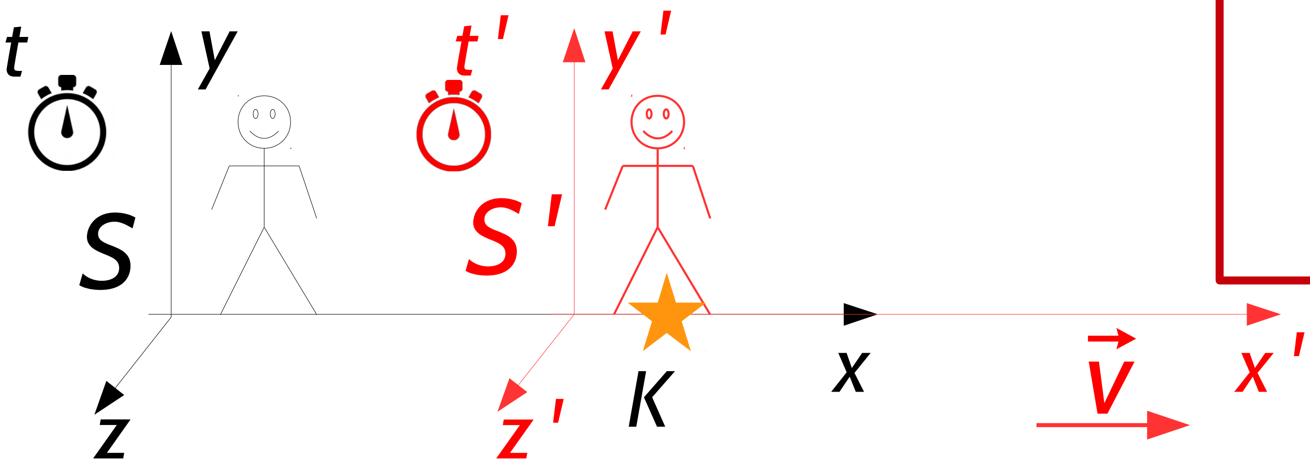
Transformaciones de Lorentz

- Las ecuaciones que transforman dos marcos de referencia, **y que verifican ambos postulados**, son

Recordar que estas transformaciones son válidas para un sistema S' que se mueve con velocidad *v* en la dirección *x*, entonces K=(t,x,y,z) y K'=(t',x',y,z), ya que z'=z e y'=y

$$t' = \gamma\left(t - \frac{1}{c^2} v\,x\right)$$
$$x' = \gamma\left(x - v\,t\right)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta \equiv \frac{v}{c}$$



Simultaneidad y co-localidad relativista

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{1}{c^2} v \Delta x\right) \qquad \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{1}{c^2} v \Delta x'\right)$$

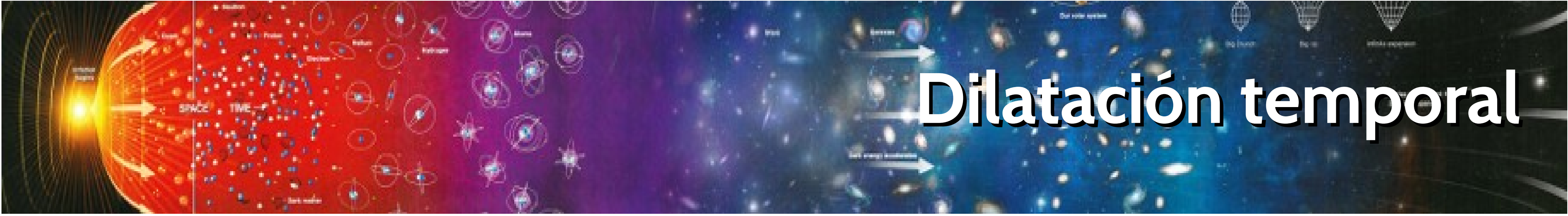
$$\Delta x' = \gamma\left(\Delta x - \; v \Delta t\right) \qquad \Delta x = \gamma\left(\Delta x' + \; v \Delta t'\right)$$

Eventos simultáneos en un marco

$\Delta t = 0, \Delta x \neq 0 \rightarrow \Delta t' \neq 0$ y eventualmente $\Delta x' = 0$

Eventos co-locales en un marco

$\Delta x = 0, \Delta t \neq 0 \rightarrow \Delta x' \neq 0$ y eventualmente $\Delta t' = 0$



Dilatación temporal

- **El lapso de tiempo entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia**
- Imaginen en S un reloj ($\rightarrow \Delta t = s$) en reposo $\rightarrow \Delta x = 0$

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{1}{c^2} v \Delta x\right) \rightarrow \Delta t' = \gamma \Delta t \rightarrow \Delta t' = \gamma s$$

y dado que $\gamma > 1$ si $v > 0$, luego $\Delta t' > \Delta t$

- Por ejemplo, v=259807 km/s

$$\rightarrow \beta = v/c = 0.866 \rightarrow \gamma = 2 \Rightarrow \Delta t' = 2\, s$$

El intervalo medido en el marco S (reloj en reposo) dura 1 segundo.
El mismo intervalo visto en el marco en movimiento S’ dura 2 segundos

Contracción espacial

- La distancia entre dos eventos (p.ej. la longitud de un objeto) no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia

- Imaginen una regla ($\rightarrow \Delta x = l$) en el sistema S. En el sistema S' se mide la distancia entre los extremos de la regla de manera simultánea ($\rightarrow \Delta t' = 0$)

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v \Delta t') \rightarrow \Delta x = \gamma \Delta x' \rightarrow \Delta x' = \Delta \frac{x}{\gamma} \rightarrow \Delta x' = \frac{l}{\gamma}$$

y dado que $\gamma > 1$ si $v > 0$, luego $\Delta x' < \Delta x$

- Por ejemplo, $v = 259807$ km/s $\rightarrow \gamma = 2 \rightarrow \Delta x' = l/2$

La longitud medida en el marco S' (reloj en movimiento) es menor que la longitud medida en el marco con el reloj en reposo

Dilatación temporal y Contracción espacial

- El lapso de tiempo entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \quad \text{para eventos} \quad \Delta x = 0$$

- La distancia espacial entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} \quad \text{para eventos} \quad \Delta t' = 0$$

Tiempo propio

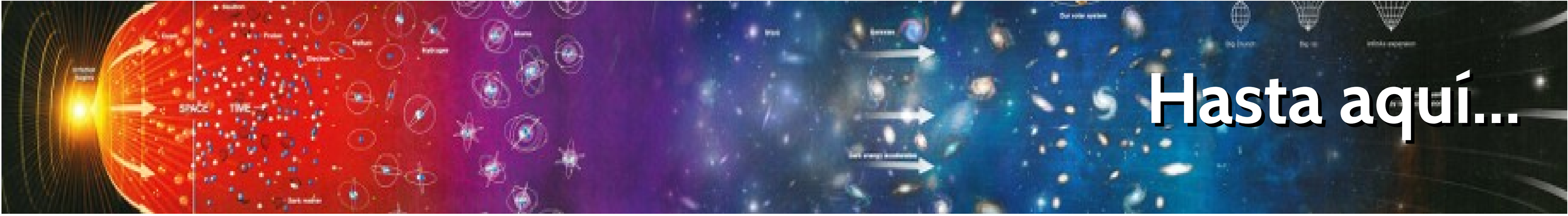
- Dado que cada marco de referencia tiene su propio tiempo, **podemos definir un marco de referencia adherido a un objeto en movimiento**.
- **El tiempo de ese marco es el tiempo que "percibe" un observador que se mueve junto con el objeto**. Llamaremos a este marco "**comóvil**".
- El tiempo del marco comóvil es el tiempo propio: es independiente de las coordenadas.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 = ds'^2 = c\, d\tau^2$$

$$\Rightarrow \boxed{c^2 dt^2 - dr^2 = c^2 d\tau^2}$$

Tiempo propio

$$dt = \gamma\, d\tau$$



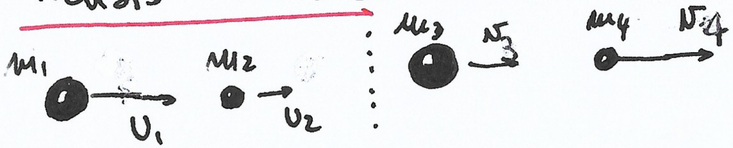
Hasta aquí...

- Los postulados de Einstein implican cambios profundos en la concepción de la Naturaleza.
  - Estos afectan nuestra percepción de distancia y lapso temporal, de espacio y tiempo.
- Las transformaciones de Lorentz indican como transforman las leyes de la física entre dos marcos de referencia inerciales.
  - Son las transformaciones válidas entre marcos de referencia.
- La mecánica Newtoniana es una aproximación válida para velocidades bajas respecto a la velocidad de la luz.
  - ¿Cómo puede ser generalizada?

Pasen y vean

Colisiones (u es inicial, v es final, puede haber cambio de masa).

Análisis Clásico



En el marco S, conservación de $\vec{p}$ implica

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_3 v_3 \quad m_4 v_4 \qquad (1)$$

En S'

$$m_1 u_1' + m_2 u_2' = m_3 v_3' + m_4 v_4' \qquad (2)$$

y $v_3' = v_3 - V$ (3) (V es la vel. relativa entre S y S') ⇒

En S'

$$\underbrace{m_1 u_1 + m_2 u_2 - (m_1+m_2)V = m_3 v_3 + m_4 v_4}_{(1)} - V(m_3+m_4)$$

⇒ $(m_1+m_2)\,V = (m_3+m_4)\,V$ y para todo V:

(4) $\boxed{m_1+m_2 = m_3+m_4}$ Conservación de la masa.

La conservación de la cantidad de movimiento implica la conservación de la masa

Análisis Relativista

Imaginemos que en el caso relativista $\vec{p} = m\vec{v}$ y $\vec{p}' = m v'$ (supongo que vale el Post. 1 y $m = m'$) ⇒ (1) y (2) se mantienen. Cambiando (3) por la relativista:

$$v_3' = \frac{v_3 - V}{1 - v_3 V/c^2} \qquad (5)$$

⇒ reemplazando en (2):

$$m_1 \frac{u_1 - V}{1 - u_1 V/c^2} + m_2 \frac{u_2 - V}{1 - u_2 V/c^2} = m_3 \frac{v_3 - V}{1 - v_3 V/c^2} + m_4 \frac{v_4 - V}{1 - v_4 V/c^2}$$

¿Y ahora? V no se cancela, entonces esta ecuación (conservación de la cant. de movimiento) ¡no vale en general! ó tenemos que cambiar las masas para ajustar.

La definición estándar no se verifica.

Principios de conservación

- En una colisión, el análisis relativista usando la ley de suma de velocidades,

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} \qquad u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad ,$$

resulta qué:

  - o bien no se conserva la cantidad de movimiento;
  - o bien la cantidad de movimiento está mal definida en el caso relativista

Clásico: $\vec{p} = m\vec{v}$, Relativistiva $\vec{p} = ?$

La conservación de p es un principio básico

- Al igual que nos pasó con u, debemos recordar lo que dijo Alberto: al derivar, el tiempo depende del marco de referencia. Antes eso no nos preocupaba:

$$\text{Clásico: } \vec{p}=\frac{d}{dt}(m\vec{r}) \;\text{ y }\; \vec{p}\,'=\frac{d}{dt}(m\vec{r}\,')$$

$$\text{Correcto: } \vec{p}=\frac{d}{dt}(m\vec{r}) \;\text{ y }\; \vec{p}\,'=\frac{d}{dt'}(m\vec{r}\,')$$

- Y como todos los marcos son equivalentes, ¡podemos usar el marco comovil!

Cant. de movimiento relativista

$$\boxed{\vec{p}=m\frac{d\vec{r}}{d\tau}}$$

Magia algebráica (como ejercicio)

Definición de $\vec p$: $\boxed{\vec p = m\, d\vec r/d\tau}$

Pero ¿qué es $(d\vec r/d\tau)$? Recordando

$dt = \gamma\, d\tau \Rightarrow dt/d\tau = \gamma \Rightarrow$

$$\boxed{\vec p} = m\frac{d\vec r}{d\tau}\cdot\frac{dt}{dt} = m\frac{d\vec r}{dt}\,\frac{dt}{d\tau} = \boxed{m\vec v\gamma}$$

Donde $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ y $\beta = |\vec v|/c$

$$\Rightarrow \boxed{\vec p = m\vec v\gamma}$$

Definimos $\gamma_i = (1-\beta_i^2)^{-1/2}$ y $\beta_i = v_i/c \Rightarrow$

En S:

$$m_1 v_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 v_2 = m_3 v_3\gamma_3 + m_4 v_4\gamma_4$$

En S':

$$m_1 v_1'\gamma_1' + m_2 v_2'\gamma_2' = m_3 v_3'\gamma_3' + m_4 v_4'\gamma_4'$$

Magia Algebráica (Problema en la guía):

$$\boxed{m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 = m_3\gamma_3 + m_4\gamma_4}$$

Es una cantidad conservada dentro de la conservación del momento.

- Con la nueva definición de p,

$$\vec p = m\gamma\vec v$$

- aparece una nueva magnitud conservada

$$m\gamma = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}$$

- m es la masa del objeto
- Notar que si v>0, entonces mγ>m

Richard Feynman dijo

- *"For those who want to learn just enough about it so they can solve problems, that is all there is to the [special] theory of relativity – it just changes Newton's laws by introducing a correction factor to the mass"*
- Luego:

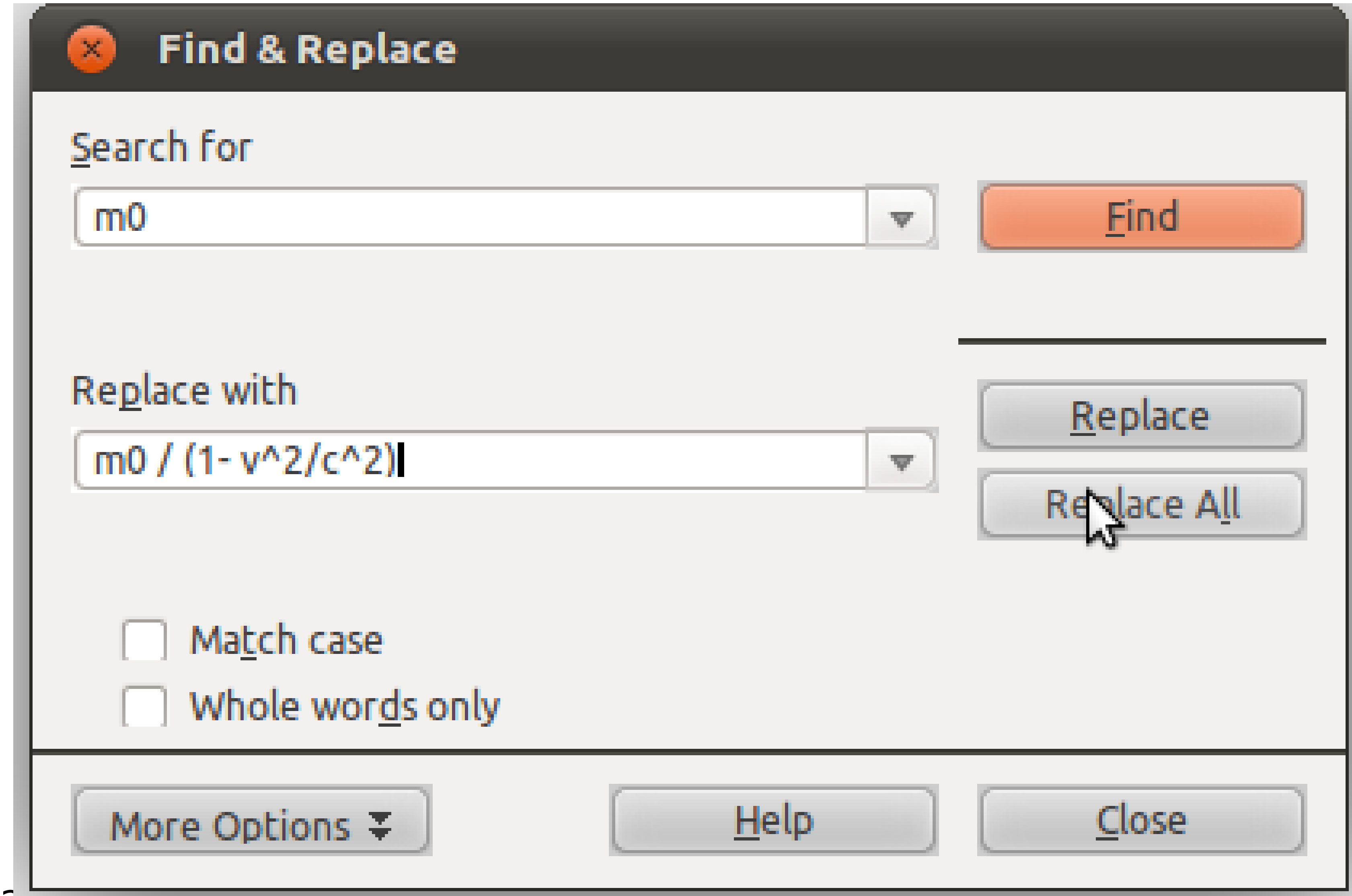
$$\vec{F}=\frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt}$$

- donde

$$m\rightarrow m\gamma=\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Aprendiendo relatividad en Windows

- Search & replace (CTRL+F)



Cumpliendo una vieja promesa de Física 1A

- Serie de Taylor para

$$(1+\epsilon)^n = 1 + n\epsilon + \frac{1}{2}n(n-1)\epsilon^2 + \dots$$

- y tenemos:

$$n = -1/2$$

$$\gamma = \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \Rightarrow \epsilon = -\beta^2 \ll 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{3}{8}\beta^4 + \dots$$

- Entonces para nuestro invariante tenemos:

$$\Rightarrow \gamma m = \frac{\cancel{\gamma}\, m}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq m + \frac{1}{2}m\beta^2 - \frac{3}{8}m\cdot\beta^4 + \dots$$

$$\Rightarrow \gamma m \simeq m + \frac{1}{2}m\frac{v^2}{c^2} - \frac{3}{8}m\, v^4/c^4$$

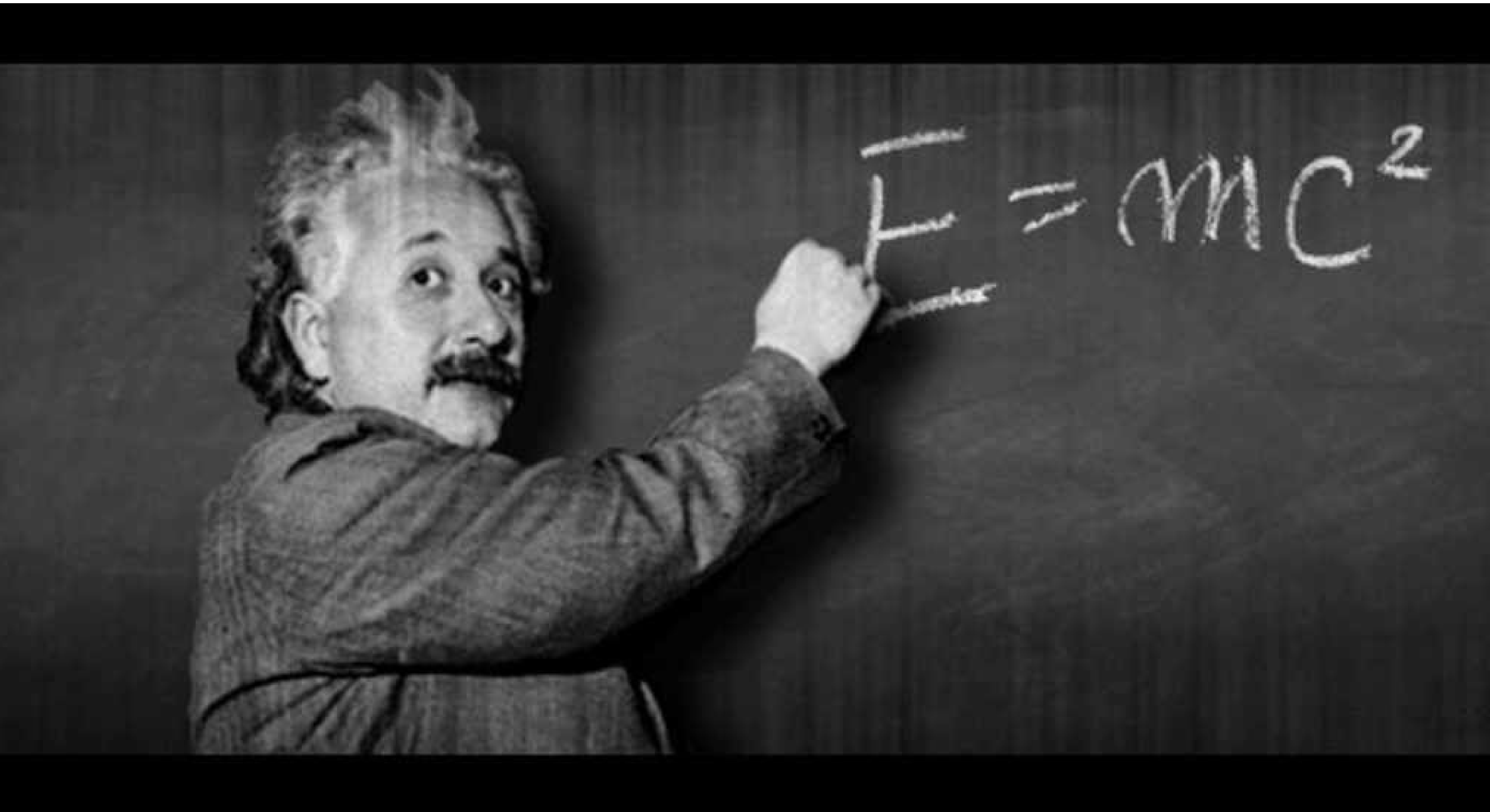
- Multiplicando ambos lados por c^2:

$$\gamma m c^2 \simeq mc^2 + \frac{1}{2}m\frac{v^2}{\cancel{c^2}}\cdot\cancel{c^2} - \frac{3}{8}m v^4/c^{\cancel{4}\,2}\cdot\cancel{c^2}$$

- y descartando el término $v^4/c^2 \to 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\gamma m c^2 \simeq \underbrace{mc^2}_{\text{energía}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{energía cinética}}} \Rightarrow \boxed{\gamma mc^2 = E}$$

Gracias Isaac, seguí participando....



Una nueva magnitud conservada

- Hemos visto que al aplicar los principios relativistas y pedir conservación del impulso, una nueva magnitud conservada aparece naturalmente:

La energía se conserva

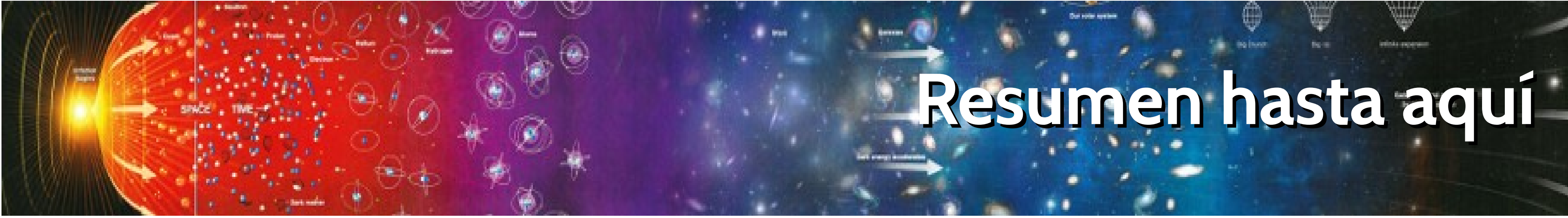
$$\boxed{E=\gamma m c^2 \simeq m c^2 + \boxed{\frac{1}{2} m v^2}}$$

Energía cinética clásica

- Recordar que la energía de un cuerpo es $E=\gamma m c^2$
- $E=\frac{1}{2} m v^2$ es una aproximación válida si v<<c.

$$\boxed{E_K \equiv E - m c^2 = (\gamma - 1) m c^2}$$

Energía cinética (en ausencia de otras interacciones)



Resumen hasta aquí

- Cantidad de movimiento relativista (correcto siempre):

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

- Energía relativista (correcta siempre):

$$E = \gamma m c^2$$

- Un nuevo invariante relativista:

$$\boxed{E^2 - (p c)^2 = (m c^2)^2}$$

Invariante relativista

Un nuevo invariante

Cant. de movimiento relativista: $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$

Energía total relativista: $E = \gamma m c^2$

Elevamos al cuadrado: $E^2 = \gamma^2 m^2 c^4$ (1)

$p^2 = \gamma^2 m^2 v^2 \Rightarrow p^2 c^2 = \gamma^2 m^2 v^2 c^2$ (2)

Restando (1) − (2):

$$E^2 - p^2c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 - \gamma^2 m^2 c^2 v^2$$

Sacamos factor común: $E^2 - p^2c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \left(1 - v^2/c^2\right) = \gamma^2 m^2 c^4 \overbrace{\left(1 - \beta^2\right)}^{1/\gamma^2}$

$$\Rightarrow E^2 - p^2c^2 = \cancel{\gamma^2} m^2 c^4 \cdot \frac{1}{\cancel{\gamma^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E^2 - p^2c^2 = m^2c^4}$$

invariante relativista.
(no depende del sist. de ref).

¿y si no la partícula no tiene masa?

- ¡No importa, tiene energía y tiene cantidad de movimiento

$$m=0 \rightarrow E^2-(p\,c)^2=(m\,c^2)^2 \Rightarrow E^2-(p\,c)^2=0$$

Cantidad de movimiento de partículas sin masa

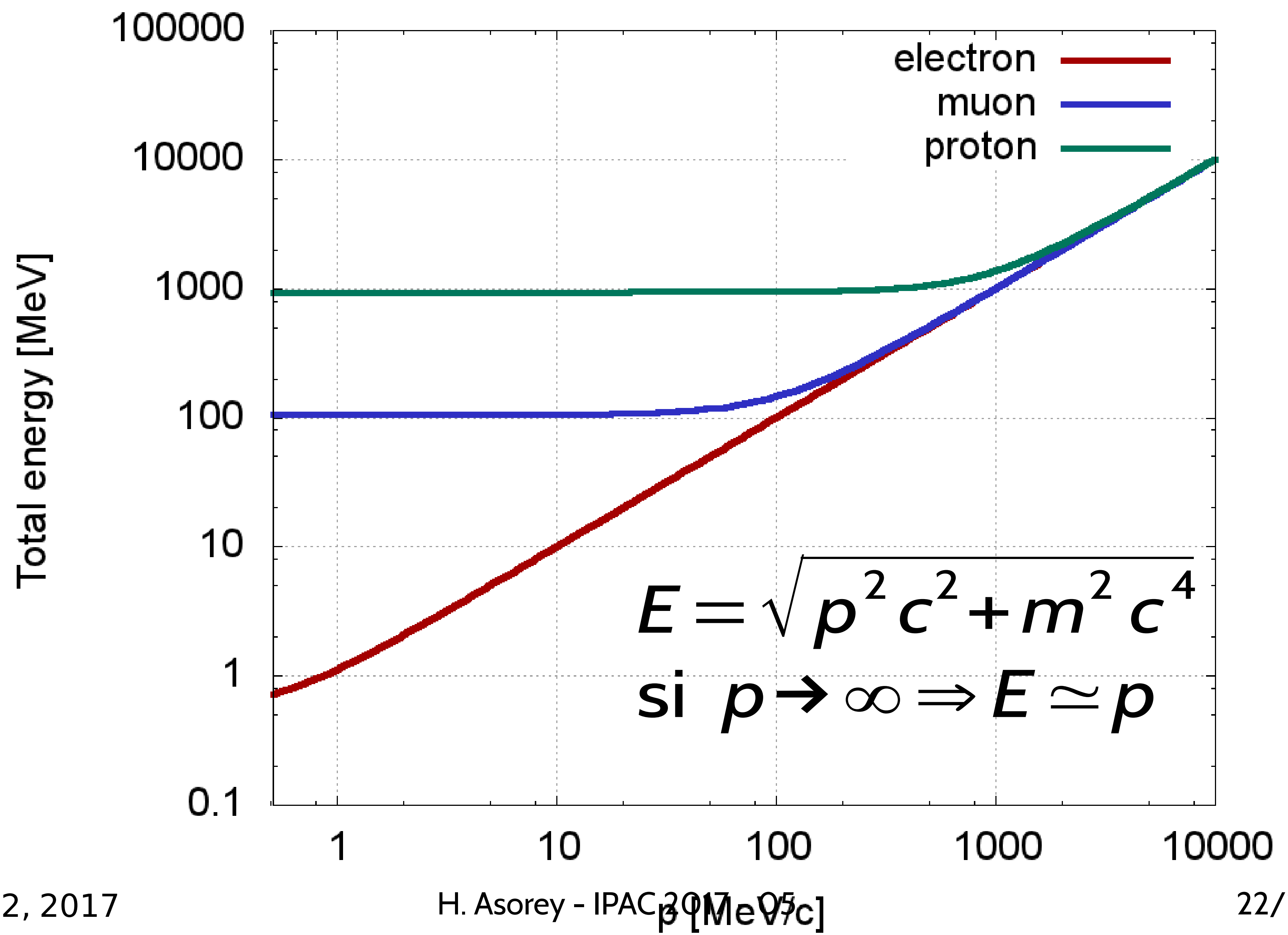
$$\boxed{E=p\,c}$$

- Por ejemplo, un fotón violeta:

λ=420 nm → E = hc/λ = 0.473 aJ (attojoules, atto=10^{-18})

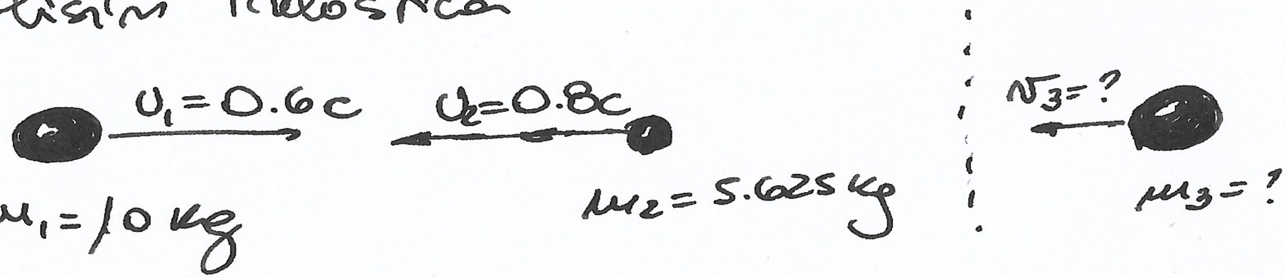
→ p = 1.58 x 10^{-27} kg m/s

Mil palabras



Choque inelástico: ¡¡$m_3 > m_1 + m_2$!! energía a masa

Colisión inelástica:



Clásicamente diríamos: $m_3 = 15.625$ kg y $v_3 = 0.01 \neq 0$.

Relativísticamente:

$$\gamma_1 = (1-\beta_1^2)^{-1/2} = 1.25 \quad \text{y} \quad \gamma_2 = (1-\beta_2^2)^{-1/2} = 5/3$$

$$\Rightarrow p_T^i = \sum p_i^i = \sum m_i \gamma_i u_i = 10\,kg \cdot 1.25 \cdot 0{,}6c + 5.625\,kg \cdot \frac{5}{3}(-0.8c)$$

$$\Rightarrow p_T^i = 7.5\,kg\,c - 7.5\,kg\,c \Rightarrow p_T^i = 0 \Rightarrow v_3 = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{p_f = 0.} \quad \text{y} \quad \gamma_3 = 1$$

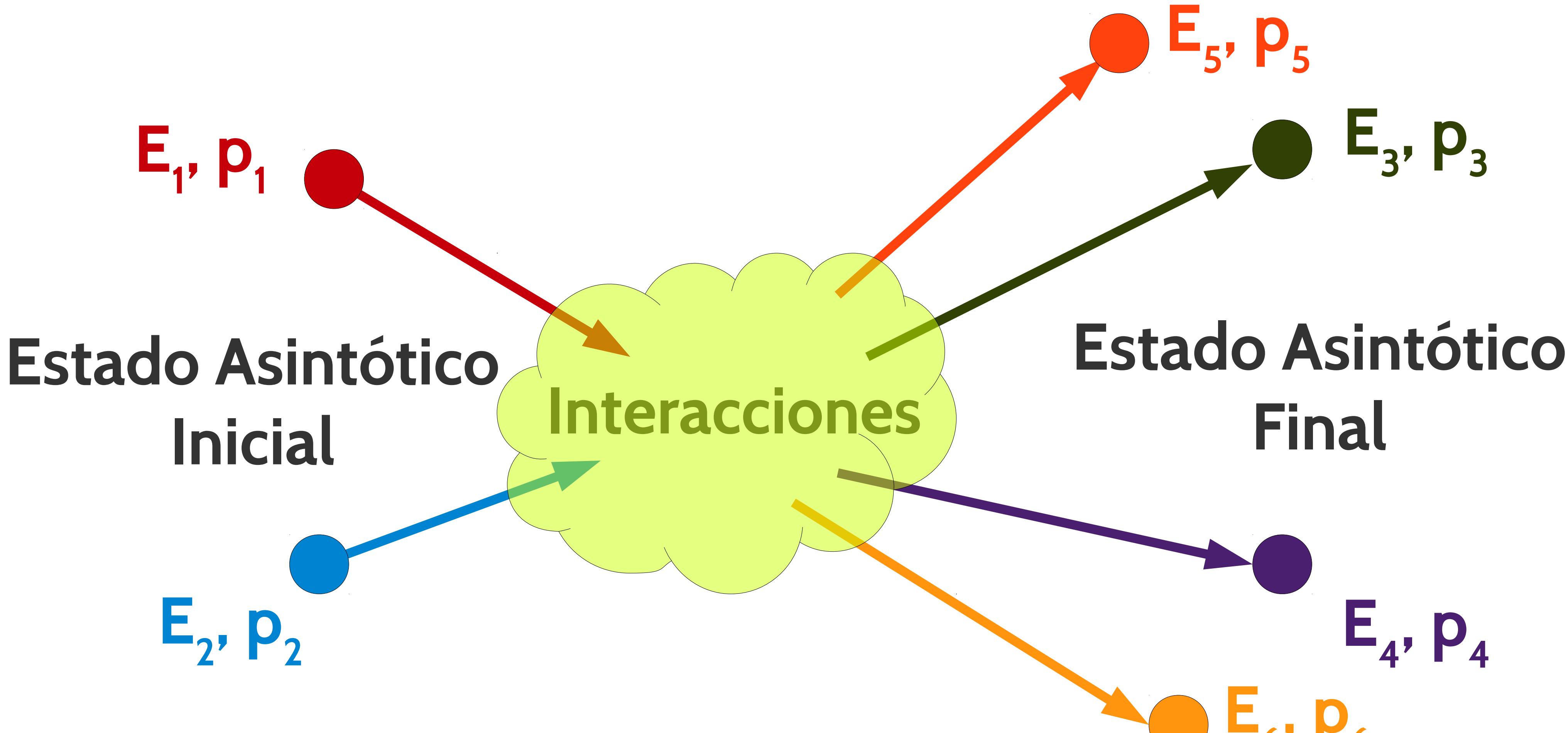
Conservación energía.

$$E_i = \sum m_i \gamma_i c^2 \Rightarrow E_i = E_f \Rightarrow 10\,kg \cdot 1.25 + 5.625 \cdot 5/3 = m_3 \gamma_3$$

$$\Rightarrow m_3 = 21.875\,kg \Rightarrow m_3 > m_1 + m_2 \text{ !!!}$$

¿Cómo funciona la conservación?

- Y todo por pedir que *c* tiene que tener el mismo valor para todos los observadores inerciales.



Así funciona la Naturaleza

- **La Energía total se conserva**

$$\left.\begin{aligned}
E^{\text{inicial}} &= \sum_j^{n^{\text{inicial}}} E_j^{\text{inicial}} = \sum_j m_j \gamma_j c^2 \\
E^{\text{final}} &= \sum_k^{n^{\text{final}}} E_k^{\text{final}} = \sum_k m_k \gamma_k c^2
\end{aligned}\right\} E^{\text{inicial}} = E^{\text{final}}$$

- **La cantidad de movimiento total se conserva**

$$\left.\begin{aligned}
\vec{p}^{\,\text{inicial}} &= \sum_j^{n^{\text{inicial}}} \vec{p}_j^{\,\text{inicial}} = \sum_j m_j \gamma_j \vec{v}_j \\
\vec{p}^{\,\text{final}} &= \sum_k^{n^{\text{final}}} \vec{p}_k^{\,\text{final}} = \sum_k m_k \gamma_k \vec{v}_k
\end{aligned}\right\} \vec{p}^{\,\text{inicial}} = \vec{p}^{\,\text{final}}$$

Comentario sobre unidades

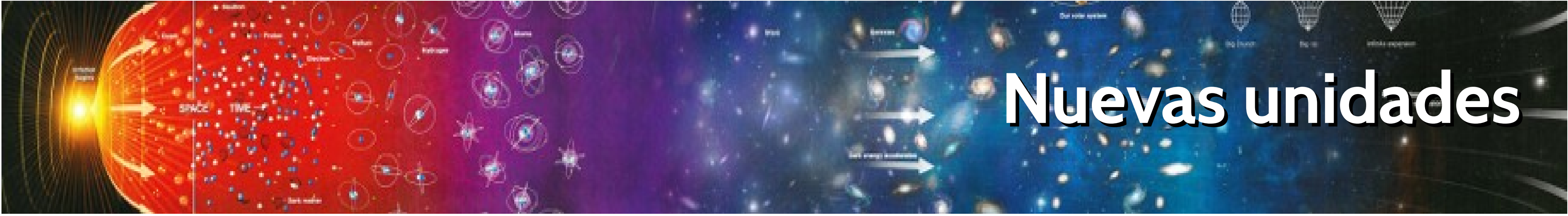
- Es conveniente trabajar en otro sistema de unidades
- 1 eV es la energía ganada por un electrón en una diferencia de potencial de 1 V

$$E = qV \rightarrow E = (1.602\times10^{-19}\,\mathrm{C})(1\,\mathrm{V}) \rightarrow E = 1.602\times10^{-19}\,\mathrm{J}$$

electronvolt $\boxed{\Rightarrow 1\,\mathrm{eV} = 1.602\times10^{-19}\,\mathrm{J}}$

meV eV keV MeV GeV TeV PeV EeV

Microndas Visible R X Gamma Partículas C. Galáctico R.C. Gal R.C.E.G.



Nuevas unidades

Magnitud	Ecuación	Unidad
Energía	E	eV
Cant. de movimiento	p = E/c	eV/c
Masa	$m = E / c^2$	eV/c^2

- A veces, se usan las unidades naturales:

$$h = c = 1$$

- Entonces, todo se mide en eV