

Omni-3-Wheel

J. Francisco Presenza

Agosto 2019

1 Cinemática

1.1 Directa

Sea $\{b\}$ una terna solidaria al vehículo con origen en el centro de geométrico (Fig. 1). Sea $\mathbf{v} = [v_x \ v_y \ v_\psi]^T$ un vector del espacio \mathbb{V} de velocidades lineales y angulares del vehículo en terna $\{b\}$. Sea $\mathbf{w} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ un vector del espacio \mathbb{W} de velocidades angulares de las ruedas. Sea $\mathbf{T} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal tal que $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.

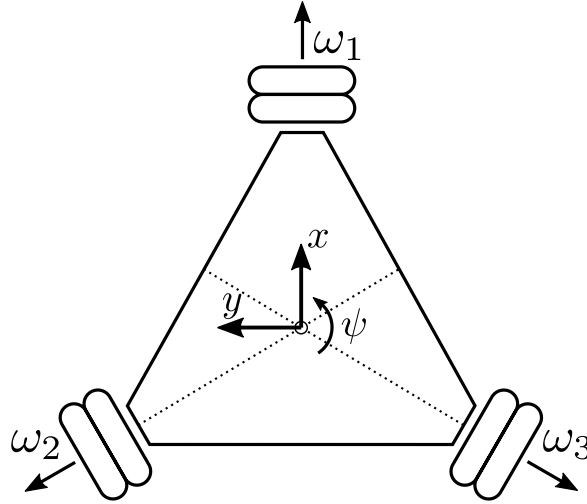


Figure 1: Omni-3-Wheel: diagrama simplificado.

Para encontrar \mathbf{T} , procedemos a encontrar la imagen de los vectores canónicos $\{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{V} :

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Considerando el principio de rodadura, siendo r el radio de las ruedas y d la distancia del centro geométrico a cada rueda, se comprueba que:

- Para $v_x \neq 0$, $v_y = v_\psi = 0$:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 0 \\ \omega_2 &= \frac{v_x}{r} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \omega_3 &= -\frac{v_x}{r} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}\tag{2}$$

- Para $v_y \neq 0$, $v_x = v_\psi = 0$:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\frac{v_y}{r} \\ \omega_2 &= \omega_3 = \frac{v_y}{r} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}\tag{3}$$

- Para $v_\psi \neq 0$, $v_x = v_y = 0$:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = -\frac{v_\psi \cdot d}{r}\tag{4}$$

De (2), (3) y (4), se deducen las imágenes $\mathbf{T}(e_i)$:

$$\mathbf{T}(e_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2r} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2r} \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}(e_2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r} \\ \frac{1}{2r} \\ \frac{1}{2r} \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}(e_3) = \begin{bmatrix} -\frac{d}{r} \\ -\frac{d}{r} \\ -\frac{d}{r} \end{bmatrix}\tag{5}$$

De esta manera, la transformación \mathbf{T} se expresa en su forma matricial como se indica a continuación:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{r} & -\frac{d}{r} \\ \frac{\sqrt{3}}{2r} & \frac{1}{2r} & -\frac{d}{r} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2r} & \frac{1}{2r} & -\frac{d}{r} \end{bmatrix}\tag{6}$$

1.2 Inversa

La matriz \mathbf{T} es inversible si $d \neq 0$, pues $\det \mathbf{T} = \frac{-3\sqrt{3}}{2} \frac{d}{r^3}$, por lo que es posible obtener la velocidad del vehículo a partir de las velocidades de las ruedas haciendo $\mathbf{v} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{w})$, donde:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}r}{3} & -\frac{\sqrt{3}r}{3} \\ -\frac{2r}{3} & \frac{r}{3} & \frac{r}{3} \\ -\frac{r}{3d} & -\frac{r}{3d} & -\frac{r}{3d} \end{bmatrix}\tag{7}$$

Esto es útil, por ejemplo, si se quiere utilizar las mediciones de los *encoders* para estimar las velocidades del vehículo. Además, a partir de ella se pueden mapear los límites de velocidad en las ruedas, impuestas por la mecánica de las mismas, al espacio de las velocidades del vehículo. De esta manera es posible imponer velocidades al Omni-3-Wheel sin alcanzar la

velocidad límite de las ruedas. Teniendo en cuenta que se utilizaron motores *Namiki* modelo 22CL-3501PG, cuya máxima velocidad es 9600 rpm con un reductor de relación $\kappa = \frac{80}{1}$, se deduce que la velocidad máxima de las ruedas es $\omega^{\max} = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. De (4) se obtiene la velocidad angular máxima del vehículo $v_{\psi}^{\max} = \frac{r}{d} \cdot \omega^{\max}$. Las restricciones de velocidad en los espacios \mathbb{W} y \mathbb{V} se muestran a continuación:

- \mathbb{W} :

$$-\omega^{\max} \leq \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \leq \omega^{\max} \quad (8)$$

- \mathbb{V} :

$$\begin{aligned} -v_{\psi}^{\max} &\leq \frac{1}{d}v_y + v_{\psi} \leq v_{\psi}^{\max} \\ -v_{\psi}^{\max} &\leq \frac{\sqrt{3}}{2d}v_x + \frac{1}{2d}v_y - v_{\psi} \leq v_{\psi}^{\max} \\ -v_{\psi}^{\max} &\leq -\frac{\sqrt{3}}{2d}v_x + \frac{1}{2d}v_y - v_{\psi} \leq v_{\psi}^{\max} \end{aligned} \quad (9)$$

En la Fig. 2 se muestran los límites de saturación de manera gráfica, donde se tomó $r = 24\text{mm}$ y $d = 116\text{mm}$.

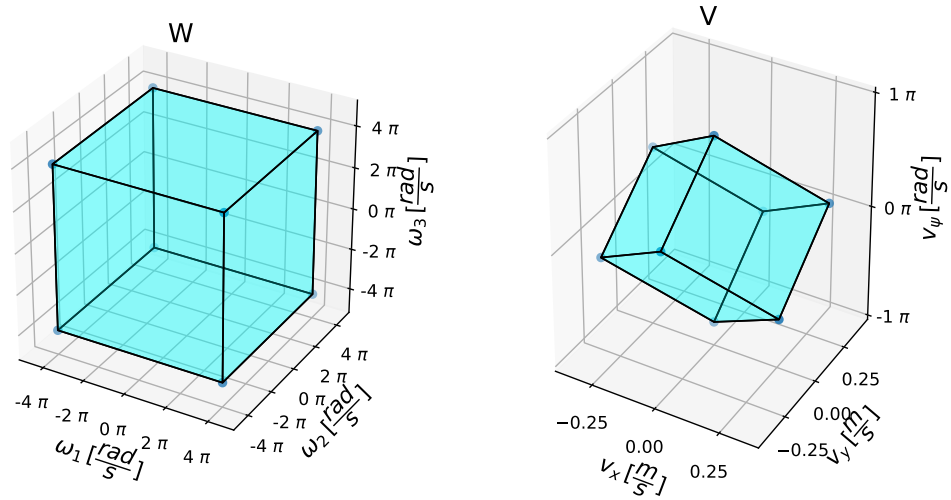


Figure 2: Mapa de Saturación.