

# GBDT详解上: 理论

Yafei Zhang(kimmyzhang@tencent.com)

August 4, 2016

## 1 前言

GBDT(Gradient Boosted Decision Tree)是老牌的ensemble模型, 在10年前那个属于ensemble的年代, 它既在学术界掀起了研究热点, 也在工业界, 甚至比赛界:), 都有广泛的应用.

本系列分上下两篇, 第一篇着重GBDT的理论, 第二篇分析它的著名实现xgboost, 来分析一下它高效的背后暗藏什么玄机.

本文的读者应具有一定的机器学习基础, 尤其是决策树.

## 2 符号定义

在介绍GBDT之前, 首先规范一下符号, 这些符号在全文中都适用.

$f$ , 决策树. 从数学上讲, 决策树是一个分段函数, 所以它的参数描述了分段方法. 我们用 $\{R_j\}_1^J$ 和 $\{b_j\}_1^J$ 表示决策树的参数, 前者是分段空间(决策树划分出的disjoint 空间), 后者是这些空间上 $f$ 输出的函数值. 其中 $J$ 是叶子节点的数量.

$$f(x; \{R_j, b_j\}_1^J) = \sum_{j=1}^J b_j \mathbf{1}(x \in R_j) \quad (1)$$

下文经常用 $f(x)$ 来省略表示 $f(x; \{R_j, b_j\}_1^J)$ .

在Boosting框架中,  $f$ 理论上可以是很多weak learner(除了线性函数, 聪明的读者想想是为什么), 在Gradient Boosting框架里, 常用且被证明有效的除了决策树[Friedman 1999a]外, 还有逻辑回归[Friedman 2000]. xgboost中的gbtree, gblinear就对应了这两种实现. 本文将讨论范围限定在决策树上, 不关注其它weak learner.

$F$ , 决策树ensemble. 定义为:

$$F = \sum_{i=0}^K f_i \quad (2)$$

$f_0$ 是模型初始值, 通常是按照一定原则计算出的常数. 同时定义 $F_k = \sum_{i=0}^k f_i$ .

$\mathcal{D} = \{(x_i, y_i)\}_1^N$ , 训练样本.

$\mathcal{L}$ , 目标函数. 定义为:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\{y_i, F(x_i)\}_1^N) = \underbrace{\sum_{i=1}^N L(y_i, F(x_i))}_{\text{Training loss}} + \underbrace{\sum_{k=1}^K \Omega(f_k)}_{\text{Regularization}} \quad (3)$$

第一项 $L$ 是针对样本的Loss.  $L$ 可以有多种选择: 绝对值误差, 平方误差, logistic loss等.

第二项 $\Omega$ 是正则化函数, 它惩罚 $f_k$ 的复杂度, 树结构越复杂它的值越大. [Friedman 1999a]中, 并没有用 $\Omega$ 来做正则化, 也就是说 $\Omega = 0$ . [Johnson 2014]和[Chen 2016]选择了简单高效的 $\Omega$ , 两者大同小异, 下文会介绍后者. 事实证明,  $\Omega$ 对提升效果非常重要.

### 3 算法推导

首先给出原始的GBDT算法框架.

输入:  $\{(x_i, y_i)\}_1^N, K, L, \dots$

1. 初始化  $f_0$

**for**  $k = 1$  **to**  $K$  **do**

2.1.  $\tilde{y}_i = -\frac{\partial \mathcal{L}(y_i, F_{k-1}(x_i))}{\partial F_{k-1}}, i = 1, 2, \dots, N$

2.2.  $\{R_j, b_j\}_1^{J^*} = \arg \min_{\{R_j, b_j\}_1^J} \sum_{i=1}^N [\tilde{y}_i - f_k(x_i; \{R_j, b_j\}_1^J)]^2$

2.3.  $\rho^* = \arg \min_{\rho} \mathcal{L}(\{y_i, F_{k-1}(x_i) + \rho f_k(x_i)\}_1^N)$

$= \arg \min_{\rho} \sum_{i=1}^N L(y_i, F_{k-1}(x_i) + \rho f_k(x_i)) + \Omega(f_k)$

2.4. 令  $f_k = \rho^* f_k, F_k = F_{k-1} + f_k$

**end**

输出:  $F_K$

**Algorithm 1:** GBDT算法

乍一看算法1, 熟悉的朋友可能一眼就发现了它和[梯度下降](#)十分相似. 没错, Gradient Boosting就是在函数空间的梯度下降. 我们不断减去  $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ , 可以得到  $\min_x f(x)$ ; 同理不断减去  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F}$ , 就能得到  $\min_F \mathcal{L}(F)$ .

下面一一解读上面的几个重要步骤.

1, 初始化  $f_0$ , 常见方法有:

a) 随机初始化;

b) 用训练样本中的充分统计量初始化[Friedman 1999a];

c) 用其它模型的预测值初始化[Mohan 2011].

GBDT很健壮, 对初始值并不敏感, 但是更好的初始值能够获得更快的收敛速度和质量.

2.1,  $\tilde{y}_i$ 被称作[响应\(response\)](#), 它是一个和[残差\(residual\)](#):  $y_i - F_{k-1}(x_i)$ 正相关的变量, 下文会看到这一点.

2.2, 公式背后表达的是, 使用[平方误差](#)训练一颗决策树  $f_k$ , 拟合数据  $\{(x_i, \tilde{y}_i)\}_1^N$ .

2.3, 进行line search. 在2.2中的 $f$ 是在平方误差下学到的, 这一步进行一次line search, 让 $f$ 乘以步长 $\rho$ 后最小化 $\mathcal{L}$ .

实践中, 当这个最小化问题有解析解时, 直接用解析解带入算法; 否则将 $\mathcal{L}(\{y_i, F_{k-1}(x_i) + \rho f_k(x_i)\}_1^N)$ 在 $\rho$ 处用泰勒公式展开到二阶(这里不是xgboost最早提出的, 就在[Friedman 1999a]中), 然后通过一个Newton Step, 得到泰勒近似后的解析解.

观察2.3步骤中,  $\rho$ 是乘到了 $f_k(x_i)$ 上, 即等价于把每个叶子节点的值 $\{b_j\}_1^J$ 放大 $\rho$ 倍. 不妨将2.2和2.3两个过程合并, 直接找出 $f_k(x_i)$ 能够最小化2.3 中的问题. 这时, 就需要将 $\mathcal{L}(\{y_i, F_{k-1}(x_i) + f_k(x_i)\}_1^N)$ 在 $f_k$ 处进行泰勒展开了. 详细的推导放在下面的章节.

2.4, 将训练出来的 $f_k$ 叠加到 $F$ .

总体来说, GBDT就是一个不断拟合响应(残差)并叠加到 $F$ 上的过程. 在这个过程中, 残差不断变小, Loss不断接近最小值.

## 4 树生成算法

上文提出了, 算法1的2.2和2.3可以合并.

同时, 给出xgboost中使用的正则化函数:

$$\Omega(f_k) = \frac{\gamma}{2}J + \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^J b_j^2 \quad (4)$$

记住我们的目标是求 $f_k$ , 它最小化目标函数:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_k &= \sum_{i=1}^N L(y_i, F_{k-1}(x_i) + \rho f_k(x_i)) + \Omega(f_k) \\
&= \sum_{i=1}^N L(y_i, F_{k-1} + \rho f_k) + \Omega(f_k) \\
&\approx \sum_{i=1}^N \left( L(y_i, F_{k-1}) + \underbrace{\frac{\partial L(y_i, F_{k-1})}{\partial F_{k-1}}}_{:=g_i} f_k + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 L(y_i, F_{k-1})}{\partial F_{k-1}^2}}_{:=h_i} f_k^2 \right) + \Omega(f_k) \\
&= \sum_{i=1}^N \left( L(y_i, F_{k-1}) + g_i f_k + \frac{1}{2} h_i f_k^2 \right) + \Omega(f_k) \\
&= \sum_{i=1}^N \left( L(y_i, F_{k-1}) + g_i \sum_{j=1}^J b_j + \frac{1}{2} h_i \sum_{j=1}^J b_j^2 \right) + \frac{\gamma}{2} J + \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^J b_j^2
\end{aligned}$$

整理出和 $\{R_j\}_1^J, \{b_j\}_1^J$ 有关的项:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_k(\{b_j\}_1^J, \{R_j\}_1^J) &= \sum_{i=1}^N \left( g_i \sum_{j=1}^J b_j + \frac{1}{2} h_i \sum_{j=1}^J b_j^2 \right) + \frac{\gamma}{2} J + \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^J b_j^2 \\
&= \sum_{x_i \in R_j} \left( g_i \sum_{j=1}^J b_j + \frac{1}{2} h_i \sum_{j=1}^J b_j^2 \right) + \frac{\gamma}{2} J + \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^J b_j^2 \\
&= \sum_{j=1}^J \left( \sum_{x_i \in R_j} g_i b_j + \sum_{x_i \in R_j} \frac{1}{2} h_i b_j^2 \right) + \frac{\gamma}{2} J + \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^J b_j^2 \\
&= \sum_{j=1}^J \left( \underbrace{\sum_{x_i \in R_j} g_i}_{:=G_j} b_j + \frac{1}{2} \left( \underbrace{\sum_{x_i \in R_j} h_i + \lambda}_{:=H_j} \right) b_j^2 \right) + \frac{\gamma}{2} J \\
&= \sum_{j=1}^J \left( G_j b_j + \frac{1}{2} (H_j + \lambda) b_j^2 \right) + \frac{\gamma}{2} J \tag{5}
\end{aligned}$$

现在问题来了: 我们如何同时求得 $\{R_j\}_1^J$ 和 $\{b_j\}_1^J$ .

为了方便阐述这个问题, 把问题分为两个子问题:

问题1: 如果已经得到了 $\{R_j\}_1^J$ , 最小化 $\mathcal{L}_k$ 的 $\{b_j\}_1^J$ 是多少?

问题2: 如果将当前节点 $R_i$ 分裂, 应该在哪一个分裂点使得 $\mathcal{L}_k$ 最小? 这一步我称之为[树分裂算法](#).

上面两个问题的答案归纳的描述出了[树生成算法](#): 对根节点使用树分裂算法, 得到左子树 $R_L$ 和右子树 $R_R$ 的[同时](#)计算出 $b_L$ 和 $b_R$ . 对每个叶子节点重复上面的分裂过程, 直到满足一定条件后退出.

## 4.1 问题1

对公式5的 $b_j$ 求导, 令结果为零, 容易求得:

$$b_j^* = -\frac{G_j}{H_j + \lambda} \quad (6)$$

$j = 1, 2, \dots, J$ .

此时最小的 $\mathcal{L}_k$ 是:

$$\mathcal{L}_k^* = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \frac{G_j^2}{H_j + \lambda} + \frac{\gamma}{2} J \quad (7)$$

## 4.2 问题2: 树分裂算法

求 $\{R_j\}_1^J$ 与求 $\{b_j\}_1^J$ 的方法不同, 前者它是对输入 $x$ 所属空间的一种划分方法, 不连续, 无法求导.

精确得到划分 $\{R_j\}_1^J$ 是一个NP问题, 取而代之, 大家都使用贪心法. 即分裂某节点时, 只考虑对当前节点分裂后, 哪个分裂方案能得到最小的 $\mathcal{L}_k$ .

像传统决策树一样, CART中的办法也是遍历 $x$ 的每个维度的每个分裂点, 根据问题1计算 $\{b_j\}_1^J$ 和最小的 $\mathcal{L}_k$ . 这个过程在xgboost中有所优化, 第二篇会详细介绍.

那么现在把问题2形式化的定义出: 将当前节点 $R_j$ 分裂成 $R_L$ 和 $R_R$ , 使得分裂后[整棵树](#)的 $\mathcal{L}_k$ 最小.

再看看公式7, 整棵树的最小 $\mathcal{L}_k$ 等于每个叶子节点上(最小)Loss的和. 由于整个分裂过程只涉及到3个节点, 其它任何节点的Loss在过程中不变, 这个问题又等价于:

$$\min_{R_L, R_R} \frac{G_L^2}{H_L + \gamma} + \frac{G_R^2}{H_R + \gamma} - \frac{(G_L + G_R)^2}{H_L + H_R + \gamma} \quad (8)$$

公式8有明确的物理含义, 前两项分别加上新生成的叶子节点的最小Loss, 第3项是指减去被分裂的叶子节点的最小Loss. 它是将节点 $R_j$ 分裂成 $R_L$ 和 $R_R$ 后, 整棵树最小 $\mathcal{L}_k$ 的降低量, 这个量越大越好. 有点拗口, 慢慢体会.

如果公式8的值小于0(意味 $\mathcal{L}_k$ 不能通过分裂降低), 或者满足其它终止条件, 则不分裂 $R_j$ . 否则, 按照最小的 $\mathcal{L}_k$ 计划分裂.

算法2正式的描述了树分裂算法.

算法3描述了使用算法2树分裂算法的改进GBDT算法.

## 5 LSBoost和LogitBoost

本节挑两个最常用的Loss, 介绍基于这两种Loss的GBDT算法: LSBoost, LogitBoost.

$L$ 为平方误差时:

$$L = \frac{(y - F(x))^2}{2} \quad (9)$$

对 $F$ 求导得到响应(此时响应=残差):

$$\tilde{y}_i = -g_i = -\frac{\partial L(y_i, F(x_i))}{\partial F} = y - F(x) \quad (10)$$

二阶导是:

$$h_i = 1 \quad (11)$$

**输入:**  $R_j$ , 落在  $R_j$  的训练样本  $\{(x_i^{(j)}, y_i^{(j)})\}_1^N, \dots$ , 其中  $x_i^{(j)} \in \mathbb{R}^m$

decr = 0

$G = \sum_{i=1}^N g_i, H = \sum_{i=1}^N h_i$

**for**  $k = 1$  **to**  $m$  **do**

$G_L = 0, H_L = 0$

**for**  $l$  *in*  $\text{uniq}(\text{sorted}(\{x_{ik}^{(j)}\}))$  **do**

$G_L = G_L + g_l, H_L = H_L + h_l$

$G_R = G - G_L, H_R = H - H_L$

        decr =  $\max\left(\text{decr}, \frac{G_L^2}{H_L + \gamma} + \frac{G_R^2}{H_R + \gamma} - \frac{(G_L + G_R)^2}{H_L + H_R + \gamma}\right)$

**end**

**end**

**if**  $\text{decr} < 0$  *or* 满足终止条件 **then**

**输出:** 保持  $R_j$  不分裂

**end**

**输出:** 按照最大decr的方案将  $R_j$  分裂成  $R_L$  和  $R_R$

**Algorithm 2:** 树分裂算法

**输入:**  $\{(x_i, y_i)\}_1^N, K, \dots$

1. 初始化  $f_0$

**for**  $k = 1$  **to**  $K$  **do**

    2.1. 根据公式10或13计算  $\tilde{y}_i, i = 1, 2, \dots, N$

    2.2. 由树生成算法得到  $\{R_j\}_1^J$  和  $\{b_j\}_1^J, g_j$  和  $h_j$  根据具体的  $L$  计算.

    2.3. 令  $F_k = F_{k-1} + f_k$

**end**

**Algorithm 3:** GBDT算法-改进



另外一个Logistic Loss, 即logistic regression中使用的交叉熵Loss. 顾名思义, 使用这个Loss的时候, 只能用于分类问题.

规定 $y \in \{-1, 1\}$ , 则

$$L = \log(1 + \exp(-2yF(x))) \quad (12)$$

对 $F$ 求导得到响应:

$$\tilde{y}_i = -g_i = \frac{2y_i}{1 + \exp(2y_i F(x_i))} \quad (13)$$

二阶导是:

$$h_i = \frac{4 \exp(2y_i F(x_i))}{(1 + \exp(2y_i F(x_i)))^2} = |g_i|(2 - |g_i|) \quad (14)$$

将上面两种Loss的 $L, \tilde{y}, g_i, h_i$ 分别带入算法1, 即得到LSBoost和LogitBoost[Friedman 1999a].

**输入:**  $\{(x_i, y_i)\}_1^N, K, \dots$

1. 初始化 $f_0$

**for**  $k = 1$  **to**  $K$  **do**

2.1. 根据公式10或13计算 $\tilde{y}_i, i = 1, 2, \dots, N$

2.2. 由树生成算法得到 $\{R_j\}_1^J$ 和 $\{b_j\}_1^J, g_j$ 和 $h_j$ 分别使用公式1011或1314计算.

2.3. 令 $F_k = F_{k-1} + f_k$

**end**

**输出:**  $F_K$

**Algorithm 4:** LSBoost & LogitBoost

## 6 正则化

GBDT有非常快降低Loss的能力, 这也会造成一个问题: Loss迅速下降, 模型低bias, 高variance, 造成过拟合.

下面一一介绍GBDT中抵抗过拟合的技巧.

**限制树的复杂度.**  $\Omega$ 函数对树的节点数, 和节点上预测值 $\{b_j\}_1^J$ 的平方和均有惩罚. 除此之外, 我们通常在终止条件上还会增加一条: 树的深度.

**采样.** 即训练每个树的时候, 只使用一部分的样本.

**列采样.** 即训练每个树的时候, 只使用一部分的特征. 这时xgboost的创新, 它将随机森林中的思想引入了GBDT.

**Shrinkage.** 进一步惩罚 $\{b_j\}_1^J$ , 给它们乘一个小于1的系数. 也可以理解为设置了一个较低的学习率.

**Early stop.** 因为GBDT的可叠加性, 我们使用的模型不一定是最终的ensemble, 而根据测试集的测试情况, 选择使用前若干棵树.

## 7 思考

请读者思考两个问题:

1. 算法1和算法3的两个方法是否等价? **如何证明等价咧?**
2. [Friedman 1999a]的推导和xgboost的推导是否等价?

两个答案都是肯定的, 有兴趣的读者可以自行证明.

## 8 参考文献

[Friedman 1999a] J. Friedman(1999). Greedy Function Approximation: A Gradient Boosting Machine.

- [Friedman 1999b] J. Friedman(1999). Stochastic Gradient Boosting.
- [Friedman 2000] J. Friedman, T. Hastie, R. Tibshirani(2000). Additive Logistic Regression: A Statistical View of Boosting.
- [Mohan 2011] A. Mohan, Z. Chen, K. Weinberger(2011). Web-Search Ranking with Initialized Gradient Boosted Regression Trees.
- [Johnson 2014] R. Johnson, T. Zhang(2014). Learning Nonlinear Functions Using Regularized Greedy Forest
- [Chen 2016] T. Chen, C. Guestrin(2016). XGBoost: A Scalable Tree Boosting System.