## 0.1 主成分分析

### 0.1.1 摘要

本期我们开始学习降维的算法。
我们知道，解决过拟合的问题除了增加数据和正则化之外，降维是最好的方法。
实际上，早先前辈们就遇见过维度灾难。我们知道 $n$ 维球体的体积为 $CR^n$
因此球体的体积与 $n$ 维超立方体的比值为

$$\lim_{n\to+\infty} = \frac{CR^n}{2^nR^n} = 0$$

由公式我们可以看出，在高维数据中，样本的分布是相当稀疏的，超立方体的内部基本上是空心的，因此对数据的建模增大了难度。这就是所谓的维度灾难。
降维的方法分为：

- 直接降维，特征选择
- 线性降维，PCA，MDS 等
- 分线性，流形包括 Isomap，LLE 等

### 0.1.2 算法思想

对于 PCA 的核心思想，老师总结了一句顺口溜：一个中心，两个基本点

- 一个中心：
  - 将原本可能线性相关的各个特征，通过正交变换，变换为一组线性无关的特征
  - 即对原始特征空间的重构。
- 两个基本点：
  - 最大投影方差
    * 使数据在重构后的特征空间中更加分散 (因为原始的数据都是聚为一堆分散在角落的)
  - 最小重构距离
    * 使得数据在重构之后，损失的信息最少 (即在补空间的分量更少)

### 0.1.3 算法

下面我们主要讲述第一个基本点：最大投影方差，其实两个基本点都是一个意思，只不过是从不同的角度对一个中心进行诠释。
首先是投影，关于投影的知识，我们前面已经讲过了，这里也是一样。我们假设样本点 $x_i$，一个基向量 $u_i$，假设 $u_i^Tu_i = 1$，因此可以得到样本在 $u_i$ 这个维度的投影为

$$project_i = x_i^Tu_i$$

而样本经正交变换后原本有 $p$ 个特征维度，因我们需对其降维，因此只取其前 $q$ 个特征，而这 $q$ 个特征都是线性无关的，因此可以将这些投影直接相加，得到样本在新的特征空间的投影。
注意在求投影之前先将数据做中心化，因此数据的均值归零，求投影的方差可以直接平方。
综上，我们得到了目标函数:

$$J=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{q}\left(\left(x_i-\bar{x}\right)^T u_j\right)^2$$

下面对目标函数稍作推导:
因为 $((x_i-\bar{x})^T u_j)$ 的形状为 $(1,p)*(p,1)=(1,1)$，因此可以对其做转置:

$$\begin{aligned}
J&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{q}\left(\left(x_i-\bar{x}\right)^T u_j\right)^2\\
&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{q}(u_j^T(x_i-\bar{x}))^2\\
&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{q}u_j^T(x_i-\bar{x}))(x_i-\bar{x})^T u_j\\
&=\sum_{j=1}^{q}u_j^T(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x}))(x_i-\bar{x})^T)u_j\\
&=\sum_{j=1}^{q}u_j^T S u_j
\end{aligned}$$

别忘了我们还有一个限制条件: $s.t\ u_j^T u_j=1$
因此可以使用拉格朗日乘子法:

$$\underset{u_j}{\operatorname{argmax}} L\left(u_j,\lambda\right)=\underset{u_j}{\operatorname{argmax}} u_j^T S u_j+\lambda\left(1-u_j^T u_j\right)$$

对上式求导:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial u_j}=2Su_j-2\lambda u_j=0$$

得到结果:

$$Su_j=\lambda u_j$$

可以看出，变换后的基向量实际上为协方差矩阵的特征向量，$\lambda$ 为 $S$ 的特征值
实际上，对于协方差矩阵的求解也可以化简：

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(x_i-\bar{x}\right)^T \\
&= \frac{1}{N}\left(x_1-\bar{x}, x_2-\bar{x}, \cdots, x_N-\bar{x}\right)\left(x_1-\bar{x}, x_2-\bar{x}, \cdots, x_N-\bar{x}\right)^T \\
&= \frac{1}{N}\left(X^T-\frac{1}{N}X^T I_N I_N^T\right)\left(X^T-\frac{1}{N}X^T I_N I_N^T\right)^T \\
&= \frac{1}{N}X^T\left(E_N-\frac{1}{N}I_N I_N^T\right)\left(E_N-\frac{1}{N}I_N I_N^T\right)^T X \\
&= \frac{1}{N}X^T H_N H_N^T X \\
&= \frac{1}{N}X^T H_N H_N X = \frac{1}{N}X^T H X
\end{aligned}
$$

这里 $H$ 是一个特殊的矩阵，被称为中心矩阵。

$$
H = E_N - \frac{1}{N}I_N I_N^T
$$

因此，在实作中，我们只需要用上式求出协方差矩阵，然后对其做正交分解得到特征值与特征向量即可。

### 0.1.4 实作

```
import numpy as np
import os
os.chdir("../")
from models.decompose_models import PCA

k, b = 3, 4
x = np.linspace(0, 10, 100)
y = x * k + b
x += np.random.normal(scale=0.3, size=x.shape)
data = np.c_[x, y]

model = PCA()
model.fit(data)
model.draw(data)
```