Plan

Plan

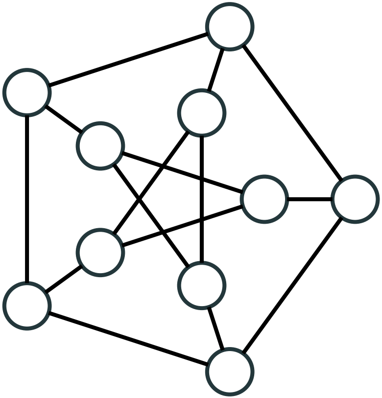
k-coloration

Soit $G = (V, E)$ un graphe, $k \in \mathbb{N}$. Une k-**coloration** de G est une fonction $f : V \longrightarrow [k]$, telle que pour chaque deux noeuds voisins $u, v \in V$ on a $f(u) \neq f(v)$.

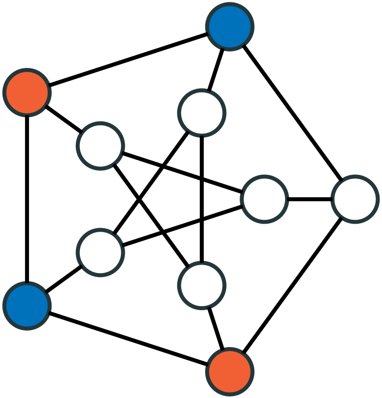
k-coloration

Soit $G = (V, E)$ un graphe, $k \in \mathbb{N}$. Une k-**coloration** de G est une fonction $f : V \longrightarrow [k]$, telle que pour chaque deux noeuds voisins $u, v \in V$ on a $f(u) \neq f(v)$.
Le **nombre chromatique** $\chi(G)$ est le plus petit nombre $k \in \mathbb{N}$, tel qu'il existe une k-coloration de G .

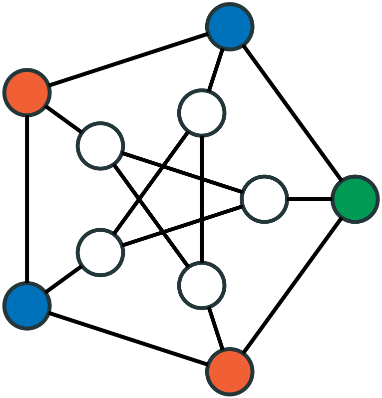
Chromatic Number



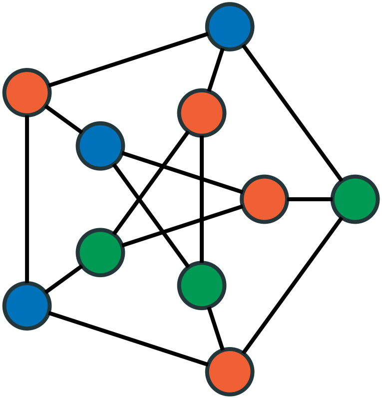
Chromatic Number



Chromatic Number

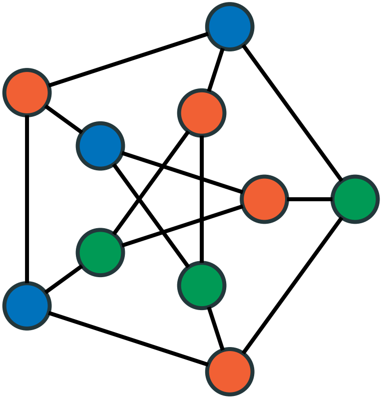


Chromatic Number

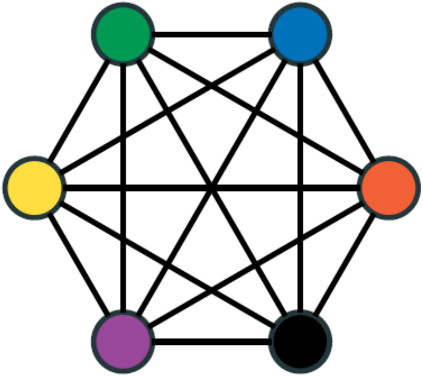


Chromatic Number

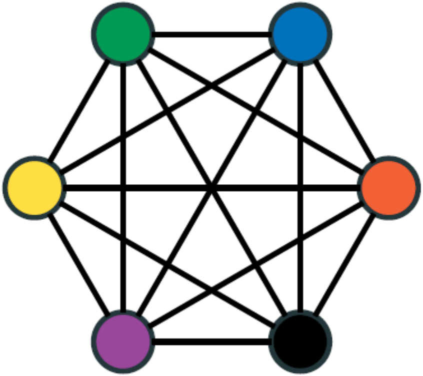
Chromatic number is 3



Graphe complet K_n



Graphe complet K_n



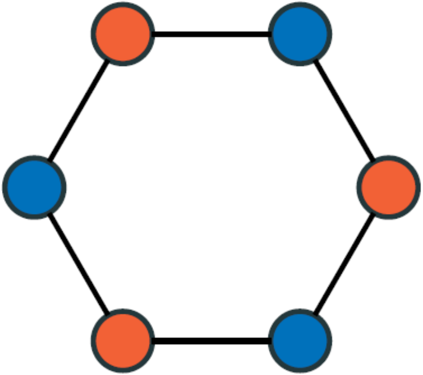
Le nombre chromatique de K_n égale à n.

Chaîne

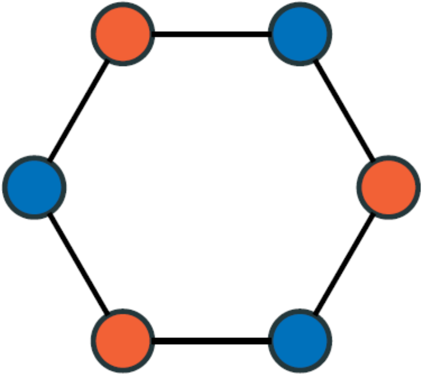
Chaîne

Pour $n > 1$, le nombre chromatique d'une chaîne P_n égale à 2.

Cycle

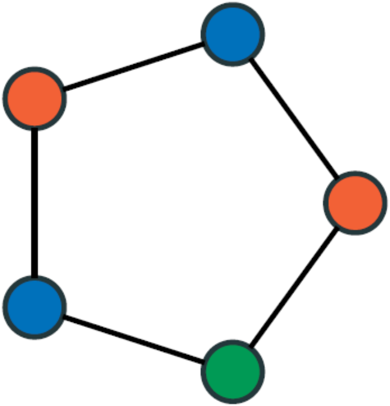


Cycle

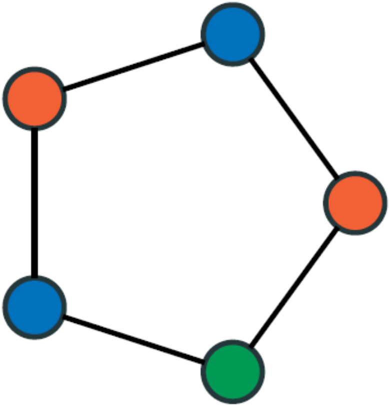


Si n est pair, le nombre chromatique d'un cycle C_n égale à 2.

Cycle

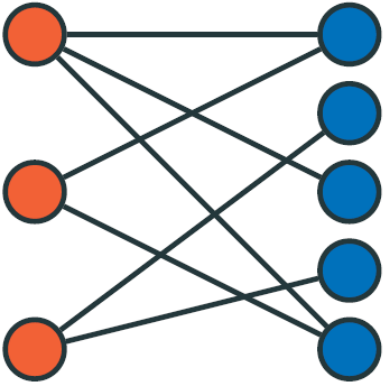


Cycle

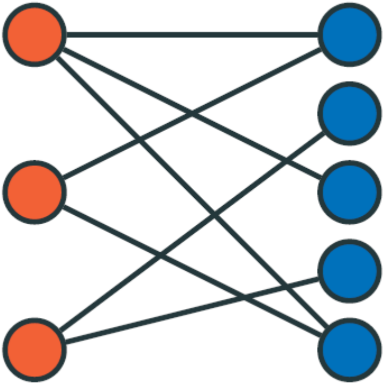


Si n est impair, le nombre chromatique d'un cycle C_n égale à 3.

graphe biparti



graphe biparti



Le nombre chromatique d'un graphe biparti, contenant au moins une arête, égale à 2.

Exercice

Montrer que pour tout graphe G ayant n nœuds, on a

$$\chi(G).\alpha(n) \geq n$$

Caractérisation d'un graphe biparti

Soit $G = (V, E)$ un graphe non vide. les assertions suivantes sont équivalentes :

1. G est biparti, $V = S \uplus T$, $E(S) = E(T) = \emptyset$.
2. $\chi(G) = 2$.
3. G contient aucun cycle de longueur impaire.

Preuve

$\boxed{1)\ \Rightarrow 2)}$

Preuve

$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ On peut colorer S avec la première couleur et T avec la deuxième couleur, c.à.d. $\chi(G) \leq 2$. Puisque $E \neq \emptyset$ nous avons $\chi(G) \geq 2$ (les deux extrémités de l'arête doivent être colorées différemment).

Preuve

$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ On peut colorer S avec la première couleur et T avec la deuxième couleur, c.à.d. $\chi(G) \leq 2$. Puisque $E \neq \emptyset$ nous avons $\chi(G) \geq 2$ (les deux extrémités de l'arête doivent être colorées différemment).

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ Soit f une 2-coloration de G.

Preuve

$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ On peut colorer S avec la première couleur et T avec la deuxième couleur, c.à.d. $\chi(G) \leq 2$. Puisque $E \neq \emptyset$ nous avons $\chi(G) \geq 2$ (les deux extrémités de l'arête doivent être colorées différemment).
$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ Soit f une 2-coloration de G. On partage l'ensemble des nœuds V en deux ensemble S, T, où chaque ensemble est monochromatique, c.à.d. $S := f^{-1}(\{1\})$ et $T := f^{-1}(\{2\})$.

Preuve

$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ On peut colorer S avec la première couleur et T avec la deuxième couleur, c.à.d. $\chi(G) \leq 2$. Puisque $E \neq \emptyset$ nous avons $\chi(G) \geq 2$ (les deux extrémités de l'arête doivent être colorées différemment).

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ Soit f une 2-coloration de G. On partage l'ensemble des nœuds V en deux ensemble S, T, où chaque ensemble est monochromatique, c.à.d. $S := f^{-1}(\{1\})$ et $T := f^{-1}(\{2\})$.Alors nous aurons $S \uplus T = V$.

Preuve

$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ On peut colorer S avec la première couleur et T avec la deuxième couleur, c.à.d. $\chi(G) \leq 2$. Puisque $E \neq \emptyset$ nous avons $\chi(G) \geq 2$ (les deux extrémités de l'arête doivent être colorées différemment).

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ Soit $f$une 2-coloration de G. On partage l'ensemble des nœuds V en deux ensemble S, T, où chaque ensemble est monochromatique, c.à.d. $S := f^{-1}(\{1\})$ et $T := f^{-1}(\{2\})$.Alors nous aurons $S \uplus T = V$. Il s'ensuit que T et S ne contiennent aucune arête.

Preuve

$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ On peut colorer S avec la première couleur et T avec la deuxième couleur, c.à.d. $\chi(G) \leq 2$. Puisque $E \neq \emptyset$ nous avons $\chi(G) \geq 2$ (les deux extrémités de l'arête doivent être colorées différemment).

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ Soit $f$une 2-coloration de G. On partage l'ensemble des nœuds V en deux ensemble S, T, où chaque ensemble est monochromatique, c.à.d. $S := f^{-1}(\{1\})$ et $T := f^{-1}(\{2\})$.Alors nous aurons $S \uplus T = V$.
Il s'ensuit que T et S ne contiennent aucune arête.
Soit $C_\ell = (v_1, v_2, \ldots, v_\ell, v_1)$ un cycle dans G. Supposons par exemple $v_1 \in S$. Puisque dans S (et T) il n'y a pas d'arête, alors

Preuve

$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ On peut colorer S avec la première couleur et T avec la deuxième couleur, c.à.d. $\chi(G) \leq 2$. Puisque $E \neq \emptyset$ nous avons $\chi(G) \geq 2$ (les deux extrémités de l'arête doivent être colorées différemment).

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ Soit f une 2-coloration de G. On partage l'ensemble des nœuds V en deux ensemble S, T, où chaque ensemble est monochromatique, c.à.d. $S := f^{-1}(\{1\})$ et $T := f^{-1}(\{2\})$.Alors nous aurons $S \uplus T = V$.
Il s'ensuit que T et S ne contiennent aucune arête.
Soit $C_\ell = (v_1, v_2, \ldots, v_\ell, v_1)$ un cycle dans G. Supposons par exemple $v_1 \in S$. Puisque dans S (et T) il n'y a pas d'arête, alors

$$v_2 \in T, v_3 \in S, \ldots, v_\ell \in T, v_1 \in S,$$

Preuve

$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ On peut colorer S avec la première couleur et T avec la deuxième couleur, c.à.d. $\chi(G) \leq 2$. Puisque $E \neq \emptyset$ nous avons $\chi(G) \geq 2$ (les deux extrémités de l'arête doivent être colorées différemment).

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ Soit f une 2-coloration de G. On partage l'ensemble des nœuds V en deux ensemble S, T, où chaque ensemble est monochromatique, c.à.d. $S := f^{-1}(\{1\})$ et $T := f^{-1}(\{2\})$.Alors nous aurons $S \uplus T = V$. Il s'ensuit que T et S ne contiennent aucune arête.

Soit $C_\ell = (v_1, v_2, \ldots, v_\ell, v_1)$ un cycle dans G. Supposons par exemple $v_1 \in S$. Puisque dans S (et T) il n'y a pas d'arête, alors

$$v_2 \in T, v_3 \in S, \ldots, v_\ell \in T, v_1 \in S,$$

d'où l'indice ℓ est paire, c.à.d. la longueur de la chaîne $(v_1, \ldots, v_\ell)$ est paire et par suite C_ℓ a une longueur paire.

Preuve

$\boxed{3) \Rightarrow 1)}$ Sans perte de généralité, on peut supposer que G connexe.

Preuve

$\boxed{3) \Rightarrow 1)}$ Sans perte de généralité, on peut supposer que G connexe. Nous choisissons un nœud v_0. Soit S l'ensemble de tout les nœuds qui ont une distance impaire de v_0, et avec T le complémentaire de S.

Preuve

$\boxed{3) \Rightarrow 1)}$ Sans perte de généralité, on peut supposer que G connexe. Nous choisissons un nœud v_0. Soit S l'ensemble de tout les nœuds qui ont une distance impaire de v_0, et avec T le complémentaire de S. Supposons qu'il existe une arête $\{v, u\} \in S$.

Preuve

$\boxed{3) \Rightarrow 1)}$ Sans perte de généralité, on peut supposer que G connexe. Nous choisissons un nœud v_0. Soit S l'ensemble de tout les nœuds qui ont une distance impaire de v_0, et avec T le complémentaire de S. Supposons qu'il existe une arête $\{v, u\} \in S$. Soient $P_v = (v_1 = v_0, v_2, \ldots, v_k = v)$, $P_u = (u_1 = v_0, u_2, \ldots, u_\ell = u)$ le plus court chemin de v_0 vers v et vers u. D'après les données ont P_v et P_u une longueur impaire. Soit x le dernier nœuds commun sur les deux chaînes , c.à.d. $x \in V(P_v) \cap V(P_u)$, $x = v_{i_0} = u_{j_0}$, et pour tout $i > i_0$ on a $v_i \notin V(P_u)$ et pour tout $j > j_0$ on a $u_j \notin V(P_v)$. Alors $C := (x = v_{i_0}, v_{i_0+1}, \ldots, v = v_k, u = u_\ell, u_{\ell-1}, \ldots, u_{j_0+1}, u_{j_0} = x)$ construit un cycle. Puisque P_v et P_u les deux sont des plus courts chemin, alors on aura $i_0 = j_0$.

Preuve

$\boxed{3) \Rightarrow 1)}$ Sans perte de généralité, on peut supposer que G connexe. Nous choisissons un nœud v_0. Soit S l'ensemble de tout les nœuds qui ont une distance impaire de v_0, et avec T le complémentaire de S. Supposons qu'il existe une arête $\{v, u\} \in S$. Soient $P_v = (v_1 = v_0, v_2, \dots, v_k = v)$, $P_u = (u_1 = v_0, u_2, \dots, u_\ell = u)$ le plus court chemin de v_0 vers v et vers u. D'après les données ont P_v et P_u une longueur impaire. Soit x le dernier nœuds commun sur les deux chaînes , c.à.d. $x \in V(P_v) \cap V(P_u)$, $x = v_{i_0} = u_{j_0}$, et pour tout $i > i_0$ on a $v_i \notin V(P_u)$ et pour tout $j > j_0$ on a $u_j \notin V(P_v)$. Alors $C := (x = v_{i_0}, v_{i_0+1}, \dots, v = v_k, u = u_\ell, u_{\ell-1}, \dots, u_{j_0+1}, u_{j_0} = x)$ construit un cycle. Puisque P_v et P_u les deux sont des plus courts chemin, alors on aura $i_0 = j_0$.Le chemin partiel de x vers v de P_v et celui de x vers u de P_u sont par suite ont tout les deux une longueur paire ou tout les deux impaire.

Preuve

$\boxed{3) \Rightarrow 1)}$ Sans perte de généralité, on peut supposer que G connexe. Nous choisissons un nœud v_0. Soit S l'ensemble de tout les nœuds qui ont une distance impaire de v_0, et avec T le complémentaire de S. Supposons qu'il existe une arête $\{v, u\} \in S$. Soient $P_v = (v_1 = v_0, v_2, \ldots, v_k = v)$, $P_u = (u_1 = v_0, u_2, \ldots, u_\ell = u)$ le plus court chemin de v_0 vers v et vers u. D'après les données ont P_v et P_u une longueur impaire. Soit x le dernier nœuds commun sur les deux chaînes , c.à.d. $x \in V(P_v) \cap V(P_u)$, $x = v_{i_0} = u_{j_0}$, et pour tout $i > i_0$ on a $v_i \notin V(P_u)$ et pour tout $j > j_0$ on a $u_j \notin V(P_v)$. Alors $C := (x = v_{i_0}, v_{i_0+1}, \ldots, v = v_k, u = u_\ell, u_{\ell-1}, \ldots, u_{j_0+1}, u_{j_0} = x)$ construit un cycle. Puisque P_v et P_u les deux sont des plus courts chemin, alors on aura $i_0 = j_0$.Le chemin partiel de x vers v de P_v et celui de x vers u de P_u sont par suite ont tout les deux une longueur paire ou tout les deux impaire.Par conséquence C est de longueur paire, ce qui est absurde.

Plan

1. k-coloration
2. Arbre couvrant minimal

Arbre couvrant minimal

Lemme

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. G est un arbre.
2. entre chaques deux noeuds dans G il existe exactement une chaîne.
3. G est connexe et $|E| = |V| - 1$.

Arbre couvrant minimal

Lemme

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. G est un arbre.
2. entre chaques deux noeuds dans G il existe exactement une chaîne.
3. G est connexe et $|E| = |V| - 1$.

Théorème (La Formule de Caley)

Le nombre d'arbres couvrants dans K_n est n^{n-2} (pour $n \geq 2$).

Arbre couvrant minimal

Lemme

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. G est un arbre.
2. entre chaques deux noeuds dans G il existe exactement une chaîne.
3. G est connexe et $|E| = |V| - 1$.

Théorème (La Formule de Caley)

Le nombre d'arbres couvrants dans K_n est n^{n-2} (pour $n \geq 2$).

Preuve : Voir J. Matoušek, J. Nešetřil, *Diskrete Mathematik*, pages 249–270.

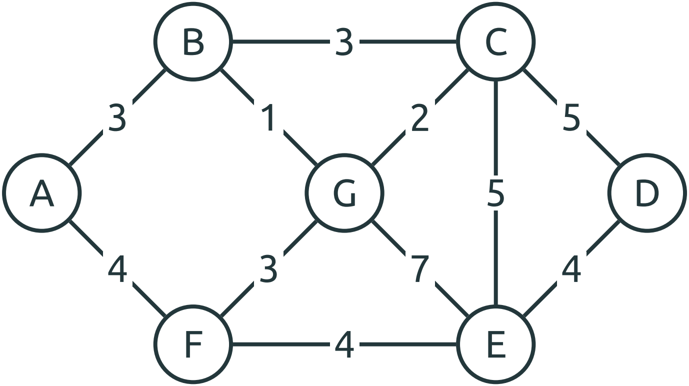
Données : $G = (V, E)$ graphe connexe, une fonction poids des arêtres $c : E \to \mathbb{Q}$.

Résultat : Trouver un arbre couvrant $T = (V, F)$ de G avec un poids minimal , c.à.d. avec $c(F) = \min\{c(F') : T' = (V, F') \text{ est un arbre}\}$.

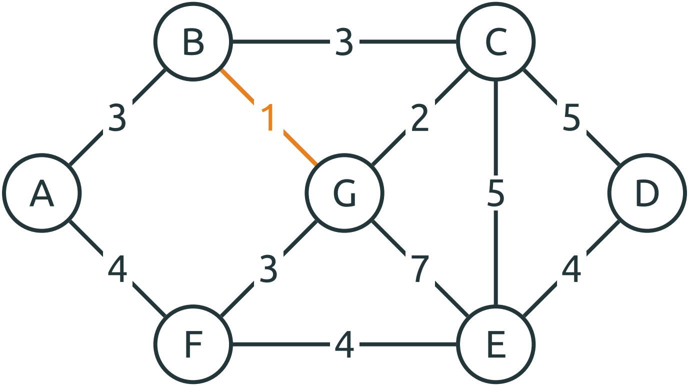
Kruskal's Algorithm

- Start with an empty graph T
- Repeat $n - 1$ times:
- Add to T an edge of the smallest weight which doesn't create a cycle in T

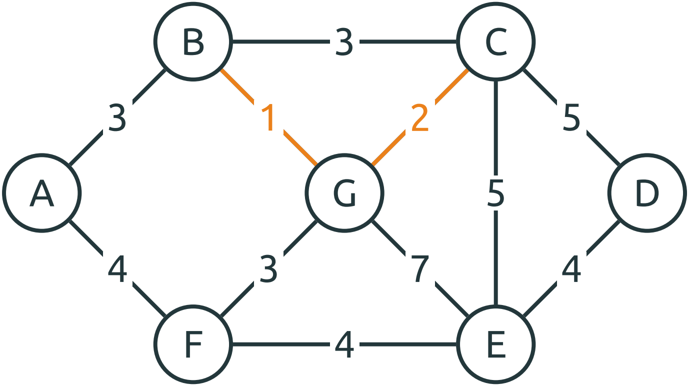
Kruskal's Algorithm: Examples



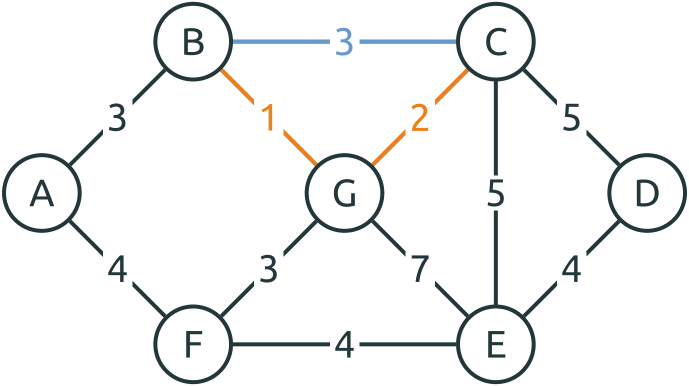
Kruskal's Algorithm: Examples



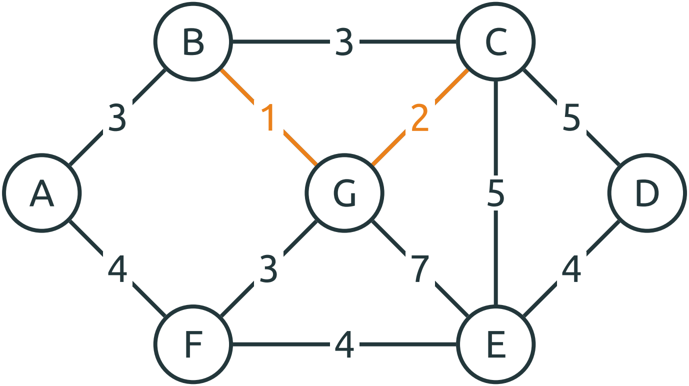
Kruskal's Algorithm: Examples



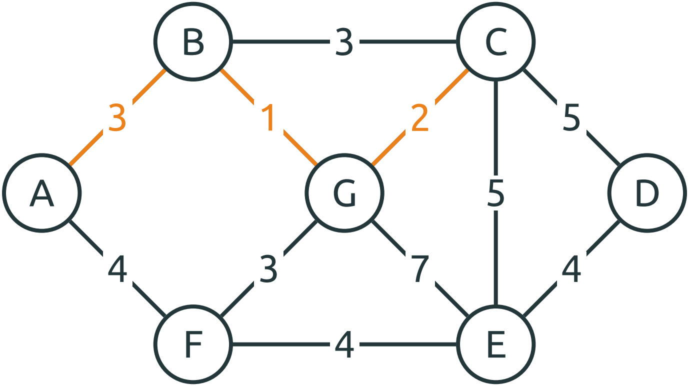
Kruskal's Algorithm: Examples



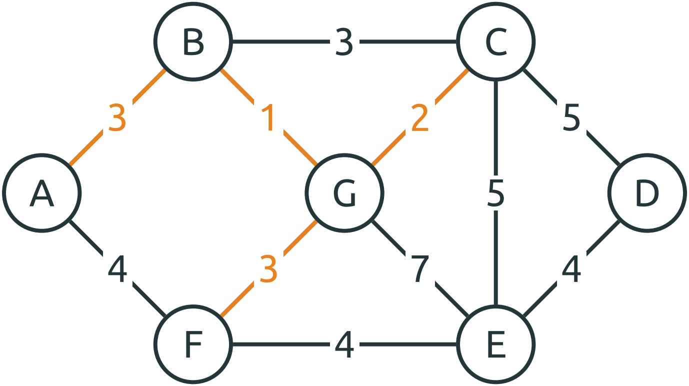
Kruskal's Algorithm: Examples



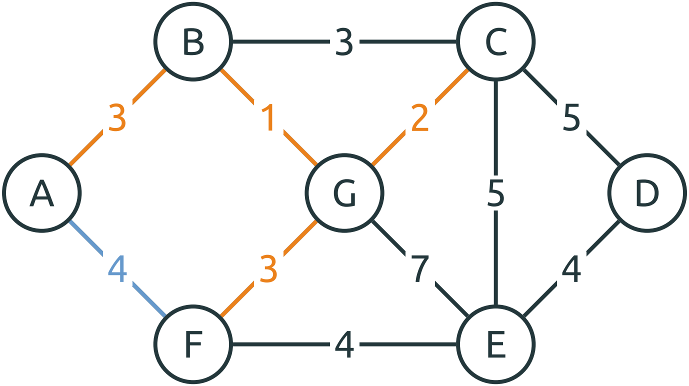
Kruskal's Algorithm: Examples



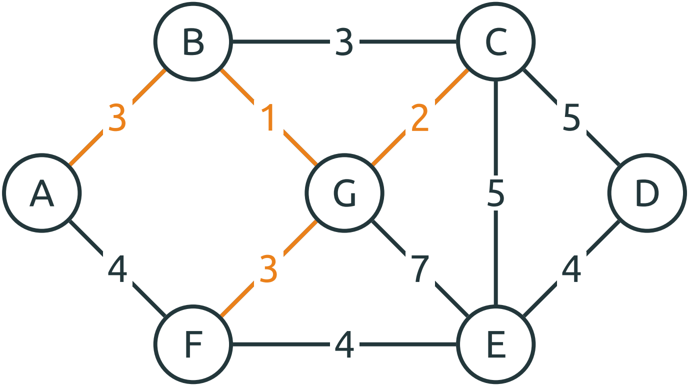
Kruskal's Algorithm: Examples



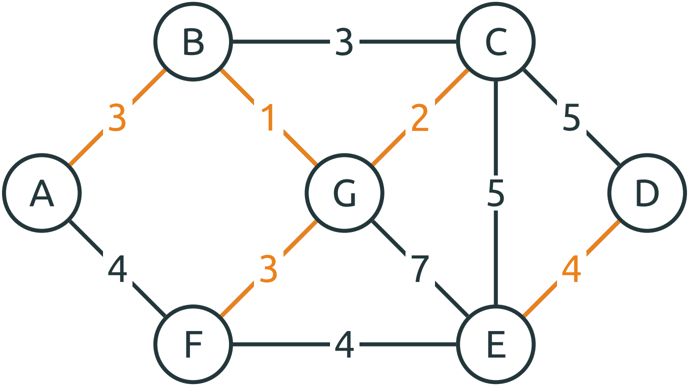
Kruskal's Algorithm: Examples



Kruskal's Algorithm: Examples



Kruskal's Algorithm: Examples



Kruskal's Algorithm: Examples