CHAPITRE II.

L'EQUILIBRE DU CONSOMMATEUR

Le consommateur est dit en équilibre, compte tenu de la contrainte imposée par son revenu et les prix des biens, quant il tire de ses dépenses une utilité (ou satisfaction) totale maximale. En d'autres termes, un consommateur en équilibre, quand étant donné, sa contrainte budgétaire, il atteint la courbe d'équivalence la plus élevée possible.

SECTION I.

CONTRAINTE BUDGETAIRE ET EQUILIBRE DU CONSOMMATEUR

La contrainte de budget indique toutes les différentes combinaisons de deux biens qu'un consommateur peut acheter, compte tenu de son revenu et du prix des deux biens.

Les courbes d'indifférence n'indiquent pas la combinaison optimale. Elles expriment « le souhaitable » du consommateur mais n'intégrant pas les contraintes qui pèsent sur sa décision.

A. La contrainte budgetaire

1. Définition :

Le consommateur doit choisir une combinaison parmi l'ensemble des combinaisons qui sont possibles compte tenu de son revenu (R), et des prix des biens X et Y (Px et Py). Le revenu est déterminé sur le marché de travail. Les prix des biens sont déterminés sur le marché des biens et services. R, Px et Py sont des données pour le consommateur. Ce sont des variables exogènes, qui s'imposent au consommateur comme des contraintes au moment des choix.

Concrètement, la contrainte budgétaire signifie que la dépense doit être égale au revenu :

$$R = Px.X + Py.Y$$

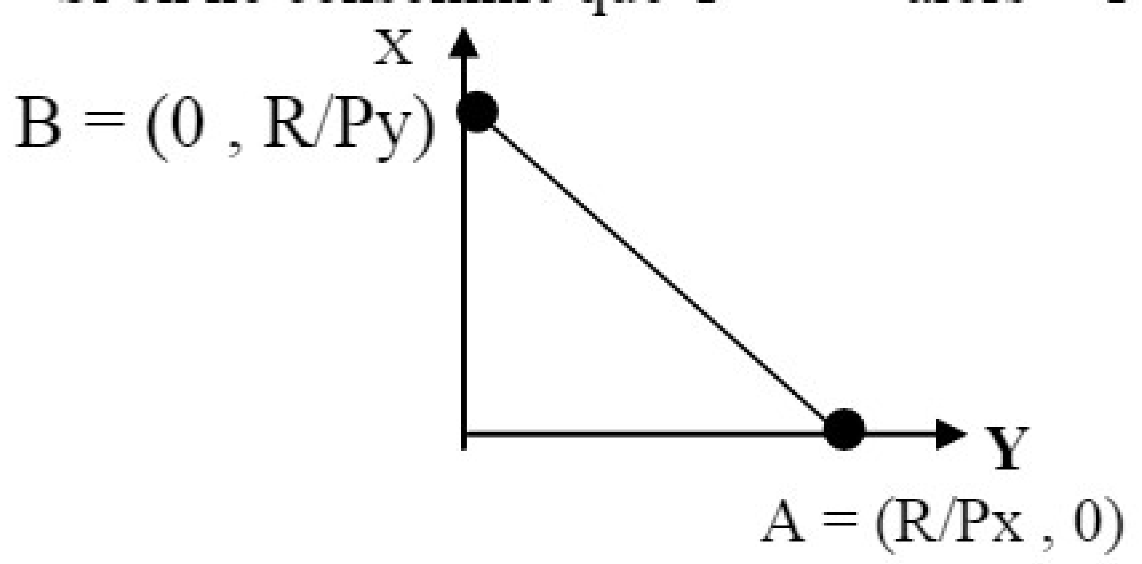
Revenu = prix de bien X multiplié par la qté de bien X + prix de bien Y multiplié par la qté Y

Revenu = dépense sur X + dépenses sur Y

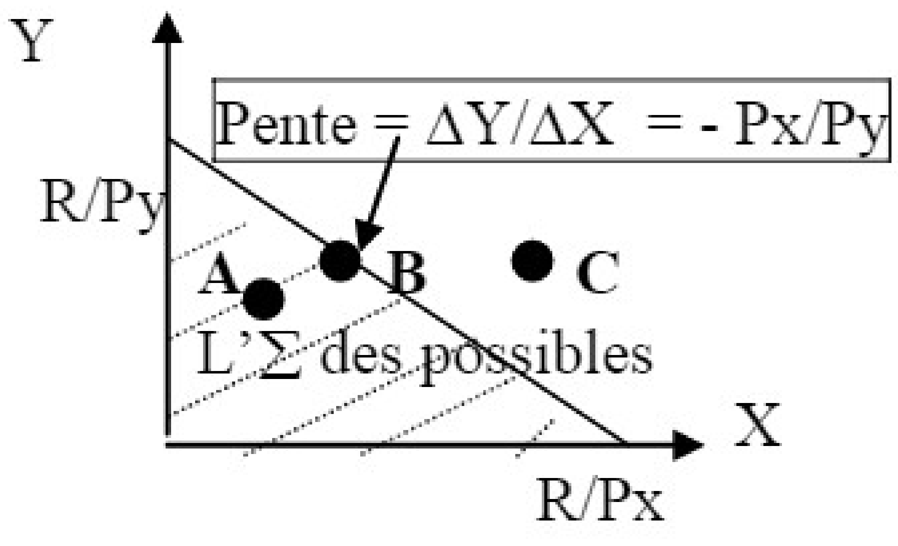
2. Représentation graphique :

On peur représenter la contrainte graphique : l'ensemble des combinaisons possibles de consommation des biens X et Y avec R donné est représenté par une droite. Il suffit de choisir les deux points extrêmes.

- Si on ne consomme que X alors $R = Px.X$ $X = R/\overline{Px}$ Panier A = (R/Px , 0)
- Si on ne consomme que Y alors $Y=Py.Y$ $Y = R/\overline{Py}$ Panier B = (0 , R/Py)



Les paniers intermédiaires entre ces deux extrêmes, se trouvent sur le segment de droite qui relie ces deux paniers. Ce segment de droite représente la contrainte budgétaire. L'ensemble des possibilités de consommation est représenté par le triangle hachuré y compris la frontière oblique.



Tous les paniers figurant dans la zone hachurée ou sur la droite, par exemple A et B peuvent être achetée par le consommateur. Mais un panier tel que A ne sera pas choisi, car le revenu ne serait pas intégralement dépensé. Les paniers au-dessus de la droite, tels que C, ne peuvent non plus être choisi puisqu'ils ne respectent pas la contrainte financière

3. Equation :

Equation de la contrainte budgétaire $\boxed{Y = (R/Px) - (Px/Py) . X}$

Cette équation décrit comment évolue la consommation de Y en fonction de celle de X.

Cette relation, qui exprime la contrainte financière du consommateur, est appelée droite de budget.

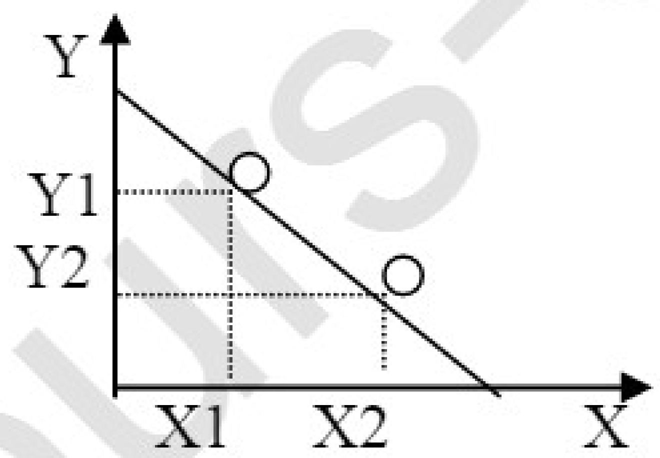
$\boxed{\text{-(Px/Py) mesure la pente de la droite budgétaire}}$.

4. Propriétés

La pente de la contrainte budgétaire met en évidence un coût d'opportunité à caractère objectif, du point de vue du consommateur.

Si le consommateur désire augmenter X de (X1-X2) il ne pourra le faire que lorsqu'il renonce à une partie de la consommation de Y de (Y2-Y1).

Au départ on $R = Px .X + Py . Y$



Supposons des variations dX et dY en respectant la contrainte budgétaire, On a :

$Px (X + dX) + Py (Y + dY) = R$

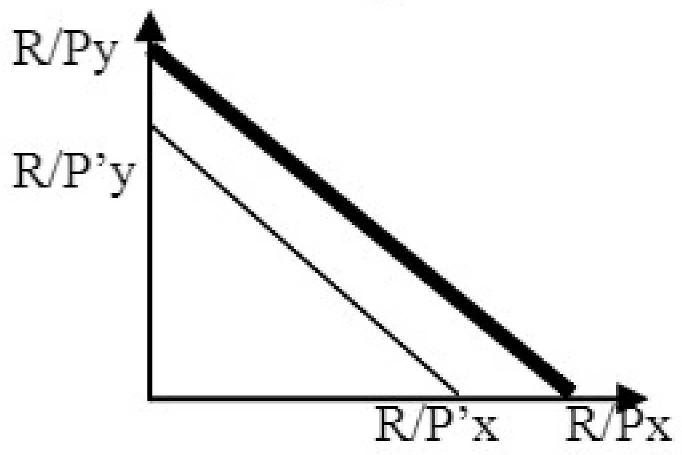
$(Px X + Py Y) + Px dX Py dY = R$

$\Rightarrow - dY / dX = Px / Py$

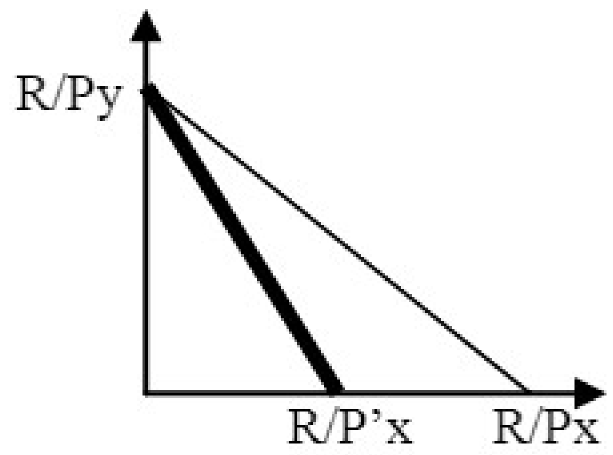
5. Effets d'une variation du prix et du revenu sur contrainte budgétaire

- Si le revenu augmente de R à R', la courbe de la contrainte budgétaire se déplace vers le haut (cas a)

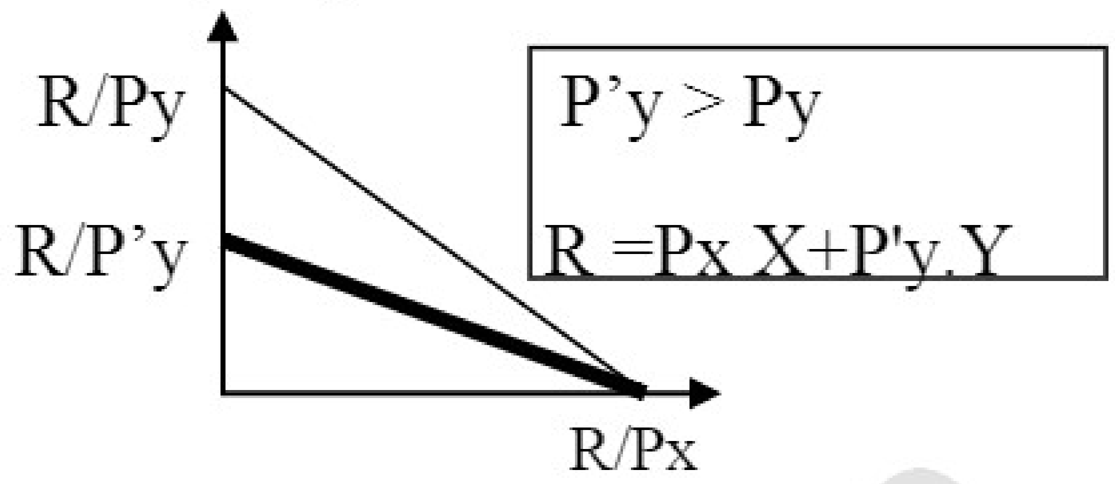
- Si le prix de X augmente, la courbe s'incline du côté des X (cas b).
- Si le prix de Y augmente la courbe s'incline du côté de Y (cas c).



cas a



cas b



cas c

B. DETERMINATION DE L'EQUILIBRE DU CONSOMMATEUR

La théorie des choix :

La théorie des choix met en évidence les principes qui déterminent le choix de consommation. Le consommateur atteint sa consommation d'équilibre lorsque la combinaison de consommation retenue lui procure la plus grande satisfaction qu'il soit possible d'obtenir, compte tenu des contraintes qui représentent le niveau des prix et le budget de consommation disponible.

On a admis que le consommateur rationnel est celui qui recherchait un maximum de satisfaction. On peut élargir l'approche en disant qu'un agent économique est rationnel s'il cherche à optimiser une fin, compte tenu de moyens donnés ou bien à réaliser une fin donnée en optimisant les moyens à mettre en œuvre pour la réaliser.

L'application de ces principes au comportement du consommateur donnera deux formulations de la notion de comportement rationnel :

- le consommateur sera rationnel s'il cherche à obtenir le maximum de satisfaction du revenu dont il dispose
- Le consommateur sera rationnel s'il cherche à rendre minimum le revenu nécessaire pour obtenir un niveau donné de satisfaction.

En définissant le comportement du consommateur de l'une ou de l'autre façon, on est conduit à admettre que le comportement rationnel s'identifie à la recherche d'un optimum sous contrainte.

Si on connaît le revenu disponible de l'individu et les prix unitaires des biens, le consommateur sera rationnel s'il cherche à obtenir un maximum de satisfaction sous la contrainte de son budget et des prix qui sont donnés.

La maximisation sous contrainte :

La recherche de l'optimum du consommateur consiste à déterminer les quantités maximales de biens, X* et Y*, qui maximisent l'utilité sous contrainte budgétaire. Mathématiquement, il s'agit de trouver un extremum sous contrainte qui se formule ainsi :

Maximiser $U = U(X,Y)$

Sous contrainte : $R = P_x .X + P_y . Y$ Où R, Px et Py sont des constantes.

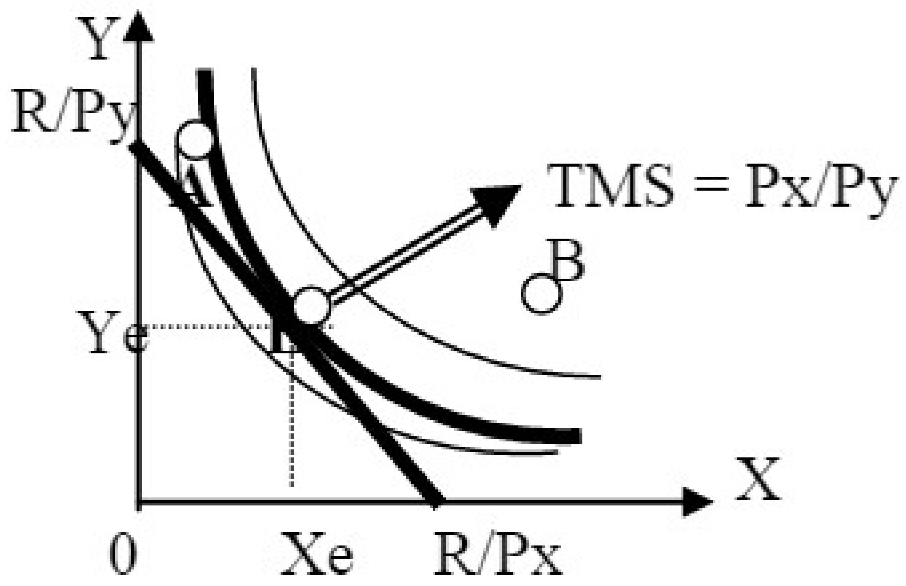
Ce système peut être généralisé à n biens.

$$\begin{cases} \text{Max } U = U\,(Q_1, Q_2, \ldots, Qn) \\ \text{Sous contrainte } R = P_1Q_1 + P_2Q_2 + \ldots + PnQn \end{cases}$$

1. La méthode géométrique

Le consommateur cherche le maximum de satisfaction. Il doit choisir le panier qui se trouve sur la courbe d'indifférence la plus élevée et qu'il est possible de l'acquérir compte tenu de son revenu (respecter la contrainte budgétaire).

Pour cela, il doit identifier la combinaison possible, placée sur sa droite budgétaire, qui représente le niveau de satisfaction la plus élevé. Cette combinaison est celle qui se situe sur la courbe d'indifférence la plus élevée.



En conséquence, la combinaison optimale est définie par le point où une courbe d'indifférence est tangente à la droite budgétaire (le point E).

<u>Vérifiant que le point E est la combinaison maximale :</u>

- <u>Supposons que le consommateur choisit le panier A.</u>

Ce panier respecte la contrainte budgétaire puisqu'il est situé sur la droite budgétaire mais il se situe sur une courbe d'indifférence plus proche de l'origine et moins élevée que celle de E.

Le point A utilise le même revenu que E mais rapporte moins de satisfaction. Donc le consommateur rationnel rejette A et préfère avoir E $\Longrightarrow$ E = (X* , Y*)

- <u>Supposons que le consommateur choisit B. Ce point est-il optimum ?</u>

Ce point donne une satisfaction meilleure que le point E mais ce niveau de vie dépasse le revenu du consommateur.

Le panier B se trouve sur une courbe d'indifférence plus élevée mais il est irréalisable.

Donc le point E de tangence entre la droite du budget et une courbe d'indifférence est le point optimal. Tout point diffèrent de E sur la droite du budget n'est pas optimal, car l'utilité du consommateur pourrait améliorer compte tenu de son revenu.

Au point E, le consommateur maximise son utilité en demandant les quantités (X*,Y*). Le point E est le point optimum. On dit aussi qu'il est le point d'équilibre du consommateur.

Sur ce point, la pente de la courbe d'indifférence (dY/dX) et celle de la droite budgétaire (-Px/Py) sont confondues.

Au point d'équilibre, on a donc :

Pente de la droite du budget	=	Pente de la courbe d'indifférence
- Px/Py	=	dY/dX

La pente de la droite de budget représente le taux auquel le consommateur peut échanger du bien X contre du bien Y dans son panier. Ce taux est constant.

La pente de la courbe d'indifférence représente le taux auquel le consommateur peut substituer du bien Y au bien X sans changer son utilité. Ce taux est variable. Il dépend de la quantité de (X,Y) possédée par le consommateur. C'est le TMS.

A l'équilibre les deux taux sont égaux.

A l'équilibre le taux auquel le consommateur est prêt à substituer du bien Y pour du bien X, est égal au taux auquel le marché lui permet d'effectuer cette substitution.

En dehors de l'équilibre, les deux taux diffèrent

Donc par définition le TMS=-dY/dX alors $\boxed{\text{TMS} = Px/Py}$

Ce résultat est compatible avec celui de la théorie de l'utilité marginale. En effet au point d'équilibre du consommateur E, on a :

$$\boxed{\text{TMS} = UmX/UmY = Px/Py \quad \text{alors} \quad UmX/Px = UmY/Py}$$

On retrouve la loi d'égalisation des utilités marginales pondérées par les prix.

Cette relation correspond à l'idée que la satisfaction du consommateur est maximale lorsque la dernière unité monétaire consacrée à l'achat de chacun des biens lui procure le même supplément d'utilité.

En effet, si l'affectation de la dernière unité monétaire suppose le choix entre 2 achats d'utilités différentes, le consommateur rationnel privilégie le bien dont l'utilité est supérieure. Donc l'utilité est maximale lorsqu'aucune opportunité n'est laissée inexploitée. C'est l'idée de la **deuxième loi de Gossen**.

2. La méthode de substitution

Le problème qui est posé est celui de la maximisation d'une fonction d'utilité sous contrainte budgétaire.

Il s'agit de trouver X* et Y* qui maximise U = U (X , Y)
Sous contrainte R = Px.X + Py.Y

Il est possible de transformer un problème de maximisation d'une fonction sous contrainte en un problème de maximisation d'une fonction sans contrainte en procédant ainsi :

A partir de l'équation de la contrainte budgétaire, on obtient Y qu'on remplace dans U. On exprime ainsi U en fonction de X seulement. On dérive U par rapport à X pour obtenir le point maximal :

- A partir de la contrainte budgétaire : (R = Px X + Py Y), on extrait Y en fonction de X :

Y = -Px/Py . X + R/Py

- Puis on remplace la valeur de Y dans la fonction d'utilité :

U = U (X , -Px/Py. X + R/Py) = U (X, f(X))

Cette fonction dépend d'une seule variable X

- On cherche le maximum de la fonction d'utilité obtenue en annulant la dérivée totale de U par rapport à X :

On annule la dérivée totale de U par rapport à X : dU/dX = 0 $\Longrightarrow$ E (X* , Y*)

3. La méthode du Lagrangien

<u>Rappel mathématique : les multiplicateurs de Lagrange</u>

Les multiplicateurs de Lagrange sont une méthode qui permet de transformer un problème d'extremum sous contrainte (ou lié) en un extremum sans contrainte (libre).
Soit une fonction $F(x_1,x_2)$ à maximiser sous la contrainte $G(x_1,x_2)$.
Il est possible de former une nouvelle fonction en posant la contrainte égale à 0, de la multiplier par λ, constante indéterminée appelée multiplicateur de Lagrange, et en ajoutant (ou la retranchant) à la fonction initiale. On forma ainsi la fonction de Lagrange :
$£ (x_1,x_2, \lambda) = F(x_1, x_2) + \lambda\ G (x_1, x_2) = 0$
ou plus simplement $£ = F(x_1, x_2) + \lambda\ G (x_1, x_2)$
La fonction objective à maximiser $F(x_1, x_2)$ n'est modifiée par l'ajout de $\lambda\ G (x_1, x_2)$ puisque la contrainte est supposée nulle. Dés lors, la maximisation $F(x_1, x_2)$ est obtenue en annulant les dérivées partielles de premier ordre de £ par rapport à x_1, x_2 et λ puis en résolvant pour x_1, x_2 et λ :
$\partial £/\partial x_1 = F_1 + \lambda.G_1 = 0$
$\partial £/\partial x_2 = F_2 + \lambda.G_2 = 0$
$\partial £/\partial \lambda = G(x_1 + x_2) = 0$
où F_1 et F_2 sont respectivement les dérivées partielles de F par rapport à x1 et x2. La résolution de ces trois équations simultanées fournit les valeurs de x1 et x2 qui maximisent la fonction objectif F sous la contrainte $G(x_1,x_2) = 0$

a . Méthode de Lagrange pour deux biens

Le problème est une maximisation sous contrainte :

$$U = U(X,Y)$$

Sous contrainte $R = P_x.X + P_y.Y$

Ce qui nous permet d'écrire une nouvelle fonction, en posant la contrainte budgétaire égale à zéro, en la multipliant ensuite par λ, multiplicateur de Lagrange, et en l'ajoutant enfin à la fonction initiale. On obtient alors une nouvelle fonction dit («fonction de Lagrange».

Poser la contrainte budgétaire comme étant égale à zéro revient à écrire : $(P_x X + P_y Y = R$

La fonction de Lagrange, £, est alors égale à :

$$£ = U(X,Y) + \lambda\,(Px.X+Py.Y) - R)$$

Cette fonction admet un extremum si d£ = 0, la différentielle totale nulle, càd si les dérivées partielles par rapport aux variables X, Y et λ sont nulles.
L'annulation des dérivées partielles est une opération appelée « recherche des conditions de première ordre » ou « recherche des conditions d'optimum »

L'extremum sera un maximum si $d^2£ <0$, la différentielle totale seconde de Lagrange, est une forme quadratique définie négative. La recherche du signe de $d^2£$ est une opération appelée recherche des conditions du deuxième ordre.

La fonction Lagrange est donc maximale lorsque les dérivées partielles de chacune de ses variables s'annulent, conditions dites de premier ordre. Nous aurons alors

$$\partial£/\partial X = \partial U/\partial X + \lambda.P_x = 0$$
$$\partial£/\partial Y = \partial U/\partial Y + \lambda.P_Y = 0$$
$$\partial£/\partial\lambda = Px.X+Py.Y - R = 0$$

On obtient un système de 3 équations à 3 inconnus

Le système peut s'écrire ainsi :

$$\lambda = \frac{\partial U/\partial X}{Px} = \frac{\partial U/\partial Y}{Py} \Rightarrow \frac{Um\ (X)}{Px} = \frac{Um\ (Y)}{Py}$$

On retrouve la règle de Gossen

Dans le cas de deux biens X et Y, nous aurons alors à vérifier les conditions d'équilibre suivantes

$$\begin{cases} \frac{\partial U/\partial X}{Px} = \frac{\partial U/\partial Y}{Py} \Longrightarrow \frac{\partial U/\partial X}{\partial U/\partial Y} = \frac{Px}{Py} \quad \text{et} \\ X.Px + Y.Py = R \end{cases}$$

À rappeler que : $\frac{\partial U/\partial X}{\partial U/\partial Y} = \frac{Px}{Py}$ = Taux marginal de substitution

b. méthode de Lagrange pour n biens

Soit U une fonction d'utilité à maximiser sous la contrainte budgétaire R. On sait d'autre part que l'intégralité des ressources dont on dispose est destinée à la consommation de n biens X. Nous aurons alors :

$$U = U(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$
$$\text{et} \quad R = P_1X_1+P_2X_2+\ldots+P_nX_n$$

Ce qui nous permet d'écrire une nouvelle fonction, en posant la contrainte budgétaire égale à zéro, en la multipliant ensuite par λ, multiplicateur de Lagrange, et en l'ajoutant enfin à la fonction initiale. On obtient alors une nouvelle fonction dit(«fonction de Lagrange».

Poser la contrainte budgétaire comme étant égale à zéro revient à écrire :

$(P_1X_1+P_2X_2+\ldots+P_nX_n) - R$

La fonction de Lagrange, £, est alors égale à

$£ = U(X_1, X_2, \ldots, X_n) + \lambda\,(P_1X_1+P_2X_2+\ldots+P_nX_n - R)$

Cette fonction est maximale lorsque les dérivées partielles de chacune de ses variables s'annulent, conditions dites de premier ordre. Nous aurons alors

$$\partial £/\partial X_1 = \partial U/\partial X_1 + \lambda.P_1 = 0$$
$$\partial £/\partial X_2 = \partial U/\partial X_2 + \lambda.P_2 = 0$$
$$\ldots$$
$$\partial £/\partial X_n = \partial U/\partial X_n + \lambda.P_n = 0$$
$$\partial £/\partial \lambda = (X_1.P_1+X_2.P_2+\ldots+X_n.P_n) - R = 0$$

Soit encore : $\frac{\partial U/\partial X_1}{P_1} = \frac{\partial U/\partial X_2}{P_2} = \ldots = \frac{\partial U/\partial X_n}{P_n}$ et $X_1P_1 + X_2P_2 + \ldots + X_nP_n = R$

4. Interprétation du multiplicateur de Lagrange λ

On peut démontrer que le multiplicateur de Lagrange, noté λ représente l'utilité marginale du revenu.

L'utilité marginale du revenu se définit comme la variation d'utilité générée par la variation du budget de consommation, et se note dU/dR.

L'expression du revenu est donnée par la contrainte de budget : $R = Px.X + Py.Y$

Donc la variation du revenu s'écrit $dR = dPx.X + Px.dX + dPy.Y + Py.dY$

soit, Si on considère les prix comme donnés : $dR = Px.dX + Py.dY$

Les variations des quantités dX et dY sont déterminées par les conditions d'équilibre du consommateur, soit notamment (d'après la condition du premier ordre):

$$\begin{cases} \partial U/\partial X = \lambda.Px \\ \partial U/\partial Y = \lambda.Py \end{cases}$$

de Sorte que les prix se réécrivent :

$$Px = \partial U/\partial X \,.\, 1/\lambda$$
$$Py = \partial U/\partial Y \,.\, 1/\lambda$$

Donc la variation du revenu se réécrit

$$\boxed{dR = \partial U/\partial X \,.\, 1/\lambda \,.\, dX + \partial U/\partial Y \,.\, 1/\lambda \,.\, dY = 1/\lambda\,(\partial U/\partial X \,..\, dX + \partial U/\partial Y \,.\, dY)}$$

soit encore, puisque le terme entre parenthèses n'est autre que la différentielle dU de la fonction d'utilité :

$$\boxed{dR = 1/\lambda \,.\, dU \qquad \text{d'où en définitive} \qquad dU/dR = \lambda}$$

Ainsi, le multiplicateur de Lagrange λ est égal à l'utilité marginale du revenu, c'est-à-dire à la variation de l'utilité du consommateur susceptible d'être entraînée par une variation d'une unité de son revenu, à prix des deux biens donnés.

4. Application

On suppose que la fonction d'utilité d'un individu est de la forme : $U = 2\ X\ Y$
Avec R=10, Px=2, Py=1

Travail demandé : Calculer, selon les deux méthodes, les quantités de biens X et Y demandées par l'individu rationnel. ? Quel sera l'indice de satisfaction correspondant à celle de la demande optimale ?

Un agent rationnel maximise sa satisfaction tout en respectant les contraintes qui pèsent sur lui (R, Px, et Py des donnés)

*** Méthode de substitution**

$$\text{Système} \begin{cases} \text{Maximiser } U = 2\,X\,Y & (1) \\ \text{Sous contrainte } 10 = 2.X + Y & (2) \end{cases}$$

- On tire Y de (2) : $10=2X+Y \Longrightarrow \boxed{Y = 10-2X}$ C'est l'équation de la CB

- On remplace Y dans U $\Longrightarrow U = 2XY = 2X\,(10-2X) \Longrightarrow \boxed{U = 20X-4X^2}$

La FU ainsi obtenue dépend d'une seule variable X. On peut calculer le maximum (une équation à 1 inconnu)

La condition nécessaire pour que la satisfaction admette un maximum est que la dérivée première puisse s'annuler. La condition suffisante, est que la dérivée seconde soit négative.

$$dU/dX = 20 - 8\,X = 0 \Longrightarrow \boxed{X = 5/2}$$

La fonction admet un extremum pour X=5/2. Cet extremum est un maximum si dérivée second est négative.

$$d^2U/dX^2 = -8 < 0$$

- Les variables X et Y sont liées par la contrainte budgétaire (CB). Pour calculer Y, on remplace la valeur de X dans l'équation de la CB :

$$Y=10-2X = 10-2(5/2) \Longrightarrow \boxed{Y = 5}$$

- Le panier E qui maximisera la satisfaction de l'individu est E(X=5/2 , Y=5)

- E donne le maximum de satisfaction. On remplace la valeur de X et Y dans U.

$$U=2XY=2.(5/2).5.= 25$$

$\boxed{U=25}$ est l'indice de satisfaction correspondant à la courbe d'indifférence la plus élevée possible compte tenu du revenu et des prix.

*** Méthode de Lagrange**

La fonction de Lagrange obtenue à partir du programme :

$$£ = U(X,Y) + \lambda\,(R - Px.X - Py.Y)$$

Cette fonction admet un extremum si $d£ = 0$ Condition de premier ordre

L'extremum est un maximum si $d^2£ < 0$ Condition de second ordre

Condition de premier ordre :

$$\left.\begin{aligned} \partial £/\partial X &= 2\,Y - 2\,\lambda. = 0 \\ \partial £/\partial Y &= 2\,X - \lambda. = 0 \\ \partial £/\partial \lambda &= 10 - 2.X -.Y = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} X &= 5/2 \\ Y &= 5 \\ \lambda &= 5 \\ U &= 25 \end{aligned}}$$

Le déterminant second est négatif

RESUME SUR LA DETERMINATION DE L'EQUILIBRE DU CONSOMMATEUR

C'est un problème de maximisation de la fonction d'utilité $U = U(X, Y)$
Sous contrainte $R = Px.X + Py.Y$

Méthode geométrique	Méthode de substitution	Méyhode du Lagangien
Pente de la Courbe D'indifference = **Pente de la** contrainte budgétaire $\frac{Um(X)}{Um(Y)} = \frac{Px}{Py}$ **R = Px X + Py Y**	U $U = U[X, Y(X)]$ Y(X) est tiré de $R = Px\ X + Py\ Y$ $dU/dX = Um(X) + Um(Y)\ dY/dX$ $Um(X) + Um(Y)(-Px/Py)$ $R = Px\ X + Py\ Y$	$£ = U(X,Y) + \lambda (R - Px.X - Py.Y)$ $\partial £/\partial X = Um(X) - \lambda.P_x = 0$ $\partial £/\partial Y = Um\ Y) - \lambda.P_Y = 0$ $\partial £/\partial \lambda = R - Px.X - Py.Y = 0$
Systéme à 2 équations et à 2 inconnues X et Y conduisant à $X = X(Px, Py, R)$ $Y = Y(Px, Py, R)$		Système de 3 équations à 3 inconnues X, Y, λ conduisant $X = X(Px, Py, R)$ $Y = Y(Px, Py, R)$

G. La fonction de Cobb-Douglas

La fonction de Cobb-Douglas a été proposée en 1928. Elle appartient à la famille des fonctions à élasticité de substitution constante, ou fonctions CES (pour Constant Elasticity 0f Substitution).

1. Définition :

Sous sa forme la plus générale, la fonction Cobb-Douglas s'écrit :

$$\boxed{Q = A.L^{\alpha} K^{\beta}. \quad \text{avec } A > 0,\ 0 < \alpha < 1 \text{ , et } 0 < \beta < 1}$$

et où A est un paramètre de dimension ou paramètre d'efficience : plus A est élevé, plus l'extrant est élevé. α et β sont des paramètres d'intensité des facteurs.

2. Propriétés :

La fonction Cobb- Douglas présente cinq propriétés fondamentales.

- La productivité marginale d'un facteur est égale au produit de la productivité moyenne de ce facteur par son paramètre d'intensité

  $PmL = \partial Q/\partial L = \alpha\ A\ L^{\alpha-1} K^{\beta} = \alpha\ Q/L = \alpha.PML$ et $PmK = \partial Q/\partial K = \beta\ Q/K = \beta.PMK$

- le TMST est une fonction croissante de l'intensité capitalistique

  $TMST = dK/dL = = - (\partial Q/\partial L) / (\partial Q/\partial K) = - (\alpha.\ Q/L) / (\beta.Q/K) = - (\alpha/\beta).(K/L) = -(\alpha/\beta).k$

- le paramètre d'intensité d'un facteur est égal à l'élasticité de l'extrant par rapport à ce facteur

  $e_{QL} = \partial Q/\partial L\ .\ L/Q = \alpha.(Q/L).(L/Q) = \alpha$ et $e_{QK} = \partial Q/\partial K\ .\ K/Q = \beta.(Q/K).(K/Q) = \beta$

- la fonction Cobb-Douglas est homogène de degré $\alpha + \beta$.

  $F(aL,aK) = A.(aL)^{\alpha}.(aK)^{\beta} = a^{(\alpha+\beta)}.f(L,K)$

  Donc la fonction Cobb Douglass est une fonction homogène de degrés $\alpha+\beta$

  On distingue 3 cas :

  $\alpha+\beta = 1 \Longrightarrow$ rendements d'échelle constants

  $\alpha+\beta > 1 \Longrightarrow$ rendements d'échelle croissants

  $\alpha+\beta < 1 \Longrightarrow$ rendements d'échelle décroissants

- l'élasticité de substitution de la fonction Cobb-Douglas est égale à 1

  $$\sigma = \frac{d(K/L)\ /\ (K/L)}{d(TMST)\ /\ (TMST)} = \frac{dk}{d(TMST)} \cdot \frac{TMST}{k} \quad \text{Or} \quad TMST = (\alpha/\beta).(K/L) \quad \frac{d(TMST)}{d(K/L)} = \alpha/\beta$$

  $$\text{et} \quad d(K/L) / d(TMST) = \beta/\alpha \Longrightarrow \sigma = \beta/\alpha \quad \frac{(\alpha/\beta)\ .\ (K/L)}{K/L} \Longrightarrow \boxed{\sigma = 1}$$

  Donc la fonction Cobb Douglas est une fonction CES

3. Applications sur la fonction Cobb Douglas

a. 1ère Application sur la fonction Cobb Douglas

$$\boxed{\mathbf{Q = \gamma\ L^{\alpha}K^{\beta}}} \quad \text{avec } \alpha \text{ et } \beta > 0$$

Questions :

1)calculer les productivités marginales

1) en déduire la valeur du taux marginal de substitution technique entre le travail et le capital
2) discuter la convexité;
3) estimer l'élasticité de substitution
4) caractériser la nature des rendements

Corrigé

1) Dérivées premières partielles de la fonction de production, les productivités marginales des facteurs s'établissent comme suit:

$$\partial Q/\partial L = \gamma\, \alpha\, L^{\alpha-1}K^{\beta} = \alpha\, Q/L = \alpha\, PML \Longrightarrow PmL = \alpha\, PML$$

$$\partial Q/\partial K = \gamma\, \beta\, L^{\alpha}K^{\beta-1} = \beta\, Q/K = \beta\, PMK \Longrightarrow PmK = \beta\, PMK$$

1) Le TMST, défini comme le rapport des productivités marginales, découle immédiatement des écritures précédentes :

$$TMST = -(\partial Q/\partial L) / (\partial Q/\partial K) = -(\alpha/\beta).(K/L)$$

$$TMST = -\alpha\, K / \beta\, L = (\alpha/\beta).\, Ic \qquad \text{(Ic : intensité capitalistique)}$$

La TMST en valeur absolue est une fonction croissante de l'intensité capitalistique

2) Pour que la fonction soit convexe, il faut et il suffit que le TMST - que l'on désigne par la lettre s - soit décroissant. Il vient alors $d(TMST) / dL = ds/dL < 0$

$$ds = \alpha/\beta\, [(L.dK - K.dL) / L^2] \qquad ds/dL = -\alpha/\beta\, [(L.dK/dL - K) / L^2] = -\alpha/\beta\, [(L.s - K) / L^2] < 0$$

$ds / dL < 0 \Longrightarrow$ la fonction Q est convexe

4) On rappelle que l'élasticité de substitution (σ) d'une fonction se définît comme

$$\sigma = \frac{d\,(K/L)\ /\ (K/L)}{d\,s / s}$$

$$s = (\alpha/\beta)\,(K/L) \Longrightarrow K/L = (\beta/\alpha)\, s \Longrightarrow d(K/L) / ds = \beta/\alpha \Longrightarrow \sigma = [\beta.\, (\alpha K/\beta L)] / \alpha.(K/L) = 1$$

La fonction de production Q admet une élasticité de substitution constante. Cela n'étonnera pas eu égard au fait qu'elle est de type Cobb-Douglas.

5) On dit qu'une fonction est homogène de degré k lorsqu'elle vérifie l'équation

$$\lambda^k\, .\, Q = f.(\lambda L\, ,\, \lambda K),\ \lambda \neq 0$$

et on déduit:

- une constance des rendements à l'échelle si k = 1
- une croissance des rendements à l'échelle si k > 1
- une décroissance des rendements à l'échelle si k < 1

$$\lambda\,(\lambda L)^{\alpha}.(\lambda K)^{\beta} = \gamma\, \lambda^{\alpha}\, L^{\alpha}\, \lambda^{\beta} K^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta}\, Q \Longrightarrow$$

$\alpha+\beta = 1$	rendements constants
$\alpha+\beta > 1$	rendements croissants
$\alpha+\beta < 1$	rendements décroissants

b. Application 2 sur la fonction Cobb Douglas

Soit la fonction de production suivante : $\boxed{Q = L^{1/4}\, .\, K^{3/4}}$

C'est une fonction Cobb Douglas homogène de degrés 1 ($\alpha+\beta = 1$) ; A=1 (dimension)

Il est demandé :

1) d'en calculer les productivités marginales
2) d'en déduire la valeur du TMST entre le travail et le capital
3) d'en discuter la convexité

4) d'en estimer l'élasticité de substitution
5) d'en caractériser la nature des rendements

Corrigé :

1) les productivités marginales des facteurs sont déduites des dérivées premières partielles de la fonction de production :

$$\partial Q/\partial L = ¼\, L^{-3/4} . K^{3/4} = ¼\, Q/L$$

$$\partial Q/\partial K = 3/4\, L^{1/4} . K^{-1/4} = ¾\, Q/K$$

2) Le TMST, défini comme le rapport des productivités marginales, découle immédiatement des écritures précédentes :

$$TMST_{LK} = |\ -K/3L\ | = |-((1/4) / (3/4)) . (K/L) = (\alpha/\beta) / (K/L)$$

Les propriétés du TMST : . négatif et positif en valeur absolue
- variable
- décroissant en valeur absolue

3) Pour que la fonction soit convexe, il faut et il suffit que le TMST (désigné par la lettre T) soit décroissant :

$$d(TMST)/dL < 0 \Longrightarrow d(K/3L) / dL < 0 \Longrightarrow d(K/3L) / dL = 1/3 \ \frac{dK/ dL . L - K . dL/dL}{L^2}$$

$$1/3 \ \frac{(K/3L) . L - K . (1)}{L^2} = 1/3 \ . \ \frac{(K/3 - K)/3}{L^2} = \frac{(K\text{-}3K) / 3}{9\, L^2} = \frac{K - 3K}{9\, L^2} = \frac{- 2\, K}{9L^2} < 0$$

$\Longrightarrow$ la fonction Q est convexe

4) l'élasticité de substitution $\sigma = [d\,(K/L) / K/L] / d\text{TMST} / \text{TMST}$

$$\sigma = (-3). (-K/3L) / (K/L) = 1$$

La fonction de production Q admet une élasticité de substitution constante et égal à 1. C'est une fonction de type Cobb-Douglas homogène de degrés 1.

5) On dit qu'une fonction est homogène de degré k lorsqu'elle vérifie l'équation : $\lambda^k . Q = f(\lambda L\ ; \lambda K)\ \lambda \neq 0$ Et on déduit :
   - une constance des rendements à l'échelle si k = 1
   - une croissance des rendements à l'échelle si k > 1
   - une décroissance des rendements à l'échelle si k < 0

$$(\lambda L)^{1/4} . (\lambda K)^{3/4} = \lambda\, (L^{1/4} . K^{3/4}) = \lambda\, Q \Longrightarrow \text{les rendements sont constants } (k=1)$$