La théorie des graphes

Faculté Polydisciplinaire - Ouarzazate

Mars 2024

MOURAD EL OUALI

Plan

1. Plus court chemin dans les graphes à arêtes pondérées

2. Application : Algorithme de Dijkskra

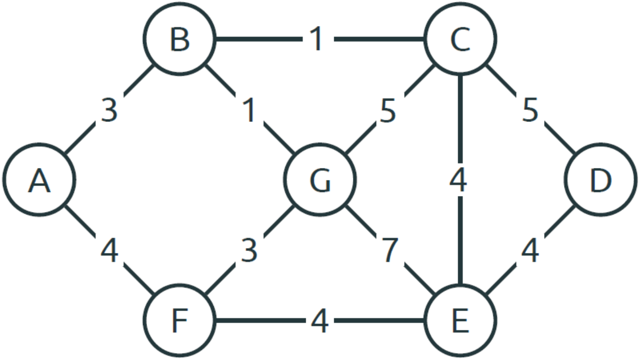
Plan

Plus court chemin dans les graphes à arêtes pondérées

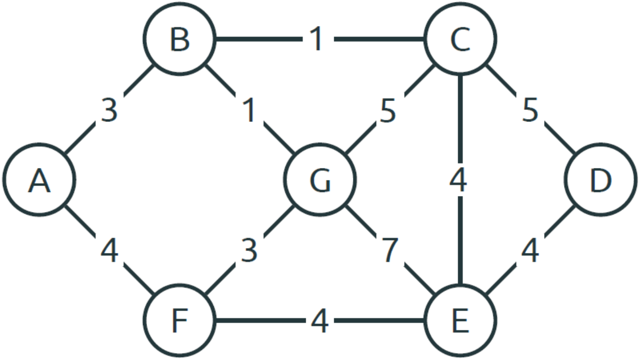
Definition

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe et $c : E \to \mathbb{Q}$ une fonction poids. Pour tout $v, w \in V$, soit $d_G(v, w) := \min\{c(P) \mid P \in \{v \to w\}_G\}$, où $c(P) := c(E(P))$. Une chaîne $P \in \{v \to w\}_G$ avec $c(P) = d_G(v, w)$ s'appelle **plus court chemin** de v vers w dans G.

Exemple

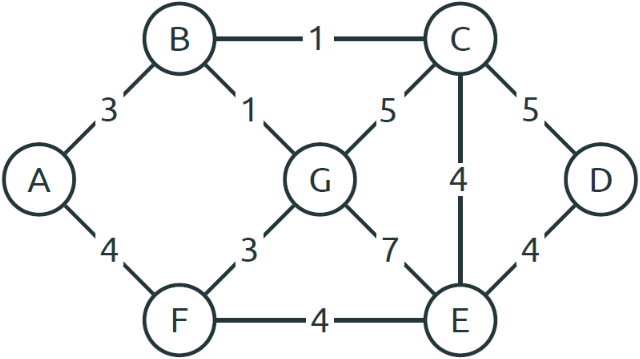


Exemple



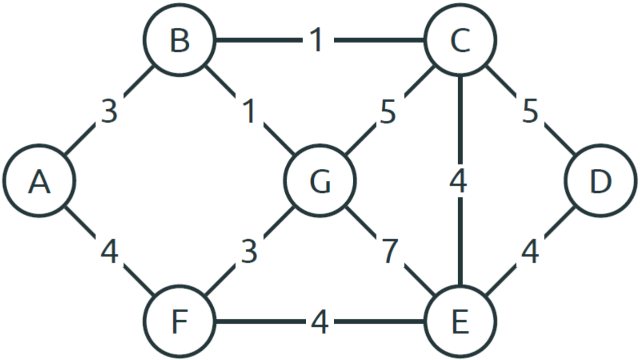
Dans ce graphe, $d(G; D) =$

Exemple



Dans ce graphe, $d(G; D) = 7$ car $c((G; B; C; D)) = 7$.

Exemple



Dans ce graphe, $d(G; D) = 7$ car $c((G; B; C; D)) = 7$.Il s'ensuit que $(G; B; C; D)$ est le plus court chemin de G vers D.

Principe d'optimalité

Lemme

$P = (v, \ldots, x, w)$ est un plus court chemin de v vers w avec $c(e) \geq 0$ pour tout $e \in E(P)$, alors $P - w := (v, \ldots, x)$ est le plus court chemin de v vers x.

Principe d'optimalité

Lemme

$P = (v, \dots, x, w)$ est un plus court chemin de v vers w avec $c(e) \geq 0$ pour tout $e \in E(P)$, alors $P - w := (v, \dots, x)$ est le plus court chemin de v vers x.

Preuve :

Principe d'optimalité

Lemme

$P = (v, \ldots, x, w)$ est un plus court chemin de v vers w avec $c(e) \geq 0$ pour tout $e \in E(P)$, alors $P - w := (v, \ldots, x)$ est le plus court chemin de v vers x.

Preuve : Supposons qu'il existe un chemin P' de v vers x avec
$c(P') < c(P - w)$ avec $c(e) \geq 0$ pour tout $e \in E(P')$.
Alors,

Principe d'optimalité

Lemme

$P = (v, \ldots, x, w)$ est un plus court chemin de v vers w avec $c(e) \geq 0$ pour tout $e \in E(P)$, alors $P - w := (v, \ldots, x)$ est le plus court chemin de v vers x.

Preuve : Supposons qu'il existe un chemin P' de v vers x avec
$c(P') < c(P - w)$ avec $c(e) \geq 0$ pour tout $e \in E(P')$.
Alors, $c(P' \circ (x, w)) = c(P') + c(\{x, w\}) < c(P - w) + c(\{x, w\}) = c(P)$.

Principe d'optimalité

Lemme

$P = (v, \ldots, x, w)$ est un plus court chemin de v vers w avec $c(e) \geq 0$ pour tout $e \in E(P)$, alors $P - w := (v, \ldots, x)$ est le plus court chemin de v vers x.

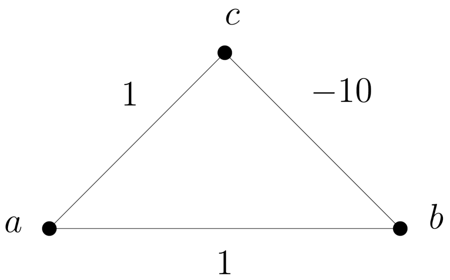
Preuve : Supposons qu'il existe un chemin P' de v vers x avec $c(P') < c(P - w)$ avec $c(e) \geq 0$ pour tout $e \in E(P')$.
Alors, $c(P' \circ (x, w)) = c(P') + c(\{x, w\}) < c(P - w) + c(\{x, w\}) = c(P)$.
Donc, $P' \circ (x, w)$ est un chemin de v vers w dont toutes les arêtes ont un poids positif vérifiant $c(P' \circ (x, w)) < c(P)$, ce qui est absurde car $c(P)$ plus court chemin de v vers w avec $c(e) \geq 0$ pour tout $e \in E(P)$.

Remarque

La condition des arêtes avec poids positifs est obligatoire, comme le montre l'exemple suivant

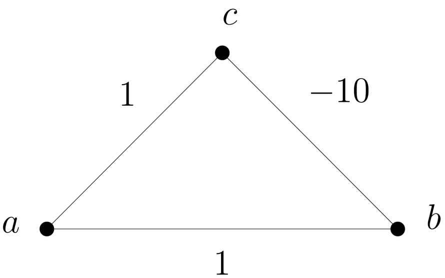
Remarque

La condition des arêtes avec poids positifs est obligatoire, comme le montre l'exemple suivant



Remarque

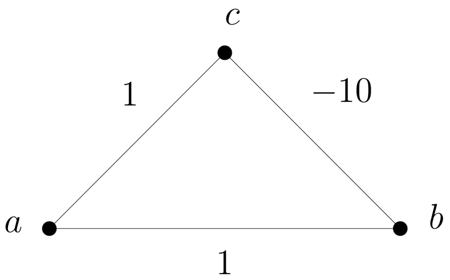
La condition des arêtes avec poids positifs est obligatoire, comme le montre l'exemple suivant



Dans ce graphe on a : $d(a, c) = -9$

Remarque

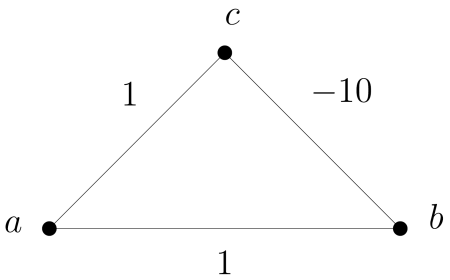
La condition des arêtes avec poids positifs est obligatoire, comme le montre l'exemple suivant



Dans ce graphe on a : $d(a, c) = -9$ car $c((a, b, c)) = -9$. Alors, (a, b, c) est le plus court chemin de a vers c.

Remarque

La condition des arêtes avec poids positifs est obligatoire, comme le montre l'exemple suivant



Dans ce graphe on a : $d(a, c) = -9$ car $c((a, b, c)) = -9$. Alors, (a, b, c) est le plus court chemin de a vers c.Or, le chemin (a, b) n'est pas le plus court chemin de a vers b vu que $d(a, b) = -9$.

Corollaire

Corollaire

Soient $G = (V, E)$ un graphe connexe et $c : E \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$ une fonction poids. Alors, il existe pour chaque $v_0 \in V$ un arbre $T = (V, F)$, telle que pour tout $v \in V$ on a : le seul chemin de v_0 vers v dans T est le plus court chemin de v_0 vers v dans G.

Preuve

Soit T un arbre avec ensemble de nœuds V' maximal, telle que pour tout $v' \in V'$ le chemin de v_0 vers v' dans T est un plus court chemin dans G. Supposons, il existe un $v \in V \setminus V'$.

Preuve

Soit T un arbre avec ensemble de nœuds V' maximal, telle que pour tout $v' \in V'$ le chemin de v_0 vers v' dans T est un plus court chemin dans G.
Supposons, il existe un $v \in V \setminus V'$.
Soit y le premier nœud sur un plus court chemin de v_0 vers v dans G, qui n'est pas dans T.

Preuve

Soit T un arbre avec ensemble de nœuds V' maximal, telle que pour tout $v' \in V'$ le chemin de v_0 vers v' dans T est un plus court chemin dans G.
Supposons, il existe un $v \in V \setminus V'$.
Soit y le premier nœud sur un plus court chemin de v_0 vers v dans G, qui n'est pas dans T. Selon le principe d'optimalité,
$(v_0, \ldots, y) \in \{v_0 \to y\}_{T+y}$ est un plus court chemin dans G,et d'après le choix y, le nœud x est prédécesseur de y dans T.

Preuve

Soit T un arbre avec ensemble de nœuds V' maximal, telle que pour tout $v' \in V'$ le chemin de v_0 vers v' dans T est un plus court chemin dans G. Supposons, il existe un $v \in V \setminus V'$.
Soit y le premier nœud sur un plus court chemin de v_0 vers v dans G, qui n'est pas dans T. Selon le principe d'optimalité,
$(v_0, \dots, y) \in \{v_0 \to y\}_{T+y}$ est un plus court chemin dans G,et d'après le choix y, le nœud x est prédécesseur de y dans T.Puisque $T + y$ est un arbre, on reçoit une contradiction au choix de T.

Plan

Algorithme de Dijkskra

Dijkstra's algorithm - is a solution to the single-source shortest path problem in graph theory.

Algorithme de Dijkskra

Dijkstra's algorithm - is a solution to the single-source shortest path problem in graph theory.
Works on both directed and undirected graphs. However, all edges must have nonnegative weights.

Algorithme de Dijkskra

Dijkstra's algorithm - is a solution to the single-source shortest path problem in graph theory.

Works on both directed and undirected graphs. However, all edges must have nonnegative weights.

Approach : Greedy

Algorithme de Dijkskra

Dijkstra's algorithm - is a solution to the single-source shortest path problem in graph theory.
Works on both directed and undirected graphs. However, all edges must have nonnegative weights.
Approach : Greedy
Input : Weighted graph $G = (V, E)$ and source vertex $v_0 \in V$, such that all edge weights are nonnegative

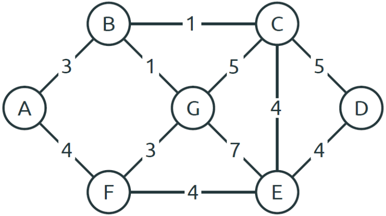
Algorithme de Dijkskra

Dijkstra's algorithm - is a solution to the single-source shortest path problem in graph theory.
Works on both directed and undirected graphs. However, all edges must have nonnegative weights.
Approach : Greedy
Input : Weighted graph $G = (V, E)$ and source vertex $v_0 \in V$, such that all edge weights are nonnegative
Output : Lengths of shortest paths (or the shortest paths themselves) from a given source vertex $v \in V$ to all other vertices

Algorithme de Dijkskra - PSEUDOCODE

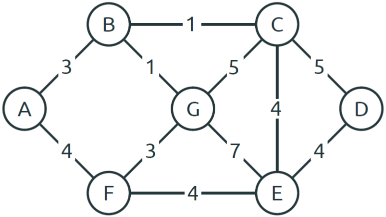
```
dist[s] ←0                          (distance to source vertex is zero)
for  all v ∈ V–{s}
      do  dist[v] ←∞                (set all other distances to infinity)
S←∅                                 (S, the set of visited vertices is initially empty)
Q←V                                 (Q, the queue initially contains all vertices)
while Q ≠∅                          (while the queue is not empty)
do   u ← mindistance(Q,dist)        (select the element of Q with the min. distance)
     S←S∪{u}                        (add u to list of visited vertices)
     for all v ∈ neighbors[u]
          do  if   dist[v] > dist[u] + w(u, v)          (if new shortest path found)
                   then    d[v] ←d[u] + w(u, v)         (set new value of shortest path)
                      (if desired, add traceback code)
return dist
```

Exemple



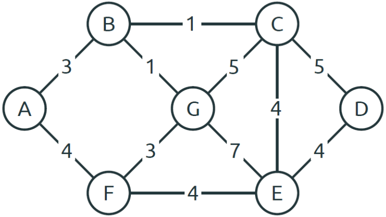
A	B	C	D	E	F	G	choix

Exemple



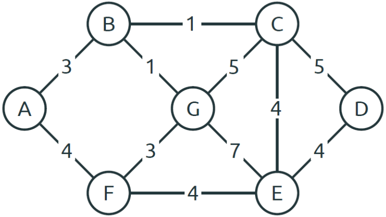
A	B	C	D	E	F	G	choix
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	

Exemple



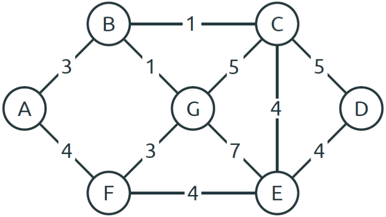
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	

Exemple



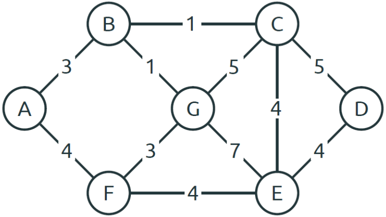
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$

Exemple



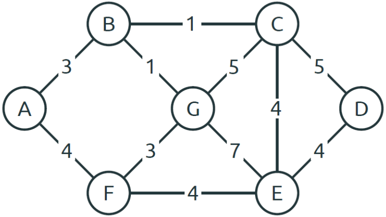
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•							
•							
•							
•							
•							
•							

Exemple



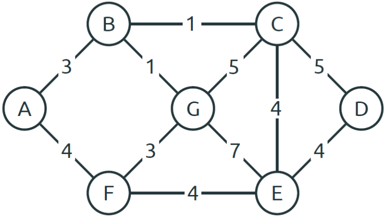
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	3_A						
•							
•							
•							
•							
•							

Exemple



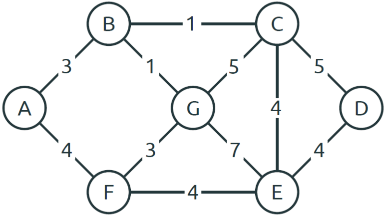
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	3_A				4_A		
•							
•							
•							
•							
•							

Exemple



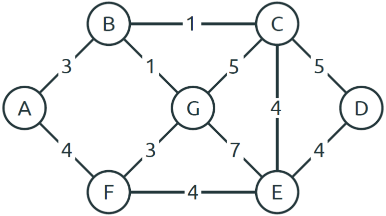
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	3_A	∞	∞	∞	4_A	∞	
•							
•							
•							
•							
•							

Exemple



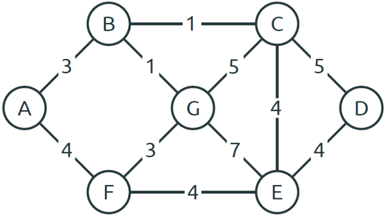
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	
•							
•							
•							
•							
•							

Exemple



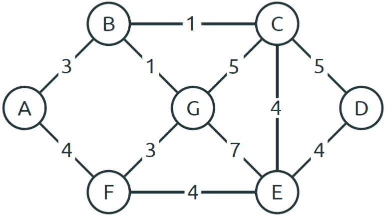
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
•							
•							
•							
•							
•							

Exemple



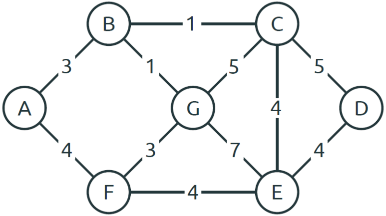
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
•	•						
•	•						
•	•						
•	•						
•	•						

Exemple



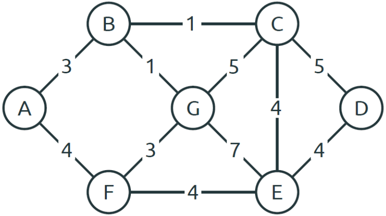
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
•	•	4_B					
•	•						
•	•						
•	•						
•	•						

Exemple



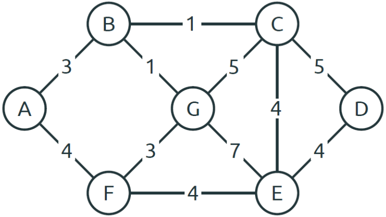
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
•	•	4_B				4_B	
•	•						
•	•						
•	•						
•	•						

Exemple



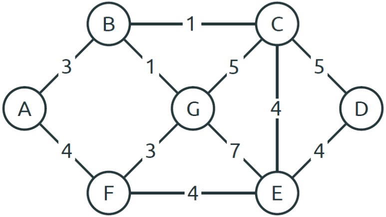
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
•	•	4_B	∞	∞	4_A	4_B	
•	•						
•	•						
•	•						
•	•						

Exemple



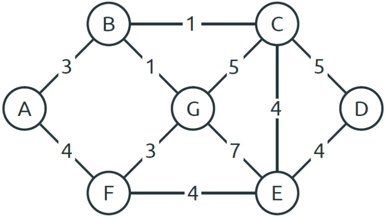
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
•	•	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	
•	•						
•	•						
•	•						
•	•						

Exemple



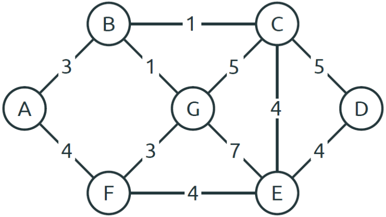
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
•	•	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
•	•						
•	•						
•	•						
•	•						

Exemple



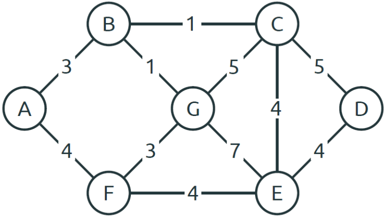
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
•	•	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
•	•				•		
•	•				•		
•	•				•		
•	•				•		

Exemple



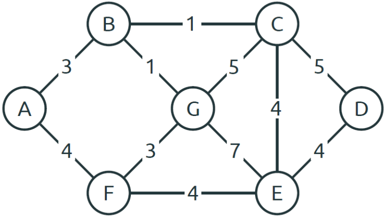
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
•	•	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
•	•			8_F	•		
•	•				•		
•	•				•		
•	•				•		

Exemple



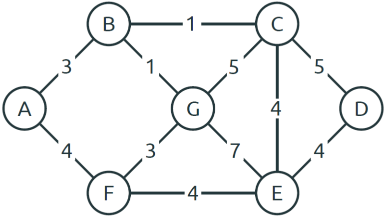
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
$\bullet$	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
$\bullet$	$\bullet$	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
$\bullet$	$\bullet$			8_F	$\bullet$	$\min\{4_B, 7_F\}$	
$\bullet$	$\bullet$				$\bullet$		
$\bullet$	$\bullet$				$\bullet$		
$\bullet$	$\bullet$				$\bullet$		

Exemple



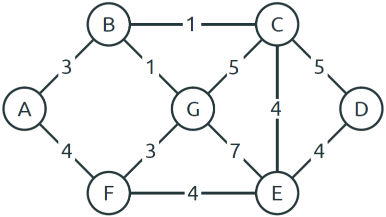
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
•	•	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
•	•			8_F	•	4_B	
•	•				•		
•	•				•		
•	•				•		

Exemple



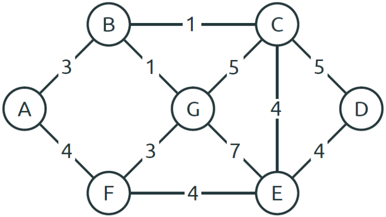
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
•	•	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
•	•	4_B	∞	8_F	•	4_B	
•	•				•		
•	•				•		
•	•				•		

Exemple



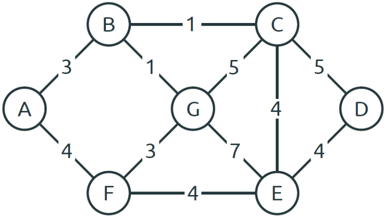
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
•	•	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
•	•	$\boxed{4_B}$	∞	8_F	•	4_B	
•	•				•		
•	•				•		
•	•				•		

Exemple



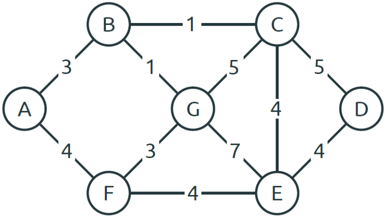
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
$\bullet$	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
$\bullet$	$\bullet$	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\boxed{4_B}$	∞	8_F	$\bullet$	4_B	$C(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$			$\bullet$		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$			$\bullet$		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$			$\bullet$		

Exemple



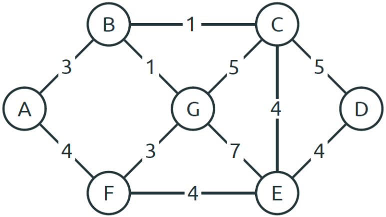
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
$\bullet$	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
$\bullet$	$\bullet$	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\boxed{4_B}$	∞	8_F	$\bullet$	4_B	$C(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$		$\min\{8_F, 8_C\}$	$\bullet$		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$			$\bullet$		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$			$\bullet$		

Exemple



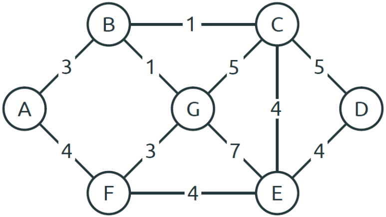
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
•	•	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
•	•	$\boxed{4_B}$	∞	8_F	•	4_B	$C(4)$
•	•	•		8_F	•		
•	•	•			•		
•	•	•			•		

Exemple



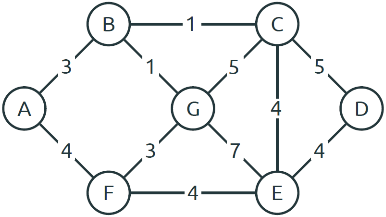
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
$\bullet$	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
$\bullet$	$\bullet$	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\boxed{4_B}$	∞	8_F	$\bullet$	4_B	$C(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$		8_F	$\bullet$	$\min\{4_B, 9_C\}$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$			$\bullet$		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$			$\bullet$		

Exemple



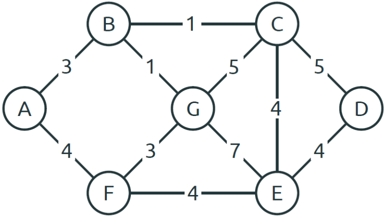
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
$\bullet$	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
$\bullet$	$\bullet$	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\boxed{4_B}$	∞	8_F	$\bullet$	4_B	$C(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$		8_F	$\bullet$	4_B	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$			$\bullet$		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$			$\bullet$		

Exemple



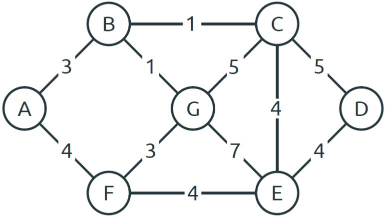
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
$\bullet$	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
$\bullet$	$\bullet$	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\boxed{4_B}$	∞	8_F	$\bullet$	4_B	$C(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	5_C	8_F	$\bullet$	4_B	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$			$\bullet$		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$			$\bullet$		

Exemple



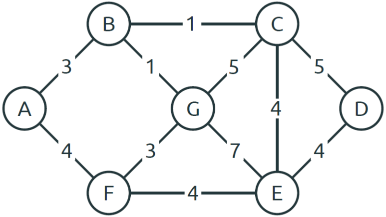
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
•	•	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
•	•	$\boxed{4_B}$	∞	8_F	•	4_B	$C(4)$
•	•	•	5_C	8_F	•	$\boxed{4_B}$	
•	•	•			•		
•	•	•			•		

Exemple



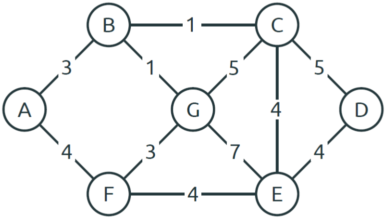
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
•	•	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
•	•	$\boxed{4_B}$	∞	8_F	•	4_B	$C(4)$
•	•	•	5_C	8_F	•	$\boxed{4_B}$	$G(4)$
•	•	•			•		
•	•	•			•		

Exemple



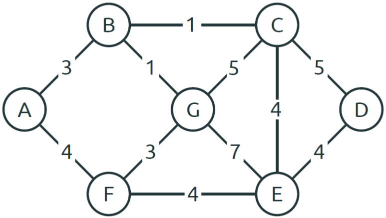
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
$\bullet$	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
$\bullet$	$\bullet$	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\boxed{4_B}$	∞	8_F	$\bullet$	4_B	$C(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	5_C	8_F	$\bullet$	$\boxed{4_B}$	$G(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$			$\bullet$	$\bullet$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$			$\bullet$	$\bullet$	

Exemple



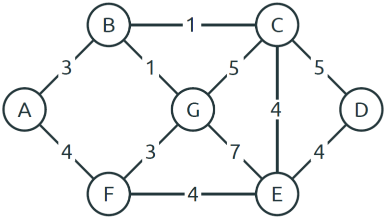
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
$\bullet$	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
$\bullet$	$\bullet$	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\boxed{4_B}$	∞	8_F	$\bullet$	4_B	$C(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	5_C	8_F	$\bullet$	$\boxed{4_B}$	$G(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$		$\min\{8_F, 11_G\}$	$\bullet$	$\bullet$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$			$\bullet$	$\bullet$	

Exemple



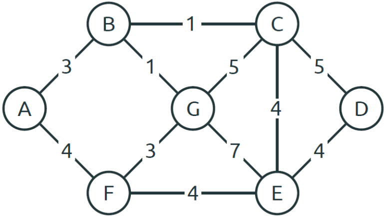
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
•	•	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
•	•	$\boxed{4_B}$	∞	8_F	•	4_B	$C(4)$
•	•	•	5_C	8_F	•	$\boxed{4_B}$	$G(4)$
•	•	•		8_F	•	•	
•	•	•			•	•	

Exemple



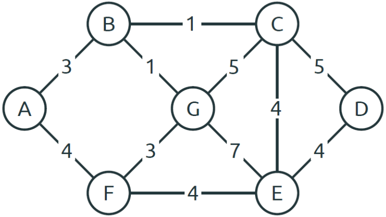
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
•	•	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
•	•	$\boxed{4_B}$	∞	8_F	•	4_B	$C(4)$
•	•	•	5_C	8_F	•	$\boxed{4_B}$	$G(4)$
•	•	•	5_C	8_F	•	•	
•	•	•			•	•	

Exemple



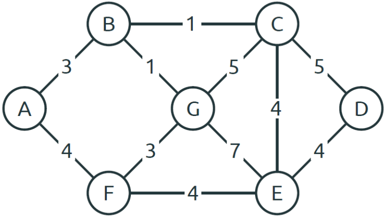
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
$\bullet$	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
$\bullet$	$\bullet$	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\boxed{4_B}$	∞	8_F	$\bullet$	4_B	$C(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	5_C	8_F	$\bullet$	$\boxed{4_B}$	$G(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\boxed{5_C}$	8_F	$\bullet$	$\bullet$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$			$\bullet$	$\bullet$	

Exemple



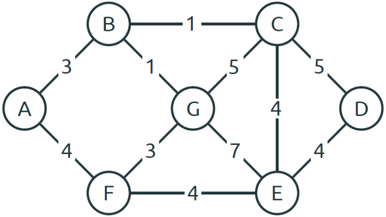
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
•	•	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
•	•	$\boxed{4_B}$	∞	8_F	•	4_B	$C(4)$
•	•	•	5_C	8_F	•	$\boxed{4_B}$	$G(4)$
•	•	•	$\boxed{5_C}$	8_F	•	•	$D(5)$
•	•	•			•	•	

Exemple



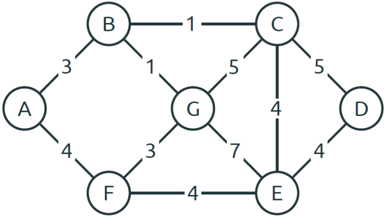
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
$\bullet$	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
$\bullet$	$\bullet$	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\boxed{4_B}$	∞	8_F	$\bullet$	4_B	$C(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	5_C	8_F	$\bullet$	$\boxed{4_B}$	$G(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\boxed{5_C}$	8_F	$\bullet$	$\bullet$	$D(5)$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$		$\bullet$	$\bullet$	

Exemple



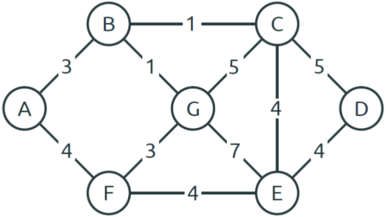
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
$\bullet$	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
$\bullet$	$\bullet$	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\boxed{4_B}$	∞	8_F	$\bullet$	4_B	$C(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	5_C	8_F	$\bullet$	$\boxed{4_B}$	$G(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\boxed{5_C}$	8_F	$\bullet$	$\bullet$	$D(5)$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\min\{8_F, 9_D\}$	$\bullet$	$\bullet$	

Exemple



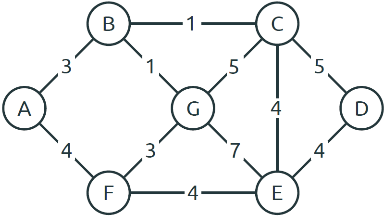
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
•	•	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
•	•	$\boxed{4_B}$	∞	8_F	•	4_B	$C(4)$
•	•	•	5_C	8_F	•	$\boxed{4_B}$	$G(4)$
•	•	•	$\boxed{5_C}$	8_F	•	•	$D(5)$
•	•	•	•	8_F	•	•	

Exemple



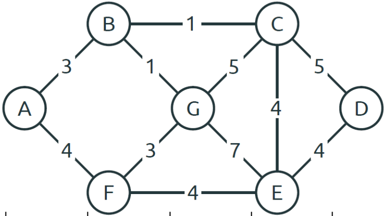
A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
•	•	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
•	•	$\boxed{4_B}$	∞	8_F	•	4_B	$C(4)$
•	•	•	5_C	8_F	•	$\boxed{4_B}$	$G(4)$
•	•	•	$\boxed{5_C}$	8_F	•	•	$D(5)$
•	•	•	•	$\boxed{8_F}$	•	•	

Exemple



A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
•	•	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
•	•	$\boxed{4_B}$	∞	8_F	•	4_B	$C(4)$
•	•	•	5_C	8_F	•	$\boxed{4_B}$	$G(4)$
•	•	•	$\boxed{5_C}$	8_F	•	•	$D(5)$
•	•	•	•	$\boxed{8_F}$	•	•	$E(8)$

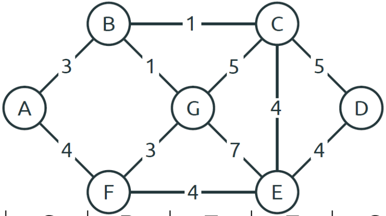
Exemple



A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
•	•	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
•	•	$\boxed{4_B}$	∞	8_F	•	4_B	$C(4)$
•	•	•	5_C	8_F	•	$\boxed{4_B}$	$G(4)$
•	•	•	$\boxed{5_C}$	8_F	•	•	$D(5)$
•	•	•	•	$\boxed{8_F}$	•	•	$E(8)$

D

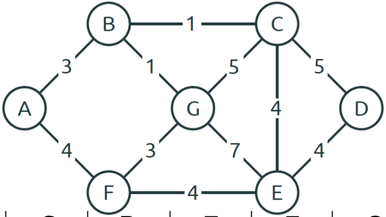
Exemple



A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
$\bullet$	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
$\bullet$	$\bullet$	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\boxed{4_B}$	∞	8_F	$\bullet$	4_B	$C(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	5_C	8_F	$\bullet$	$\boxed{4_B}$	$G(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\boxed{5_C}$	8_F	$\bullet$	$\bullet$	$D(5)$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\boxed{8_F}$	$\bullet$	$\bullet$	$E(8)$

$$D - C$$

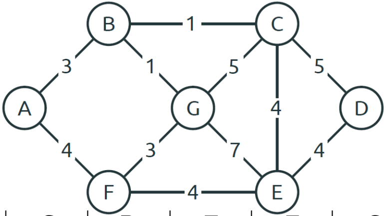
Exemple



A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
•	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
•	•	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
•	•	$\boxed{4_B}$	∞	8_F	•	4_B	$C(4)$
•	•	•	5_C	8_F	•	$\boxed{4_B}$	$G(4)$
•	•	•	$\boxed{5_C}$	8_F	•	•	$D(5)$
•	•	•	•	$\boxed{8_F}$	•	•	$E(8)$

$$D - C - B$$

Exemple



A	B	C	D	E	F	G	choix
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
$\bullet$	$\boxed{3_A}$	∞	∞	∞	4_A	∞	$B(3)$
$\bullet$	$\bullet$	4_B	∞	∞	$\boxed{4_A}$	4_B	$F(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\boxed{4_B}$	∞	8_F	$\bullet$	4_B	$C(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	5_C	8_F	$\bullet$	$\boxed{4_B}$	$G(4)$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\boxed{5_C}$	8_F	$\bullet$	$\bullet$	$D(5)$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\boxed{8_F}$	$\bullet$	$\bullet$	$E(8)$

$$D - C - B - A$$

Exercice

Trouver le plus court chemin de A à G.