

Série N 1

Master Mathématiques pour la science des Données

Probabilités et Statistiques

Exercice 1. Une auto-école présente le même jour trois candidats au permis : André, Denis et Nicole. Sur la base des performances précédentes, le directeur estime les probabilités de succès : pour Denise 0,5, pour Nicole 0,9 et pour André 0,7. Le succès de chaque candidat est indépendant du succès des autres. Quelles sont les probabilités des événements suivants :

$$\begin{aligned} B &= \text{"Denise est la seule à réussir"}, \\ R &= \text{"Les trois candidats réussissent"}, \\ E &= \text{"les trois candidats échouent"}, \\ P &= \text{"au moins un candidat est reçu"}. \end{aligned}$$

Exercice 2. On lance une fois un dé non pipé.

1. On suppose qu'on reçoit 15 euros si on obtient 1, rien si on obtient 2, 3 ou 4, et 6 euros si on obtient 5 ou 6. Soit G la variable aléatoire égale au gain de ce jeu. Quelle est la loi de G ? Que vaut le gain moyen?
2. Mêmes questions en supposant qu'on gagne 27 euros pour un 1 et rien sinon. Préférez-vous jouer au jeu du 1) ou à celui-ci?

Exercice 3. On considère un sac contenant deux boules rouges et quatre boules noires, indiscernables au toucher.

1. On tire successivement une boule, avec remise, jusqu'à obtenir une boule rouge. On note X son rang d'apparition. Déterminer la loi de ce rang.
2. On tire successivement une boule, sans remise, jusqu'à obtenir une boule rouge, et on note X son rang d'apparition. Déterminer la loi de ce rang.

Exercice 4. On examine successivement les souris dans une population à la recherche d'un caractère génétique particulier C . Pour chaque souris, on suppose que la probabilité d'avoir ce caractère est de 15%. On note X le nombre de souris à examiner pour observer la première fois le caractère C .

1. Quelle est la loi de X ? Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
2. Calculer les probabilités $P(X = 1)$, $P(X \leq 6)$, $P(X \geq 15)$.
3. Calculer $P(X \leq n)$ pour $n \leq 1$. Calculer n minimum pour que $P(X \leq n) \geq 95\%$.

Exercice 5. La mucoviscidose est une maladie héréditaire récessive qui se caractérise par la présence d'un allèle m au lieu d'un allèle M . Les personnes atteintes sont de génotype mm . Les personnes hétérozygotes sont de génotype MM . Des études ont montré que 1 personne sur 1600 est atteinte de la mucoviscidose et 1 personne sur 20 est hétérozygote.

A. On choisit au hasard (avec remise) un échantillon de 4000 individus. On note X le nombre aléatoire de personnes atteintes de mucoviscidose.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres. Préciser $E(X)$ et $V(X)$.
 2. Calculer la probabilité d'avoir au minimum 6 personnes atteintes de mucoviscidose.
- B.** On choisit les uns après les autres des personnes jusqu'à découvrir la première fois un hétérozygote. On note Y le nombre aléatoire de tirages nécessaires.
1. Quelle est la loi de Y ? Préciser son espérance, sa variance, son écart type.
 2. Calculer $P(Y \geq 40)$.
 3. Quel est le nombre minimal n de tirages à prévoir pour avoir $P(Y \leq n) > 99\%$?