

# Espaces vectoriels

Fiche amendée par David Chataur et Arnaud Bodin.

## 1 Définition, sous-espaces

### Exercice 1

Montrer que les ensembles ci-dessous sont des espaces vectoriels (sur  $\mathbb{R}$ ) :

- $E_1 = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$  : l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur l'intervalle  $[0, 1]$ , muni de l'addition  $f + g$  des fonctions et de la multiplication par un nombre réel  $\lambda \cdot f$ .
- $E_2 = \{(u_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\}$  : l'ensemble des suites réelles muni de l'addition des suites définie par  $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$  et de la multiplication par un nombre réel  $\lambda \cdot (u_n) = (\lambda \times u_n)$ .
- $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[x] \mid \deg P \leq n\}$  : l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$  muni de l'addition  $P + Q$  des polynômes et de la multiplication par un nombre réel  $\lambda \cdot P$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[006868]

### Exercice 2

Déterminer lesquels des ensembles  $E_1, E_2, E_3$  et  $E_4$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z\}$$

$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}$$

$$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = x + y + z = 0\}$$

$$E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = 0\}$$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000886]

### Exercice 3

1. Décrire les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}$  ; puis de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .
2. Dans  $\mathbb{R}^3$  donner un exemple de deux sous-espaces dont l'union n'est pas un sous-espace vectoriel.

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[006869]

### Exercice 4

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = 0 \text{ et } x + 3az = 0\}$$

$$E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$$

$$E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$$

$$E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + \alpha y + 1 \geq 0\}$$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000888]

### Exercice 5

Soit  $E$  un espace vectoriel.

1. Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces de  $E$ . Montrer que

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

2. Soit  $H$  un troisième sous-espace vectoriel de  $E$ . Prouver que

$$G \subset F \implies F \cap (G + H) = G + (F \cap H).$$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000893]

## 2 Systèmes de vecteurs

### Exercice 6

1. Soient  $v_1 = (2, 1, 4)$ ,  $v_2 = (1, -1, 2)$  et  $v_3 = (3, 3, 6)$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , trouver trois réels non tous nuls  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que  $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ .

2. On considère deux plans vectoriels

$$P_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$$

$$P_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$$

trouver un vecteur directeur de la droite  $D = P_1 \cap P_2$  ainsi qu'une équation paramétrée.

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[006870]

### Exercice 7

Soient dans  $\mathbb{R}^4$  les vecteurs  $v_1 = (1, 2, 3, 4)$  et  $v_2 = (1, -2, 3, -4)$ . Peut-on déterminer  $x$  et  $y$  pour que  $(x, 1, y, 1) \in \text{Vect}\{v_1, v_2\}$  ? Et pour que  $(x, 1, 1, y) \in \text{Vect}\{v_1, v_2\}$  ?

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000900]

### Exercice 8

Soit  $E$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  engendré par les vecteurs  $v_1 = (2, 3, -1)$  et  $v_2 = (1, -1, -2)$  et  $F$  celui engendré par  $w_1 = (3, 7, 0)$  et  $w_2 = (5, 0, -7)$ . Montrer que  $E$  et  $F$  sont égaux.

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000908]

### Exercice 9

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{\alpha x}$ . Montrer que la famille  $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$  est libre.

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000917]

## 3 Somme directe

### Exercice 10

Par des considérations géométriques répondez aux questions suivantes :

1. Deux droites vectorielles de  $\mathbb{R}^3$  sont-elles supplémentaires ?
2. Deux plans vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  sont-ils supplémentaires ?
3. A quelle condition un plan vectoriel et une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^3$  sont-ils supplémentaires ?

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[006871]

### Exercice 11

On considère les vecteurs  $v_1 = (1, 0, 0, 1)$ ,  $v_2 = (0, 0, 1, 0)$ ,  $v_3 = (0, 1, 0, 0)$ ,  $v_4 = (0, 0, 0, 1)$ ,  $v_5 = (0, 1, 0, 1)$  dans  $\mathbb{R}^4$ .

1.  $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$  et  $\text{Vect}\{v_3\}$  sont-ils supplémentaires dans  $\mathbb{R}^4$  ?
2.  $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$  et  $\text{Vect}\{v_4, v_5\}$  sont-ils supplémentaires dans  $\mathbb{R}^4$  ?
3.  $\text{Vect}\{v_1, v_3, v_4\}$  et  $\text{Vect}\{v_2, v_5\}$  sont-ils supplémentaires dans  $\mathbb{R}^4$  ?
4.  $\text{Vect}\{v_1, v_4\}$  et  $\text{Vect}\{v_3, v_5\}$  sont-ils supplémentaires dans  $\mathbb{R}^4$  ?

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000920]

### Exercice 12

Soient  $v_1 = (0, 1, -2, 1)$ ,  $v_2 = (1, 0, 2, -1)$ ,  $v_3 = (3, 2, 2, -1)$ ,  $v_4 = (0, 0, 1, 0)$  et  $v_5 = (0, 0, 0, 1)$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^4$ . Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1.  $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{Vect}\{(1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2)\}$ .
2.  $(1, 1, 0, 0) \in \text{Vect}\{v_1, v_2\} \cap \text{Vect}\{v_2, v_3, v_4\}$ .
3.  $\dim(\text{Vect}\{v_1, v_2\} \cap \text{Vect}\{v_2, v_3, v_4\}) = 1$  (c'est-à-dire c'est une droite vectorielle).
4.  $\text{Vect}\{v_1, v_2\} + \text{Vect}\{v_2, v_3, v_4\} = \mathbb{R}^4$ .
5.  $\text{Vect}\{v_4, v_5\}$  est un sous-espace vectoriel supplémentaire de  $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$  dans  $\mathbb{R}^4$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000919]

### Exercice 13

Soit  $E = \Delta^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  l'espace des fonctions dérivables et  $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ . Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et déterminer un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000923]

### Exercice 14

Soit

$$E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ converge} \}.$$

Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires dans  $E$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000926]

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

---

On vérifiera sur ces exemples la définition donnée en cours.

---

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

---

1.  $E_1$  est un sous-espace vectoriel.
  2.  $E_2$  n'est pas un sous-espace vectoriel.
  3.  $E_3$  est un sous-espace vectoriel.
  4.  $E_4$  n'est pas un sous-espace vectoriel.
- 

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

---

1. Discuter suivant la dimension des sous-espaces.
  2. Penser aux droites vectorielles.
- 

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

---

1.  $E_1$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  si et seulement si  $a = 0$ .
  2.  $E_2$  est un sous-espace vectoriel.
  3.  $E_3$  n'est pas un espace vectoriel.
  4.  $E_4$  n'est pas un espace vectoriel.
- 

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

---

1. Pour le sens  $\Rightarrow$  : raisonner par l'absurde et prendre un vecteur de  $F \setminus G$  et un de  $G \setminus F$ . Regarder la somme de ces deux vecteurs.
  2. Raisonner par double inclusion, revenir aux vecteurs.
- 

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

---

1. On pensera à poser un système.
  2. Trouver un vecteur non-nul commun aux deux plans.
- 

**Indication pour l'exercice 7 ▲**

---

On ne peut pas pour le premier, mais on peut pour le second.

---

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

---

Montrer la double inclusion. Utiliser le fait que de manière générale pour  $E = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$  alors :

$$E \subset F \iff \forall i = 1, \dots, n \quad v_i \in F.$$

---

**Indication pour l'exercice 9 ▲**

---

Supposer qu'il existe des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  et des indices  $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$  (tout cela en nombre fini !) tels que

$$\lambda_1 f_{\alpha_1} + \dots + \lambda_n f_{\alpha_n} = 0.$$

Ici le 0 est la fonction constante égale à 0. Regarder quel terme est dominant et factoriser.

---

**Indication pour l'exercice 10 ▲**

---

1. Jamais.
  2. Jamais.
  3. Considérer un vecteur directeur de la droite.
- 

**Indication pour l'exercice 11 ▲**

---

1. Non.
  2. Oui.
  3. Non.
  4. Non.
- 

**Indication pour l'exercice 12 ▲**

---

1. Vrai.
  2. Vrai.
  3. Faux.
  4. Faux.
  5. Vrai.
- 

**Indication pour l'exercice 13 ▲**

---

Soit

$$G = \{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Montrer que  $G$  est un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ .

---

**Indication pour l'exercice 14 ▲**

---

Pour une suite  $(u_n)$  qui converge vers  $\ell$  regarder la suite  $(u_n - \ell)$ .

---

## Correction de l'exercice 1 ▲

Pour qu'un ensemble  $E$ , muni d'une addition  $x + y \in E$  (pour tout  $x, y \in E$ ) et d'une multiplication par un scalaire  $\lambda \cdot x \in E$  (pour tout  $\lambda \in K, x \in E$ ), soit un  $K$ -espace vectoriel il faut qu'il vérifie les huit points suivants.

1.  $x + (y + z) = (x + y) + z$  (pour tout  $x, y, z \in E$ )
2. il existe un vecteur nul  $0 \in E$  tel que  $x + 0 = x$  (pour tout  $x \in E$ )
3. il existe un opposé  $-x$  tel que  $x + (-x) = 0$  (pour tout  $x \in E$ )
4.  $x + y = y + x$  (pour tout  $x, y \in E$ )  
Ces quatre premières propriétés font de  $(E, +)$  un groupe abélien.
5.  $1 \cdot x = x$  (pour tout  $x \in E$ )
6.  $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$  (pour tout  $\lambda \in K$ , pour tout  $x, y \in E$ )
7.  $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$  (pour tout  $\lambda, \mu \in K$ , pour tout  $x \in E$ )
8.  $(\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$  (pour tout  $\lambda, \mu \in K$ , pour tout  $x \in E$ )

Il faut donc vérifier ces huit points pour chacun des ensembles (ici  $K = \mathbb{R}$ ).

Commençons par  $E_1$ .

1.  $f + (g + h) = (f + g) + h$  ; en effet on bien pour tout  $t \in [0, 1]$  :  $f(t) + (g(t) + h(t)) = (f(t) + g(t)) + h(t)$  d'où l'égalité des fonctions  $f + (g + h)$  et  $(f + g) + h$ . Ceci est vrai pour tout  $f, g, h \in E_1$ .
2. le vecteur nul est ici la fonction constante égale à 0, que l'on note encore 0, on a bien  $f + 0 = f$  (c'est-à-dire pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $(f + 0)(t) = f(t)$ , ceci pour toute fonction  $f$ ).
3. il existe un opposé  $-f$  définie par  $-f(t) = -(f(t))$  tel que  $f + (-f) = 0$
4.  $f + g = g + f$  (car  $f(t) + g(t) = g(t) + f(t)$  pour tout  $t \in [0, 1]$ ).
5.  $1 \cdot f = f$  ; en effet pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $(1 \cdot f)(t) = 1 \times f(t) = f(t)$ . Et une fois que l'on compris que  $\lambda \cdot f$  vérifie par définition  $(\lambda \cdot f)(t) = \lambda \times f(t)$  les autres points se vérifient sans peine.
6.  $\lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$
7.  $(\lambda + \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f$
8.  $(\lambda \times \mu) \cdot f = \lambda \cdot (\mu \cdot f)$  ; en effet pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $(\lambda \times \mu)f(t) = \lambda(\mu f(t))$

Voici les huit points à vérifier pour  $E_2$  en notant  $u$  la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1.  $u + (v + w) = (u + v) + w$
2. le vecteur nul est la suite dont tous les termes sont nuls.
3. La suite  $-u$  est définie par  $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
4.  $u + v = v + u$
5.  $1 \cdot u = u$
6.  $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$  : montrons celui-ci en détails par définition  $u + v$  est la suite  $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et par définition de la multiplication par un scalaire  $\lambda \cdot (u + v)$  est la suite  $(\lambda \times (u_n + v_n))_{n \in \mathbb{N}}$  qui est bien la suite  $(\lambda u_n + \lambda v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui est exactement la suite  $\lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ .
7.  $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot v$
8.  $(\lambda \times \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$

Voici ce qu'il faut vérifier pour  $E_3$ , après avoir remarqué que la somme de deux polynômes de degré  $\leq n$  est encore un polynôme de degré  $\leq n$  (même chose pour  $\lambda \cdot P$ ), on vérifie :

1.  $P + (Q + R) = (P + Q) + R$
2. il existe un vecteur nul  $0 \in E_3$  : c'est le polynôme nul
3. il existe un opposé  $-P$  tel que  $P + (-P) = 0$
4.  $P + Q = Q + P$
5.  $1 \cdot P = P$
6.  $\lambda \cdot (P + Q) = \lambda \cdot P + \lambda \cdot Q$
7.  $(\lambda + \mu) \cdot P = \lambda \cdot P + \mu \cdot P$
8.  $(\lambda \times \mu) \cdot P = \lambda \cdot (\mu \cdot P)$

### Correction de l'exercice 2 ▲

1. (a)  $(0, 0, 0) \in E_1$ .  
 (b) Soient  $(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$  deux éléments de  $E_1$ . On a donc  $3x - 7y = z$  et  $3x' - 7y' = z'$ . Donc  $3(x + x') - 7(y + y') = (z + z')$ , d'où  $(x + x', y + y', z + z')$  appartient à  $E_1$ .  
 (c) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $(x, y, z) \in E_1$ . Alors la relation  $3x - 7y = z$  implique que  $3(\lambda x) - 7(\lambda y) = \lambda z$  donc que  $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$  appartient à  $E_1$ .
2.  $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}$  c'est-à-dire  $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \text{ ou } x = -z\}$ . Donc  $(1, 0, -1)$  et  $(1, 0, 1)$  appartiennent à  $E_2$  mais  $(1, 0, -1) + (1, 0, 1) = (2, 0, 0)$  n'appartient pas à  $E_2$  qui n'est en conséquence pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .
3.  $E_3$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . En effet :  
 (a)  $(0, 0, 0) \in E_3$ .  
 (b) Soient  $(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$  deux éléments de  $E_3$ . On a donc  $x + y - z = x + y + z = 0$  et  $x' + y' - z' = x' + y' + z' = 0$ . Donc  $(x + x') + (y + y') - (z + z') = (x + x') + (y + y') + (z + z') = 0$  et  $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$  appartient à  $E_3$ .  
 (c) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $(x, y, z) \in E_3$ . Alors la relation  $x + y - z = x + y + z = 0$  implique que  $\lambda x + \lambda y - \lambda z = \lambda x + \lambda y + \lambda z = 0$  donc que  $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$  appartient à  $E_3$ .
4. Les vecteurs  $(1, 0, 0)$  et  $(0, 0, 1)$  appartiennent à  $E_4$  mais leur somme  $(1, 0, 0) + (0, 0, 1) = (1, 0, 1)$  ne lui appartient pas donc  $E_4$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

### Correction de l'exercice 3 ▲

1. L'espace vectoriel  $\mathbb{R}$  a deux sous-espaces : celui formé du vecteur nul  $\{0\}$  et  $\mathbb{R}$  lui-même.  
 L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$  a trois types de sous-espaces :  $\{0\}$ , une infinité de sous-espaces de dimension 1 (ce sont les droites vectorielles) et  $\mathbb{R}^2$  lui-même.  
 Enfin, l'espace  $\mathbb{R}^3$  a quatre types de sous-espaces : le vecteur nul, les droites vectorielles, les plans vectoriels et lui-même.
2. On considère deux droites vectorielles de  $\mathbb{R}^3$  dont des vecteurs directeurs  $u$  et  $v$  ne sont pas colinéaires alors le vecteur  $u + v$  n'appartient à aucune de ces deux droites, l'union de celles-ci n'est pas un espace vectoriel.

---

### Correction de l'exercice 4 ▲

---

1.  $E_1$  : non si  $a \neq 0$  car alors  $0 \notin E_1$  ; oui, si  $a = 0$  car alors  $E_1$  est l'intersection des sous-espaces vectoriels  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$  et  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ .
  2.  $E_2$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
  3.  $E_3$  : non, car la fonction nulle n'appartient pas à  $E_3$ .
  4.  $E_4$  : non, en fait  $E_4$  n'est même pas un sous-groupe de  $(\mathbb{R}^2, +)$  car  $(2, 0) \in E_4$  mais  $-(2, 0) = (-2, 0) \notin E_4$ .
- 

### Correction de l'exercice 5 ▲

---

1. Sens  $\Leftarrow$ . Si  $F \subset G$  alors  $F \cup G = G$  donc  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel. De même si  $G \subset F$ .  
Sens  $\Rightarrow$ . On suppose que  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel. Par l'absurde supposons que  $F$  n'est pas inclus dans  $G$  et que  $G$  n'est pas inclus dans  $F$ . Alors il existe  $x \in F \setminus G$  et  $y \in G \setminus F$ . Mais alors  $x \in F \cup G$ ,  $y \in F \cup G$  donc  $x + y \in F \cup G$  (car  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel). Comme  $x + y \in F \cup G$  alors  $x + y \in F$  ou  $x + y \in G$ .
    - Si  $x + y \in F$  alors, comme  $x \in F$ ,  $(x + y) + (-x) \in F$  donc  $y \in F$ , ce qui est absurde.
    - Si  $x + y \in G$  alors, comme  $y \in G$ ,  $(x + y) + (-y) \in G$  donc  $x \in G$ , ce qui est absurde.Dans les deux cas nous obtenons une contradiction. Donc  $F$  est inclus dans  $G$  ou  $G$  est inclus dans  $F$ .
  2. Supposons  $G \subset F$ .
    - Inclusion  $\supset$ . Soit  $x \in G + (F \cap H)$ . Alors il existe  $a \in G$ ,  $b \in F \cap H$  tels que  $x = a + b$ . Comme  $G \subset F$  alors  $a \in F$ , de plus  $b \in F$  donc  $x = a + b \in F$ . D'autre part  $a \in G$ ,  $b \in H$ , donc  $x = a + b \in G + H$ . Donc  $x \in F \cap (G + H)$ .
    - Inclusion  $\subset$ . Soit  $x \in F \cap (G + H)$ .  $x \in G + H$  alors il existe  $a \in G$ ,  $b \in H$  tel que  $x = a + b$ . Maintenant  $b = x - a$  avec  $x \in F$  et  $a \in G \subset F$ , donc  $b \in F$ , donc  $b \in F \cap H$ . Donc  $x = a + b \in G + (F \cap H)$ .
- 

### Correction de l'exercice 6 ▲

---

1.

$$\begin{aligned} & \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0 \\ \iff & \alpha(2, 1, 4) + \beta(1, -1, 2) + \gamma(3, 3, 6) = (0, 0, 0) \\ \iff & (2\alpha + \beta + 3\gamma, \alpha - \beta + 3\gamma, 4\alpha + 2\beta + 6\gamma) = (0, 0, 0) \\ \iff & \begin{cases} 2\alpha + \beta + 3\gamma &= 0 \\ \alpha - \beta + 3\gamma &= 0 \\ 4\alpha + 2\beta + 6\gamma &= 0 \end{cases} \\ \iff & \dots \quad (\text{on résout le système}) \\ \iff & \alpha = -2t, \beta = t, \gamma = t \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Si l'on prend  $t = 1$  par exemple alors  $\alpha = -2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$  donne bien  $-2v_1 + v_2 + v_3 = 0$ .

Cette solution n'est pas unique, les autres coefficients qui conviennent sont les  $(\alpha = -2t, \beta = t, \gamma = t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .



2. Il s'agit donc de trouver un vecteur  $v = (x, y, z)$  dans  $P_1$  et  $P_2$  et donc qui doit vérifier  $x - y + z = 0$  et  $x - y = 0$  :

$$\begin{aligned}
 v &= (x, y, z) \in P_1 \cap P_2 \\
 \iff x - y + z &= 0 \text{ et } x - y = 0 \\
 \iff \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \\
 \iff \dots &\quad (\text{on résout le système}) \\
 \iff (x = t, y = t, z = 0) &\quad t \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Donc, si l'on fixe par exemple  $t = 1$ , alors  $v = (1, 1, 0)$  est un vecteur directeur de la droite vectorielle  $D$ , une équation paramétrique étant  $D = \{(t, t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ .

### Correction de l'exercice 7 ▲

1.

$$\begin{aligned}
 (x, 1, y, 1) &\in \text{Vect}\{v_1, v_2\} \\
 \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (x, 1, y, 1) &= \lambda(1, 2, 3, 4) + \mu(1, -2, 3, -4) \\
 \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (x, 1, y, 1) &= (\lambda, 2\lambda, 3\lambda, 4\lambda) + (\mu, -2\mu, 3\mu, -4\mu) \\
 \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (x, 1, y, 1) &= (\lambda + \mu, 2\lambda - 2\mu, 3\lambda + 3\mu, 4\lambda - 4\mu) \\
 \implies \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad 1 &= 2(\lambda - \mu) \text{ et } 1 = 4(\lambda - \mu) \\
 \implies \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \lambda - \mu &= \frac{1}{2} \text{ et } \lambda - \mu = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Ce qui est impossible (quelque soient  $x, y$ ). Donc on ne peut pas trouver de tels  $x, y$ .

2. On fait le même raisonnement :

$$\begin{aligned}
 (x, 1, 1, y) &\in \text{Vect}\{v_1, v_2\} \\
 \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (x, 1, 1, y) &= (\lambda + \mu, 2\lambda - 2\mu, 3\lambda + 3\mu, 4\lambda - 4\mu) \\
 \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x &= \lambda + \mu \\ 1 &= 2\lambda - 2\mu \\ 1 &= 3\lambda + 3\mu \\ y &= 4\lambda - 4\mu \end{cases} \\
 \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \lambda &= \frac{5}{12} \\ \mu &= -\frac{1}{12} \\ x &= \frac{1}{3} \\ y &= 2 \end{cases} .
 \end{aligned}$$

Donc le seul vecteur  $(x, 1, 1, y)$  qui convienne est  $(\frac{1}{3}, 1, 1, 2)$ .

### Correction de l'exercice 8 ▲

---

Montrons d'abord que  $E \subset F$ . On va d'abord montrer que  $v_1 \in F$  et  $v_2 \in F$ .

Tout d'abord  $v_1 \in F \iff v_1 \in \text{Vect}\{w_1, w_2\} \iff \exists \lambda, \mu \quad v_1 = \lambda w_1 + \mu w_2$ .

Il s'agit donc de trouver ces  $\lambda, \mu$ . Cela se fait en résolvant un système (ici on peut même le faire de tête) on trouve la relation  $7(2, 3, -1) = 3(3, 7, 0) - (5, 0, -7)$  ce qui donne la relation  $v_1 = \frac{3}{7}w_1 - \frac{1}{7}w_2$  et donc  $v_1 \in F$ .

De même  $7v_2 = -w_1 + 2w_2$  donc  $v_2 \in F$ .

Maintenant  $v_1$  et  $v_2$  sont dans l'espace vectoriel  $F$ , donc toute combinaison linéaire de  $v_1$  et  $v_2$  aussi, c'est-à-dire : pour tout  $\lambda, \mu$ , on a  $\lambda v_1 + \mu v_2 \in F$ . Ce qui implique  $E \subset F$ .

Il reste à montrer  $F \subset E$ . Il s'agit donc d'écrire  $w_1$  (puis  $w_2$ ) en fonction de  $v_1$  et  $v_2$ . On trouve  $w_1 = 2v_1 - v_2$  et  $w_2 = v_1 + 3v_2$ . Encore une fois cela entraîne  $w_1 \in E$  et  $w_2 \in E$  donc  $\text{Vect}\{w_1, w_2\} \subset E$  d'où  $F \subset E$ .

Par double inclusion on a montré  $E = F$ .

---

### Correction de l'exercice 9 ▲

À partir de la famille  $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$  nous considérons une combinaison linéaire (qui ne correspond qu'à un nombre fini de termes).

Soient  $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$  des réels distincts que nous avons ordonnés, considérons la famille (finie) :  $(f_{\alpha_i})_{i=1, \dots, n}$ . Supposons qu'il existe des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$ . Cela signifie que, quelque soit  $x \in \mathbb{R}$ , alors  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i}(x) = 0$ , autrement dit pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + \lambda_n e^{\alpha_n x} = 0.$$

Le terme qui domine est  $e^{\alpha_1 x}$  (car  $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots$ ). Factorisons par  $e^{\alpha_1 x}$  :

$$e^{\alpha_1 x} (\lambda_1 + \lambda_2 e^{(\alpha_2 - \alpha_1)x} + \dots + \lambda_n e^{(\alpha_n - \alpha_1)x}) = 0.$$

Mais  $e^{\alpha_1 x} \neq 0$  donc :

$$\lambda_1 + \lambda_2 e^{(\alpha_2 - \alpha_1)x} + \dots + \lambda_n e^{(\alpha_n - \alpha_1)x} = 0.$$

Lorsque  $x \rightarrow +\infty$  alors  $e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} \rightarrow 0$  (pour tout  $i \geq 2$ , car  $\alpha_i - \alpha_1 < 0$ ). Donc pour  $i \geq 2$ ,  $\lambda_i e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} \rightarrow 0$  et en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus on trouve :

$$\lambda_1 = 0.$$

Le premier coefficients est donc nul. On repart de la combinaison linéaire qui est maintenant  $\lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n = 0$  et en appliquant le raisonnement ci-dessus on prouve par récurrence  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ . Donc la famille  $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$  est une famille libre.

---

### Correction de l'exercice 10 ▲

1. Si les deux droites vectorielles sont distinctes alors elles engendrent un plan vectoriel et donc pas  $\mathbb{R}^3$  tout entier. Si elles sont confondues c'est pire : elles n'engendrent qu'une droite. Dans tout les cas elles n'engendrent pas  $\mathbb{R}^3$  et ne sont donc pas supplémentaires.
2. Si  $P$  et  $P'$  sont deux plans vectoriels alors  $P \cap P'$  est une droite vectorielle si  $P \neq P'$  ou le plan  $P$  tout entier si  $P = P'$ . Attention, tous les plans vectoriels ont une équation du type  $ax + by + cz = 0$  et doivent passer par l'origine, il n'existe donc pas deux plans parallèles par exemple. Donc l'intersection  $P \cap P'$  n'est jamais réduite au vecteur nul. Ainsi  $P$  et  $P'$  ne sont pas supplémentaires.
3. Soit  $D$  une droite et  $P$  un plan,  $u$  un vecteur directeur de  $D$ . Si le vecteur  $u$  appartient au plan  $P$  alors  $D \subset P$  et les espaces ne sont pas supplémentaires (ils n'engendrent pas tout  $\mathbb{R}^3$ ). Si  $u \notin P$  alors d'une part  $D \cap P$  est juste le vecteur nul d'autre part  $D$  et  $P$  engendrent tout  $\mathbb{R}^3$  ;  $D$  et  $P$  sont supplémentaires.

Détaillons un exemple : si  $P$  est le plan d'équation  $z = 0$  alors il est engendré par les deux vecteurs  $v = (1, 0, 0)$  et  $w = (0, 1, 0)$ . Soit  $D$  une droite de vecteur directeur  $u = (a, b, c)$ .

Alors  $u \notin P \iff u \notin \text{Vect}\{v, w\} \iff c \neq 0$ . Dans ce cas on bien que d'une part que  $D = \text{Vect}\{u\}$  intersecté avec  $P$  est réduit au vecteur nul. Ainsi  $D \cap P = \{(0, 0, 0)\}$ . Et d'autre part tout vecteur  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  appartient à  $D + P = \text{Vect}\{u, v, w\}$ . Il suffit de remarquer que  $(x, y, z) - \frac{z}{c}(a, b, c) = (x - \frac{za}{c}, y - \frac{zb}{c}, 0) = (x - \frac{za}{c})(1, 0, 0) + (y - \frac{zb}{c})(0, 1, 0)$ . Et ainsi  $(x, y, z) = \frac{z}{c}u + (x - \frac{za}{c})v + (y - \frac{zb}{c})w$ . Donc  $D + P = \mathbb{R}^3$ .  
Bilan on a bien  $D \oplus P = \mathbb{R}^3$  :  $D$  et  $P$  sont en somme directe.

## Correction de l'exercice 11 ▲

1. Non. Tout d'abord par définition  $\text{Vect}\{v_1, v_2\} + \text{Vect}\{v_3\} = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ , Nous allons trouver un vecteur de  $\mathbb{R}^4$  qui n'est pas dans  $\text{Vect}\{v_1, v_2\} + \text{Vect}\{v_3\}$ . Il faut tâtonner un peu pour le choix, par exemple faisons le calcul avec  $u = (0, 0, 0, 1)$ .

$u \in \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$  si et seulement si il existe des réels  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que  $u = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ . Si l'on écrit les vecteurs verticalement, on cherche donc  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui est équivalent à trouver  $\alpha, \beta, \gamma$  vérifiant le système linéaire :

$$\begin{cases} 0 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 \\ 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 1 \\ 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0 \\ 1 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 \end{cases} \quad \text{qui équivaut à} \quad \begin{cases} 0 = \alpha \\ 0 = \gamma \\ 0 = \beta \\ 1 = \alpha \end{cases}$$

Il n'y a clairement aucune solution à ce système (les trois premières lignes impliquent  $\alpha = \beta = \gamma = 0$  et cela rentre alors en contradiction avec la quatrième).

Un autre type de raisonnement, beaucoup plus rapide, est de dire que ces deux espaces ne peuvent engendrer tout  $\mathbb{R}^4$  car il n'y pas assez de vecteurs en effet 3 vecteurs ne peuvent engendrer l'espace  $\mathbb{R}^4$  de dimension 4.

2. Oui. Notons  $F = \text{Vect}\{v_1, v_2\}$  et  $G = \text{Vect}\{v_4, v_5\}$ . Pour montrer  $F \oplus G = \mathbb{R}^4$  il faut montrer  $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$  et  $F + G = \mathbb{R}^4$ .

- (a) Montrons  $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$ . Soit  $u \in F \cap G$ , d'une part  $u \in F = \text{Vect}\{v_1, v_2\}$  donc il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $u = \alpha v_1 + \beta v_2$ . D'autre part  $u \in G = \text{Vect}\{v_4, v_5\}$  donc il existe  $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$  tels que  $u = \gamma v_4 + \delta v_5$ . On a écrit  $u$  de deux façons donc on a l'égalité  $\alpha v_1 + \beta v_2 = \gamma v_4 + \delta v_5$ . En écrivant les vecteurs comme des vecteurs colonnes cela donne

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  est solution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 0 = \delta \\ \beta = 0 \\ \alpha = \gamma + \delta \end{cases}$$

Cela implique  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$  et donc  $u = (0, 0, 0, 0)$ . Ainsi le seul vecteur de  $F \cap G$  est le vecteur nul.

- (b) Montrons  $F + G = \mathbb{R}^4$ .  $F + G = \text{Vect}\{v_1, v_2\} + \text{Vect}\{v_4, v_5\} = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ . Il faut donc montrer que n'importe quel vecteur  $u = (x_0, y_0, z_0, t_0)$  de  $\mathbb{R}^4$  s'écrit comme une combinaison linéaire de  $v_1, v_2, v_4, v_5$ . Fixons  $u$  et cherchons  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  tels que  $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_4 + \delta v_5 = u$ . Après avoir considéré les vecteurs comme des vecteurs colonnes cela revient à résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} \alpha = x_0 \\ \delta = y_0 \\ \beta = z_0 \\ \alpha + \gamma + \delta = t_0 \end{cases}$$

Nous étant donné un vecteur  $u = (x_0, y_0, z_0, t_0)$  on a calculé qu'en choisissant  $\alpha = x_0$ ,  $\beta = z_0$ ,  $\gamma = t_0 - x_0 - y_0$ ,  $\delta = y_0$  on obtient bien  $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_4 + \delta v_5 = u$ . Ainsi tout vecteur est engendré par  $F + G$ .

Ainsi  $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$  et  $F + G = \mathbb{R}^4$  donc  $F \oplus G = \mathbb{R}^4$ .

3. Non. Ces deux espaces ne sont pas supplémentaires car il y a trop de vecteurs ! Il engendrent tout, mais l'intersection n'est pas triviale. En effet on remarque assez vite que  $v_5 = v_3 + v_4$  est dans l'intersection. On peut aussi obtenir ce résultat en résolvant un système.

4. Non. Il y a bien quatre vecteurs mais il existe des relations entre eux.

On peut montrer  $\text{Vect}\{v_1, v_4\}$  et  $\text{Vect}\{v_3, v_5\}$  ne sont pas supplémentaires de deux façons. Première méthode : leur intersection est non nulle, par exemple  $v_4 = v_5 - v_3$  est dans l'intersection. Deuxième méthode : les deux espaces n'engendrent pas tout, en effet il est facile de voir que  $(0, 0, 1, 0) \notin \text{Vect}\{v_1, v_4\} + \text{Vect}\{v_3, v_5\} = \text{Vect}\{v_1, v_4, v_3, v_5\}$ .

### Correction de l'exercice 12 ▲

Faisons d'abord une remarque qui va simplifier les calculs :

$$v_3 = 2v_1 + 3v_2.$$

Donc en fait nous avons  $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{Vect}\{v_1, v_2\}$  et c'est un espace de dimension 2, c'est-à-dire un plan vectoriel. Par la même relation on trouve que  $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{Vect}\{v_2, v_3\}$ .

1. Vrai.  $\text{Vect}\{(1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2)\}$  est inclus dans  $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ , car  $(1, 1, 0, 0) = v_1 + v_2$  et  $(-1, 1, -4, 2) = v_1 - v_2$ . Comme ils sont de même dimension ils sont égaux (autrement dit : comme un plan est inclus dans un autre alors ils sont égaux).
2. Vrai. On a  $(1, 1, 0, 0) = v_1 + v_2$  donc  $(1, 1, 0, 0) \in \text{Vect}\{v_1, v_2\}$ , or  $\text{Vect}\{v_1, v_2\} = \text{Vect}\{v_2, v_3\} \subset \text{Vect}\{v_2, v_3, v_4\}$ . Donc  $(1, 1, 0, 0) \in \text{Vect}\{v_1, v_2\} \cap \text{Vect}\{v_2, v_3, v_4\}$ .
3. Faux. Toujours la même relation nous donne que  $\text{Vect}\{v_1, v_2\} \cap \text{Vect}\{v_2, v_3, v_4\} = \text{Vect}\{v_1, v_2\}$  donc est de dimension 2. C'est donc un plan vectoriel et pas une droite.
4. Faux. Encore une fois la relation donne que  $\text{Vect}\{v_1, v_2\} + \text{Vect}\{v_2, v_3, v_4\} = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_4\}$ , or 3 vecteurs ne peuvent engendrer  $\mathbb{R}^4$  qui est de dimension 4.
5. Vrai. Faire le calcul : l'intersection est  $\{0\}$  et la somme est  $\mathbb{R}^4$ .

### Correction de l'exercice 13 ▲

Analysons d'abord les fonctions de  $E$  qui ne sont pas dans  $F$  : ce sont les fonctions  $h$  qui vérifient  $h(0) \neq 0$  ou  $h'(0) \neq 0$ . Par exemple les fonctions constantes  $x \mapsto b$ , ( $b \in \mathbb{R}^*$ ) ou les homothéties  $x \mapsto ax$ , ( $a \in \mathbb{R}^*$ ) n'appartiennent pas à  $F$ .

Cela nous donne l'idée de poser

$$G = \{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Montrons que  $G$  est un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ .

Soit  $f \in F \cap G$ , alors  $f(x) = ax + b$  (car  $f \in G$ ) et  $f(0) = b$  et  $f'(0) = a$  ; mais  $f \in F$  donc  $f(0) = 0$  donc  $b = 0$  et  $f'(0) = 0$  donc  $a = 0$ . Maintenant  $f$  est la fonction nulle :  $F \cap G = \{0\}$ .

Soit  $h \in E$ , alors remarquons que pour  $f(x) = h(x) - h(0) - h'(0)x$  la fonction  $f$  vérifie  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 0$  donc  $f \in F$ . Si nous écrivons l'égalité différemment nous obtenons

$$h(x) = f(x) + h(0) + h'(0)x.$$

Posons  $g(x) = h(0) + h'(0)x$ , alors la fonction  $g \in G$  et

$$h = f + g,$$

ce qui prouve que toute fonction de  $E$  s'écrit comme somme d'une fonction de  $F$  et d'une fonction de  $G$  :  $E = F + G$ .

En conclusion nous avons montré que  $E = F \oplus G$ .

---

### Correction de l'exercice 14 ▲

On note  $F$  l'espace vectoriel des suites constantes et  $G$  l'espace vectoriel des suites convergeant vers 0.

1.  $F \cap G = \{0\}$ . En effet une suite constante qui converge vers 0 est la suite nulle.
2.  $F + G = E$ . Soit  $(u_n)$  un élément de  $E$ . Notons  $\ell$  la limite de  $(u_n)$ . Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $v_n = u_n - \ell$ , alors  $(v_n)$  converge vers 0. Donc  $(v_n) \in G$ . Notons  $(w_n)$  la suite constante égale à  $\ell$ . Alors nous avons  $u_n = \ell + u_n - \ell$ , ou encore  $u_n = w_n + v_n$ , ceci pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En terme de suite cela donne  $(u_n) = (w_n) + (v_n)$ . Ce qui donne la décomposition cherchée.

Bilan :  $F$  et  $G$  sont en somme directe dans  $E$  :  $E = F \oplus G$ .

---