Optimisation Numérique

Département de Mathématiques
Master Mathématiques

Sommaire

Programmation Linéaire I

Programmes Linéaires

En général, un problème de programmation linéaire a la forme suivante :

$$(\mathcal{L}) \qquad \begin{cases} \min c^\top x \\ A_1 x \leq b_1, \\ A_2 x \geq b_2, \\ A_3 x = b_3, \end{cases}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$; A_1, A_2 et A_3 sont respectivement des matrices d'ordre $m_1 \times n$, $m_2 \times n$, $m_3 \times n$; $b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ et $b_3 \in \mathbb{R}^{m_3}$.

Programmation Linéaire II

Programmes Linéaires

On désignera par z,

$$z := c^\top x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i.$$

On note que les égalités et inégalités dans $(\mathcal{L})$ sont prises au sens vectoriel et on pose

$$X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x \leq b_1, A_2 x \geq b_2, A_3 x = b_3\},$$

l'ensemble des contraintes.

Programmation Linéaire I
Forme standard d'un Programme Linéaire

Définition
Un programme linéaire est dit sous forme standard s'il est écrit sous la forme

$$(\mathcal{L}) \qquad \begin{cases} \min c^\top x \\ Ax = b, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, A une matrice d'ordre $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

Programmation Linéaire II
Forme standard d'un Programme Linéaire

Problème de maximisation
Si le programme est un problème de maximisation, on peut se ramener à une minimisation puisque

$$\max_{x \in X} z = -\min_{x \in X}(-z).$$

Contraintes de positivité
On peut toujours supposer que les composantes de x sont positives ou nulles. En effet, si une composante x_i est sans contrainte de signe, on écrira $x_i = x_i' - x_i''$ avec $x_i' \geq 0$ et $x_i'' \geq 0$.
Dans le cas particulier où une composante x_i est minorée ($x_i \geq \alpha$ par ex.) on posera tout simplement $x_i' = x_i - \alpha$ et introduire la contrainte $x_i' \geq 0$.

Programmation Linéaire III
Forme standard d'un Programme Linéaire

Variables d'écart
Les contraintes de type $A_1 x \leq b_1$ peuvent se mettre sous forme de contarintes d'égalité en introduisant des variables d'écrat. En effet, si $A_1 x \leq b_1$ alors il existe $s \in \mathbb{R}^{m_1}$, $s \geq 0$ tel que $A_1 x + s = b_1$ ($s = A_1 x - b_1$).
De même, les contraintes de type $A_2 x \geq b_2$ peuvent également se mettre sous forme de contarintes d'égalité en introduisant des variables d'écrat. Si $A_2 x \geq b_2$ alors il existe $t \in \mathbb{R}^{m_2}$, $t \geq 0$ tel que $A_2 x - t = b_2$.

Programmation Linéaire I
Exemple

Exemple

$$(\mathcal{L}) \qquad \begin{cases} \max z = -5x_1 - 3x_2 + 7x_3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ -4x_1 - 9x_2 + 4x_3 \leq -4 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 7 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Les variables x_1 et x_3 sont sans contrainte de signe. Puisque $x_1 \geq -2$ on pose $x_1' = x_1 + 2$. On pose aussi et $x_3 = x_3' - x_3''$.

Programmation Linéaire II
Exemple

$$
(\mathcal{L}) \quad \begin{cases}
\max z = -5(x_1' - 2) - 3x_2 + 7(x_3' - x_3'') \\
3(x_1' - 2) - 5x_2 + 3(x_3' - x_3'') \leq 5 \\
-4(x_1' - 2) - 9x_2 + 4(x_3' - x_3'') \leq -4 \\
x_2 \leq 4 \\
2(x_1' - 2) + 4x_2 + 6(x_3' - x_3'') = 7 \\
x_1',\ x_2,\ x_3',\ x_3'' \geq 0
\end{cases}
$$

Programmation Linéaire III
Exemple

On transforme ensuite la maximisation en minimisation et on rend le second membre positif ou nul.

$$
(\mathcal{L}) \quad \begin{cases}
\min z = 5x_1' + 3x_2 - 7x_3' + 7x_3'' - 10 \\
3x_1' - 5x_2 + 3x_3' - 3x_3'' \leq 11 \\
x_2 \leq 4 \\
4x_1' + 9x_2 - 4x_3' + 4x_3'' \geq 12 \\
2x_1' + 4x_2 + 6x_3' - 6x_3'' = 11 \\
x_1',\ x_2,\ x_3',\ x_3'' \geq 0
\end{cases}
$$

Programmation Linéaire IV
Exemple

On introduit ensuite les variables d'écart.

$$
(\mathcal{L}) \quad \begin{cases}
\min z = 5x_1' + 3x_2 - 7x_3' + 7x_3'' - 10 \\
3x_1' - 5x_2 + 3x_3' - 3x_3'' + s_1 = 11 \\
x_2 + s_2 = 4 \\
4x_1' + 9x_2 - 4x_3' + 4x_3'' - t_1 = 12 \\
2x_1' + 4x_2 + 6x_3' - 6x_3'' = 11 \\
x_1',\ x_2,\ x_3',\ x_3'',\ s_1,\ s_2,\ t_1 \geq 0
\end{cases}
$$

Programmation Linéaire V
Exemple

En posant

$$
A = \begin{pmatrix}
3 & -5 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
4 & 9 & -4 & 4 & 0 & 0 & -1 \\
2 & 4 & 6 & -6 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
c = (5, 3, -7, 7, 0, 0, 0)^\top \quad x = (x_1', x_2, x_3', x_3'', s_1, s_2, t_1)^\top
$$

$b = (11, 4, 12, 11)^\top$ on obtient la forme standard

$$
(\mathcal{L}) \quad \begin{cases}
\min c^\top x \\
Ax = b, \\
x \geq 0.
\end{cases}
$$

Programmation Linéaire I
Notations et Hypothèses

Par la suite, et sauf indication contraire, on va considérer des programmes sous la forme standard

$$(\mathcal{L}) \quad \begin{cases} \min c^\top x \\ Ax = b, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

où A est une matrice de dimension $m \times n$, $b = (b_1, \ldots, b_m)^\top \in \mathbb{R}^m$, $c = (c_1, \ldots, c_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$.

Programmation Linéaire II
Notations et Hypothèses

Définition

On appelle

1. *n : le nombre de variables,*
2. *m : le nombre de contraintes,*
3. *x : le vecteur des inconnues (variables de décisions),*
4. *$z = c^\top x = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$: la fonction objectif (fonction économique).*

Programmation Linéaire III
Notations et Hypothèses

Remarque

1. *On suppose que $n > m$.*
2. *On suppose que $\mathrm{rang}(A) = m$, où $\mathrm{rang}(A)$ est le rang de la matrice A sans perte de généralité puisque si $\mathrm{rang}(A) < m$, alors certaines contraintes seraient redondantes ; c'est à dire qu'elles résulteraient des autres contraintes.*

Programmation Linéaire I
Bases, Solution de Base et Points extrêmes

On utilsera par la suite les définitions suivantes :

1. Base : toute sous-matrice carrée d'ordre m inversible extraite de A.
   Soit B une base et supposons que $A = (B, N)$ (quitte à permuter les colonnes de A). De même soit x_B (resp. c_B) le vecteur extrait de x (resp. c) dont les indices des composantes correspondent aux indices des colonnes de B. On écrira alors $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ et $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$.
2. x_B : le vecteur des variables de base.
3. x_N : le vecteur des variables hors-base.

Programmation Linéaire II
Bases, Solution de Base et Points extrêmes

4. Solution de base : une solution du système $Ax = b$ avec $x_N = 0 \in \mathbb{R}^{n-m}$. On a
$$Ax = b \iff Bx_B + Nx_N = Bx_B = b.$$
Donc x est solution de base, si et seulement si, $x_B = B^{-1}b$ et $x_N = 0$. C'est à dire $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$
5. Une solution de base est réalisable si $x_B := B^{-1}b \geq 0$.
6. Une base est réalisable si $B^{-1}b \geq 0$.
7. Une base est dégénérée si $x_B := B^{-1}b$ a des composantes nulles.

Programmation Linéaire III
Bases, Solution de Base et Points extrêmes

Proposition
L'ensemble $X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ est convexe. C'est à dire que
$$\forall \alpha \in [0,1],\ \forall x, y \in X, \quad \alpha x + (1-\alpha)y \in X.$$
On l'appelle polyèdre.

Définition
Un point $x \in X$ est un point extrême (ou sommet), s'il ne peut pas s'exprimer comme combinaison convexe d'autres points de X distincts de x. C'est à dire que x est un point extrême de X, si et seulement si, il n'existe pas de couple $(x_1, x_2) \in X \times X$, $x_1 \neq x_2$, et $\lambda \in]0,1[$ tels que $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$.

Programmation Linéaire IV
Bases, Solution de Base et Points extrêmes

Théorème
L'ensemble des points extrêmes de X est identique à l'ensemble de toutes les solutions de base réalisables.

Programmation Linéaire V
Bases, Solution de Base et Points extrêmes

Preuve
Soit x une solution de base réalisable. Par l'absurde supposons que x n'est pas un sommet. Alors
$$\exists (x_1, x_2) \in X \times X, x_1 \neq x_2 \text{ et } \lambda \in]0,1[\text{ tels que } x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2.$$
Les variables hors-base sont nulles puisque x est une solution de base. Soit I l'ensemble des indices des variables hors-base. Donc
$$\lambda x_1^i + (1-\lambda)x_2^i = 0 \quad \forall i \in I,$$
où x_1^i et x_2^i sont les composantes d'inces $i \in I$, respectives de x_1 et x_2. Puisque $x_1 \in X$ et $x_2 \in X$ alors $x_1^i \geq 0$ et $x_2^i \geq 0$, et donc $x_1^i = x_2^i = 0$ pour tout $i \in I$.

Programmation Linéaire VI

Bases, Solution de Base et Points extrêmes

D'autre part, $Ax_1 = Ax_2 = b$ entraîne que $Bx_{1B} = Bx_{2B} = b$. D'où $x_{1B} = x_{2B} = x_B$ (d'après l'unicité de x_B) et par suite $x = x_1 = x_2$. Ce qui contredit l'hypothèse. Donc x est un sommet.
Supposons maintenant que x est un sommet de X et montrons que x est une solution de base.
Soit $J = \{j \in I \mid x_j > 0\}$ et montrons que la famille $(a_j)_{j\in J}$, où a_j est une colonne de A est libre lorsque J n'est pas vide.
Si $J = \emptyset$, alors $x = 0 \in X$ et donc $b = 0$ et quelque soit la base B, $B^{-1}b = 0$ et 0 est la seule solution de base réalisable.
Si $J \neq \emptyset$. Supposons que $(a_j)_{j\in J}$ est liée. Alors

$$\exists \lambda_j,\ j \in J,\ \text{non tous nuls tels que } \sum_{j\in J} \lambda_j a_j = 0.$$

Programmation Linéaire VII

Bases, Solution de Base et Points extrêmes

D'un autr coté on a $\sum_{j\in J} x_j a_j = b$ (i.e. $Ax = b$) et donc

$$\sum_{j\in J}(x_j + r\lambda_j)a_j = b \text{ et } \sum_{j\in J}(x_j - r\lambda_j)a_j = b \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

On choisit $r > 0$ pour que les points y et z définis par leur composantes y_j et z_j respectivement par

$$y_j = x_j + r\lambda_j \text{ si } j \in J \text{ et } y_j = 0 \text{ si } j \notin J,$$

$$z_j = x_j - r\lambda_j \text{ si } j \in J \text{ et } z_j = 0 \text{ si } j \notin J,$$

appartiennent à X.

Programmation Linéaire VIII

Bases, Solution de Base et Points extrêmes

Tenant compte de ce qui précède, on a

$$y \in X \iff r \leq -\frac{x_j}{\lambda_j} \text{ pour les } j \text{ tels que } \lambda_j < 0,$$

$$z \in X \iff r \leq \frac{x_j}{\lambda_j} \text{ pour les } j \text{ tels que } \lambda_j > 0.$$

Soit

$$\alpha = \min_{j\in J}\left\{-\frac{x_j}{\lambda_j} \mid \lambda_j < 0\right\} \text{ et } \beta = \min_{j\in J}\left\{\frac{x_j}{\lambda_j} \mid \lambda_j > 0\right\}.$$

Programmation Linéaire IX

Bases, Solution de Base et Points extrêmes

Si $0 < r < \min\{\alpha, \beta\}$ alors $y \in X$ et $z \in X$. On a $\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = x$ avec $x \neq y \neq z$; c'est à dire que x n'est pas un point extrême. Ce qui est absurde. D'où la famille $(a_j)_{j\in J}$ est libre. En complétant, si nécessaire, cette famille en une base $B = (a_j)_{j\in J\cup J'}$, on aura $Bx_B = b$ où x_B est le sous-vecteur de x dont les indices des composantes est dans $J \cup J'$, puisqu'on a déja $\sum_{j\in J} x_j a_j = b$ et $x_j = 0$ pour $j \in J'$. D'où x est une solution de base réalisable.

Conséquence

Le polyèdre $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ à un nombre fini de points extrêmes inférieur ou égal à C_n^m (le nombre de combinaisons de m colonnes de A parmi n).