Université Ibn Zoher
Faculté polydisciplinaire de Ouarzazate
Module: Algèbre appliquée à la science des données
Année universitaire: 2022/2023

Semestre 1
Rédigé par. N. Ait Oussaid

Traveaux dirigés d'Algèbre
Série 1

Exercice- 1. *On considère les sous ensembles suivants*

$$F_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\right\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ et } F_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

1. *Montrer que F_1 et F_2 sont respectivement des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.*
2. *Montrer que $F_1 = vect(u)$ et $F_2 = vect(v, w)$ tel que*

$$u(1, 1), v(1, -1, 0) \text{ et } w(0, 0, 1).$$

Solution 1.

1. Montrons que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Pour ce faire, on doit montrer que $0_{\mathbb{R}^2} \in F_1$ et $\lambda X + X'$ soit aussi dans F_1 tel que $\lambda \in \mathbb{R}$ et X et X' sont deux éléments de F_1.
   Il est clair que $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in F_1$. Soient maintenant $X = (x, y)$, $X' = (x', y')$ deux élément de F_1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lambda X + X' = (\lambda x + x', \lambda y + y') \in \mathbb{R}^2$, car $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel. De plus, puisque $x = x'$ et $y = y'$, alors $\lambda x + y = \lambda x' + y'$. Donc $\lambda X + X' \in F_1$. Ce ci montre que F_1 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. De même on montre que F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Nous allons montrer que $F_1 = vect(u)$ en montrant les deux inclusions $F_1 \subset vect(u)$ et $vect(u) \subset F_1$.
   Soit $X = (x, y) \in F_1$. D'une part, puisque $x = y$, alors on est $X = x(1, 1)$ et par la suite $X = xu$, avec $x \in \mathbb{R}$. Donc $F_1 \subset vect(u)$.
   D'autre part, puisque $u \in F_1$, alors $vect(u) \subset F_1$. Par conséquent $F_1 = vect(u)$.
   Montrons maintenant que $F_2 = vect(v, w)$, nous avons

$$\begin{aligned} F_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\} \\ &= \{x(1, -1, 0) + z(0, 0, 1) / (x, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{xv + zw / (x, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= vect(v, w). \end{aligned}$$

Exercice- 2. *Montrer que l'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$*

Solution 2.
Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2$.
-$0_{\mathbb{R}_2} \in F$.
- Soient $X = (x, y)$, $X' = (x', y')$ deux vecteurs de F.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lambda X + X' = (\lambda x + x', \lambda y + y') \in \mathbb{R}^2$, car $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel.
On a $x + y = 0$ et $x' + y' = 0$, alors $\lambda(x + y) + (x' + y') = 0$
Donc $\lambda X + X' \in F$
Et par la suite, F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2$.

Exercice- 3. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\Big(x_1, x_2, \cdots, x_n\Big)$, $n \in \mathbb{N}^*$ une famille de vecteurs de E. Soit $\Big(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\Big) \in \mathbb{K}^n$. Montrer que si $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, alors*

$$vect\Big(y, x_1, x_2, \cdots, x_n\Big) = vect\Big(x_1, x_2, \cdots, x_n\Big).$$

Solution 3.
Pour montrer légalité, nous allons montrer les deux inclusions : $vect\Big(y, x_1, x_2, \cdots, x_n\Big) \subset vect\Big(x_1, x_2, \cdots, x_n\Big)$ et $vect\Big(x_1, x_2, \cdots, x_n\Big) \subset vect\Big(y, x_1, x_2, \cdots, x_n\Big)$.
Nous avons d'une part si $x \in vect\Big(y, x_1, x_2, \cdots, x_n\Big)$, alors il existe $\Big(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\Big) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $x = \alpha y +$

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ et puisque $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, alors

$$\begin{aligned} x &= \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\alpha\lambda_i + \alpha_i\Big) x_i, \qquad \Big(\alpha\lambda_i + \alpha_i\Big) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc $x \in vect\Big(x_1, x_2, \cdots, x_n\Big)$, ceci implique que $vect\Big(y, x_1, x_2, \cdots, x_n\Big) \subset vect\Big(x_1, x_2, \cdots, x_n\Big)$.
De plus, puisque $\Big(x_1, x_2, \cdots, x_n\Big) \subset \Big(y, x_1, x_2, \cdots, x_n\Big)$, alors $vect\Big(x_1, x_2, \cdots, x_n\Big) \subset vect\Big(y, x_1, x_2, \cdots, x_n\Big)$.
D'ou l'égalité.

Exercice- 4. *Est-ce que les sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ définie par*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y - z = 0\} \quad et \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = z = 0\}$$

sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$

Solution 4
Deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaire $\Leftrightarrow$ F et G sont en somme directe ($F \oplus G = \mathbb{R}^3$) $\Leftrightarrow$ $F \cap G = 0$ et $F + G = \mathbb{R}^3$.
1- Il est facile de vérifier que $F \cap G = 0$. En effet si l'élément $u = (x, y, z)$ appartient à l'intersection de F et de G, alors les coordonnées de u vérifient : $x - y - z = 0$ (car u appartient à F) et $y = z = 0$ (car u appartient à G), donc $u = (0, 0, 0)$.
2- Il reste à démontrer que $F + G = \mathbb{R}^3$.
Soit donc $u = (x, y, z)$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$; il faut déterminer des éléments v de F et w de G tels que $u = v + w$. L'élément v doit être de la forme $v = (y_1 + z_1, y_1, z_1)$ et l'élément w de la forme $w = (x_2, 0, 0)$. On a $u = v + w$ si et seulement si $y_1 = y$, $z_1 = z$ et $x_2 = x - y_1 - z_1 = x - y - z$. On a donc

$$(x, y, z) = (y + z, y, z) + (x - y - z, 0, 0).$$

avec $v = (y + z, y, z)$ dans F et $w = (x - y - z, 0, 0)$ dans G.
Alors $F + G = \mathbb{R}^3$.
D'où $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Exercice- 5. *Soient F et G de $\mathbb{R}^3$ définie par*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\} \quad et \quad G = vect\{(1, 1, 1)\}$$

a) Montrer que F est un espace vectoriel. Trouver deux vecteurs u, v tels que $F = vect(u, v)$
b) Calculer $F \cap G$ et montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$.

Solution 5

a) F est un espace vectoriel engendré par $v = (-1, 1, 0)$ et $w = (-1, 0, 1)$(facile à vérifié).
b) Soit $u = (x, y, z)$ appartient à $F \cap G$, alors les coordonnées de u vérifient $x + y + z = 0$ (car u appartient à F), et $x = y = z$ (car u appartient à G), donc $x = y = z = 0$ et $u = (0, 0, 0)$. Alors $F \cap G = \{0\}$.
Il reste à démontrer que $F + G = \mathbb{R}^3$.
Soit donc $u = (x, y, z)$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$; il faut déterminer des éléments v de F et w de G tels que $u = v + w$. L'élément v doit être de la forme $v = (-y_1 - z_1, y_1, z_1)$ et l'élément w de la forme $w = (x_2, x_2, x_2)$.
On a $u = v + w$ si et seulement si : $x_2 = \dfrac{x + y + z}{3}$, $y_1 = y - \dfrac{x + y + z}{3} = \dfrac{-x + 2y - z}{3}$ et $z_1 = \dfrac{-x - y + 2z}{3}$.
On a donc
$$(x, y, z) = \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3}\right) + \frac{x + y + z}{3}(1, 1, 1).$$
Alors $F + G = \mathbb{R}^3$.

Exercice- 6. *On considère $E = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'espace des applications définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont les sous-espace vectoriels de E des applications paire et impaire repectivement.*

Solution 6.
Il est claire que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$. En effet, si $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$ donc f est à la fois paire $f(-x) = f(x)$ et impaire $f(-x) = -f(x)$, nous avons donc $f(x) = -f(x)$ et donc $f(x) = 0$.
Soit maintenant $f \in E$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Il est claire que g et f sont unique. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(-x) = g(x) \text{ et } h(-x) = -h(x).$$

Donc $g \in \mathcal{P}$, $h \in \mathcal{I}$ et $f = g + h$.
Alors $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Exercice- 7. *Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les vecteurs*

$$e_1(1,0), \quad e_2(0,1), \quad e_3(1,2), \quad e_4(3,4) \textit{ et } e_5(5,6).$$

Montrer que $\mathcal{B} = \Big(e_1, e_2\Big)$ est famille libre et que $\mathcal{F} = \Big(e_3, e_4, e_5\Big)$ est une famille liée.

Solution 7. Soient λ_1, λ_2 dans $\mathbb{R}$,
On a :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_2 = 0.$$

Donc la famille $\mathcal{B} = \Big(e_1, e_2\Big)$ est libre.
D'autre part, on a $e_3 + e_5 = 2e_4$. Alors la famille $\mathcal{F} = \Big(e_3, e_4, e_5\Big)$ est une famille liée.

Exercice- 8. *Étudier la linéairité des fonctions suivantes*

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y, x-y) \end{array}, \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (xy, x, y) \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[x] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & \Big(P(-1), P(0), P(1)\Big) \end{array}$$

Solution 8. Les applications f_1 et f_3 sont linéaire.
Pour vérifier que f_1 est linéaire on prends deux vecteurs de $\mathbb{R}$: $X(x_1, x_2)$ et $Y(y_1, y_2)$ et λ dans $\mathbb{R}$. Nous avons donc

$$\begin{array}{rcl} f_1\Big(\lambda X + Y\Big) & = & f_1(\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2) \\ & = & \Big(2\lambda x_1 + y_1 + \lambda x_2 + y_2, \lambda x_1 + y_1 - \lambda x_2 - y_2\Big) \\ & = & \Big(\lambda(2x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), \lambda(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\Big) \\ & = & \lambda f_1(X) + f_2(Y). \end{array}.$$

D'où f_1 est linéaire. de même on montre la linéarité de f_3.
L'application f_2 n'est pas linéaire car si non

$$f\Big((1,0) + (0,1)\Big) = f\Big((1,1)\Big) = (1,1,1) \text{ et } f\Big((1,0)\Big) + f\Big((0,1)\Big) = (0,1,0) + (0,0,1) = (0,1,1).$$

Donc $f\Big((1,0) + (0,1)\Big) \neq f\Big((1,0)\Big) + f\Big((0,1)\Big)$. D'où f_3 n'est pas linéaire.

Exercice- 9. *Donner le noyau et l'image de l'application linéaire suivante*

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_{n+1}[X] \\ P(X) & \mapsto & X \cdot P(X) \end{array}$$

Solution 9. Soit $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $X.P(X) = 0$. Alors

$$a_n X^{n+1} + \cdots + a_1 X^2 + a_0 X = 0.$$

Ainsi, $a_i = 0$ pour tout $i \in 0, \ldots, n$ et donc $P(X) = 0$. Donc, le noyau de f est nul : $ker(f) = \{0\}$.
$Im(f)$ est l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ sans terme constant : $Im(f) = vect\{X, X^2, \ldots, X^{n-1}\}$.