Série N 3

Master Mathématiques pour la science des Données

Probabilités et Statistiques

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire continue ayant la distribution:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + k, & \text{si } 0 \leq x \leq 3; \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

trouver k, puis calculer $P(1 \leq X \leq 2)$.

Solution. Puisque f est une fonction de probabilité continue, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ vaut 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{0} f(t)\, dt + \int_{0}^{3} f(t)\, dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad + \int_0^3 (\frac{1}{6}t + k)\, dt = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{1}{12}t^2 + k\, t\right]_0^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9}{12} + 3\, k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{12}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 2) &= \int_1^2 f(t)\, dt \\ &= \int_1^2 (\frac{1}{6}t + k)\, dt \\ &= \left[\frac{1}{12}t^2 + \frac{1}{12}\, t\right]_1^2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Exercice 2. Soit une fonction F définie de la façon suivante :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq -2\ ; \\ a(x+b)^2, & \text{si } x \in]-2, 0]; \\ c\, x + d, & \text{si } x \in]0, 1]; \\ c, & x > 1. \end{cases}$$

1. Donner les conditions que doivent vérifier les nombres réels a, b, c, d et e pour que F soit la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle absolument continue.

2. On suppose que F est la fonction de répartition de X, une variable aléatoire réelle absolument continue (et donc que les conditions établies á la question précédente sont vérifiées). On suppose que $P(X \leq -1) = 0$. En déduire les valeurs des réels a, b, c, d et e. Á quelle loi classique la fonction ainsi obtenue correspond elle?

3. On suppose maintenant que F est la fonction de répartition de Y , une variable aléatoire réelle absolument continue (et donc que les conditions établies la première question sont vérifiées). On suppose de plus que $P(Y \in [-1, \frac{1}{2}]) = \frac{5}{8}$. En déduire les valeurs des réels a, b, c, d et e.

Solution.

1. On vérifie dans un premier temps les conditions sur les limites. On constate que $\lim_{-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{+\infty} F(x) = e$, alors $e = 1$.
   Passons maintenant à la continuité de F aux bornes de ces intervalles.
   Par continuit de $x \to a(x+b)^2$, on a $\lim_{x\to -2} a(x+b)^2 = a(b-2)^2$. Pour que F soit continue en -2, il faut donc que $a(b-2)^2 = F(-2) = 0$.
   De même, par continuit de $x \to acx + d$, on a $\lim_{x\to 0} cx + d = d$. Pour que F soit continue en 0, il faut donc que $d = F(0) = ab^2$.
   Enfin, on a $\lim_{x\to 1} e = e = 1$. Pour que F soit continue en 1, il faut donc que $F(1) = c + d = 1$.
   En résumé, F est continue si et seulement si:

$$a(b-2)^2 = 0, \quad d = ab^2, \quad c + d = 1$$

   il nous reste à vérifier que F est croissante. Comme F est continue (avec les conditions établies ci-dessus), il suffit de vérifier que F est croissante sur chaque intervalle. Cest vident pour les intervalles o elle est constante. Pour l'intervalle $]-2, 0]$, $F'(x) = 2a(x+b)$. Pour que F soit croissante il faut donc que $2\,a\,(x+b) \geq 0$ pour tout $x \in]-2, 0]$. Or, nous avons vu que $a(b-2)^2 = 0$, ce qui implique soit $a = 0$, soit $b = 2$ (soit les deux). Si $a = 0$, F est identiquement nulle sur $]-2, 0]$ et est donc croissante. Si $a \neq 0$, alors $b = 2$. Dans ce cas, on ne peut pas avoir $a < 0$. En effet cela impliquerait $F(0) = 4a < 0$ ce qui est impossible pour une fonction de répartition. On doit donc avoir $a > 0$ et donc $F'(x) = 2a(x+2) \geq 0$ sur $]-2, 0]$, soit F croissante sur cet intervalle.
   Sur l'intervalle $]-0, 1]$, $F'(x) = c$ et F est donc croissante si et seulement si $c \geq 0$. En combinant toutes les conditions, on trouve que F est une fonction de répartition si et seulement si :*

$$\begin{aligned} a(b-2)^2 = 0, \qquad d = a\,b^2, \qquad c + d &= 1, \qquad e = 1, \\ c &\geq 0, \qquad a \geq 0. \end{aligned}$$

2. On suppose maintenant que $P(X \leq -1) = 0$. Par définition de la fonction de répartition, on a donc $F(-1) = 0 = a(b-1)^2$. Ceci n'est possible que si $a = 0$ ou $b = 1$. Or, si $b = 1$, la condition $a\,(b-2)^2 = 0$ devient $a = 0$. De ce fait, on doit nécessairement avoir $a = 0$. Dans cette situation, la valeur de b n'importe plus. En revanche, $d = ab^2$ devient $d = 0$, ce qui implique $c = 1$. On obtient donc

$$a = 0, \qquad c = 1, \qquad d = 0, \qquad e = 1, \text{ et } b \text{ quelconque.}$$

   La fonction F devient alors beaucoup plus simple et est donnée par:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0\ ; \\ x, & \text{si } x \in]0,1]; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

3. On suppose maintenant que

$$P(Y \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]) = \frac{5}{8}.$$

   On a

$$\begin{aligned} P(Y \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]) &= F(\frac{1}{2}) - F(-1) \\ &= \frac{c}{2} + d - a\,(b-1)^2. \end{aligned}$$

   Comme dans la question précédente, on étudie d'abord la condition $a(b-2)^2 = 0$. Si $a = 0$, on a aussi $d = ab^2 = 0$ (et la valeur de b n'importe plus).
   D'après la condition $c + d = 1$, on a $c = 1$. L'équation sur $P(Y \in \left[-1, \frac{1}{2}\right])$ ne peut alors pas être

satisfaite car $\frac{c}{2} + d - a\,(b-1)^2 = \frac{c}{2}$. Donc $a > 0$, ce qui impose $b = 2$ et $d = 4a$. En remplaant dans l'équation sur $P(Y \in \left[-1, \frac{1}{2}\right])$, on obtient

$$\frac{c}{2} + 3\,a = \frac{5}{8}.$$

En utilisant $c + d = 1 = c + 4\,a$, on obtient $\frac{c}{2} = 1 - 2\,a$ puis, $a = \frac{1}{8}$ puis $d = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{2}$. En résumé

$$a = \frac{1}{8}, \qquad b = 2, \qquad c = \frac{1}{2}, \qquad d = \frac{1}{2}, \qquad e = 1.$$

Exercice 3. Soient α un réel et p la fonction réelle définie par

$$p(x) \begin{cases} \frac{\alpha}{(x-1)^2}, & \text{si } x < 0; \\ \alpha\, e^{-2x}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Calculer α pour que p soit une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition F associée á p.
3. Soit X une v.a.r. de densité p. Déterminer la loi de la v.a. $Y = sgn(X)$ avec

$$\begin{cases} sgn(x) = -1, & \text{si } x < 0; \\ sgn(x) = 0, & x = 0; \\ sgn(x) = 1, & x > 0. \end{cases}$$

Solution.

1. On a p Une densité de probabilité, alors p est une fonction positive telle que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\, dt = 1$$

.

$$p \text{ est une fonction positive } \quad \Rightarrow \quad \alpha \geq 0$$

et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\, dt = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{0} p(t)\, dt + \int_{0}^{+\infty} p(t)\, dt = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha\Big[\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(t-1)^2}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-2\,t}\, dt\Big] = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha\Big[\frac{-1}{t-1}\Big]_{-\infty}^{0} + \alpha\Big[\frac{-e^{-2\,t}}{2}\Big]_{0}^{+\infty} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{3\,\alpha}{2} = 1 \end{aligned}$$

donc $\alpha = \frac{2}{3}$.

2. La fonction de répartition associée à p est la fonction réelle définie par,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\, dt, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pour $x < 0$, on a,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \alpha \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{(t-1)^2}\,dt$$
$$= \alpha \Big[\frac{-1}{t-1}\Big]_{-\infty}^{x}$$
$$= \frac{2}{3(1-x)}.$$

Pour $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \alpha \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(t-1)^2}\,dt + \alpha \int_{0}^{x} e^{-2\,x}\,dt$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\big(e^{-2\,x} - 1\big) = 1 - \frac{e^{-2\,x}}{3}.$$

3. Y est une variable dicrète qui prend les trois valeurs: -1, 0 et 1.

   On a P(X=0)=0 car X une variable continue. Donc P(Y=0)=0. et

$$P(Y=-1) = P(X<0) = P(X \leq 0)) = \frac{2}{3}.$$
$$P(Y=1) = P(X>0) = 1 - P(X \leq 0)) = \frac{1}{3}.$$

Exercice 4. Soit T une variable aléatoire réelle sans mémoire. Le but des questions suivantes est de montrer que cette variable aléatoire suit une loi exponentielle. On note F_T sa fonction de rpartition.

1. Montrer que la fonction G_T, définie sur $\mathbb{R}^+$ par:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+ \qquad G_T(x) = 1 - F_T(x)$$

   est strictement positive et vérifie:

$$\forall\,(x,y) \in (\mathbb{R}^+) \qquad G_T(x+y) = G_T(x)\,G_T(y).$$

2. Montrer que pour tout réel positif x et tout rationnel positif r, on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+ \qquad G_T(r\,x) = G_T(x)^r.$$

3. Montrer qu'il existe un réel a vérifiant

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+ \qquad G_T(x) = e^{ax}.$$

4. Montrer que la variable aléatoire T suit une loi exponentielle.

Solution.

1. on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad G_T(x) = 1 - F_T(x) = P(T > x).$$

   Dans la propriété d'unvariable aléatoire réelle sans mémoire, l'existence de la probabilit conditionnelle assure que, pour tout réel positif t, la probabilité de l'événement $(X > t)$ est strictement positive. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad G_T(x) > 0.$$

Or

$$\begin{aligned}
G_T(x) = P(X > x) &= P\big((X > x+y)/(X > y)\big) \\
&= \frac{P\big((X > x+y) \cap (X > y)\big)}{P\big(X > y\big)} \\
&= \frac{P\big(X > x+y\big)}{P\big(X > y\big)} \\
&= \frac{G_T(x+y)}{G_T(y)}.
\end{aligned}$$

Donc $G_T(x+y) = G_T(x)G_T(y)$, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^+$.

2. On a

$$G_T(0) = G_T(0+0) = G_T(0)^2 \quad \Rightarrow \quad G_T(0) = 1, \quad \text{car } G_T(0) > 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On vérifie alors, à l'aide d'une récurrence évidente, que ‘

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad G_T(n\,x) = G_T(x)^n.$$

Soit r un rationnel positif. On considère deux entiers positifs p et q vérifiant $r = \frac{p}{q}$Alors

$$G_T(r\,x)^q = G_T(q\,r\,x) = G_T(p\,x) = G_T(x)^p$$

L'application G_T étant à valeurs positives, on obtient

$$G_T(r\,x) = G_T(x)^r.$$

3. Rappelons que l'application G_T est à valeurs strictement positives.

$$\forall r \in \mathbb{Q}^+, \quad G_T(r) = G_T(1)^r = e^{r ln\big(G_T(1)\big)}.$$

Si on note $ln\big(G_T(1)\big) = a$ alors $G_T(r) = e^{a\,r}$. Soit x un réel positif. On note $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des approximations décimales par défaut de x et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des approximations décimales par excès de x. La fonction de répartition F_T étant croissante, l'application G_T est décroissante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad G_T(e_n) \leq G_T(x) \leq G_T(e_n).$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad e^{a\,e_n} \leq G_T(x) \leq e^{a\,d_n}.$$

L'application exponentielle étant continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier en x, les suites $(e^{a\,e_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(e^{a\,d_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers $e^{a\,x}$. Ainsi,

$$e^{a\,x} \leq G_T(x) \leq e^{a\,x}.$$

On obtient $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $G_T(x) = e^{a\,x}$.

4. L'application F_T étant une fonction de répartition,

$$\lim_{x\to+\infty} F_T(x) = 1 \;\text{ ainsi, }\; \lim_{x\to+\infty} G_T(x) = 0.$$

On en déduit que le réel a est strictement négatif. On pose $\lambda = -a$. On obtient:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad F_T(x) = 1 - G_T(x) = 1 - e^{-\lambda\,x}.$$

La fonction F_T étant positive et croissante sur $\mathbb{R}$. on a:

$$\forall \in \mathbb{R},\; F_T(x) \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda\,x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

L'application F_T est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. La fonction de répartition caractérisant la loi, on en déduit que T suit une loi exponentielle de paramètre λ.