shipout/backgroundshipout/foreground

UNIVERSITÉ Ibn Zohr
Année: 2020/2021. N^o d'ordre : 01
FACULTE Polydisciplinaire De Ouarzazate

****

Module: Probabilités et Statistiques

Formation : Sciences Mathématiques et Informatique

Par

Pr. Idriss BOUTAAYAMOU

Table des matières

1 Introduction **4**

2 Notions de probabilités **6**
2.1 Définitions 6
2.1.1 Expérience aléatoire , univers, événement 6
2.2 Notion de Probabilité et propriétés 7
2.2.1 Tribu - Notations et vocabulaires 7
2.2.2 Notion de probabilité 8
2.3 Probabilité sur un ensemble fondamental fini (probabilité uniforme) 9
2.4 Quelques résultats combinatoires 9
2.4.1 Échantillons ordonnés 9
2.4.2 Permutation 10
2.4.3 L'arrangement 10
2.4.4 Combinaison 10
2.5 Probabilité Conditionnelle 11
2.6 Indépendance des événements 11
2.7 Théorème du Probabilité Totale et Théorème de BAYES 11

3 Variables aléatoires **15**
3.1 Introduction 15
3.2 Loi de Probabilité 15
3.2.1 Variables aléatoires Discrètes 15
3.2.2 Variable aléatoire continue 16
3.2.3 Fonction de répartition 16
3.3 Caractéristique d'une variable aléatoire : Espérance Mathématique, Variance et écart type 17

4 Lois de probabilités **20**
4.1 Lois discrètes usuelles 20
4.1.1 Loi uniforme discrète 20
4.1.2 Loi de Bernoulli 21
4.1.3 Loi Binomiale 21
4.1.4 Loi hypergéométrique 23
4.1.5 Loi géométrique et loi de Pascal 24

4.1.6 Loi de Poisson, $P(\lambda)$ 25
4.2 Lois à densité usuelles 26
4.2.1 Loi Uniforme, $U([a,b])$, avec a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ 26
4.2.2 Loi Exponentielle, $E(\lambda)$, avec $\lambda > 0$ un réel. 26
4.2.3 Loi Normale 27

5 Couple de variables aléatoires discrètes 29
5.1 Généralités 29
5.2 Variables aléatoires discrètes indépendantes 32
5.3 Covariance et Coefficient de corrélation 33
5.4 Somme de deux v.a.r. discrètes indépendantes 33

Chapitre 1

Introduction

A ses débuts, la théorie du "calcul des probabilités" a concerné principalement l'étude et la modélisation des jeux de hasard. En 1654 Pascal (1623-1662) et Fermat (1607-1665) sont considérés parmi les premiers à quantifier les probabilités et à chercher à les mathématiser, ils ont répondu aux problèmes posés par le Chevalier de Méré (1607-1685), joueur professionnel et mathématicien amateur. Tel qu'on le trouve exposé par Blaise Pascal en 1654 dans sa correspondance avec Pierre de Fermat, le problème des partis, dans sa version la plus simple, est le suivant :

Deux joueurs jouent à un jeu de hasard en 3 parties gagnantes, chacun ayant misé la même somme d'argent m; or il se trouve que le jeu est interrompu avant que l'un des deux joueurs ait obtenu 3 victoires et ainsi remporté la victoire et de ce fait la totalité des enjeux soit 2m. Comment, dans ces circonstances, doit-on partager les enjeux ?

Pour la solution de ce problème des partis voir la référence suivante : https://perso.univ-rennes1.fr/guy.casale/enseignement/cours/PRB/ChevalierdeMere.pdf

Au 17ème siècle fut l'apparition : de la loi normale à travers les formules de Stirling (1692-1770), de la convergence de la loi Binomiale vers la loi normale, ceci est dû aux travaux de J.Bernouilli (1654-1703), De Moivre (1664-1754) et Bayes (1702-1761) et font avancer considérablement le développement de la théorie des probabilités. Le 18ème et 19ème siècles voient la confirmation de ce développement à travers l'analyse des erreurs d'observations et de mesures. Parmi les figurent marquantes de cet essor : Laplace (1749-1827), Gauss (1777-1855), Poisson (1781-1840), Simpson (1710-1761), Lagrange (1736-1813), Tchebychev (1821-1894), Binayme (1796-1878), Cauchy (1789-1857).

La notion de probabilités était souvent utilisée de façon intuitive et le manque de rigueur conduisait à des situations paradoxales (Paradoxe de Bertrand), c'est pour celà que La théorie des probabilités a pour but de formaliser, analyser la notion de "hasard", le mot hasard (ref. Petit Robert) vient du mot arabe/amazigh "Az-zahr", qui signifie "dé á jouer"; c'est bien d'ailleurs à partir des jeux de hasard qu'est né le calcul des probabilités. Ce calcul ne cesse aussi de se développer pour répondre à de réels besoins aussi multiples que variés, à savoir : Les files d'attentes, la fiabilité des systèmes, la propagation d'une épidémie, les télécommunications, les finances ... ont été à l'origine de certains problèmes mathématiques difficiles, et se sont des situations de la vie courante soumises aux lois de l'aléatoire qui fournissent des solutions totales ou partielles.

Le résultat d'un scrutin est une situation de vie courante soumise aux lois de l'aléatoir, cet exemple concret d'événements issus d'une expérience dont le résultat ne peut être prédit. De tels événements, dépendant du hasard, sont dits aléatoires et constituent un concept important en théorie des probabilités. Sinon on dit que les événements sont déterministes.

Ce cours a pour but de familiariser l'étudiant avec le raisonnement probabiliste. Par rapport à un autre cours de mathématiques, il se distingue par l'ambition de modéliser certains phénomènes réels. Un modèle mathématiquement correct ne suffirait donc pas toujours, il faudrait encore que celui-ci corresponde aux observations. Cette partie se divise en deux parties principales : la première concerne les probabilités discrètes et la seconde les probabilités continues. Imaginons maintenant que je joue une partie de tennis contre un joueur P professionnel. Si on veut bien avoir l'indulgence d'admettre qu'il y a deux solutions pour le joueur P, il ne parait pas raisonnable de leur donner la même probabilité. Il faut donc généraliser la notion de probabilité, c'est ce qui est fait au Chapitres 1. On y définit dans sa plus grande généralité la notion de probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable. C'est la partie "probabilités discrètes". Dans certaines situations, le cadre théorique précédent est insuffisant, c'est le cas en particulier quand on s'intéresse à une mesure physique (poids, tension électrique, ...) qui prend ses valeurs sur R qui n'est malheureusement pas dénombrable. Ce sont alors d'autres techniques qui sont employées au chapitre 4 qui est consacré à la notion de densité de probabilité et à l'approximation par la loi normale. C'est la partie "probabilités continues".

Afin de mettre l'accent sur les problèmes fondamentaux de conditionnement et de modélisation, nous avons réduit à sa plus simple expression le matériel théorique de ce cours. Nous avons en particulier toujours privilégié la démarche constructive à la démarche axiomatique.

Chapitre 2

Notions de probabilités

2.1 Définitions

2.1.1 Expérience aléatoire , univers, événement

Définition 2.1.1. 1. **Epreuve déterministe** : C'est une épreuve qu'on peut répéter dans les mêmes conditions et qui donne les mêmes résultats.
Exemple : Si à différents endroit et un même appareil, on mesure la vitesse de la lumière, on trouve(aux erreurs du mesure prés) toujours les mêmes résultats. C'est une épreuve qu'on peut répéter dans les mêmes conditions et qui donne les mêmes résultats

2. **Epreuve aléatoire** : C'est une expérience renouvelable (en théorie si ce n'est en pratique), dont le résultat ne peut être prévu à l'avance, et qui, renouvelée dans des conditions identiques.

3. **Univers** : Il s'agit d'un ensemble, noté habituellement Ω, dont les éléments correspondent à tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire que l'on cherche à modéliser. On l'appelle également l'espace des observables, ou encore l'espace échantillon.
Exemples :
   (i) Jet d'un dé équilibré, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
   (ii) Jet d'une pièce de monnaie, $\Omega = \{P, F\}$.
   (iii) Jet de deux dés équilibrés, $\Omega = \{(x, y) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2\}$.

4. **Evénement** : un événement lié à une expérience aléatoire est un ensemble dont les éléments sont des résultats possibles pour cette expérience.
Exemple On jette deux dés, $\Omega = \{(x, y) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2\}$, L'événement A="La somme de deux faces est égale à 4"$=\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$.

Remarques 2.1.1. 1. Un événement est une partie de Ω.

2. $\emptyset$ l'événement qui n'est jamais réalisé, on l'appelle aussi l'événement impossible.

3. Ω est l'événement qui est toujours réalisé ou événement certain.

Définition 2.1.2. 1. Complémentaire de A: est un événement constitué des résultats élémentaires de Ω qui ne sont pas dans A. Soit ω le résultat de l'expérience:

$$\bar{A} = \{\omega \in \Omega, \omega \notin A\}$$

($\bar{A}$ se réalise ssi A ne se réalise pas: non A)

2. Réunion de A et B : est un événement constitué des résultats élémentaires de Ω qui appartiennent à A ou à B (ou aux deux). Soit ω le résultat de l'expérience:

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega, \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$$

($A \cup B$ se réalise ssi A se réalise ou B se réalise: A ou B).

3. Intersection de A et B : est un événement constitué des résultats élémentaires de Ω qui appartiennent à A et *à* B. Soit ω le résultat de l'expérience:

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega, \omega \in A \text{ et } \omega \in B\}$$

($A \cap B$ se réalise ssi A se réalise et B se réalise: A et B).

4. Disjonction ou incompatibilite : A et B sont disjoints ssi A et B n'ont pas d'éléments communs:

$$A \text{ et } B \text{ disjoints } \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

(A et B incompatibles, càd deux événements qui ne peuvent pas se réaliser simultanément. Par exemple A et $\bar{A}$ sont deux événements incompatibles.

2.2 Notion de Probabilité et propriétés

2.2.1 Tribu - Notations et vocabulaires

Lorsqu'on veut généraliser la notion de probabilité à un univers Ω infini, on s'aperçoit que l'ensemble des événements ne peut pas toujours être $\mathcal{P}(\Omega)$ tout entier (par exemple si les calculs de probabilités impliquent des calculs d'intégrales).

Définition 2.2.1. Si Ω est un ensemble, on appelle tribu sur Ω toute partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que :

(a) $\Omega \in \mathcal{T}$.

(b) $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire : pour tout A de $\mathcal{T}, \bar{A} = \Omega \backslash A \in \mathcal{T}$.

(c) $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\, d'$ éléments de $\mathcal{T}, \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{T}$

Un espace probabilisable est un couple $(\Omega, \mathcal{T})$ où $\mathcal{T}$ est une tribu sur l'ensemble Ω.

Définition 2.2.2. Un système complet fini d'événements (Partition fini de Ω) est une famille finie $(A_1, \cdots, A_m)$ d'événements tels que:

1. les A_n sont incompatibles deux à deux: $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.
2. L'union des A_n est l'univers tout entier : $\bigcup_{n=1}^{m} A_n = \Omega$.

Un système complet dénombrable d'événements(Partition dénombrable de Ω) est une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements tels que:

1. les A_n sont incompatibles deux à deux: $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.
2. L'union des A_n est l'univers tout entier : $\bigcup_{n}^{\infty} A_n = \Omega$.

2.2.2 Notion de probabilité

Probabilité est une fonction permettant de mesurer la chance de réalisation d'un événement de $\mathcal{P}(\Omega)$ (ou plus généralement d'une tribu $\mathcal{A}$).

Définition 2.2.3. Une mesure de probabilité, ou plus simplement une probabilité, sur $\mathcal{T}$ est une application

$$P : \mathcal{T} \longrightarrow [0, 1]$$

possédant les trois propriétés suivantes :

1. $P(A) \geq 0$ pour tout $A \in \mathcal{T}$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Pour toute famille $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{T}$ d'événements deux à deux disjoints,
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Dés lors que P est définie, $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ s'appelle un espace probabilisé.

Les propriétés suivantes d'une probabilité sont des conséquences immédiates de la définition précédente.

Lemme 2.2.1. *1. $P(\emptyset) = 0$..*

2. Pour tout $A \in \mathcal{T}, P\left(\bar{A}\right) = 1 - P(A)$.

3. (Additivité) Pour tout A, $B \in \mathcal{T}$ tels que $A \cap B = \emptyset, P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

4. *Pour tout* $A \subseteq B \in \mathcal{T}, P(B) \geq P(A)$.

5. *Pour tout* $A, B \in \mathcal{T}, P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

6. *Plus généralement,* $A_1,\ A_2,\ \cdots, A_n \in \mathcal{T}, P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i \leq j}^{n} P(A_i \cap A_j) - \sum_{1 \leq i \leq j \leq k}^{n} P(A_i \cap\ A_j \cap A_k) + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$

7. *Pour toute collection* $A_1,\ A_2, \cdots \in \mathcal{T}, P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

2.3 Probabilité sur un ensemble fondamental fini (probabilité uniforme)

Définition 2.3.1. On appelle distribution de probabilité uniforme sur un univers fini, la mesure de probabilité définie par

$$P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$$

pour tout $\omega \in \Omega$. On dit dans ce cas qu'il y a équiprobabilité. Manifestement, lorsqu'il y a équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est simplement donnée par

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{Nombre de cas favorables } A}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

2.4 Quelques résultats combinatoires

Nous allons à présent rappeler certains résultats élémentaires de combinatoire qui seront régulièrement utilisés.

2.4.1 Échantillons ordonnés

Considérons un ensemble de n éléments $a_1, \cdots, a_n$. Un échantillon ordonné de taille r est une suite ordonnée de r éléments de l'ensemble. Deux procédures sont possibles : le tirage avec remise, durant lequel chaque élément de l'ensemble peut être choisi à plusieurs reprises, et le tirage sans remise, durant lequel chaque élément de l'ensemble ne peut être choisi qu'au plus une fois (dans ce cas, on doit évidemment avoir $r \leq n$).

2.4.2 Permutation

Définition 2.4.1. Une permutation de n éléments distincts $e_1, \cdots, e_n$ est un réarrangement ordonné, sans répétition de ces n éléments. Le nombre de permutations de n éléments distincts est $n! = n(n-1)\cdots 1$.

Exemple : "a", "b" et "c" sont trois éléments. Les arrangements possibles sont abc, acb, bac, bca, cab et cba. Le nombre d'arrangements est donc $3! = 6$.

2.4.3 L'arrangement

Définition 2.4.2. Un arrangement est une permutation de k éléments pris parmi n éléments distincts ($k \leq n$). Les éléments sont pris sans répétition et sont ordonnés. Le nombre de permutations de k parmi n est noté $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Exemple : Les arrangements de 2 éléments pris dans $\{1,2,3,4\}$ sont 1, 2; 1, 3; 1, 4; 2, 1; 2, 3; 2, 4; 3, 1; 3, 2; 3, 4; 4, 1; 4, 2; 4, 3. Il y en a 12. ou bien le nombre d'arrangement $= A_4^2 = \dfrac{4!}{(4-2)!} = 12$

2.4.4 Combinaison

Définition 2.4.3. Une combinaison de k éléments pris dans un ensemble à n éléments distincts est un sous-ensemble à k éléments de cet ensemble. Les éléments sont pris sans répétition et ne sont pas ordonnés.
Le nombre de combinaisons de k parmi n est noté $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Exemple : les combinaisons de 2 éléments pris dans $\{1,2,3,4\}$ sont $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$. Il y en a $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = 6$.

Exercice 1 : Combien de mots composés de 3 lettres de I'alphabet peut-on former?
ORDRE COMPTE - RÉPETITION NOMBRE DE TRIPLET d'un ensemble à 26 éléments est $= 26^3$.
Exercice 2 : On dispose de 26 jetons marqués des 26 lettres de l'alphabet. On tire successivement et sans remise 3 jetons. Combien de mots de 3 lettres peut-on former?
ORDRE COMPTE - PAS RÉPETITION ARRANGEMENT de 3 éléments parmi $26 = 26 \times 25 \times 24$.
Exercice 3 : Quel est le nombre d'anagrammes du mot $\ll$ MDRn
ORDRE COMPTE - PAS RÉPETITION ARRANGEMENT de 3 éléments parmi 3 = PERMUTATION à 3 éléments = $3!$.
Exercice 4 : On dispose de 6 jetons marqués des 6 couleurs différentes. On

tire simultanément 3 jetons. Combien de possibilités existe-t-il?
ORDRE NE COMPTE PAS COMBINAISON de 3 éléments parmi 6 = $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

2.5 Probabilité Conditionnelle

Lorsque les événements ne sont pas indépendants, la probabilité de l'un n'est pas la même selon que l'autre est réalisé ou non.

Exemple : Exemple. On pourra prendre l'exemple de la pluie et du vent. Il y a plus de chances qu'il pleuve s'il y a du vent plutôt qu'en absence de vent.

Définition 2.5.1. Soient P une probabilité sur un ensemble Ω, A et B deux événements. On suppose que l'événement B étant de probabilité non nulle. La probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé est notée $P_B(A)$ (ou aussi $P(A\backslash B)$). Elle est donnée par la formule

$$P(A\backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

On dit aussi probabilité de A si B est vraie.

2.6 Indépendance des événements

Définition 2.6.1. Soient A et B deux événements. A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

La réalisation de l'un des événements ne modifie pas la réalisation de l'autre événement.

Définition 2.6.2. (Independances mutuelle de n événements) Soient n événements $A_1, \cdots, A_n$ associés à une même expérience aléatoire. On dit que les événements $A_1, \cdots, A_n$ sont mutuellement indépendants si pour toute sous-famille $A_{i1}, \cdots, A_{ik}$ avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, on a :

$$P\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \times \cdots \times P\left(A_{i_k}\right)$$

Remarques 2.6.1. L'indépendance mutuelle implique évidemment l'indépendance deux à deux et la réciproque est fausse.

2.7 Théorème du Probabilité Totale et Théorème de BAYES

Théorème 2.7.1. *(Probabilité Totale) Soient B, un événement de probabilité non nulle; et $A_1, \cdots, A_p$, des événements qui forment une partition de* *l'ensemble fondamental de tous les résultats possibles. Alors,*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{j} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{j} P(B \mid A_i) P(A_i).$$

Le Théorème de BAYES permet de terminer la probabilité pour un événement qui est supposé déjà réalisé soit dû à une certaine cause qu'à une autre.

Théorème 2.7.2. *Soient B, un événement de probabilité non nulle; et $A_1, \cdots, A_p$, des événements qui forment une partition de l'ensemble fondamental de tous les résultats possibles. Alors,*

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j) \times P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{p} P(A_i) \times P(B \mid A_i)}$$

Exercice 1 : Vérifier les propriétés suivantes :

1. $C_n^p = C_n^{n-p}$, pour $n \geq 0$ et $0 \leq p \leq n$.
2. $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$, pour $n \geq 0$ et $0 \leq p \leq n$.

Exercice 2 : Un programme informatique génère de manière aléatoire des nombres compris entre 1 à 20. On lance le programme.

1. Calculez les cardinaux des événements suivants :
   A : "obtenir un nombre pair",
   B : "obtenir un nombre impair",
   C : "obtenir un nombre divisible par 3",
   D : "obtenir un nombre au moins égal à 2".
2. Déterminez B, C et en déduire $Card(B \backslash C)$:

Exercice 3 : 3 lots P_1, P_2, P_3 de Streptomycine ont été titrés par dosage au maltol. Les résultats sont classés dans 6 intervalles numérotés de 1 à 6. On note la classe d'appartenance de chacun des lots P_1, P_2, P_3 dans cet ordre et on forme un nombre de 3 chiffres, P_1 indiquant le chiffre des centaines, P_1 celui des dizaines et P_3 celui des unités.

1. Combien y a-t-il de nombres possibles?
2. Calculez les cardinaux des événements suivants:

   A : "les trois chiffres du nombre sont égaux",

   B : "les trois chiffres du nombre sont différents",

   C : "deux des trois chiffres au moins sont égaux",

   D : "le nombre formé est pair",

   E : "le nombre formé commence par 3",

   F : "le nombre formé est divisible par 9".

Exercice 4 : On tire 3 boules d'un sac contenant 9 boules: 4 vertes, 3 rouges, 1 blanche et 1 noire.

1. Le tirage se fait successivement avec remise. Calculez la probabilité des événements suivants :

   A : "le tirage contient 3 boules vertes",

   B : "le tirage ne contient aucune boule rouge",

   C : "le tirage contient 3 boules blanches",

   D : "le tirage contient dans cet ordre: 2 boules vertes et 1 boule rouge",

   E : "le tirage contient 2 vertes et 1 rouge",

   F : "le tirage contient 1 verte, 1 rouge et 1 noire".

2. Mêmes questions si le tirage se fait successivement sans remise.

3. Mêmes questions si le tirage se fait simultanément.

Exercice 5 : Monsieur et Madame A ont quatre enfants. On suppose que la probabilité de naissance d'un garçon est la même que celle d'une fille. Calculez la probabilité des événements suivants :

A : "Monsieur et Madame A ont quatre filles",

B : "Monsieur et Madame A ont trois filles et un garçon",

C : "Monsieur et Madame A ont deux filles et deux garçons",

D : "Monsieur et Madame A n'ont pas de fille",

E : "Monsieur et Madame A ont au moins une fille",

F : "Monsieur et Madame A ont au moins une fille et un garçon".

Exercice 6 : Une urne contient cinq boules, trois rouges, numérotées 1, 2, 3 et deux noires, numérotées 1 et 2. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Les tirages sont équiprobables.

1. Quelle est la probabilité de l'événement A : "les deux boules tirées sont de la même couleur " ?

2. Quelle est la probabilité de l'événement B : "la somme des numéros portés sur chacune des deux boules tirées est égale à 3 " ?

3. Quelle est la probabilité de B sachant que A est réalisé?

Exercice 7 : On suppose que les essais d'un test médical sur une population ont conduit à admettre pour un individu les probabilités suivantes, le test servant à dépister une certaine maladie. La Probabilité pour qu'un malade ait un test positif (donc probabilité pour que le test soit positif sachant que la personne est malade): $P(T\backslash M) = 0,95$.

1. Probabilité pour qu'un non-malade ait un test négatif (donc probabilité pour que le test soit négatif sachant que la personne est saine) : $P(\bar{T}\backslash\bar{M}) = 0,95$.
2. Probabilité pour qu'un individu soit atteint de la maladie $P(M) = 0,01$. Quelle est la probabilité pour qu'un individu qui a donné lieu à un test positif soit atteint de la maladie ?

Exercice 8 : Dans un lot de pièces fabriquées, il y a 3% de pièces défectueuses. Le mécanisme de contrôle des pièces est aléatoire. Si la pièce est bonne, elle est acceptée avec une probabilité de $0,96$ et si elle est défectueuse elle est refusée avec une probabilité de $0,98$. Calculez les probabilités suivantes :

- p_0: pour qu'une pièce soit mauvaise et acceptée.
- p_1: pour qu'il y ait une erreur dans le contrôle.
- p_2: pour qu'une pièce soit acceptée.
- p_3: pour qu'une pièce soit mauvaise, sachant qu'elle est acceptée.

Exercice 9 : Une urne A contient 4 boules rouges et 2 boules bleues. Une urne B contient 5 boules rouges et 6 boules bleues et une urne C contient 1 boule rouge et 9 boules bleues. On jette un dé parfait numéroté de 1 à 6.

- Si le résultat est impair, on tire au hasard une boule de A.
- Si le résultat est '2' ou '4', on tire au hasard une boule de B.
- Si le résultat est '6', on tire au hasard une boule de C. Sachant que la boule tirée est bleue, quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée de l'urne C?

Chapitre 3

Variables aléatoires

3.1 Introduction

La notion de variable aléatoire est la formulation mathématique qui assigne des valeurs aux résultats d'une expérience aléatoire.

Définition 3.1.1. Une variable aléatoire X est une fonction de l'ensemble fondamental Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} X \quad : \quad & \Omega \to \Delta \in \mathbb{R} \\ & w \to X(w) \end{aligned}$$

Parmi les cas les plus fréquents, on a

1. Cas Discret: $\Delta = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ cas finie. . .. .
2. Cas Continue: $\Delta =]a, b[$.

3.2 Loi de Probabilité

La loi de probabilité d'une variable aléatoire permet de connaitre les chances d'apparition des différentes valeurs de cette variable. On se place sur l'espace de probabilité (Ω, P).

Définition 3.2.1. On appelle loi de probabilité d'une Variable aléatoire X, définie sur un ensemble fondamental Ω; la donnée des probabilité $P(X \in E)$ pour tout intervalle $E \in \mathbb{R}$ où

$$P(X \in E) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in E\} = X^{-1}(E)$$

3.2.1 Variables aléatoires Discrètes

Définition 3.2.2. Une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs ponctuelles ("isolées"). Si X est à valeurs discrètes dans $\{x_1, \cdots, x_n\}$ (ou $\{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$), la loi de X est entièrement caractérisée par $\{P(X = x_i) : i \geq 1\}$ On remarque que

1. pour tout $i \geq 1, P(X = x_i) \in [0,1]$.
2. $\sum_{i\geq 1} P(X = x_i) = 1$.

3.2.2 Variable aléatoire continue

Définition 3.2.3. Une variable aléatoire continue est une variable aléatoire dont l'ensemble des valeurs est $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Une variable aléatoire X continue (variable aléatoire à densité), est toujours définie par une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, appelé fonction de densité.

Définition 3.2.4. Une fonction de densité f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant les conditions suivantes:

1. $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

3.2.3 Fonction de répartition

Définition 3.2.5. Soit X une variable aléatoire. La loi de probabilité de X est définie par la fonction F_X, appelée fonction de répartition de la variable X, définie par

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} \to \quad & [0,1] \\ x \to P(&X \leq x). \end{aligned}$$

On dit que deux variables aléatoires X et Y ont la même loi si elles ont la même fonction de répartition $F_X = F_Y$.

Remarques 3.2.1.
- Soit a $\leq b$, on a $P(X \in [a,b]) = P(X \leq b) - P(X < a)$.
- $P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$
- Si X une variable aléatoire à densité, $x \in \mathbb{R}, P(X = x) = 0$.

Proposition 3.2.1. *1. La fonction de répartition d'une variable discrète est constante par morceaux. Si X est une variable discrète à valeurs dans $\{x_1, \cdots, x_n\}$ avec $x_1 < \cdots < x_n$ alors pour $x \in \mathbb{R}$*

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i); \quad x_k \leq x < x_{k+1}$$

2. Soit X une variable aléatoire à densité f. La fonction de répartition de X s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}; F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

3.3 Caractéristique d'une variable aléatoire : Espérance Mathématique, Variance et écart type

Nous sommes sur un univers Ω fini ou dénombrable, avec une variable aléatoire X prenant un nombre fini de valeurs x_1, x_2, $\cdots, x_n$. La loi de X nous donne la probabilité $P(X = x_k)$ que la valeur x_k soit prise par X.

Il est logique de se dire que la valeur que l'on peut espérer que X prenne lors de réalisation pratiques est la moyenne des valeurs x_k qu'elle prend, mais en pondérant chaque valeur par la probabilité $P(X = x_k)$. Une valeur qui a une forte probabilité d'être atteinte doit être privilégiée par rapport à une valeur ayant très peu de chances détre prise.

Cette notion de valeur moyenne existe en physique sous le nom de gravité, et en géométrie sous le nom de barycentre.

Définition 3.3.1. L'espérance d'une variable aléatoire X est notée $E[X]$. Elle représente la valeur moyenne prise par la variable X.

1. Si X est une variable discrète à valeurs dans $\Delta = \{x_1, \cdots, x_n\}$, son espérance est

$$E[X] = x_1 P(X = x_1) + \cdots + x_n P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i).$$

2. 2. Si X est une variable discrète à valeurs dans $\Delta = \{x_i, i \geq 1\}$, son espérance est

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i).$$

3. Si X est une variable à densité f, lorsque l'intégrale est bien définie, son espérance est

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Remarques 3.3.1. Lorsqu'une variable X vérifie $E[X] = 0$, on dit que la variable est centrée.

Exemple 3.3.1. On lance un dé équilibré une seule fois. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la face sortie. Elle prend les valeurs $1, 2 \cdots 6$ chacune avec la probabilité $\frac{1}{6}$. Nous devons donc

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5.$$

Cette valeur n'est pas un nombre entier, mais ce n'est pas le problème.

Exemple 3.3.2. Une urne contient 6 boules blanches et n boules rouges. On tire deux boules sans remise. A chaque boule blanche tirés, on gagne 2 Euros, et pour chaque rouge tirée, on perd 3 Euros. Nous avons :

$$P(X=-6)=\frac{n(n-1)}{(n+6)(n+5)},\quad P(X=-1)=\frac{12n}{(n+6)(n+5)},$$

$$P(X=4)=\frac{30}{(n+6)(n+5)}.$$

L'espérence du gain est donnée par

$$E(X)=-6P(X=-6)-P(X=-1)+4P(X=4)=-6\frac{n-4}{n+6}.$$

Proposition 3.3.1. *1. L'espérance est linéaire: soient a et $b\in\mathbb{R}$, deux variables aléatoires X et Y d'espérances finies alors*

$$E[aX+bY]=aE[X]+bE[Y].$$

2. Si $X\leq 0$, alors $E[X]\leq 0$.

3. Si $X\leq Y$, alors $E[X]\leq E[Y]$.

La variance est destinée à mesurer la "précision" ou la dispersion d'une variable aléatoire. Prenons l'exemple d'un univers formé des pots de confitures remplis par une machine supposée mettre 250 grammes dans chaque pot, et soit X la variable aléatoire associant à chaque pot son poids réel de confiture.

Si la machine est bien réglée, les valeurs de X seront "tassées" les unes aux autres, très voisines de 250. Si la machine est mal réglée, les valeurs de X seront dispersées, majoritairement loin de 250.

On introduit donc une quantité qui mesure cette dispersion par rapport à la valeur moyenne espérée.

Définition 3.3.2. La variance mesure ainsi la déviation moyenne autour de la moyenne espérée $E[X]$, et est définie par

$$\mathrm{Var}(X)=E(X-E(X))^2$$

L'écart type est la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Proposition 3.3.2. *1.* $\mathrm{Var}(X)=0$ *si et seulement, si X est constante.*

2. Soient a et $b\in\mathbb{R}$, alors

$$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\,\mathrm{Var}(X).$$

Pour le premier point de la proposition, à partir de la définition de la variance :

$$V(X) = \sum (x_i - E(X))^2 P(X = x_i),$$

c'est clair que la variance est nulle si et seulement si $x_i = E(X)$ pour tout i, ce qui signifie que X est constante. C'est une variable aléatoir sans intérêt! La variance est petite lorsque les x_i sont voisins de $E(X)$: cela correspond au cas d'une machine bien réglée et précise.

En développant le carré et utilisant la linéarité de l'espérance nous avons

Proposition 3.3.3. *La variance s'écrit aussi*

$$\mathrm{Var}(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2$$

Définition 3.3.3. Pour mesurer la dispersion d'une variable aléatoire X, on considère souvent en statistiques l'écart-type, lié à la variance par:

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire X est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right)$$

où i est l'unité imaginaire $\left(i^2 = -1\right)$. Ainsi, pour une variable discrète, $\varphi_X(t) = \sum_k e^{itx_k} p_k$ et pour une variable continue, $\varphi_X(t) = \int e^{itx} f(x)dx$.

Propriétés de la fonction caractéristique :

1. $\varphi_X(t)$ est bien définie pour tout t réel.
2. La relation suivante sert, par exemple, à calculer la fonction caractéristique d'une variable centrée réduite, à partir de la fonction caractéristique de la variable de départ : pour tous a, b réels,

$$\varphi_{aX+b}(t) = \varphi_X(at)e^{itb}$$

3. Il y a aussi une relation entre les moments et la fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Lorsque les moments existent et que la série converge : $\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \mu_k}{k!} t^k$ où μ_k est le moment d'ordre k. Cette relation sert parfois pour calculer la moyenne (premier moment) et la variance d'une variable aléatoire. Plus explicitement, $1 = \varphi_X(0), E(X) = -i\varphi'_X(0), E\left(X^2\right) = -\varphi''_X(0)$ et $\mathrm{Var}(X) = -\varphi''_X(0) + \varphi'^2_X(0)$ ou encore $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k E\left(X^k\right)$
4. Elle détermine de façon unique la loi d'une variable aléatoire au sens où $\varphi_X = \varphi_Y$ (égalité de fonctions) équivaut à "X et Y ont la même loi."

Chapitre 4

Lois de probabilités

4.1 Lois discrètes usuelles

4.1.1 Loi uniforme discrète

L'ensemble des valeurs possibles est $\{1, 2, 3, \cdots, n\}, n$ étant un paramètre de la loi. Chaque valeur reçoit la même probabilité $1/\ n$ (Uniformité). On obtient la loi de probabilité suivante :

x_i	1	2	3	$\cdots$	n
p_i	$1/n$	$1/n$	$1/n$	$\cdots$	$1/n$

Pour une v.a. X qui suit cette loi, on a :

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$
$$V(X) = \left(n^2 - 1\right)/12$$

En effet

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

et

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_i p_i x_i^2 - (E(X))^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{4(n+1)(2n+1) - 6(n+1)(n+1)}{24} \\ &= \frac{(n+1)(8n+4-6n-6)}{24} = \frac{(n+1)(n-1)}{12} \\ V(X) &= \frac{n^2-1}{12} \end{aligned}$$

On peut également déterminer sa fonction caractéristique :

$$\begin{aligned}
\varphi_X(u) &= \sum_k e^{iuk} \cdot \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n} \sum_k \left(e^{iu}\right)^k \\
&= \frac{1}{n} \cdot e^{iu} \frac{1 - e^{iun}}{1 - e^{iu}} \qquad \text{(somme des premiers termes d'une suite géométrique)}
\end{aligned}$$

Or

$$e^{iu} - 1 = e^{iu/2 + iu/2} - e^{iu/2 - iu/2} = e^{iu/2}(\underbrace{e^{iu/2} - e^{-iu/2}}_{2i\sin(u/2)})$$

$$e^{iun} - 1 = e^{inu/2 + inu/2} - e^{inu/2 - inu/2} = e^{inu/2} 2i \sin(nu/2)$$

D'où

$$\varphi_X(u) = \frac{1}{n} \frac{e^{iun/2} \sin(nu/2)}{e^{iu/2} \sin(u/2)} e^{iu} = \frac{e^{iu\frac{n+1}{2}}}{n} \cdot \frac{\sin(nu/2)}{\sin(u/2)}$$

4.1.2 Loi de Bernoulli

C'est une des lois les plus simples. Elle prend que deux valeurs possibles Vrai/Faux, codées 1 et 0. On note p la probabilité associée à la valeur 1 (ce sera le paramètre de la loi). Evidemment la probabilité associée à la valeur 0 sera $1 - p$ (parfois notée q pour plus de lisibilité dans les formules). On notera cette loi $\mathcal{B}(p)$.

Caractéristiques : $E(X) = p, V(X) = pq, \varphi_X(u) = \sum_{k=0}^{1} P(X = k)e^{iuk} = P(X = 0) + P(X = 1)e^{iu} = q + pe^{iu}$.

Sa fonction de répartition est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 1 - p & si \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & si \quad x \ge 0 \end{cases}$$

4.1.3 Loi Binomiale

Considérons une épreuve aléatoire qui ne conduit qu'à deux éventualités exclusives : l'une succès (V) et l'autre échec F. L'univers associé à cette épreuve est donc $\Omega = \{V; F\}$. Soient p la probabilité de l'événement $\{V\}$ et q la probabilité de l'événement $\{F\}$(on a $q = 1 - p$) L'expérience consistant à répéter n fois cette épreuve de façon indépendante, est appelée suite d'épreuves de Bernoulli, ou schéma de Bernoulli.

On s'intéresse au nombre X de succès obtenus au cours de cette suite d'épreuves, la probabilité de l'événement : " on obtient dans un ordre quelconque k succès et $n - k$ échecs " est égal à

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad \text{avec } k \in [0, \dots, n]$$

En effet, notons A_k l'événement " A se réalise exactement k fois durant les n expériences". A_k peut se réaliser de plusieurs manières chacune deux à deux incompatibles, par exemple A peut se réaliser durant les k premières expériences aléatoires et ne pas se réaliser durant les $n-k$ dernières expériences aléatoires. Il y a C_n^k façons de "placer "les k réalisations de A parmi les n expériences aléatoires. La probabilité d'une de ces façons est égale à $p^k(1-p)^{n-k}$. Ce qui donne: $P(A_k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

Définition 4.1.1. On dit qu'une variable aléatoire X, à valeurs dans $\{0;1;\dots n\}$, suit une loi binomiale si sa loi de probabilité est $P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ avec $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$, où n est un entier naturel fixé et où p est un réel de $]0;1[$. Les valeurs n et p sont les deux paramètres de cette loi, que l'on notera $\mathcal{B}(n,p)$

Caractéristiques :

- L'espérance mathématique d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{B}(n,p)$ est : $E(X) = np$.
- La variance mathématique d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{B}(n,p)$ est : $V(X) = npq = np(1-p)$.
- Sa fonction caractéristique est $\varphi_X(u) = \left(q + pe^{iu}\right)^n$.
- Sa fonction de répartition est donnée par

$$F_X(x) - \sum_{k=0}^{x} C_n^k p^k (1-p)^{x-k}.$$

Montrons les deux premiers points en faisant des manipulations sur les polynômes et la formule du Binôme, ce qui donne :
On a $E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X=k)$, avec $X(\Omega) = \{0,1,\cdots,n\}$ et $P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}p^k q^{n-1-(k-1)} \\
&= np\sum_{k'=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k'!(n-1-k')!}p^{k'} q^{n-1-k'} \\
&= np\left(\sum_{k'=0}^{n-1} C_{n-1}^{k'} p^{k'} q^{n-1-k'}\right) = np
\end{aligned}$$

Pour le calcul de la variance calculons tout d'abord $E(X^2)$ à l'aide du théorème de Transfert et le fait que $k^2 = k(k-1)+k$ on a :

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(k(k-1)+k)\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!}p^k q^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-2-(k-2))!}p^{k-2}q^{n-2-(k-2)} + np \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{k'=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k'!(n-2-k')!}p^{k'}q^{n-2-k'} + np \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{k'=0}^{n-2} C_{n-2}^{k'} p^{k'} q^{n-2-k'} + np \\
&= n(n-1)p^2 + np = n^2p^2 - np^2 + np.
\end{aligned}$$

Alors par définition de la variance $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - (np)^2$, on a :

$$Var(X) = n(n-1)p^2+np = n^2p^2-np^2+np-(np)^2 = np-n^2p^2 = np(1-p) = npq.$$

Exemple 4.1.1. On dispose d'une urne avec 1 boule blanche et 9 noires. On effectue 20 tirages avec remise. Soit X le nombre de sortie de la boule blanche à l'issue des 20 tirages.La variable aléatoire X suit $\mathcal{B}(n,p)$.

4.1.4 Loi hypergéométrique

Considérons une population d'effectif N dont on sait qu'un pourcentage p d'éléments possèdent un caractère étudié C. On extrait au hasard un échantillon de n éléments, tirage exhaustif de n éléments (c'est-à-dire n tirages sans remise). Quelle est alors la probabilité qu'exactement k d'entre eux possèdent le caractère C?

Si m désigne le nombre d'éléments possédant le caractère C, alors $p = m/N$ et on peut reformuler le problème en remplaçant la connaissance de p par celle de m et considérer le problème en termes de tirages aléatoires de boules dans une urne: il s'agit d'un tirage simultané de n objets parmi N (équivalent à n tirages sans remise) et on s'intéresse à la variable aléatoire X égale au nombre $k(k \leq m)$ d'apparitions d'éléments ayant le caractère étudié sachant que leur effectif dans la population est m.

Loi de probabilité : Parmi les n objet tirés, k sont souhaités et $n-k$ ne le sont pas. Il y a C_m^k façons de constituer des lots de k objets parmi les m présentant le caractère étudié et C_{N-m}^{n-k} façons de choisir les autres. Le nombre de cas possibles est C_N^n. Finalement, la loi de probabilité est fournie par la formule:

$$P(X = k) = \frac{C_m^k \cdot C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{C_{Np}^k \cdot C_{N(1-p)}^{n-k}}{C_N^n}$$

avec $0 \leq k \leq [Np]$ On note $\mathcal{H}(N, n, p)$ la loi hypergéométrique de paramètre N, n et p.
Caractéristiques : On peut montrer que l'espérance mathématique de $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$ est $E(X) = np$ (comme dans le cas de la loi binomiale). Sa variance est $V(X) = \dfrac{N-n}{N-1} npq$. Sa fonction caractéristiques est compliquée.
Convergence : On remarque que si n (la taille de l'échantillon) est petit devant N, alors la variance est sensiblement npq, c'est-à-dire celle de la loi binomiale. Ce résultat n'est pas un hasard... :
La limite pour N intini de sorte que m/N tende vers une limite finie p de la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Exercice 4.1.1. Une boite contient 8 composants parmi lesquels 2 sont défectueux. Trois composants sont pris au hasard et sans remise de la boite. Soit X le nombre de composants défectueux dans l'échantillon. Donner la fonction de masse de X, ainsi que $E(X)$ et $V(X)$.

4.1.5 Loi géométrique et loi de Pascal

La loi géométrique est la loi du nombre d'essais nécessaires pour faire apparaitre un événement de probabilité p.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p, ce que l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ si :

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$,
2. $P(X = k) = q^{k-1}p$ où $q = 1 - p$.

Caractéristiques :

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad V(X) = \frac{q}{p^2} \quad \varphi_X(u) = \frac{pe^{iu}}{1 - qe^{iu}}$$

Sa fonction de répartition est donnée par

$$F_X(x) = 1 - p^x.$$

La **Loi de Pascal** d'ordre r : C'est la loi du nombre d'essais nécessaires pour observer exactement r fois un événement de probabilité p. Cette loi est la somme de r lois géométriques indépendantes.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi de Pascal de paramètres** r **et** p, ce que l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(r, p)$ si :

1. $X(\Omega) = \{r, r+1, \cdots\}$,

2. $P(X = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r}$ où $q = 1 - p$.

Caractéristiques : X admet alors une espérance et une variance :

$$E(X) = \frac{r}{p} \quad V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Exercice 4.1.2. On lance un dé continuellement jusqu'à l'obtention d'un 6. Soit X le nombre de lancers nécessaires.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un premier 6 au deuxième lancer?
2. Quelle est la probabilité qu'il faille plus de 10 lancers pour obtenir un 6?.
3. Si aucun 6 n'a été obtenu lors des 8 premiers lancers, quelle est la probabilité qu'au moins deux autres lancers soient nécessaires?

4.1.6 Loi de Poisson, $P(\lambda)$

la loi de Poisson a été introduite en 1838 par Siméon-Denis Poisson (1781-1840), qui lui a donné son nom. c'est une loi de probabilité qui s'applique aux événements rares: contrôles de qualité (y compris révision comptable, puisqu'on suppose que les erreurs sont rares), probabilités de défaut de crédit, accidents, $\cdots$. La variable aléatoire X prend des valeurs positives entières k (par exemple des unités de temps 1,2 , 3, $\cdots$)

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Son espérance et sa variance est donné par:

$$E(X) = \lambda, \quad \mathrm{Var}(X) = \lambda.$$

Exemple 4.1.2 (Le célèbre exemple de Von Bortkiewicz)**.** Von Bortkiewicz a étudié le nombre de morts par ruade de cheval dans l'armée prussienne de 1875 à 1894 dans 200 corps de cavalerie : pendant 20 ans, il a étudié 10 corps de cavalerie par an

Nombre de morts par an	0	1	2	3	4
Nombre de corps de cavalerie	109	65	22	3	1

Calculer la moyenne λ du nombre de morts par an. Comparer la distribution réelle à la distribution résultant de l'application de la loi de Poisson de paramètre λ.

Approximation de $\mathcal{B}$ par $\mathcal{P}$: Lorsque n devient grand, le calcul des probabilités d'une loi binomiale devient très fastidieux. On va donc, sous certaines conditions, trouver une approximation de $P(X = k)$ plus manipulable. On constate le comportement asymptotique: $\sin n \to \infty$ et $p \to 0$, alors $X : \mathcal{B}(n, p) \to \mathcal{P}(\lambda)$ avec $np = \lambda$. Remarque : cette approximation est correcte

dès que $n > 30$ et $np < 5$ ou dès que $n > 50$ et $p < 0,1$.
Approximation de $\mathcal{B}$ par $\mathcal{P}$: Montrons que $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ tend vers $e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ avec $\lambda = np$. Comme $\lambda = np$, on a $p = \dfrac{\lambda}{n}$ et $q = 1 - \dfrac{\lambda}{n}$ que l'on remplace dans la définition de la probabilité binomiale:

$$P(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Or $\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{n}\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{n}\dfrac{1}{q^k}$, d'où

$$P(X = k) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{\lambda^k}{n^k}\frac{1}{q^k}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{\lambda^k}{q^k}\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n}$$

Si n est assez grand ($n \geq 50$ et p proche de 0 donc q proche de 1, on peut faire les approximations suivantes : 1. $\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = 1\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{k-1}{n}\right) \approx 1$ 2. $\dfrac{\lambda^k}{q^k} \approx \lambda^k$ 3. $\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{n} \approx e^{-\lambda}$ Ainsi $P(X = k) \approx e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

4.2 Lois à densité usuelles

4.2.1 Loi Uniforme, $U([a,b])$, avec a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$

Cette loi est l'analogue continu de l'équiprobabilité dans le cas discret. Elle permet de modéliser le tirage d'un nombre aléatoire dans l'intervalle $[a, b]$.

Sa densité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b], \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Et sa fonction de répartition est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{si} \quad x \geq b. \end{cases}$$

4.2.2 Loi Exponentielle, $E(\lambda)$, avec $\lambda > 0$ un réel.

Cette densité de probabilité permet en général de modéliser des durées de vie d'êtres non soumis au vieillissement (par exemple, la durée de vie d'une bactérie) ou des temps d'attente (par exemple, le temps d'attente entre deux signaux synaptiques).
Sa densité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Sa fonction de répartition est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

4.2.3 Loi Normale

Rappel : rappelons le calcul de l'intégrale de Gauss
Soient

$$G = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad \text{et} \quad H = \iint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy$$

Compte tenu de ce que les variables x et y se séparent, le théorème de Fubini donne:

$$H = \iint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} e^{-x^2} e^{-y^2} dxdy = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy\right) = G^2$$

On passe en coordonnées polaires en posant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$; les variables r et θ se séparent elles aussi :

$$H = \iint_{\mathbb{R}_+ \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right[} e^{-r^2} r dr d\theta = \left(\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

car $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-u} du = \frac{1}{2}$(par le changement de variable $r = \sqrt{u}$). On en déduit : $G^2 = \dfrac{\pi}{4}$ d'où $G = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$ puisque $G \geq 0$, et enfin : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2G = \sqrt{\pi}$ par parité.

Gaussienne :
On appelle loi normale (ou gaussienne) centrée réduite la loi définie par la densité de probabilité $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

On peut vérifier qu'elle est continue et que son intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1:
On sait que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss) et en posant $x = t/\sqrt{2}$, on trouve que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt = 1$.
Remarques :

1. la densité φ est une fonction paire;
2. elle est indéfiniment dérivable et vérifie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'identité $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$.

La représentation graphique de cette densité est une courbe en cloche (ou courbe de Gauss). On démontre par la suite que la loi définie par cette densité de probabilité admet une espérance nulle et une variance égale à 1. Sa fonction caractéristique vaut $\varphi_X(u) = e^{-u^2/2}$ (à ne pas confondre avec la fonction densité). Le calcul se fait de la façon suivante :

$$\varphi_X(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2\pi}} dt$$

Or $-\frac{t^2}{2}+iut = -\frac{1}{2}\left(t^2 - 2iut\right) = -\frac{1}{2}\left(t^2 - 2iut + (-iut)^2 - (-iut)^2\right) = -\frac{1}{2}\left((t-iu)^2 + u^2\right)$.
On pose $x = t - iu$, ainsi

$$\varphi_X(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2-u^2/2} dx = \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = e^{-u^2/2}.$$

Plus généralement, La loi Normale est une loi centrale dans la théorie des probabilités. Elle est notamment très utilisée en statistique. Une grandeur influencée par un grand nombre de paramètres indépendants est souvent modélisée par une loi normale (par exemple, les erreurs de mesures lors d'une expérience).
Notée $N(\sigma, m)$, avec $m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ réel. sa densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}; \text{ avec } x \in \mathbb{R}$$

Son espérance et sa variance sont données par:

$$E(X) = m, \quad \text{Var}(X) = \sigma$$

Si X suit cette distribution "modèle", on lui associe une courbe:

- courbe symétrique par rapport à m.
- Forme de cloche.

Remarque. Si $m = 0$ et $\sigma = 1$, la loi est centrée réduite. Et on écrit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Pour faire des calculs avec une $\mathcal{N}(m;\sigma)$, on se ramène a la loi $\mathcal{N}(0;1)$. Et on a

Théorème 4.2.1. *Si $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma)$ alors* $\frac{X-m}{\sigma} = Z \sim \mathcal{N}(0;1)$

Exercice 4.2.1. Faire une recherche sur les lois suivantes : Loi de Weibull, Loi de Pareto et Loi de Gumbel.

Chapitre 5

Couple de variables aléatoires discrètes

Etant donné un univers Ω et une probabilité P sur cet univers, nous avons définit des applications de Ω dans $\mathbb{R}$ et nous les avons appelées variables aléatoire sur Ω. A présent nous allons maintenant étudier des applications de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Un élément de $\mathbb{R}^2$ possède deux coordonnées, notées x et y. Un exemple classique et parlant est le lancer d'une fléchette sur une cible : les coordonnées (X, Y) du point d'impact forment un couple de variables aléatoires. On peut aussi associer à chaque individu le couple (X, Y) formé de son poids et de sa taille.

5.1 Généralités

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs respectivement dans les ensembles E et F. On dispose alors sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ le vecteur aléatoire discret

$$Z = (X, Y) : \Omega \to (X(\Omega), Y(\Omega))$$

En effet:

- $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ donc $Z(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
- Pour $(x, y) \times Z(\Omega), Z^{-1}(x, y) = X^{-1}(x) \cap Y^{-1}(y) \in \mathcal{A}$.

Pour alléger, l'événement $((X, Y) = (x, y))$ est noté $(X = x, Y = y)$.

Exemple 5.1.1. On lance simultanément deux dés, et on note X le plus grand des deux chiffres obtenus et Y le plus petit. Décrivons la loi du couple (X, Y). On est sur $\Omega = \{(a, b) \,/\, a, b = 1, 2, \cdots, 6\}$, on a $card(\Omega) = 36$. pour chaque couple (a, b) a un germe égale à $\frac{1}{36}$. On cherche $(X, Y) = (x, y)$ où $(x, y) \in \Omega$?

$$P((X, Y) = (x, y)) = 0 \text{ si } y > x.$$

$$P((X,Y)=(x,y))=\frac{1}{36} \text{ si } y=x.$$

$$P((X,Y)=(x,y))=\frac{2}{36} \text{ si } y\leq x.$$

Remarquons que X et Y ne sont pas indépendante, car $P((X,Y)=(1,1))=\frac{1}{36}$, $P(Y=1)=\frac{11}{36}$ et $P(X=1)=\frac{1}{36}$.

Exemple 5.1.2. Cas dénombrable : Lancer un dé jusqu'à la 3ème apparition du 6. A chaque tirage nous associons (X,Y) avec X est le numéro du lancer qui fait sortir la face 6, Y est le numéro du lancer qui fait sortir la face 6 pour la troisième fois.
L'événement $(X,Y)=(3,7)$ est équivalent à dire que le premier 6 apparait au 3eme lancer et un 6 pour la deuxième fois entre 4 (inclus) et le 6 (inclus) ème lancers puis le 7 eme lancer apparait la face 6 pour la 3eme fois. En général, soient $a,b\in\mathbb{N}$ avec $1\leq a\leq b-2$ et $p=\frac{1}{6}$.
Lévénement $\{(X,Y)=(a,b)\}=A\cap B$, avec A est : "obtenir un premier 6 au exactement a-ème lancer" et B est : "obtenir exactement un 6 en b-a-1 lancers et un 6 au b-ème lancer"="sortir b-a-2 fois autre face que 6 et une fois la face 6 puis sortir de nouveau le 6".
On a : $P(A)=pq^{a-1}$ et $P(B)=(b-a-1)p^2q^{b-a-2}$. Donc supposons l'indépendance on trouve :

$$P((X,Y)=(a,b))=p^3(b-a-1)(1-p)^{b-3}.$$

Question : vérifier que c'est bien une loi de probabilité?

Exercice 5.1.1. Soit $\mu>0$ donnée, et $P((X,Y)=(n,k))=e^{-\mu}\frac{\mu^n}{2^n k!(n-k)!}$ pour $0\leq k\leq n$ et vaut 0 sinon. Montrer qu'il s'agit bien d'une loi?
Pour certains cas l'événement $(X,Y)=(n,k)$ signifie que pour n enfants on a k filles. le paramètre μ représente le nombre moyen d'enfants d'une famille.

Définition 5.1.1. La **loi conjointe** (ou loi mutuelle) de X et de Y est la loi du couple (X,Y) :

$$\forall(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\quad P(X=x,Y=y)=P(X=x\cap Y=y).$$

Les lois marginales du couple (X,Y) sont la loi de X et la loi de Y :

$$\forall x\in X(\Omega)\quad P(X=x)=\sum_{y\in Y(\Omega)}P(X=x,Y=y),$$

et

$$\forall y\in Y(\Omega)\quad P(Y=y)=\sum_{x\in X(\Omega)}P(X=x,Y=y).$$

Exemple 5.1.3. Une urne contient 4 boules, 2 blanches, 1 Rouge et 1 noire. On tire simultanément deux boules. Soit X le nombre de boules blanches et Y le nombre de boules noires.

	$X=0$	$X=1$	$X=2$
$Y=0$	0	1/3	1/6
$Y=1$	1/6	1/3	0

$$P(Y=0)=3/6=1/2, P(Y=1)=1/2$$

Exemple 5.1.4. Reprenons l'exemple de l'apparition du 6 pour la 3eme fois : pour $1 \le a \le b-2$

$$P((X,Y)=(a,b))=p^3(b-a-1)(1-p)^{b-3}.$$

$$P(X=a)=\sum_{b=a+2}^{+\infty} p^3(b-a-1)(1-p)^{b-3}=pq^{a-1}.$$

Alors X suit la loi géometrique de paramètre p.

$$P(Y=b)=\sum_{a=1}^{b-2} p^3(b-a-1)(1-p)^{b-3}=\frac{p^3}{2q^3}q^b(b^2-3b+2).$$

Remarquez qu'il n y a pas l'indépendance.

Exemple 5.1.5. Le couple modélisant le nombre d'enfants et de filles :

$$P(X=n)=\sum_{k=n}^{n} e^{-\mu}\frac{\mu^n}{2^n k!(n-k)!}=e^{-\mu}\frac{\mu^n}{n!}.$$

$$P(Y=k)=\sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\mu}\frac{\mu^n}{2^n k!(n-k)!}=e^{-\mu/2}\frac{(\mu/2)^k}{k!}.$$

Définition 5.1.2. Pour $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X=x)>0$, on appelle loi conditionnelle de Y sachant $(X=x)$ la loi de Y relativement à la probabilité $P(X=x)$, c'est-à-dire l'application

$$\begin{aligned} Y(\Omega) \to \quad & [0,1] \\ y \to P_{(X=x)}(Y=y) = & \frac{P(X=x,Y=y)}{P(X=x)}. \end{aligned}$$

On définit de même la loi conditionnelle de X sachant $(Y=y)$ lorsque $P(Y=y)>0$.

Exemple 5.1.6. Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire deux boules sans remise.

- Soit X la variable aléatoire égale à 1 si la première boule est blanche, à 0 sinon.

- Soit Y la variable aléatoire égale à 1 si la deuxième boule est blanche, à 0 sinon.

$$P_{(Y=0)}(X=0)=\frac{1}{2}; P_{(Y=0)}(X=1)=\frac{1}{2}$$
$$P_{(Y=1)}(X=0)=\frac{2}{3}; P_{(Y=1)}(X=1)=\frac{1}{3}$$
$$P_{(X=0)}(Y=0)=\frac{1}{2}; P_{(X=0)}(Y=1)=\frac{1}{2}$$
$$P_{(X=1)}(Y=0)=\frac{2}{3}; P_{(X=1)}(Y=1)=\frac{1}{3}$$

5.2 Variables aléatoires discrètes indépendantes

Définition 5.2.1. X et Y sont dites indépendantes si et seulement si

$$\forall (x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega), \quad P(X=x, Y=y)=P(X=x)P(Y=y).$$

Autrement dit, pour tout x tel que $P(X=x)>0$, la loi conditionnelle de Y sachant $(X=x)$ coincide avec la loi de Y.

Théorème 5.2.1. *si X et Y sont indépendantes, alors* $\forall (A,B)\in P(X(\Omega))\times P(Y(\Omega))$

$$P(X\in A, Y\in B)=P(X\in A)P(Y\in B).$$

Exemple 5.2.1. Un exemple simple pour illustrer. Si on tire deux dés simultanément et qu'on note X le résultat du premier dé et Y celui du deuxième dé, X et Y sont des variables aléatoires indépendantes. On a

$$P((X=i)\cap(X=i))=\frac{1}{36}=P((X=i))P((X=i)), \quad 1\leq i\leq 6 \text{ et } 1\leq j\leq 6.$$

Exemple 5.2.2. Par contre, toujours dans le cas de l'inépuisable lancer de deux dés, si on prend pour X la somme des deux dés et pour Y leur produit, les deux variables ne sont pas indépendantes. On a par exemple

$$P(X=8)=\frac{5}{36}; P(Y=15)=\frac{1}{18}; P((X=8)\cap(Y=15))=\frac{1}{18}.$$

Théorème 5.2.2. *Si X et Y sont indépendantes et f et g des fonctions définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.*

Définition 5.2.2.
1. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille finie de variables aléatoires discrètes. *On* dit que les $X_i, i\in I$, sont mutuellement indépendantes si et seulement si, pour toute famille $(x_i)_{i\in I}$ de $\Pi_{i\in I}X_i(\Omega)$, les événements $((X_i=x_i))_{i\in I}$ sont mutuellement indépendants.
2. Lorsque I est dénombrable, on dit que les $X_i, i\in I$, sont mutuellement indépendantes si et seulement si toute sous-famille finie est formée de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes.

Exemple 5.2.3. Si $X_1,\cdots,X_n$ sont mutuellement indépendantes et suivent chacune la loi de Bernoulli $B(p)$, alors $X_1+\cdots+X_n$ suit la loi binomiale $B(n,p)$.

5.3 Covariance et Coefficient de corrélation

Définition 5.3.1. La covariance de deux variables aléatoires X et Y de carré intégrable, notée $\mathrm{Cov}(X,Y)$ est la forme bilinéaire symétrique associée, c'est-à-dire telle que $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$. Elle est donnée par les formules:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E((X-E(X))(Y-E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Remarques 5.3.1. Pour toutes v.a.r. discrètes X, X' et Y admettant un moment d'ordre 2 , pour tous réels λ et μ, on a :

- $\mathrm{Cov}\left(\lambda X + \mu X', Y\right) = \lambda \,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mu \,\mathrm{Cov}(X,Y)$.
- $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$.
- $\mathrm{Cov}(X,X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \mathrm{Var}(X)$.

Proposition 5.3.1. *Soient X et Y deux v.a.r. discrètes indépendantes admettant un moment d'ordre 2 . Alors*

- $E(XY) = E(X)E(Y)$, *i.e.* $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.
- $\mathrm{Var}(XY) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

Ainsi, si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. Mais la réciproque est fausse.

Exemple 5.3.1. Soit X la v.a.r. à valeurs dans {-1,0,1} telle que $P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}$ et $(X = 0) = \frac{1}{2}$. Soit $Y = X^2$. On a $E(XY) = E\left(X^3\right) = (-)\frac{1}{4} + (0)\frac{1}{2} + (1)\frac{1}{4} = 0$ et $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ Mais on a $\bar{P}((X = 0) \cap (Y = 1)) = P(\emptyset)$ et $P((X = 0))P((X = 1)) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq 0$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Définition 5.3.2. Si X et Y ont une variance non nulle, on appelle coefficient de corrélation de X et Y le réel

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Remarques 5.3.2. Si X et Y ont une variance non nulle, le coefficient de corrélation vérifie

$$|\rho(X,Y)| \leq 1.$$

5.4 Somme de deux v.a.r. discrètes indépendantes

Lorsque X et Y sont deux v.a.r. discrètes indépendantes, la loi de probabilité de $X + Y$ peut se calculer à partir des lois de X et Y. Sans l'hypothèse d'indépendance, on doit utiliser la loi conjointe de$(X;Y)$.

Proposition 5.4.1. *Soient* X *et* Y *deux v.a.r. discrètes indépendantes. Alors, pour tout* $z \in X + Y(\Omega)$;

$$P(X+Y = z) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)P(Y = z-x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(Y = y)P(X = z-y).$$

Preuve 5.4.1. On a via la formule des probabilités totales $P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i)P_{(X=i)}(X+Y = k)$ Or $P_{X=i}(X+Y = k) = P_{X=i}(Y = k-i)$, donc

$$P(X+Y = k) = \sum_{i=0}^{k} P_{i \in X(\Omega)}(X = i \cap Y = k-i) = \sum_{i \in X(\Omega)} P(X = i)P(Y = k-i)$$

Puisque les deux évenements sont indépendants.

Exemple 5.4.1. On lance deux dés à six faces et à quatre faces. Soient Deux variables aléatoires X et Y qui correspond au numéros affichés par les deux dés. Posons $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\} X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$ Les supports de X et Y. La loi de $X + Y$ se calcule aisément:

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X+Y=i)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

$$\begin{aligned} P(X+Y=2) &= \sum_{i=0}^{2} P(X = i)P(Y = 2-i) \\ &= P(X = 0)(Y = 2) + P(X = 1)P(Y = 1) + P(X = 2)P(Y = 0) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Proposition 5.4.2. *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales* $\mathcal{B}(m, p)$ *et* $\mathcal{B}(n, p)$ *alors* $X+Y$ *suit une loi binomiale de paramètre* $\mathcal{B}(m + n, p)$.

Preuve 5.4.2.

$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X = i)P(Y = k-i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} C_k^i p^i (1-p)^{n-i} C_m^{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-k+i} \\ &= p^k (1-p)^{n+m-k} \sum_{i=0}^{k} C_n^i C_m^{k-i} \\ &= C_{n+m}^k p^k (1-p)^{n+m-k}. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Vandermonde. On reconnait bien une loi binomiale de paramètre $(n + m, p)$.

Proposition 5.4.3. *Soient X et Y deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ, alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.*

Preuve 5.4.3.

$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i) = \sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\frac{e^{-\mu}\mu^{k-i}}{(k-i)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!(k-i)!}\lambda^i\mu^{k-i} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{i=0}^{k} C_k^i\lambda^i\mu^{k-i} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^k}{k!} \end{aligned}$$

via la formule du binôme de Newton. On reconnait bien une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Autre exemple où on sait calculer la loi, le cas du minimum (ou du maximum) de deux variables aléatoires, où il est plus facile de passer par la fonction de répartition :

Proposition 5.4.4. *Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de fonctions de rÃ (c partitions respectives F_X et F_Y, alors la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = \max(X,Y)$ est donnée par $F_Z = F_X F_Y$.*

Exemple 5.4.2. Reprenons une nouvelle fois le lancer de deux dés. On note X le résultat du premier dé *et* Y celui du deuxième dé. Les deux fonctions de répartition sont F_X et F_Y sont les mêmes: sur $[-1,\, 1[$, $F_X(x) = 0$; sur $[1,\, 2[, F_X(x) = \frac{1}{6}$, sur $[2,\, 3[$, $F_X(x) = \frac{2}{6}$ etc. Soit $Z = \max(X,Y)$. La fonction de répartition de Z est donc donnée par:

$$[1,\, 2[, F_Z(x) = \frac{1}{36}.$$

$$[2,\, 3[, F_Z(x) = \frac{4}{36}, ect...$$

On peut ainsi retrouver la loi du minimum par une méthode différente de celle vue un peu plus haut dans ce même chapitre (rappelons au cas où que pour passer de la fonction de répartition ta loi, on utilise la formule $P(Z=i) = F_Z(i) - F_Z(i-1)$

i	1	2	3	4	5	6
$P(X=i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$