Série N 1

Master Mathématiques pour la science des Données

Probabilités et Statistiques

Exercice 1. Une auto-école présente le même jour trois candidats au permis : André, Denis et Nicole. Sur la base des performances précédentes, le directeur estime les probabilités de succès : pour Denise $0,5$, pour Nicole $0,9$ et pour André $0,7$. Le succès de chaque candidat est indépendant du succès des autres. Quelles sont les probabilités des événements suivants :

$$\begin{aligned} B &= \text{"Denise est la seule á réussir"}, \\ R &= \text{"Les trois candidats réussissent"}, \\ E &= \text{"les trois candidats échouent"}, \\ P &= \text{"au moins un candidat est reçu"}. \end{aligned}$$

Solution. On Note A, D et N (respectivement) l évènement A:"André réussit", D:"Denise réussit" et N:"Nicole réussit". Ces trois évènements sont indépendants mutuellement d'après l'énoncé. Ainsi,

- $P(B) = P(A^c \cap D \cap N^c) = P(A^c)\,P(D)\,P(N^c) = 0,3 \times 0,5 \times 0,1.$
- $P(R) = P(A \cap D \cap N) = P(A)\,P(D)\,P(N) = 0,7 \times 0,5 \times 0,9.$
- $P(E) = P(A^c \cap D^c \cap N^c) = P(A^c)\,P(D^c)\,P(N^c) = 0,3 \times 0,5 \times 0,1.$
- $$\begin{aligned} P(P) &= P(A \cup D \cup N) \\ &= P(A) + P(D) + P(N) - P(A \cap D) - P(A \cap N) - P(D \cap N) + P(A \cap D \cap N) \\ &= P(A) + P(D) + P(N) - P(A)\,P(D) - P(A)\,P(N) - P(D)\,P(N) + P(A)\,P(D)\,P(N) \end{aligned}$$

Exercice 2. On lance une fois un dé non pipé.

1. On suppose qu'on reçoit 15 euros si on obtient 1, rien si on obtient 2, 3 ou 4, et 6 euros si on obtient 5 ou 6. Soit G la variable aléatoire égale au gain de ce jeu. Quelle est la loi de G? Que vaut le gain moyen?
2. Mêmes questions en supposant qu'on gagne 27 euros pour un 1 et rien sinon. Préférez vous jouez au jeu du 1) ou á celui-ci?

Solution.

1. On a G la variable aléatoire égale au gain de ce jeu. Alors,

$$G(\Omega) = \{0,\, 6,\, 15\}.$$

Donc, La loi de G est donnée par:

k	0	6	15
$P(G=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$E(G) = 0 \times \frac{1}{2} + 6 \times \frac{1}{3} + 15 \times \frac{1}{6} = \frac{9}{2}$$

2. Dans la deuxième version du jeu on a,

$$G(\Omega) = \{0, 27\}.$$

La loi de G est donnée par:

k	0	27
$P(G=k)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(G) = 0 \times \frac{5}{6} + 27 \times \frac{1}{6} = \frac{9}{2}.$$

En moyenne, l'espérance de gain est donc la même qu'avec la première version du jeu.

Exercice 3. On considère un sac contenant deux boules rouges et quatre boules noires, indiscernables au toucher.

1. On tire successivement une boule, avec remise, jusqu'á obtenir une boule rouge. On note X son rang d'apparition. Déterminer la loi de ce rang.

2. On tire successivement une boule, sans remise, jusquá obtenir une boule rouge, et on note X son rang d'apparition. Déterminer la loi de ce rang.

Solution.

1. La variable aléatoire X prend des valeurs entières. Pour tout entier n, l'évènement $\{X = n\}$ est égal à l'évènement " on tire des boules noires lors des $n-1$ premiers tours et au n-ième tirage on tire une boule rouge". Puisque l'on tire avec remise, et qu'il y a deux boules rouges parmi six, la probabilité de tirer une boule rouge à chaque tour est $\frac{2}{6}$ et la probabilité de tirer une boule noire est $\frac{2}{3}$. Par suite, pour tout entier n,

$$P(X=n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{3}.$$

2. Dans le cas d'un tirage sans remise, le rang de la première boule rouge est forcément inférieur à cinq puisqu'il n'y a que quatre boules noires. Dans ce cas, la loi de X est représentée par le tableau suivant:

k	1	2	3	4	5
$P(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{6} \times \frac{2}{5}$	$\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$	$\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3}$	$\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3}$

Exercice 4. On examine successivement les souris dans une population á la recherche d'un caractère génétique particulier C. Pour chaque souris, on suppose que la probabilité d'avoir ce caractère est de 15%. On note X le nombre de souris á examiner pour observer la première fois le caractère C.

1. Quelle est la loi de X ? Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

2. Calculer les probabilités $P(X=1)$, $P(X \le 6)$, $P(X \ge 15)$.

3. Calculer $P(X \le n)$ pour $n \ge 1$. Calculer n minimum pour que $P(X \le n) \ge 95\%$.

Solution.

1. Dans ce cas X suit la loi géométrique de paramètre p=0,15, et $q = 1 - 0,15 = 0,85$. Donc,

$$P(X=n) = q^{n-1} p.$$

$$E(X) = \frac{1}{p}, \qquad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

2.

$$
\begin{aligned}
P(X=1) &= q^{1-1}\,p = p = 0,15.\\
P(X\leq 1) &= P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)\\
&= q^{1-1}\,p + q^{2-1}\,p + q^{3-1}\,p + q^{4-1}\,p\\
&= p\left(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5\right)\\
&= p\frac{q^6-1}{q-1} = 1-q^6.\\
P(X\geq 15) &= 1-P(X<15) == 1-P(X\leq 14)\\
&= 1-p\frac{q^{14}-1}{q-1} = 1-q^{14}.
\end{aligned}
$$

3. de même:

$$P(X\leq n) = p\frac{q^n-1}{q-1} = 1-q^n.$$

Cherchons maintenant n le minimum pour que$P(X\leq n)\geq 95\%$.

$$
\begin{aligned}
&P(X\leq n)\geq 95\% \quad\Leftrightarrow\quad p\frac{q^n-1}{q-1} = 1-q^n \geq 95\%\\
&\Leftrightarrow\quad (0,85)^n \leq 0,05 \quad\Leftrightarrow\quad n\,ln(0,85)\leq ln(0,05) \quad\Leftrightarrow\quad n\geq \frac{ln(0,05)}{ln(0,85)} = 18,4.
\end{aligned}
$$

Or $n\in\mathbb{N}$, d'où $n=19$.