2) Déterminer la matrice de variance-covariance $V$ du nuage formé par $n$ ~~plan~~ points dans $\mathbb{R}^p$

· la matrice $V$ est une matrice de type $(p.p)$ symétrique de terme général $V_{kp}$ :

$$V_{kp} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_{ik} - \bar{z}_k)(z_{ip} - \bar{z}_p)$$

$$\bar{z}_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_{ip} \quad \& \quad \bar{z}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_{ik}$$

on peut montrer la matrice $V$ est $\frac{Z^T Z}{n} = R$

3) on extrait les valeurs propre $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p$ de la matrice $R$

on diagonalise $V \Leftrightarrow V = P^{-1}\Lambda P$ tq : $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & 0 \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix}$

$tr(V) = tr(\Lambda) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$

---

Exercice :

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$z_{11} = \frac{x_{11} - \bar{x}_1}{\sigma_1}$$

$\bar{x}_1 = 6$, $\bar{x}_2 = 4$

$$X = \begin{pmatrix} 4-6 & 5-4 \\ 6-6 & 7-4 \\ 8-6 & 0-4 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} \frac{-2}{2\sqrt{\frac{2}{3}}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{26}{3}}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{\frac{26}{3}}} \\ \frac{2}{2\sqrt{\frac{2}{3}}} & \frac{-4}{\sqrt{\frac{26}{3}}} \end{pmatrix}$$

$\sigma_{x_1}$ $\sigma_{x_2}$

$$\sigma_{x_1} = \|x_1\|_2 = \sqrt{\frac{1}{3}(8)} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\sigma_{x_2} = \|x_2\|_2 = \sqrt{\frac{1}{3}(26)} = \sqrt{\frac{26}{3}}$$

$$Z = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{3}{26}} \\ 0 & 3 \times \sqrt{\frac{3}{26}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & -4 \times \sqrt{\frac{3}{26}} \end{pmatrix}$$

$$R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{26}} & 3\sqrt{\frac{3}{26}} & -4\sqrt{\frac{3}{26}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{3}{26}} \\ 0 & 3\sqrt{\frac{3}{26}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & -4\sqrt{\frac{3}{26}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}69 \\ -0{,}69 & 1 \end{pmatrix}$$

calculer les valeurs propre de R

$\lambda_1 = 1{,}69 \quad \lambda_2 = 0{,}31 \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 1{,}69 & 0 \\ 0 & 0{,}31 \end{pmatrix}$

mat diag

$RV = \lambda_1 V \quad V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad F_{\lambda_1} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right. \Rightarrow F_{\lambda_1} = \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$a \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_2 = 1 \quad a = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad U_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$F_{\lambda_2} \quad (x = y)$

$< V_1, V_2 > = 0$

$Tr(R) = 2 = \sum^{2} \lambda_i = 0{,}69 + 0{,}31$

$\frac{\lambda_1}{I_g} = \frac{\lambda}{\lambda_1 + \lambda_2} = 84{,}5\ \%$

---

Scanned with CamScanner