=> L'équilibre de consommateur

=> La méthode de TMS_{xy} (substitution).

- alors je passe à un exemple pratique.
- on a la fonction d'utilité suivante

-> programme de Maximisation

$$\begin{cases} TMS_{xy} = \frac{Um_x}{Um_y} = \frac{P_x}{P_y} \\ R = xP_x + yP_y \end{cases}$$

$U = f(x,y) = x^2 y$ avec ; $R = 80$; $P_x = 8$; $P_y = 7$

الاشتقاق (x)

Revenu

.TMS إدات اشتقاق

الاشتقاق (x)

$$\text{Donc} \begin{cases} TMS_{xy} = \frac{2xy}{x^2} = \frac{8}{7} \\ 80 = 8x + 7y \end{cases}$$

الاشتقاق (y)

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2y}{x} = \frac{8}{7} \\ 80 = 8x + 7y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 14y = 8x \\ 80 = 8x + 7y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{4 \times \cancel{2} \times x}{7 \times \cancel{2}} \\ 80 = 8x + 7y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{4x}{7} \\ 80 = 8x + \cancel{7} \times \frac{4}{\cancel{7}} x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{4x}{7} \\ 80 = 12x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{7} x \\ x^* = \frac{80}{12} = 6.66 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^* = \frac{4}{7} \times 6.66 = 3.8 \\ x^* = 6.66 \end{cases}$$

alors | هذا هو

-> La contente de équilibre

و أو

-> la combinaison de équilibre

$\boxed{E(x^* = 6.66 ; y^* = 3.8)}$

-> $80 = 8x^* + 7y^*$!

alors pour calculer ~~R~~ l'utilité Total où (maximale.) -> L'utilité maximale

$U_{max} = x^{*2} \cdot y^* = (6.66)^2 \cdot 3.8$

$\boxed{U_{max} = 168.5}$

Donc ~~...~~ / ~~U_{max}~~ ($6.66x$ إشري أقصى) ($3.8y$) -> (باش أحقق أكبر منفعة واحد 168 لي هي U_{max})

*** -> * programme de minimisation.

* la quantité de x^*, y^* نختار ... و (consumateur) يقدر أنه (le minimise) باش يقدر أنه يحقق واحد revenu utilité prédéterminé

U_0 = niveau de l'utilité باش يعرف نيفو

L'objectif est de minimiser le Revenu

À l'équilibre

$$\begin{cases} TMS_{xy} = \frac{Um_x}{Um_y} = \frac{P_x}{P_y} \\ U_0 = f(x,y) \end{cases}$$

-> Exemple :

on a la fonction d'utilité suivante

- $U = f(x,y) = 2x^{1/2} y$; $U_0 = 20$, $P_x = 6$, $P_y = 4$

-> programme de minimisation ;

$$\begin{cases} TMS_{xy} = \frac{Um_x}{Um_y} = \frac{P_x}{P_y} \\ U_0 = f(x,y) \end{cases}$$

الاشتقاق

dx

$$\begin{cases} TMS_{xy} = \frac{x^{-1/2} y}{2x^{1/2}} = \frac{6}{4} \\ 20 = 2x^{1/2} y \end{cases}$$

$$① \begin{cases} \frac{y}{2x} = \frac{6}{4} \\ 20 = 2x^{1/2} y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{12x}{4} \\ 20 = 2x^{1/2} \cdot y \end{cases}$$

2

$$\begin{cases} y = 3x \\ 20 = 2x^{-1/2}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 20 = 2x^{1/2} \cdot 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 20 = 6x^{3/2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ x^{3/2} = \frac{20}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x = 3 \times 2.23 \\ x^* = \sqrt[3/2]{\frac{20}{6}} = 2{,}23 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^* = 6.69 \\ x^* = 2.23 \end{cases}$$

alor $E\,(x^+ = 2.23,\ y^+ = 6.69)$

* Revenu minimal

$$\left\{ \underline{R_{min} = x^+ P_x + y^+ P_y} \right\} \text{la relation.}$$

$R_{min} = (2.23 \times 6) + (6.69 \times 4)$

$= 40{,}14$

Donc $\boxed{R_{min} = 40{,}14}$

⇒ La méthode de Lagrange

. A l'équilibre la fonction de Lagrange est

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x.y.\lambda) = f(x.y) + \lambda(R - xP_x - yP_x)$$

fonction objectif

fonction contrainte

3

* condition de 1^{er} ordre

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = 0 \end{cases}$$

derive pa sail par
op pour

* condition 2^{er} ordre

$\mathcal{L}'' < 0 \Rightarrow$ dét $A > 0$

négatif

détermen

4/ Soit une fonction d'utilité

$U = f(x.y) = 2x^2y$, $R = 100$, $P_x = 7$, $P_y = 8$

7

La fonction de Lagrange

$$\mathcal{L}(x.y.\lambda) = 2x^2y + \lambda(100 - 7x - 8y)$$

Condition de 1^er ordre

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4xy - 7\lambda = 0 \\ 2x^2 + 8\lambda = 0 \\ 100 - 7x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{4xy}{7} & (1) \\ \lambda = \dfrac{2x^2}{8} & (2) \\ 100 = 7x + 8y & (3) \end{cases}$$

contrait Budjter

de (1) et (2) $\dfrac{4xy}{7} = \dfrac{2x^2}{8} \Leftrightarrow \dfrac{4xy}{2x^2} = \dfrac{7}{8}$

Umax

Umy

Donc $\dfrac{\cancel{2x}\,2y}{\cancel{2x}^2} = \dfrac{7}{8} \Rightarrow \dfrac{2y}{x} = \dfrac{7}{8} \Rightarrow y = \dfrac{7}{16}x$

التعويض في ③

Donc $100 = 7x + \cancel{8} \times \dfrac{7}{\cancel{8} \times 2} x$

~~alors 1000= [illegible]~~

5/ alors $100 = \left(7 + \frac{7}{2}\right) x$

$100 = \frac{21}{2} x \Rightarrow x^* = \frac{2 \times 100}{21} = 9{,}52$

alors $x^* = 9{,}59$ et $y^* = \frac{7}{16} \times 9{,}59$

Donc $x^* = 9{,}59$ et $y^* = 4{,}16$

$E\,(x^* = 9{,}59\ ,\ y^* = 4{,}16)$

apre calcule

* **l'utilité maximale :**

on a $U_{max} = 2x^2 y = 2 \times (9{,}59)^2 \cdot (4{,}16)$

Donc $\boxed{U_{max} = 754}$

بـ 100DH يقدر يشري x^* و y^* باش احقق $U_{max} = 754$

* **le Multiplication de Lagrange λ**

$? \cdot \lambda = \lambda$ ② أو ① نختار!

$\lambda = \frac{2x^2}{8} \Rightarrow \lambda = \frac{2 \times (9{,}52)^2}{8}$

Donc $\boxed{\lambda = 22{,}56}$

6/ ⇒ programme de Mimimisation.

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \underbrace{xP_x + yP_x}_{\text{R = objectiv}} + \lambda(U_0 - f(x,y))$

⇒ condition de 1^{er} ordre

$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = 0 \end{cases}$

⇒ condition de 2^{er} ordre

$\mathcal{L}'' > 0 \Rightarrow \det A < 0$

⇒ λ est le budget marginale de l'utilité

هي حدا القيمة التي تيدزاد بها Revenu الإ تراد

utilite بوا حد الوحدة.

*Exemple : soit une fonction d'utilité

$U = f(x,y) = 4xy$, $U_0 = 50$, $P_x = 5$, $P_y = 20$

La fonction de Lagrange :

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 5x + 20y + \lambda(50 - 4xy)$

* condition de 1^{er} ordre

$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 - 4\lambda y = 0 \\ 20 - 4\lambda x = 0 \\ 50 - 4xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{5}{4y} & (1) \\ \lambda = \frac{20}{4x} & (2) \\ 50 = 4xy & (3) \end{cases}$

7

de ① et ② on a

$$\frac{5}{4y} = \frac{20}{7x} \Longleftrightarrow \frac{5}{20} = \frac{\cancel{4}y}{\cancel{4}x}$$

Donc $\frac{y}{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4}x$

donc on remplace dans ③

alors

$$50 = 4 \times x \frac{1}{4} x \Longleftrightarrow 50 = x^2 \Rightarrow \boxed{x^* = \sqrt{50}}$$

$\boxed{x^* = 7{,}07}$ et $y^* = \frac{1}{4} \times 7{,}07 = \boxed{1{,}76}$

$E\,(x^* = 7{,}07,\ y^* = 1{,}76)$

* Revenu minimal.

$R_{min} = (7{,}07 \times 5) + (1{,}76 \times 20)$

$\boxed{R_{min} = 70{,}55}$

* Le ~~Mult~~ Multiplicateur de Lagrange λ

$$\lambda = \frac{5}{4y} \Rightarrow \lambda = \frac{5}{4 \times 1{,}76} \Rightarrow \boxed{\lambda = 0{,}71}$$