Série N 3
Master Mathématiques pour la science des Données

Probabilités et Statistiques

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire continue ayant la distribution:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + k, & \text{si } 0 \leq x \leq 3; \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

trouver k, puis calculer $P(1 \leq X \leq 2)$.

Exercice 2. Soit une fonction F définie de la façon suivante :

$$F(x) \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq -2 \ ; \\ a(x+b)^2, & \text{si } x \in]-2, 0]; \\ c\,x + d, & \text{si } x \in]0, 1]; \\ c, & x > 1. \end{cases}$$

1. Donner les conditions que doivent vérifier les nombres réels a, b, c, d et e pour que F soit la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle absolument continue.
2. On suppose que F est la fonction de répartition de X, une variable aléatoire réelle absolument continue (et donc que les conditions établies á la question précédente sont vérifiées). On suppose que $P(X \leq -1) = 0$. En déduire les valeurs des réels a, b, c, d et e. Á quelle loi classique la fonction ainsi obtenue correspond elle?
3. On suppose maintenant que F est la fonction de répartition de Y , une variable aléatoire réelle absolument continue (et donc que les conditions établies la première question sont vérifiées). On suppose de plus que $P(Y \in [-1, \frac{1}{2}]) = \frac{5}{8}$. En déduire les valeurs des réels a, b, c, d et e.

Exercice 3. Soient α un réel et p la fonction réelle définie par

$$p(x) \begin{cases} \frac{\alpha}{(x-1)^2}, & \text{si } x < 0; \\ \alpha\, e^{-2x}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Calculer α pour que p soit une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition F associée á p.
3. Soit X une v.a.r. de densité p. Déterminer la loi de la v.a. $Y = sgn(X)$ avec

$$\begin{cases} sgn(x) = 1, & \text{si } x < 0; \\ sgn(x) = 0, & x = 0; \\ sgn(x) = 1, & x > 0. \end{cases}$$

Exercice 4. Soit T une variable aléatoire réelle sans mémoire. Le but des questions suivantes est de montrer que cette variable aléatoire suit une loi exponentielle. On note F_T sa fonction de rpartition.

1. Montrer que la fonction G_T, définie sur $\mathbb{R}^+$ par:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+ \qquad G_T(x) = 1 - F_T(x)$$

est strictement positive et vérifie:

$$\forall\, (x, y) \in (\mathbb{R}^+) \qquad G_T(x + y) = G_T(x)\, G_T(y).$$

2. Montrer que pour tout réel positif x et tout rationnel positif r, on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+ \qquad G_T(r\,x) = 1 - G_T(x)^r.$$

3. Montrer qu'il existe un réel a vérifiant

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+ \qquad G_T(x) = e^{ax}.$$

4. Montrer que la variable aléatoire T suit une loi exponentielle.