

Energia cinetica di rotazione

Dennis Angemi¹, Giuseppe Di Silvestre¹, Federica Ingrassia¹, and Giulia De Luca¹

¹Dipartimento di Fisica e Astronomia "Ettore Majorana" - Università degli Studi di Catania

Sommario

Si è determinato il valore del momento di inerzia di una ruota metallica dalla misura dei tempi impiegati da un carrello a percorrere un tratto di un piano inclinato (sfruttando il principio di conservazione dell'energia). Il valore così ottenuto risulta essere in buon accordo col dato normalmente accettato.

Introduzione e cenni teorici

Si consideri un carrello di massa m_c avente 4 ruote di raggio r alle quali vengono aggiunte 2 ruote posteriori di raggio R e massa M vincolate in modo tale da non entrare in contatto con la superficie del piano inclinato.

Trascurando le forze di attrito, sul sistema agiscono le forze illustrate in [1](#)

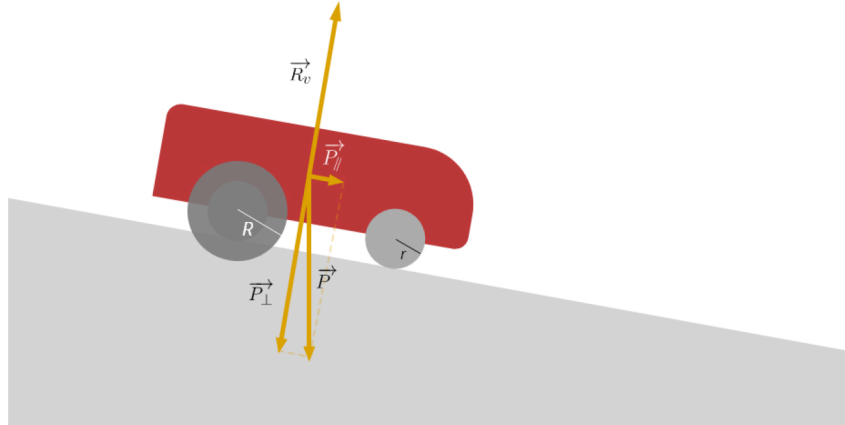


Figura 1: Diagramma delle forze

Il carrello si muove quindi di moto rettilineo uniformemente accelerato per effetto della componente della forza peso \vec{P}_\parallel parallela al piano. Fissati $s_0 = 0$ e $t_0 = 0$, valgono le seguenti equazioni del moto

$$\begin{cases} v_1 = a_1 t_1 \\ s = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} v_2 = a_2 t_2 \\ s = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 \end{cases} \quad (2)$$

dalle quali si ottiene $v_1 = \frac{2s}{t_1}$, $v_2 = \frac{2s}{t_2}$.

Per il principio di conservazione dell'energia:

$$\begin{cases} m_{tot}gh = \frac{1}{2}m_{tot}v_1^2 \\ m_{tot}gh = \frac{1}{2}m_{tot}v_2^2 + \frac{1}{2}(2I\omega^2) \end{cases} \quad (3)$$

in cui:

- v_1 rappresenta la velocità finale del carrello al quale sono vincolate posteriormente due ruote aggiuntive di massa M e raggio R libere in modo tale che *non* ruotino;
- v_2 rappresenta la velocità finale del carrello al quale sono opportunamente vincolate le ruote (precedentemente descritte) *bloccate* in modo tale che *ruotino* solidalmente alle ruote di raggio r ;
- $\omega = \frac{v_2}{r}$ è la velocità angolare delle ruote di raggio r .

La prima equazione del sistema (3) esprime il principio di conservazione dell'energia meccanica nella configurazione in cui l'energia potenziale iniziale corrisponde all'energia cinetica finale in quanto i momenti di inerzia delle ruote di raggio r influiscono minimamente sul sistema e viene trascurato l'attrito tra le ruote e le rotaie.

Nella seconda equazione del sistema (3), oltre al termine che esprime l'energia cinetica traslazionale, compare il termine dell'energia cinetica rotazionale che verrà sfruttato nella determinazione del momento di inerzia I delle ruote di raggio R . Infatti, risolvendo il sistema di equazioni (3) si ottiene

$$I = \frac{1}{2}m_{tot}r^2 \left[\left(\frac{t_2}{t_1} \right)^2 - 1 \right]. \quad (4)$$

Il momento di inerzia, nel caso di un punto materiale, è definito come il prodotto della massa per il quadrato della distanza del punto dell'asse di rotazione. Il momento di inerzia I di un corpo dipende dalla geometria di quest'ultimo per tanto approssimiamo la geometria di una ruota ad un cilindro solido di massa m e raggio R . Si otterrà tale valore sfruttando il principio di conservazione dell'energia e verrà successivamente confrontato con il valore ottenuto considerando le caratteristiche geometriche della ruota.

Apparato sperimentale e procedura di misura

Descrizione

L'apparato sperimentale è costituito da una rotaia inclinata sulla quale si muove un carrello (precedentemente descritto) e da due fotocellule azionate nell'istante del passaggio del carrello in modo tale da determinare l'intervallo di tempo impiegato dal corpo a percorrere la distanza $s = s_2 - s_1$.

Sono state effettuate 40 osservazioni (Tabella 1 - Appendice A):

- 20 misurazioni dell'intervallo di tempo nella configurazione "ruote libere";
- 20 misurazioni dell'intervallo di tempo nella configurazione "ruote bloccate".

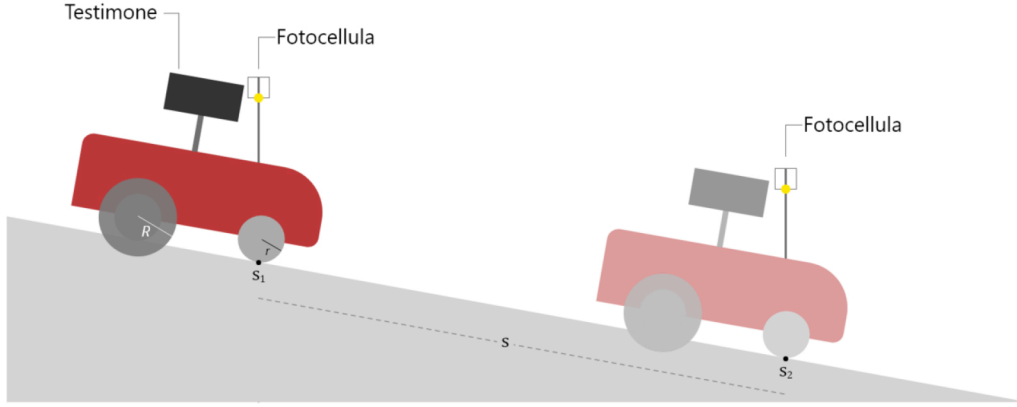


Figura 2: Apparato sperimentale

Strumenti di misura

Le misurazioni riportate nei prossimi paragrafi sono state effettuate adoperando gli strumenti le cui caratteristiche sono di seguito riassunte:

Strumento	Sensibilità	udm
Bilancia	0.0001	kg
Flessometro	0.001	m
Calibro cinquantiesimale	0.00005	m
Calibro ventesimale	0.00002	m
Cronometro	0.001	s

Analisi dei dati ed analisi degli errori

Al fine di determinare I mediante l'eq. (4), si calcola il tempo medio impiegato dal carrello a percorrere la distanza s

$$\langle t_1 \rangle = \sum_{i=1}^{20} t_{1i}$$

$$\langle t_2 \rangle = \sum_{i=1}^{20} t_{2i}$$

Sostituendo nella (4) si ottiene

$$I = \frac{1}{2} m_{tot} r^2 \left[\left(\frac{\langle t_2 \rangle}{\langle t_1 \rangle} \right)^2 - 1 \right]. \quad (5)$$

Propagazione degli errori

$$\delta I = \left| \frac{\partial I}{\partial r} \right| \delta r + 3 \left| \frac{\partial I}{\partial m} \right| \delta m + \left| \frac{\partial I}{\partial t_2} \right| \delta t + \left| \frac{\partial I}{\partial t_1} \right| \delta t \quad (6)$$

$$\delta I = \left[\left(\frac{\langle t_2 \rangle}{\langle t_1 \rangle} \right)^2 - 1 \right] \left(m_{tot} r \delta r + \frac{3}{2} r^2 \delta m \right) + r^2 m_{tot} \left(\frac{\langle t_2 \rangle}{\langle t_1 \rangle} \right)^2 \left(\frac{1}{\langle t_1 \rangle} + \frac{1}{\langle t_2 \rangle} \right) \delta t. \quad (7)$$

Si confronta il valore di I precedentemente ottenuto a partire dalle relazioni della conservazione dell'energia con il valore I' calcolato come di seguito

$$I' = \frac{m_1 R^2}{2} \quad (8)$$

e si procede a studiare l'incertezza di quest'ultimo valore

$$\delta I' = \frac{\partial I'}{\partial m_1} \delta m_1 + \frac{\partial I'}{\partial R} \delta R = R \left(\frac{R \delta m}{2} + m_1 \delta R \right) \quad (9)$$

Risultati

Dalla (5) si ottiene $I = (1.37 \pm 0.01) \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$;

Dalla (8) si ottiene $I' = (1.3689 \pm 0.0001) \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$.

I' risulta essere più preciso dato il maggior numero di cifre significative; tuttavia i valori di I e I' risultano essere in buon accordo.

Appendice A

Tabella 1 ([Download CSV](#))

index	t1	t2	incertezza	udm
1	1.545	2.029	0.001	s
2	1.545	2.042	0.001	s
3	1.546	2.032	0.001	s
4	1.545	2.022	0.001	s
5	1.541	2.027	0.001	s
6	1.545	2.027	0.001	s
7	1.536	2.004	0.001	s
8	1.542	2.028	0.001	s
9	1.536	2.035	0.001	s
10	1.542	2.025	0.001	s
11	1.533	2.026	0.001	s
12	1.531	2.021	0.001	s
13	1.539	2.023	0.001	s
14	1.536	2.014	0.001	s
16	1.539	2.021	0.001	s
15	1.541	2.034	0.001	s
17	1.541	2.015	0.001	s
18	1.547	2.018	0.001	s
19	1.534	2.015	0.001	s
20	1.537	1.996	0.001	s

Tabella 2 ([Download CSV](#))

descrizione	valore	incertezza	udm	strumento
Massa ruota dx di raggio R	1.1205	0.0001	kg	Bilancia
Massa ruota sx di raggio R	1.1234	0.0001	kg	Bilancia
Massa carrello (privo di ruote di raggio R)	3.8871	0.0001	kg	Bilancia
Diametro ruote di raggio r	0.04965	0.00005	m	Calibro cinquantessimale
Diametro ruote di raggio R	0.09886	0.00002	m	Calibro ventesimale

Note

Software utilizzati

- **MATLAB**: Data Analysis
- **Google Spreadsheet**: Data entry
- **Adobe Experience Design**: Images designing
- **GitHub**: Resource sharing

Risorse condivise

- [GitHub Repository](#)
- [MATLAB livescript](#)

Bibliografia

- Taylor, J. (1999). *Introduzione all'analisi degli errori: Lo studio delle incertezze nelle misure fisiche*. Zanichelli
- Bevington P. (2002). *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*. McGraw-Hill Education