

# Характеризация быстрого нелокального переноса тепла в плазме токамака при включении мощного дополнительного нагрева

А. Б. Кукушкин, П. А. Сдвиженский, А. В. Соколов

Явление быстрого нелокального переноса тепла (БНПТ) в плазме в установках для магнитного термоядерного синтеза (токамаках, стеллараторах) наиболее подробно исследовано на примере экспериментов, когда отклик пространственного профиля электронной температуры на ее локальное возмущение на периферии плазменного шнура оказывается мгновенным в масштабе времени диффузии тепла, описываемой уравнением теплопроводности. В настоящей работе проведен анализ БНПТ на примере явления, для которого имеется существенно более широкая база данных и заключающегося в приближенном сохранении формы пространственного распределения (но не абсолютных значений) электронного давления плазмы на всей стадии разряда при постоянном полном тороидальном электрическом токе, даже при включении и выключении мощного дополнительного нагрева плазмы на этой стадии. При этом использован метод сбалансированной идентификации для поиска оптимального (в смысле минимизации среднеквадратичной ошибки кросс-валидации) соотношения между сложностью модели и статистическим разбросом (погрешностью) экспериментальных данных.

## 1. Введение.

Ранее нами был подробно исследован один тип явлений быстрого нелокального переноса тепла (БНПТ) в установках магнитного удержания термоядерной плазмы (токамаках и стеллараторе). Эти явления проявляются в мгновенном (в масштабе времени обычной, т.е. броуновской диффузии тепла, описываемой уравнением теплопроводности) отклике пространственного профиля электронной температуры на ее локальное возмущение. Такие явления возникают, в частности, в случае создания сильного скачка температуры в небольшой пространственной области на периферии плазменного шнура, а именно при резком охлаждении периферии путем инъекции пеллеты примесного вещества или при резком усилении омического нагрева на краю шнура за счет скачка скорости поступления полоидального магнитного поля в плазму. Основные результаты интерпретации указанного класса явлений БНПТ представлены в [1]. Использована физическая модель БНПТ [2, 3], основанная на нелокальном переносе тепла электромагнитными (ЭМ) волнами с большой длиной свободного пробега. Такой перенос описывается интегральными по пространству (супердиффузионными) уравнениями, несводимыми к дифференциальным уравнениям диффузионного типа. Для решения обратной задачи нами использован метод сбалансированной идентификации [4, 5], который состоит в поиске оптимального (в смысле минимизации среднеквадратичной ошибки кросс-валидации) соотношения между сложностью модели и количеством и качеством (погрешностью) экспериментальных данных.

Большой интерес представляет обобщение анализа БНПТ на случай произвольной локализации мгновенного источника тепла в плазме. Актуальность такой задачи видна из того, что процессы быстрого нелокального переноса (т.е. мгновенного отклика в масштабе диффузионных времен теплопереноса) имеют место также и при включении или выключении мощного дополнительного нагрева плазмы. Известно [6-8], что на квазистационарной стадии разряда, характеризуемой постоянством во времени значения полного тороидального электрического тока в плазме (поэтому в международной терминологии эта стадия получила название flat-top по наличию длинного плато на графике зависимости разрядного тока от времени), имеется приближенное сохранение пространственного профиля распределения температуры (т.е. относительной формы этого

распределения) при значительном (в два раза и более) изменении абсолютных значений температуры. Поэтому представляет большой интерес проверка применимости концепции [6-8] к тем разрядам, когда на квазистационарной стадии с включением и выключением очень мощного дополнительного нагрева, вплоть до 20 МВт полной мощности нагрева различными способами (напр., инжекцией нейтральной пучков атомов и инжекцией ЭМ волн для нагрева ионов с помощью ионного циклотронного резонанса).

Основная идея рассматриваемых нами ранее моделей БНПТ по обеим версиям, а именно в моделях [2], [3] и в последней версии [9], состоит в следующем. Полагается, что для описания быстрых процессов, включая резко нестационарные переходные процессы, на небольшом интервале времени вблизи момента начала такого переходного процесса можно пренебречь переносом тепла диффузионными механизмами по сравнению с неким более быстрым, нелокальным переносом. Такой перенос в терминах современной теории интегро-дифференциальных уравнений с медленно спадающим ядром интегрального оператора, попадающим, в частности, в класс распределений Леви, принято называть супердиффузионным (см. напр. недавние обзоры [10, 11]). Возможность такого пренебрежения применима даже к общепринятой аномальной (по сравнению с классическими механизмами кулоновского столкновительного переноса тепла) диффузии тепла поперек магнитного поля в замагниченной плазме. Полуэмпирическая модель аномальной диффузии показала возможность с приемлемой точностью описывать многие, но, увы, не все экспериментальные данные при интерпретации экспериментов в установках магнитного удержания плазмы. Неприменимость модели аномальной диффузии для явлений БНПТ отмечена в различных работах.

В [2], [3], [9] были рассмотрены задачи эволюции температуры плазмы при резком изменении температуры на периферии плазменного шнура. Там была разработана модель, предполагающая возможность свести уравнение переноса тепла к учету только некоего гипотетического волнового механизма, параметры которого можно найти, изучая отклонения температуры в широкой центральной части шнура за счет изменения следующих параметров: пространственного профиля коэффициента поглощения этих волн в плазме, коэффициента отражения волн внутрь плазмы на ее границе, доли полной мощности нагрева плазмы, создающей источник ЭМ волн, ответственных за изучаемый супердиффузионный перенос.

Результаты анализа данных экспериментов на токамаках JET и TFTR и стеллараторе LHD показали [1], что рассмотренная физическая модель может качественно объяснить эволюцию электронной температуры центральной плазмы на начальном этапе быстро нелокального транспорта событий типа «холодного импульсного» («cold pulse»), поскольку модель совместима с сильным изменением во времени коэффициента отражения волн и с высокими значениями коэффициента внутреннего отражения по сравнению с таковыми для стенок вакуумной камеры. Результаты [1-3] позволили утверждать, что для супердиффузионных физических моделей БНПТ метод сбалансированной идентификации [4, 5] является эффективным инструментом их верификации.

В настоящей работе мы будем использовать модельные экспериментальные данные, воспроизводящие основные свойства результатов измерений интересующих нас параметров плазмы, представленных, в частности, в [12-20]. Прямое применение моделей типа [2], [3], [9] к изучению БНПТ в случае разрядов с включением мощного дополнительного нагрева затруднено тем, что источник тепла расположен в той же области (преимущественно центральной области плазменного шнура), где исследуется динамика температуры. Поэтому в настоящей работе мы ограничимся анализом нелокальности переноса тепла на примере явления, обобщающего концепцию [6-8] на случай очень мощного допгрева. Это значит, что приближенное сохранение формы пространственного распределения (но не абсолютных значений) электронного давления плазмы на всей стадии разряда при постоянном полном тороидальном электрическом токе

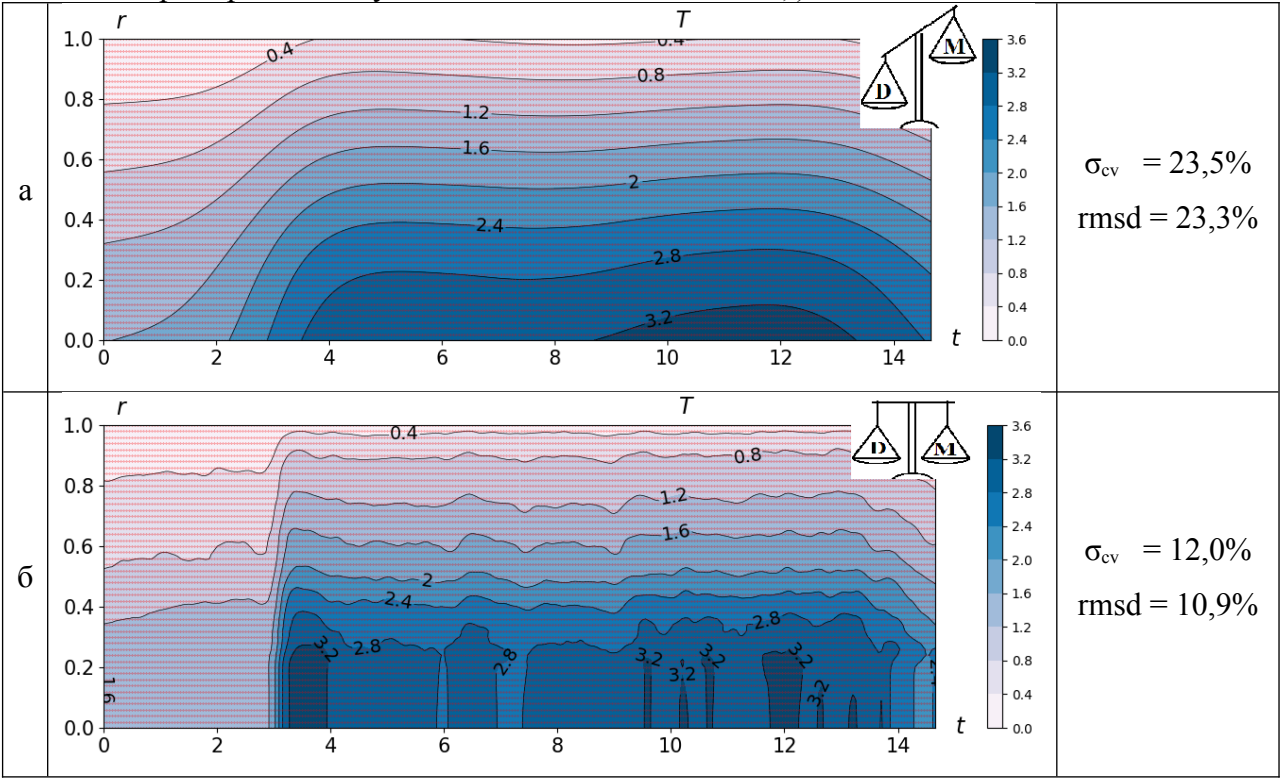
в плазме имеет место даже при включении и выключении мощного дополнительного нагрева плазмы на этой стадии.

В разделе 2 представлена постановка задачи анализа приближенное сохранение формы пространственного распределения электронного давления и температуры в разрядах с включением мощного дополнительного нагрева плазмы. В разделе 3 представлены результаты решения этой задачи (по содержанию файла Петра «2022\_12\_01 - Обзор расчетов по разрядам v5»). Обсуждение и выводы даны в разделе 4.

### Проверка гипотез методом сбалансированной идентификации

#### Технология сбалансированной идентификации

Математические модели реальных объектов обычно содержат множество неизвестных функций, которые необходимо определить (идентифицировать) так, чтобы они удовлетворяли представлениям специалистов о закономерностях функционирования моделируемого объекта и проходили «недалеко» от экспериментальных данных. Объем таких знаний и количество и качество (точность и надёжность) данных и определяют сложность модели. Проиллюстрируем выбор оптимально сбалансированного решения (модели) простым примером. На рис. S1 приведены три решения задачи идентификации простейшей модели (функции  $T(t,r)$ ), аппроксимирующей некоторый набор данных (в качестве примера используются данные по #97904....  $T_{i,k}$ ).



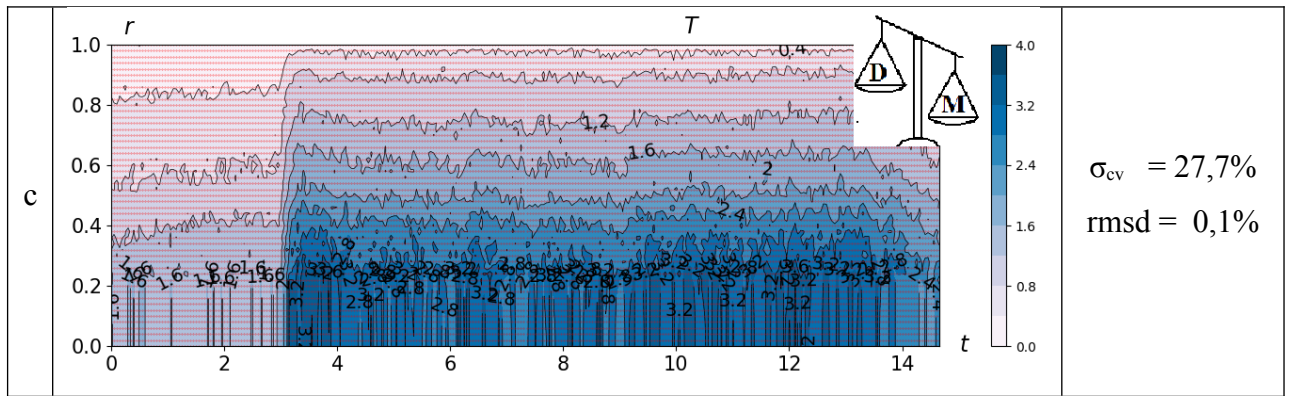


Рисунок S1. Линии уровня температуры  $T(t, r)$ . Легенда, связывающая цвет с температурой, справа. Красные точки соответствуют координатам экспериментальных данных, Три варианта аппроксимации данных в зависимости от соотношения объема данных ( $D$ ) сложности модели ( $M$ ): (а) – слишком простая (недообученная) модель, (б) – оптимально сбалансированная модель, (в) – слишком сложная (переобученная) модель.

Все три решения получены путем минимизации критерия идентификации (функционала)

$$F(T, \alpha) = \sum_{i,k} (T_{i,k} - T(t_i, r_k))^2 + \int \int \left[ \alpha_1^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial r} \right)^2 + \alpha_2^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right)^2 \right] dt dr \rightarrow \min_{T(t)}, \quad (S1)$$

где первое слагаемое отвечает за близость к данным (квадратичное отклонение), а второе за сложность модели (кривизну функции). Чем больше  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , тем больше вес второго слагаемого и тем проще (с меньшей кривизной) будет полученная в результате минимизации модель.

Здесь и далее используются следующие обозначения:

rmsd – стандартное отклонение модели от данных в процентах от исходной дисперсии,

$\sigma_{cv}$  – среднеквадратичная ошибка кроссвалидации в процентах от исходной дисперсии (погрешность моделирования данных).

Функция на рис. 1а является слишком простой ( $\alpha$  слишком малы), она проходит слишком далеко от исходных данных (rmsd=23,3%). Ее противоположностью является функция на рис. 1в – слишком сложная модель ( $\alpha$  слишком велики), она фактически проходит через все экспериментальные точки (rmsd=0,1%) и, помимо динамики объекта, воспроизводит все ошибки. Наконец, кривая на рис. 1б соответствует оптимальному балансу между близостью модели (функции) к измерениям и ее простотой. В последнем случае значение  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  выбирается путем минимизации среднеквадратичной ошибки кроссвалидации. При правильном выборе процедуры кроссвалидации величина  $\sigma_{cv}$  может рассматриваться как погрешность моделирования, как количественная мера соответствия (баланса) сложности модели количеству и качеству используемых данных и знаний.

Технология сбалансированной идентификации (Соколов, Волошинов, 2018; Sokolov, Voloshinov, 2020) позволяет автоматизировать процесс построения математических моделей на основе использования специального программного обеспечения и мощных вычислительных ресурсов (кластеров). Результатом ее применения являются выбор математической модели с оптимальным балансом сложности и близости ее траектории к экспериментальным данным, оценки надежности данных и погрешностей моделирования, графические и числовые результаты моделирования исследуемого объекта.



Отметим, что технология успешно использовалась при решении обратных задач в различных научных областях (механика, физика плазмы, теплопроводность, биология, физиология растений, эпидемиология, метеорология, перенос атмосферных загрязнений и др., более развернутое перечисление можно найти в (Sokolov, Voloshinov, 2020)).

**Исследование гипотезы о мультипликативном представлении давления**

Воспользуемся технологией сбалансированной идентификации для (проверки) поиска аргументов в пользу или против гипотезы мультипликативности. Идея состоит в простом утверждении: при добавлении в модель дополнительных правильных знаний (математические утверждения, гипотезы ...), погрешность моделирования должна уменьшаться (не возрастать). И наоборот, если дополнительная гипотеза не верна, погрешность будет увеличиваться. Конечно, все не так однозначно – всякие ошибки измерений, локальные минимумы, точность минимизации, выбор процедуры кроссвалидации и т.д.

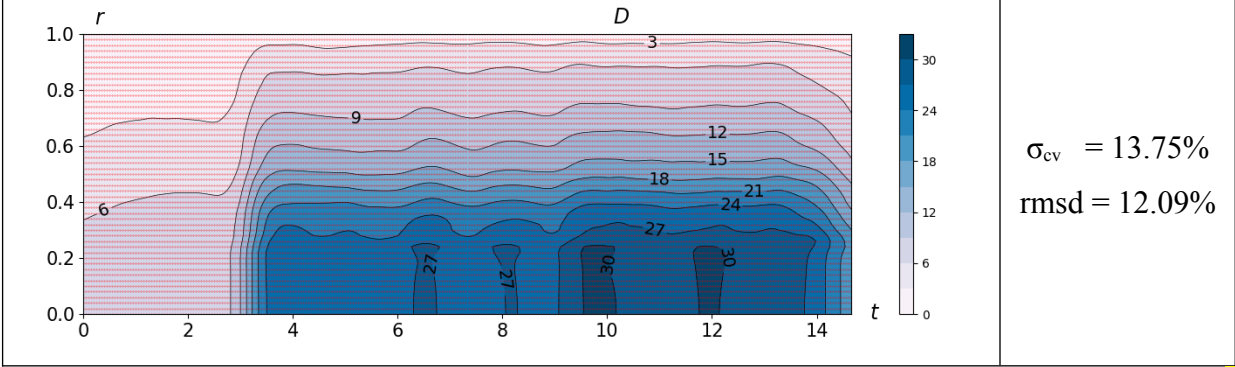
Реализуем подход следующим образом: сначала подсчитаем погрешность моделирования данных  $D_{i,j}$  функцией двух переменных  $D(t,r)$ , затем – погрешность моделирования произведением двух функций одной переменной  $Dt(t)$  и  $Dr(r)$ . Если при этом погрешность не увеличится, то гипотезу можно считать приемлемой. Заряд 97904.

Формальна постановка идентификации  $D(t,r)$ :

$$t \in [t_{min}, t_{max}]; r \in [0,1]$$

$$\sum_{i,k} (D_{i,k} - D(t_i, r_k))^2 + \iint \left[ \alpha_1^2 \left( \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} \right)^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \left( \frac{\partial^2 D}{\partial t \partial r} \right)^2 + \alpha_2^2 \left( \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} \right)^2 \right] dt dr \rightarrow \min_{D(t,r)}, \tag{S2}$$

На рис. С2 приведено оптимально сбалансированное решение для  $D(t,r)$ .



Характеристики погрешностей для четырех зарядов приведены в Таблице Т1 в колонке S2 Таблица С1.

# разряда	показатель	S2	S3	S4
84694	$\sigma_{cv}$	13.45%	13.56%	13.56%
	rmsd	11.54%	12.59%	12.59%
97904	$\sigma_{cv}$	13.75%	13.58%	13.58%
	rmsd	12,09%	12.45%	12.47%
95338	$\sigma_{cv}$	16.01%	15.32%	15.32%
	rmsd	12.93%	12.49%	12.49%
85174	$\sigma_{cv}$	16.98%	16.41%	16.41%
	rmsd	14.01%	14.79%	14.79%

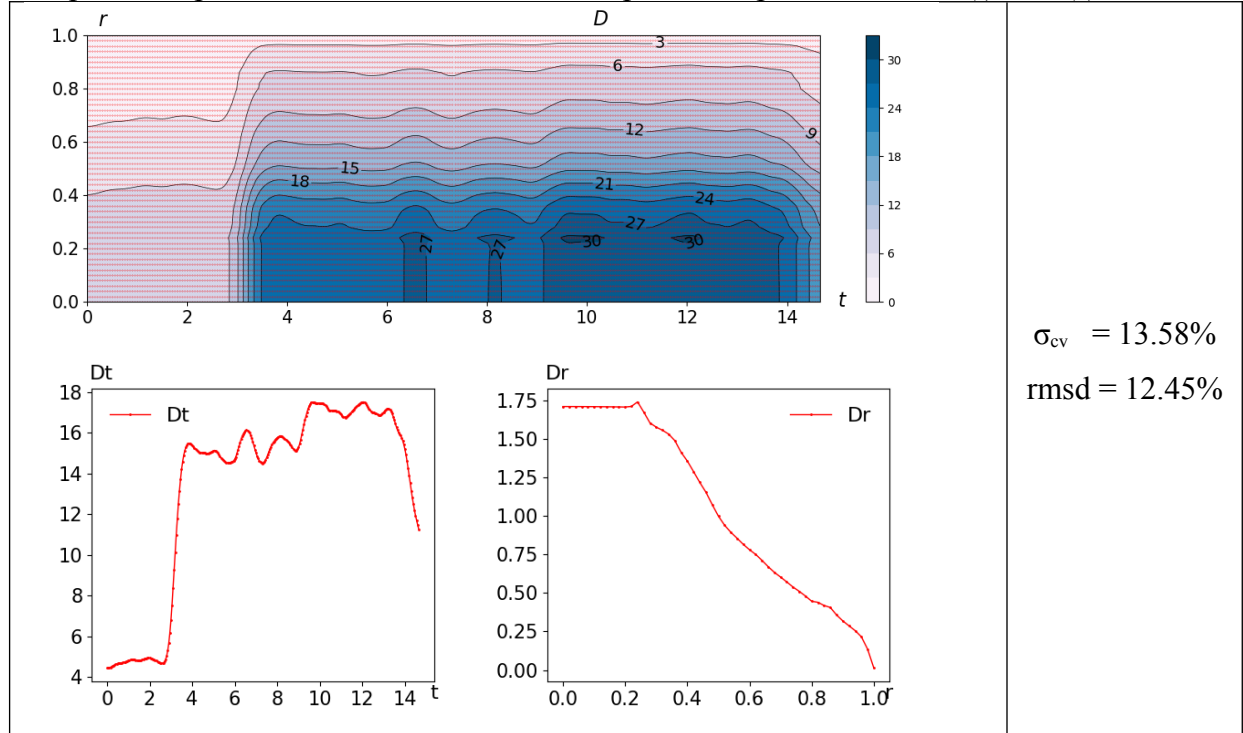
Добавим гипотезу мультипликативности:  
 $D(t,r)=Dt(t) \cdot Dr(r)$   
 $Dr(0.5)=1$

Формальная постановка идентификации  $Dt(t)$  и  $Dr(r)$ :

$$t \in [t_{min}, t_{max}]; r \in [0,1]$$

$$\sum_{i,k} (D_{i,k} - Dt(t_i)Dr(r_k))^2 + \iint \left[ \alpha_1 \left( \frac{d^2 Dt}{dt^2} \right)^2 + \alpha_2 \left( \frac{d^2 Dr}{dr^2} \right)^2 \right] dt dr \rightarrow \min_{Dt(\cdot), Dr(\cdot)}, \quad (S3)$$

На рис. С2 приведено оптимально сбалансированное решение для  $Dt(t)$  и  $Dr(r)$ .



Мы фактически сократили на два порядка пространство допустимых решений в численном варианте постановки (с  $51 \times 260$  чисел до  $51 + 260$ ), а погрешность моделирования  $\sigma_{cv}$  при этом заметно уменьшилась.

Характеристики погрешностей для четырех зарядов приведены в Таблице Т1 в колонке S3

Вывод: Гипотеза приемлема.

### Исследование гипотезы о проведении в нуле

Добавим к постановке S3 дополнительное условие  $\frac{dDr}{dr}(0) = 0$ .

$$t \in [t_{min}, t_{max}]; r \in [0,1]$$

$$\sum_{i,k} (D_{i,k} - Dt(t_i)Dr(r_k))^2 + \iint \left[ \alpha_1 \left( \frac{d^2 Dt}{dt^2} \right)^2 + \alpha_2 \left( \frac{d^2 Dr}{dr^2} \right)^2 \right] dt dr \rightarrow \min_{Dt(\cdot), Dr(\cdot), \frac{dDr}{dr}(0)=0}, \quad (S4)$$

В результате идентификации погрешности практически не изменились ( $\sigma_{cv} = 13.58\%$  и  $rmsd = 12.47\%$ ).

Характеристики погрешностей для четырех зарядов приведены в Таблице Т1 в колонке S4

Вывод: Гипотеза приемлема.

**Раздел с результатами сравнения всех входных и выходных данных (по имеющемуся у Вас файлу Петра), включая самые последние (пока их у Вас нет) результаты о**

**среднем значении характерного расположения фронта тепловой волны после включения допнагрева.**

### **Обсуждение и выводы.**

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00317, <https://rscf.ru/project/22-11-00317/>*

*Исследование выполнено с использованием оборудования центра коллективного пользования «Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса» НИЦ «Курчатовский институт», <http://ckp.nrcki.ru/>.*

### **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

- [1]. Соколов А. В. и др. Применение метода сбалансированной идентификации к восстановлению параметров быстрого нелокального переноса тепла в плазме магнитного термоядерного синтеза //International Journal of Open Information Technologies. – 2020. – Т. 8. – №. 4. – С. 31–44 <http://injoit.org/index.php/j1/article/view/890>
- [2]. Кукушкин А. Б. и др. Модель восстановления параметров быстрого нелокального переноса тепла в установках магнитного удержания термоядерной плазмы //Вопросы атомной науки и техники. Серия: Термоядерный синтез. – 2017. – Т. 40. – №. 1. – С. 45–55 [http://vant.iterru.ru/vant\\_2017\\_1/5.pdf](http://vant.iterru.ru/vant_2017_1/5.pdf)
- [3]. Kukushkin A. B. et al. A model of recovering the parameters of fast nonlocal heat transport in magnetic fusion plasmas //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2017. – Vol. 941, no. 1. – P. 012008 <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/941/1/012008/meta>
- [4]. Sokolov A. V., Voloshinov V. V. Choice of mathematical model: balance between complexity and proximity to measurements //International Journal of Open Information Technologies. – 2018. – Vol. 6, no. 9. – P. 33–41 <http://www.injoit.ru/index.php/j1/article/view/612>
- [5]. Sokolov A., Voloshinov V. Balanced identification as an intersection of optimization and distributed computing //arXiv preprint arXiv:1907.13444. – 2019 <https://arxiv.org/abs/1907.13444>
- [6]. Coppi B. 1980 Comments Plasma Phys. Control. Fusion. – 1980. – Vol. 5, no 6. – P. 261–270.
- [7]. Razumova K. A. et al. The main features of self-consistent pressure profile formation // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2008. – Vol. 50, no. 10. – P. 105004 <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0741-3335/50/10/105004/meta>
- [8]. Dnestrovskij Y. N. Self-Organization of Hot Plasmas: The Canonical Profile Transport Model. – Springer, 2014.
- [9]. Kukushkin A. B. et al. Recovery of parameters of fast nonlocal heat transport in magnetic fusion plasmas: testing a model of waves with high internal reflections //arXiv preprint arXiv:1901.03789. – 2019 [arXiv:1901.03789](https://arxiv.org/abs/1901.03789)
- [10]. Zaburdaev V., Denisov S., Klafter J. Lévy walks //Reviews of Modern Physics. – 2015. – Vol. 87, no. 2. – P. 483 <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.87.483>

- [11]. Kukushkin A.B., Kulichenko A.A., Neverov V.S., Sdvizhenskii P.A., Sokolov A.V., Voloshinov V.V. Self-Similar Solutions in the Theory of Nonstationary Radiative Transfer in Spectral Lines in Plasmas and Gases // Symmetry. – 2021. – Vol. 13, no. 3. – P. 394 <https://www.mdpi.com/2073-8994/13/3/394>
- [12]. Casson F. J. et al. Predictive multi-channel flux-driven modelling to optimise ICRH tungsten control and fusion performance in JET // Nuclear Fusion. – 2020. – Vol. 60, no. 6. – P. 066029. <https://doi.org/10.1088/1741-4326/ab833f>
- [13]. Citrin J. et al. Tractable flux-driven temperature, density, and rotation profile evolution with the quasilinear gyrokinetic transport model QuaLiKiz // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2017. – Vol. 59, no. 12. – P. 124005. <https://doi.org/10.1088/1361-6587/aa8aeb>
- [14]. Kirov K. K. et al. Fast ion synergistic effects in JET high performance pulses // Nuclear Fusion. – 2019. – Vol. 59, no. 5. – P. 056005. <https://doi.org/10.1088/1741-4326/ab02ae>
- [15]. Hender T. C. et al. The role of MHD in causing impurity peaking in JET hybrid plasmas // Nuclear Fusion. – 2016. – Vol. 56, no. 6. – P. 066002. <https://doi.org/10.1088/0029-5515/56/6/066002>
- [16]. Lerche E. et al. Optimization of ICRH for core impurity control in JET-ILW // Nuclear Fusion. – 2016. – Vol. 56, no. 3. – P. 036022. <https://doi.org/10.1088/0029-5515/56/3/036022>
- [17]. Sertoli M. et al. Effects of the ICRH resonance position on the profile shape of the W density in JET-ILWH-mode discharges // Proc. 45th EPS Conference on Plasma Physics, Prague, Czech Republic, 2–6 July 2018, ECA vol. 42, P4.1083. <http://ocs.ciemat.es/EPS2018PAP/pdf/P4.1083.pdf>
- [18]. Gallart D. et al. Modelling of JET hybrid plasmas with emphasis on performance of combined ICRF and NBI heating // Nuclear Fusion. – 2018. – Vol. 58, no. 10. – P. 106037. <https://doi.org/10.1088/1741-4326/aad9ad>
- [19]. Bourdelle C. et al. Fast H isotope and impurity mixing in ion-temperature-gradient turbulence // Nuclear Fusion. – 2018. – Vol. 58, no. 7. – P. 076028. <https://doi.org/10.1088/1741-4326/aacd57>
- [20]. Ho A. et al. Application of Gaussian process regression to plasma turbulent transport model validation via integrated modelling // Nuclear fusion. – 2019. – Vol. 59, no. 5. – P. 056007. <https://doi.org/10.1088/1741-4326/ab065a>



Переходим к новой задаче быстрого нелокального переноса (БНП), которая в некоторых аспектах существенно отличается от прежней, предложенной в [1] и использованной для интерпретации данных в предварительно форме в [1] и окончательно в [2]. Основное отличие в том, что интенсивность излучения не полагается однородной по координатам, что соответственно не позволит использовать простое решение для интенсивности переносчиков тепла. Поэтому нынешний подход пока не предполагает решения обратной задачи восстановления параметров нелокального переноса путем минимизации невязки некоторого уравнения переноса (подгонки равенства правой и левой частей некоего баланса).

На первом шаге, используя реальные экспериментальные данные, нужно доказать, что производная по времени от тепловой энергии электронов может быть приближенно сведена к произведению функции только времени на функцию только координаты (эффективной радиальной линейной координаты  $\rho$ , являющей меткой замкнутой магнитной поверхности в плазме токамака). Такая производная имеет вид

$$\Pi(\rho, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{3}{2} [n(\rho, t) T(\rho, t)]$$

где -- при измерении плотности электронов  $n(\rho, t)$  в единицах  $10^{19} \text{ м}^{-3}$  и температуры электронов  $T(\rho, t)$  в кэВ и времени в секундах -- функция  $\Pi$  измеряется в единицах  $1.6 \text{ кВт/м}^3$ .

Ранее в [3] был проведен анализ приближенных законов подобия для функций плотности и температуры и их произведения. Это анализ был проведен в следующих рамках. Под подобием пространственных профилей некоей функции  $f(\rho, t)$  понимается то, что нормированные профили, дефинированные (для разных значений или диапазонов параметра  $\square_{max}$ ) как (здесь  $k$  – номер разряда)

$$G_f(\rho, t, \rho_{max}, k) = f(\rho, t, k) \left[ \int_0^{\square_{max}} f(\rho_1, t, k) \rho_1 d\rho_1 \right]^{-1}, 0 < \rho < \square_{max} = 0.5 - 1,$$

11\\*  
ME  
RGE  
FOR  
MA  
T ()

$$G_f(\rho, t, 0, k) = \frac{f(\rho, t, k)}{f(0, t, k)}, \square_{max} = 0,$$

22\\*  
ME  
RGE  
FOR  
MA  
T ()

являются слабыми функциями времени.

Следующим шагом такого анализа должно стать исследование степени подобия функции  $\Pi(\rho, t)$ . Для этого нужно для пробного набора данных (из хотя бы десятка разрядов) провести следующий анализ.

- 1) Построение  $\Pi(\rho, t)$  с помощью метода **сбалансированного** (умеренного) сглаживания по принципам SvF [4, 5].

- 2) Нахождение универсального нормированного пространственного профиля производной по времени от электронного давления плазмы, использовать формулы (1)-(6) в [3].
- 3) Построение функции  $\Pi^{(uni)}$ , в которой имеется разделение зависимости от времени и пространственной координаты, используя следующий аналог формулы (25) в [3], где функция  $\overline{G}_{\Pi}(\rho, \rho_{max}, k)$  находится по формуле (3) в [3] при условии, что в формуле (1) в качестве  $f(\rho, t)$  использована функция  $\Pi(\rho, t)$ :

$$\Pi^{(uni)}(\rho, t, \rho_{max}, k) \equiv \overline{G}_{\Pi}(\rho, \rho_{max}, k) \int_0^{\rho_{max}} \Pi(\rho_1, t, k) \rho_1 d\rho_1,$$

- 4) сравнение  $\Pi^{(uni)}(\rho, t, \rho_{max}, k)$  с точной функцией  $\Pi(\rho, t, k)$  аналогично Рис. 13 в [3] (и видеофайлам с эволюцией такого сравнения в различных разрядах).

Дальнейшие шаги буду связаны со сравнением полученной  $\Pi^{(uni)}(\rho, t, \rho_{max}, k)$  с такими величинами

- средней удельной мощностью дополнительного (вплоть до 20 Мвт) и омического (порядка 1 Мвт) нагрева плазмы,
- средней удельной мощностью нагрева электронов по каналу быстрого нелокального переноса.

## Исследование гипотезы о мультипликативном представлении методом сбалансированной идентификации

### *Технология сбалансированной идентификации*

Математические модели реальных объектов обычно содержат множество неизвестных функций, которые необходимо определить (идентифицировать) так, чтобы они удовлетворяли представлениям специалистов о закономерностях функционирования моделируемого объекта и проходили «недалеко» от экспериментальных данных. Объем таких знаний и количество и качество (точность и надёжность) данных и определяют сложность модели. Проиллюстрируем выбор оптимально сбалансированного решения (модели) простым примером. На рис. S1 приведены три решения задачи идентификации простейшей модели (функции  $T(t, r)$ ), аппроксимирующей некоторый набор данных (в качестве примера используются данные по #97904....  $T_{i,k}$ ).

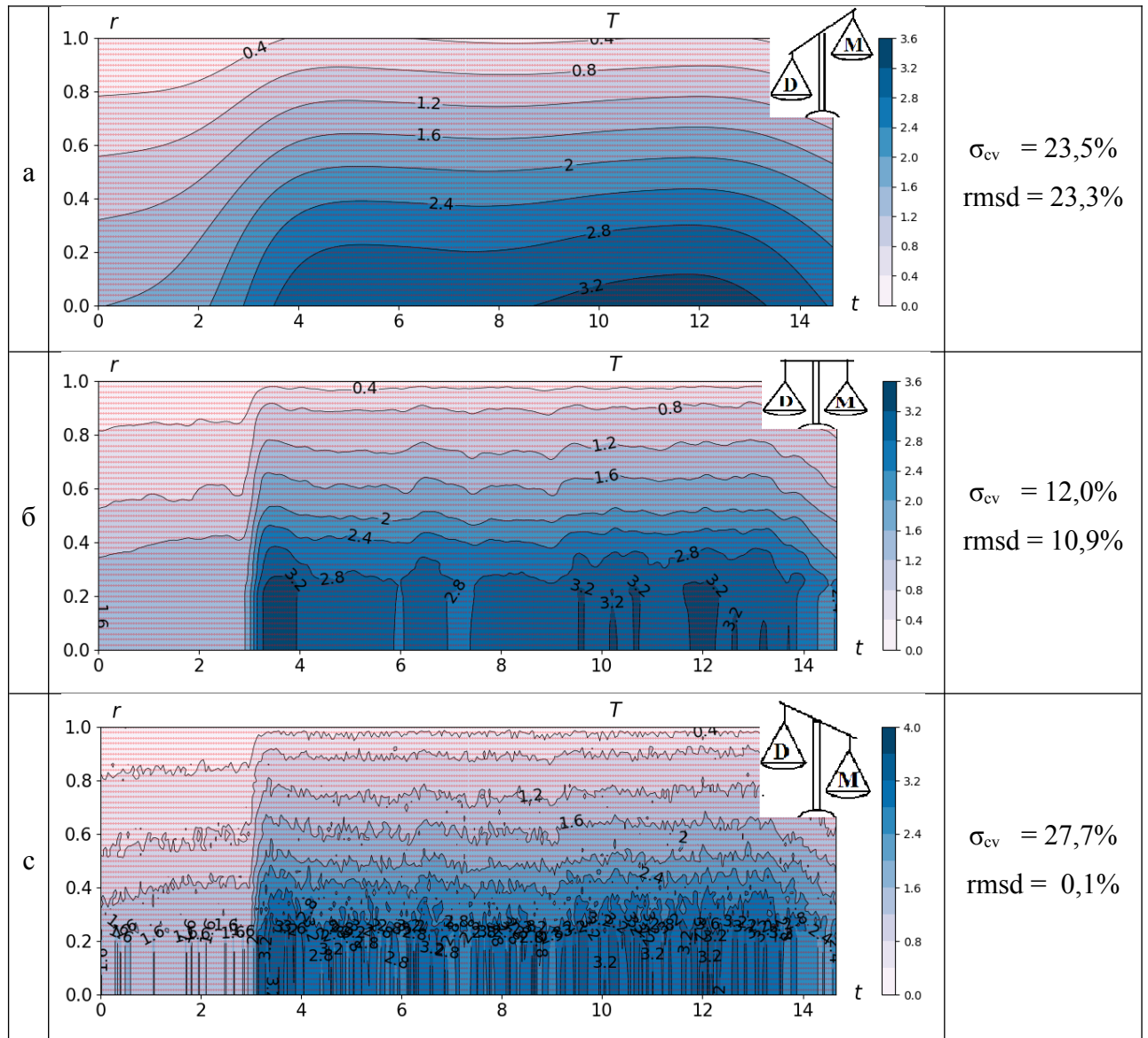


Рисунок S1. Линии уровня температуры. Легенда, связывающая цвет с температурой, справа. Красные точки соответствуют координатам экспериментальных данных, Три варианта аппроксимации данных в зависимости от соотношения объема данных ( $D$ ) сложности модели ( $M$ ): (а) – слишком простая (недообученная) модель, (б) – оптимально сбалансированная модель, (в) – слишком сложная (переобученная) модель.

Все три решения получены путем минимизации критерия идентификации (функционала)

$$F(T, \alpha) = \sum_{i,k} (T_{i,k} - T(t_i, r_k))^2 + \iint \left[ \alpha_1^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial r} \right)^2 + \alpha_2^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right)^2 \right] dt dr \rightarrow \min_{T(\cdot)}, \quad (S1)$$

где первое слагаемое отвечает за близость к данным (квадратичное отклонение), а второе за сложность модели (кривизну функции). Чем больше  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , тем больше вес второго

слагаемого и тем проще (с меньшей кривизной) будет полученная в результате минимизации модель.

Здесь и далее используются следующие обозначения:

$rmsd$  – стандартное отклонение модели от данных в процентах от исходной дисперсии,

$\sigma_{cv}$  – среднеквадратичная ошибка кроссвалидации в процентах от исходной дисперсии (*погрешность моделирования данных*).

Функция на рис. 1а является слишком простой ( $\alpha$  слишком малы), она проходит слишком далеко от исходных данных ( $rmsd=23,3\%$ ). Ее противоположностью является функция на рис. 1в – слишком сложная модель ( $\alpha$  слишком велики), она фактически проходит через все экспериментальные точки ( $rmsd=0,1\%$ ) и, помимо динамики объекта, воспроизводит все ошибки. Наконец, кривая на рис. 1б соответствует оптимальному балансу между близостью модели (функции) к измерениям и ее простотой. В последнем случае значение  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  выбирается путем минимизации среднеквадратичной ошибки кроссвалидации. При правильном выборе процедуры кроссвалидации величина  $\sigma_{cv}$  может рассматриваться как погрешность моделирования, как количественная мера соответствия (баланса) сложности модели количеству и качеству используемых данных и знаний.

Технология сбалансированной идентификации (Соколов, Волошинов, 2018; Sokolov, Voloshinov, 2020) позволяет автоматизировать процесс построения математических моделей на основе использования специального программного обеспечения и мощных вычислительных ресурсов (кластеров). Результатом ее применения являются выбор математической модели с оптимальным балансом сложности и близости ее траектории к экспериментальным данным, оценки надежности данных и погрешностей моделирования, графические и числовые результаты моделирования исследуемого объекта.

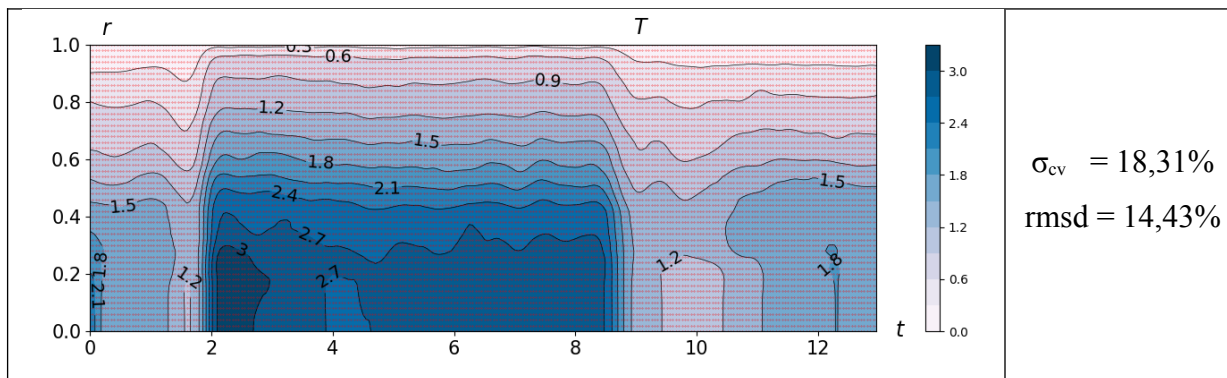
Отметим, что технология успешно использовалась при решении обратных задач в различных научных областях (механика, физика плазмы, теплопроводность, биология, физиология растений, эпидемиология, метеорология, перенос атмосферных загрязнений и др., более развернутое перечисление можно найти в (Sokolov, Voloshinov, 2020)).

### ***Исследование гипотезы о мультипликативном представлении давления***

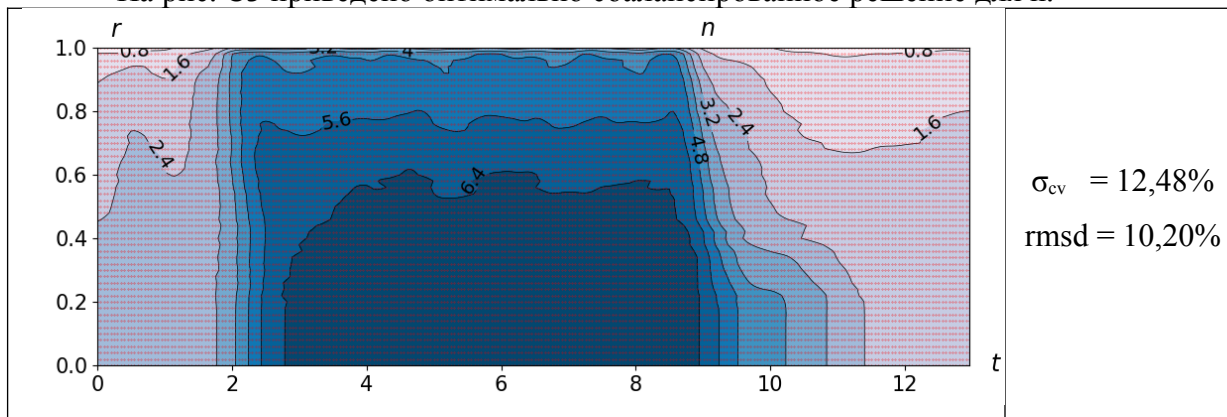
Воспользуемся технологией сбалансированной идентификации для (проверки) поиска аргументов в пользу или против гипотезы мультипликативности. Идея состоит в простом утверждении: при добавлении в модель дополнительного правильного знания (математическое утверждение, гипотезу), погрешность моделирования знаний должна уменьшаться (не возрастать). И наоборот, если дополнительная гипотеза не верна, погрешность будет увеличиваться. Конечно все не так однозначно – всякие ошибки измерений, локальные минимумы, точность минимизации, выбор процедуры кроссвалидации и т.д.

Реализуем подход следующим образом: сначала подсчитаем погрешности моделирования  $T$  и  $p$  по отдельности, затем погрешности моделирования  $T$  и  $p$ , связанные гипотезой мультипликативности. Заряд 84693.

На рис. С2 приведено оптимально сбалансированное решение для  $T$ .



На рис. С3 приведено оптимально сбалансированное решение для  $n$ .



Добавим гипотезу мультипликативности:

$$\frac{3}{2} * [n(r, t) T(r, t)] = D_t(t) * D_r(r)$$

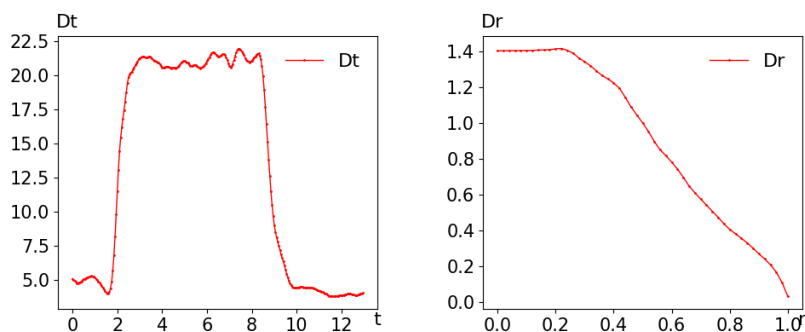
Сбалансированная идентификация такой задачи дает:

$T(t, r)$  CV% 18.88 MSD% 16.08

$n(t, r)$  CV% 13.45 MSD% 11.76

Найденные функции  $T$  и  $n$  здесь не приводятся – они аналогичны изображенным на рис С2 и С3. Приведем  $D_t(t) u D_r(r)$ .

Рис С4.



Мы фактически сократили вдвое пространство допустимых решений в численном варианте постановки (с  $2*51*260$  чисел до  $51*260+51+260$ ), а погрешности возросли несильно.

Другие разряды показывают аналогичные результаты.

Таблица С1.



# разряда	показатель	Модель Т	Модель n	Мультипликативная модель	
				Т	n
84693	$\sigma_{cv}$	18,31%	12,48%	18.88%	13.45%
	rmsd	14,43%	10,20%	16.08%	11.76%
97904	$\sigma_{cv}$	12.07%	14.49%	14.43%	18.07%
	rmsd	10,94%	12.01%	12.68%	16.07%
85174	$\sigma_{cv}$	20.57%	18.08%	20.77%	18.48%
	rmsd	16.67%	14.74%	18.23%	15.74%
95338	$\sigma_{cv}$	%	%	%	%
	rmsd	%	%	%	%
97096	$\sigma_{cv}$	%	%	%	%
	rmsd	%	%	%	%
97571	$\sigma_{cv}$	%	%	%	%
	rmsd	%	%	%	%

Вывод: Гипотеза приемлема. Хотя, по-видимому, в данных есть что-то еще. Кажется поведение на границе ( $r=1$ ).

20.778160079596354 CV 0.1685447795760516 MSD% 18.23055514131677 MSD 0.14787954689306543

$n(t,r)$  CV% 18.4825858039487 CV 0.410731391749977 MSD% 15.74

$$t \in [t_{min}, t_{max}]; r \in [0,1]$$

$$D(r,t) = \frac{3}{2} * [n(r,t) T(r,t)]$$

$$D(r,t) = D_t(t) * D_r(r)$$

$$D_r(0.5) = 1; \text{ м.б. взять } D_r(0) = 1; \text{ или } \int_0^1 D_r(r) dr = 1 \quad ???$$

$$d_i(t) = d/dt(D_t(t)) \quad (D-1)$$

### Исследование гипотезы о мультипликативном представлении энергии

Нужно ли заменить на  $\Pi$ ?

$$t \in [t_{min}, t_{max}]; r \in [0,1]$$

$$P(r,t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{3}{2} [n(r,t) T(r,t)]$$

$$P(r,t) = P_t(t) * P_r(r)$$

( $\Pi$ -1)

$$P_r(0.5) = 1; (\text{можно заменить на условие } \int_0^1 P_r(r) dr = 1 \quad ???)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} P_r(0) = 0 \quad - \text{можно отказаться}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t(t_{min}) = 0; \frac{\partial}{\partial t} P_t(t_{max}) = 0 \quad - \text{можно отказаться...}$$

Пака все \*\*\*\*\*

**#0.** Таким образом, для начала задача идентификации выглядит след. образом.

Для модели:

$$P(r,t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{3}{2} [n(r,t) T(r,t)]$$

$$P(r,t) = P_t(t) * P_r(r)$$

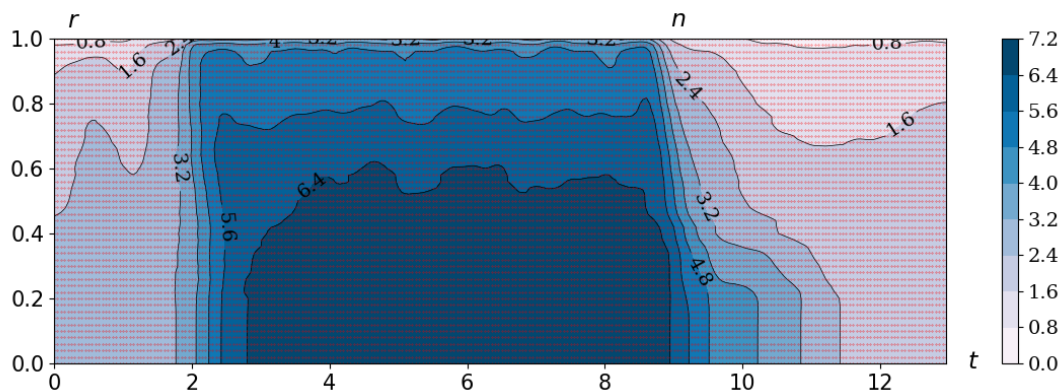
$$P_r(0.5) = 1 \quad (\text{можно заменить на условие } \int_0^1 P_r(r) dr = 1)$$

найти сбалансированное (в смысле баланса сложности задачи и близости к данным) решение. По-видимому, сложность задачи определяется кривизной  $P_t(t) u P_r(r)$ . Однако, для корректности в критерий выбора придется добавить и кривизну  $n(\rho, t) u T(\rho, t)$ . Итого 6 штрафов! Не мало!

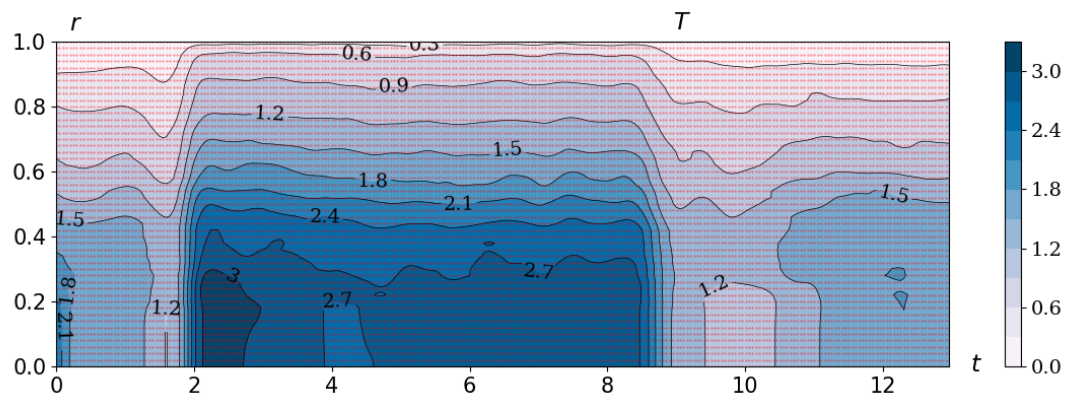
**84694**

**0a.** Просто сбалансированная идентификация функций  $n$  (CV% = 12.76) и  $T$  (CV% 18.39).

CV% - среднеквадратичная ошибка кроссвалидации в процентах от дисперсии данных. CV - выбрасываем срезы по времени.



Линии уровня плотности (Как в географических картах – чем темнее, тем выше. Легенда, связывающая цвет с плотностью, справа).



Линии уровня температуры.

**06.** Мультипликативное представление

$$t \in [t_{min}, t_{max}]; r \in [0, 1]$$

$$P(r, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{3}{2} [n(r, t) T(r, t)]$$

$$P(r, t) = P_t(t) * P_r(r)$$

(Пи-1)

$$P_r(0.5) = 1; \left( \text{можно заменить на условие } \int_0^1 P_r(r) dr = 1 \right)$$

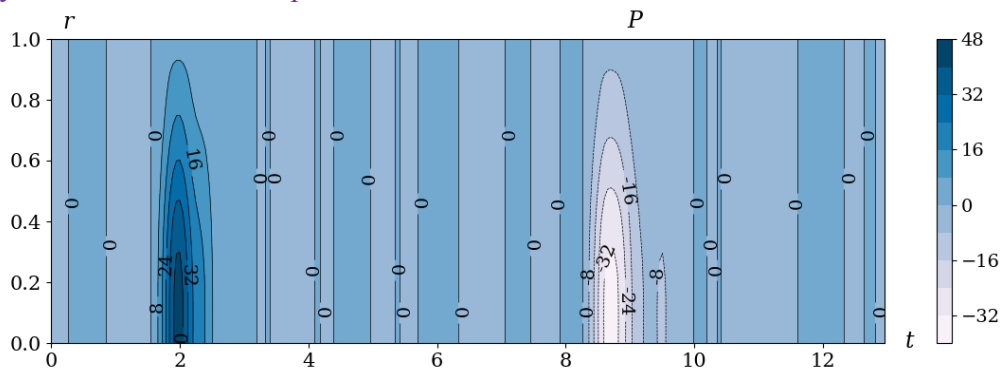
$$\frac{\partial}{\partial r} P_r(0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t(t_{min}) = 0; \frac{\partial}{\partial t} P_t(t_{max}) = 0$$

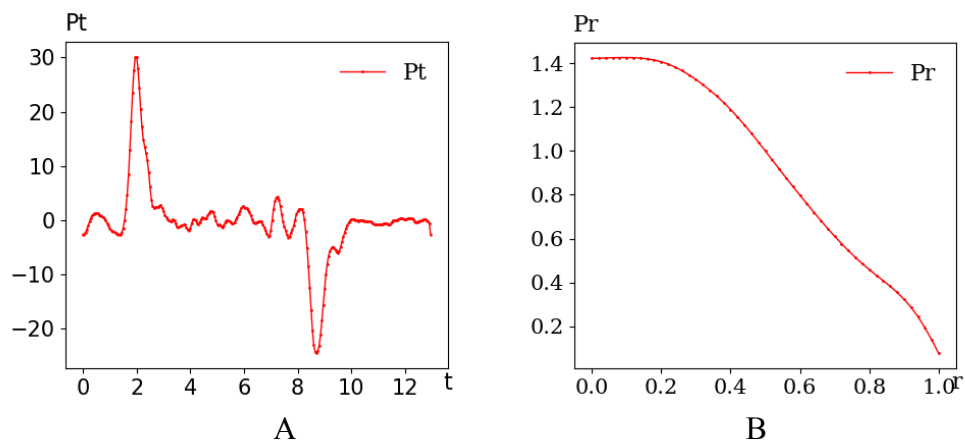
Температура и плотность изменились не сильно.

Ошибки n: CV% 13.25, T: CV% 18.45.

Заметим, что ошибки возросли несущественно, что является аргументом в пользу мультипликативного представления.



Линии уровня Пи



Временная (А) и пространственная (В) составляющие мультипликативного представления Пи.

#1. Давление:

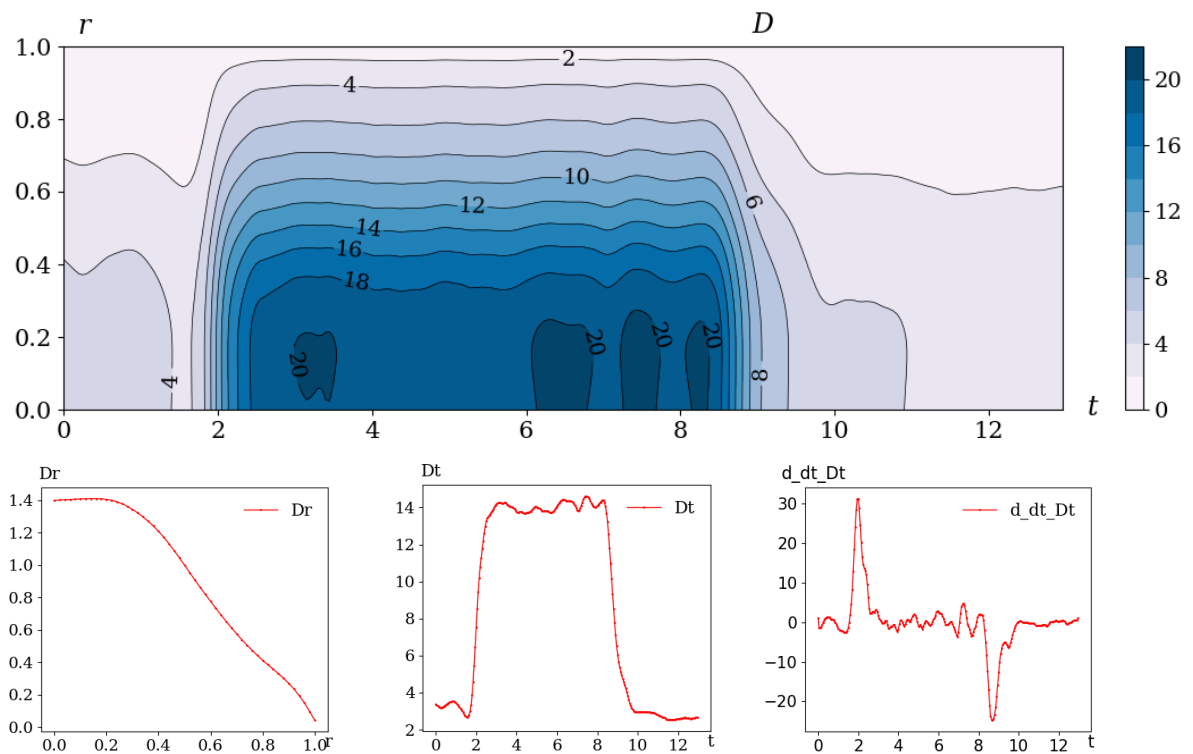
$$D(r,t) = [n(r,t)T(r,t)]$$

$$D(r,t) = \frac{3}{2} * D_t(t) * D_r(r)$$

$$D_r(0.5) = 1; \frac{\partial}{\partial r} D_r(0) = 0$$

$$d_i(t) = d/dt(D_t(t)) \quad (D-1)$$

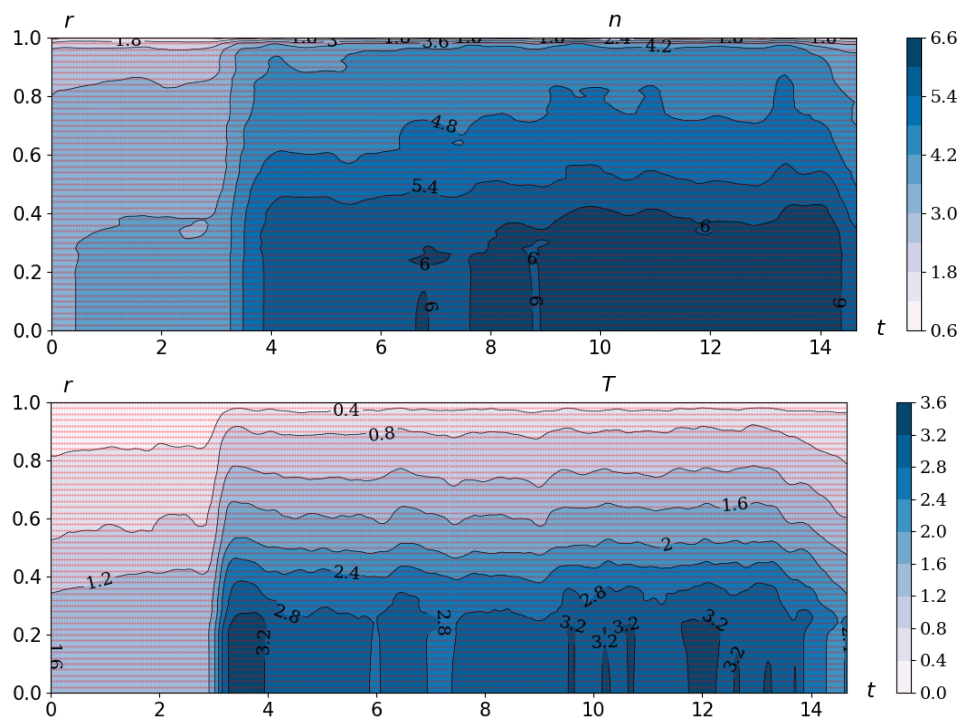
#1a.



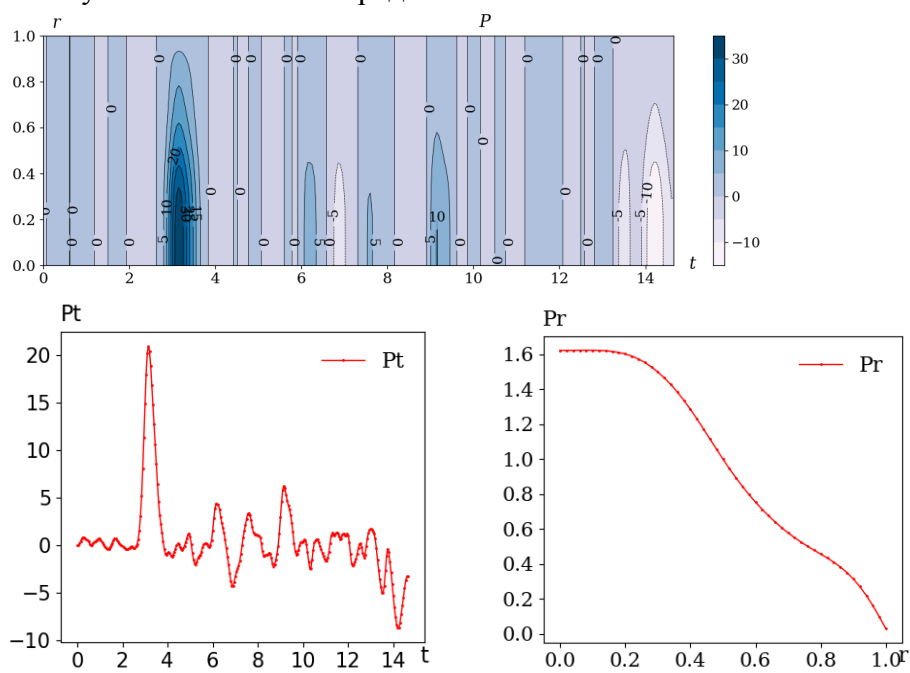
Производная (последний график) фактически совпадает с (полученной в предыдущей постановке (Пи-1) ) Pt.

97904

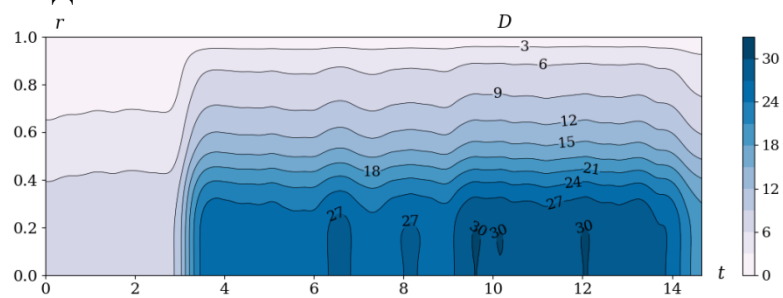
0a. Просто сбалансированная идентификация функций



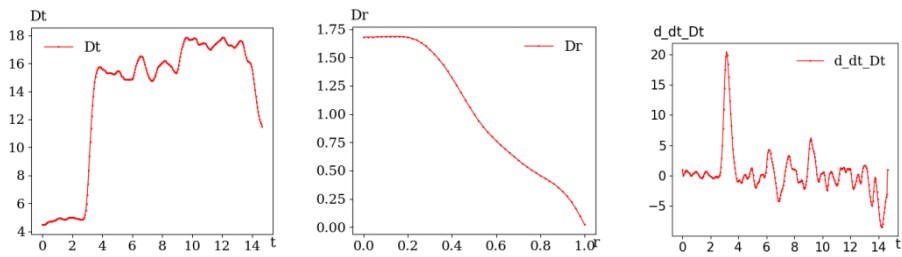
## 06. Мультипликативное представление $\Pi$



## #1. Давление:

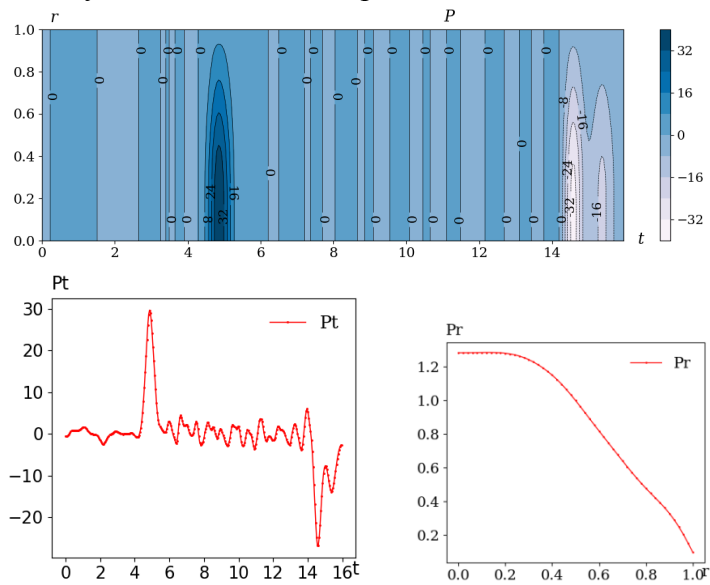




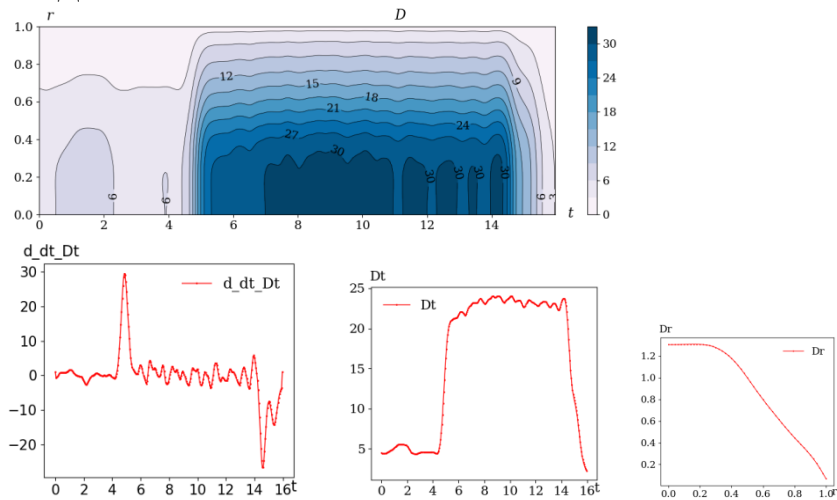


85174

## 06. Мультипликативное представление $\Pi$

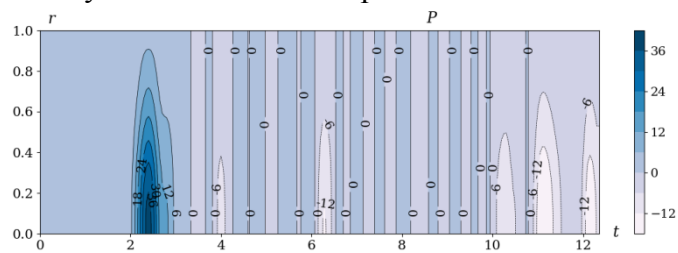


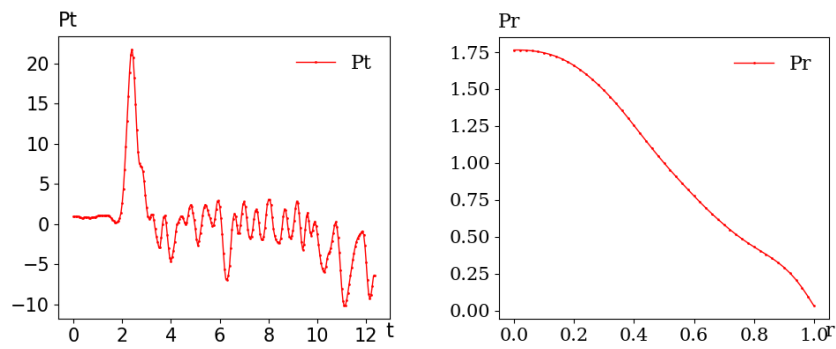
## #1. Давление:



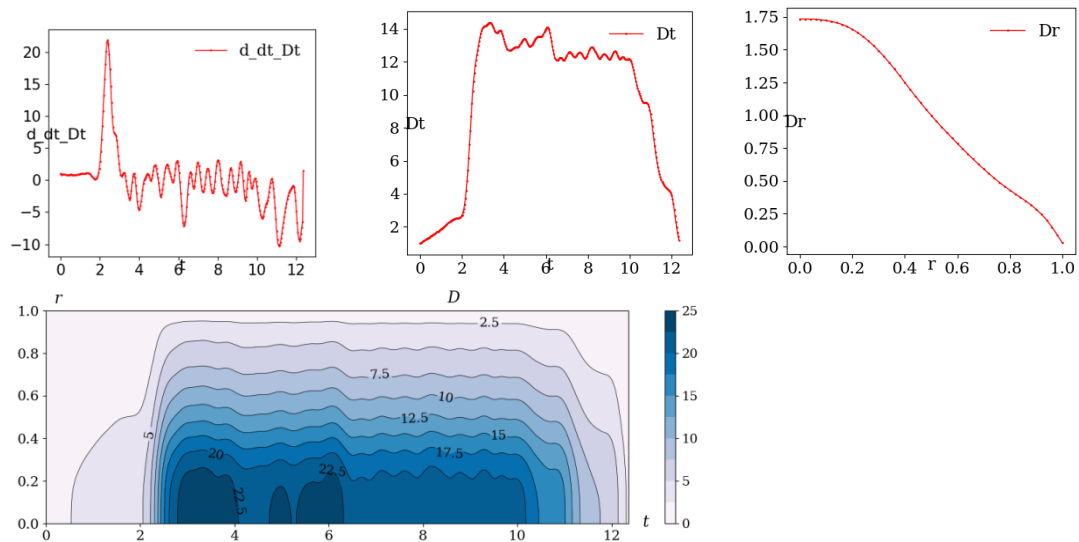
95338

## 06. Мультипликативное представление $\Pi$



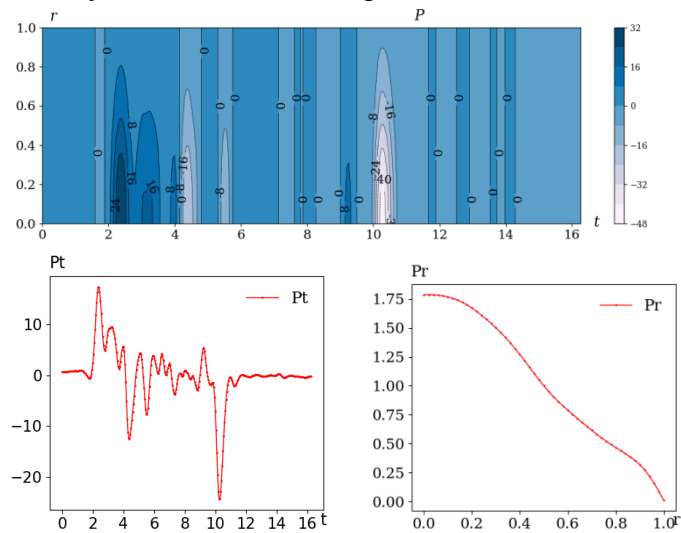


#1. Давление:

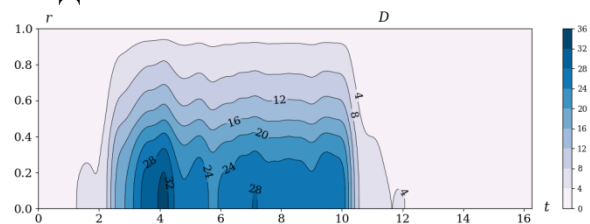


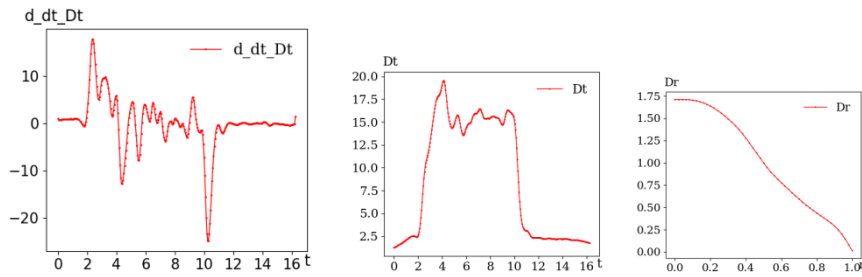
97096

06. Мультипликативное представление  $\Pi$



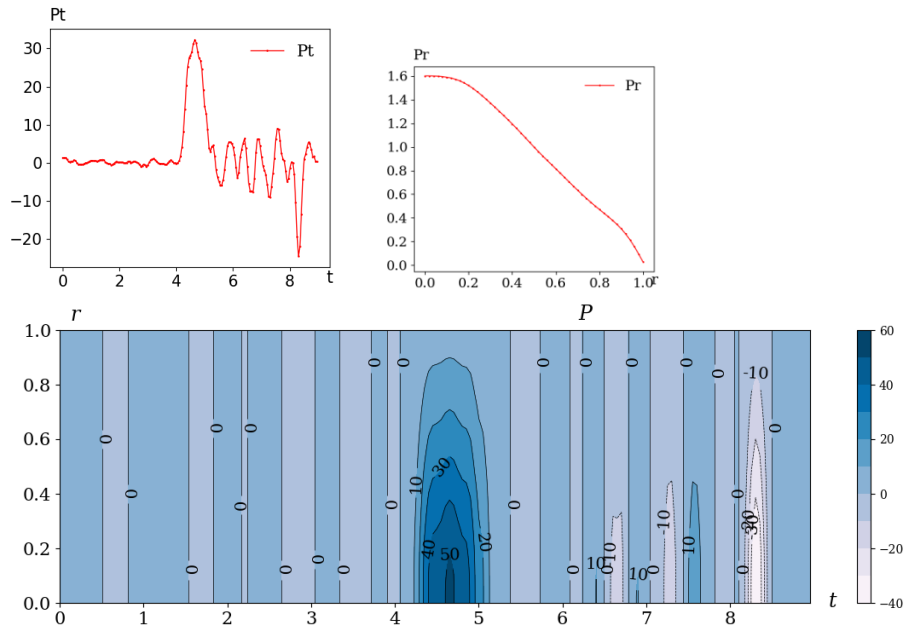
#1. Давление:



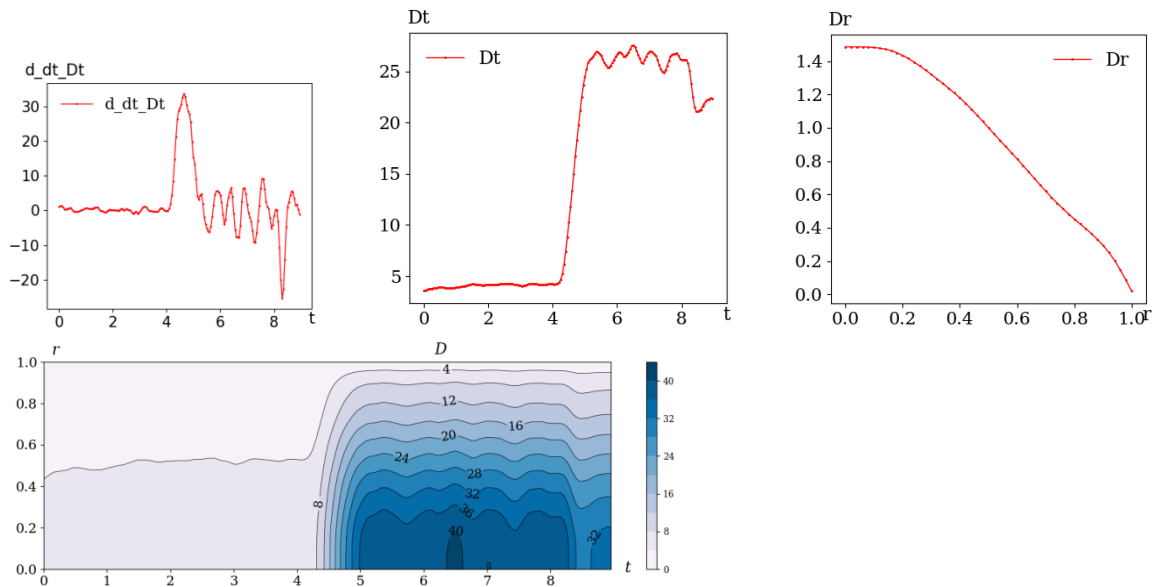


97571

## 06. Мультипликативное представление $\Pi$



## #1. Давление:



#####

## Литература

- [1] A. B. Kukushkin, P. A. Sdvizhenskii, A. V. Sokolov, and P. V. Minashin, "Recoveru of parameters of fast nonlocal heat transport in magnetic fusion plasmas: testing a model of

waves with high internal reflections,” preprint arXiv:1901.03789 [physics.plasm-ph], 2019.

- [2] А.В. Соколов, А.Б. Кукушкин, П.А. Сдвиженский, П.В. Минашин, А.И. Прун. Применение метода сбалансированной идентификации к восстановлению параметров быстрого нелокального переноса тепла в плазме магнитного термоядерного синтеза. *International Journal of Open Information Technologies (INJOIT)*, 2020, том 8, № 4, с. 31-44. <http://injoit.org/index.php/j1/article/view/890>
- [3] A.B. Kukushkin, P.A. Sdvizhenskii, J. Flanagan, D. Kos, V.S. Neverov, G. Szepesi, D.M.A. Taylor, and JET Contributors. Statistical analysis of similarity of plasma parameters profiles at quasi-stationary stage of discharge in JET tokamak (submitted to EUROFUSION pinboard).
- [4] A. V. Sokolov and V. V. Voloshinov, 2018 “Choice of mathematical model: balance between complexity and proximity to measurements,” *International Journal of Open Information Technologies*, vol. 6, no. 9, pp. 33–41, 2018 (in Russian).  
А. В. Соколов, В. В. Волошинов, “Выбор математической модели: баланс между сложностью и близостью к измерениям” *International Journal of Open Information Technologies*, т. 6, № 9, с. 33–41, 2018. Доступна: <http://injoit.org/index.php/j1/article/view/612>
- [5] A. Sokolov and V. Voloshinov, “Balanced Identification as an Intersection of Optimization and Distributed Computing.” arXiv preprint arXiv:1907.13444. 2019.