

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Departamento de Engenharia Elétrica  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
ELE00070 Tópicos Especiais em Controle e Automação I

**Controle de Robôs Móveis por Transformação Descontínua**

Prof. Walter Fetter Lages

9 de setembro de 2008

Sabe-se que transformações de coordenadas adequadas podem ser bastante úteis para o projeto de controladores para sistemas não-holonômicos. A literatura mostra que a transformação para coordenadas polares permite o controle de robôs móveis com acionamento diferencial. No entanto, não existe um método para obtenção de tais transformações. Neste capítulo, propõe-se transformações de variáveis adicionais que permitem a obtenção de leis de controle para todas as classes de robôs móveis com rodas. As leis de controle obtidas garantem a convergência assintótica do robô para uma determinada posição e orientação. São apresentados resultados de simulação para um robô representativo de cada classe e resultados experimentais para um robô da classe (2,0).

## 1 Transformação de Coordenadas

Nesta seção o modelo cinemático de postura será convertido para coordenadas polares. Conseqüentemente, a posição do robô não mais será representado em função das coordenadas cartesianas  $(x_c, y_c)$ , mas sim através das coordenadas polares  $(e, \phi)$ . Observando-se a Fig. 1 é facilmente verificado que

$$e = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} \quad (1)$$

$$\phi = \text{atan2}(y_c, x_c) \quad (2)$$

$$x_c = e \cos \phi \quad (3)$$

$$y_c = e \sin \phi \quad (4)$$

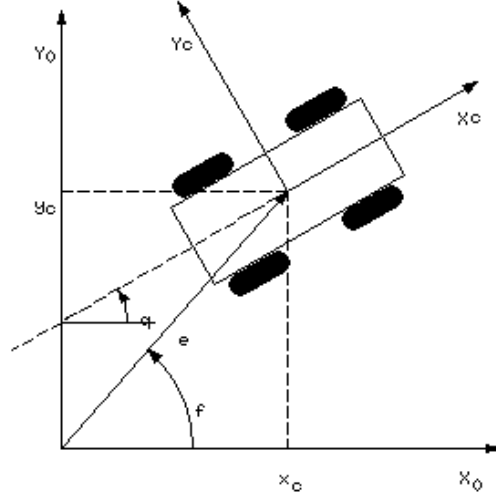


Figura 1: Definição das variáveis em coordenadas polares.

derivando-se (1) e (2) e substituindo-se (3) e (4) obtém-se

$$\dot{e} = \dot{x}_c \cos \phi + \dot{y}_c \sin \phi \quad (5)$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{e} (-\dot{x}_c \sin \phi + \dot{y}_c \cos \phi) \quad (6)$$

ou ainda, escrevendo-se na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \Gamma(e, \phi) \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \end{bmatrix} \quad (7)$$

onde  $\Gamma(e, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\frac{\sin \phi}{e} & \frac{\cos \phi}{e} \end{bmatrix}$ .

Definindo-se

$$z = \begin{bmatrix} e \\ \phi \\ \theta \\ \beta_c \end{bmatrix} \quad (8)$$

pode-se do modelo cinemático de postura e de (7) escrever o modelo em coordenadas polares

$$\dot{z} = D(z)u \quad (9)$$

$$\text{com } D(z) = \begin{cases} \Gamma(e, \phi)^0 R_c \Sigma & , N_c = 0 \\ \begin{bmatrix} \Gamma(e, \phi)^0 R_c \Sigma(\beta_c) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & , N_c \geq 0 \end{cases}$$

Através da escolha conveniente da origem e da orientação do sistema de coordenadas  $\{X_c, Y_c\}$  e definindo-se  $\alpha = \theta - \phi$ , a expressão (9) pode ser escrita explicitamente para cada uma das cinco classes de robôs, conforme a Tab. 1.

Tabela 1: Modelos em coordenadas polares.

Classe	Modelo
(3,0)	$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \frac{\sin \alpha}{e} & \frac{\cos \alpha}{e} & 0 \\ -\frac{\sin \alpha}{e} & -\frac{\cos \alpha}{e} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}$
(2,0)	$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 \\ \frac{\sin \alpha}{e} & 0 \\ -\frac{\sin \alpha}{e} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$
(2,1)	$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta_c) & 0 & 0 \\ \frac{\sin(\alpha + \beta_c)}{e} & 0 & 0 \\ -\frac{\sin(\alpha + \beta_c)}{e} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}$
(1,1)	$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \cos \alpha \sin \beta_c & 0 \\ \frac{d \sin \alpha \cos \beta_c}{e} & 0 \\ \cos \beta_c - \frac{d \sin \alpha \cos \beta_c}{e} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$
(1,2)	$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta}_{c1} \\ \dot{\beta}_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(\sin \beta_{c1} \cos(\alpha + \beta_{c2}) + \sin \beta_{c2} \cos(\alpha + \beta_{c1})) & 0 & 0 \\ L \frac{(\sin \beta_{c1} \cos(\alpha + \beta_{c2}) + \sin \beta_{c2} \cos(\alpha + \beta_{c1}))}{e} & 0 & 0 \\ \sin(\beta_{c1} - \beta_{c2}) - L \frac{(\sin \beta_{c1} \cos(\alpha + \beta_{c2}) + \sin \beta_{c2} \cos(\alpha + \beta_{c1}))}{e} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}$

## 2 Leis de Controle

As leis de controle propostas neste artigo baseiam-se em uma análise do tipo de Lyapunov e Barbalat [4]. Embora esta técnica possa ser aplicada para todas as classes de robôs móveis consideradas, são necessárias pequenas adaptações para

cada uma das classes [2, 3]. Sem perda de generalidade, é assumido que deseja-se a convergência de  $e$ ,  $\phi$  e  $\alpha$  para zero.

## 2.1 Classe (3,0)

Considere-se a seguinte candidata à função de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}\lambda e^2 + \frac{1}{2}(\alpha^2 + h\phi^2) \quad (10)$$

onde  $\lambda$  e  $h$  são constantes positivas.

Derivando-se (10) em relação ao tempo e substituindo-se  $\dot{e}$ ,  $\dot{\phi}$ , e  $\dot{\alpha}$  da Tab. 1 tem-se

$$\dot{V} = \lambda e \cos \alpha \eta_1 + h\phi \frac{\cos \alpha}{e} \eta_2 + \alpha \left( \eta_3 - \left( \lambda e \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \frac{\cos \alpha}{e} \right) \eta_2 - \left( \frac{\sin \alpha}{e} - h\phi \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \eta_1 \right)$$

que pode ser escrita na forma

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2$$

sendo

$$\dot{V}_1 = \lambda e \cos \alpha \eta_1 + h\phi \frac{\cos \alpha}{e} \eta_2$$

e

$$\dot{V}_2 = \alpha \left( \eta_3 - \left( \lambda e \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \frac{\cos \alpha}{e} \right) \eta_2 - \frac{\sin \alpha}{e\alpha} (\alpha - h\phi) \eta_1 \right)$$

Este paracionamento é feito de forma a deixar em  $\dot{V}_1$  os termos que não são identicamente nulos quando  $\alpha$  é nulo, ou seja, os termos que não são função explícita de  $\alpha$  ou  $\sin \alpha$  e em  $\dot{V}_2$  os demais termos.

Pode-se verificar que  $\dot{V}_1$  pode ser tornado não positivo fazendo-se

$$\eta_1 = -\gamma_1 e \cos \alpha$$

e

$$\eta_2 = -\gamma_2 \phi e \cos \alpha$$

onde  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são constantes positivas. Com isto tem-se que

$$\dot{V}_1 = -\lambda \gamma_1 e^2 \cos^2 \alpha - h \phi^2 \cos^2 \alpha \leq 0$$

e

$$\dot{V}_2 = \alpha \left( \eta_3 + \gamma_2 \phi \cos \alpha \left( \lambda e^2 \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \cos \alpha \right) + \gamma_1 \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha} (\alpha - h\phi) \right)$$

logo, fazendo-se

$$\eta_3 = -\gamma_3 \alpha - \gamma_2 \phi \cos \alpha \left( \gamma e^2 \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \cos \alpha \right) - \gamma_1 \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha} (\alpha - h\phi)$$

sendo  $\gamma_3$  uma constante positiva, tem-se

$$\dot{V}_2 = -\gamma_3 \alpha^2 \leq 0$$

e portanto,

$$\dot{V} = -\lambda \gamma_1 e^2 \cos^2 \alpha - h\lambda - 2\phi^2 \cos^2 \alpha - \gamma_3 \alpha^2 \leq 0 \quad (11)$$

que juntamente com o fato de que  $V$  é contínua e limitada inferiormente, garante a estabilidade do sistema em malha fechada. Por outro lado, considerando-se que  $\dot{V}$  é uniformemente contínua, pois  $\ddot{V}$  é limitada, tem-se pelo lema de Barbalat que  $\dot{V}$  tende a zero e portanto, pode-se verificar pela expressão (11) que  $e$ ,  $\phi$  e  $\alpha$  também tendem a zero.

## 2.2 Classe (2,0)

Agindo-se de forma semelhante ao caso anterior, a candidata a função de Lyapunov é paricionada em

$$\dot{V}_1 = \lambda e \cos \alpha \eta_1$$

e

$$\dot{V}_2 = \alpha \left( \eta_2 - \frac{\sin \alpha}{e\alpha} (\alpha - h\phi) \eta_1 \right)$$

de onde obtém-se

$$\eta_1 = -\gamma_1 e \cos \alpha \quad (12)$$

e

$$\eta_2 = -\gamma_2 \alpha - \gamma_1 \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha} (\alpha - h\phi) \quad (13)$$

resultando

$$\dot{V} = -\lambda\gamma_1 e^2 \cos^2 \alpha - \gamma_2 \alpha^2 \leq 0$$

Portanto, através dos mesmos argumentos utilizados no caso anterior, pode-se concluir que  $e$  e  $\alpha$  tendem a zero. A convergência de  $\phi$  para zero pode ser provada observando-se as equações do sistema em malha fechada:

$$\begin{cases} \dot{e} = -\gamma_1 e \cos^2 \alpha \\ \dot{\phi} = -\gamma_1 \sin \alpha \cos \alpha \\ \dot{\alpha} = -\gamma_2 \alpha + \gamma_1 h \phi \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha} \end{cases} \quad (14)$$

Considerando-se a convergência para zero de  $e$  e  $\alpha$ , conclui-se de (14) que  $\dot{e}$  e  $\dot{\phi}$  também tendem a zero. A convergência de  $\phi$  para zero, por sua vez, faz com que  $\dot{\alpha}$  convirja para algum valor constante dado por  $\gamma_1 h \phi^*$ . Por outro lado, a continuidade uniforme de  $\dot{\alpha}$  juntamente com a convergência para zero de  $\alpha$ , garante, pelo lema de Barbalat, que  $\dot{\alpha}$  tende a zero. Portanto,  $\phi^*$  tem, necessariamente, que ser zero.

As leis de controle para as demais classes, são obtidas a partir das leis de controle das classes (3,0) e (2,0) através da utilização do seguinte teorema:

**Teorema 1 (Equivalência de Modelos Cinemáticos)** *Considere as cinco classes de modelos cinemáticos de robôs móveis. Seja um modelo pertencente à uma classe com grau de manobrabilidade igual a  $\delta_M^*$ .*

*É possível obter-se um modelo equivalente pertencente a qualquer outra classe com o mesmo grau de manobrabilidade  $\delta_M^*$ .*

**Prova 1** *Modelos pertencentes às classes (3,0) e (2,1) podem ser convertidos entre si utilizando-se as transformações de variáveis (16)-(18).*

*Modelos pertencentes às classes (3,0) e (1,2) podem ser convertidos entre si utilizando-se as transformações de variáveis (22)-(24). Portanto, em duas etapas pode-se fazer a transformação entre as classes (2,1) e (1,2).*

*Modelos pertencentes às classes (2,0) e (1,1) podem ser convertidos entre si utilizando-se as transformações de variáveis (20)-(21).*

### 2.3 Classe (2,1)

Por conveniência, para esta classe de robôs, será considerado o modelo na forma original, ou seja, a ordem do modelo não é aumentada definindo-se  $\zeta = \dot{\beta}_c$ . Considera-se, portanto,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  e  $\beta_c$  como sendo as entradas de controle. Com isto, o modelo torna-se

$$\begin{cases} \dot{e} = \cos(\alpha + \beta_c)\eta_1 \\ \dot{\phi} = \frac{\sin(\alpha + \beta_c)}{e}\eta_1 \\ \dot{\alpha} = -\frac{\sin(\alpha + \beta_c)}{e}\eta_1 + \eta_2 \end{cases} \quad (15)$$

Definindo-se

$$u_1 = \eta_1 \cos \beta_c \quad (16)$$

$$u_2 = \eta_1 \sin \beta_c \quad (17)$$

$$u_3 = \eta_2 \quad (18)$$

O modelo (15) assume a forma

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \frac{\sin \alpha}{e} & \frac{\cos \alpha}{e} & 0 \\ -\frac{\sin \alpha}{e} & -\frac{\cos \alpha}{e} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

que é exatamente a mesma forma obtida para o modelo de um robô pertencente a classe (3,0). Logo, através do mesmo procedimento utilizado na seção 2.1, obtém-se

$$u_1 = -\gamma_1 e \cos \alpha$$

$$u_2 = -\gamma_2 \phi e \cos \alpha$$

$$u_3 = -\gamma_3 \alpha - \gamma_2 \phi \cos \alpha \left( \gamma e^2 \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \cos \alpha \right) - \gamma_1 \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha} (\alpha - h\phi)$$

Obviamente, as entradas de controle  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  e  $\beta_c$  podem ser computadas através das seguintes expressões:

$$\eta_1 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

$$\beta_c = \text{atan2}(u_2, u_1)$$

$$\eta_2 = u_3$$

## 2.4 Classe (1,1)

Para esta classe de robôs móveis também é conveniente considerar o modelo escrito na forma original. Após a transformação para coordenadas polares, tem-se explicitamente

$$\begin{cases} \dot{e} = d \cos \alpha \sin \beta_c \eta \\ \dot{\phi} = \frac{d \sin \alpha \cos \beta_c}{e} \eta \\ \dot{\alpha} = \cos \beta_c - \frac{d \sin \alpha \cos \beta_c}{e} \eta \end{cases} \quad (19)$$

sendo  $\eta$  e  $\beta_c$  as entradas do sistema.

Definindo-se

$$u_1 = d\eta \sin \beta_c \quad (20)$$

$$u_2 = \eta \cos \beta_c \quad (21)$$

o modelo (19) assume a forma

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 \\ \frac{\sin \alpha}{e} & 0 \\ -\frac{\sin \alpha}{e} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

que é a mesma forma do modelo para a classe (2,0). Logo, obtém-se

$$u_1 = -\gamma_1 e \cos \alpha$$

e

$$u_2 = -\gamma_2 \alpha - \gamma_1 \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha} (\alpha - h\phi)$$

Com as entradas  $\eta$  e  $\beta_c$  obtidas a partir de  $u_1$  e  $u_2$  através das expressões

$$\eta = \sqrt{\left(\frac{u_1}{d}\right)^2 + u_2^2}$$

$$\beta_c = \text{atan2}\left(\frac{u_1}{d}, u_2\right)$$



## 2.5 Classe (1,2)

A semelhança do procedimento adotado para as classes (2,1) e (1,1), aqui também será utilizado o modelo na forma original. Após a transformação para coordenadas polares resulta

$$\begin{cases} \dot{e} = L (\sin \beta_{c1} \cos(\alpha + \beta_{c2}) + \sin \beta_{c2} \cos(\alpha + \beta_{c1})) \eta \\ \dot{\phi} = L \frac{(\sin \beta_{c1} \cos(\alpha + \beta_{c2}) + \sin \beta_{c2} \cos(\alpha + \beta_{c1}))}{e} \eta \\ \dot{\alpha} = \left( \sin(\beta_{c1} - \beta_{c2}) - L \frac{(\sin \beta_{c1} \cos(\alpha + \beta_{c2}) + \sin \beta_{c2} \cos(\alpha + \beta_{c1}))}{e} \right) \eta \end{cases}$$

Neste caso, as entradas do sistema são  $\eta$  e  $\beta_{c1}$  e  $\beta_{c2}$ . Definindo-se novas variáveis de entrada

$$u_1 = \eta L \sin(\beta_{c1} + \beta_{c2}) \quad (22)$$

$$u_2 = 2\eta L \sin \beta_{c1} \sin \beta_{c2} \quad (23)$$

$$u_3 = \eta \sin(\beta_{c1} - \beta_{c2}) \quad (24)$$

tem-se que o modelo do sistema pode ser escrito na forma

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \frac{\sin \alpha}{e} & \frac{\cos \alpha}{e} & 0 \\ -\frac{\sin \alpha}{e} & -\frac{\cos \alpha}{e} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

que é igual ao modelo para a classe (3,0). Portanto, através de uma análise semelhante chega-se a

$$u_1 = -\gamma_1 e \cos \alpha$$

$$u_2 = -\gamma_2 \phi e \cos \alpha$$

$$u_3 = -\gamma_3 \alpha - \gamma_2 \phi \cos \alpha \left( \gamma e^2 \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \cos \alpha \right) - \gamma_1 \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha} (\alpha - h\phi)$$

Para obter-se  $\eta$  e  $\beta_{c1}$  e  $\beta_{c2}$  a partir de  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  procede-se da seguinte maneira: (22) e (23) podem ser reescritas na forma

$$\frac{u_1}{L} = \eta \sin(\beta_{c1} + \beta_{c2}) \quad (25)$$

$$\frac{u_2}{L} = 2\eta \sin \beta_{c1} \sin \beta_{c2} \quad (26)$$

dividindo-se (26) pela diferença e pela soma de (25) e (24) obtém-se

$$\beta_{c1} = \text{atan2} \left( \frac{u_2}{L}, \frac{u_1}{L} - u_3 \right) \quad (27)$$

$$\beta_{c2} = \text{atan2} \left( \frac{u_2}{L}, \frac{u_1}{L} + u_3 \right) \quad (28)$$

Elevando ao quadrado (25), (26) e (24) e somando as três expressões resulta

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{\frac{u_1^2}{L^2} + \frac{u_2^2}{L^2} + u_3^2}{2 (\sin^2 \beta_{c1} + \sin^2 \beta_{c2})}} \quad (29)$$

que pode ser calculado após  $\beta_{c1}$  e  $\beta_{c2}$  serem obtidos através de (27)-(28). Convém ressaltar que esta expressão não é válida quando  $\beta_{c1} = n_1\pi$  e simultaneamente  $\beta_{c2} = n_2\pi$ ,  $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$ . No entanto, para estas condições, o próprio modelo em coordenadas polares não é válido, pois  $\delta_m = \dim \aleph(C_1^*(\beta_c))$  será igual a 2 e não mais igual a 1 como é necessário para que o robô pertença a classe (1,2). Ou seja, nesta situação, o robô degenera para um robô pertencente à classe (2,0). Fisicamente, esta situação equivalente às duas rodas orientáveis estarem em paralelo. Nesta situação o robô só poderá ser controlado se as velocidades das rodas puderem ser comandadas independentemente, tal como ocorre na classe (2,0). O sinal correto de  $\eta$  pode ser determinado de (22) e (24) observando-se que  $\sin(\beta_{c1} + \beta_{c2})$  e  $\sin(\beta_{c1} - \beta_{c2})$  serão simultaneamente nulos apenas se  $\beta_{c1} = n_1\pi$  e  $\beta_{c2} = n_2\pi$ . Além disso, tem-se que  $\text{sgn}(a/b) = \text{sgn}(ab)$ . Portanto, pode-se escrever

$$\text{sgn}(\eta) = \begin{cases} \text{sgn}(u_1 L \sin(\beta_{c1} + \beta_{c2})) & , |u_1 L \sin(\beta_{c1} + \beta_{c2})| > |u_3 \sin(\beta_{c1} - \beta_{c2})| \\ \text{sgn}(u_3 \sin(\beta_{c1} - \beta_{c2})) & , \text{caso contrário} \end{cases} \quad (30)$$

## 2.6 Resultados de Simulação

As leis de controle obtidas na seção anterior, foram simuladas para um robô típico pertencente a cada classe discutida. As condições iniciais para todas as simulações foram  $x_c(0) = 4m$ ,  $y_c(0) = 4m$  e  $\theta(0) = \pi/2$  e deseja-se estabilizar o robô na origem. As trajetórias espaciais obtidas podem ser vistas na Fig. 2. Como seria de se esperar, observa-se que as trajetórias convergem de modo relativamente suave para a origem. As curvas de orientação são mostradas na Fig. 3. Para um robô da

classe (1,2), a convergência da orientação pode ser verificada nas Figs. 4-6, onde são mostradas as curvas de  $x_c(t)$ ,  $y_c(t)$  e  $\theta(t)$ . Para as demais classes são obtidas curvas semelhantes.

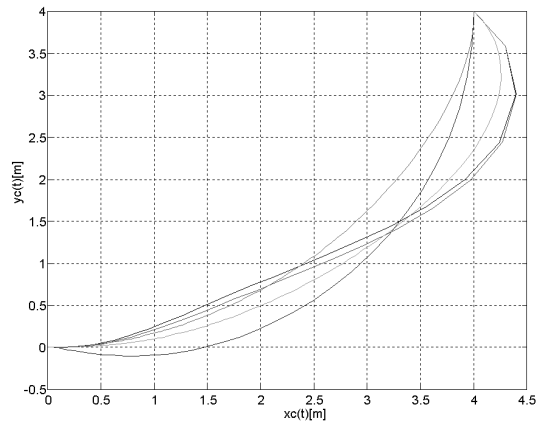


Figura 2: Trajetória espacial para um robô de cada classe.

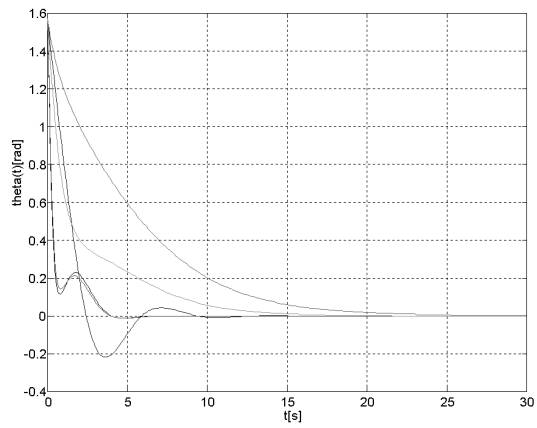


Figura 3: Resposta de  $\theta(t)$  para um robô de cada classe.

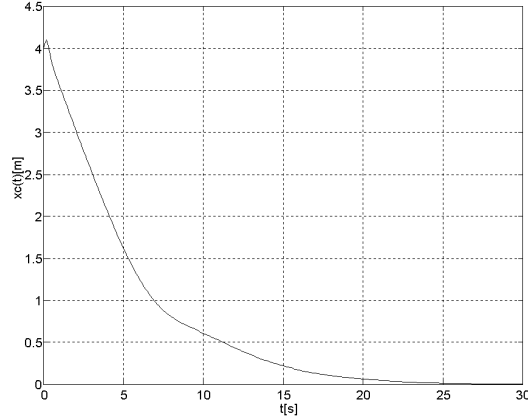


Figura 4: Resposta de  $x_c(t)$  para robô classe (1,2).

### 3 Backstepping Utilizando PID

#### 3.1 Motivação

Neste texto, até aqui, foi considerado apenas o modelo cinemático dos robôs, e que as variáveis de entrada são homogêneas a velocidades ou posição. Na realidade, fisicamente, as entradas do robô são os torques aplicados para rotação e orientação das rodas. Estes torques poderiam ser obtidos derivando-se em relação ao tempo as leis de controle obtidas aqui. Porém, esta abordagem leva a problemas de robustez.

Isto no entanto, não significa que as leis de controle obtidas aqui não podem ser utilizadas na prática. Em geral, para robôs pequenos, basta que existam malhas de controle internas que garantam que as velocidades ou posições comandadas sejam efetivamente aplicadas nas rodas. Isto pode ser feito utilizando-se controladores PID convencionais. Esta técnica é denominada backstepping [1]. Na Fig. 7 é mostrado um diagrama de blocos do controlador proposto

#### 3.2 Resultados de Tempo Real

A lei de controle (12) e (13) foi implementada em tempo real no robô móvel Twil. Este robô é atuado diferencialmente, portanto pertencendo a classe (2,0) e possui rodas com 15cm de diâmetro e uma distância entre rodas (*wheelbase*) de 28.5cm.

As velocidades desejadas nas rodas do robô pode ser computadas de  $\eta_1$  e  $\eta_2$ , obtendo-se

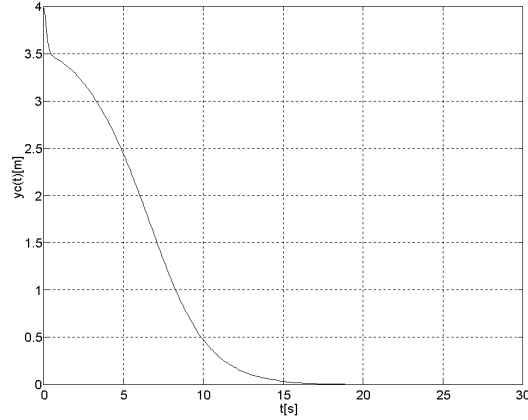


Figura 5: Resposta de  $y_c(t)$  para robô classe (1,2).

$$\omega_r = \frac{\eta_1 + \eta_2 b/2}{r}$$

$$\omega_l = \frac{\eta_1 - \eta_2 b/2}{r}$$

onde  $\omega_r$  e  $\omega_l$  são as velocidades angulares das rodas direita e esquerda, respectivamente,  $b$  é a distância entre as rodas e  $r$  é o raio das rodas.

Experimentalmente, determinou-se que a função de transferência entre a velocidade de cada roda e a tensão aplicada no motor correspondente é dada por

$$G(s) = \frac{1.7779(s + 5.845)}{s^2 + 10.3078s + 42.4597}$$

Para controlar este sistema, foi utilizado um controlador PID com  $K_p = 4.154$ ,  $K_i = 1.1943$  e  $K_d = 2.260$ , garantido que as velocidades nas rodas são as desejadas.

A trajetória espacial obtida em tempo real e em simulação para estabilizar o robô no ponto  $x_c = 0$ ,  $y_c = 0$  e  $\theta = 0$ , a partir da condição inicial  $x_c(0) = 0m$ ,  $y_c(0) = 4m$  e  $\theta(0) = 0$ , é mostrada na Fig. 8. A Fig. 9 mostra a orientação em função do tempo. Convém notar, que como o robô não pode mover-se lateralmente, este movimento é considerado difícil. É impossível perceber nos gráficos, mas o ponto final corresponde a  $x_c(200) = 0.00112707m$ ,  $y_c(200) = -1.5947 \times 10^{-06}m$  e  $\theta(200) = -0.000605519rad$  (dados de tempo real). Portanto, o erro final é de aproximadamente  $1.13mm$  e  $0.035^\circ$ .

Os parâmetros  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $h$  foram selecionados por simulação. Observa-se que  $\gamma_1$ , e  $\gamma_2$  estão relacionados principalmente com a taxa de convergência, enquanto  $h$

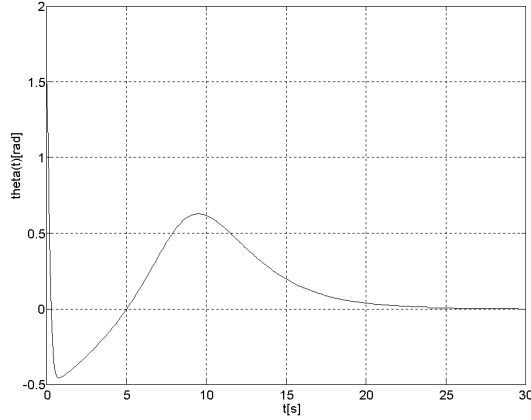


Figura 6: Resposta de  $\theta(t)$  para robô classe (1,2).

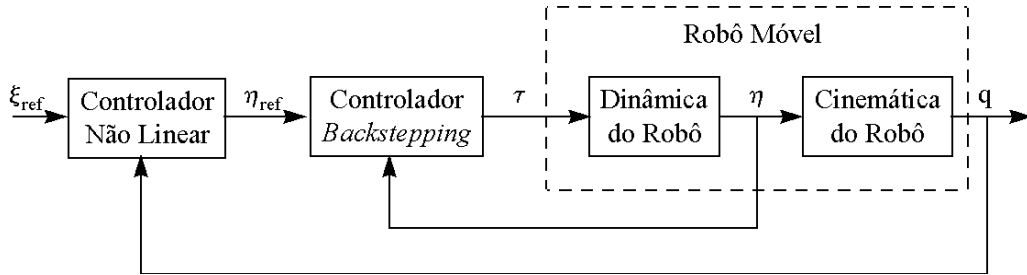


Figura 7: Controlador com *backstepping*.

possui mais influência na forma da trajetória espacial. Para o robô em questão, os valores  $\gamma_1 = 0.05$ ,  $\gamma_2 = 0.1$  e  $h = 1.35$  permitem uma boa taxa de convergência sem que haja saturação dos atuadores. As Figs. 10 e 11 mostram as entradas de controle. Esta estratégia de controle mostrou-se relativamente robusta em relação à saturação dos atuadores, embora obviamente, nesta situação haja uma grande discrepância entre a trajetória real e a trajetória simulada. Ainda assim, a trajetória real converge para o ponto  $x_c = 0$ ,  $y_c = 0$  e  $\theta = 0$ .

## 4 *Backstepping* Utilizando Controle Linearizante

Outra solução para implementar o backstepping, é a utilização de um controlador linearizante, mas aplica-lo aqui apenas para controlar a dinâmica do robô, ou mais especificamente, a dinâmica entre as velocidades e os torques aplicados nos atuadores, conforme o diagrama de blocos da Fig. 12. A utilização desta estratégia de backstepping permite que o modelo dinâmico do robô seja considerado explí-

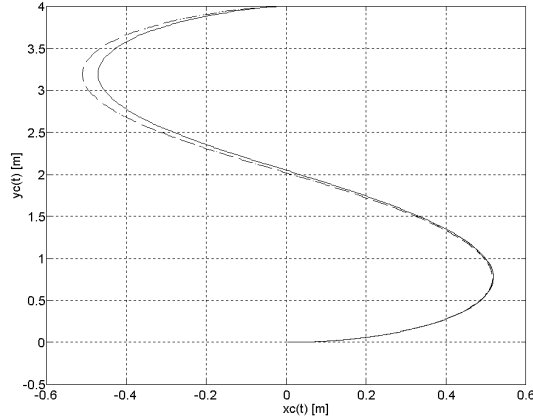


Figura 8: Trajetória espacial em tempo real (contínua) e simulada (tracejada) para um robô classe (2,0).

citamente, ao contrário da estratégia anterior. Obviamente, aqui problemas com relação ao conhecimento dos parâmetros do modelo dinâmico.

A utilização de um controlador linear utilizando modelo de referência facilita o desenvolvimento de versões adaptativas do controlador.

## 5 Conclusão

A técnicas apresentadas neste capítulo permitem que se obtenha leis de controle que garantam a convergência para um ponto e não apresentem oscilações excessivas, como geralmente ocorre com leis de controle variantes no tempo. Além disso, as leis de controle obtidas são contínuas e suaves.

Mostrou-se que os modelos de robôs pertencentes a uma determinada classe podem ser transformados para modelos equivalentes pertencentes a qualquer outra classe com o mesmo grau de manobrabilidade.

É importante perceber, que as trajetórias apresentadas nas Figs. 2 e 3 não se prestam para que se tire conclusões acerca de qual classe de robô é mais manobrável ou apresenta melhor desempenho. Para um mesmo robô, com a mesma condição inicial, a trajetória obtida pode ser bastante diferente da apresentada aqui, dependendo dos parâmetros de projeto utilizados no cálculo da lei de controle.

A estratégia de *backstepping* utilizando controle linearizante pode ser utilizada para o desenvolvimento de uma versão de controlador adaptativo.

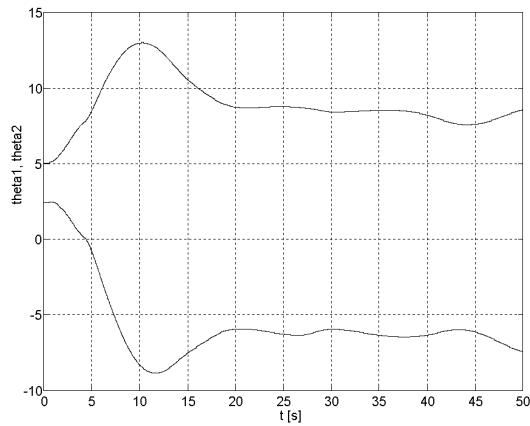


Figura 9: Resposta de  $\theta(t)$  em tempo real (contínua) e simulada (tracejada) para robô classe (2,0).

## Referências

- [1] R. Fierro and F. L. Lewis. Control of a nonholonomic mobile robot using neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 9(4):589–600, 1998.
- [2] W. F. Lages and E. M. Hemerly. Controle em coordenadas polares de robôs móveis com rodas. In *Anais do XII Congresso Brasileiro de Automática*, Uberlândia, MG, Brazil, 1998. Sociedade Brasileira de Automática.
- [3] W. F. Lages and E. M. Hemerly. Smooth time-invariant control of wheeled mobile robots. In *Proceedings of The XIII International Conference on Systems Science*, Wrocław, Poland, 1998. Technical University of Wrocław.
- [4] V. M. Popov. *Hyperstability of Control Systems*, volume 204 of *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.



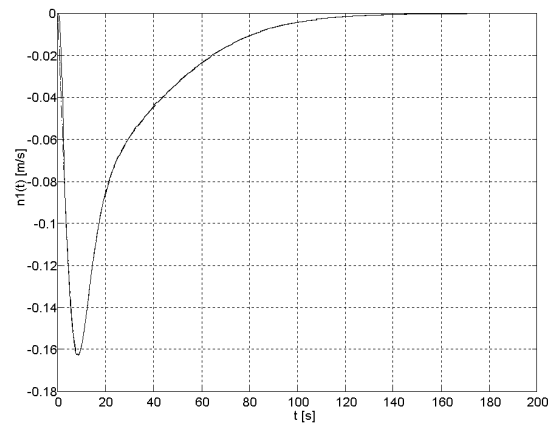


Figura 10: Resposta de  $\eta_1(t)$  em tempo real (contínua) e simulada (tracejada) para robô classe (2,0).

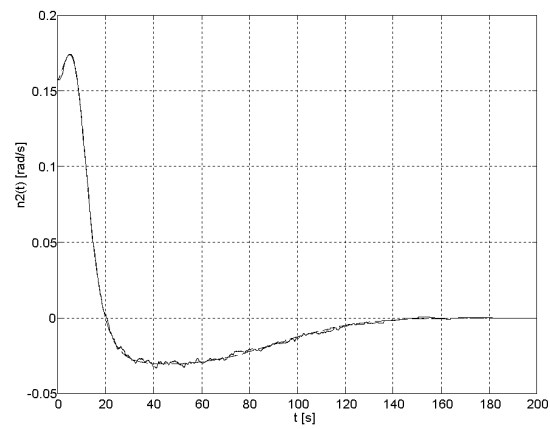


Figura 11: Resposta de  $\eta_2(t)$  em tempo real (contínua) e simulada (tracejada) para robô classe (2,0).

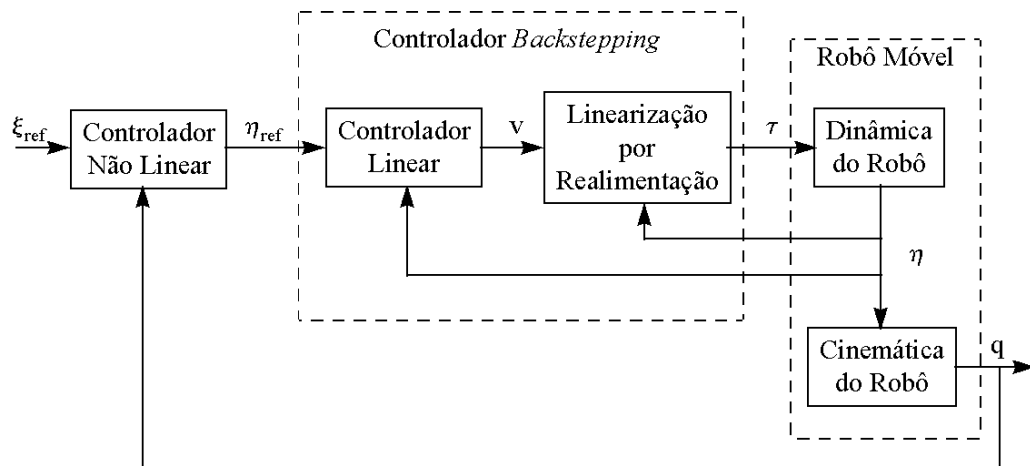


Figura 12: *Backstepping* com controlador linearizante.