

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Departamento de Sistemas Elétricos de Automação e Energia  
ENG10026 Robótica A

## Descrições e Transformações Espaciais

Prof. Walter Fetter Lages

6 de agosto de 2016

A modelagem de robôs manipuladores é feita através da descrição dos seus elos e das relações entre eles. Para sistematizar a descrição estas relações, são utilizadas ferramentas de Álgebra Linear e Geometria Analítica.

# 1 Descrição de Posição e Orientação

## 1.1 Descrição de Posição

A figura 1 mostra um ponto  $P$ .



Figura 1: Ponto  $P$ .

Para que se possa localizar este ponto no espaço é necessário considerar a existência de um sistema de coordenadas  $\{A\}$ , como mostra figura 2, com relação ao qual o ponto  $P$  será localizado. Este sistema de coordenadas é formado por três versores<sup>1</sup> ortonormais<sup>2</sup> indicadores das três dimensões do espaço físico.

Deseja-se descrever o ponto  $P$  em termos do sistema de coordenadas  $\{A\}$ . Descrever uma entidade em termos de outra, significa obter a melhor aproximação de uma em função da outra. No presente caso seria obter a melhor aproximação de  $P$  em termos dos versores do sistema  $\{A\}$ . No entanto, esta aproximação envolve entidades de tipos diferentes, ou seja, pontos e vetores. Parece razoável supor que seria mais fácil obter tal aproximação se as entidades envolvidas fossem do mesmo tipo. Observando a figura 3 verifica-se que a posição do ponto  $P$  em relação à origem do sistema  $\{A\}$  é igual ao comprimento do vetor cuja base está na origem do sistema  $\{A\}$  e a ponta está no ponto  $P$ . Por conveniência, este vetor é denominado  ${}^AP$ , pois representa o ponto  $P$  em relação ao sistema  $\{A\}$ .

---

<sup>1</sup>Versores são vetores indicadores de direção.

<sup>2</sup>Vetores ortonormais são vetores ortogonais entre si e com módulo unitário.

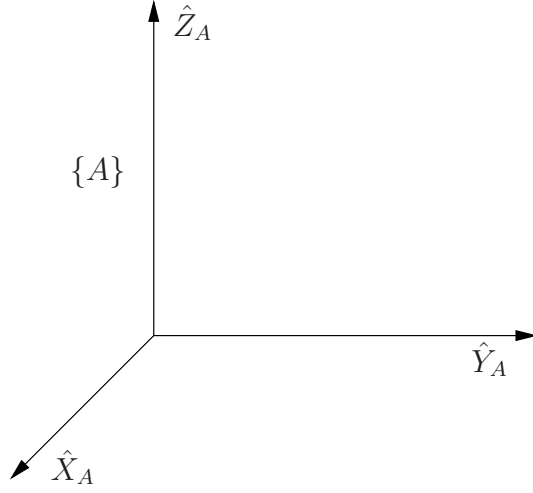


Figura 2: Sistema de coordenadas.

Tem-se então, que a descrição do ponto  $P$  em relação ao sistema  $\{A\}$  é feita através da descrição do vetor  ${}^AP$  no sistema  $\{A\}$ . Esta descrição é obtida aproximando-se o vetor  ${}^AP$  nas direções  $\hat{X}_A$ ,  $\hat{Y}_A$  e  $\hat{Z}_A$ .

Seja  $Y$  uma aproximação qualquer de  ${}^AP$  na direção  $\hat{Y}_A$ , como mostra a figura 4. Tem-se então:

$${}^AP = Y + E_Y \Rightarrow Y = {}^AP - E_Y \quad (1)$$

onde  $E_Y$  é o erro cometido na aproximação.

Obviamente, a melhor aproximação  $P_Y$ , também denominada projeção de  ${}^AP$  sobre  $\hat{Y}_A$ , é tal que o módulo de  $E_Y$  é minimizado, isto é, quando  $E_Y$  é ortogonal a  $\hat{Y}_A$ . Considerando-se esta situação e tomando-se o produto escalar de (1) por  $\hat{Y}_A$ , tem-se que

$$p_Y \triangleq P_Y \hat{Y}_A = {}^AP \cdot \hat{Y}_A - E_Y \cdot \hat{Y}_A = {}^AP \cdot \hat{Y}_A$$

onde  $p_Y$  é o módulo de  $P_Y$ .

De forma semelhante, tem-se que os módulos das aproximações sobre  $\hat{X}_A$  e  $\hat{Y}_A$  são, respectivamente:

$$\begin{aligned} p_x &= {}^AP \cdot \hat{X}_A \\ p_z &= {}^AP \cdot \hat{Z}_A \end{aligned}$$

como mostra a figura 5.

Como  $\hat{X}_A$ ,  $\hat{Y}_A$  e  $\hat{Z}_A$  formam uma base no  $\mathbb{R}^3$ , tem-se que o conjunto das aproximações de  ${}^AP$  nestas três direções é exatamente igual à  ${}^AP$ , ou seja, o erro

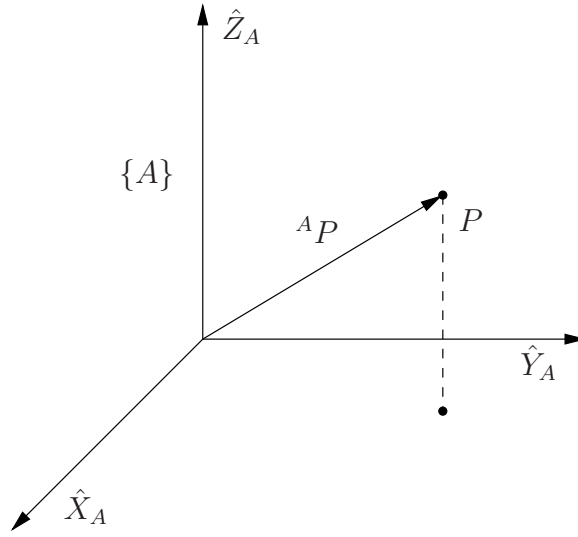


Figura 3: Vetor  ${}^A P$ , associado ao ponto  $P$ .

cometido na aproximação é zero. Assim, tem-se que o ponto  $P$  pode ser descrito no sistema de coordenadas  $\{A\}$  por

$${}^A P = \begin{bmatrix} p_X \\ p_Y \\ p_Z \end{bmatrix}$$

## 1.2 Descrição de Orientação

Ponto não tem orientação, pois não tem dimensão, mas frequentemente é interessante descrever a orientação de objetos, planos ou mesmo segmentos de reta. Para tanto, será utilizado o artifício de associar ao objeto de interesse um sistema de coordenadas, de forma que a orientação possa ser descrita através da descrição dos versores deste sistema de coordenadas, como mostra a figura 6.

Assim, a descrição de orientação pode ser feita descrevendo-se os versores de  $\{B\}$  em relação a  $\{A\}$ . Ou seja, a descrição da orientação de  $\{B\}$  em relação a  $\{A\}$  é dada por  ${}^A \hat{X}_B$ ,  ${}^A \hat{Y}_B$  e  ${}^A \hat{Z}_B$ , que para concisão de notação podem ser agrupados em uma matriz:

$${}^A R_B = [ {}^A \hat{X}_B \mid {}^A \hat{Y}_B \mid {}^A \hat{Z}_B ]$$

onde  ${}^A R_B$  é denominada matriz de rotação de  $\{B\}$  em relação à  $\{A\}$ .

Por outro lado, as projeções de  $\hat{X}_B$ ,  $\hat{Y}_B$  e  $\hat{Z}_B$  sobre o sistema de coordenadas  $\{A\}$  são dadas por:

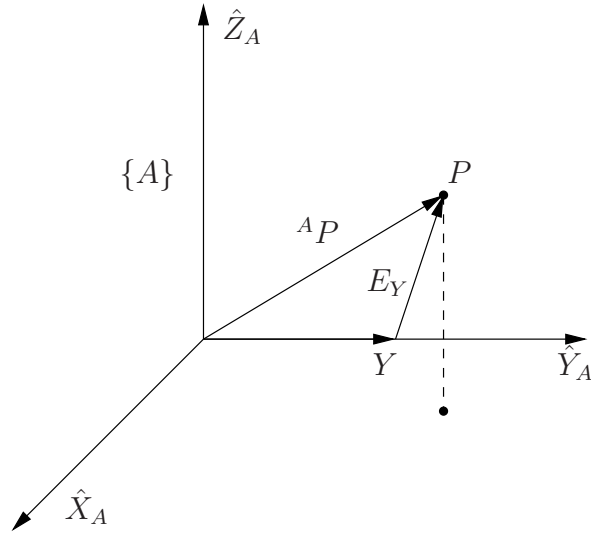


Figura 4: Aproximação de  ${}^A P$  na direção  $\hat{Y}_A$ .

$${}^A \hat{X}_B = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix}$$

$${}^A \hat{Y}_B = \begin{bmatrix} \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix}$$

$${}^A \hat{Z}_B = \begin{bmatrix} \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix}$$

e portanto, a matriz de rotação  ${}^A R_B$  será:

$${}^A R_B = [ {}^A \hat{X}_B \mid {}^A \hat{Y}_B \mid {}^A \hat{Z}_B ] = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} \quad (2)$$

Note que os elementos de  ${}^A R_B$  são produtos escalares entre os versores dos sistemas  $\{A\}$  e  $\{B\}$ . Portanto, como versores tem módulo unitário, os elementos de  ${}^A R_B$  são os cossenos dos ângulos entre cada um dos versores de  $\{A\}$  e cada um dos versores de  $\{B\}$ . Por este motivo, a matriz  ${}^A R_B$  também é denominada de matriz de cossenos diretores de  $\{B\}$  em relação à  $\{A\}$ .

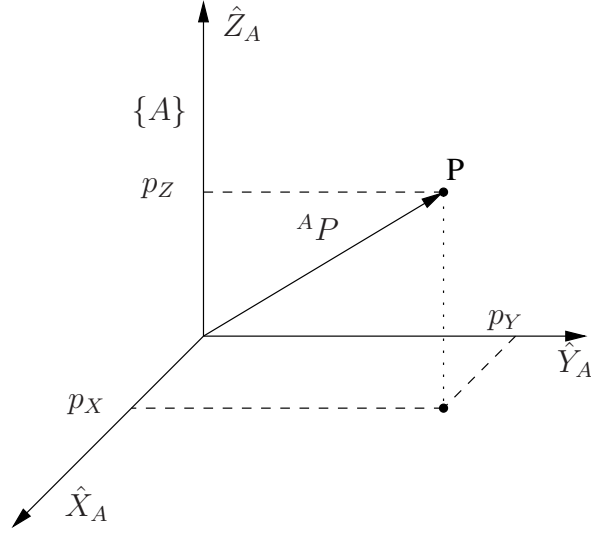


Figura 5: Projeções de  ${}^A P$  nas direções  $\hat{X}_A$ ,  $\hat{Y}_A$  e  $\hat{Z}_A$ .

Por outro lado, a rotação inversa  ${}^B R_A = {}^A R_B^{-1}$  pode ser obtida projetando-se  $\hat{X}_A$ ,  $\hat{Y}_A$  e  $\hat{Z}_A$  sobre o sistema de coordenadas  $\{B\}$ , que de (2) é dado por:

$${}^B R_A = \begin{bmatrix} \hat{X}_A \cdot \hat{X}_B & \hat{Y}_A \cdot \hat{X}_B & \hat{Z}_A \cdot \hat{X}_B \\ \hat{X}_A \cdot \hat{Y}_B & \hat{Y}_A \cdot \hat{Y}_B & \hat{Z}_A \cdot \hat{Y}_B \\ \hat{X}_A \cdot \hat{Z}_B & \hat{Y}_A \cdot \hat{Z}_B & \hat{Z}_A \cdot \hat{Z}_B \end{bmatrix}$$

e portanto, invertendo-se a ordem os produtos escalares chega-se a:

$${}^B R_A = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A \\ \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A \\ \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} = {}^A R_B^T \quad (3)$$

A expressão (3) induz a hipótese de que a inversa da matriz de rotação seja igual à sua transposta. Esta hipótese pode ser corroborada através da observação de que:

$$\begin{aligned} {}^B R_A {}^A R_B &= {}^A R_B^T {}^A R_B = \begin{bmatrix} {}^A \hat{X}_B^T \\ {}^A \hat{Y}_B^T \\ {}^A \hat{Z}_B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^A \hat{X}_B & {}^A \hat{Y}_B & {}^A \hat{Z}_B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}^A \hat{X}_B^T {}^A \hat{X}_B & {}^A \hat{X}_B^T {}^A \hat{Y}_B & {}^A \hat{X}_B^T {}^A \hat{Z}_B \\ {}^A \hat{Y}_B^T {}^A \hat{X}_B & {}^A \hat{Y}_B^T {}^A \hat{Y}_B & {}^A \hat{Y}_B^T {}^A \hat{Z}_B \\ {}^A \hat{Z}_B^T {}^A \hat{X}_B & {}^A \hat{Z}_B^T {}^A \hat{Y}_B & {}^A \hat{Z}_B^T {}^A \hat{Z}_B \end{bmatrix} \end{aligned}$$

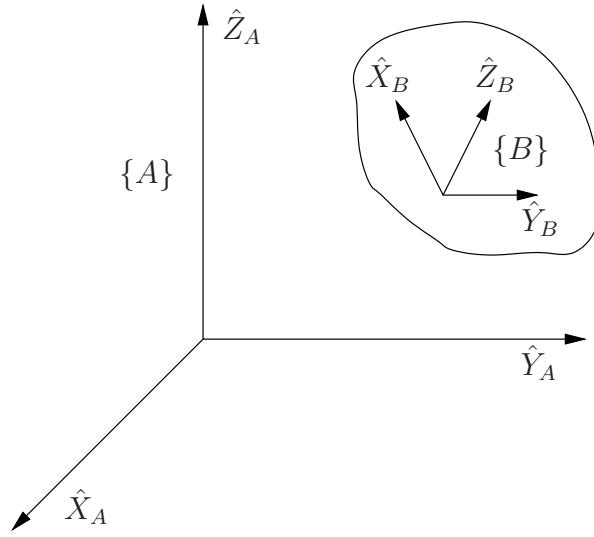


Figura 6: Descrição de orientação.

$$= \begin{bmatrix} {}^A\hat{X}_B \cdot {}^A\hat{X}_B & {}^A\hat{X}_B \cdot {}^A\hat{Y}_B & {}^A\hat{X}_B \cdot {}^A\hat{Z}_B \\ {}^A\hat{Y}_B \cdot {}^A\hat{X}_B & {}^A\hat{Y}_B \cdot {}^A\hat{Y}_B & {}^A\hat{Y}_B \cdot {}^A\hat{Z}_B \\ {}^A\hat{Z}_B \cdot {}^A\hat{X}_B & {}^A\hat{Z}_B \cdot {}^A\hat{Y}_B & {}^A\hat{Z}_B \cdot {}^A\hat{Z}_B \end{bmatrix} = I$$

Assim, para matrizes de rotação tem-se:

$${}^B R_A = {}^A R_B^{-1} = {}^A R_B^T$$

### 1.3 Descrição de Posição e Orientação

A descrição da posição e orientação de um corpo é feita descrevendo-se o sistema de coordenadas associado ao corpo através da matriz de rotação em relação ao sistema inercial e da posição da origem do sistema, como mostra a figura 7.

Assim, tem-se que a descrição do corpo da figura 7 é dada por:

$$\{B\} = \{{}^A R_B, {}^A P_{Borg}\}$$

onde  ${}^A P_{Borg}$  é o vetor que localiza a origem de  $\{B\}$  em relação à  $\{A\}$ .

## 2 Mapeamento entre Sistemas de Coordenadas

Tipicamente em um sistema robótico existirão diversos sistemas de coordenadas associados aos diversos objetos no espaço de trabalho do robô e aos seus próprios

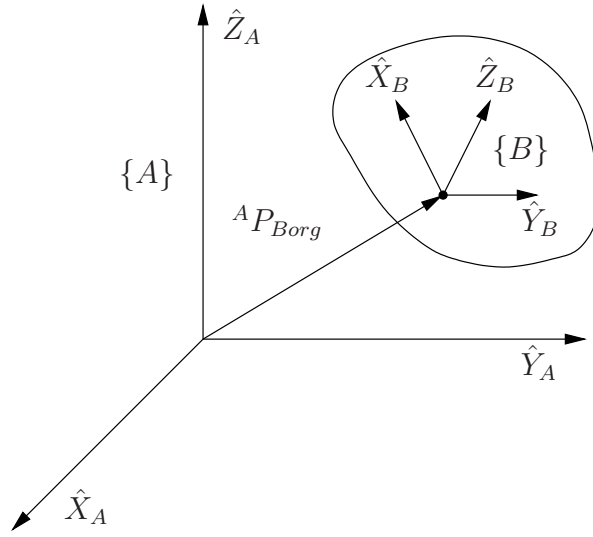


Figura 7: Descrição de posição e orientação.

elos. Consequentemente, é comum conhecer-se algum ponto de interesse em relação a um sistema de coordenadas e desejar conhecer a descrição do mesmo ponto em relação a outro sistema de coordenadas. Isto pode ser feito através do mapeamento de pontos entre sistemas de coordenadas.

## 2.1 Mapeamento Envolvendo Apenas Translação

Sejam dois sistemas de coordenadas  $\{A\}$  e  $\{B\}$  com mesma orientação e com origens não coincidentes, como mostra a figura 8.

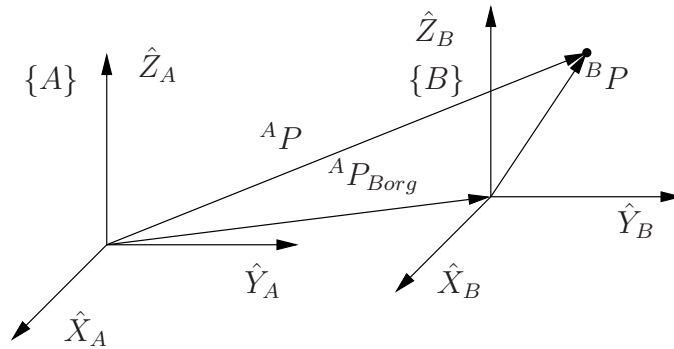


Figura 8: Mapeamento envolvendo apenas translação.

Supondo que se conheça a descrição de um ponto em relação ao sistema  $\{B\}$ , pode-se observar através da figura 8 que a sua descrição em relação ao sistema

$\{A\}$  é dada por

$${}^A P = {}^A P_{Borg} + {}^B P \quad (4)$$

onde  ${}^A P_{Borg}$  é a descrição da origem de  $\{B\}$  em relação à  $\{A\}$ .

## 2.2 Mapeamento Envolvendo Apenas Rotação

Sejam dois sistemas de coordenadas  $\{A\}$  e  $\{B\}$  com origens coincidentes e tais que a orientação de  $\{B\}$  em relação à  $\{A\}$  é dada por  ${}^A R_B$ , como mostra a figura 9.

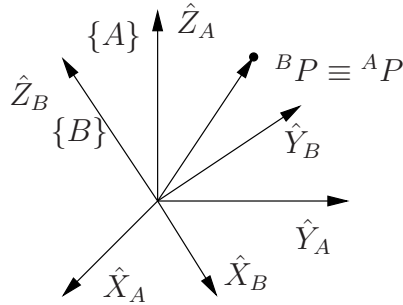


Figura 9: Mapeamento envolvendo apenas rotação.

Tem-se então que  ${}^A P$  é dado pela projeção de  ${}^B P$  sobre os versores do sistema  $\{A\}$ , ou seja:

$$\begin{aligned} {}^A p_X &= {}^B P \cdot {}^B \hat{X}_A = {}^B \hat{X}_A \cdot {}^B P = {}^B \hat{X}_A^T {}^B P \\ {}^A p_Y &= {}^B P \cdot {}^B \hat{Y}_A = {}^B \hat{Y}_A \cdot {}^B P = {}^B \hat{Y}_A^T {}^B P \\ {}^A p_Z &= {}^B P \cdot {}^B \hat{Z}_A = {}^B \hat{Z}_A \cdot {}^B P = {}^B \hat{Z}_A^T {}^B P \end{aligned}$$

ou ainda

$${}^A P = \begin{bmatrix} {}^A p_X \\ {}^A p_Y \\ {}^A p_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B \hat{X}_A^T \\ {}^B \hat{Y}_A^T \\ {}^B \hat{Z}_A^T \end{bmatrix} {}^B P = \begin{bmatrix} {}^B \hat{X}_A & {}^B \hat{Y}_A & {}^B \hat{Z}_A \end{bmatrix}^T {}^B P = {}^B R_A^T {}^B P$$

que pode ser escrito como

$${}^A P = {}^A R_B {}^B P$$



### 2.3 Mapeamento com Translação e Rotação

Quando se tem translação e rotação entre os sistemas  $\{A\}$  e  $\{B\}$  envolvidos no mapeamento, como na figura 10, pode-se imaginar um sistema intermediário  $\{C\}$ , alinhado com o sistema  $\{A\}$ , mas com origem coincidente com  $\{B\}$  de forma que tem-se

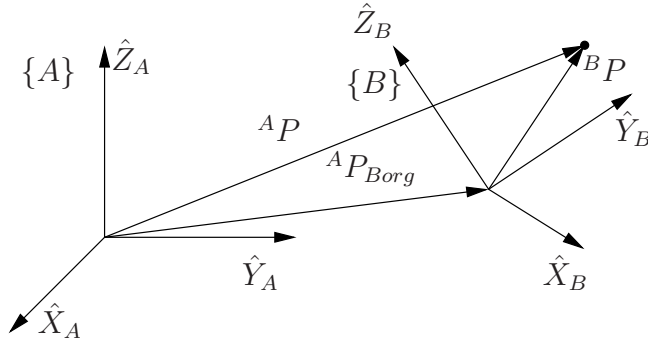


Figura 10: Mapeamento com translação e rotação.

$$\begin{aligned} {}^A P &= {}^A P_{Corg} + {}^C P \\ {}^C P &= {}^C R_B {}^B P \end{aligned}$$

e considerando que  ${}^A P_{Corg} \equiv {}^A P_{Borg}$  e  ${}^C R_B \equiv {}^A R_B$ , pode-se escrever

$$\begin{aligned} {}^A P &= {}^A P_{Borg} + {}^C P \\ {}^C P &= {}^A R_B {}^B P \end{aligned}$$

ou ainda

$${}^A P = {}^A P_{Borg} + {}^A R_B {}^B P \quad (5)$$

que descreve a posição do ponto em relação ao sistema  $\{A\}$  conhecendo-se a descrição do ponto no sistema  $\{B\}$  e a descrição do sistema  $\{B\}$  em relação ao sistema  $\{A\}$ .

### 3 Transformação Homogênea

A expressão (5) permite fazer o mapeamento de pontos de um sistema de coordenadas para outro. No entanto, ela não é muito prática, por envolver duas operações (uma multiplicação e uma soma matriciais). Seria conveniente dispor de um operador tal que permitisse calcular o mapeamento entre sistemas de coordenadas através de uma única operação matricial, ou seja, seria conveniente escrever (5) na forma:

$${}^A P = {}^A T_B {}^B P \quad (6)$$

onde  ${}^A T_B$  é o operador que faz o mapeamento de pontos do sistema  $\{B\}$  para o sistema  $\{A\}$ .

A expressão (5) pode ser escrita na forma (6) fazendo-se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} {}^A P \\ 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{vetor em} \\ \text{coordenadas} \\ \text{homogêneas}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^A R_B & | & {}^A P_{Borg} \\ \hline 0_{1 \times 3} & | & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matriz de} \\ \text{transformação} \\ \text{homogênea}}} \begin{bmatrix} {}^B P \\ 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de transformação homogênea pode ser particionada em quatro campos:

$$\left[ \begin{array}{c|c} \text{rotação} & \text{translação} \\ \hline \text{perspectiva} & \text{escala} \end{array} \right]$$

Os campos de rotação e translação são utilizados para descrever a rotação e a translação envolvidas no mapeamento. O campo de escala é utilizado para representar diferenças de escala entre os sistemas e o campo de perspectiva é utilizado para representar a diferença de perspectiva entre os sistemas. Estes dois últimos campos são comumente utilizados quanto a transformação homogênea é utilizada no contexto de visão computacional, processamento de imagens ou computação gráfica. Em robótica normalmente estes campos assumem os valores de operador nulo para as respectivas operações, ou seja,  $0_{1 \times 3}$  para perspectiva e 1 para escala.

### 4 Operadores

Operadores movem pontos ou vetores no espaço. Esta movimentação pode ser translação, rotação ou ambas. É importante perceber que quando se está fazendo

um mapeamento de um ponto existem dois sistemas de coordenadas envolvidos, enquanto que ao se aplicar um operador à um ponto, apenas um sistema de coordenadas está envolvido na operação.

#### 4.1 Operador de Translação

Seja um ponto  ${}^A P_1$  e um vetor  ${}^A Q$ . O operador de translação este ponto de um deslocamento finito ao longo da direção do vetor, obtendo-se um novo ponto  ${}^A P_2$ , deslocado em relação a  ${}^A P_1$ , como mostra a figura 11.

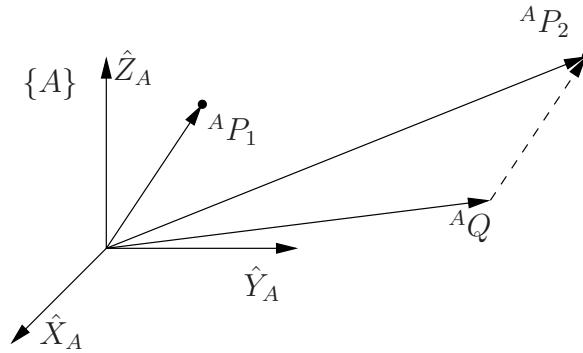


Figura 11: Operação de translação.

Através da figura verifica-se que

$${}^A P_2 = {}^A P_1 + {}^A Q \quad (7)$$

Esta operação pode ser representado na forma matricial como

$${}^A P_2 = D(q) {}^A P_1 \quad (8)$$

onde  $q$  é a amplitude da translação ao longo do vetor  ${}^A Q$  e

$$D(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sendo  $q_x$ ,  $q_y$  e  $q_z$  são os componentes da translação nas direções  $\hat{X}_A$ ,  $\hat{Y}_A$ ,  $\hat{Z}_A$ .

As expressões (7) e (8) são semelhantes às expressões (4) e (6), no entanto, nas expressões obtidas na seção 2 haviam dois sistemas de coordenadas envolvidos, enquanto aqui existe apenas um sistema de coordenadas.

## 4.2 Operador de Rotação

O operador de rotação roda um ponto  ${}^A P_1$  de um ângulo  $\theta$  em torno de um vetor  ${}^A Q$  para gerar um outro ponto  ${}^A P_2$ , como mostrado na figura 12.

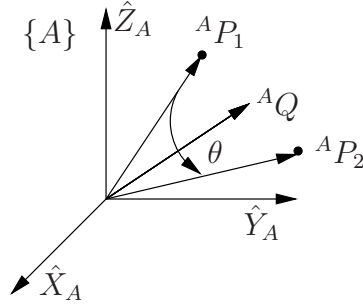


Figura 12: Operação de rotação.

Usualmente, ao invés de rotação em torno de vetores arbitrários, considera-se rotações em torno dos versores do próprio sistema de coordenadas, de forma que uma rotação de  $\theta$  em torno de um vetor arbitrário é substituída por uma rotação de  $\alpha$  em torno de  $\hat{X}$ , uma rotação de  $\beta$  em torno de  $\hat{Y}$  e uma rotação de  $\gamma$  em torno de  $\hat{Z}$ . A figura 13 mostra uma rotação em torno de  ${}^A \hat{X}$ .

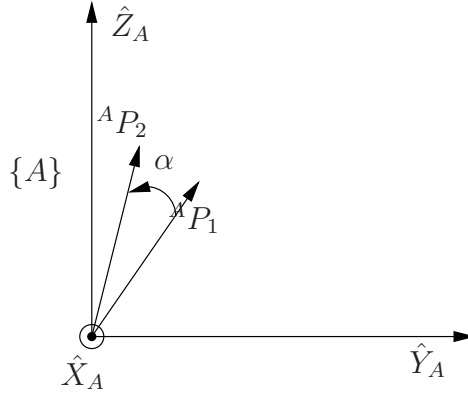


Figura 13: Operação de rotação de um ângulo  $\alpha$  em torno de  ${}^A \hat{X}$ .

A expressão que descreve esta operação de rotação pode ser obtida notando-se que  ${}^A P_1$  é igual a  ${}^B P_2$ , sendo  $\{B\}$  um sistema de coordenadas que sofreu uma rotação de  $\alpha$  em torno de  ${}^A \hat{X}$ , como mostra a figura 14.

Assim, tem-se

$${}^A P_2 = {}^A T_B {}^B P_2 = {}^A T_B {}^A P_1$$

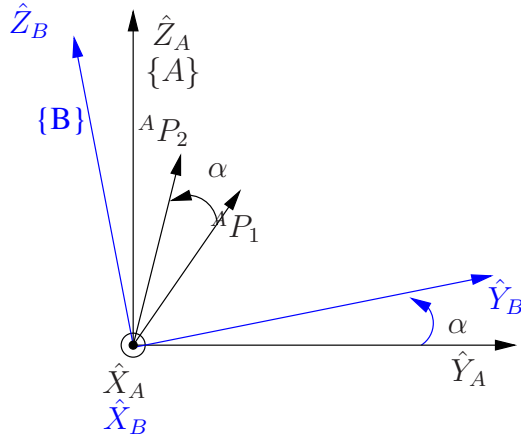


Figura 14: Sistema de coordenadas auxiliar par obtenção da operação de rotação.

onde  ${}^A T_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  é o operador que rotaciona  ${}^A P_1$  em

torno de  ${}^A \hat{X}$  para obter-se  ${}^A P_2$ . Para tornar este fato evidente, define-se o operador de rotação em torno de  $\hat{X}$  como:

$$R_X(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e portanto

$${}^A P_2 = R_X(\alpha) {}^A P_1$$

Analogamente, pode-se obter os operadores que realizam rotações em torno de  $\hat{Y}$  e  $\hat{Z}$ :

$$R_Y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_Z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 4.3 Operador de Transformação

O operador de transformação realiza translação e rotação de um ponto  ${}^A P_1$  para transforma-lo em um ponto  ${}^A P_2$ , deslocado e rotacionado em relação à  ${}^A P_1$ , como mostra a figura 15.

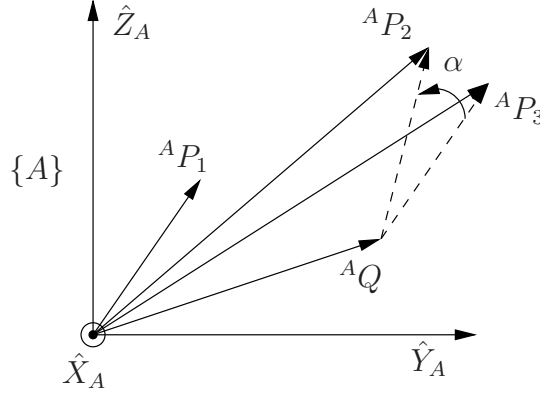


Figura 15: Operação de translação.

Na figura 15 a transformação realizada é um deslocamento por  ${}^A Q$  e uma rotação de  $\alpha$  em torno de  ${}^A \hat{X}$ , ou seja o ponto  ${}^A P_1$  é deslocado e obtém-se o ponto  ${}^A P_3 = D(q){}^A P_1$  e a seguir o ponto  ${}^A P_3$  é rotacionado de  $\alpha$  em torno de  ${}^A \hat{X}$  para obter-se  ${}^A P_2$ . Assim tem-se:

$${}^A P_2 = R_X(\alpha){}^A P_3 = R_X(\alpha)D(q){}^A P_1$$

Note que como rotação e translação são operações independentes, o resultado seria o mesmo se a ordem das operações fosse invertida. Além disso, no caso geral tem-se rotações em torno de  $\hat{X}$ ,  $\hat{Y}$  e  $\hat{Z}$ , de forma que em geral, tem-se

$${}^A P_2 = R_Z(\gamma)R_Y(\beta)R_X(\alpha)D(q){}^A P_1 \quad (9)$$

ou, para simplificar a notação

$${}^A P_2 = T(q, \alpha, \beta, \gamma){}^A P_1$$

onde  $T(q, \alpha, \beta, \gamma) = R_Z(\gamma)R_Y(\beta)R_X(\alpha)D(q)$  é o operador de transformação que desloca e rotaciona o ponto em torno dos três versores do sistema de coordenadas.

Em geral, a ordem em que são feitas as rotações e deslocamentos altera o resultado final, mas em (9), a ordem não é importante pois os eixos em torno dos quais são feitas as rotações são fixos e ortogonais.

## 5 Aritmética de Transformações

### 5.1 Transformações Compostas

Sejam três sistemas de coordenadas  $\{A\}$ ,  $\{B\}$  e  $\{C\}$ , com transformações entre eles conhecidas e um ponto cuja descrição  ${}^C P$  é conhecida, como mostra a figura 16.

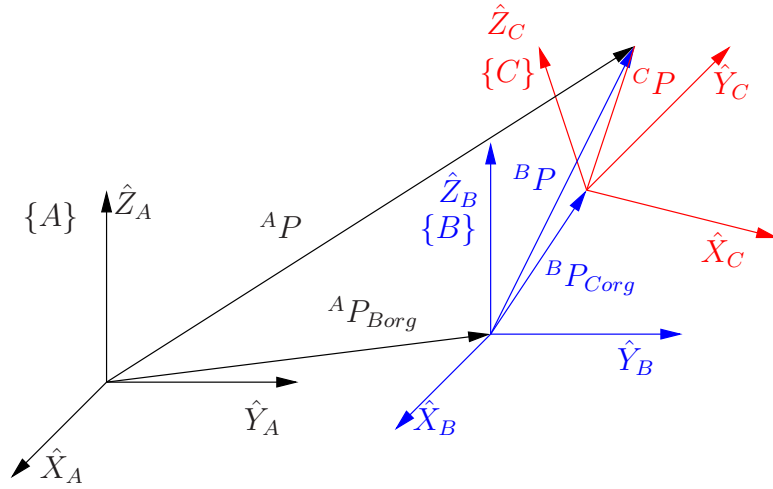


Figura 16: Transformações Compostas.

Pode-se determinar  ${}^A P$  por:

$${}^A P = {}^A T_B {}^B P$$

e por sua vez

$${}^B P = {}^B T_C {}^C P$$

e portanto

$${}^A P = {}^A T_B {}^B T_C {}^C P = {}^A T_C {}^C P$$

É importante notar que neste caso a ordem das transformações é importante e que a ordem de execução das transformações é da direita para a esquerda. Obviamente, a composição de transformações pode ser generalizada para um numero arbitrário de transformações.

## 5.2 Inversão da Transformação

Dado  ${}^AT_B$ , deseja-se obter  ${}^BT_A = {}^AT_B^{-1}$ .

A transformação pode ser invertida de diversas formas:

**inversão aritmética:**

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|} \text{cof}(T)^T$$

- Grande número de cálculos
- Complicado se a dimensão for maior do que 4
- Pouco adequado para implementação computacional
- Arredondamentos e truncamentos podem destruir a estrutura da matriz

**inversão numérica:** Métodos da triangulação, eliminação de Gauss, Gauss-Seidel, etc.

- Adequado para qualquer dimensão
- Arredondamentos e truncamentos podem destruir a estrutura da matriz
- Adequados para implementação computacional

**inversão utilizando a estrutura da matriz:** Explora a estrutura particular da matriz de transformação homogênea.

- Baixo número de operações
- Preserva a estrutura da matriz
- Fácil de ser calculada manualmente e computacionalmente

$${}^AT_B = \left[ \begin{array}{c|c} {}^AR_B & {}^AP_{Borg} \\ \hline 0_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right]$$

$${}^BT_A = \left[ \begin{array}{c|c} {}^BR_A & {}^BP_{Aorg} \\ \hline 0_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right]$$

Já foi visto anteriormente que  ${}^BT_A = {}^AR_B^T$ . Resta portanto determinar  ${}^BP_{Aorg}$  a partir de  ${}^AT_B$ .

Tem-se que a origem do sistema  $\{B\}$  descrita no sistema  $\{A\}$  é 0, ou seja

$${}^BP_{Borg} = 0$$



Mas, sabe-se que

$${}^1P_3 = {}^1R_2 {}^2P_3 + {}^1P_{2org}$$

Portanto, fazendo  $1 = B$ ,  $2 = A$  e  $3 = B_{org}$  tem-se

$${}^BP_{Borg} = {}^BR_A {}^AP_{Borg} + {}^BP_{Aorg} = 0$$

logo

$${}^BP_{Aorg} = -{}^BR_A {}^AP_{Borg}$$

Assim,

$${}^BT_A = \left[ \begin{array}{c|c} {}^AR_B^T & -{}^AR_B^T {}^AP_{Borg} \\ \hline 0_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right]$$

### 5.3 Equações com Transformações

Sejam cinco sistemas de coordenadas  $\{A\}$ ,  $\{B\}$ ,  $\{C\}$ ,  $\{D\}$  e  $\{E\}$ , dispostos arbitrariamente como mostrado na figura 17.

O sistema de coordenadas  $\{D\}$ , pode ser expresso em relação ao sistema  $\{A\}$  como:

$${}^AT_D = {}^AT_E {}^ET_D \quad (10)$$

ou

$${}^AT_D = {}^AT_B {}^BT_C {}^CT_D \quad (11)$$

Igualando-se (10) e (11), obtém-se uma equação com transformações:

$${}^AT_E {}^ET_D = {}^AT_B {}^BT_C {}^CT_D \quad (12)$$

Através de (12) pode-se calcular qualquer uma das transformações em função das demais. Por exemplo,  ${}^BT_C$  pode ser calculada como:

$${}^BT_C = {}^AT_B^{-1} {}^AT_E {}^ET_D {}^CT_D^{-1} \quad (13)$$

É importante perceber que  ${}^AT_B$  está pré-multiplicando no lado direito de (12) e que portanto,  ${}^AT_B^{-1}$  deve estar pré-multiplicando em (13). De forma semelhante,  ${}^CT_D$  está pós-multiplicando em (12) e portanto  ${}^CT_D^{-1}$  deve estar pós-multiplicando em (13).

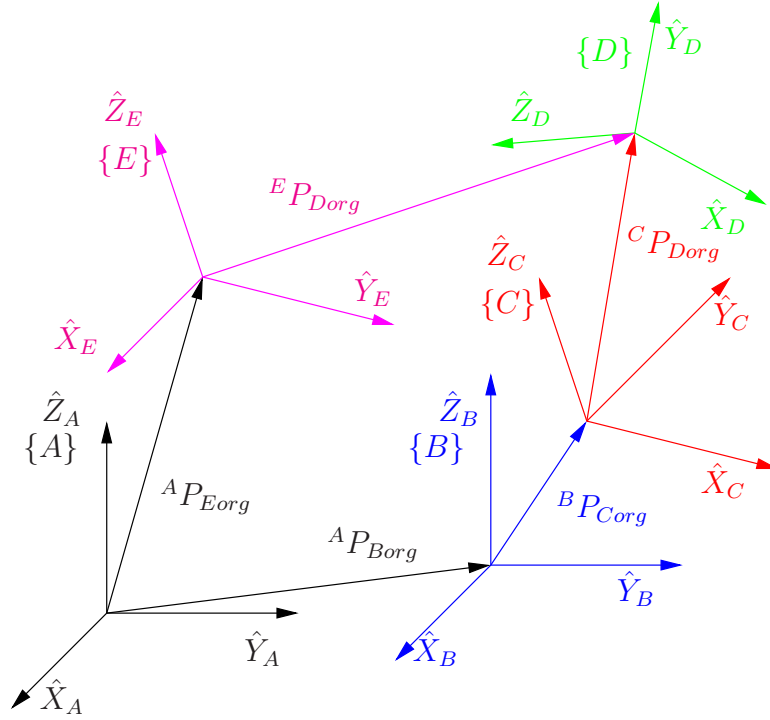


Figura 17: Sistemas de coordenadas arbitrários.

As setas na figura 17 indicam a definição de um sistema em relação à outro e podem ser utilizadas para obter-se diretamente equação de transformação. Para tanto, parte-se da origem do sistema tomado como referência para a transformação desejada ( $\{B\}$ , no exemplo) e percorre-se o diagrama até chegar-se à origem do sistema desejado ( $\{C\}$ ), incluindo na equação a transformação correspondente a cada seta percorrida. Quando o diagrama é percorrido no sentido contrário a seta, a transformação correspondente é incluída invertida na expressão.

Considere um robô trabalhando em uma determinada operação de *pick-and-place*, como mostrado na figura 18. Suponha ainda, que se conhece as seguintes transformações:

- da ferramenta para o punho do robô,  ${}^W T_T$
- da bancada para a base do robô,  ${}^B T_S$
- da peça para a bancada,  ${}^S T_G$ .

Deseja-se calcular a transformação do punho para a base do robô,  ${}^B T_W$ , para que a ferramenta esteja na origem do sistema de coordenadas associado à peça. Ou, seja, deseja-se:

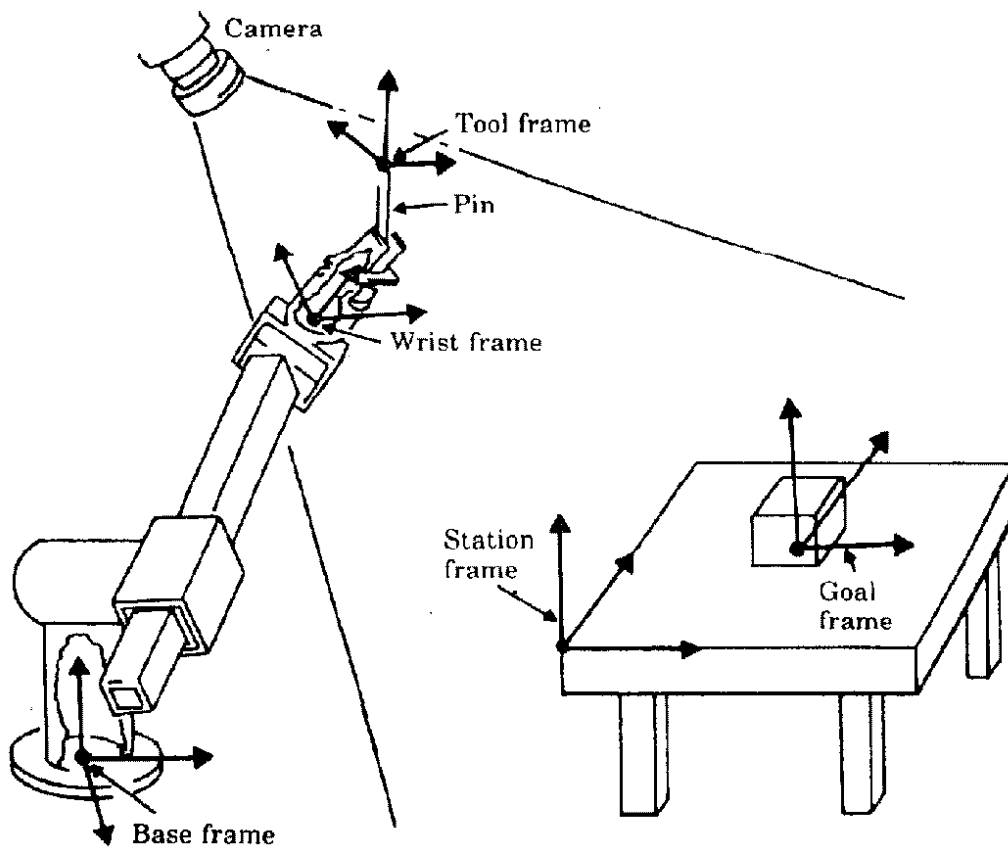


Figura 18: Operação de *pick-and-place*.

$${}^B T_T = {}^B T_G$$

já que para que a ferramenta esteja na origem do sistema de coordenadas da peça, a transformação  ${}^T T_G = I$ .

Por outro lado, tem-se:

$${}^B T_T = {}^B T_W {}^W T_T$$

e

$${}^B T_G = {}^B T_S {}^S T_G$$

logo

$${}^B T_W {}^W T_T = {}^B T_S {}^S T_G$$

e portanto

$${}^B T_W = {}^B T_S {}^S T_G {}^G T_T^{-1}$$

## 6 Outras Descrições de Orientação

### 6.1 Ângulos de Roll-Pitch-Yaw

Ao invés de representar a orientação pela matriz de rotação, pode-se representar a orientação de um sistema  $\{B\}$  em relação a um sistema  $\{A\}$  através dos utilizar os ângulos de rotação em torno de  $\hat{X}_A$ ,  $\hat{Y}_A$  e  $\hat{Z}_A$ , como mostrado na figura 19. Estes ângulos são conhecidos como ângulos de *roll-pitch-yaw*, ou ângulos de rolamento, arfagem e guinada.

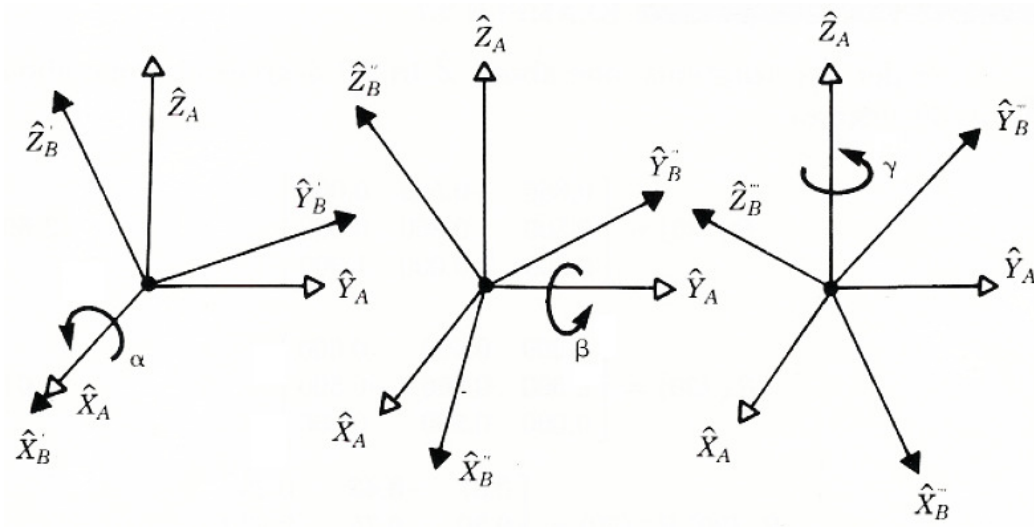


Figura 19: Ângulos de *roll-pitch-yaw*.

Assim, tem-se:

$$\begin{aligned}
 {}^A R_B(\alpha, \beta, \gamma) &= R_Z(\gamma) R_Y(\beta) R_X(\alpha) \\
 &= \begin{bmatrix} C\gamma & -S\gamma & 0 \\ S\gamma & C\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C\gamma C\beta & C\gamma S\beta S\alpha - S\gamma C\alpha & C\gamma S\beta C\alpha + S\gamma S\alpha \\ S\gamma C\beta & S\gamma S\beta S\alpha + C\gamma C\alpha & S\gamma S\beta C\alpha - C\gamma S\alpha \\ -S\beta & C\beta S\alpha & C\beta C\alpha \end{bmatrix} \quad (14)
 \end{aligned}$$

O problema de obter-se  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  a partir de uma matriz  ${}^A R_B$  conhecida também é frequentemente de interesse. A matriz  ${}^A R_B$  pode ser escrita como:

$${}^A R_B = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Supondo  $C\beta \neq 0$ , pode-se obter  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  através de:

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{atan2}(r_{32}, r_{33}) \\ \beta &= \text{atan2}\left(-r_{31}, \pm\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right) \\ \gamma &= \text{atan2}(r_{21}, r_{11}) \end{aligned} \quad (15)$$

Note que existem duas soluções para  $\beta$ . Por convenção, neste problema de conversão de RPY para matriz de rotação, sempre seleciona-se o valor de  $\beta$  tal que  $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ .

Se  $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$ , a solução (16) degenera, pois neste caso tem-se

$$\begin{aligned} {}^A R_B &= \begin{bmatrix} 0 & \pm C\gamma S\alpha - S\gamma C\alpha & \pm C\gamma C\alpha + S\gamma S\alpha \\ 0 & \pm S\gamma S\alpha + C\gamma C\alpha & \pm S\gamma C\alpha - C\gamma S\alpha \\ \mp 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \pm S(\alpha \mp \gamma) & C(\alpha \mp \gamma) \\ 0 & \pm C(\alpha \mp \gamma) & -S(\alpha \mp \gamma) \\ \mp 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e só é possível determinar a diferença de  $\alpha$  e  $\gamma$  se  $\beta = +\frac{\pi}{2}$  ou a soma de  $\alpha$  e  $\gamma$  se  $\beta = -\frac{\pi}{2}$ . Assim, tem-se:

$$\alpha \mp \gamma = \text{atan2}(r_{12}, r_{22})$$

Neste caso, é usual arbitrar-se  $\gamma = 0$  e calcular  $\alpha$ :

$$\alpha = \begin{cases} \text{atan2}(r_{12}, r_{22}) & , \text{ se } \beta = \frac{\pi}{2} \\ -\text{atan2}(r_{12}, r_{22}) & , \text{ se } \beta = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

## 6.2 Ângulos de Euler em Torno de Z-Y-X

Neste caso, tem-se:

$${}^A R_B(\gamma, \beta, \alpha) = {}^A R_{B'}(\gamma)^{B'} R_{B''}(\beta)^{B''} R_{B'''}(\alpha) = R_Z(\gamma) R_Y(\beta) R_X(\alpha) \quad (16)$$

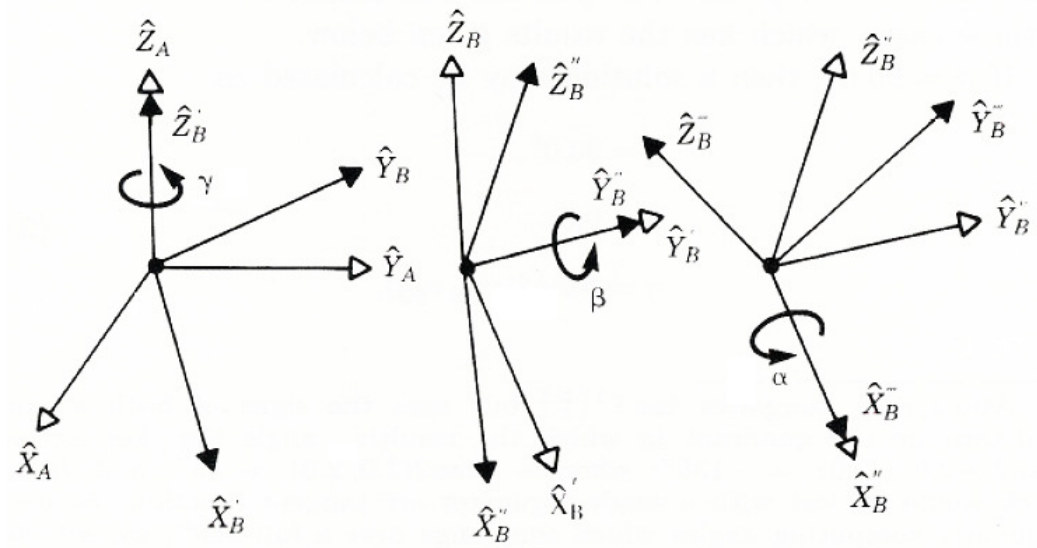


Figura 20: Ângulos de Euler em torno de Z-Y-X.

que é equivalente a (14). Portanto, os ângulos de Euler em torno de Z-Y-X são equivalentes aos ângulos de *roll-pitch-yaw*.

### 6.3 Ângulos de Euler em Torno de Z-X-Z

$$\begin{aligned}
 {}^A R_B(\gamma, \beta, \alpha) &= {}^A R_{B'}(\gamma) {}^{B'} R_{B''}(\beta) {}^{B''} R_B(\alpha) = R_Z(\gamma) R_X(\beta) R_Z(\alpha) = \\
 &= \begin{bmatrix} C\gamma & -S\gamma & 0 \\ S\gamma & C\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\beta & -S\beta \\ 0 & S\beta & C\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C\gamma C\alpha - S\gamma C\beta S\alpha & -C\gamma S\alpha - S\gamma C\beta C\alpha & S\gamma S\beta \\ S\gamma C\alpha + C\gamma C\beta S\alpha & -S\gamma S\alpha + C\gamma C\beta C\alpha & -C\gamma S\beta \\ S\beta S\alpha & S\beta C\alpha & C\beta \end{bmatrix} \quad (17)
 \end{aligned}$$

Supondo  $S\beta \neq 0$ :

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \text{atan2}(r_{31}, r_{32}) \\
 \beta &= \text{atan2}\left(\pm \sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}, r_{33}\right) \\
 \gamma &= \text{atan2}(r_{13}, -r_{33})
 \end{aligned} \quad (18)$$

Se  $\beta = 0$  ou  $\beta = \pi$ :

$$\begin{aligned}
{}^A R_B &= \begin{bmatrix} C\gamma C\alpha \mp S\gamma S\alpha & -C\gamma S\alpha \mp S\gamma C\alpha & 0 \\ S\gamma C\alpha \pm C\gamma S\alpha & -S\gamma S\alpha \pm C\gamma C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C(\alpha \pm \gamma) & -S(\alpha \pm \gamma) & 0 \\ \pm S(\alpha \pm \gamma) & -C(\alpha \pm \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e portanto, fazendo  $\gamma = 0$ , tem-se

$$\alpha = \begin{cases} \text{atan2}(r_{21}, r_{11}) & , \text{ se } \beta = 0 \\ -\text{atan2}(r_{21}, r_{11}) & , \text{ se } \beta = \pi \end{cases}$$

## 6.4 Ângulos de Euler em Torno de Z-Y-Z

$$\begin{aligned}
{}^A R_B(\gamma, \beta, \alpha) &= {}^A R_{B'}(\gamma)^{B'} R_{B''}(\beta)^{B''} R_B(\alpha) = R_Z(\gamma) R_Y(\beta) R_Z(\alpha) = \\
&= \begin{bmatrix} C\gamma & -S\gamma & 0 \\ S\gamma & C\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\beta & C\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} C\gamma C\beta C\alpha - S\gamma S\alpha & -C\gamma C\beta S\alpha - S\gamma C\alpha & C\gamma S\beta \\ S\gamma C\beta C\alpha + C\gamma S\alpha & -S\gamma C\beta S\alpha + C\gamma C\alpha & S\gamma S\beta \\ -S\beta C\alpha & S\beta S\alpha & C\beta \end{bmatrix} \quad (19)
\end{aligned}$$

Supondo  $S\beta \neq 0$ :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \text{atan2}(r_{33}, -r_{31}) \\
\beta &= \text{atan2}\left(\pm\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}, r_{33}\right) \\
\gamma &= \text{atan2}(r_{23}, r_{13})
\end{aligned} \quad (20)$$

Se  $\beta = 0$  ou  $\beta = \pi$ :

$$\begin{aligned}
{}^A R_B &= \begin{bmatrix} \pm C\gamma C\alpha - S\gamma S\alpha & \mp C\gamma S\alpha - S\gamma C\alpha & 0 \\ \pm S\gamma C\alpha + C\gamma S\alpha & \mp S\gamma S\alpha + C\gamma C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \pm C(\alpha \pm \gamma) & \mp S(\alpha \pm \gamma) & 0 \\ S(\alpha \pm \gamma) & C(\alpha \pm \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e portanto, fazendo  $\gamma = 0$ , tem-se

$$\alpha = \begin{cases} \text{atan2}(-r_{12}, r_{11}) & , \text{ se } \beta = 0 \\ -\text{atan2}(r_{12}, -r_{11}) & , \text{ se } \beta = \pi \end{cases}$$

## 6.5 Quaternions

Quaternions são uma generalização de números complexos. Assim como um número complexo pode ser utilizado para representar uma rotação no plano, um quaternion pode ser utilizado para representar uma rotação no espaço. Um quaternion é uma entidade vetorial na forma:

$$Q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}, \quad q_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, 3 \quad (21)$$

onde  $q_0$  é o componente escalar de  $Q$  e  $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$  é o componente vetorial. É usual também a notação mais compacta  $Q = (q_0, \vec{q})$  com  $q_0 \in \mathbb{R}$  e  $\vec{q} \in \mathbb{R}^3$ .

O conjunto dos quaternions,  $\mathbb{Q}$  possui propriedades semelhantes às propriedades do conjunto dos números complexos. A principal diferença é com relação a multiplicação de quaternions que não é comutativa.

As seguintes propriedades dos quaternions podem ser consideradas generalizações das propriedades dos números complexos:

1.  $\mathbf{i}\mathbf{i} = \mathbf{j}\mathbf{j} = \mathbf{k}\mathbf{k} = \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k} = -1$
2.  $\mathbf{i}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j}\mathbf{k} = -\mathbf{k}\mathbf{j} = \mathbf{i} \quad \mathbf{k}\mathbf{i} = -\mathbf{i}\mathbf{k} = \mathbf{j}$
3. O conjugado de um quaternion  $Q = (q_0, \vec{q})$  é dado por  $Q^* = (q_0, -\vec{q})$ .
4. O módulo de um quaternion é  $|Q|^2 = QQ^* = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$
5. O inverso de um quaternion é  $Q^{-1} = \frac{Q^*}{|Q|^2}$
6.  $Q = (1, 0)$  é o elemento identidade para a multiplicação de quaternions

O produto entre dois quaternions pode ser escrito em termos do produto escalar e do produto vetorial entre vetores no  $\mathbb{R}^3$ . Sejam  $Q = (q_0, \vec{q})$  e  $P = (p_0, \vec{p})$ , o produto será

$$QP = (q_0p_0 - \vec{q} \cdot \vec{p}, q_0\vec{p} + p_0\vec{q} + \vec{q} \times \vec{p})$$

Quaternions unitários são um subconjunto de todos  $Q \in \mathbb{Q}$  tais que  $|Q| = 1$ . Dada uma matriz de rotação  $R = \begin{bmatrix} n & s & a \end{bmatrix}$ , pode-se associar a ela um quaternion unitário tal que [2]:



$$\begin{aligned}
q_0 &= \frac{1}{2} \sqrt{n_x + s_y + a_z + 1} \\
q_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{n_x - s_y - a_z + 1}, \text{ com } \text{sgn}(q_1) = \text{sgn}(s_z - a_y) \\
q_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{s_y - n_x - a_z + 1}, \text{ com } \text{sgn}(q_2) = \text{sgn}(a_x - n_z) \\
q_3 &= \frac{1}{2} \sqrt{a_z - n_x - s_y + 1}, \text{ com } \text{sgn}(q_3) = \text{sgn}(n_y - s_x)
\end{aligned}$$

Por outro lado, um quaternion  $Q = (q_0, \vec{q})$ , representa uma rotação de  $\theta = 2 \arccos(q_0)$  em torno do vetor dado por:

$$\omega = \begin{cases} \frac{\vec{q}}{\sin(\theta/2)} & , \text{ se } \theta \neq 0 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

E a matriz de rotação correspondente, será dada por [1]:

$$R = e^{\hat{\omega}\theta} = \begin{bmatrix} \omega_1^2(1 - C\theta) + C\theta & \omega_1\omega_2(1 - C\theta) - \omega_3S\theta & \omega_1\omega_3(1 - C\theta) + \omega_2S\theta \\ \omega_1\omega_2(1 - C\theta) + \omega_3S\theta & \omega_2^2(1 - C\theta) + C\theta & \omega_2\omega_3(1 - C\theta) - \omega_1S\theta \\ \omega_1\omega_3(1 - C\theta) - \omega_2S\theta & \omega_2\omega_3(1 - C\theta) + \omega_1S\theta & \omega_3^2(1 - C\theta) + C\theta \end{bmatrix}$$

A principal vantagem dos quaternions sobre as matrizes de rotação é que permitem uma representação que não está sujeita a problemas de singularidades.

## 7 Exercícios

- A figura 21 apresenta a ferramenta de um robô industrial orientada (sistema X' Y' Z') em relação ao sistema de referência fixo na base do robô (X, Y, Z). Para os dois casos mostrados na figura, obtenha as descrições da rotação da ferramenta em relação à base do robô:

1. utilizando matriz de rotação
2. utilizando ângulos de *roll*, *pitch* and *yaw*
3. utilizando ângulos de Euler em torno de Z-X-Z
4. utilizando ângulos de Euler em torno de Z-YZ
5. utilizando quaternions

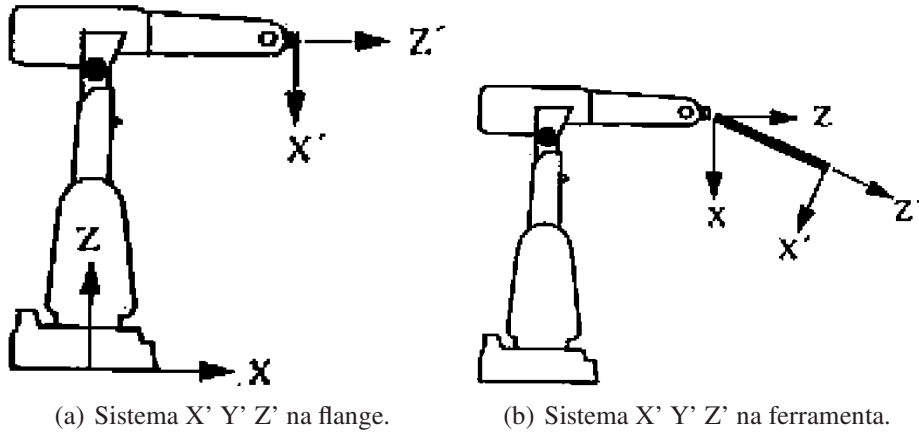


Figura 21: Robô industrial.

- A posição e orientação de um robô móvel podem ser descritas no sistema de coordenadas global  $\{X_0, Y_0, Z_0\}$  através da posição e orientação de do sistema de coordenadas  $\{X_c, Y_c, Z_c\}$  localizado no centro de massa do robô, como mostra a figura 22. Por sua vez, cada roda do robô pode ser descrita em relação ao sistema  $\{X_c, Y_c, Z_c\}$  pelos parâmetros  $l$ ,  $\alpha$  e  $\psi$ , como mostra a figura 23.

1. Obtenha a matriz de transformação do sistema  $\{X_c, Y_c, Z_c\}$  em relação ao sistema  $\{X_0, Y_0, Z_0\}$ .
2. Obtenha a matriz de transformação do sistema  $\{X_w, Y_w, Z_w\}$  em relação ao sistema  $\{X_c, Y_c, Z_c\}$ .
3. Supondo que a distância entre rodas coaxiais seja de 50cm e que a distância entre-eixos seja de 1m, determine, utilizando as transformações homogêneas obtidas acima, a posição da roda frontal esquerda do robô da figura 22 em relação ao sistema de coordenadas global quando o robô estiver na posição  $x_c = 3m$ ,  $y_c = 2m$  e  $\theta = 45^\circ$ . Note que  $X_C$  aponta para a frente do robô.

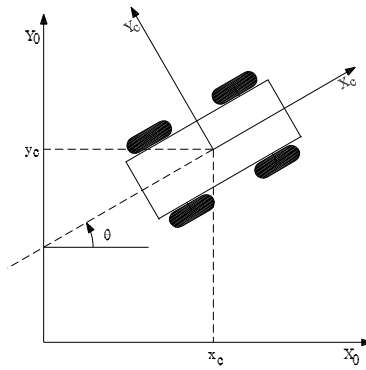


Figura 22: Posição do robô móvel.

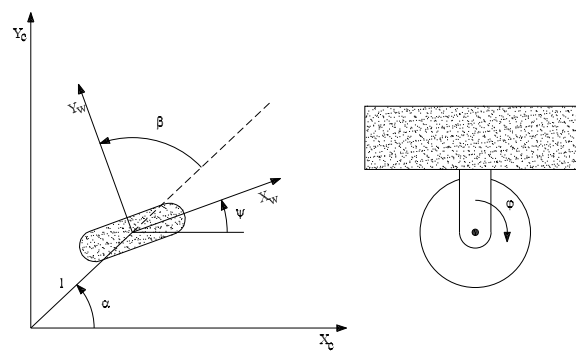


Figura 23: Descrição da posição e orientação das rodas.

## Referências

- [1] R. M. Murray, Z. Li, and S. S. Sastry. *Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.

- [2] V. F. Romano, editor. *Robótica Industrial Aplicação na Indústria de Manufatura e de Processos*. Edgard Blücher, São Paulo, 2002.