Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Sistemas Elétricos de Automação e Energia
ENG10026 Robótica–A

**Jacobiano**

Prof. Walter Fetter Lages

17 de outubro de 2016

# 1 Introdução

Jacobiano é uma forma multidimensional de derivada. Seja, por exemplo, a função vetorial

$$Y = F(X)$$

Derivando-se em relação ao tempo, tem-se

$$\dot{Y} = \frac{\partial F}{\partial X}\dot{X}$$

ou

$$\dot{Y} = J(X)\dot{X}$$

onde $J(X) = \frac{\partial F}{\partial X}$ é denominado Jacobiano de $F$ com relação a $X$.

Em robótica geralmente se está interessado em jacobianos que relacionam velocidades nas juntas com velocidades cartesianas da garra, ou seja

$$\nu = \begin{bmatrix} V \\ \Omega \end{bmatrix} = J(q)\dot{q}$$

Normalmente deseja-se determinar as velocidades cartesianas e angulares em relação ao sistema de coordenadas da base do manipulador. Tem-se então:

$$^0\nu = \begin{bmatrix} ^0V \\ ^0\Omega \end{bmatrix} = {}^0J(q)\dot{q} \tag{1}$$

# 2 Sistemas de Coordenadas

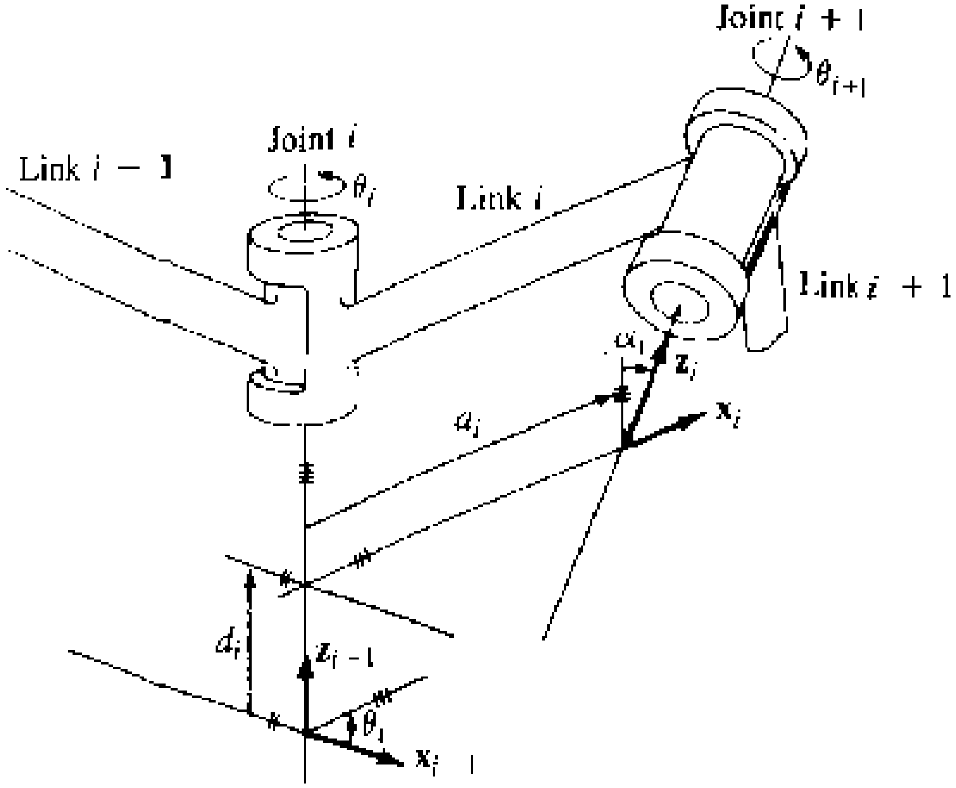


Figura 1: Atribuição dos Sistemas de Coordenadas

# 3 Cálculo das Velocidades

$$^{i-1}\omega_i = {}^{i-1}\omega_{i-i} + \dot{\theta}_i {}^{i-1}\hat{Z}_{i-1}$$

$$^{i}\omega_i = {}^{i}R_{i-1}\left({}^{i-1}\omega_{i-i} + \dot{\theta}_i {}^{i-1}\hat{Z}_{i-1}\right)$$

$$^{i-1}v_i = {}^{i-1}v_{i-1} + {}^{i-1}\omega_i \times {}^{i-1}P_i$$

$$^{i}v_i = {}^{i}R_{i-1}\left({}^{i-1}v_{i-1} + {}^{i-1}\omega_i \times {}^{i-1}P_i\right)$$

Para juntas prismáticas:

$$^{i}\omega_i = {}^{i}R_{i-1} {}^{i-1}\omega_{i-i}$$

$$^{i}v_i = {}^{i}R_{i-1}\left({}^{i-1}v_{i-1} + {}^{i-1}\omega_i \times {}^{i-1}P_i + \dot{d}_i {}^{i-1}Z_{i-1}\right)$$

# 4 Método de Whitney [3] para Cálculo do Jacobiano [1]

O jacobiano é um operador linear. Portanto, pode-se utilizar superposição para obter a velocidade da garra em função das velocidades das juntas. Assim, a parcela de velocidade cartesiana da garra em relação ao sistema de coordenadas da base, representada no sistema de coordenadas da base, devido à velocidade da junta $i$ é dada por

$$^{0}V_n^i = \begin{cases} {}^{0}R_{i-1}\left({}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} \times {}^{i-1}P_n\right)\dot{q}_i & \text{para junta rotacional} \\ {}^{0}R_{i-1}{}^{i-1}\hat{Z}_{i-1}\dot{q}_i & \text{para junta prismática} \end{cases} \tag{2}$$

Analogamente, a parcela de velocidade angular da garra em relação ao sistema de coordenadas da base, representada no sistema de coordenadas da base, devido à velocidade da junta $i$ é dada por

$$^{0}\Omega_n^i = \begin{cases} {}^{0}R_{i-1}{}^{i-1}\hat{Z}_{i-1}\dot{q}_i & \text{para junta rotacional} \\ 0 & \text{para junta prismática} \end{cases} \tag{3}$$

Assim, a $i$-ésima coluna do jacobiano representado no sistema de coordenadas de base será dada por

$$J_i(q) = \begin{cases} \begin{bmatrix} {}^{0}R_{i-1}\left({}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} \times {}^{i-1}P_n\right) \\ {}^{0}R_{i-1}{}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} \end{bmatrix} & \text{para junta rotacional} \\ \begin{bmatrix} {}^{0}R_{i-1}{}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} & \text{para junta prismática} \end{cases}$$

$$\nu = \begin{bmatrix} V(t) \\ \Omega(t) \end{bmatrix} = J(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} J_1(q) & \vdots & J_2(q) & \vdots & \cdots & \vdots & J_n(q) \end{bmatrix}\dot{q}$$

# 5 Jacobiano Inverso

Se for desejado o mapeamento das velocidades cartesianas nas velocidades das juntas, pode-se inverter a expressão (1), obtendo-se:

$$\dot{q} = {}^{0}J^{-1}(q){}^{0}\nu$$

## 6 Jacobiano no Domínio da Força

Como o trabalho possui dimensão de energia, ele deve ser o mesmo tanto em coordenadas cartesianas quanto em coordenas de junta. Portanto, tem-se

$$\mathcal{F} \cdot \delta\mathcal{X} = \tau \cdot \delta\Theta$$

que também pode ser escrito na forma

$$\mathcal{F}^T \delta\mathcal{X} = \tau^T \delta\Theta$$

A expressão de definição do jacobiano também pode ser escrita na forma

$$\delta\mathcal{X} = J\delta\Theta$$

e portanto pode-se escrever

$$\mathcal{F}^T J\delta\Theta = \tau^T \delta\Theta$$

de onde tem-se

$$\mathcal{F}^T J = \tau^T$$

e transpondo-se ambos os lados chega-se à:

$$\tau = J^T \mathcal{F}$$

Ou seja, o jacobiano transposto mapeia forças estática agindo na garra para torque nas juntas.

## 7 Mapeamento de Acelerações [2]

Derivando-se em relação ao tempo a expressão (1) obtém-se

$$\dot{\nu} = \dot{J}(q, \dot{q})\dot{q} + J(q)\ddot{q}$$

Considerando-se apenas a contribuição da $i$-ésima junta tem-se

$$\dot{\nu}_i = \dot{J}_i(q, \dot{q})\dot{q}_i + J_i(q)\ddot{q}_i$$

Resolvendo-se para $\dot{J}_i(q)$ tem-se

$$\dot{J}_i(q, \dot{q}) = (\dot{\nu}_i - J_i(q)\ddot{q}_i)\, \dot{q}_i^{-1}$$

Para junta $i$ rotacional tem-se

$$\dot{J}_i(q\dot{q}) = \left( \dot{\nu}_i - \begin{bmatrix} {}^0R_{i-1} \left( {}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} \times {}^{i-1}P_n \right) \\ {}^0R_{i-1}{}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} \end{bmatrix} \ddot{q}_i \right) \dot{q}_i^{-1}$$

De (2) e (3) tem-se

$$\dot{\nu}_i = \begin{bmatrix} {}^0R_{i-1} \left( {}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} \times {}^{i-1}\dot{P}_n \right) \dot{q}_i + {}^0R_{i-1} \left( {}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} \times {}^{i-1}P_n \right) \ddot{q}_i \\ {}^0R_{i-1}{}^{i-1}\hat{Z}_{i-1}\ddot{q}_i \end{bmatrix}$$

Tem-se ainda que

$${}^{i-1}\dot{P}_n = {}^{i-1}V_n^i = {}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} \times {}^{i-1}P_n\dot{q}_i$$

e portanto

$$\dot{J}_i(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} {}^0R_{i-1} \left( {}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} \times \left( {}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} \times {}^{i-1}P_n \right) \right) \dot{q}_i^2 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_i^{-1}$$

ou ainda

$$\dot{J}_i(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} {}^0R_{i-1} \left( {}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} \times \left( {}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} \times {}^{i-1}P_n \right) \right) \dot{q}_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para junta $i$ prismática:

$$\dot{J}_i(q,\dot{q}) = \left( \dot{\nu}_i - \begin{bmatrix} {}^0R_{i-1}{}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{q}_i \right) \dot{q}_i^{-1}$$

De (2) e (3) tem-se

$$\dot{\nu}_i = \begin{bmatrix} {}^0R_{i-1}{}^{i-1}\hat{Z}_{i-1}\ddot{q}_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

o que resulta

$$\dot{J}_i(q,\dot{q}) = 0$$

# Referências


[1] K. S. Fu, R. C. Gonzales, and C. S. G. Lee. *Robotics Control, Sensing, Vision and Intelligence*. Industrial Engineering Series. McGraw-Hill, New York, 1987.

[2] W. F. Lages. Ambiente para controle em tempo real e simulação de manipuladores robóticos. Tese (mestrado em engenharia eletrônica e computação), Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP, setembro 1993. Orientador: Elder M. Hemerly.

[3] D. E. Whitney. The mathematics of coordinated control of prosthetic arms and manipulator. *Trans. ASME J. Dynamic Systems, Measurement and Control*, 94(4):303–309, 1972.