Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Elétrica
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
ELE00070 Tópicos Especiais em Controle e Automação I

Formulação de Newton-Euler

Prof. Walter Fetter Lages

27 de agosto de 2007

1 Introdução

O formalismo de Newton-Euler é baseado nas equações de Newton (1) e de Euler (2):

$$F = m\dot{v}_c \tag{1}$$

$$N = {}^cI\dot{\omega} + \omega \times {}^cI\omega \tag{2}$$

1.1 Dedução da Equação de Euler

$$\frac{d}{dt}\left({}^{C_0}I\omega_i\right) = {}^0N_i$$

onde

${}^{C_0}I$**:** tensor de inércia em relação ao sistema $\{0\}$

ω_i**:** velocidade angular do sistema $\{i\}$ descrita no sistema $\{0\}$

${}^0N_i$**:** torque total no centro de massa do elo $\{i\}$ expresso no sistema $\{0\}$

Mas

$${}^{C_0}I = {}^0R_i {}^{C_i}I {}^0R_i^T$$

$$\omega_i = {}^0\omega_i = {}^0R_i {}^i\omega_i$$

$$^0N_i = {}^0R_i{}^iN_i$$

Portanto

$$\frac{d}{dt}\left({}^0R_i{}^{C_i}I^0R_i^{T0}R_i{}^i\omega_i\right) = {}^0R_i{}^iN_i$$

e como ${}^{C_i}I$ é constante:

$${}^0R_i\left({}^{C_i}I^i\dot{\omega}_i\right) + {}^0\omega_i \times {}^0R_i\left({}^{C_i}I^i\omega_i\right) = {}^0R_i{}^iN_i$$

$${}^{C_i}I^i\dot{\omega}_i + {}^0\omega_i \times {}^{C_i}I^i\omega_i = {}^iN_i$$

2 Aceleração Linear

Tem-se que

$${}^AV_Q = {}^AR_B{}^BV_Q + {}^A\Omega_B \times {}^AR_B{}^BQ$$

Portanto a aceleração será,

$${}^A\dot{V}_Q = \frac{d}{dt}\left({}^AR_B{}^BV_Q\right) + {}^A\dot{\Omega}_B \times {}^AR_B{}^BQ + {}^A\Omega_B \times \frac{d}{dt}\left({}^AR_B{}^BQ\right) \tag{3}$$

Por outro lado,

$${}^AV_Q = \frac{d^AQ}{dt} = {}^AR_B{}^BV_Q + {}^A\Omega_B \times {}^AR_B{}^BQ$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left({}^AR_B{}^BQ\right) = {}^AR_B{}^BV_Q + {}^A\Omega_B \times {}^AR_B{}^BQ \tag{4}$$

similarmente, pode-se obter

$$\frac{d}{dt}\left({}^AR_B{}^BV_Q\right) = {}^AR_B{}^B\dot{V}_Q + {}^A\Omega_B \times {}^AR_B{}^BV_Q \tag{5}$$

Substituindo-se (5) e (4) em (3),

$${}^A\dot{V}_Q = {}^AR_B{}^B\dot{V}_Q + {}^A\Omega_B \times {}^AR_B{}^BV_Q + {}^A\dot{\Omega}_B \times {}^AR_B{}^BQ + {}^A\Omega_B \times \left({}^AR_B{}^BV_Q + {}^A\Omega_B \times {}^AR_B{}^BQ\right)$$

ou

$$ {}^{A}\dot{V}_Q = {}^{A}R_B\,{}^{B}\dot{V}_Q + 2\,{}^{A}\Omega_B \times {}^{A}R_B\,{}^{B}V_Q + {}^{A}\dot{\Omega}_B \times {}^{A}R_B\,{}^{B}Q + {}^{A}\Omega_B \times \left({}^{A}\Omega_B \times {}^{A}R_B\,{}^{B}Q\right) \tag{6} $$

A expressão (6) é válida quando a origem do sistema {A} coincide com a origem do sistema {B}. Para o caso genérico, quanto o sistema {B} está se movendo em relação ao sistema {A}, é necessário adicionar um termo que considere a aceleração da origem de {B}, ou seja:

$$ {}^{A}\dot{V}_Q = {}^{A}\dot{V}_{Borg} + {}^{A}R_B\,{}^{B}\dot{V}_Q + 2\,{}^{A}\Omega_B \times {}^{A}R_B\,{}^{B}V_Q + {}^{A}\dot{\Omega}_B \times {}^{A}R_B\,{}^{B}Q + {}^{A}\Omega_B \times \left({}^{A}\Omega_B \times {}^{A}R_B\,{}^{B}Q\right) \tag{7} $$

Um caso particular de interesse ocorre quando ${}^{B}Q$ é uma constante em relação a {B}, ou seja:

$$ {}^{B}V_Q = {}^{B}\dot{V}_Q = 0 $$

Neste caso, tem-se

$$ {}^{A}\dot{V}_Q = {}^{A}\dot{V}_{Borg} + {}^{A}\dot{\Omega}_B \times {}^{A}R_B\,{}^{B}Q + {}^{A}\Omega_B \times \left({}^{A}\Omega_B \times {}^{A}R_B\,{}^{B}Q\right) \tag{8} $$

A expressão (8) é usada para calcular a aceleração linear de elos de robôs com juntas rotacionais.

3 Aceleração Angular

Seja o sistema {B} rodando em relação ao sistema {A} com ${}^{A}\Omega_B$ e o sistema {C} rodando em relação ao sistema {B} com ${}^{B}\Omega_C$. Logo,

$$ {}^{A}\Omega_C = {}^{A}\Omega_B + {}^{A}R_B\,{}^{B}\Omega_C \tag{9} $$

Diferenciando:

$$ {}^{A}\dot{\Omega}_C = {}^{A}\dot{\Omega}_B + \frac{d}{dt}\left({}^{A}R_B\,{}^{B}\Omega_C\right) $$

Como

$$ \frac{d}{dt}\left({}^{A}R_B\,{}^{B}\Omega_C\right) = {}^{A}R_B\,{}^{B}\dot{\Omega}_C + {}^{A}\Omega_B \times {}^{A}R_B\,{}^{B}\Omega_C $$

tem-se

$$ {}^{A}\dot{\Omega}_C = {}^{A}\dot{\Omega}_B + {}^{A}R_B\,{}^{B}\dot{\Omega}_C + {}^{A}\Omega_B \times {}^{A}R_B\,{}^{B}\Omega_C \tag{10} $$

A expressão (10) é usada para calcular a aceleração angular de elos de robôs.

4 Formalismo de Newton-Euler

O formalismo de Newton-Euler é um procedimento iterativo para calcular os torques nas juntas do robô. O procedimento é baseado em iterações diretas e iterações reversas. As iterações diretas calculam as acelerações e velocidades dos elos do robô a partir da base em direção à garra. As iterações reversas calculam os torques da garra para a base do robô.

4.1 Iterações Diretas

4.1.1 Velocidades e Acelerações Angulares dos Elos com Juntas Rotacionais

Fazendo-se $A = i-1$, $B = i-1$ e $C = i$ em (9) e (10) e considerando-se que a velocidade angular do elo i em relação ao elo $i-1$ é dada por $\dot{\theta}_i{}^{i-i}\hat{Z}_{i-i}$, tem-se

$$ {}^{i\text{-}1}\omega_i = {}^{i-1}\omega_{i-1} + {}^{i-1}R_{i-1}\dot{\theta}_i{}^{i-i}\hat{Z}_{i-i} $$

e

$$ {}^{i\text{-}1}\dot{\omega}_i = {}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} + {}^{i-1}R_{i-1}\ddot{\theta}_i{}^{i-i}\hat{Z}_{i-i} + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times {}^{i-1}R_{i-1}\dot{\theta}_i{}^{i-i}\hat{Z}_{i-i} $$

ou

$$ {}^{i-1}\omega_i = {}^{i-1}\omega_{i-1} + \dot{\theta}_i{}^{i-i}\hat{Z}_{i-i} $$

e

$$ {}^{i-1}\dot{\omega}_i = {}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} + \ddot{\theta}_i{}^{i-i}\hat{Z}_{i-i} + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times \dot{\theta}_i{}^{i-i}\hat{Z}_{i-i} $$

Para obter-se uma expressão que possa ser utilizada iterativamente, é interessante ter-se ω_i e $\dot{\omega}_i$ representadas no sistema associado ao elo i. Assim,

$$ {}^{i}\omega_i = {}^{i}R_{i-1}\left({}^{i-1}\omega_{i-1} + \dot{\theta}_i{}^{i-i}\hat{Z}_{i-i}\right) \tag{11} $$

e

$$ {}^{i}\dot{\omega}_i = {}^{i}R_{i-1}\left({}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} + \ddot{\theta}_i{}^{i-i}\hat{Z}_{i-i} + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times \dot{\theta}_i{}^{i-i}\hat{Z}_{i-i}\right) \tag{12} $$

4.1.2 Acelerações Lineares dos Elos com Juntas Rotacionais

Fazendo-se $A = i - 1$, $B = i - 1$ e $Q = P_{iorg}$ em (8), tem-se

$$^{i-1}\dot{v}_i = {}^{i-1}\dot{v}_{i-1} + {}^{i-1}\dot{\omega}_i \times {}^{i}R_{i-1}{}^{i-1}P_{iorg} + {}^{i-1}\omega_i \times \left({}^{i-1}\omega_i \times {}^{i}R_{i-1}{}^{i-1}P_{iorg}\right)$$

portanto,

$$^{i}\dot{v}_i = {}^{i}R_{i-1}{}^{i-1}\dot{v}_{i-1} + {}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}R_{i-1}{}^{i-1}P_{iorg} + {}^{i}\omega_i \times \left({}^{i}\omega_i \times {}^{i}R_{i-1}{}^{i-1}P_{iorg}\right) \quad (13)$$

4.1.3 Juntas Prismáticas

As expressões (11), (12) e (13) são válidas para juntas rotacionais. Para juntas prismáticas as expressões tornam-se:

$$^{i}\omega_i = {}^{i}R_{i-1}{}^{i-1}\omega_{i-1} \quad (14)$$

$$^{i}\dot{\omega}_i = {}^{i}R_{i-1}{}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} ^{i}\dot{v}_i &= {}^{i}R_{i-1}{}^{i-1}\dot{v}_{i-1} + {}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}R_{i-1}{}^{i-1}P_{iorg} + {}^{i}\omega_i \times \left({}^{i}\omega_i \times {}^{i}R_{i-1}{}^{i-1}P_{iorg}\right) \\ &+ 2{}^{i}\omega_i \times {}^{i}R_{i-1}\dot{d}_i{}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} + {}^{i}R_{i-1}\ddot{d}_i{}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} \quad (16) \end{aligned}$$

4.1.4 Aceleração do Centro de Massa

Para utilização da lei de Newton é necessário ter-se a aceleração no centro de massa do elo, e não na ponta do elo onde usualmente (segundo as convenções de Denavit-Hartenberg) está o sistema de coordenadas associado ao elo, conforme a figura 1. Assim, utilizando-se novamente a expressão (8), tem-se:

$$^{i}\dot{v}_{ci} = {}^{i}\dot{v}_i + {}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}P_{ci} + {}^{i}\omega_i \times \left({}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{ci}\right) \quad (17)$$

4.2 Iterações Reversas

4.2.1 Torques e Forças nos Elos

Através das equações de Newton (1) e de Euler (2) pode-se calcular os torques e forças de reação gerados pelas acelerações agindo nos elos:

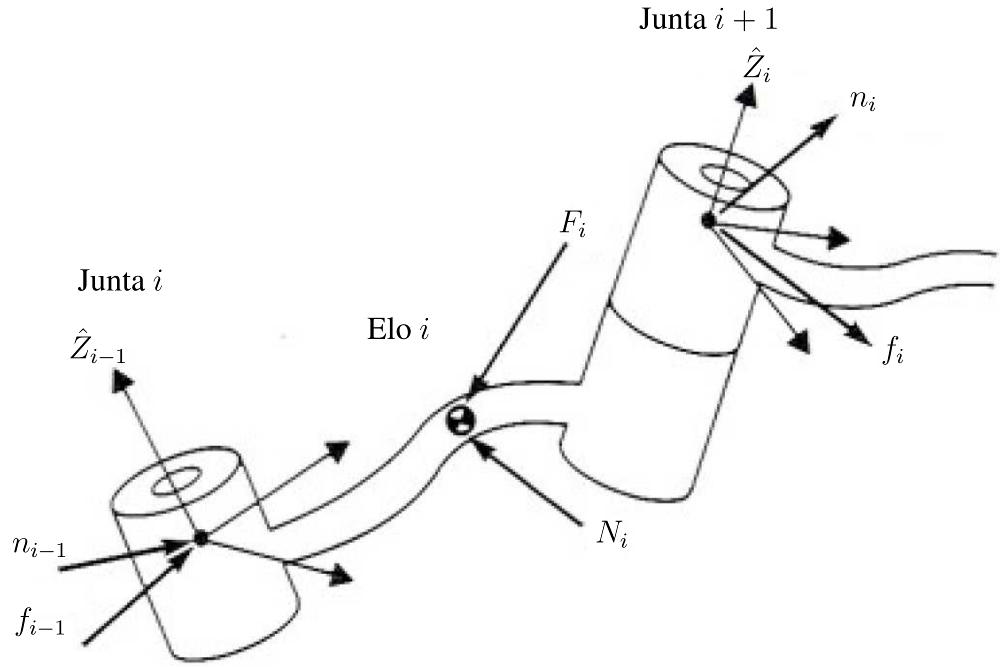

Figura 1: Forças nos elos.

$$^{i}F_i = m_i{}^{i}\dot{v}_{ci} \tag{18}$$

$$^{i}N_i = {}^{ci}I_i{}^{i}\dot{\omega}_i + {}^{i}\omega_i \times {}^{ci}I_i{}^{i}\omega_i \tag{19}$$

4.2.2 Balanço de Forças e Momentos

Seja fi a força exercida pelo elo i no elo $i+1$ e n_i o torque exercido pelo elo i no elo $i+1$. Então, o balanço de forças agindo sobre o elo i é:

$$^{i}F_i = {}^{i}R_{i-1}{}^{i-1}f_{i-1} - {}^{i}f_i$$

$$^{i}N_i = {}^{i}R_{i-1}{}^{i-1}n_{i-1} - {}^{i}n_i + \left({}^{i}P_{i-1} - {}^{i}P_{ci}\right) \times {}^{i}R_{i-1}{}^{i-1}f_{i-1} + {}^{i}P_{ci} \times {}^{i}f_i$$

e portanto as forças e torques na junta i, serão

$$^{i-1}f_{i-1} = {}^{i-1}R_i\left({}^{i}F_i + {}^{i}f_i\right) \tag{20}$$

$$ {}^{i-1}n_{i-1} = {}^{i-1}R_i \left[{}^iN_i + {}^in_i + \left({}^iP_{ci} - {}^iP_{i-1} \right) \times {}^iR_{i-1}{}^{i-1}f_{i-1} - {}^iP_{ci} \times {}^if_i \right] \quad (21) $$

É importante perceber que ${}^{i-1}f_{i-1}$ e ${}^{i-1}n_{i-1}$ são vetores com três componentes. No entanto, tipicamente a junta tem apenas um atuador que fornece torque ou força na direção do eixo ${}^{i-1}\hat{Z}_{i-1}$. Ou seja, o torque ou a força fornecida pelo atuador da junta i é:

$$ \tau_i = {}^{i-1}n_{i-1}^T\,{}^{i-1}\hat{Z}_{i-1}, \text{ se a junta for rotacional, ou} \quad (22) $$

$$ \mathcal{F}_i = {}^{i-1}f_{i-1}^T\,{}^{i-1}\hat{Z}_{i-1}, \text{ se a junta for prismática.} \quad (23) $$

Os componentes de ${}^{i-1}f_{i-1}$ e ${}^{i-1}n_{i-1}$ nas direções ${}^{i-1}\hat{X}_{i-1}$ e ${}^{i-1}\hat{Y}_{i-1}$ são suportadas pela própria estrutura mecânica do manipulador e não pelo atuador em sí.

4.3 Procedimento Iterativo de Newton-Euler

4.4 Inicialização

$$ {}^0\dot{v}_0 = {}^0\omega_0 = {}^0\dot{\omega}_0 = 0 $$

$$ {}^{n+1}f_{n+1} = \text{forças externas agindo na garra} $$

$$ {}^{n+1}n_{n+1} = \text{torques externos agindo na garra} $$

4.4.1 Iterações Diretas

$$ i = 1, 2, \ldots, n $$

$$ {}^i\omega_i = \begin{cases} {}^iR_{i-1}\left({}^{i-1}\omega_{i-1} + \dot{\theta}_i\,{}^{i-i}\hat{Z}_{i-i} \right) & \text{, se a junta } i \text{ for rotacional} \\ {}^iR_{i-1}{}^{i-1}\omega_{i-1} & \text{, se a junta } i \text{ for prismática} \end{cases} $$

$$ {}^i\dot{\omega}_i = \begin{cases} {}^iR_{i-1}\left({}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} + \ddot{\theta}_i\,{}^{i-i}\hat{Z}_{i-i} + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times \dot{\theta}_i\,{}^{i-i}\hat{Z}_{i-i} \right) & \text{, se a junta } i \text{ for rotacional} \\ {}^iR_{i-1}{}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} & \text{, se a junta } i \text{ for prismática} \end{cases} $$

$$
{}^{i}\dot{v}_i = \begin{cases} {}^{i}R_{i-1}{}^{i-1}\dot{v}_{i-1} + {}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}R_{i-1}{}^{i-1}P_{iorg} + \\ {}^{i}\omega_i \times \left({}^{i}\omega_i \times {}^{i}R_{i-1}{}^{i-1}P_{iorg}\right) & \text{, se a junta } i \text{ for rotacional} \\ \\ {}^{i}R_{i-1}{}^{i-1}\dot{v}_{i-1} + {}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}R_{i-1}{}^{i-1}P_{iorg} + \\ {}^{i}\omega_i \times \left({}^{i}\omega_i \times {}^{i}R_{i-1}{}^{i-1}P_{iorg}\right) \\ +2{}^{i}\omega_i \times {}^{i}R_{i-1}\dot{d}_i{}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} + {}^{i}R_{i-1}\ddot{d}_i{}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} & \text{, se a junta } i \text{ for prismática} \end{cases}
$$

$$
{}^{i}\dot{v}_{ci} = {}^{i}\dot{v}_i + {}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}P_{ci} + {}^{i}\omega_i \times \left({}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{ci}\right)
$$

4.4.2 Iterações Reversas

$$
i = n, n-1, \ldots, 1
$$

$$
{}^{i}F_i = m_i{}^{i}\dot{v}_{ci}
$$

$$
{}^{i}N_i = {}^{ci}I_i{}^{i}\dot{\omega}_i + {}^{i}\omega_i \times {}^{ci}I_i{}^{i}\omega_i
$$

$$
{}^{i-1}f_{i-1} = {}^{i-1}R_i\left({}^{i}F_i + {}^{i}f_i\right)
$$

$$
{}^{i-1}n_{i-1} = {}^{i-1}R_i\left[{}^{i}N_i + {}^{i}n_i + \left({}^{i}P_{ci} - {}^{i}P_{i-1}\right) \times {}^{i}R_{i-1}{}^{i-1}f_{i-1} - {}^{i}P_{ci} \times {}^{i}f_i\right]
$$

$$
\tau_i = \begin{cases} {}^{i-1}n_{i-1}^{T}{}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} & \text{, se a junta for rotacional, ou} \\ \\ {}^{i-1}f_{i-1}^{T}{}^{i-1}\hat{Z}_{i-1} & \text{, se a junta for prismática.} \end{cases}
$$