

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Sistemas Elétricos de Automação e Energia
ENG10026 Robótica A

Modelagem Cinemática e Dinâmica de Robôs Móveis

Prof. Walter Fetter Lages

4 de setembro de 2016

1 Introdução

Existem basicamente três métodos para acionamento de robôs móveis: a) através de rodas, b) através de lagartas e c) através de pernas. O acionamento através de rodas é o mais utilizado, por ser de fácil construção e adaptar-se relativamente bem às condições de operação em ambientes *in-door* e ambientes *out-door* pavimentados, onde as irregularidades do solo não são muito severas. A utilização do acionamento através de lagartas ou através de pernas restringe-se à operação em ambientes *out-door* hostis, devido à sua maior facilidade em transpor obstáculos.

A utilização limitada do acionamento através de pernas deve-se à sua construção mecânica mais complexa em relação aos outros métodos de acionamento. Além disso, geralmente necessita um maior número de atuadores e o projeto do sistema de controle torna-se mais complicado, pois é necessário se considerar o equilíbrio do robô. Um exemplo de robô acionado por pernas é o Ambler [9] desenvolvido pela NASA.

O acionamento através de lagartas possui uma construção relativamente simples. No entanto, a operação normal deste tipo de acionamento baseia-se intencionalmente no deslizamento das lagartas. Isto faz com que métodos de determinação de pose, como o *dead-reckoning* tenham um desempenho muito ruim. Em [2] é apresentado um método para melhorar o desempenho do *dead-reckoning* deste tipo de robô. Porém, este método apresenta limitações para aplicação em ambientes inóspitos, onde um acionamento através de lagartas seria desejável.

Aqui, seguindo a formulação de [3] serão considerados apenas robôs com acionamento através de rodas. Os modelos para robôs acionados por rodas podem ser divididos em quatro tipos: a) modelo cinemático de pose, b) modelo cinemático de configuração, c) modelo dinâmico de configuração e d) modelo dinâmico de pose.

Os modelos cinemáticos descrevem o robô em função da velocidade e orientação das rodas, enquanto os modelos dinâmicos descrevem o robô em função das forças generalizadas aplicadas pelos atuadores, por exemplo, torques nas rodas.

Os modelos de pose consideram como estado apenas a posição e orientação do robô, enquanto os modelos de configuração consideram além da pose outras variáveis internas, como por exemplo deslocamento angular das rodas. Do ponto de vista de controle da posição e orientação espacial do robô, apenas os modelos de pose são necessários.

A maioria dos trabalhos apresentados na literatura [1, 6, 8] descreve o robô em coordenadas cartesianas e utiliza apenas um modelo cinemático de pose. Um número reduzido de autores consideram também um modelo dinâmico [10]. Em [8] é utilizado um modelo cinemático de pose em coordenadas polares. A modelagem em coordenadas polares permite escrever um modelo com propriedades interessantes do ponto de vista de controle.

A seguir serão apresentados os modelos utilizados neste trabalho, seguindo a formulação semelhante a [3]. Embora apenas os modelos de pose sejam necessários para controle do robô, são apresentados também os modelos de configuração, pois o modelo dinâmico de pose é obtido a partir do modelo dinâmico de configuração.

2 Modelo Cinemático de Pose

Neste trabalho assume-se um robô móvel constituído de um corpo rígido cujas rodas não sofrem deformação e que movimenta-se no plano horizontal. A posição e a orientação do robô são descritas em relação a um sistema inercial $\{X_0, Y_0, \Theta_0\}$. Um sistema de coordenadas $\{X_c, Y_c, \Theta_c\}$ é associado ao corpo do robô, conforme detalhado na Figura 1.

Com isto, a pose do sistema $\{X_c, Y_c, \Theta_c\}$ com relação ao sistema $\{X_0, Y_0, \Theta_0\}$ será

$${}^0\xi_c = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ \theta_c \end{bmatrix} \quad (1)$$

e a rotação do sistema de coordenadas $\{X_c, Y_c, \Theta_c\}$ com relação ao sistema de coordenadas $\{X_0, Y_0, \Theta_0\}$ será descrita por

$${}^0R_c = \begin{bmatrix} \cos \theta_c & -\sin \theta_c & 0 \\ \sin \theta_c & \cos \theta_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

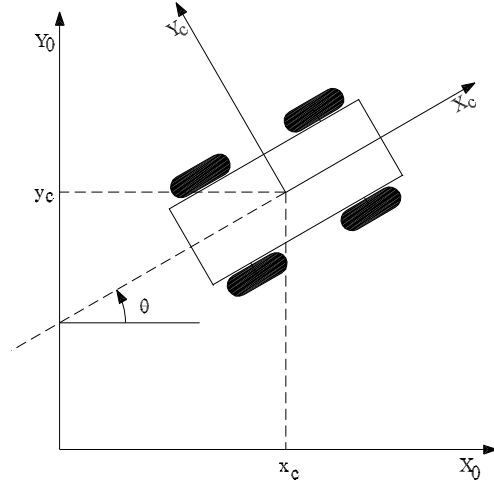


Figura 1: Definição dos sistemas de coordenadas.

Tem-se ainda que a velocidade do robô em relação ao sistema de coordenadas inercial será

$${}^0\dot{\xi}_c = \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta}_c \end{bmatrix} \quad (3)$$

que descrita no sistema de coordenadas $\{X_c, Y_c, \Theta_c\}$ será

$${}^c\dot{\xi}_c = {}^cR_0 {}^0\dot{\xi}_c \quad (4)$$

onde

$${}^cR_0 = {}^0R_c^{-1} = {}^0R_c^T = \begin{bmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c & 0 \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

2.1 Descrição das Rodas

O modelo desenvolvido aqui para as rodas assume que o plano de cada roda permaneça vertical durante o movimento e que a rotação se dá em torno de um eixo

horizontal cuja orientação em relação ao sistema de coordenadas $\{X_c, Y_c, \Theta_c\}$ pode ser fixa ou variável. Considera-se duas classes de rodas: rodas convencionais e rodas universais. Em ambos os casos, assume-se que o ponto de contato com o solo é reduzido a um único ponto.

As rodas convencionais satisfazem à condição de rolamento sem deslizamento, portanto a velocidade do ponto de contato com o solo é zero. Ou seja, tanto as componentes de velocidade paralela e ortogonal ao plano da roda são nulas.

Para uma roda universal (figura 2) apenas um dos componentes de velocidade do ponto de contato é zero. A direção desta componente é arbitrária, mas fixa em relação à orientação da roda.



Figura 2: Roda Universal.

Considerando-se as suposições acima, pode-se deduzir as restrições às quais está sujeito o movimento das rodas:

2.1.1 Rodas Convencionais Fixas

Para obter-se uma descrição das rodas é associado a cada roda um sistema de coordenadas $\{X_w, Y_w, \Theta_w\}$, cuja origem está na projeção do ponto de contato da roda, com o eixo X_w apontando na direção de movimento da roda, conforme a Figura 3.

A velocidade do sistema de coordenadas $\{X_w, Y_w, \Theta_w\}$ com relação ao sistema de coordenadas inercial $\{X_0, Y_0, \Theta_0\}$ descrita no sistema de coordenadas $\{X_c, Y_c, \Theta_c\}$ é

$${}^c\dot{\xi}_w = {}^c\dot{\xi}_c + {}^c\hat{\Theta}_c {}^c\dot{\xi}_c^T {}^c\hat{\Theta}_c \times {}^cP_w \quad (6)$$

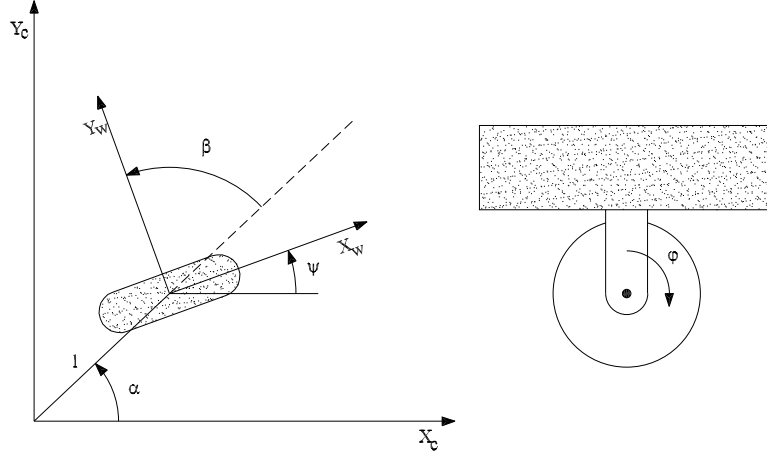


Figura 3: Definição do sistema de coordenadas da roda convencional fixa.

onde cP_w é a posição da origem do sistema $\{X_w, Y_w, \Theta_w\}$ em relação ao sistema $\{X_c, Y_c, \Theta_c\}$ dada por ${}^cP_w = [l \cos \alpha \quad l \sin \alpha \quad \psi]^T$, ${}^c\hat{\Theta}_c$ é o versor da coordenada Θ representado no sistema de coordenadas $\{X_c, Y_c, \Theta_c\}$ dado por ${}^c\hat{\Theta}_c = [0 \quad 0 \quad 1]^T$ e \times denota o produto vetorial.

A expressão (6), descrita no sistema de coordenadas $\{X_w, Y_w, \Theta_w\}$ associando ao centro da roda assume a forma

$${}^w\dot{\xi}_w = {}^wR_c {}^c\dot{\xi}_c + {}^wR_c {}^c\hat{\Theta}_c {}^c\dot{\xi}_c^T {}^c\hat{\Theta}_c \times {}^cP_w \quad (7)$$

onde wR_c é a matriz de rotação entre os sistemas de coordenadas $\{X_w, Y_w, \Theta_w\}$ e $\{X_c, Y_c, \Theta_c\}$ dada por

$${}^wR_c = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

ou ainda

$${}^w\dot{\xi}_w = {}^wR_c {}^c\dot{\xi}_c + {}^c\hat{\Theta}_c {}^c\dot{\xi}_c^T {}^c\hat{\Theta}_c \times {}^wR_c {}^cP_w \quad (9)$$

Como $\psi = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2}$ pode-se escrever wR_c na forma

$${}^wR_c = \begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) & 0 \\ \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

e utilizando-se (4), (9) pode ser reescrita como

$${}^w\dot{\xi}_w = \begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) & 0 \\ \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^cR_0{}^0\dot{\xi}_c + {}^c\hat{\Theta}_c {}^cR_0{}^0\dot{\xi}_c {}^c\hat{\Theta}_c \times \begin{bmatrix} l \sin \beta \\ l \cos \beta \\ \psi \end{bmatrix} \quad (11)$$

Por outro lado, tem-se que o segundo termo de (11) é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^cR_0{}^0\dot{\xi}_c \times \begin{bmatrix} l \sin \beta \\ l \cos \beta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l \sin \beta \\ l \cos \beta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -l \cos \beta \\ 0 & 0 & l \sin \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} {}^cR_0{}^0\dot{\xi}_c \quad (12)$$

Logo tem-se

$${}^w\dot{\xi}_w = \begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) & -l \cos \beta \\ \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & l \sin \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^cR_0{}^0\dot{\xi}_c \quad (13)$$

e como ${}^w\dot{\xi}_w = [r\dot{\varphi} \ 0 \ \dot{\theta}_c]^T$, chega-se à expressão

$$\begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) & -l \cos \beta \\ \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & l \sin \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^cR_0{}^0\dot{\xi}_c + \begin{bmatrix} -r\dot{\varphi} \\ 0 \\ -\dot{\theta}_c \end{bmatrix} = 0 \quad (14)$$

que representa as restrições a que está sujeito o movimento do robô devido à roda em questão. Esta expressão pode ainda ser desmembrada em

$$[-\sin(\alpha + \beta) \ \cos(\alpha + \beta) \ l \cos \beta] {}^cR_0{}^0\dot{\xi}_c + r\dot{\varphi} = 0 \quad (15)$$

que representa a restrição de movimento ao longo do plano da roda e

$$[\cos(\alpha + \beta) \ \sin(\alpha + \beta) \ l \sin \beta] {}^cR_0{}^0\dot{\xi}_c = 0 \quad (16)$$

que representa a restrição de movimento ortogonal ao plano da roda.

2.1.2 Rodas Convencionais Orientáveis Centradas

Uma roda convencional orientável centrada é uma roda cujo plano pode ser rotacionado em torno de um eixo vertical passando pelo centro da roda. A descrição deste tipo de roda é a mesma utilizada para rodas fixas (caso anterior), porém o ângulo β não é constante, mas variável.

2.1.3 Rodas Convencionais Orientáveis Não-centradas

Este tipo de roda também pode ter sua orientação alterada. No entanto, neste caso a rotação do plano da roda ocorre em torno de um eixo vertical que não passa através do centro da roda, conforme a Figura 4.

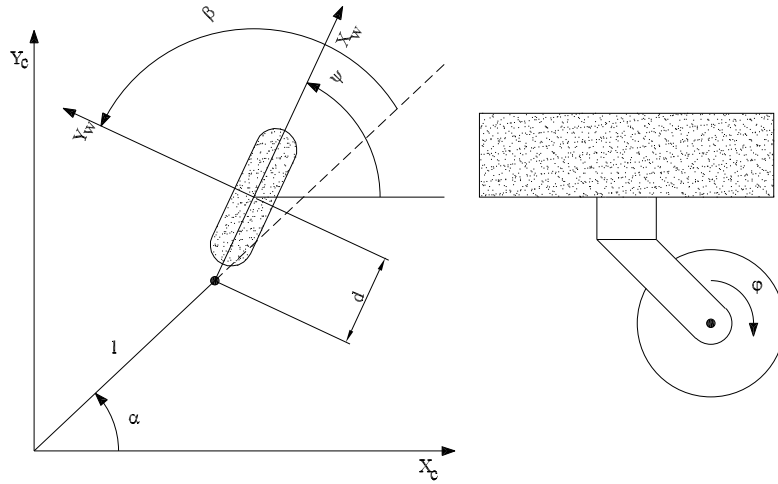


Figura 4: Roda convencional orientável não-centrada.

Neste caso, tem-se

$${}^cP_w = \begin{bmatrix} l \cos \alpha + d \cos \psi \\ l \sin \alpha + d \sin \psi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \cos \alpha + d \sin(\alpha + \beta) \\ l \sin \alpha - d \cos(\alpha + \beta) \\ \psi \end{bmatrix} \quad (17)$$

A velocidade do sistema de coordenadas $\{X_w, Y_w, \Theta_w\}$ com relação ao sistema de coordenadas inercial $\{X_0, Y_0, \Theta_0\}$ descrita no sistema de coordenadas

$\{X_c, Y_c, \Theta_c\}$ é

$${}^c\dot{\xi}_w = {}^c\dot{\xi}_c + {}^c\hat{\Theta}_c {}^c\dot{\xi}_c^T {}^c\hat{\Theta}_c \times {}^cP_w + \dot{\beta} {}^c\hat{\Theta}_c + \dot{\beta} {}^c\hat{\Theta}_c \times {}^cP_{dw} \quad (18)$$

onde ${}^cP_{dw}$ é o deslocamento da origem do sistema $\{X_w, Y_w, \Theta_w\}$ em relação ao centro de giro da roda, representado no sistema de coordenadas $\{X_c, Y_c, \Theta_c\}$, dado por

$${}^cP_{dw} = \begin{bmatrix} d \cos \psi \\ d \sin \psi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \sin(\alpha + \beta) \\ d \cos(\alpha + \beta) \\ \psi \end{bmatrix} \quad (19)$$

A expressão (18), descrita no sistema de coordenadas $\{X_w, Y_w, \Theta_w\}$ associando ao centro da roda assume a forma

$${}^w\dot{\xi}_w = {}^wR_c {}^c\dot{\xi}_c + {}^wR_c {}^c\hat{\Theta}_c {}^c\dot{\xi}_c^T {}^c\hat{\Theta}_c \times {}^cP_w + \dot{\beta} {}^c\hat{\Theta}_c + {}^wR_c {}^c\hat{\Theta}_c \times {}^cP_{dw} \dot{\beta} \quad (20)$$

ou ainda

$${}^w\dot{\xi}_w = {}^wR_c {}^c\dot{\xi}_c + {}^c\hat{\Theta}_c {}^c\dot{\xi}_c^T {}^c\hat{\Theta}_c \times {}^wR_c {}^cP_w + \dot{\beta} {}^c\hat{\Theta}_c + {}^c\hat{\Theta}_c \times {}^wR_c {}^cP_{dw} \dot{\beta} \quad (21)$$

e utilizando-se (4), (21) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} {}^w\dot{\xi}_w &= \begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) & 0 \\ \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^cR_0 {}^0\dot{\xi}_c + {}^c\hat{\Theta}_c {}^cR_0 {}^0\dot{\xi}_c {}^c\hat{\Theta}_c \times \begin{bmatrix} l \sin \beta + d \\ l \cos \beta \\ \psi \end{bmatrix} \\ &+ \dot{\beta} {}^c\hat{\Theta}_c + {}^c\hat{\Theta}_c \times \begin{bmatrix} d \\ 0 \\ \psi \end{bmatrix} \dot{\beta} \end{aligned} \quad (22)$$

Por outro lado, tem-se que os três últimos termos de (22) são

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^cR_0 {}^0\dot{\xi}_c \times \begin{bmatrix} l \sin \beta + d \\ l \cos \beta \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d\dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l \sin \beta + d \\ l \cos \beta \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d\dot{\beta} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} 0 & 0 & -l \cos \beta \\ 0 & 0 & l \sin \beta + d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} {}^cR_0 {}^0\dot{\xi}_c + \begin{bmatrix} 0 \\ d\dot{\beta} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

Logo tem-se

$${}^w\dot{\xi}_w = \begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) & -l \cos \beta \\ \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & l \sin \beta + d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^cR_0^0 \dot{\xi}_c + \begin{bmatrix} 0 \\ d\dot{\beta} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \quad (24)$$

e como ${}^w\dot{\xi}_w = [r\dot{\varphi} \ 0 \ \dot{\theta}_c + \dot{\beta}]^T$, chega-se à expressão

$$\begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) & -l \cos \beta \\ \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & l \sin \beta + d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^cR_0^0 \dot{\xi}_c + \begin{bmatrix} 0 \\ d\dot{\beta} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -r\dot{\varphi} \\ 0 \\ -\dot{\theta}_c - \dot{\beta} \end{bmatrix} = 0 \quad (25)$$

que representa as restrições a que está sujeito o movimento do robô devido à roda em questão. Esta expressão pode ainda ser desmembrada em

$$[-\sin(\alpha + \beta) \ \cos(\alpha + \beta) \ l \cos \beta] {}^cR_0^0 \dot{\xi}_c + r\dot{\varphi} = 0 \quad (26)$$

que representa a restrição de movimento ao longo do plano da roda e

$$[\cos(\alpha + \beta) \ \sin(\alpha + \beta) \ l \sin \beta + d] {}^cR_0^0 \dot{\xi}_c + d\dot{\beta} = 0 \quad (27)$$

que representa a restrição de movimento ortogonal ao plano da roda.

2.1.4 Rodas Universais

A posição deste tipo de roda em relação ao sistema de coordenadas $\{X_c, Y_c, \Theta_c\}$ é descrita de forma semelhante à roda convencional fixa. Porém, é necessário a introdução de mais um parâmetro para caracterizar a direção, com relação ao plano da roda, do componente nulo da velocidade do ponto de contato. A Figura 5 mostra a definição dos sistemas de coordenadas utilizados para descrever este tipo de roda. Note-se que o eixo X_w está alinhado com a direção do componente nulo da velocidade do ponto de contato e não com a direção do plano da roda como nos casos anteriores.

Tal como no caso das rodas fixas, tem-se

$${}^cP_w = \begin{bmatrix} l \cos \alpha \\ l \sin \alpha \\ \psi \end{bmatrix} \quad (28)$$

e a velocidade do sistema de coordenadas $\{X_w, Y_w, \Theta_w\}$ com relação ao sistema de coordenadas inercial $\{X_0, Y_0, \Theta_0\}$ descrita no sistema de coordenadas $\{X_c, Y_c, \Theta_c\}$ é

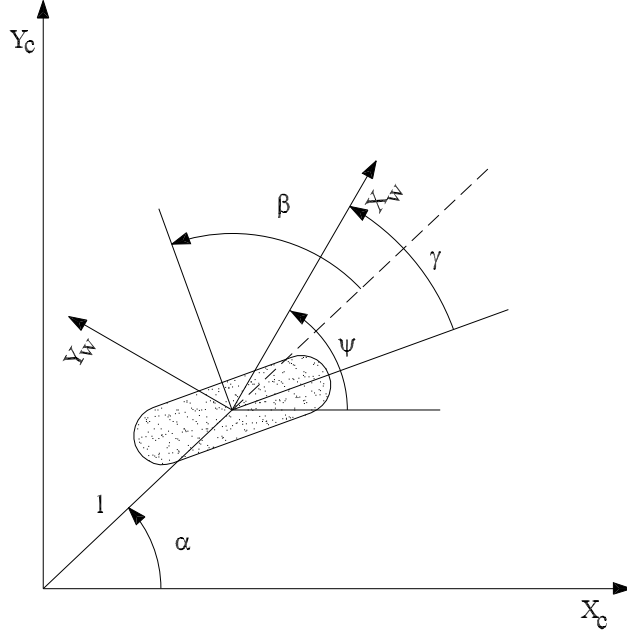


Figura 5: Definição do sistema de coordenadas para roda universal.

$${}^c\dot{\xi}_w = {}^c\dot{\xi}_c + {}^c\hat{\Theta}_c {}^c\dot{\xi}_c^T {}^c\hat{\Theta}_c \times {}^cP_w \quad (29)$$

que, representada no sistema de coordenadas $\{X_w, Y_w, \Theta_w\}$ também pode ser escrita na forma

$${}^w\dot{\xi}_w = {}^wR_c {}^c\dot{\xi}_c + {}^c\hat{\Theta}_c {}^c\dot{\xi}_c^T {}^c\hat{\Theta}_c \times {}^wR_c {}^cP_w \quad (30)$$

Porém, agora tem-se $\psi = \alpha + \beta + \gamma - \frac{\pi}{2}$ e a matriz de rotação entre os sistemas de coordenadas $\{X_w, Y_w, \Theta_w\}$ e $\{X_c, Y_c, \Theta_c\}$ será

$${}^wR_c = \begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta + \gamma) & -\cos(\alpha + \beta + \gamma) & 0 \\ \cos(\alpha + \beta + \gamma) & \sin(\alpha + \beta + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

consequentemente, tem-se

$$\begin{aligned}
{}^w\dot{\xi}_w = & \begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta + \gamma) & -\cos(\alpha + \beta + \gamma) & 0 \\ \cos(\alpha + \beta + \gamma) & \sin(\alpha + \beta + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^cR_0^0\dot{\xi}_c \\
& + {}^c\hat{\Theta}_c {}^cR_0^0\dot{\xi}_c {}^c\hat{\Theta}_c \times \begin{bmatrix} l \sin(\beta + \gamma) \\ l \cos(\beta + \gamma) \\ \psi \end{bmatrix} \quad (32)
\end{aligned}$$

O segundo termo de (32) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^cR_0^0\dot{\xi}_c \times \begin{bmatrix} l \sin(\beta + \gamma) \\ l \cos(\beta + \gamma) \\ \psi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l \sin(\beta + \gamma) \\ l \cos(\beta + \gamma) \\ \psi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -l \cos(\beta + \gamma) \\ 0 & 0 & l \sin(\beta + \gamma) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} {}^cR_0^0\dot{\xi}_c \quad (33)
\end{aligned}$$

Logo tem-se

$${}^w\dot{\xi}_w = \begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta + \gamma) & -\cos(\alpha + \beta + \gamma) & -l \cos(\beta + \gamma) \\ \cos(\alpha + \beta + \gamma) & \sin(\alpha + \beta + \gamma) & l \sin(\beta + \gamma) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^cR_0^0\dot{\xi}_c \quad (34)$$

Por outro lado, tem-se que a velocidade do robô descrita no sistema de coordenadas $\{X_w, Y_w, \Theta_w\}$ é dada por

$${}^w\dot{\xi}_w = \begin{bmatrix} r\dot{\varphi} \cos \gamma \\ {}^w\dot{\xi}_{wy} \\ \dot{\theta}_c \end{bmatrix} \quad (35)$$

Como se trata de uma roda universal, o componente de velocidade normal é desconhecido, pois a velocidade do ponto de contato nesta direção não é nula. Com isto, a restrição de movimento da roda pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} -\sin(\alpha + \beta + \gamma) & \cos(\alpha + \beta + \gamma) & l \cos(\beta + \gamma) \end{bmatrix} {}^cR_0^0\dot{\xi}_c + r \cos \gamma \dot{\varphi} = 0 \quad (36)$$

Assume-se que para uma roda universal $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$. Caso $\gamma = \frac{\pi}{2}$ a roda estaria sujeita a uma restrição equivalente à restrição de não escorregamento de uma roda convencional, perdendo o benefício de ser uma roda universal. A figura 6 mostra uma roda universal com $\gamma = 0$.

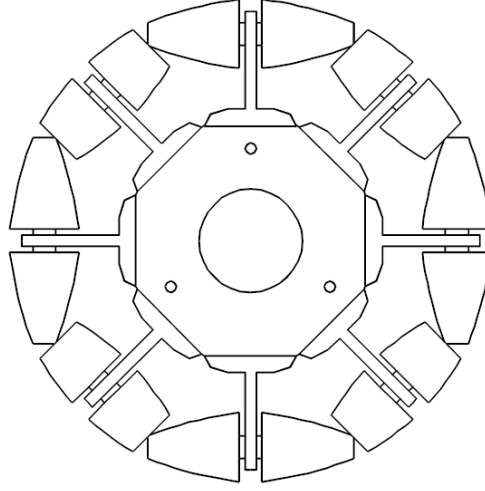


Figura 6: Roda universal com $\gamma = 0$.

2.2 Modelo Cinemático de Pose no Espaço de Estados

Considere-se um robô que possua N rodas, sendo N_f rodas convencionais fixas, N_c rodas centradas, N_{nc} rodas não centradas e N_u rodas universais. Então, as equações que descrevem as restrições (15, 16, 26, 27 e 36) podem ser escritas na forma matricial:

$$J_1(\beta_c, \beta_{nc})^c R_0^0 \dot{\xi}_c + J_2 \dot{\varphi} = 0 \quad (37)$$

$$C_1(\beta_c, \beta_{nc})^c R_0^0 \dot{\xi}_c + C_2 \dot{\beta}_{nc} = 0 \quad (38)$$

com as seguintes definições:

$$J_1(\beta_c, \beta_{nc}) = \begin{bmatrix} J_{1f} \\ J_{1c}(\beta_c) \\ J_{1nc}(\beta_{nc}) \\ J_{1u} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$C_1(\beta_c, \beta_{nc}) = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1c}(\beta_c) \\ C_{1nc}(\beta_{nc}) \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{2nc} \end{bmatrix} \quad (41)$$

onde J_{1f} , J_{1c} , J_{1nc} e J_{1u} são, respectivamente, matrizes de dimensões $N_f \times 3$, $N_c \times 3$, $N_{nc} \times 3$ e $N_u \times 3$. J_2 é uma matriz cuja diagonal são os raios das rodas ou, no caso de rodas universais, o raios das rodas multiplicados por $\cos \gamma$. C_{1f} , C_{1c} e C_{1nc} são matrizes de dimensões $N_f \times 3$, $N_c \times 3$, $N_{nc} \times 3$. C_{2nc} é uma matriz cuja diagonal são iguais as distâncias d das N_{nc} rodas não centradas.

Considerando-se apenas as primeiras $N_f + N_c$ restrições de (38) tem-se

$$C_1^*(\beta_c) {}^c R_0 {}^0 \dot{\xi}_c = 0 \quad (42)$$

sendo

$$C_1^*(\beta_c) = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1c}(\beta_c) \end{bmatrix} \quad (43)$$

e portanto ${}^c R_0 {}^0 \dot{\xi}_c$ pertence ao espaço nulo de $C_1^*(\beta_c)$.

Logo, lembrando que ${}^c R_0^{-1} = {}^c R_0^T = {}^0 R_c$, pode-se escrever

$${}^0 \dot{\xi}_c = {}^0 R_c \Sigma(\beta_c) \eta \quad (44)$$

onde as colunas de $\Sigma(\beta_c)$ formam uma base do espaço nulo de $C_1^*(\beta_c)$. Pode-se verificar facilmente que as dimensões de $\sigma(\beta_c)$ e η serão sempre $3 \times \delta_m$ e $\delta_m \times 1$.

Definindo-se $\zeta = \dot{\beta}_c$, (44) pode ser aumentada para

$$\begin{cases} {}^0 \dot{\xi}_c = {}^0 R_c \Sigma(\beta_c) \eta \\ \dot{\beta}_c = \zeta \end{cases} \quad (45)$$

que é o modelo no espaço de estados do sistema, com as coordenadas de pose ${}^0 \xi_c$ e as coordenadas angulares β_c como variáveis de estado. Como entradas lineares do sistema tem-se η e ζ . Se por outro lado, o robô não possui rodas orientáveis centradas ($N_c = 0$), a matriz Σ não dependerá de β_c e (44) não precisará ser aumentada.

Genericamente, o modelo cinemático de pose pode ser escrito na forma

$$\dot{x} = B(x)u \quad (46)$$

com

$$x = \begin{cases} {}^0 \xi_c & , N_c = 0 \\ \begin{bmatrix} {}^0 \xi_c \\ \beta_c \end{bmatrix} & , N_c \geq 0 \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} {}^0 R_c \Sigma & , N_c = 0 \\ \begin{bmatrix} {}^0 R_c \Sigma(\beta_c) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & , N_c \geq 0 \end{cases}$$

$$u = \begin{cases} \eta & , N_c = 0 \\ \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} & , N_c \geq 0 \end{cases}$$

Pode ser provado [3] que o modelo cinemático de pose (46) é irreduzível, ou seja, não existe uma transformação de coordenadas tal que uma das coordenadas é identicamente nula.

Exemplo 1 Considere o robô móvel com acionamento diferencial mostrado na Figura 7.

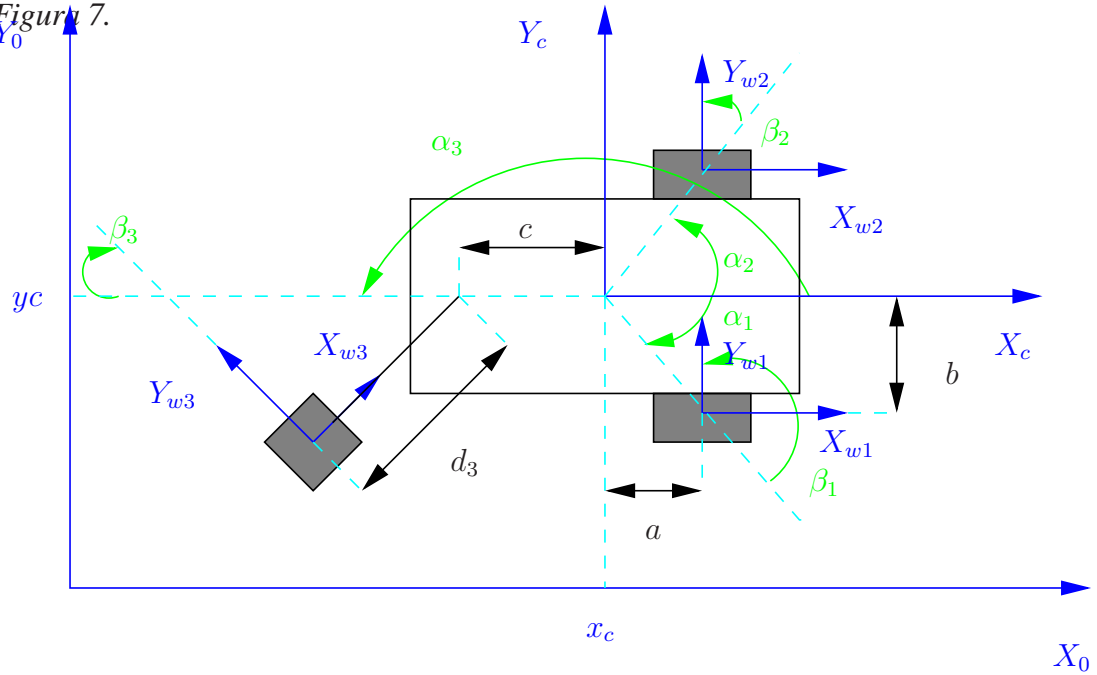


Figura 7: Robô móvel com acionamento diferencial.

Considerando as restrições (16) e (27) para cada roda e escrevendo-se na forma matricial tem-se

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha_1 + \beta_1) & \sin(\alpha_1 + \beta_1) & l_1 \sin(\beta_1) \\ \cos(\alpha_2 + \beta_2) & \sin(\alpha_2 + \beta_2) & l_2 \sin(\beta_2) \\ \cos(\alpha_3 + \beta_3) & \sin(\alpha_3 + \beta_3) & l_3 \sin(\beta_3) + d_3 \end{bmatrix} {}^cR_0 {}^0\dot{\xi}_c + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{bmatrix} \dot{\beta}_3 = 0 \quad (47)$$

Tem-se que os parâmetros das rodas são os mostrados na Tabela 1. Note que β_3 é variável.

Substituindo os parâmetros da Tabela 1 em (47) tem-se:

Tabela 1: Parâmetros das rodas do robô da Figura 7.

Roda	1	2	3
l	$\sqrt{a^2 + b^2}$	$\sqrt{a^2 + b^2}$	c
d	0	0	d_3
α	$-\arctan(b/a)$	$\arctan(b/a)$	π
β	$\frac{\pi}{2} - \alpha_1$	$\frac{\pi}{2} - \alpha_2$	β_3

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} - \alpha_1) & \sin(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} - \alpha_1) & l_1 \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha_1) \\ \cos(\alpha_2 + \frac{\pi}{2} - \alpha_2) & \sin(\alpha_2 + \frac{\pi}{2} - \alpha_2) & l_2 \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha_2) \\ \cos(\pi + \beta_3) & \sin(\pi + \beta_3) & l_3 \sin(\beta_3) + d_3 \end{bmatrix} {}^c R_0 {}^0 \dot{\xi}_c + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{bmatrix} \dot{\beta}_3 = 0$$

ou

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & l_1 \cos(\alpha_1) \\ 0 & 1 & l_2 \cos(\alpha_2) \\ -\cos(\beta_3) & -\sin(\beta_3) & l_3 \sin(\beta_3) + d_3 \end{bmatrix} {}^c R_0 {}^0 \dot{\xi}_c + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{bmatrix} \dot{\beta}_3 = 0$$

E como se pode verificar pela Figura 7, tem-se que $l_1 \cos(\alpha_1) = a$ e $l_2 \cos(\alpha_2) = a$, portanto:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \\ -\cos(\beta_3) & -\sin(\beta_3) & l_3 \sin(\beta_3) + d_3 \end{bmatrix}}_{C_1(\beta_c, \beta_{nc})=C_1(\beta_3)} {}^c R_0 {}^0 \dot{\xi}_c + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{bmatrix}}_{C_2} \dot{\beta}_3 = 0$$

Assim, considerando-se apenas as restrições referentes as rodas fixas e as rodas centradas (nesse caso estas últimas não existem) tem-se

$$C_1^*(\beta_c) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} = C_1^*$$

Tem-se que $\rho(C_1^*) = 1$ e portanto $\delta_m = \dim \mathcal{N}(C_1^*) = 3 - 1 = 2$. Por outro lado, $\delta_s = \rho(C_{1c}(\beta_c)) = 0$. Logo, trata-se de um robô da classe $(2, 0)$.

De (44) tem-se

$${}^0 \dot{\xi}_c = {}^0 R_c \Sigma(\beta_c) \eta$$

onde as colunas de $\Sigma(\beta_c)$ formam uma base do espaço nulo de $C_1^*(\beta_c)$.

Portanto:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = 0$$

De onde $\sigma = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3]^T$ é tal que $\sigma_2 + a\sigma_3 = 0$. Uma escolha conveniente¹, como se verá mais adiante é:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E portanto, tem-se que o modelo cinemático de pose será dado por:

$${}^0\dot{\xi}_c = \begin{bmatrix} \cos(\theta_c) & -\sin(\theta_c) & 0 \\ \sin(\theta_c) & \cos(\theta_c) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \eta$$

ou

$${}^0\dot{\xi}_c = \begin{bmatrix} \cos(\theta_c) & a \sin(\theta_c) \\ \sin(\theta_c) & -a \cos(\theta_c) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \eta \quad (48)$$

Note que o modelo cinemático de pose mostrado na Tabela 2 é diferente porque foi obtido com outro posicionamento dos sistemas de coordenadas. Observando a Figura 7 é possível perceber que se a origem do sistema de coordenadas $\{X_c, Y_c\}$ tivesse sido posicionada no centro do eixo das rodas fixas, ter-se-ia $a = 0$ e o modelo obtido aqui seria o mesmo mostrado na Tabela 2.

Exemplo 2 Ainda considerando-se o robô da Figura 7. De (42) tem-se:

$$\begin{aligned} C_1^{*c} R_0 {}^0\dot{\xi}_c &= 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_c) & \sin(\theta_c) & 0 \\ -\sin(\theta_c) & \cos(\theta_c) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta}_c \end{bmatrix} &= 0 \\ \begin{bmatrix} -\sin(\theta_c) & \cos(\theta_c) & a \\ -\sin(\theta_c) & \cos(\theta_c) & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta}_c \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

De onde tem-se a expressão:

¹Dessa escolha vai depender o significado físico das entradas do sistema.

$$-\dot{x}_c \sin(\theta_c) + \dot{y}_c \cos(\theta_c) + a\dot{\theta}_c = 0$$

que é a restrição não-holonômica a que está o sujeito o robô e que pode ser interpretada conforme a Figura 8.

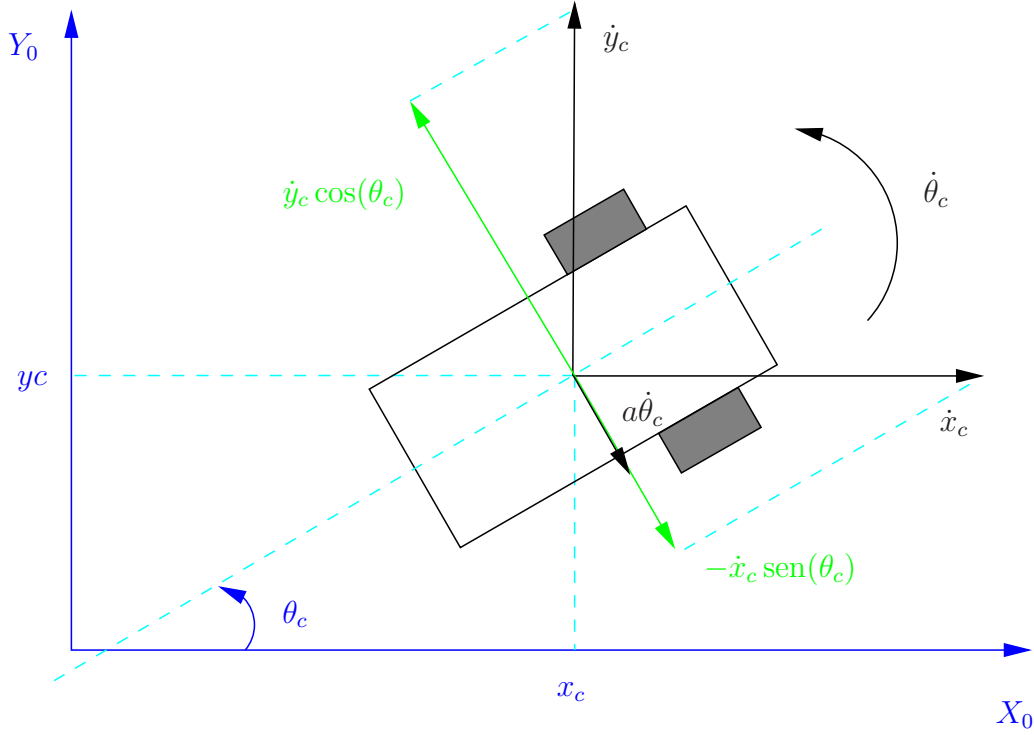


Figura 8: Interpretação da restrição não-holonômica a que está sujeito o robô móvel da Figura 7.

Exemplo 3 O significado físico de η em (48) pode ser obtido como segue:

Tem-se:

$${}^0\dot{\xi}_c = \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_c) & a \sin(\theta_c) \\ \sin(\theta_c) & -a \cos(\theta_c) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \eta$$

Portanto:

$$\dot{x}_c = \eta_1 \cos(\theta_c) + a\eta_2 \sin(\theta_c) \quad (49)$$

$$\dot{y}_c = \eta_1 \sin(\theta_c) - a\eta_2 \cos(\theta_c) \quad (50)$$

$$\dot{\theta}_c = \eta_2 \quad (51)$$

Assim, tem-se de (51) que η_2 é a velocidade angular do robô. Por outro lado, de (49) e (50) tem-se que

$$\begin{aligned}\dot{x}_c \cos(\theta_c) + \dot{y}_c \sin(\theta_c) &= \eta_1 \cos^2(\theta_c) + a\eta_2 \sin(\theta_c) \cos(\theta_c) \\ &+ \eta_1 \sin^2(\theta_c) - a\eta_2 \cos(\theta_c) \sin(\theta_c) \\ &= \eta_1\end{aligned}$$

Logo, percebendo-se que $\dot{x}_c \cos(\theta_c)$ e $\dot{y}_c \sin(\theta_c)$ são as projeções de \dot{x}_c e \dot{y}_c sobre o eixo longitudinal do robô, como mostra a Figura 9, tem-se que η_1 é a velocidade linear do robô.

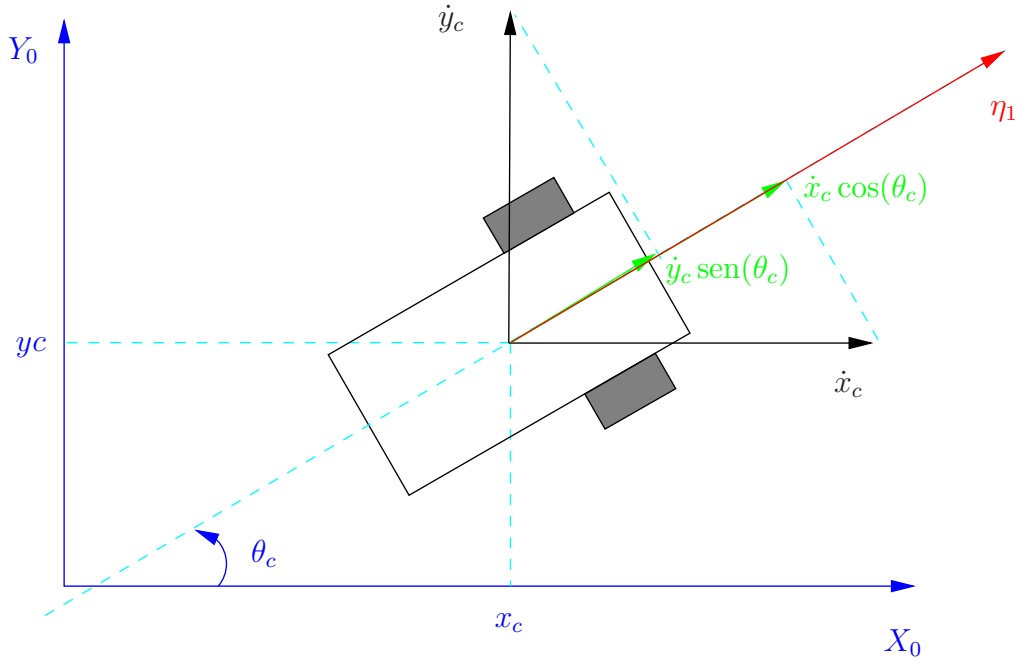


Figura 9: Significado físico de η_1 .

2.3 Restrições à Mobilidade do Robô

As limitações da mobilidade do robô estão relacionadas com o *rank* de $C_1^*(\beta_c)$.

Definição 1 (Grau de Mobilidade) Define-se grau de mobilidade de um robô móvel como

$$\delta_m = \dim \mathcal{N}(C_1^*(\beta_c)) \quad (52)$$

É evidente que $\rho(C_1^*(\beta_c)) \leq 3$. Se $\rho(C_1^*(\beta_c)) = 3$, então ${}^cR_0^0\dot{\xi}_c = 0$ e a movimentação do robô é impossível, portanto deve-se ter $\rho(C_1^*(\beta_c)) \leq 2$.

Por outro lado, $\rho(C_{1f}) = 2$ implica a existência de pelo menos 2 rodas fixas cujos planos não são paralelos. Se existirem mais de duas rodas fixas, os eixos de todas elas deverão concorrer para o mesmo centro de rotação instantâneo. Como este centro de rotação é fixo, devido aos planos das rodas não serem paralelos, o único movimento possível para o robô é a rotação em torno deste ponto. Logo, para eliminar esta limitação, impõe-se a condição de que $\rho(C_{1f}) \leq 1$, ou seja, se o robô possui mais de uma roda convencional fixa, todas elas devem estar em um mesmo eixo.

Tem-se ainda que $\rho(C_1^*(\beta_c)) \leq \rho(C_{1f}) + \rho(C_{1c}(\beta_c))$, mas a situação em que $\rho(C_1^*(\beta_c)) < \rho(C_{1f}) + \rho(C_{1c}(\beta_c))$ corresponde a ter-se os centros das rodas orientáveis centradas sobre o eixo comum das rodas fixas. Esta situação faz com que as rodas orientáveis percam a sua capacidade de atuar sobre a alocação do centro de rotação instantâneo, portanto assume-se também que $\rho(C_1^*(\beta_c)) = \rho(C_{1f}) + \rho(C_{1c}(\beta_c))$.

Definição 2 (Grau de Dirigibilidade) *O grau de dirigibilidade de um robô móvel é definido como o número de rodas convencionais orientáveis centradas que podem ser orientadas independentemente para dirigir o robô, e é dado por*

$$\delta_s = \rho(C_{1c}(\beta_c)) \quad (53)$$

Se o robô estiver equipado com mais de δ_s rodas convencionais orientadas centradas, o movimento de $N_c - \delta_s$ rodas deverá ser coordenado com as demais, de forma a garantir a existência do centro de rotação instantâneo.

Do exposto acima, conclui-se que a configuração das rodas de um robô móvel deve ser tal que as seguintes restrições sejam satisfeitas:

$$1 \leq \delta_m \leq 3 \quad (54)$$

$$0 \leq \delta_s \leq 2 \quad (55)$$

$$2 \leq \delta_m + \delta_s \leq 3 \quad (56)$$

O limite inferior de (54) significa que serão considerados apenas os casos em que é possível o movimento. A restrição (55) indica que podem existir no máximo duas rodas orientáveis centradas independentes. As configurações em que $\delta_m + \delta_s = 1$ permitem apenas a rotação em torno de um centro instantâneo fixo, sendo portanto desconsideradas. O limite superior de (56) é devido a condição de que $\rho(C_1^*(\beta_c)) \leq 2$, e portanto $\delta_s = 2$ implica $\delta_m = 1$.

Pode ser verificado que apenas cinco classes de robôs com rodas, caracterizados pelo par (δ_m, δ_s) satisfazem as restrições (54), (55) e (56): as classes (3,0), (2,0), (2,1), (1,1) e (1,2).

Classe (3,0) Nesta classe de robô tem-se $\rho(C_1^*(\beta_c)) = 0$, portanto não existem rodas fixas ou rodas orientáveis centradas. Estes robôs são denominados **omnidirecionais**, pois podem mover-se instantaneamente em qualquer direção e com qualquer reorientação.

Classe (2,0) Como $\rho(C_1^*(\beta_c)) = \rho(C_{1f}) + \rho(C_{1c}(\beta_c)) = 1$ e $\rho(C_{1c}(\beta_c)) = 0$, esta classe de robô tem uma roda fixa ou várias rodas fixas em um eixo comum, pois é necessário que $\rho(C_{1f}) = 1$. Os robôs desta classe normalmente possuem rodas operando em modo diferencial.

Classe (2,1) Esta classe de robô possui pelo menos uma roda orientável centrada e não possui rodas fixas, pois $\rho(C_{1f}) = 0$. Existindo mais de uma roda orientável centrada, o movimento destas rodas deverá ser coordenado de forma que $\rho(C_{1c}(\beta_c)) = 1$.

Classe (1,1) Neste caso tem-se $\rho(C_{1f}) = 1$ e portanto deve-se ter uma roda fixa, ou várias rodas fixas em um eixo comum e uma ou mais rodas orientáveis centradas, cujo centro não deve estar sobre o eixo das rodas fixas. Havendo várias rodas orientáveis centradas, o seu movimento deve ser coordenado de forma que $\rho(C_{1c}(\beta_c)) = 1$. Robôs construídos na forma de carros convencionais, com direção tipo Ackerman [7] pertencem a esta classe. Em [5] é apresentado um método para representar qualquer robô desta classe por um modelo de bicicleta, com apenas uma roda fixa e uma roda orientável centrada.

Classe (1,2) Robôs desta classe não possuem rodas fixas, pois $\rho(C_{1f}) = 0$. Por outro lado, possuem duas rodas orientáveis centradas, ou mais, desde que seu movimento seja coordenado de forma que $\rho(C_{1c}(\beta_c)) = 2$.

Na Tabela 2 são mostrados os modelos cinemáticos de pose particularizados para cada uma das cinco classes de robô móveis, onde d e L são parâmetros dependentes da geometria particular do robô considerado.

Definição 3 (Grau de Manobrabilidade) *O grau de manobrabilidade de um robô móvel é definido como*

$$\delta_M = \delta_m + \delta_s \quad (57)$$

Tabela 2: Modelos cinemáticos de pose.

Classe	Modelo
(3,0) omnidirecional	$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_c & -\sin \theta_c & 0 \\ \sin \theta_c & \cos \theta_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}$
(2,0) diferencial	$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_c & 0 \\ \sin \theta_c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$
(2,1)	$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta}_c \\ \dot{\beta}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_c + \beta_c) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_c + \beta_c) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \zeta \end{bmatrix}$
(1,1) carro	$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta}_c \\ \dot{\beta}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \cos \theta_c \sin \beta_c & 0 \\ d \sin \theta_c \cos \beta_c & 0 \\ \cos \beta_c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \zeta \end{bmatrix}$
(1,2)	$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta}_c \\ \dot{\beta}_{c1} \\ \dot{\beta}_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L [\sin \beta_{c1} \cos(\theta_c + \beta_{c2}) + \sin \beta_{c2} \cos(\theta_c + \beta_{c1})] & 0 & 0 \\ L [\sin \beta_{c1} \sin(\theta_c + \beta_{c2}) + \sin \beta_{c2} \sin(\theta_c + \beta_{c1})] & 0 & 0 \\ \sin(\beta_{c2} - \beta_{c1}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}$

Pode-se observar que a dimensão do vetor de entradas é igual ao grau de manobrabilidade do robô. Este parâmetro indica quantos graus de liberdade podem ser manipulados através das entradas η e ζ . Em outras palavras, indica a possibilidade de alocar-se livremente o centro instantâneo de rotação. $\delta_M = 3$ indica que o centro instantâneo de rotação pode ser livremente alocado no plano, diretamente através de η para robôs da classe(3,0) ou através da reorientação das rodas centradas para robôs das classes (1,2) e (2,1). Por outro lado, $\delta_M = 2$ indica que a posição do centro instantâneo de rotação está restrita à pertencer a linha que passa pelo centro das rodas fixas. Esta posição será determinada diretamente por η para robôs da classe (2,0) ou através da orientação das rodas centradas para robôs da classe (1,1).

No entanto, deve-se ressaltar que o número de graus de liberdade que podem ser acessados diretamente é igual a δ_m , já que apenas os graus de liberdade acessados por η podem ser acessados diretamente. A ação de ζ nas coordenadas de pose é indireta, pois é obtida através da variável β_c , calculada pela integral de ζ . Fisicamente, isto pode ser verificado considerando-se que ζ modifica apenas a orientação das rodas centradas do robô e portanto, apenas influenciará as co-

ordenadas de pose do robô se este se mover. Portanto, para um mesmo valor de δ_M , robôs com δ_m maior são mais manobráveis. Como seria de esperar, o máximo de manobrabilidade é obtido com robôs omnidirecionais, quando tem-se $\delta_M = \delta_m = 3$.

Pode ser provado [3] que o modelo cinemático de pose (46) é irreduzível, ou seja, não existe uma transformação de coordenadas tal que uma das coordenadas é identicamente nula.

3 Modelo Cinemático de Configuração

O modelo cinemático de pose foi obtido utilizando-se apenas um subconjunto das expressões (37) e (38) correspondentes às restrições (42) impostas pelas rodas fixas e pelas rodas orientáveis centradas. Utilizando-se as demais restrições, pode-se obter expressões para as velocidades angulares, $\dot{\beta}_{nc}$, e rotacionais, $\dot{\varphi}$, não consideradas no modelo cinemático de pose.

De (37) e (38) obtém-se

$$\dot{\beta}_{nc} = -C_{2nc}^{-1} C_{1nc}(\beta_{nc})^c R_0 \dot{\xi} \quad (58)$$

$$\dot{\varphi} = -J_2^{-1} J_1(\beta_c, \beta_{nc})^c R_0 \dot{\xi} \quad (59)$$

substituindo-se $\dot{\xi}$ de (44) resulta

$$\dot{\beta}_{nc} = D(\beta_{nc}) \Sigma(\beta_c) \eta \quad (60)$$

$$\dot{\varphi} = E(\beta_c, \beta_{nc}) \Sigma(\beta_c) \eta \quad (61)$$

sendo $D(\beta_{nc}) = -C_{2nc}^{-1} C_{1nc}(\beta_{nc})$ e $E(\beta_c, \beta_{nc}) = -J_2^{-1} J_1(\beta_c, \beta_{nc})$.

Definindo-se o vetor de coordenadas de configuração

$$q = \begin{bmatrix} \xi \\ \beta_c \\ \beta_{nc} \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (62)$$

pode-se escrever as expressões (45), (60) e (61) na forma

$$\dot{q} = S(q)u \quad (63)$$

com

$$S(q) = \begin{bmatrix} {}^0R_c \Sigma(\beta_c) & 0 \\ 0 & I \\ D(\beta_{nc}) \Sigma(\beta_c) & 0 \\ E(\beta_c, \beta_{nc}) \Sigma(\beta_c) & 0 \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$u = \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (65)$$

que se constitui o modelo cinemático de configuração.

Considerando-se a distribuição

$$\Delta_c(q) = \text{span} \{ \text{col}(S(q)) \} \quad (66)$$

tem-se que

$$\delta_m + N_c = \dim(\Delta_1) \leq \dim(\text{inv}(\Delta_1)) \leq \dim(q) = 3 + N_c + N_{nc} + N \quad (67)$$

onde $\text{inv}(\Delta_1)$ denota o fechamento involutivo da distribuição Δ_1 . Consequentemente, pelo teorema de Frobenius [4] tem-se que o modelo cinemático de configuração é redutível. O número de restrições de velocidades que não podem ser integradas, e portanto não podem ser eliminadas é representado pelo grau de não holonomicidade do robô.

Definição 4 (Grau de Não Holonomicidade) *O grau de não holonomicidade de um robô móvel é definido como*

$$M = \dim(\text{inv}(\Delta_1)) - (\delta_m + N_c)$$

Como o modelo cinemático de configuração é redutível tem-se que para todas as classes de robôs móveis $M > 0$. Ou seja, todas as classes de robôs móveis possuem restrições não holonômicas. Pode-se notar ainda que M depende da estrutura particular de cada robô, e portanto não tem o mesmo valor para todos os robôs de uma mesma classe.

Por outro lado, o número de restrições de velocidade que podem ser integradas e portanto eliminadas é dado pela diferença entre $\dim(q)$ e $\dim(\text{inv}(\Delta_1))$.

Exemplo 4 *Novamente, considere o robô móvel com acionamento diferencial mostrado na Figura 7. Considerando, as restrições (15) e (26) para cada roda e escrevendo-se na forma matricial tem-se*

$$\begin{bmatrix} -\sin(\alpha_1 + \beta_1) & \cos(\alpha_1 + \beta_1) & l_1 \cos(\beta_1) \\ -\sin(\alpha_2 + \beta_2) & \cos(\alpha_2 + \beta_2) & l_2 \cos(\beta_2) \\ -\sin(\alpha_3 + \beta_3) & \cos(\alpha_3 + \beta_3) & l_3 \cos(\beta_3) \end{bmatrix} {}^cR_0^0 \dot{\xi}_c + \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} \dot{\varphi} = 0 \quad (68)$$

Substituindo os parâmetros da Tabela 1 em (68) tem-se:

$$\begin{bmatrix} -\sin(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} - \alpha_1) & \cos(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} - \alpha_1) & l_1 \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha_1) \\ -\sin(\alpha_2 + \frac{\pi}{2} - \alpha_2) & \cos(\alpha_2 + \frac{\pi}{2} - \alpha_2) & l_2 \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha_2) \\ -\sin(\pi + \beta_3) & \cos(\pi + \beta_3) & l_3 \cos(\beta_3) \end{bmatrix} {}^cR_0^0 \dot{\xi}_c + \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} \dot{\varphi} = 0$$

ou

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & l_1 \sin(\alpha_1) \\ -1 & 0 & l_2 \sin(\alpha_2) \\ \sin(\beta_3) & -\cos(\beta_3) & l_3 \cos(\beta_3) \end{bmatrix} {}^cR_0^0 \dot{\xi}_c + \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} \dot{\varphi} = 0$$

E como se pode verificar pela Figura 7, tem-se que $l_1 \sin(\alpha_1) = -b$ e $l_2 \cos(\alpha_2) = b$, portanto:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & -b \\ -1 & 0 & b \\ \sin(\beta_3) & -\cos(\beta_3) & l_3 \cos(\beta_3) \end{bmatrix}}_{J_1(\beta_c, \beta_{nc})=J_1(\beta_3)} {}^cR_0^0 \dot{\xi}_c + \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}}_{J_2} \dot{\varphi} = 0$$

De (60) tem-se

$$\begin{aligned} D(\beta_{nc}) &= -C_{2nc}^{-1} C_{1nc}(\beta_3) = D(\beta_3) \\ &= -\frac{1}{d_3} \begin{bmatrix} -\cos(\beta_3) & -\sin(\beta_3) & l_3 \sin(\beta_3) + d_3 \end{bmatrix} \\ D(\beta_3) &= \begin{bmatrix} \frac{\cos(\beta_3)}{d_3} & \frac{\sin(\beta_3)}{d_3} & -\frac{l_3 \sin(\beta_3)}{d_3} - 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_3 &= D(\beta_3) \Sigma \eta \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\cos(\beta_3)}{d_3} & \frac{\sin(\beta_3)}{d_3} & -\frac{l_3 \sin(\beta_3)}{d_3} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \eta \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\cos(\beta_3)}{d_3} & \frac{-a}{d_3} \sin(\beta_3) - \frac{l_3}{d_3} \sin(\beta_3) - 1 \end{bmatrix} \eta \\ \dot{\beta}_3 &= \begin{bmatrix} \frac{\cos(\beta_3)}{d_3} & -\left(\frac{a+l_3}{d_3} \sin(\beta_3) + 1\right) \end{bmatrix} \eta \end{aligned}$$

Já de (61) tem-se:

$$\begin{aligned}
E(\beta_c, \beta_{nc}) &= -J_2^{-1} J_1(\beta_c, \beta_{nc}) = E(\beta_3) \\
&= - \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -b \\ -1 & 0 & -b \\ \text{sen}(\beta_3) & -\cos(\beta_3) & l_3 \cos(\beta_3) \end{bmatrix} \\
&= - \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_1} & 0 & -\frac{b}{r_1} \\ -\frac{1}{r_2} & 0 & \frac{b}{r_2} \\ \frac{\text{sen}(\beta_3)}{r_3} & -\frac{\cos(\beta_3)}{r_3} & l_3 \frac{\cos(\beta_3)}{r_3} \end{bmatrix} \\
E(\beta_3) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} & 0 & \frac{b}{r_1} \\ \frac{1}{r_2} & 0 & -\frac{b}{r_2} \\ -\frac{\text{sen}(\beta_3)}{r_3} & \frac{\cos(\beta_3)}{r_3} & -l_3 \frac{\cos(\beta_3)}{r_3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= E(\beta_3) \Sigma \eta \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} & 0 & \frac{b}{r_1} \\ \frac{1}{r_2} & 0 & -\frac{b}{r_2} \\ -\frac{\text{sen}(\beta_3)}{r_3} & \frac{\cos(\beta_3)}{r_3} & -l_3 \frac{\cos(\beta_3)}{r_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \eta \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} & \frac{b}{r_1} \\ \frac{1}{r_2} & -\frac{b}{r_2} \\ -\frac{\text{sen}(\beta_3)}{r_3} & \frac{-a \cos(\beta_3) - l_3 \cos(\beta_3)}{r_3} \end{bmatrix} \eta \\
\dot{\phi} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} & \frac{b}{r_1} \\ \frac{1}{r_2} & -\frac{b}{r_2} \\ -\frac{\text{sen}(\beta_3)}{r_3} & -\left(\frac{a+l_3}{r_3}\right) \cos(\beta_3) \end{bmatrix} \eta
\end{aligned}$$

Definindo-se o vetor de coordenadas de configuração:

$$q = \begin{bmatrix} {}^0\xi_c \\ \beta_3 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\xi_c \\ \beta_3 \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (69)$$

tem-se o modelo cinemático de configuração:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_c) & a \sin(\theta_c) \\ \sin(\theta_c) & -a \cos(\theta_c) \\ 0 & 1 \\ \frac{\cos(\beta_3)}{d_3} & -\left(\frac{a+l_3}{d_3} \sin(\beta_3) + 1\right) \\ \frac{1}{r_1} & \frac{b}{r_1} \\ \frac{1}{r_2} & -\frac{b}{r_2} \\ -\frac{\sin(\beta_3)}{r_3} & -\left(\frac{a+l_3}{r_3}\right) \cos(\beta_3) \end{bmatrix} \eta$$

4 Modelo Dinâmico de Configuração

Os modelos apresentados nas seções anteriores descrevem o comportamento do robô em função das velocidades das rodas. No entanto, fisicamente, as variáveis de entrada de um robô móvel são os torques aplicados pelos motores.

Utilizando-se o formalismo de Lagrange, tem-se que a dinâmica de um robô móvel com rodas é dada por [3]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} = {}^0 R_c J_1^T(\beta_c, \beta_{nc}) \lambda + {}^0 R_c C_1^T(\beta_c, \beta_{nc}) \mu \quad (70)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}_{nc}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \beta_{nc}} = C_2^T \mu + \tau_{nc} \quad (71)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = J_2^T \lambda + \tau_\varphi \quad (72)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}_c} \right) - \frac{\partial T}{\partial \beta_c} = \tau_c \quad (73)$$

onde τ_ϕ , τ_c e τ_{nc} são os torques aplicados para rotação das rodas, orientação das rodas centradas e orientação das rodas não centradas, respectivamente. T representa a energia cinética, λ é o coeficiente de Lagrange associado à restrição (37) e μ é o coeficiente de Lagrange associado à restrição (38).

Pré-multiplicando-se as expressões (70), (73) e (72) por ${}^c R_0$, $D^T(\beta_{nc})$ e $E^T(\beta_c, \beta_{nc})$, respectivamente, e somando-as, obtém-se

$$\begin{aligned}
{}^cR_0 \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) &+ D^T(\beta_{nc}) \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}_{nc}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \beta_{nc}} \right) + \\
&+ E^T(\beta_c, \beta_{nc}) \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) = \\
&= (J_1(\beta_c, \beta_{nc}) + J_2 E(\beta_c, \beta_{nc}))^T \lambda + \quad (74) \\
&+ (C_1(\beta_c, \beta_{nc}) + C_2 D(\beta_{nc}))^T \mu + \\
&+ D^T(\beta_{nc}) \tau_{nc} + E^T(\beta_c, \beta_{oc}) \tau_{\varphi}
\end{aligned}$$

porém, das definições de $D^T(\beta_{nc})$ e $E^T(\beta_c, \beta_{nc})$ tem-se

$$C_{1nc}(\beta_{nc}) + C_{2nc} = 0 \quad (75)$$

$$J_1(\beta_c, \beta_{nc}) + J_2 E(\beta_c, \beta_{nc}) = 0 \quad (76)$$

e portanto, os coeficientes de Lagrange são eliminados da expressão (75), resultando

$$\begin{aligned}
{}^cR_0 \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) &+ D^T(\beta_{nc}) \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}_{nc}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \beta_{nc}} \right) + \\
&+ E^T(\beta_c, \beta_{nc}) \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) = \quad (77) \\
&= D^T(\beta_{nc}) \tau_{nc} + E^T(\beta_c, \beta_{oc}) \tau_{\varphi}
\end{aligned}$$

A energia cinética de um robô móvel pode ser expressa por

$$T = \dot{\xi}^T R_c \left[M(\beta_{nc}) {}^cR_0 \dot{\xi} + 2V(\beta_{nc}) \dot{\beta}_{nc} + 2W \dot{\beta}_c \right] + \dot{\beta}_{nc}^T I_{nc} \dot{\beta}_{nc} + \dot{\varphi}^T I_{\varphi} \dot{\varphi} + \dot{\beta}_c^T I_c \dot{\beta}_c \quad (78)$$

onde $M(\beta_{nc})$, $V(\beta_{nc})$, W , I_{nc} , I_{φ} e I_c são funções dos parâmetros de massa e inércia dos vários corpos rígidos que formam o robô.

Substituindo-se (78) em (73) e eliminando-se as velocidades $\dot{\xi}$, $\dot{\beta}_{nc}$, $\dot{\varphi}$ e $\dot{\beta}_c$ e as acelerações $\ddot{\xi}$, $\ddot{\beta}_{nc}$, $\ddot{\varphi}$ e $\ddot{\beta}_c$ e com a utilização das expressões (45), (60) e (61) e suas derivadas obtém-se

$$\begin{aligned}
H_1(\beta_c, \beta_{nc}) \dot{\eta} + \Sigma^T(\beta_c) V(\beta_{nc}) \dot{\zeta} + f_1(\beta_c, \beta_{nc}, \eta, \zeta) &= \\
= \Sigma^T(\beta_c) [D^T(\beta_{nc}) \tau_{nc} + E^T(\beta_c, \beta_{nc}) \tau_{\varphi}] &\quad (79)
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
H_1(\beta_c, \beta_{nc}) &= \Sigma^T(\beta_c) [M(\beta_{nc}) + D^T(\beta_{nc})V^T(\beta_{nc}) + V(\beta_{nc})D(\beta_{nc}) + \\
&+ D^T(\beta_{nc})I_{nc}D(\beta_{nc}) + E^T(\beta_c, \beta_{nc})I_\varphi E(\beta_c, \beta_{nc})] \Sigma(\beta_c)
\end{aligned} \tag{80}$$

e

$$V^T(\beta_{nc})\Sigma(\beta_c)\dot{\eta} + I_c\dot{\zeta} + f_2(\beta_c, \beta_{nc}, \eta, \zeta) = \tau_c \tag{81}$$

que juntamente com (45), (60) e (61) formam o modelo dinâmico de configuração de um robô móvel com rodas genérico. Neste modelo genérico, os torques τ_φ , τ_{nc} e τ_c representam os torques que podem ser aplicados para rotação e orientação das rodas. No entanto, em um robô real, apenas alguns destes torques são efetivamente aplicados, pois geralmente utiliza-se o número mínimo de motores necessários. Pode-se facilmente concluir que cada roda centrada deve necessariamente possuir pelo menos um motor para sua orientação, pois caso contrário comportar-se-ia como uma roda fixa. Consequentemente, o vetor τ_c não pode possuir componentes identicamente nulos. Por outro lado, os vetores τ_φ e τ_{nc} podem possuir componentes identicamente nulos, desde que a rotação e a orientação das rodas às quais estes estejam associados possa ser obtida através do acionamento das demais rodas. Tem-se então, que o vetor dos torques fornecidos para rotação e orientação das rodas não centradas τ_m pode ser obtido de

$$\begin{bmatrix} \tau_{nc} \\ \tau_\varphi \end{bmatrix} = P\tau_m \tag{82}$$

onde P é uma matriz $(N_{nc}+N) \times N_m$ que seleciona os componentes de $\begin{bmatrix} \tau_{nc} & \tau_\varphi \end{bmatrix}^T$ que são efetivamente utilizados como entradas de controle. A expressão (80) pode portanto, ser reescrita como

$$H_1(\beta_c, \beta_{nc})\dot{\eta} + \Sigma^T(\beta_c)V(\beta_{nc})\dot{\zeta} + f_1(\beta_c, \beta_{nc}, \eta, \zeta) = B(\beta_c, \beta_{nc})P\tau_m \tag{83}$$

sendo $B(\beta_c, \beta_{nc}) = \Sigma^T(\beta_c) \begin{bmatrix} D^T(\beta_{nc}) & E^T(\beta_c, \beta_{nc}) \end{bmatrix}$.

É importante observar que a matriz $B(\beta_c, \beta_{nc})P$ deve possuir rank completo para quaisquer valores de β_c e β_{nc} . Se esta condição não for satisfeita, existirão valores de β_c e β_{nc} para os quais o robô tornar-se-á sub-atuado, ou seja, não existirão graus de liberdade suficientes nas entradas de controle para determinar a alocação do centro instantâneo de rotação do robô. Esta condição portanto, determina o número mínimo de motores que devem ser utilizados para uma determinada classe de robô móvel, conforme explicitado na Tabela 3.

Tabela 3: Número mínimo de motores para cada classe de robô móvel.

Classe	Motores
(3,0)	3 ¹ ou 4 ²
(2,0)	2
(2,1)	3
(1,1)	2
(1,2)	4

O modelo dinâmico de configuração pode ser escrito de forma mais simples como

$$\begin{cases} \dot{q} = S(q)u \\ H(\beta)\dot{u} + f(\beta, u) = F(\beta)\tau_0 \end{cases} \quad (84)$$

com as seguintes definições

$$\begin{aligned} \beta &= \begin{bmatrix} \beta_c \\ \beta_{nc} \end{bmatrix} \\ q &= \begin{bmatrix} \xi \\ \beta \\ \varphi \end{bmatrix} \\ u &= \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \\ H(\beta) &= \begin{bmatrix} H_1(\beta_c, \beta_{nc}) & \Sigma^T(\beta_c)V(\beta_{nc}) \\ V^T(\beta_{nc})\Sigma(\beta_c) & I_c \end{bmatrix} \\ f(\beta, u) &= \begin{bmatrix} f_1(\beta_c, \beta_{nc}, \eta, \zeta) \\ f_2(\beta_c, \beta_{nc}, \eta, \zeta) \end{bmatrix} \\ F(\beta) &= \begin{bmatrix} B(\beta_c, \beta_{nc})P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \tau_0 &= \begin{bmatrix} \tau_m \\ \tau_c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5 Modelo Dinâmico de Pose

O modelo dinâmico de configuração de um robô móvel com rodas pode ser simplificado para

¹Utilizando rodas universais.

²Utilizando rodas convencionais.

$$\begin{cases} \dot{q} = S(q)u \\ \dot{u} = v \end{cases} \quad (85)$$

utilizando-se a seguinte realimentação de estados

$$\tau_0 = F^\dagger(\beta) [H(\beta)v + f(\beta, u)] \quad (86)$$

onde $F^\dagger(\beta)$ denota uma pseudo-inversa à esquerda de $F(\beta)$.

Por outro lado, para aplicações de controle em geral, o que interessa são basicamente nas coordenadas de pose do robô, isto é, ξ . Os valores das variáveis internas β_{nc} e φ não são de interesse e consequentemente, podem ser ignorados. Com isto obtém-se o seguinte modelo dinâmico de pose

$$\begin{cases} \dot{x} = B(x)u \\ \dot{u} = v \end{cases} \quad (87)$$

mantendo-se as mesmas definições anteriores para x e u .

Este modelo descreve totalmente a dinâmica entre as coordenadas de pose ξ e as entradas de controle v . Embora as coordenadas β_{nc} e φ tenham aparentemente desaparecido do modelo, elas permanecem implicitamente na realimentação definida pela expressão (86). As propriedades estruturais deste modelo são basicamente as mesmas do modelo cinemático de pose. Portanto, este modelo também é genérico, no sentido de que é válido para qualquer classe possível de robô com rodas, e irreduzível [3].

6 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados os modelos de robôs móveis com rodas. Foram considerados quatro tipos de rodas: rodas fixas, rodas orientáveis centradas, rodas orientadas não-centradas e rodas universais. Sob hipóteses bastante realistas, como a de que as rodas não deslizam, mostrou-se que existem apenas cinco classes de robôs com rodas. Através da análise das características do modelo dinâmico foi possível deduzir o número mínimo de motores necessários para que robôs de uma determinada classe não sejam sub-atuados.

Referências

- [1] A. M. Bloch, M. Reyhanoglu, and N. H. McClamroch. Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(11):1746–1756, Nov 1992.

- [2] J. Borenstein, H. R. Everett, and L. Feng. Where am i? - sensors and methods for mobile robot positioning. Technical report, University of Michigan, Apr 1996.
- [3] G. Campion, G. Bastin, and B. D’Andréa-Novel. Structural properties and classification of kinematic and dynamical models of wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(1):47–62, Feb 1996.
- [4] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer–Verlag, Berlin, third edition, 1995.
- [5] A. Kelly. Essential kinematics for autonomous vehicles. Technical Report CMU-RI-TR-94-14, Carnegie Mellon University, May 1994.
- [6] I. Kolmanovsky and N. H. McClamroch. Developments in nonholonomic control problems. *IEEE Control Systems Magazine*, 15(6):20–36, Dec 1995.
- [7] R. T. McCloskey and R. M. Murray. Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(5):614–628, May 1997.
- [8] S. Murata and T. Hirose. On board locating system using real–time image processing for a self–navigating vehicle. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 40(1):145–153, Feb 1993.
- [9] R. G. Simons. Structured control for autonomous robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 10(1):34–43, Feb 1994.
- [10] Y. Yamamoto and X. Yun. Coordinating locomotion and manipulation of a mobile manipulator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(6):1326–1332, Jun 1994.

A Pseudo-inversa de Moore-Penrose

Pseudo-inversas são utilizadas quando é necessário realizar-se a operação inversa à realizada por uma matriz não inversível.

Existem quatro condições que definem pseudo-inversas² :

1. $TT^\dagger T = T$

2. $T^\dagger TT^\dagger = T^\dagger$

²A é hermitiana $\Leftrightarrow A = A^*$

$$3. TT^\dagger = [TT^\dagger]^*$$

$$4. T^\dagger T = [T^\dagger T]^*$$

Diversas pseudo-inversas podem ser definidas, dependendo de quais das quatro condições são satisfeitas:

$T^{\dagger 1}$ satisfaz apenas a condição 1.

$T^{\dagger 2}$ satisfaz as condições 1 e 2.

$T^{\dagger 3}$ satisfaz as condições 1, 2 e 3.

$T^{\dagger 3*}$ satisfaz as condições 1, 2 e 4.

T^\dagger satisfaz todas as quatro condições.

T^\dagger é denominada pseudo-inversa de Moore-Penrose e existe para qualquer matriz.

B Cálculo da Pseudo-inversa de Moore-Penrose

A pseudo-inversa de Moore-Penrose pode ser obtida por decomposição. Considere uma matriz genérica $T \in \mathcal{F}^{m \times n}$ com $\rho(T) = r$. Seja

$$T = FR^T$$

$$F \in \mathcal{F}^{m \times r}$$

$$R^T \in \mathcal{F}^{r \times n}$$

uma decomposição de T com $\rho(F) = \rho(R^T) = r$. Notando-se que as matrizes $(r \times r)$ $F^T F$ e $R^T R$ são de *rank* completo e portanto inversíveis, pode-se obter uma expressão para a inversa de Moore-penrose;

$$T^\dagger = (FR^T)^\dagger = R^{T\dagger} F^\dagger$$

$$T^\dagger = RR^\dagger R^{T\dagger} F^\dagger F^{T\dagger} F^T$$

$$T^\dagger = R(R^T R)^\dagger (F^T F)^\dagger F^T$$

$$T^\dagger = R (R^T R)^{-1} (F^T F)^{-1} F^T$$

que obviamente é computável, já que $R^T R$ e $F^T F$ são inversíveis. Pode-se ainda escrever:

$$T^\dagger = R (F^T F R^T R)^{-1} F^T$$

$$T^\dagger = R (F^T T R)^{-1} F^T$$

Existem dois casos especiais de T^\dagger : Inversas à direita e à esquerda. Uma matriz $T \in \mathcal{F}^{m \times n}$ é dita ser inversível à direita (ou à esquerda) se existe uma matriz T_R^{-1} (ou T_L^{-1}) tal que $T T_R^{-1} = I_m$ (ou $T_L^{-1} T = I_n$).

B.1 Inversa à Direita

A inversa de Moore-Penrose reduz-se à inversa à direita se

$$m \leq n \text{ e } \rho(T) = m \text{ rank de linhas completo}$$

Isto significa que $\rho(T) = \rho(R) = \rho(F) = m$ e $F \in \mathcal{F}^{m \times m}$. Como F é quadrada e possui *rank* completo, existe uma inversa normal F^{-1} , simplificando a expressão para a inversa de Moore-Penrose:

$$\begin{aligned} T_R^{-1} &= R[R^T R]^{-1}[F^T F]^{-1}F^T \\ &= R[R^T R]^{-1}F^{-1}[F^T]^{-1}F^T \\ &= R[R^T R]^{-1}F^{-1} \\ &= R[F(R^T R)]^{-1} \\ &= [F^{-1}T]^T[F(R^T R)]^{-1} \\ &= T^T[F R^T R F^T]^{-1} \\ &= T^T[T T^T]^{-1} \end{aligned}$$

B.2 Inversa à Esquerda

A inversa de Moore-Penrose reduz-se à inversa à esquerda se

$$m \geq n \text{ e } \rho(T) = n \text{ rank de colunas completo}$$

Isto significa que $\rho(T) = \rho(R) = \rho(F) = n$ e $R \in \mathcal{R}^{n \times n}$. Como R é quadrada e possui *rank* completo, existe uma inversa normal R^{-1} , simplificando a expressão para a inversa de Moore-Penrose:

$$\begin{aligned}
T_L^{-1} &= R[R^T R]^{-1}[F^T F]^{-1}F^T \\
&= (R^{-1})^T[F^T F]^{-1}F^T \\
&= [F^T F R^T]^{-1}F^T \\
&= [F^T T]^{-1}R^{-1}T^T \\
&= [R F^T T]^{-1}T^T \\
&= [T^T T]^{-1}T^T
\end{aligned}$$

C Propriedades da Pseudo-inversa de Moore-Penrose

A pseudo-inversa de Moore-Penrose possui diversas propriedades, algumas das quais serão utilizadas aqui:

1. T^\dagger é única
2. $T^\dagger = T^{-1}$ para T não singulares
3. $(T^\dagger)^\dagger = T$ e $0^\dagger = 0$
4. $(kT)^\dagger = (1/k)T^\dagger$ para $k \neq 0$
5. $\Re(T^\dagger) = \Re(T^T)$ e $\Im(T^\dagger) = \Im(T^T)$
6. $\rho(T^\dagger) = \rho(T)$
7. TT^\dagger e $T^\dagger T$ são ambas hermitianas e idempotentes³
8. $(TA)^\dagger = A^\dagger T^\dagger$ se uma ou mais das seguintes condições for válida
 - (a) T ou A^T possui colunas ortonormais
 - (b) T e A possuem inversas à direita e à esquerda, respectivamente
 - (c) $A = T^T$
 - (d) T é $m \times n$, A é $n \times k$ e $\rho(T) = \rho(A) = n$
 - (e) $T^T T A A^T = A A^T T^T T$
 - (f) $A A^T T^T T$ e $T^T T A A^\dagger$ forem ambas hermitianas
9. $(UTV^T)^\dagger = VT^\dagger U^T$ para quaisquer matrizes com colunas ortonormais U e V ⁴

³ A é idempotente $\Leftrightarrow A^2 = A$.

⁴ U com colunas ortonormais $\Leftrightarrow U^T U = I$

10. $T^T V T = T^\dagger V^{-1} T^{\dagger T}$ onde T é $m \times n$, $\rho(T) = m \leq n$ e V é uma matriz não singular qualquer
11. $(UTV^T)^\dagger = V^\dagger T^{-1} U^\dagger$ para T não singular
12. T^\dagger fornece a solução de mínimos quadrados para uma equação genérica na forma

$$T_j x = x_j$$

O resultado obtido é solução ótima com relação ao custo

$$J = \|T_j x - x_j\|$$

e é dado por

$$x = T_j^\dagger x_j$$