Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Sistemas Elétricos de Automação e Energia
ENG10026 Robótica-A

Modelo Cinemático Inverso

Prof. Walter Fetter Lages

27 de setembro de 2016

1 Problema Cinemático Inverso

O problema cinemático inverso consiste em obter-se os valores das variáveis de junta do manipulador a partir da posição e orientação (desejada) do efetuador final. Ou seja, deseja-se computar $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ a partir de um ${}^0T_n^d$ especificada.

Igualando-se a matriz ${}^0T_n^d$ e a matriz ${}^0T_n$ computada pelo modelo cinemático direto pode-se obter 16 equações envolvendo as variáveis de junta. Destas equações, 4 são triviais. Outras 9 são referentes à parte de rotação da matriz de transformação homogênea e portanto apenas 3 destas equações são independentes. A parte de translação da matriz de transformação homogênea fornece outras 3 equações independentes. Tem-se portanto um sistema com 6 equações e n incógnitas correspondentes às variáveis de junta.

Assim, se o manipulador tiver 6 graus de liberdade, tem-se, a princípio, um sistema de equações que pode ser solucionado para obter-se os valores das variáveis de junta para qualquer posição e orientação especificada para o efetuador final.

2 Considerações

1. Existência de Soluções
2. Multiplicidade de Soluções
3. Método de Solução
   (a) Soluções em Forma Fechada
      i. Método Algébrico
      ii. Método Geométrico

iii. Solução de Pieper

(b) Soluções em Forma Aberta

i. Métodos Numéricos

3 Método Algébrico

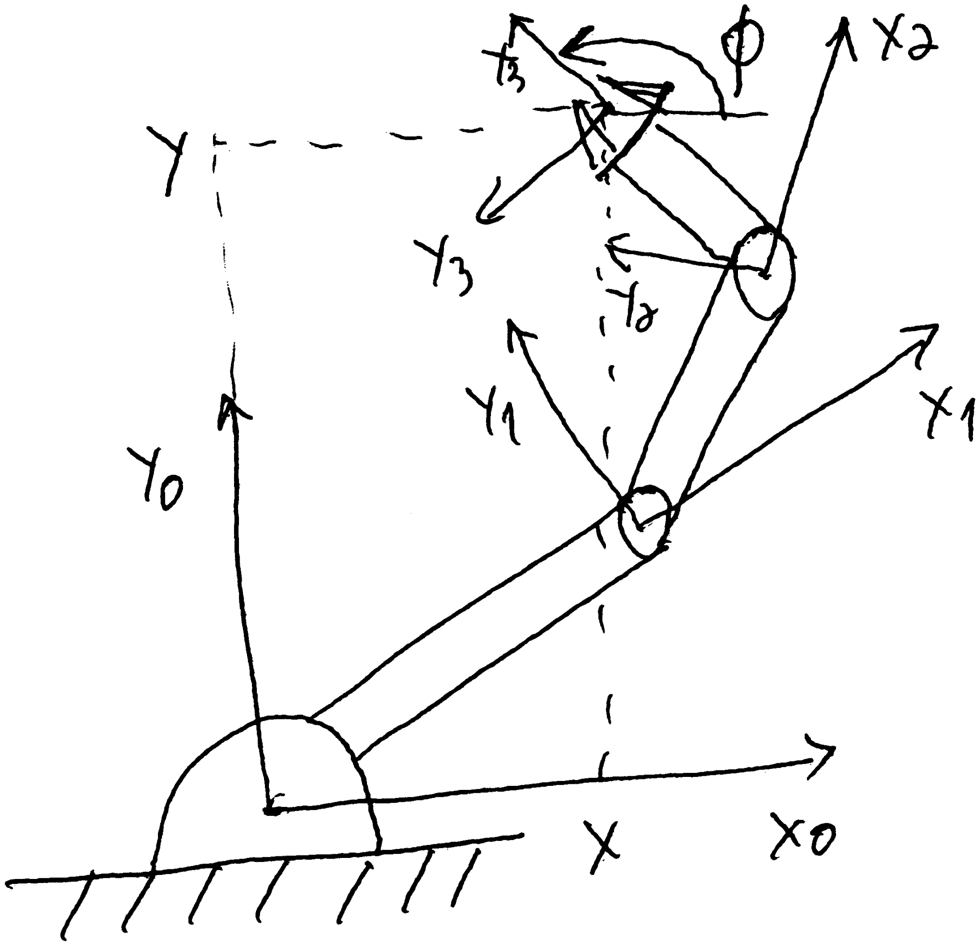

Figura 1: Modelo cinemático inverso pelo método algébrico.

$$
{}^{0}T_3 = \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 & l_1C_1 + l_2C_{12} + l_3C_{123} \\ S_{123} & C_{123} & 0 & l_1S_1 + l_2S_{12} + l_3S_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^0T_3^d = \begin{bmatrix} C_\phi & -S_\phi & 0 & x \\ S_\phi & C_\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Fazendo-se ${}^0T_3^d = {}^0T_3$ pode-se obter as equações

$$
\begin{aligned}
C_\phi &= C_{123} && (1)\\
S_\phi &= S_{123} && (2)\\
x &= l_1C_1 + l_2C_{12} + l_3C_{123} && (3)\\
y &= l_1S_1 + l_2S_{12} + l_3S_{123} && (4)
\end{aligned}
$$

Substituindo-se as expressões (1) e (2) em (3) e (4) e rearranjando-se de forma que os termos conhecidos estejam de um lado da igualdade e os termos dependentes das incógnitas estejam do outro, tem-se

$$
\begin{aligned}
x - l_3C_\phi &= l_1C_1 + l_2C_{12} && (5)\\
y - l_3S_\phi &= l_1S_1 + l_2S_{12} && (6)
\end{aligned}
$$

Elevando-se ao quadrado e somando-se as expressões (5) e (6) resulta

$$
\begin{aligned}
(x - l_3C_\phi)^2 + (y - l_3S_\phi)^2 &= l_1^2C_1^2 + 2l_1C_1l_2C_{12} + l_2^2C_{12}^2 + l_1^2S_1^2 + 2l_1S_1l_2S_{12} + l_2^2S_{12}^2\\
&= l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2\left(C_1C_{12} + S_1S_{12}\right)\\
&= l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2\cos\left(\theta_1 - (\theta_1 + \theta_2)\right)\\
&= l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2C_2
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
C_2 = \frac{(x - l_3C_\phi)^2 + (y - l_3S_\phi)^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \qquad (7)
$$

Obviamente deve-se ter $-1 \leq C_2 \leq 1$. No entanto, o valor calculado através da expressão (7) pode eventualmente estar fora desta faixa. Isto significa que o ponto (x, y, ϕ) está fora do espaço de trabalho do manipulador.

Para obter-se o valor do ângulo θ_2 deve-se evitar o uso da função $\mathrm{acos}(\,\cdot\,)$, pois desta forma perde-se a informação de quadrante do ângulo. O correto é calcular o valor de θ_2 através da função $\mathrm{atan2}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$[1] Para tanto necessita-se obter o valor de S_2, através de

[1]Esta função retorna o valor do ângulo no quadrante correto, entre $-\pi$ e $+\pi$.

$$S_2 = \pm\sqrt{1 - C_2^2} \tag{8}$$

Note-se que os dois sinais na expressão (8) indicam a existência de duas possíveis soluções: Uma com o cotovelo do robô para cima e outra com o cotovelo para baixo. Pode-se portanto, calcular o valor de θ_2 pela expressão

$$\theta_2 = \mathrm{atan2}(S_2, C_2) \tag{9}$$

Conhecendo-se θ_2, pode-se, de (5) e (6), escrever:

$$\begin{aligned} x - l_3 C_\phi &= l_1 C_1 + l_2 C_1 C_2 - l_2 S1 S_2 \\ y - l_3 S_\phi &= l_1 S_1 + l_2 S_1 C2 + l_2 C_1 S_2 \end{aligned}$$

de onde é possível obter-se

$$x - l_3 C_\phi = K_1 C_1 - K_2 S_1 \tag{10}$$
$$y - l_3 S_\phi = K_1 S_1 + K_2 C_1 \tag{11}$$

com

$$\begin{aligned} K_1 &= l_1 + l_2 C_2 \\ K_2 &= l_2 S_2 \end{aligned} \tag{12}$$

Através das seguintes mudanças de variáveis

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \\ \gamma &= \mathrm{atan2}(K_2, K_1) \end{aligned}$$

tem-se

$$K_1 = r\cos\gamma \tag{13}$$
$$K_2 = r\,\mathrm{sen}\,\gamma \tag{14}$$

Aplicando as transformações (13) e (14) nas expressões (10) e (11), tem-se

$$\begin{aligned} x - l_3 C_\phi &= r C_\gamma C_1 - r S_\gamma S_1 \\ y - l_3 S_\phi &= r C_\gamma S_1 + r S_\gamma C_1 \end{aligned}$$

que pode ser escrita de forma mais compacta como

$$\begin{aligned}\frac{x - l_3 C_\phi}{r} &= \cos(\gamma + \theta_1) \\ \frac{y - l_3 S_\phi}{r} &= \mathrm{sen}(\gamma + \theta_1)\end{aligned}$$

de onde pode-se obter

$$\gamma + \theta_1 = \mathrm{atan2}\left(\frac{y - l_3 S_\phi}{r}, \frac{x - l_3 C_\phi}{r}\right) = \mathrm{atan2}(y - l_3 S_\phi, x - l_3 C_\phi)$$

ou

$$\theta_1 = \mathrm{atan2}(y - l_3 S_\phi, x - l_3 C_\phi) - \gamma = \mathrm{atan2}(y - l_3 S_\phi, x - l_3 C_\phi) - \mathrm{atan2}(K_2, K_1)$$

e finalmente

$$\theta_1 = \mathrm{atan2}(y - l_3 S_\phi, x - l_3 C_\phi) - \mathrm{atan2}(l_2 S_2, l_1 + l_2 C_2) \tag{15}$$

Note-se que o sinal de θ_2 afeta S_2 que afeta θ_1.

Conhecendo-se θ_1 e θ_2 pode-se determinar θ_3. De (1) e (2) tem-se

$$\mathrm{atan2}(S_\phi, C_\phi) = \mathrm{atan2}(S_{123}, C_{123})$$

ou

$$\mathrm{atan2}(S_\phi, C_\phi) = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

de onde

$$\theta_3 = \mathrm{atan2}(S_\phi, C_\phi) - \theta_1 - \theta_2 \tag{16}$$

4 Método Geométrico

A solução para o problema cinemático inverso através do método geométrico baseia-se na decomposição do manipulador em planos.

Considerando-se a configuração com o cotovelo para cima tem-se, pela Lei dos Cossenos:

$$(x - l_3 C_\phi)^2 + (y - l_3 S_\phi)^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2 l_1 l_2 \cos(180^\circ + \theta_2)$$

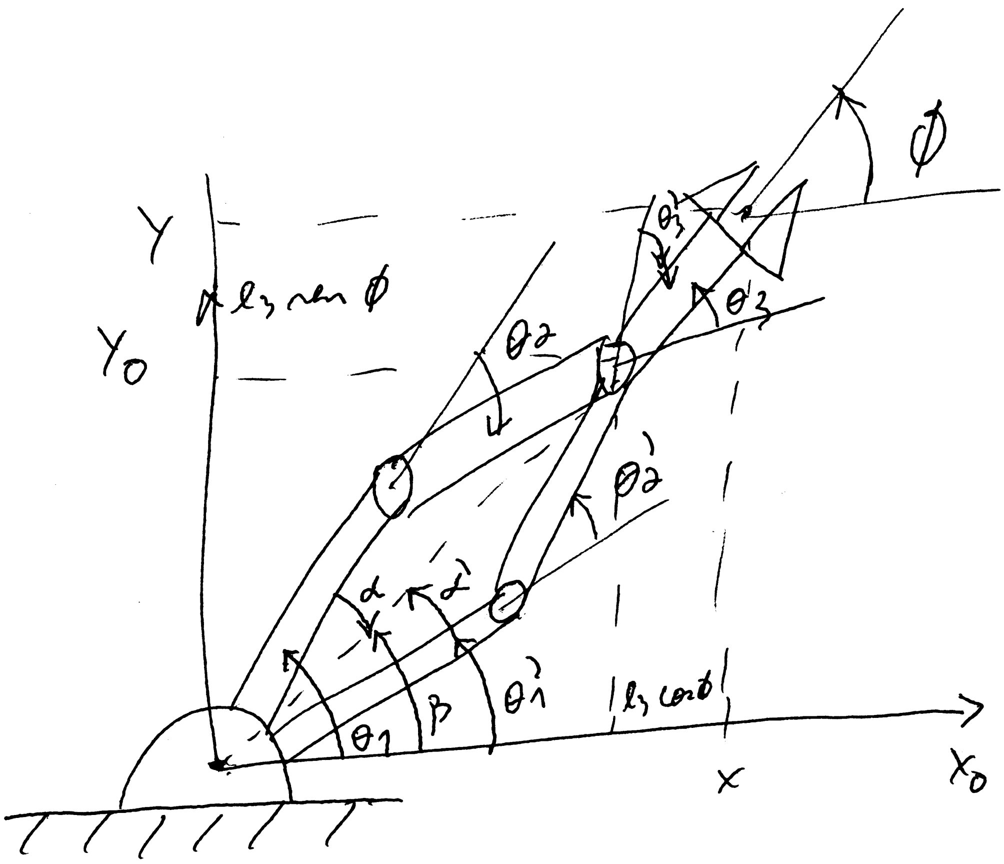

Figura 2: Modelo cinemático inverso pelo método geométrico.

já que nesta situação $\theta_2 < 0$.

E como $\cos(180° + \theta_2) = -\cos\theta_2$, chega-se a

$$C_2 = \frac{(x - l_3C_\phi)^2 + (y - l_3S_\phi)^2 - l_1^2 + l_2^2}{2l_1l_2}$$

Neste caso, o valor de θ_2 pode ser calculado por

$$\theta_2 = \text{acos}(C_2)$$

pois devido à hipótese de que $\theta_2 < 0$, o quadrante do ângulo está bem definido.

Pode-se facilmente perceber que para a configuração com o cotovelo para baixo tem-se

$$\theta_2' = -\theta_2$$

Definindo-se

$$\beta = \text{atan2}(y - l_3 S_\phi, x - l_3 C_\phi)$$

Tem-se que quando o cotovelo está para cima $\theta_1 = \beta + \alpha$, com $\alpha \leq 0$ e quando o cotovelo está para baixo $\theta_1' = \beta - \alpha'$, com $\alpha' \geq 0$. α pode ser obtido utilizando-se a Lei dos Cossenos:

$$l_2^2 = \left(\sqrt{(x - l_3 C_\phi)^2 + (y - l_3 S_\phi)^2}\right)^2 + l_1^2 - 2l_1\sqrt{(x - l_3 C_\phi)^2 + (y - l_3 S_\phi)^2}\cos\alpha$$

Logo

$$\cos\alpha = \frac{(x - l_3 C_\phi)^2 + (y - l_3 S_\phi)^2 + l_1^2 - l_2}{2l_1\sqrt{(x - l_3 C_\phi)^2 + (y - l_3 S_\phi)^2}}$$

e novamente tem-se que α pode ser calculado por $\alpha = \text{acos}(\cos\alpha)$, já que o quadrante do ângulo é conhecido. Note que $\alpha' = -\alpha$.

Tem-se também que $\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$. Portanto

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2$$

e

$$\theta_3' = \phi - \theta_1' - \theta_2'$$

5 Solução de Pieper

Para manipuladores com 6 (ou 5 ou 4) graus de liberdade, quanto as 3 (ou 2 ou 1) últimas juntas forem rotacionais e os seus eixos interceptam-se em um único ponto, é possível obter-se uma solução geral para o problema cinemático inverso [4]. Neste caso, é possível desacoplar o problema cinemático inverso em dois problemas mais simples, o problema de posicionamento inverso e o problema de orientação inverso [8].

Supondo-se um manipulador com n graus de liberdade, o problema cinemático inverso é encontrar os valores de $q = [\ q_1 \quad \ldots \quad q_n\ ]^T$ tais que

$$^0T_n^d = {^0T_1} \ldots {^{n-1}T_n} = {^0T_n} \tag{17}$$

onde $^0T_n^d$ é a matriz de transformação homogênea desejada, ou seja, a matriz de transformação homogênea com a posição e orientação do efetuador do robô para a qual se deseja determinar os valores das variáveis de junta.

A expressão (17) pode ser ser desmembrada em duas equações, uma correspondendo as especificações de posição e outra correspondendo as especificações de orientação:

$$
\begin{aligned}
{}^0P_n^d &= {}^0P_n && (18)\\
{}^0R_n^d &= {}^0R_n && (19)
\end{aligned}
$$

onde ${}^0P_n^d$ e ${}^0R_n^d$ representam, respectivamente, a posição e a orientação desejadas para o sistema de coordenadas n.

Se os eixos das juntas $n-2$, $n-1$ e n se interceptam no ponto Q, as origens dos sistemas de coordenadas $\{n-1\}$ e $\{n-2\}$ (atribuídos segundo as convenções de Denavit-Hartenberg) estarão neste ponto. Neste caso, o movimento das juntas $n-2$, $n-1$ e n não alterará a posição do ponto Q. Como a origem do sistema $\{n\}$ é apenas uma translação por uma distância d_n ao longo de $\hat{Z}_{n-1}$ a partir de Q e $\hat{Z}_{n-1}$ está alinhado com $\hat{Z}_n$, tem-se que

$$ {}^0P_{norg} = {}^0Q + {}^0R_{n-1}d_n{}^{n-1}\hat{Z}_{n-1} = {}^0Q + {}^0R_nd_n{}^n\hat{Z}_n $$

Portanto, para posicionar o efetuador do robô no ponto ${}^0P_n^d$, basta fazer

$$ {}^0Q = {}^0P_n^d - {}^0R_n^dd_n{}^n\hat{Z}_n $$

Por outro lado,

$$ {}^0Q = {}^0P_{(n-2)org} = {}^0T_{n-3}{}^{n-3}P_{(n-2)org} $$

que é função apenas de $q_1 \dots q_{n-3}$. Assim, pode-se determinar $q_1 \dots q_{n-3}$ a partir de

$$ {}^0P_n^d - {}^0R_n^dd_n{}^n\hat{Z}_n = {}^0T_{n-3}{}^{n-3}P_{(n-2)org} $$

A determinação dos valores de $q_1 \dots q_{n-3}$ implica ${}^0R_{n-3}$ estar determinada e como

$$ {}^0R_n^d = {}^0R_{n-3}{}^{n-3}R_n $$

deve-se fazer

$$ {}^{n-3}R_n = {}^0R_{n-3}^{-1}{}^0R_n^d $$

ou ainda

$$ {}^{n-3}R_n = {}^0R_{n-3}^T{}^0R_n^d $$

de onde pode-se determinar os valores de $q_{n-2} \dots q_n$.

6 Método Numérico

Existem diversos métodos numéricos para calcular a cinemática inversa. Vide [2, 3] para um resumo das técnicas. Aqui serão apresentadas apenas as mais simples. Justamente por serem mais simples, estas técnicas são pouco eficientes do ponto de vista computacional e muito suceptíveis a problemas com sigularidades.

6.1 Inversa generalizada

A inversa do jacobiano é tal que, dada uma pequena variação da posição dda garra, é possível calcular a variação nas coordenadas de junta[6]:

$$\Delta q = J^{-1}(q)\Delta X$$

Em geral, não existe a inversa do jacobiano, mas sim uma inversa generalizada B, que cumpre alguma das condições de Moore-Penrose:

1. $JBJ = J$
2. $BJB = B$
3. $(JB)^T = JB$
4. $(BJ)^T = BJ$

Se B cumpre todas as quatro condições, é dita pseudo-inversa, e é única: $B = J^\dagger$.

Achar a inversa generalizada é um processo lento e que não lida adequadamente com singularidades.

6.2 Transposta do Jacobiano

Em lugar de utilizar a pseudo-inversa do jacobiano, pode-se utilizar a transposta:

$$\Delta q = J^T(q)\Delta X$$

É muito mais eficiente do ponto de vista computacional e evita problemas com singularidades.

Esta aproximação é motivada por considerações físicas com base no conceito de trabalho virtual.

Para resolver certos problemas de escala, pode-se introduzir um fator de escala h, e iterar até atingir a convergência:

$$\Delta q^{(i+1)} = hJ^T(q)\Delta X^{(i)}$$

7 Modelo Cinemático Inverso do Manipulador Barrett WAM

O modelo Cinemático Inverso do manipulador Barrett WAM apresentado nesta seção segue a aborgadem de [7], onde o modelo é desenvolvido utilizando método geométrico, mas procura-se fazer os cálculos através de uma aborgadem algébrica e não apenas geométrica.

Utilizando-se a idéia do método de Piper de desacoplar posição e orientação, tem-se que a posição desejada do punho do robô pode ser obtida por:

$$^{base}P^{d}_{5_{org}} = {^{base}P^{d}_{garra}} - {^{base}R^{d}_{garra}} d_{garra} {^{garra}\hat{Z}_{garra}} \tag{20}$$

A análise das possíveis posições do manipulador é realizada tendo como base o esquema representado na Figura 3. Nesta análise geométrica, considera-se que as partes inferior e superior do manipulador geram um volume de trabalho correspondente a uma casca esférica, sendo que a intersecção destas, pode gerar uma circunferência, um ponto ou um conjunto nulo (neste caso a posição desejada para o punho do robô não é atingível). A parte inferior do manipulador corresponde aos elementos compreendidos da base até a junta 4, e a parte superior do manipulador compreende os elementos da junta 4 até a ferramenta. Todas as possíveis soluções são calculadas considerando-se a posição normalizada do punho do manipulador posicionado verticalmente acima da junta da base.

O pontos O e B representados na Figura 3 estão localizados na origem do sistema 1 e na origem do sistema 5 respectivamente, ainda, o ponto A é a origem do sistema 3, que coincide com a origem do sistema 4.

Se os segmentos L_1 e L_2 pudessem girar livremente em torno dos pontos O e B respectivamente, a ponta de cada segmento geraria uma casca esférica com centros em O e B. Mas uma vez que os segmentos estão conectados no ponto A, a única solução possível é a intersecção das cascas esféricas geradas, sendo que esta intersecção pode resultar em uma circunferência, um ponto (que é equivalente a uma circunferência com raio zero) ou nula, sendo que interpreta-se a intersecção nula como um caso onde não há solução para o problema cinemático inverso.

Ou seja, as possíveis posições do ponto A descrevem um circulo de raio R_C em torno do ponto C que está a uma distância d_C do ponto O.

$$d_C = L_1 \cos(\alpha_1) = d - L_2 \cos(\alpha_2) \tag{21}$$

$$R_C = L_1 \operatorname{sen}(\alpha_1) = L_2 \operatorname{sen}(\alpha_2) \tag{22}$$

Da geometria apresentada na Figura 3, os ângulos γ_1 e γ_2 podem ser calculados como segue:

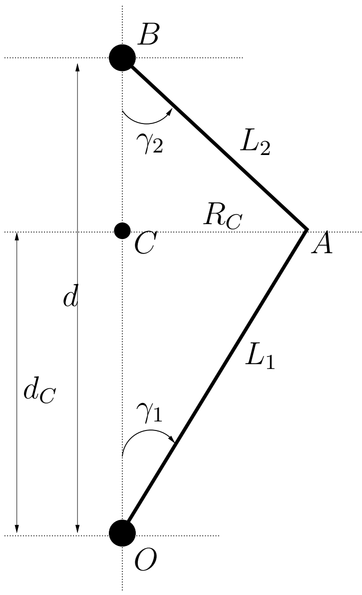

Figura 3: Geometria de intersecção dos volumes das partes inferior e superior do manipulador WAM, adaptado de [7].

$$\gamma_2 = \cos^{-1}\left[\left(d^2 + L_2^2 - L_1^2\right) / \left(2dL_2\right)\right] \tag{23}$$

$$\gamma_1 = \operatorname{sen}^{-1}\left[L_2 \operatorname{sen}(\gamma_2) / \left(L_1\right)\right] \tag{24}$$

O comprimento do segmento L_1 é calculado em relação aos sistemas de coordenadas 1, sendo que o valor resultante é uma constante que não depende das variáveis de junta:

$$L_1 = |{}^1P_{3_{org}} - {}^1P_{1_{org}}| \tag{25}$$

$$ {}^1P_{1_{org}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$
{}^{1}P_{3_{org}} = {}^{1}T_{2}{}^{2}T_{3}{}^{3}P_{3_{org}} =
$$

$$
\begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & 0 & \operatorname{sen}(\theta_2) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta_2) & 0 & -\cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & 0 & -\operatorname{sen}\theta_3) & a_3\cos\theta_3) \\ \operatorname{sen}(\theta_3) & 0 & \cos(\theta_3) & a_3\operatorname{sen}(\theta_3) \\ 0 & -1 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =
$$

$$
\begin{bmatrix} \cos(\theta_2)a_3\cos(\theta_3) + \operatorname{sen}(\theta_2)d_3 \\ \operatorname{sen}(\theta_2)a_3\cos(\theta_3) - \cos(\theta_2)d_3 \\ a_3\operatorname{sen}(\theta_3) \\ 1 \end{bmatrix} \tag{27}
$$

portanto:

$$
L_1 = \sqrt{a_3^2 + d_3^2} \tag{28}
$$

e o comprimento do segmento L_2 é calculado em relação aos sistemas de coordenadas 3, sendo que da mesma forma que para o segmento L_1, o resultado é uma constante que portanto não depende das variáveis de junta:

$$
L_2 = |{}^{3}P_{5_{org}} - {}^{3}P_{3_{org}}| \tag{29}
$$

$$
{}^{3}P_{3_{org}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{30}
$$

$$
{}^{3}P_{5_{org}} = {}^{3}T_{4}{}^{4}T_{5}{}^{5}P_{5_{org}} =
$$

$$
\begin{bmatrix} \cos(\theta_4) & 0 & \operatorname{sen}(\theta_4) & a_4\cos(\theta_4) \\ \operatorname{sen}(\theta_4) & 0 & -\cos(\theta_4) & a_4\operatorname{sen}(\theta_4) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \cos(\theta_5) & 0 & -\operatorname{sen}(\theta_5) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta_5) & 0 & \cos(\theta_5) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =
$$

$$
\begin{bmatrix} d_5\operatorname{sen}(\theta_4) + a_4\cos(\theta_4) \\ -d_5\cos(\theta_4) + a_4\operatorname{sen}(\theta_4) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{31}
$$

$$
L_2 = \sqrt{a_4^2 + d_5^2} \tag{32}
$$

Ainda, para calcular o valor do comprimento do segmento d utilizam-se as coordenadas dos pontos B e O, sendo que o mesmo é independente das variáveis de juntas, dependendo apenas de ${}^0P^d_{5org}$, que pode ser calculado de (20).

$$d = |B - O| \tag{33}$$

$$ {}^1B = {}^1P^d_{5org} = {}^1T_0 {}^0P^d_{5org} \tag{34}$$

E considerando que ${}^0P^d_{5org}$ vai ter a forma $\begin{bmatrix} {}^0x^d_{5org} & {}^0y^d_{5org} & {}^0z^d_{5org} & 1 \end{bmatrix}^T$ pode-se escrever:

$$ {}^1B = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \text{sen}(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0x^d_{5org} \\ {}^0y^d_{5org} \\ {}^0z^d_{5org} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1){}^0x^d_{5org} + \text{sen}(\theta_1){}^0y^d_{5org} \\ -{}^0z^d_{5org} \\ -\text{sen}(\theta_1){}^0x^d_{5org} + \cos(\theta_1){}^0y^d_{5org} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{35}$$

E com:

$$ {}^1O = {}^1P_{1_{org}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{36}$$

tem-se para d:

$$d = \sqrt{({}^0x^d_{5org})^2 + ({}^0y^d_{5org})^2 + ({}^0z^d_{5org})^2} \tag{37}$$

Para calcular os ângulos de juntas θ_1 à θ_7, são consideradas as geometrias apresentadas nas Figuras 5 e 4 que representam respectivamente o manipulador configurado com o cotovelo para fora e para dentro, e onde pode-se verificar as posições dos pontos L_J e U_J.

As possíveis posições para os pontos L_J e U_J também descrevem circunferências semelhantes a descrita pelas possíveis posições do ponto A. A partir deste ponto do trabalho, somente o ponto L_J será considerado uma vez que não há necessidade de analisar o ponto U_J para resolver o problema cinemático inverso. A circunferência referente a L_J tem raio R_{LJ} e está a uma distância d_{LJ} do ponto O.

Observando a Figura 4 pode-se verificar que:

$$d_{LJ} = d_c - l_L \, \text{sen}(\theta_L) \tag{38}$$

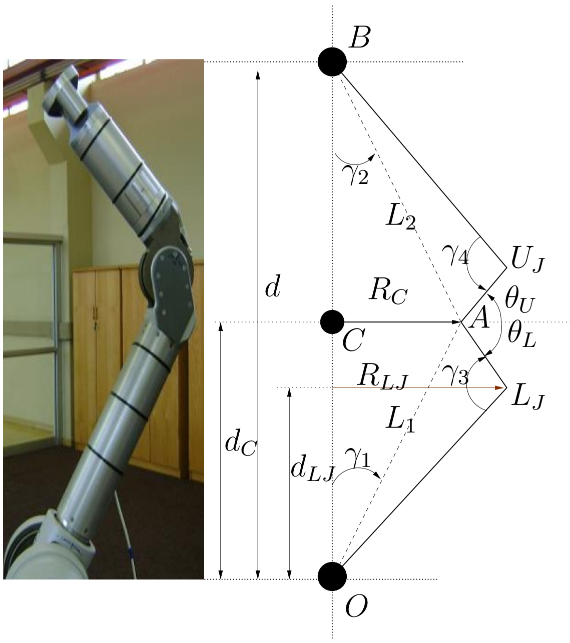

Figura 4: Posição do manipulador WAM com o cotovelo para fora, adaptado de [7].

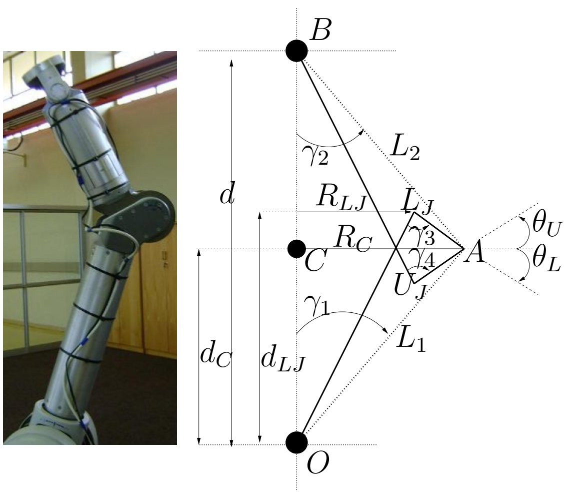

Figura 5: Posição do manipulador WAM com o cotovelo para dentro, adaptado de [7].

$$R_{LJ} = R_c + l_L \cos(\theta_L) \tag{39}$$

onde $l_L = 0.06364\text{m}$ [1] é o tamanho do "*ofsset*" do elo, ou seja, a distância do ponto A ao ponto L_J.

Para a posição com o cotovelo para fora tem-se que:

$$\gamma_3 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{atan2}\left(|a_4|, d_5\right) \tag{40}$$

$$\gamma_4 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{atan2}\left(a_3, d_3\right) \tag{41}$$

$$\theta_L = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_1\right) - \gamma_3 \tag{42}$$

$$\theta_U = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_2\right) - \gamma_4 \tag{43}$$

E para a posição com o cotovelo para dentro tem-se:

$$\theta_L = \gamma_3 - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_1\right) \tag{44}$$

$$\theta_U = \gamma_4 - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_2\right) \tag{45}$$

Deve-se observar que as possíveis posições para o ponto A descrevem uma circunferência centrada no ponto C, com raio R_C a uma distância d_C do ponto O, e que as possíveis posições para o ponto L_J descrevem uma circunferência centrada em C_{LJ}, com raio R_{LJ} a uma distância d_{LJ} do ponto O. Ainda, as Figuras 3, 4 e 5 se referem a uma posição normalizada do robô sendo que o eixo OB pode estar em qualquer orientação espacial (diferente da vertical).

As circunferências descritas pelas possíveis posições dos pontos A e L_J são paralelos e em torno do eixo OB. Pode-se parametrizar os mesmos através de seu raio R, distância D ao ponto O e ângulo $\phi \in [-\pi, \pi]$. Ou seja, tem-se cada ponto sobre uma das circunferências dada por:

$$C_n(R, D, \phi) = \begin{bmatrix} R\cos(\phi) \\ R\,\text{sen}(\phi) \\ D \end{bmatrix} \tag{46}$$

Assim, as possíveis posições para o ponto A na configuração normalizada são dadas por $C_n(R_c, d_c, \phi)$ e as possíveis posições para o ponto L_J são dadas por $C_n(R_{LJ}, d_{LJ}, \phi)$, sendo que considerando-se o fato de que o eixo OB em geral não está na vertical, as circunferências normalizadas precisam ser rotacionadas para a sua posição real.

Sendo R_n a matriz de rotação que move a posição desejada do punho do manipulador para a posição normalizada equivalente (Figura 3), tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix} = R_n {}^0P^d_{5org} \tag{47}$$

A matriz R_n é a matriz de rotação que rotaciona um ponto em torno de um eixo arbitrário, transformando-o em outro, cujo cálculo é mostrado no apêndice C. Assim, as possíveis posições para o ponto A são dadas por:

$${}^0A = R_n^T C_n(R_c, d_c, \phi) = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \tag{48}$$

e as possíveis posições para o ponto L_J são dadas por:

$${}^0L_J = R_n^T C_n(R_{LJ}, d_{LJ}, \phi) = \begin{bmatrix} x_{LJ} \\ y_{LJ} \\ z_{LJ} \end{bmatrix} \tag{49}$$

Uma vez que γ_3, γ_4, θ_L e θ_U foram calculados, pode-se seguir:

$$\theta_1 = \operatorname{atan}\left(y_{LJ}, x_{LJ}\right) \tag{50}$$

$$\theta_2 = \operatorname{acos}\left(\frac{z_{LJ}}{d_3}\right) \tag{51}$$

$$\theta_3 = \operatorname{atan2}\left(\operatorname{sen}(\theta_3), \cos(\theta_3)\right) \tag{52}$$

Com $\operatorname{sen}(\theta_3)$ e $\cos(\theta_3)$ calculados de:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1) \\ \operatorname{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2) & \cos(\theta_1) \\ -\operatorname{sen}(\theta_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) \\ \operatorname{sen}(\theta_3) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} x_{LJ} \\ y_{LJ} \\ z_{LJ} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \right) \frac{1}{a_3} \tag{53}$$

$$\theta_4 = (\theta_U + \theta_L), \text{cotovelo para fora} \tag{54}$$

$$\theta_4 = (\theta_U + \theta_L), \text{cotovelo para dentro} \tag{55}$$

Os ângulos θ_5 e θ_6 podem ser calculados a partir do deslocamento da posição desejada da garra em relação a posição desejada do punho, representada no sistema de coordenadas 4, ou seja:

$$
\begin{aligned}
{}^4D^5_{garra} &= {}^4T_{base}{}^{base}P^d_{garra} - {}^4T_{base}{}^{base}P^d_5 \\
&= {}^4R_{base}\left({}^{base}P^d_{garra} - {}^{base}P^d_5\right) = \begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{56}
$$

E:

$$\theta_5 = \text{atan2}(y_D, x_D) + \pi, \text{cotovelo para fora} \tag{57}$$

$$\theta_5 = \text{atan2}(y_D, x_D), \text{cotovelo para dentro} \tag{58}$$

$$\theta_6 = \text{atan2}\left(z_D, \sqrt{x_D^2 + y_D^2}\right) - \frac{\pi}{2}, \text{cotovelo para fora} \tag{59}$$

$$\theta_6 = \pi - \text{atan2}\left(z_D, \sqrt{x_D^2 + y_D^2}\right), \text{cotovelo para dentro} \tag{60}$$

Observando que $\begin{bmatrix} x_D & y_D & z_D \end{bmatrix}^T$ pode ser calculado de (56). Para proceder com o cálculo de θ_7, tem-se:

$${}^{base}R^d_{garra} = {}^{base}R_0{}^0R^{d6}_6R^{d7}_7R_{garra} \tag{61}$$

E deve-se observar que ${}^{base}R^d_{garra}$ é especificado e conhecido, ${}^{base}R_0$ e ${}^7R_{garra}$ são constantes e conhecidos e ${}^0R^d_6$ pode ser calculado a partir de $\theta_1 \cdots \theta_6$ que já foram determinados. E de (61) pode-se obter:

$${}^6R^d_7 = {}^6R^d_0\,{}^0R_{base}\,{}^{base}R^d_{garra}\,{}^{garra}R_7 \tag{62}$$

Por outro lado, dado que $a_7 = \alpha_7 = 0$ tem-se:

$${}^6R^d_7 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_7) & -\text{sen}(\theta_7) & 0 & 0 \\ \text{sen}(\theta_7) & \cos(\theta_7) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{63}$$

e portanto

$$\theta_7 = \text{atan2}(r_{21}, r_{11}) \tag{64}$$

Referências

[1] Barrett Technology, Inc., Cambridge, MA. *WAM User Manual*, 2011.

[2] S. R. Buss. Introduction to inverse kinematics with jacobian transpose, pseudoinverse and damped least squares methods. Typeset Manuscript, available from `http:/math.ucsd.edu/~sbuss/ResearchWeb`, Apr 2004.

[3] S. R. Buss and J.-S. Kim. Selectively damped least squares for inverse kinematics. Typeset Manuscript, available from `http:/math.ucsd.edu/~sbuss/ResearchWeb`, Apr 2004.

[4] J. J. Craig. *Introduction to Robotics Mechanics and Control*. Addison-Wesley, second edition, 1989.

[5] K. S. Fu, R. C. Gonzales, and C. S. G. Lee. *Robotics Control, Sensing, Vision and Intelligence*. Industrial Engineering Series. McGraw-Hill, New York, 1987.

[6] V. F. Romano, editor. *Robótica Industrial Aplicação na Indústria de Manufatura e de Processos*. Edgard Blücher, São Paulo, 2002.

[7] G. K. Singh and J. Claassens. An analytical solution for the inverse kinematics of a redundant 7dof manipulator with link offsets. In *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 2976–2982, Taipei, Taiwan, 2010. IEEE Press.

[8] M. W. Spong and M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control*. John Wiley & Sons, 1989.

A Relações Trigonométricas Úteis

A.1 Cosseno da Soma

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

A.2 Seno da Soma

$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b$$

A.3 Lei dos Cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

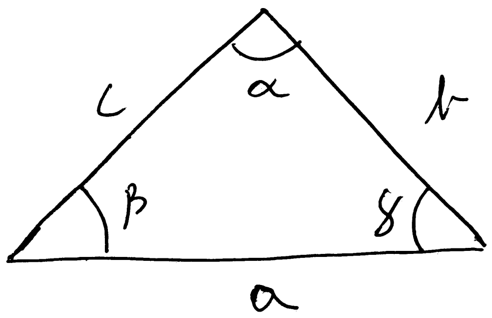

Figura 6: Definição de ângulos e vértices para a Lei dos Senos e Lei dos Cossenos.

A.4 Lei dos Senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

A.5 Lei das Tangentes

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)}{\tan\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)}$$

B Soluções Algébricas Reduzidas a Polinômios

Seja uma equação trigonométrica na forma

$$a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta = c$$

Esta equação pode ser resolvida para θ através das seguintes transformações algébricas:

$$\cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2} \tag{65}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2u}{1+u^2} \tag{66}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = u \tag{67}$$

Aplicando-se as transformações, tem-se

$$a\frac{1-u^2}{1+u^2} + b\frac{2u}{1+u^2} = c$$

$$a(1-u^2)+2bu=c(1+u^2)$$

$$a-au^2+2bu=c+cu^2$$

$$(c+a)u^2-2bu+(c-a)=0$$

$$u=\frac{2b\pm\sqrt{4b^2-4(c+a)(c-a)}}{2(c+a)}$$

$$u=\frac{b\pm\sqrt{b^2-c^2+a^2}}{c+a}$$

$$\theta=2\tan^{-1}\left(\frac{b\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a+c}\right)$$

C Matriz de Rotação que Relaciona Dois Pontos

Seja P_n um ponto obtido a partir da rotação de um ponto P em torno de um eixo arbitrário. Deseja-se determinar R_n tal que

$$P_n=R_nP \tag{68}$$

Inicialmente, nota-se que R_n não altera o módulo dos vetores que representam os pontos, portanto é conveniente continuar o desenvolvimento com vetores unitários:

$$P_1=\frac{P}{|P|} \tag{69}$$

$$P_2=\frac{P_n}{|P_n|} \tag{70}$$

A partir dos vetores unitários, o cosseno e o seno do ângulo de rotação entre eles pode ser obtido por:

$$\cos(\phi)=P_1\cdot P_2=P_1^TP_2 \tag{71}$$

$$\text{sen}(\phi)=|P_1\times P_2| \tag{72}$$

onde $\cdot$ e $\times$ representam respectivamente os produtos escalar e vetorial entre os dois vetores. Por outro lado, o eixo em torno do qual é feita a rotação pode ser obtido por:

$$r = \frac{1}{\operatorname{sen}(\phi)}(P_1 \times P_2) = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \tag{73}$$

A partir do seno e cosseno do ângulo de rotação e do eixo de rotação é possível obter a matriz de rotação, que tem a forma [5]:

$$R_n = \begin{bmatrix} r_x^2 \operatorname{vers}(\phi) + \cos(\phi) & r_x r_y \operatorname{vers}(\phi) - r_z \operatorname{sen}(\phi) & r_x r_z \operatorname{vers}(\phi) + r_y \operatorname{sen}(\phi) \\ r_x r_y \operatorname{vers}(\phi) + r_z \operatorname{sen}(\phi) & r_y^2 \operatorname{vers}(\phi) + \cos(\phi) & r_y r_z \operatorname{vers}(\phi) - r_x \operatorname{sen}(\phi) \\ r_x r_z \operatorname{vers}(\phi) - r_y \operatorname{sen}(\phi) & r_y r_z \operatorname{vers}(\phi) + r_x \operatorname{sen}(\phi) & r_z^2 \operatorname{vers}(\phi) + \cos(\phi) \end{bmatrix} \tag{74}$$

onde $\operatorname{vers}(\phi) = 1 - \cos(\phi)$.