

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Elétrica
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
ELE00070 Tópicos Especiais em Controle e Automação I

Controle de Robôs Móveis

Prof. Walter Fetter Lages

6 de outubro de 2009

1 Propriedades do Modelo Cinemático

A expressão do modelo cinemático de um robô móvel com rodas pode ser escrita na seguinte forma compacta:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (1)$$

ou, na forma afim:

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^m f_i(\mathbf{x})u_i, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \quad (2)$$

Embora a expressão seja um modelo bastante simplificado do movimento do veículo (dinâmicas dos motores, deformações elásticas e outros efeitos mecânicos são desprezados), o mesmo é suficiente para representar as propriedades não holonômicas presentes [4, 7]. Ainda, propriedades importantes com relação à controlabilidade e estabilizabilidade de robôs móveis não holonômicos podem ser estabelecidas.

Para um robô móvel com acionamento diferencial tem-se $n = 3$, $m = 2$ e

$$f_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Controlabilidade.**

Definição 1 [31] *Um sistema é dito controlável quando, partindo de uma configuração inicial, o mesmo pode assumir qualquer configuração em um intervalo de tempo finito.*

Teorema 1 [6] *Uma condição suficiente para que um sistema não linear descrito pela expressão (1) seja controlável é que a dimensão do fechamento involutivo gerado pelos campos vetoriais f_1, \dots, f_m seja igual a n , $\forall \mathbf{x}$, i.e.,*

$$\dim\{\text{inv } \Delta\} = n, \quad \Delta = \text{span}\{f_1, \dots, f_m\}$$

Esta condição é equivalente, no caso de sistemas lineares, à condição de que a matriz de controlabilidade precisa ter posto completo.

A dimensão de uma distribuição é dada pelo posto desta distribuição. Para o robô com acionamento diferencial, tem-se que $\Delta = \text{span}\{f_1, f_2\}$ e o fechamento involutivo de Δ é definido, neste caso, como $\text{inv } \Delta = \{f_1, f_2, [f_1, f_2]\}$ [15] e¹

$$\text{rank}\{f_1, f_2, [f_1, f_2]\} = \text{rank} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & -\cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3,$$

Portanto, a partir do Teorema 1, $\dim\{\text{inv } \Delta\} = 3$, de onde conclui-se que o sistema é controlável.

- **Linearização.**

Para muitos sistemas não lineares, aproximações lineares podem ser usadas para uma primeira análise na síntese da lei de controle. A linearização pode também fornecer algumas indicações quanto à controlabilidade e estabilizabilidade do sistema não linear. Mais precisamente, se o sistema linearizado é controlável e estabilizável, então o sistema original não linear é controlável e estabilizável, pelo menos localmente. Entretanto, o inverso não pode ser aplicado [6].

No caso do modelo cinemático do robô com acionamento diferencial, a linearização em torno da origem ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$) resulta em

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \quad (3)$$

O sistema linear acima é não controlável pois o posto da matriz de controlabilidade

¹ $[f_1, f_2]$ denota o colchete de Lie, i.e., $[f_1, f_2](x) = \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2(x)$.

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não é completo. Observa-se entretanto que o sistema não linear é controlável, conforme visto pela aplicação do Teorema 1.

- **Linearização por realimentação de estados.**

Definição 2 [18] *Um sistema não linear $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ é dito linearizável por realimentação de estados se existe uma mudança de coordenadas*

$$\xi = T(\mathbf{x})$$

e uma realimentação de estados

$$\nu = a(\mathbf{x})\mathbf{u} + b(\mathbf{x})$$

que transforma o sistema original em um sistema linear.

Para sistemas sem deriva, tem-se então o seguinte resultado:

Teorema 2 [6] *Um sistema da forma (2) é localmente linearizável por realimentação de estados em torno de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se e somente se $\text{rank}[f_1(0) \ \dots \ f_m(0)] = n$.*

Para o caso do modelo cinemático do robô com acionamento diferencial, tem-se que

$$\text{rank}[f_1(0) \ f_2(0)] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} < n$$

e a linearização de todos os estados do sistema não linear não é possível. Esta condição é equivalente à condição de controlabilidade do sistema linearizado (3), que também não é satisfeita. Ainda assim, é possível linearizar parte dos estados, como por exemplo a posição apenas [20]. Muitas vezes isto não é muito restritivo, se o robô possui uma geometria circular e o objetivo é estabilizar apenas a posição, descartando a orientação do robô.

- **Estabilização através de realimentação estática e suave.**

O problema da estabilização através de uma lei de controle estática e suave pode ser formulada como encontrar um controle $\mathbf{u} = k(\mathbf{x})$, com $k(\mathbf{x})$ estática e suave, tal que o sistema em malha fechada $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + k(\mathbf{x})$ seja assintoticamente estável. Pode-se então enunciar o seguinte resultado a respeito das condições estudadas por Brockett:

Teorema 3 [1] *Considerando novamente o sistema da expressão (2), com $m \leq n$. Se os campos vetoriais $f_i(0)$, $i = 1, \dots, m$ são linearmente independentes, i.e.,*

$$\text{rank}[f_1(0) \ f_2(0) \ \dots \ f_m(0)] = m,$$

então existe uma lei de controle estática e suave do tipo $\mathbf{u} = k(\mathbf{x})$ que estabiliza o sistema (2) se e somente se $m = n$.

Para o modelo cinemático do robô móvel com acionamento diferencial, tem-se que $n = 3$, $m = 2$ e

$$f_1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, $\text{rank}[f_1(0) \ f_2(0)] = 2$ e não existe lei de controle estática e suave $\mathbf{u} = k(\mathbf{x})$ para o sistema considerado. De fato, diferentemente dos sistemas lineares, a controlabilidade de um sistema não linear não implica na existência de leis suaves estáticas estabilizantes. O Teorema 3 corresponde a uma particularização das condições de Brockett [1] para o caso de sistemas sem deriva.

2 Controle de Robôs Móveis

Pode-se dividir as estratégias de controle de robôs móveis em duas classes, dependendo do objetivo do controle:

Estabilização em um ponto: Para um sistema linear invariante no tempo, se os autovalores instáveis são controláveis (i. e., se o sistema é estabilizável), um ponto de equilíbrio pode ser assintoticamente estabilizado por uma realimentação estática, suave e invariante no tempo. Entretanto, para sistemas não lineares e com restrições não holonômicas, isto não é mais possível [1].

Conseqüentemente, ferramentas lineares antes utilizadas não podem mais ser consideradas, nem localmente [19], conforme mostrado nos Teoremas 1-3. Neste caso, usualmente, leis de controle variantes no tempo ou não suaves são utilizadas a fim de transpor as restrições de Brockett.

Além do controle variante no tempo e do controle não suave, outros métodos incluem ainda controle híbrido (combinação dos dois métodos) [28, 5, 25], controle adaptativo (considera incertezas do modelo) [22, 12, 27] e linearização por realimentação dinâmica de estados [11, 26, 32]. O interesse por esta última técnica baseia-se no fato de que, se a linearização do sistema existe, leis de controle lineares podem ser obtidas. Ainda, é possível obter-se uma descrição linear mais representativa do sistema não linear, ao contrário do obtido por expansão em séries de Taylor [21, 8].

Rastreamento de trajetória: A fim de superar as limitações impostas pelo Teorema de Brockett, várias abordagens diferentes foram propostas. Alguns métodos abandonam a idéia da estabilização em um ponto e procuram obter convergência a uma trajetória de referência, parametrizada no tempo. Neste caso, o problema é resolvido em duas etapas distintas: primeiro uma trajetória é calculada *off-line* e em seguida uma lei de controle é projetada a fim de fazer com que o robô siga a trajetória calculada anteriormente. Usualmente, a existência de um robô de referência virtual é considerada, descrito, por exemplo, pelo modelo cinemático $\dot{x}_r = f(x_r, u_r)$. Assume-se então que, para entradas de referência não nulas, deseja-se calcular uma lei de controle que faça que o erro entre o robô e a referência seja nula. Trabalhos neste sentido encontram-se em [34, 28, 17, 3, 9, 36, 10, 32].

3 Controle Linearizante

Aqui, serão apresentadas técnicas para controle de robôs móveis baseadas na linearização do modelo cinemático ou do modelo dinâmico. Serão considerados apenas os modelos de postura, pois o objetivo é controlar a posição e a orientação do robô. Comparando-se os modelos de configuração com os modelos de postura, pode-se observar que as variáveis desprezadas não tem qualquer influência sobre a dinâmica da variável ξ e portanto, não fazem parte do estado do sistema dinâmico que gera a posição e a orientação do robô.

O interesse por uma estratégia linearizante deve-se ao fato de que se o sistema puder ser linearizado, uma lei de controle poderá ser projetada valendo-se da grande quantidade de resultados teóricos disponíveis para sistemas lineares. Além disto, com a linearização do sistema, espera-se também simplificar o problema de estimação da posição e orientação do robô. Por exemplo, utilizando-se

o filtro de Kalman linear, ao invés do filtro de Kalman estendido [13].

Certamente, a técnica de linearização mais conhecida consiste em expandir-se o sistema em série de Taylor em torno de um ponto e desprezar os termos de ordem superior. No entanto, utilizando-se realimentação, pode-se obter uma linearização onde os termos de ordem superior não são desprezados, mas sim cancelados através da manipulação adequada das entradas do sistema. A vantagem deste segundo enfoque é que, a princípio, obtém-se uma descrição linear exata para o sistema não linear, ao invés de uma aproximação linear para o sistema não linear. Por outro lado, a principal desvantagem da linearização por realimentação reside no fato de que se os parâmetros e o estado do sistema não forem bem conhecidos, o cancelamento dos termos de ordem superior não será exato e portanto, a descrição linear obtida não corresponderá ao sistema original. Conseqüentemente, a lei de controle linear projetada para o sistema linearizado, poderá perder eficiência e o sistema poderá ter o seu desempenho alterado ou até mesmo tornar-se instável.

Na maioria das vezes, no entanto, os parâmetros do sistema podem ser adequadamente obtidos através de calibração. Quando o estado do sistema não pode ser adequadamente medido através de sensores, pode-se utilizar técnicas de estimação.

Técnicas de linearização por realimentação exata de estados [16] são empregadas em [35] para a determinação da lei de controle para um robô da classe (2,0). No entanto, é obtido o controle apenas de posição. A orientação não é controlada. Aqui, este resultado é generalizado para as demais classes de robôs móveis. Além disso, mostra-se que para as classe (3,0) é possível obter-se também controle de orientação. Para as classes (1,1) e (1,2), mostra-se que esta estratégia não tem aplicação prática.

3.1 Linearização Entrada-Saída por Realimentação Estática de Estados

Seja, com base em [29] e [30], a classe de sistemas não-lineares multivariáveis com o mesmo número de entradas e saídas, da forma

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + \cdots + g_p(x)u_p \quad (4)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1(x) \\ &\vdots \\ y_p &= h_p(x) \end{aligned} \quad (5)$$

com $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$ e $y \in \mathbb{R}^p$, assumindo-se $f(\cdot)$, $g_i(\cdot)$ e $h_j(\cdot)$ suaves. Diferenciando com relação ao tempo a saída y_j , obtém-se

$$\dot{y}_j = L_f h_j(x) + \sum_{i=1}^p (L_{g_i} h_j(x)) u_i \quad (6)$$

com $L_f h_j(x)$ representando a derivada de Lie da saída $h_j(x)$ com relação à $f(x)$, dada por

$$L_f h_j(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_j(x)}{\partial x_i} \dot{x}_{i_f} \quad (7)$$

$$L_{g_i} h_j(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_j(x)}{\partial x_i} \dot{x}_{i_g} \quad (8)$$

$$(9)$$

onde \dot{x}_{i_f} e \dot{x}_{i_g} representam, respectivamente, as partes relativas à $f(x)$ e $g(x)$ da i -ésima equação de estado do sistema representado por (4-5).

De acordo com (6), se cada um dos termos $L_{g_i} h_j(x) = 0$, nenhuma das entradas surgirá na derivada temporal das saídas do processo. Define-se γ_j como sendo o menor inteiro tal que no mínimo uma das entradas apareçam em $y_j^{\gamma_j}$ isto é,

$$y_j^{\gamma_j} = L_f^{\gamma_j} h_j(x) + \sum_{i=1}^p L_{g_i} \left(L_f^{\gamma_j-1} h_j(x) \right) u_i \quad (10)$$

sendo

$$L_f^{\gamma_j} h_j(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L_f^{\gamma_j-1} h_j(x)}{\partial x_i} \dot{x}_{i_f} \quad (11)$$

e

$$L_{g_i} L_f^{\gamma_j-1} h_j(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L_{g_i} L_f^{\gamma_j-2} h_j(x)}{\partial x_i} \dot{x}_{i_g} \quad (12)$$

com no mínimo um dos termos

$$L_{g_i} \left(L_f^{\gamma_j-1} h_j(x) \right) \neq 0 \quad (13)$$

para todo x pertencente a região onde a linearização é válida.

Define-se a matriz $E(x)$ como

$$E(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\gamma_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_p} L_f^{\gamma_1-1} h_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{\gamma_p-1} h_p(x) & \cdots & L_{g_p} L_f^{\gamma_p-1} h_p(x) \end{bmatrix} \quad (14)$$

uma matriz quadrada de ordem p . Pode-se, então, reescrever (10) na forma

$$\begin{bmatrix} y_1^{\gamma_1} \\ \vdots \\ y_p^{\gamma_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{\gamma_1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{\gamma_p} h_p(x) \end{bmatrix} + E(x) \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \quad (15)$$

Naturalmente, se a matriz inversa de $E(x)$ existir para todo o x pertencente à região de interesse, a lei de controle por realimentação de estados

$$u(x) = -E^{-1}(x) \begin{bmatrix} L_f^{\gamma_1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{\gamma_p} h_p(x) \end{bmatrix} + E^{-1}(x)v \quad (16)$$

resulta, em malha fechada, no seguinte sistema,

$$\begin{bmatrix} y_1^{\gamma_1} \\ \vdots \\ y_p^{\gamma_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix} \quad (17)$$

linear sob o ponto de vista entrada-saída. Na Figura 1 é mostrado um diagrama de blocos do controle linearizante.

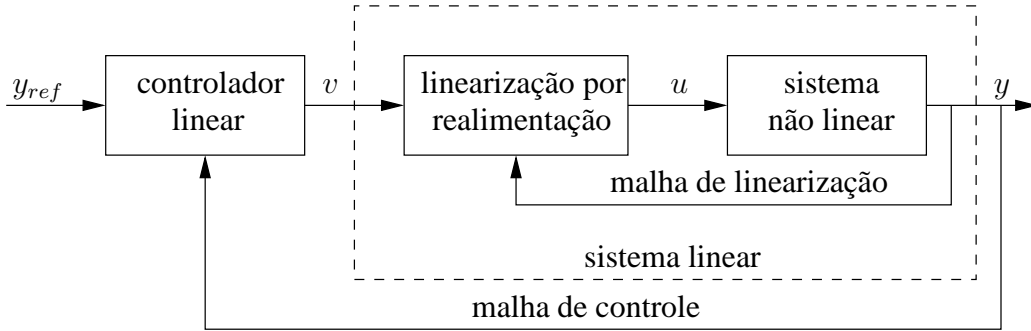


Figura 1: Diagrama de blocos do controle linearizante.

3.2 Ponto de Referência

Semelhante a [35], elege-se um ponto, a priori arbitrário, da estrutura do robô como ponto de referência. Ou seja, a posição do robô é tomada como sendo a posição deste ponto. A este ponto de referência, associa-se um sistema de coordenadas $\{X_r, Y_r\}$, tal como mostrado na Fig. 2. A orientação deste novo sistema de coordenadas é a mesma do sistema de coordenadas $\{X_c, Y_c\}$.

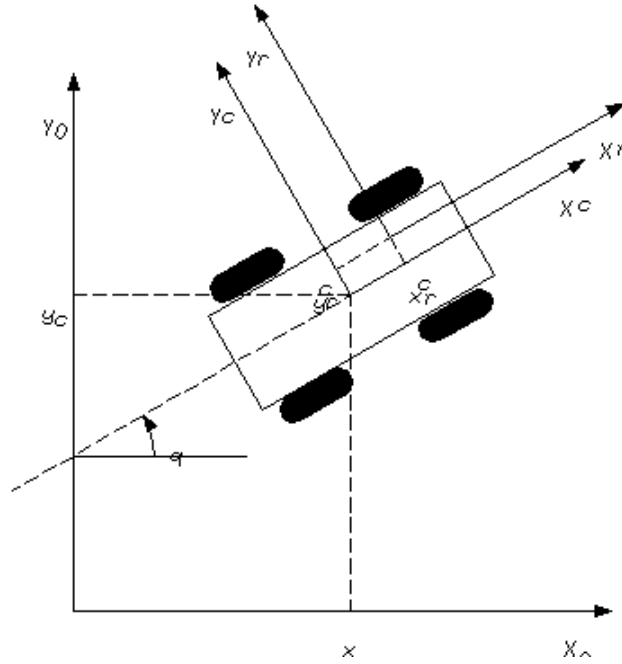


Figura 2: Sistema de coordenadas do ponto de referência para controle do robô.

O ponto de referência pode ser descrito no sistema de coordenadas global $\{X_0, Y_0\}$ através da relação

$$\xi_r = \begin{bmatrix} x_r \\ u_r \\ \theta \end{bmatrix} = {}^0R_c \begin{bmatrix} x_r^c \\ u_r^c \\ 0 \end{bmatrix} + \xi$$

onde x_r representa as coordenadas do ponto de referência no sistema de coordenadas global e $[x_r^c, u_r^c]^T$ representa a posição da origem do sistema de coordenadas $\{X_r, Y_r\}$ representada no sistema de coordenadas $\{X_c, Y_c\}$.

Como será mostrado a seguir, a escolha do ponto de referência tem grande influência no desenvolvimento da lei de realimentação linearizante. Um dos fatores mais importantes, diz respeito às restrições impostas à posição deste ponto. Estas restrições são diferentes para cada classe de robô. Além disso, a classe do robô também está relacionada com as variáveis de estado que podem ser linearizadas. Portanto, a realimentação linearizante será desenvolvida especificamente para cada classe de robô.

Aspectos adicionais, não abordados aqui, sobre a escolha do ponto de referência podem ser encontrados em [23].

3.3 Realimentação Linearizante para a Classe (3,0)

Para esta classe de robô, o modelo dinâmico de postura pode ser escrito mais explicitamente na forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \dot{\eta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (18)$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta} \\ \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \dot{\eta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \cos \theta - \eta_2 \sin \theta \\ \eta_1 \sin \theta + \eta_2 \cos \theta \\ \eta_3 \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (19)$$

que está na forma (4). Definindo-se a saída do sistema como sendo

$$y = h(x) = \xi_r \quad (20)$$

pode-se aplicar o algoritmo de linearização descrito na seção 3.1. Assim sendo, para que pelo menos uma das entradas η_i surja explicitamente na derivada temporal da saída, é necessário derivar y duas vezes. Com isto obtém-se

$$\ddot{y} = L_f^2 h(x) + E(x)v \quad (21)$$

com

$$E(x) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & -(x_r^c \sin \theta - y_r^c \cos \theta) \\ \sin \theta & \cos \theta & (x_r^c \cos \theta + y_r^c \sin \theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

e

$$L_f^2 h(x) = \begin{bmatrix} -\eta_1 \eta_3 \sin \theta - \eta_2 \eta_3 \cos \theta - \eta_3^2 (x_r^c \cos \theta - y_r^c \sin \theta) \\ \eta_1 \eta_2 \cos \theta - \eta_2 \eta_3 \sin \theta - \eta_3^2 (x_r^c \sin \theta + y_r^c \cos \theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

A lei de realimentação linearizante será então dada por

$$v(x) = E^{-1}(x)L_f^2 h_1(x) + E^{-1}(x)\bar{u} \quad (24)$$

Para esta classe de robôs em particular, a inversão da matriz $E(x)$ não apresenta problemas. Logo, para que seja possível o cálculo de (24), resta apenas determinar o vetor de entradas equivalentes. Além disso, com esta linearização, obtém-se um desacoplamento completo entre as coordenadas de postura do robô, existindo uma entrada para controlar cada uma das variáveis de posição e orientação.

3.4 Realimentação Linearizante para a Classe (2,0)

Diferentemente do que ocorre para a classe anterior, agora se tem apenas duas entradas para o sistema, como pode ser observado escrevendo-se o modelo dinâmico de postura na sua forma explícita

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta} \\ \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \cos \theta \\ \eta_1 \sin \theta \\ \eta_2 \\ 0_{2 \times 1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{3 \times 2} \\ I_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Conseqüentemente, pode-se forçar a linearização de apenas duas das variáveis de estado. A saída do sistema é então definida como

$$y = h(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xi_r \quad (26)$$

ou seja, apenas a posição do robô é tomada como saída do sistema. Convém ressaltar aqui, que devido ao fato da orientação não ser linearizada, não será possível garantir a sua convergência para um valor desejado. No entanto, dependendo da aplicação, esta limitação pode ser contornada por outros métodos. Em alguns robôs, como o RAMSIS [14], o corpo do robô pode ter a sua orientação controlada independentemente da orientação da base utilizada para locomoção. Outro exemplo é quando se tem um manipulador montado sobre o veículo. Neste caso, pode ser que o manipulador consiga operar independentemente da orientação do veículo.

Utilizando-se o algoritmo para cálculo do controle linearizante, obtém-se

$$v(x) = E^{-1}(x)L_f^2 h_1(x) + E^{-1}(x)\bar{u} \quad (27)$$

com

$$E(x) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -(x_r^c \sin \theta + y_r^c \cos \theta) \\ \sin \theta & (x_r^c \cos \theta - y_r^c \sin \theta) \end{bmatrix} \quad (28)$$

e

$$L_f^2 h(x) = \begin{bmatrix} -\eta_1 \eta_2 \sin \theta - \eta_2^2 (x_r^c \cos \theta - y_r^c \sin \theta) \\ \eta_1 \eta_2 \cos \theta - \eta_2^2 (x_r^c \sin \theta + y_r^c \cos \theta) \end{bmatrix} \quad (29)$$

Pode ser facilmente verificado, que $E(x)$ é singular quando $x_r^c = 0$, portanto, o ponto de referência não poderá estar sobre o eixo comum à todas as rodas fixas. Isto ocorre devido ao fato de que pontos sobre este eixo podem mover-se, instantaneamente, em apenas uma dimensão, enquanto os demais pontos podem se mover em duas dimensões.

É interessante observar que a escolha de um ponto de referência deslocado em relação ao eixo das rodas permite obter uma linearização para o sistema. Se não fosse feito este deslocamento, apenas uma das entradas do sistema surgiria explicitamente na expressão de \ddot{y} e a linearização não seria obtida. Isto ocorre porque nesta situação, uma das entradas afeta a saída após duas integrações e a outra entrada afeta a saída somente após três integrações. Ao deslocar-se o ponto de referência, força-se um acoplamento entre as variáveis de estado de tal forma que a saída é afetada pelas duas entradas após o mesmo número de integrações.

Uma outra forma de obter-se uma linearização por realimentação de estados, sem efetuar o deslocamento do ponto de referência, ou seja, com $x_r^c = 0$, seria derivar a saída do sistema mais vezes, até que todas as entradas surgissem explicitamente. Obviamente, no caso do sistema descrito por (25) e (26), ambas as entradas surgiriam explicitamente na expressão de $\ddot{\ddot{y}}$. Na realidade, surgiriam também derivadas das entradas. A princípio, este fato é interessante, pois como as entradas e suas derivadas são independentes entre si, estariam sendo criadas variáveis de entrada adicionais. Estas entradas adicionais permitiriam que fosse definido um vetor de saída com mais componentes, por exemplo, linearizando-se também a orientação. Esta extensão do algoritmo de linearização por realimentação de estados é denominada linearização dinâmica por realimentação de estados [16, 24]. No entanto, procedendo-se desta maneira, obter-se-ia a uma matriz $E(x)$, que seria singular quando $\eta_1 = 0$. Ou seja, este tipo de linearização apenas seria possível quando o robô estivesse em movimento. Como aqui deseja-se abordar o problema de convergência para um ponto e não para uma trajetória, esta abordagem não é vantajosa. Para maiores detalhes, vide [33] onde esta abordagem é utilizada como parte de um controle híbrido, com o objetivo de rastrear uma trajetória e estabilizar o robô no ponto final da trajetória. A estabilização do robô quando não em movimento é obtida utilizando-se uma estratégia de controle variante no tempo.

3.5 Realimentação Linearizante para a Classe (2,1)

Similarmente ao que ocorre na classe (3,0), aqui também existem três variáveis de entrada. Conseqüentemente, é possível definir-se uma saída a ser linearizada com três componentes. A tendência natural portanto, é incluir na saída como sendo igual a ξ_r , ou seja, definir

$$y = h(x) = \xi_r \quad (30)$$

Desta forma, aplicando-se o método para obtenção da realimentação linearizante, obtém-se

$$\begin{aligned} \ddot{y} = & \begin{bmatrix} -\eta_1\eta_2 \sin(\theta + \beta_c) - \eta_1\zeta \sin(\theta + \beta_c) - \eta_2^2(x_r^c \cos \theta - y_r^c \sin \theta) \\ \eta_1\eta_2 \cos(\theta + \beta_c) + \eta_1\zeta \cos(\theta + \beta_c) - \eta_2^2(x_r^c \sin \theta + y_r^c \cos \theta) \\ 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \cos(\theta + \beta_c) & -(x_r^c \sin \theta + y_r^c \cos \theta) & 0 \\ \sin \theta & (x_r^c \cos \theta + y_r^c \sin \theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} v = L_f^2 h(x) + E(x)v \quad (31) \end{aligned}$$

de onde pode-se verificar que $E(x)$ não é inversível, e portanto não poderá ser obtida a linearização. No entanto, se for definindo

$$y = h(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_r \\ \beta_c \end{bmatrix} \quad (32)$$

será obtida a linearização, pois resultará

$$\begin{aligned} \ddot{y} = & \begin{bmatrix} -\eta_1\eta_2 \sin(\theta + \beta_c) - \eta_1\zeta \sin(\theta + \beta_c) - \eta_2^2(x_r^c \cos \theta - y_r^c \sin \theta) \\ \eta_1\eta_2 \cos(\theta + \beta_c) + \eta_1\zeta \cos(\theta + \beta_c) - \eta_2^2(x_r^c \sin \theta + y_r^c \cos \theta) \\ 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \cos(\theta + \beta_c) & -(x_r^c \sin \theta + y_r^c \cos \theta) & 0 \\ \sin \theta & (x_r^c \cos \theta - y_r^c \sin \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v = L_f^2 h(x) + E(x)v \quad (33) \end{aligned}$$

e portanto,

$$v(x) = E^{-1}(x)L_f^2 h_1(x) + E^{-1}(x)\bar{u} \quad (34)$$

É importante notar que a matriz $E(x)$ será singular quando $\tan(\beta_c) = -\frac{x_r^c}{y_r^c}$. Fisicamente, isto significa que o ponto de referência não poderá estar localizado

sobre a normal que passa pelo centro da roda orientável. Esta situação é semelhante ao que ocorre com a classe (2,0) porém, aqui o problema é agravado pelo fato de que a restrição imposta à escolha do ponto de referência é dependente de uma das variáveis de estado. Conseqüentemente, a região de restrição dependerá da trajetória seguida pelo robô. Por outro lado, normalmente a variável β_c tem sua faixa de valores admissíveis limitada pela própria construção do robô e portanto, deverá existir uma região onde o ponto de referência possa ser alocado de forma que $E(x)$ nunca seja singular.

Outro aspecto a considerar é que, com esta definição de vetor de saída, perde-se a capacidade de controlar a orientação do robô, tal como acontece para a classe (2,0).

3.6 Realimentação Linearizante para a Classe (1,1)

Embora nesta classe existam duas variáveis de entrada, uma das variáveis de saída deverá necessariamente ser β_c , tal como ocorre na classe (2,1). Conseqüentemente, tem-se a liberdade de escolher apenas uma das variáveis de saída. Portanto, não será possível sequer obter-se o controle da posição do robô.

3.7 Realimentação Linearizante para a Classe (1,2)

Da mesma forma que na classe anterior, tem-se a liberdade para escolher apenas uma das três variáveis componentes do vetor de saída. As outras duas variáveis devem necessariamente ser β_{c1} e β_{c2} . Pelos mesmos motivos, não será possível controlar a orientação do robô.

3.8 Resultados de Simulação

Para exemplificar a efetividade do método proposto a lei de controle (27) foi simulada para o robô IEEE-Rover, considerando-se como vetor de entradas equivalentes

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{y}_{m1} + \alpha_2(\dot{y}_{m1} - \dot{x}_r) + \alpha_1(y_{m1} - x_r) \\ \ddot{y}_{m2} + \alpha_4(\dot{y}_{m2} - \dot{y}_r) + \alpha_3(y_{m2} - y_r) \end{bmatrix} \quad (35)$$

onde y_{m1} e y_{m2} são as saídas dos modelos de referência associados a cada componente de (26), descritos pelas seguintes funções de transferência

$$G_{m1}(s) = \frac{\alpha_1}{s^2 + \alpha_2 s + \alpha_1} \quad (36)$$

$$G_{m2}(s) = \frac{\alpha_3}{s^2 + \alpha_4 s + \alpha_3} \quad (37)$$

com $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$ e $\alpha_2 = \alpha_4 = 1.4$.

A trajetória espacial obtida para estabilizar o robô no ponto $x_r = 0$, $y_r = 0$ e $\theta = 0$, a partir da condição inicial $x_r(0) = 0m$, $y_r(0) = 4m$ e $\theta(0) = 0$, é mostrada na Fig. 3. As Figs. 4 a 6 mostram as variáveis de posição e orientação em função do tempo. Convém notar, que como o robô não pode se mover lateralmente, este movimento é considerado difícil.

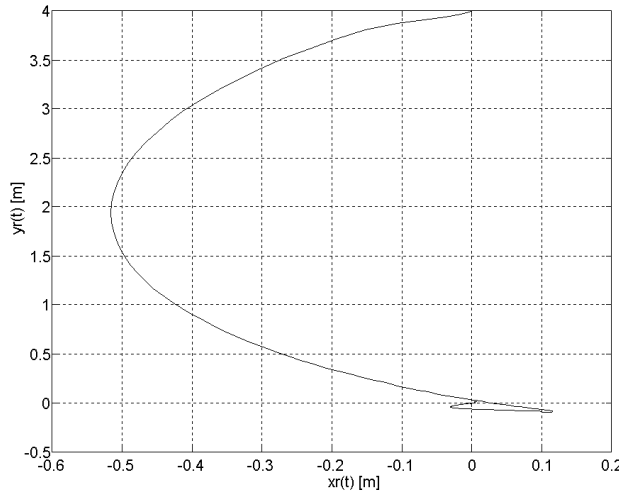


Figura 3: Simulação da trajetória realizada pelo robô com acesso completo aos estados.

Esta mesma lei de controle, também foi simulada para uma tarefa de rastreamento de uma trajetória, como mostrado nas Figs. 7 a 10. Propositalmente, como condição inicial foi escolhido um ponto não pertencente a trajetória de referência. Apesar disto, o robô converge para trajetória de referência e passa a rastrear-la. Na Fig. 11 são mostrados os torques aplicados nas rodas.

Através dos gráficos apresentados acima, pode-se perceber que existe um atraso significativo entre a trajetória de referência e a trajetória executada pelo robô. Na realidade, este atraso é determinado pelos parâmetros do modelo de referência. A princípio, pode-se reduzir este atraso utilizando-se um modelo de referência mais rápido. Porém, com isto, serão necessários torques maiores. A simulação anterior foi repetida utilizando-se modelos de referência com $\alpha_1 = \alpha_2 = 10$ e $\alpha_3 = \alpha_4 = 4.43$. Os resultados obtidos são mostrados nas Figs. 12 a 16. Pode-se observar, que uma redução do atraso por um fator de 2 ou 3, gerou um aumento do torque máximo necessário por um fator de aproximadamente 10. Percebe-se portanto, que a relação entre a velocidade de resposta do sistema e o torque necessário, não é linear. Em simulação, isto não representa problema, no entanto, na

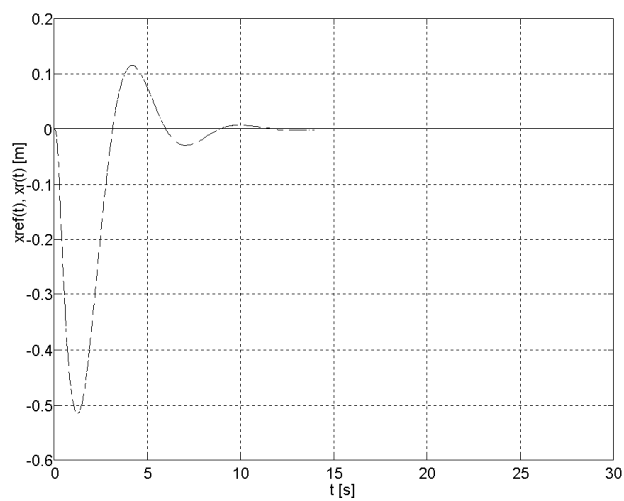


Figura 4: Referência (sólida) e resposta simulada (tracejada) de $x_r(t)$ para o robô IEEE-Rover.

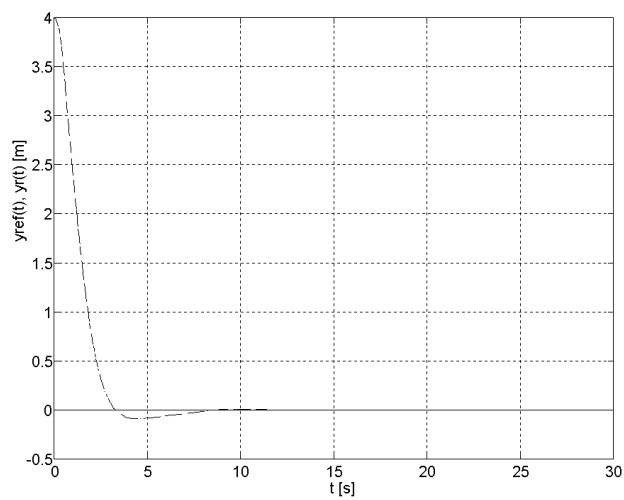


Figura 5: Referência (sólida) e resposta simulada (tracejada) de $y_r(t)$ para o robô IEEE-Rover.

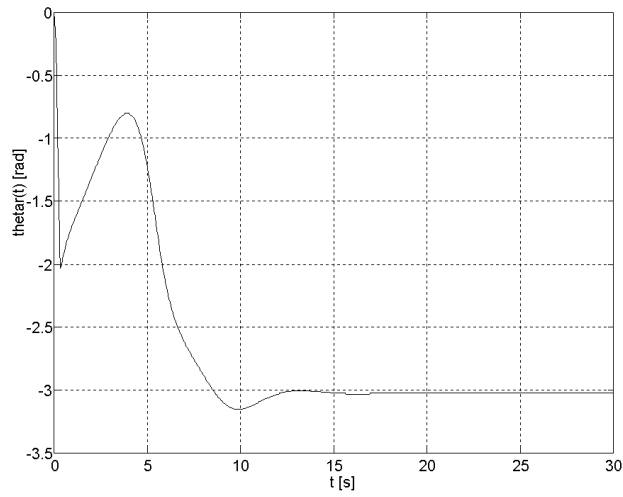


Figura 6: Resposta de orientação para o robô IEEE-Rover.

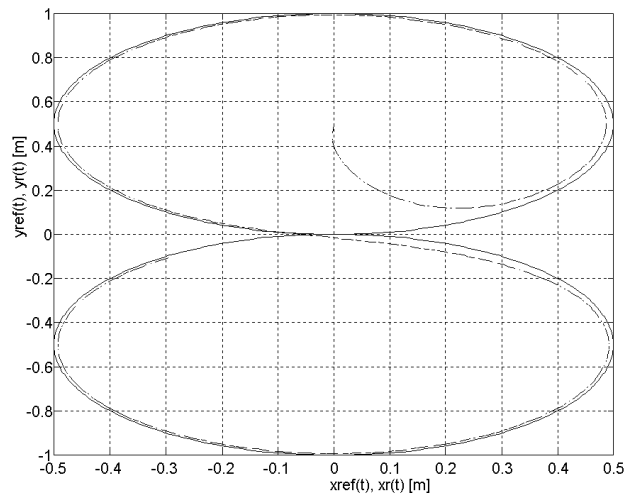


Figura 7: Trajetória de referência (sólida) e trajetória realizada pelo robô (tracejada) com $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e $\alpha_3 = \alpha_4 = 1.4$.

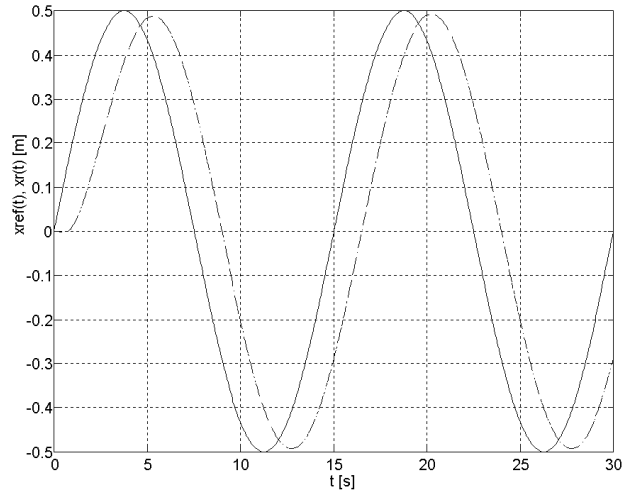


Figura 8: Referência (sólida) e resposta simulada (tracejada) de $x_r(t)$ para o robô IEEE-Rover com $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e $\alpha_3 = \alpha_4 = 1.4$.

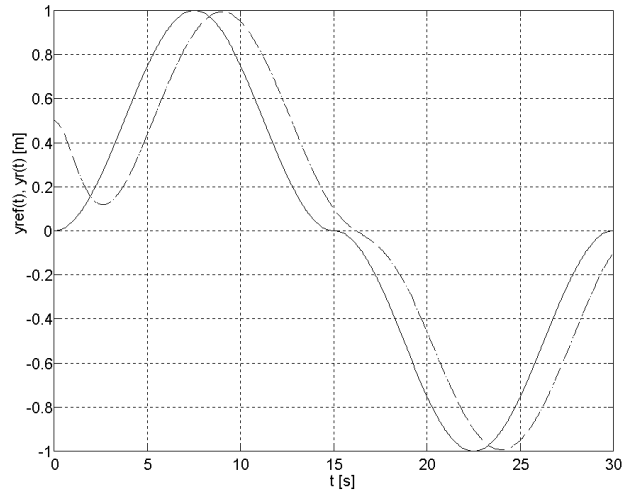


Figura 9: Referência (sólida) e resposta simulada (tracejada) de $y_r(t)$ para o robô IEEE-Rover com $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e $\alpha_3 = \alpha_4 = 1.4$.

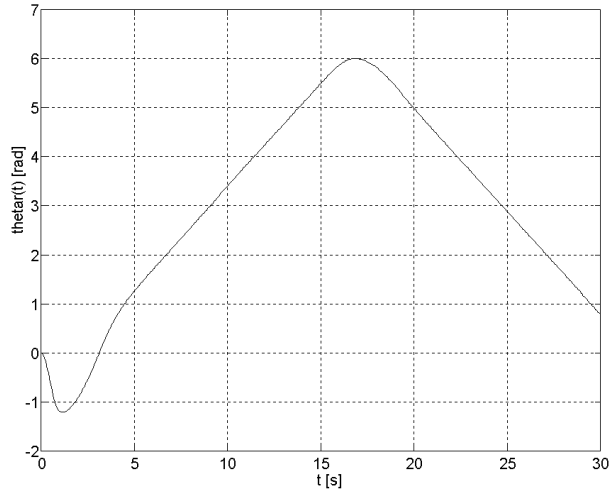


Figura 10: Resposta de orientação para o robô IEEE-Rover com $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e $\alpha_3 = \alpha_4 = 1.4$.

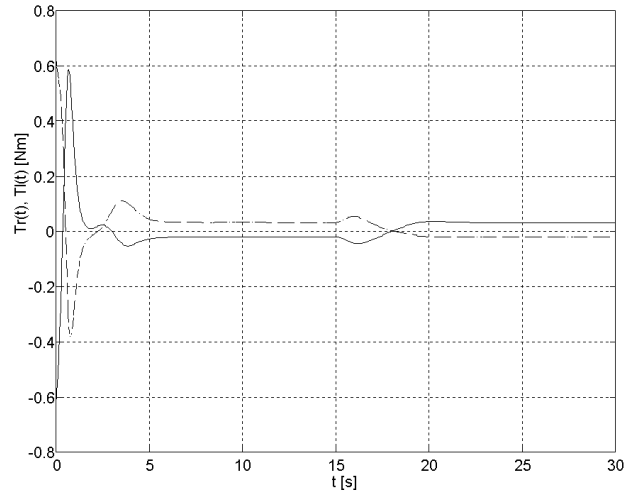


Figura 11: Torque aplicado na roda direita (sólida) e torque aplicado na roda esquerda (tracejada) com $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e $\alpha_3 = \alpha_4 = 1.4$.

implementação em tempo real, os atuadores deverão ter capacidade de fornecer o torque requerido. Caso contrário, entrarão em saturação. Nestas condições, o cancelamento dos termos não lineares através da realimentação, não será exato e portanto, o sistema terá o seu desempenho alterado, podendo até mesmo tornar-se instável.

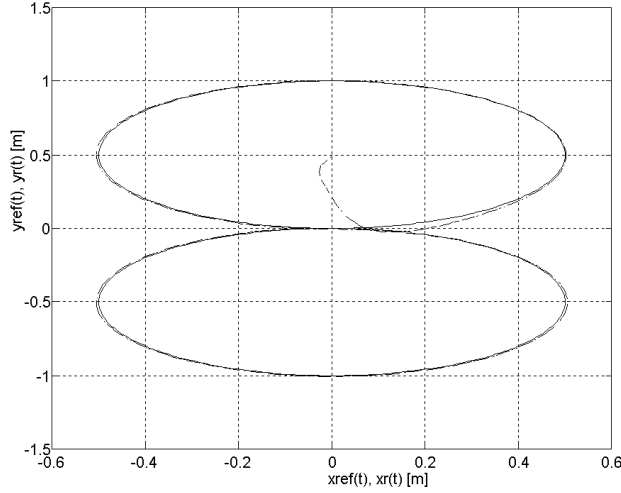


Figura 12: Trajetória de referência (sólida) e trajetória realizada pelo robô (tracejada) com $\alpha_1 = \alpha_2 = 10$ e $\alpha_3 = \alpha_4 = 4.43$.

3.9 Resultados de Tempo Real

A lei de controle (27), juntamente com os modelos de referência (36) e (37) foi implementada em tempo real no robô móvel Twil. As trajetórias de referência utilizadas, são semelhantes às mesmas utilizadas nas simulações da seção anterior. Os parâmetros dos modelos de referência são $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$ e $\alpha_2 = \alpha_4 = 1.4$.

A trajetória espacial obtida em tempo real e em simulação para estabilizar o robô no ponto $x_r = 0$, $y_r = 0$ e $\theta = 0$, a partir da condição inicial $x_r(0) = 0m$, $y_r(0) = 3m$ e $\theta(0) = 0$, é mostrada na Fig. 17. As Figs. 18 a 20 mostram as variáveis de posição e orientação em função do tempo.

De forma similar a seção anterior, uma tarefa de rastreamento de uma trajetória também foi executada em tempo real, como mostrado nas Figs. 21 a 24.

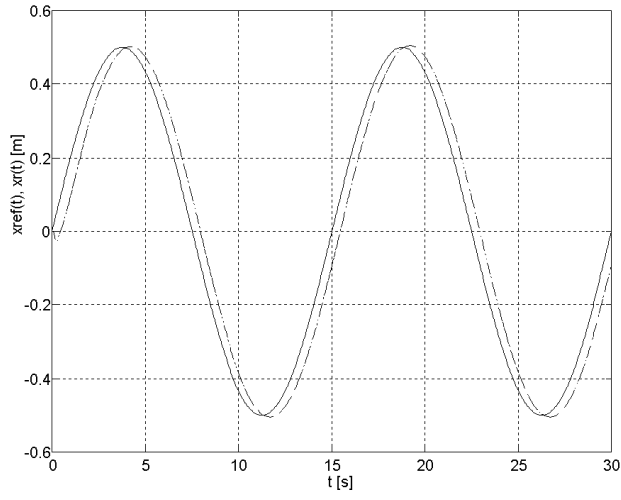


Figura 13: Referência (sólida) e resposta simulada (tracejada) de $x_r(t)$ para o robô IEEE-Rover com $\alpha_1 = \alpha_2 = 10$ e $\alpha_3 = \alpha_4 = 4.43$.

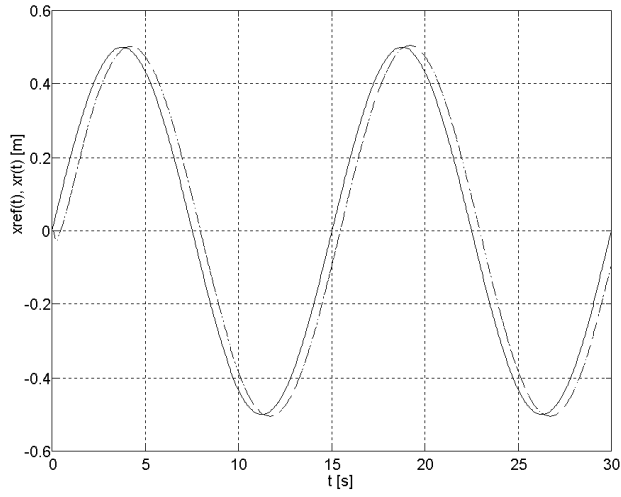


Figura 14: Referência (sólida) e resposta simulada (tracejada) de $y_r(t)$ para o robô IEEE-Rover com $\alpha_1 = \alpha_2 = 10$ e $\alpha_3 = \alpha_4 = 4.43$.

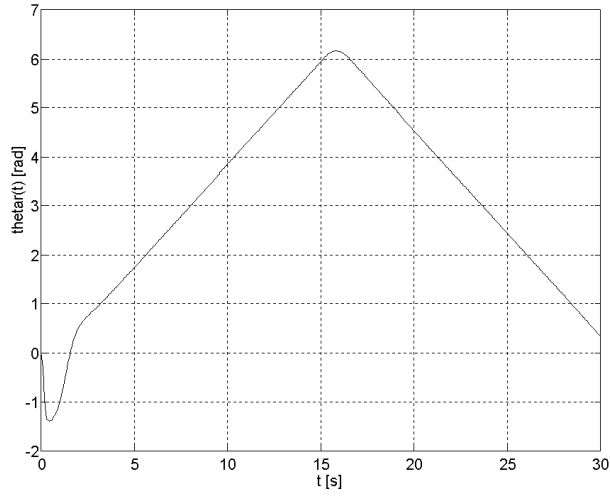


Figura 15: Resposta de orientação para o robô IEEE-Rover com $\alpha_1 = \alpha_2 = 10$ e $\alpha_3 = \alpha_4 = 4.43$.

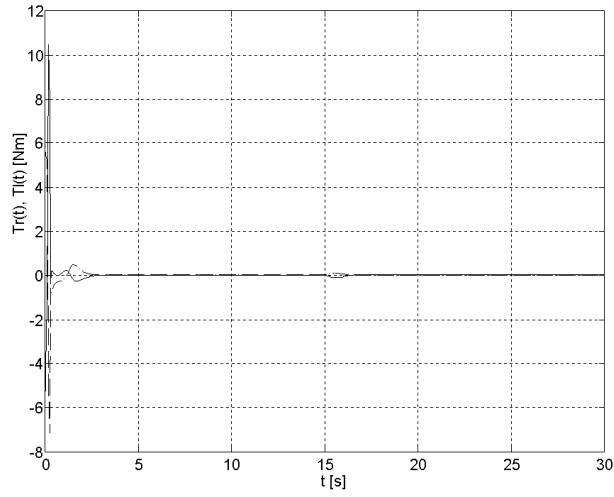


Figura 16: Torque aplicado na roda direita (sólida) e torque aplicado na roda esquerda (tracejada) com $\alpha_1 = \alpha_2 = 10$ e $\alpha_3 = \alpha_4 = 4.43$.

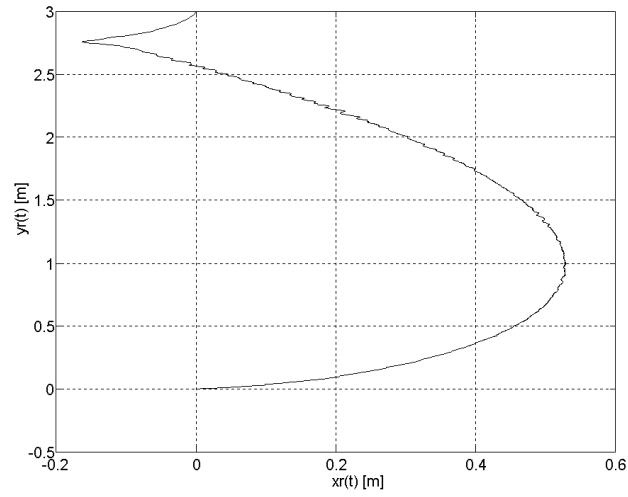


Figura 17: Trajetória espacial em tempo real (sólida) e simulada (tracejada) para o robô Twil em tarefa de *parking*.

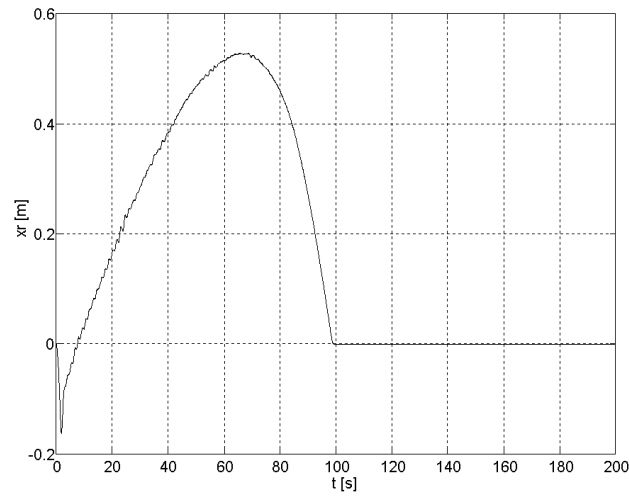


Figura 18: Referência (traço ponto), resposta em tempo real (sólida) e resposta simulada (tracejada) de $x_r(t)$ para o robô Twil em tarefa de *parking*.

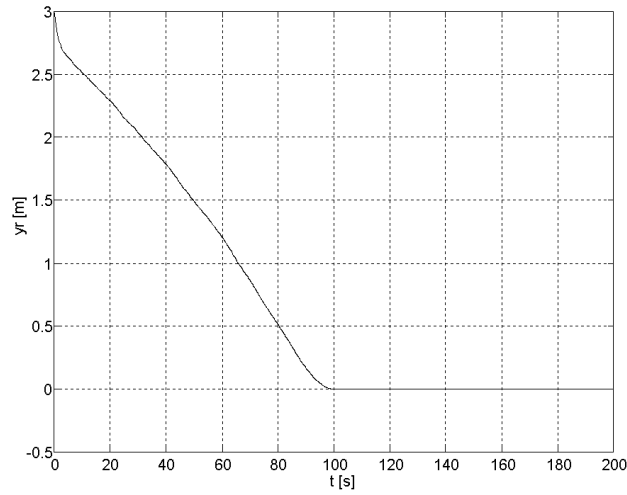


Figura 19: Referência (traço ponto), resposta em tempo real (sólida) e resposta simulada (tracejada) de $y_r(t)$ para o robô Twil em tarefa de *parking*.

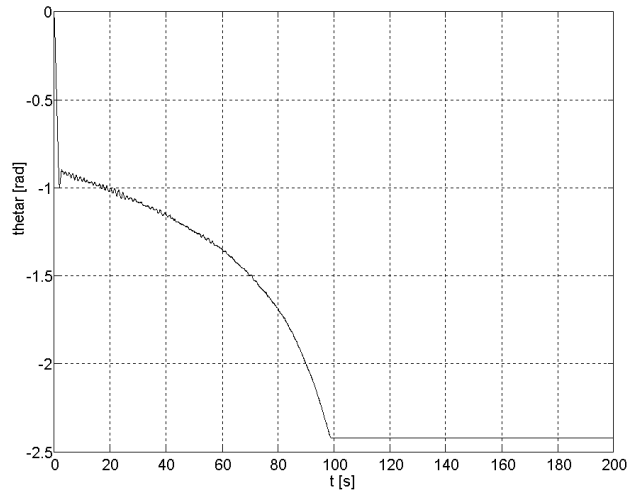


Figura 20: Resposta em tempo real (sólida) e resposta simulada (tracejada) de orientação para o robô Twil em tarefa de *parking*.

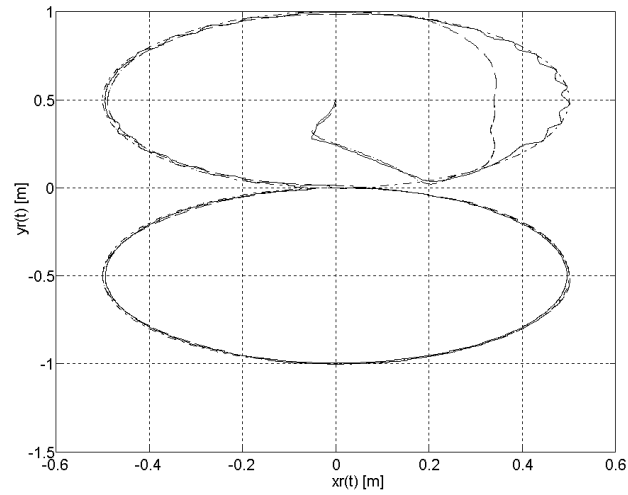


Figura 21: Trajetória espacial de referência (traço ponto), trajetória de tempo real (sólida) e trajetória simulada (tracejada) em tarefa de rastreamento.

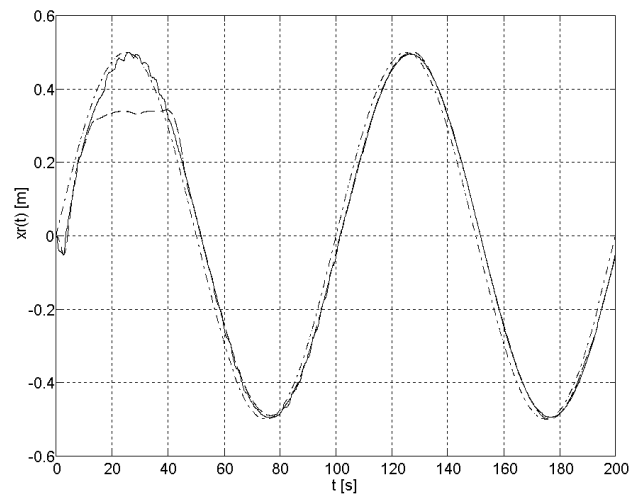


Figura 22: Referência (traço ponto), resposta de tempo real (sólida) e resposta simulada (tracejada) de $x_r(t)$ para o robô Twil em tarefa de rastreamento.

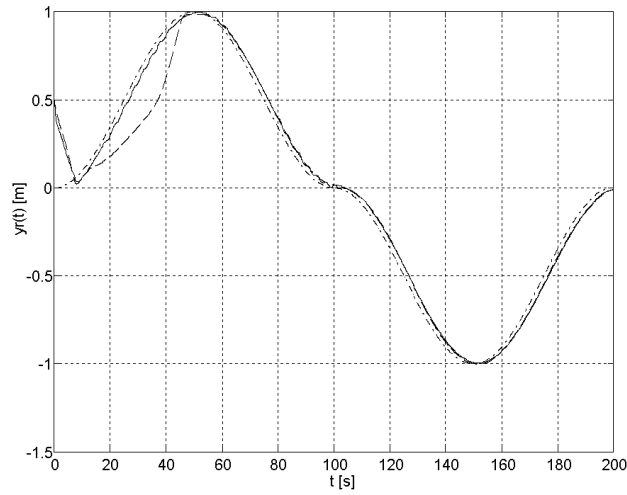


Figura 23: Referência (traço ponto), resposta de tempo real (sólida) e resposta simulada (tracejada) de $y_r(t)$ para o robô Twil em tarefa de rastreamento.

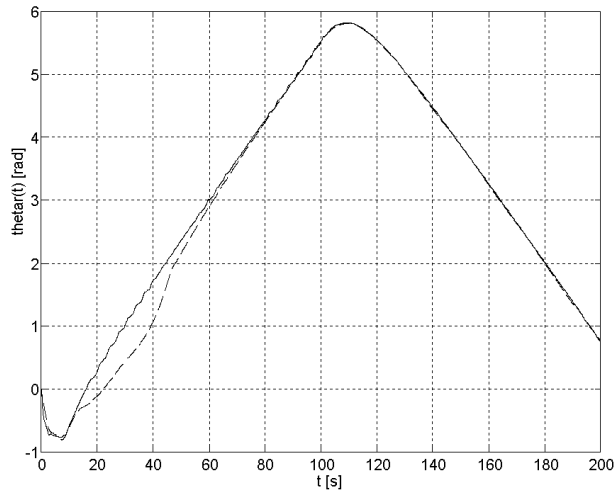


Figura 24: Resposta de tempo real (sólida) e resposta simulada (tracejada) de orientação para o robô Twil em tarefa de rastreamento.

3.10 Conclusão

Utilizando-se o modelo dinâmico de postura, é possível se obter linearização das variáveis de posição e orientação apenas para robôs omnidirecionais, ou seja, para robôs pertencentes a classe (3,0). Para robôs pertencentes as classes (2,0) e (2,1), obtém-se a linearização apenas de duas variáveis de postura. Por conveniência, são escolhidas as variáveis de posição. Para as classes (1,1) e (1,2), é possível linearizar-se apenas uma das variáveis de postura, o que não tem grande utilidade para o projeto de um controlador para este tipo de robô, pois será possível controlar uma das variáveis de posição ou a orientação do robô.

Do exposto acima, torna-se óbvio que o número de variáveis de postura que podem ser linearizadas por realimentação estática de estados é igual ao grau de mobilidade δ_m do robô. Por outro lado, em [2] é afirmado que a dimensão do maior subsistema linearizável do modelo dinâmico de postura é $2(\delta_m + \delta_s)$. Uma conclusão imediata, porém errônea, deste resultado é que para qualquer classe de robô seria possível obter-se a linearização de todas as variáveis de postura, pois em qualquer caso, $\dim(\xi_r) < 2(\delta_m + \delta_s)$. No entanto, como demonstrado nas seções anteriores, não se tem liberdade para escolher quais variáveis de estado serão linearizadas e portanto, nem sempre será possível fazer com que as variáveis de estado correspondentes às variáveis de postura sejam linearizadas.

É interessante notar também, que resultados semelhantes aos apresentados aqui podem ser obtidos se for utilizado apenas o modelo cinemático de postura. Neste caso porém, o sistema será de ordem relativa igual a 1. No entanto, as mesmas restrições quanto à escolha do ponto de referência e quanto as variáveis a serem linearizadas são exatamente as mesmas obtidas quando utilizando o modelo dinâmico de postura. Isto está relacionado ao fato de que as dificuldades no controle de robôs móveis advém da cinemática e não da dinâmica do mecanismo.

Adicionalmente, convém notar que no modelo cinemático de postura as variáveis de entrada são homogêneas a velocidades ou posição. Na realidade, fisicamente, as entradas do robô são os torques aplicados para rotação e orientação das rodas. Isto no entanto, não significa que o modelo cinemático de postura não pode ser utilizado para o desenvolvimento de estratégias de controle. Para a sua utilização, basta que existam malhas de controle internas que garantam que as velocidades ou posições comandadas sejam efetivamente aplicadas nas rodas. Isto pode ser feito, por exemplo, utilizando-se controladores PID convencionais. Esta estratégia de controle é interessante quando não se dispõe dos parâmetros do modelo dinâmico do robô, mas apenas dos parâmetros do modelo cinemático, que são mais facilmente obtidos.

Referências

- [1] R. W. Brockett. *New Directions in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [2] G. Campion, G. Bastin, and B. D'Andréa-Novel. Structural properties and classification of kinematic and dynamical models of wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(1):47–62, Feb 1996.
- [3] G. Campion, G. Bastin, and B. D'Andréa-Novel. Modelling and control of nonholonomic wheeled mobile robots. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1130–1135, Sacramento, CA, Abr. 1991.
- [4] G. Campion, G. Bastin, and B. D'Andréa-Novel. Structural properties and classifications of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(1):47–62, Fev. 1996.
- [5] C. CANUDAS DE WIT, H. Berghuis, and H. Nijmeijer. Practical stabilization of nonlinear systems in chained form. In *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, pages 3475–3480, Lake Buena Vista, FL, Dez. 1994.
- [6] C. CANUDAS DE WIT, H. Khenrouf, C. Samson, and O. J. Sørdaalen. *Non-linear Control Design for Mobile Robots*, chapter 5, pages 121–157. World Scientific Series in Robotics and Intelligent Systems. World Scientific Publisher, 1993.
- [7] C. CANUDAS DE WIT, B. Siciliano, and G. Bastin. *Theory of Robot Control*. Springer-Verlag, London, 1996.
- [8] L. F. Chaves. Projeto, construção, modelagem e controle de um robô móvel. Dissertação (mestrado em engenharia elétrica), Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Nov. 2000.
- [9] Z. Deng and M. Brady. Dynamic tracking of a wheeled mobile robot. In *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 1295–1298, Yokohama, Japan, Jul. 1993.
- [10] K. D. Do, Z. P. Jiang, and J. Pan. A universal saturation controller design for mobile robots. In *Proceedings of the 41st IEEE American Conference on Decision and Control*, pages 2044–2049, Las Vegas, NV, Dez. 2002.

- [11] W. Dong and W. L. Xu. Adaptive tracking control of uncertain nonholonomic dynamic system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(3):450–454, Mar. 2001.
- [12] T. Fukao, H. Nakagawa, and N. Adachi. Adaptive tracking control of a nonholonomic mobile robot. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(5):609–615, Oct. 2000.
- [13] G. C. Goodwin and K. S. Sin. *Adaptive Filtering, Prediction and Control*. Prentice-Hall Information and System Sciences Series. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- [14] A. A. Holenstein. *Aufdatierung der Position und der Orientierung eines Mobilien Roboters*. Abhandlung zur erlangung des titels doktor der technischen wissenschaften, Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zürich, 1992.
- [15] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer Verlag, New York, 3rd edition, 1995.
- [16] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1995.
- [17] Y. Kanayama, Y. K. F. Miyazaki, and T. Noguchi. A stable tracking control method for an autonomous mobile robot. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Cincinnati, OH, Mai. 1990.
- [18] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2. edition, 1996.
- [19] I. Kolmanovsky and N. H. McClamroch. Developments in nonholonomic control problems. *IEEE Control Systems Magazine*, 15(6):20–36, Dec. 1995.
- [20] F. Kühne, C. Claro, S. R. Suess, and W. F. Lages. Estimaco e controle da posico de um robo movel utilizando filtro de kalman descentralizado. In *15o. Congresso Brasileiro de Automtica*, Gramado, RS, Set. 2004.
- [21] W. F. Lages. *Controle e Estimaco de Posico e Orientaco de Robôs Movels*. Tese (doutorado em engenharia eletrnica e computaco), Instituto Tecnológico da Aeronutica, So Jos dos Campos, SP, 1998.
- [22] T. C. Lee, C. H. Lee, and C. C. Teng. Adaptive tracking control of nonholonomic mobile robots by computed torque. In *Proceedings of the 38th IEEE American Conference on Decision and Control*, pages 1254–1259, Phoenix, AZ, Dec. 1999.

- [23] W. L. Nelson. Continuous steering-function control of robot carts. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 36(3):330–337, Aug 1989.
- [24] H. Nijmeijer and A. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control System*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [25] W. Oelen, H. Berghuis, H. Nijmeijer, and C. CANUDAS DE WIT. Hybrid stabilizing control on a real mobile robot. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 2(2):16–23, Jun. 1995.
- [26] G. Oriolo, A. D. Luca, and M. Vendittelli. Wmr control via dynamic feedback linearization: design, implementation and experimental validation. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 10(6):835–852, Nov. 2002.
- [27] M. Oya, C. H. Yu, and R. Katoh. Robust adaptive motion/force tracking control of uncertain nonholonomic mechanical systems. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 19(1):175–181, Feb. 2003.
- [28] J. B. Pomet, B. Thuilot, G. Bastin, and G. Campion. A hybrid strategy for the feedback stabilization of nonholonomic mobile robots. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 129–134, Nice, France, Mai. 1992.
- [29] S. Sastry and M. Bodson. *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*. Prentice Hall Information and System Sciences Series. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [30] S. Sastry and A. Isidori. Adaptive control of linearizable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(11):1123–1131, Nov 1989.
- [31] E. D. Sontag. *Mathematical Control Theory. Deterministic Finite Dimensional Systems*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [32] S. Sun. Designing approach on trajectory-tracking control of mobile robot. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 21(1):81–85, Feb. 2005.
- [33] B. Thuilot, B. D’andréa-Novet, and A. Micaelli. Modeling and feedback control of mobile robots equipped with several steering wheels. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(3):375–390, Jun 1996.
- [34] Y. Yamamoto and X. Yun. Coordinating locomotion and manipulation of a mobile manipulator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(6):1326–1332, Jun. 1994.

- [35] Y. Yamamoto and X. Yun. Coordinating locomotion and manipulation of a mobile manipulator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(6):1326–1332, Jun 1994.
- [36] J. M. Yang and J. H. Kim. Sliding mode control for trajectory tracking of nonholonomic wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 15(3):578–587, Jun. 1999.