Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Elétrica
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
ELE00070 Tópicos Especiais em Controle e Automação I

Filtro de Kalman

Prof. Walter Fetter Lages

19 de agosto de 2008

1 Introdução

Problemas de fusão de dados sempre envolvem algum processo de estimação. Um estimador é alguma regra de decisão que tem como argumento uma sequência de observações e computa um valor para o parâmetro ou estado de interesse. O *filtro de Kalman* é um estimador linear recursivo que calcula uma estimativa de variância mínima para um estado que evolui no tempo a partir de observações relacionadas linearmente com este estado. O filtro de Kalman é ótimo com relação a diversos critérios sob algumas hipótese específicas sobre os ruídos de processo e de observação. O filtro de Kalman possui bastante aplicação em problemas de navegação aeroespacial, robótica e controle.

2 Filtro de Kalman

O artigo de Kalman descrevendo uma solução recursiva para o problema de filtragem linear de dados discretos foi publicado em 1960 [2]. Nesta mesma época os avanços na tecnologia de computadores digitais tornou possível a implementação de soluções recursivas para diversas aplicações em tempo real. Assim, o filtro de Kalman "pegou"quase que imediatamente.

Considere o sistema dinâmico descrito por (1):

$$x(k+1) = A(k)x(k) + w(k) \tag{1}$$

onde $x(k)$ é o estado do sistema, $A(k)$ é a matriz que relaciona $x(k)$ e $x(k+1)$ sem função forçante e $w(k)$ é um ruído branco com estrutura de covariância conhecida, denominado ruído de processo.

A observação (medida) do processo é descrita por (2):

$$y(k) = C(k)x(k) + v(k) \tag{2}$$

onde $C(k)$ é a matriz que relaciona $x(k)$ e $y(k)$ sem função forçante e $v(k)$ é um ruído branco com estrutura de covariância conhecida, denominado ruído de medida.

As matrizes de covariância são dadas por

$$\begin{aligned} E\left[w(k)w^T(i)\right] &= P_w(k)\delta(k-i) & (3)\\ E\left[v(k)v^T(i)\right] &= P_v(k)\delta(k-i) & (4)\\ E\left[w(k)v^T(i)\right] &= 0 & (5) \end{aligned}$$

Seja $\hat{x}(k|k-1)$ uma estimativa a priori do processo no instante k, baseada no conhecimento do processo até o instante $k-1$. Definido-se o erro de estimação como

$$e(k|k-1) = x(k) - \hat{x}(k|k-1) \tag{6}$$

a matriz de covariância associada à $e(k|k-1)$ será dada por

$$\begin{aligned} P(k|k-1) &= E\left[e(k|k-1)e^T(k|k-1)\right] \\ &= E\left[\left(x(k) - \hat{x}(k|k-1)\right)\left(x(k) - \hat{x}(k|k-1)\right)^T\right] \qquad (7) \end{aligned}$$

Deseja-se, agora, utilizar a medida $y(k)$ para melhorar a estimativa *a priori* $\hat{x}(k|k-1)$. Para tanto, será utilizada uma combinação linear da medida com ruído com a sua estimativa *a priori*, conforme a expressão (8)

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)\left(y(k) - C(k)\hat{x}(k|k-1)\right) \tag{8}$$

Obviamente, o ganho $K(k)$ deve ser determinado de forma que a estimativa atualizada seja ótima em algum sentido. Em particular, será utilizado o critério do mínimo erro médio quadrático.

A matriz de covariância associada com a estimativa atualizada *a posteriori* é dada por

$$\begin{aligned} P(k|k) &= E\left[e(k|k)e^T(k|k)\right] \\ &= E\left[\left(x(k) - \hat{x}(k|k)\right)\left(x(k) - \hat{x}(k|k)\right)^T\right] \qquad (9) \end{aligned}$$

Substituindo-se (2) em (8) e a seguir em (9) tem-se

$$P(k|k) = E\left\{[x(k) - \hat{x}(k|k-1) - K(k)\left(C(k)x(k) + v(k) - C(k)\hat{x}(k|k-1)\right)]\right.$$
$$\left.[x(k) - \hat{x}(k|k) - K(k)\left(C(k)x(k) + v(k) - C(k)\hat{x}(k|k-1)\right)]^T\right\}$$

ou

$$P(k|k) = E\left\{[x(k) - \hat{x}(k|k-1) - K(k)C(k)\left(x(k) - \hat{x}(k|k-1)\right) + K(k)v(k)]\right.$$
$$\left.[x(k) - \hat{x}(k|k) - K(k)C(k)\left(x(k) - \hat{x}(k|k-1)\right) + K(k)v(k)]^T\right\}$$

que pode ser rearranjado para

$$P(k|k) = E\left\{[\left(I - K(k)C(k)\right)\left(x(k) - \hat{x}(k|k-1)\right) + K(k)v(k)]\right.$$
$$\left.[\left(I - K(k)C(k)\right)\left(x(k) - \hat{x}(k|k)\right) + K(k)v(k)]^T\right\}$$

Computando-se as esperanças, lembrando a expressão (7) e que $(x(k) - \hat{x}(k|k-1))$ não está correlacionada com o erro de medida $v(k)$, pode-se escrever

$$P(k|k) = \left(I - K(k)C(k)\right)P(k|k-1)\left(I - K(k)C(k)\right)^T + K(k)P_v(k)K^T(k) \tag{10}$$

Deseja-se encontrar o valor de $K(k)$ que minimiza os termos da diagonal principal de $P(k|k)$, pois estes elementos são as variâncias dos erros de estimação do estado sendo estimado. Derivando-se (10) com relação a $K(k)$ e igualando-se a zero tem-se

$$\frac{\partial P(k|k)}{\partial K(k)} = -2\left(I - K(k)C(k)\right)P(k|k-1)C^T(k) + 2K(k)P_v(k) = 0$$

$$-P(k|k-1)C^T(k) + K(k)\Big(C(k)P(k|k-1)C^T(k) + P_v(k)\Big) = 0$$

ou

$$K(k) = P(k|k-1)C^T(k)\Big(C(k)P(k|k-1)C^T(k) + P_v(k)\Big)^{-1} \tag{11}$$

que minimiza o erro médio quadrático da estimação e é denominado *ganho de Kalman*.

A matriz de covariância associada à estimativa ótima pode ser obtida substituindo-se (11) em (10):

$$\begin{aligned}
P(k|k) &= P(k|k-1) \\
&- P(k|k-1)C^T(k)\left(C(k)P(k|k-1)C^T(k)+P_v(k)\right)^{-1}C(k)P(k|k-1) \\
&- P(k|k-1)C^T(k)\left(C(k)P(k|k-1)C^T(k)+P_v(k)\right)^{-T}C(k)P^T(k|k-1) \\
&+ P(k|k-1)C^T(k)\left(C(k)P(k|k-1)C^T(k)+P_v(k)\right)^{-1} \\
&\quad \left(C(k)P(k|k-1)C^T(k)+P_v(k)\right) \\
&\quad \left(C(k)P(k|k-1)C^T(k)+P_v(k)\right)^{-1}C(k)P^T(k|k-1)
\end{aligned}$$

que pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned}
P(k|k) &= P(k|k-1) \\
&- P(k|k-1)C^T(k)\left(C(k)P(k|k-1)C^T(k)+P_v(k)\right)^{-1}C(k)P(k|k-1)
\end{aligned}$$

ou ainda, utilizando-se (11),

$$P(k|k) = P(k|k-1) - K(k)C(k)P(k|k-1)$$

ou

$$P(k|k) = \left(I - K(k)C(k)\right)P(k|k-1) \tag{12}$$

Note que a expressão (10) é válida para qualquer ganho $K(k)$, ótimo ou subótimo, enquanto a expressão (12) é válida apenas para o ganho ótimo.

Tem-se portanto um método para obter a estimativa ótima $\hat{x}(k|k)$ a partir de $\hat{x}(k|k-1)$, $P(k|k-1)$ e da medida $y(k)$ obtida no instante k. No entanto, no instante $k+1$, para que a medida $y(k+1)$ possa ser incorporada serão necessários $\hat{x}(k+1|k)$ e $P(k+1|k)$. Ou seja, é preciso projetar a estimativa atualizada $\hat{x}(k|k)$ para o instante $k+1$. Isto pode ser feito através da expressão (1), ignorando-se a contribuição de $w(k)$ porque possui média zero e não é correlacionado com os seus valores anteriores. Isto é:

$$\hat{x}(k+1|k) = A(k)\hat{x}(k|k) \tag{13}$$

A matriz de covariância do erro associado à $x(k+1|k)$ é obtida a partir de:

$$
\begin{aligned}
e(k+1|k) &= x(k+1) - \hat{x}(k+1|k) \\
&= (A(k)x(k) + w(k)) - A(k)\hat{x}(k|k) = A(k)e(k|k) + w(k)
\end{aligned}
$$

Como $w(k)$ e $e(k|k)$ são descorrelacionados, pode-se escrever

$$
\begin{aligned}
P(k+1|k) &= E\left[e(k+1|k)e^T(k+1|k)\right] \\
&= E\left[(A(k)e(k|k) + w(k))\,(A(k)e(k|k) + w(k))^T\right] \\
&= A(k)P(k|k)A^T(k) + P_w(k) \qquad (14)
\end{aligned}
$$

As expressões (8), (11), (12), (13) e (14) são as expressões do filtro de Kalman recursivo. Note que as expressões (11), (12) e (14) não dependem de variáveis do sistema (apenas de parâmetros) e portanto podem ser calculadas *off-line*.

3 Filtro de Kalman para Sistemas com Entradas Determinísticas

Em grande parte das aplicações em controle, os processos cujos estados devem ser estimados possuem entradas determinísticas, ou seja

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + w(k) \qquad (15)$$

onde $B(k)u(k)$ representa uma entrada determinística.

Como o sistema é linear, pode-se utilizar superposição e considerar as entradas aleatórias e determinísticas separadamente. O filtro de Kalman necessita ser um pouco modificado para tratar este tipo de sistema. A única modificação necessária é na expressão da projeção da estimativa (13) que passará a ser

$$\hat{x}(k+1|k) = A(k)\hat{x}(k|k) + B(k)u(k) \qquad (16)$$

4 Forma de Covariância Inversa do Filtro de Kalman

As expressões do filtro de Kalman, (8), (11), (12), (13) e (14), podem ser manipuladas algebricamente em diversas formas. Uma forma especialmente útil é apresentada a seguir.

Substituindo-se (11) em (12) tem-se

$$P(k|k) = P(k|k-1) - P(k|k-1)C^T(k)\left(C(k)P(k|k-1)C^T(k) + P_v(k)\right)^{-1} C(k)P(k|k-1)$$

ou, se as inversas de $P(k|k)$, $P(k|k-1)$ e $P_v(k)$ existirem

$$P^{-1}(k|k) =$$
$$\left[P(k|k-1) - P(k|k-1)C^T(k)\left(C(k)P(k|k-1)C^T(k) + P_v(k)\right)^{-1} C(k)P(k|k-1)\right]^{-1}$$

Aplicando-se o lema de inversão de matrizes (vide lema 1, no apêndice A), com $A = P(k|k-1)$, $B = -P(k|k-1)C^T(k)$, $C = \left(C(k)P(k|k-1)C^T(k) + P_v(k)\right)^{-1}$ e $D = C(k)P(k|k-1)$ tem-se:

$$\begin{aligned}
P^{-1}(k|k) &= P^{-1}(k|k-1) + P^{-1}(k|k-1)P(k|k-1)C^T(k) \\
&\quad \left[C(k)P(k|k-1)C^T(k) + P_v(k)\right. \\
&- \left. C(k)P(k|k-1)P^{-1}(k|k-1)P(k|k-1)C^T(k)\right]^{-1} \\
&\quad C(k)P(k|k-1)P^{-1}(k|k-1) \\
&= P^{-1}(k|k-1) + \\
&\quad C^T(k)\left[C(k)P(k|k-1)C^T(k) + P_v(k) - C(k)P(k|k-1)C^T(k)\right]^{-1} C(k)
\end{aligned}$$

ou

$$P^{-1}(k|k) = P^{-1}(k|k-1) + C^T(k)R^{-1}(k)C(k) \tag{17}$$

A expressão alternativa para o ganho do filtro de Kalman pode ser obtida inserindo-se $P(k|k)P^{-1}(k|k)$ e $R^{-1}(k)P_v(k)$ em (11):

$$\begin{aligned}
K(k) &= P(k|k)P^{-1}(k|k)P(k|k-1)C^T(k)R^{-1}(k)P_v(k) \\
&\quad \left(C(k)P(k|k-1)C^T(k) + P_v(k)\right)^{-1} \\
&= P(k|k)P^{-1}(k|k)P(k|k-1)C^T(k)R^{-1}(k) \\
&\quad \left(C(k)P(k|k-1)C^T(k)R^{-1}(k) + I\right)^{-1}
\end{aligned}$$

Substituindo-se (17) obtém-se

$$
\begin{aligned}
K(k) &= P(k|k)\left[P^{-1}(k|k-1) + C^T(k)R^{-1}(k)C(k)\right] P(k|k-1)C^T(k)R^{-1}(k) \\
&\quad \left(C(k)P(k|k-1)C^T(k)R^{-1}(k) + I\right)^{-1} \\
&= P(k|k)\left[I + C^T(k)R^{-1}(k)C(k)P(k|k-1)\right] C^T(k)R^{-1}(k) \\
&\quad \left(C(k)P(k|k-1)C^T(k)R^{-1}(k) + I\right)^{-1} \\
&= P(k|k)C^T(k)R^{-1}(k)\left[I + C(k)P(k|k-1)C^T(k)R^{-1}(k)\right] \\
&\quad \left(C(k)P(k|k-1)C^T(k)R^{-1}(k) + I\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

ou

$$
K(k) = P(k|k)C^T(k)R^{-1}(k) \tag{18}
$$

Note-se que agora pode-se calcular a covariância atualizada antes do ganho, portanto a ordem de cálculo é invertida com relação à forma tradicional do filtro de Kalman. Outro detalhe é que são necessárias duas inversões de matrizes ao invés de uma apenas. No entanto, a forma de covariância inversa do filtro de Kalman apresenta a vantagem da matriz de covariância poder ser inicializada com ∞, o que não seria possível com a forma tradicional.

5 Forma de Informação do Filtro de Kalman

Nesta forma, o filtro de Kalman é expresso diretamente em função de medidas da informação sobre os estados de interesse, ao invés dos estados diretamente [3].

Define-se *matriz de informação* como:

$$
Z(i|j) = P^{-1}(i|j) \tag{19}
$$

e o *vetor de estado de informação* é definido como

$$
\begin{aligned}
\hat{z}(i|j) &= P^{-1}(i|j)\hat{x}(i|j) && (20) \\
&= Z(i|j)\hat{x}(i|j) && (21)
\end{aligned}
$$

Deseja-se agora, escrever as expressões do filtro de Kalman em função de $\hat{z}(k|k)$ e $Z(k|k)$. De (8) pode-se escrever:

$$
\hat{x}(k|k) = (I - K(k)C(k))\,\hat{x}(k|k-1) + K(k)y(k)
$$

ou, inserindo-se $P(k|k-1)P^{-1}(k|k-1)$:

$$\hat{x}(k|k) = \left(I - K(k)C(k)\right)P(k|k-1)P^{-1}(k|k-1)\hat{x}(k|k-1) + K(k)y(k)$$

Utilizando-se (12) chega-se à:

$$\hat{x}(k|k) = P(k|k)P^{-1}(k|k-1)\hat{x}(k|k-1) + K(k)y(k)$$

que pré-multiplicado por $P^{-1}(k|k)$ resulta:

$$P^{-1}(k|k)\hat{x}(k|k) = P^{-1}(k|k-1)\hat{x}(k|k-1) + P^{-1}(k|k)K(k)y(k)$$

Portanto, de (18) e (20) tem-se

$$\hat{z}(k|k) = \hat{z}(k|k-1) + P^{-1}(k|k)P(k|k)C^{T}(k)R^{-1}(k)y(k)$$

ou

$$\hat{z}(k|k) = \hat{z}(k|k-1) + i(k) \tag{22}$$

onde

$$i(k) = C^{T}(k)R^{-1}(k)y(k) = \text{contribuição de } y(k) \text{ para o estado de informação}$$

Substituindo-se (19) em (17) obtém-se

$$Z(k|k) = Z(k|k-1) + C^{(}k|k)R^{-1}(k|k)C(k)$$

ou

$$Z(k|k) = Z(k|k-1) + I(k) \tag{23}$$

onde

$$I(k) = C^{(}k|k)R^{-1}(k|k)C(k) = \text{matriz de informação associada a } i(k)$$

Pré-multiplicando-se (13) por $Z(k+1|k)$ tem-se

$$Z(k+1|k)\hat{x}(k+1|k) = Z(k+1|k)A(k)\hat{x}(k|k)$$

ou, de (21)

$$\hat{z}(k+1|k) = Z(k+1|k)A(k)Z^{-1}(k|k)\hat{z}(k|k)$$

que pode ser escrita como:

$$\hat{z}(k+1|k) = L(k+1|k)\hat{z}(k|k) \tag{24}$$

com

$$L(k+1|k) = Z(k+1|k)A(k)Z^{-1}(k|k)$$

Finalmente, de (14) e (19) tem-se

$$Z(k+1|k) = \Big(A(k)Z^{-1}(k|k)A^T(k) + P_w(k)\Big)^{-1} \tag{25}$$

As expressões (22), (23), (24) e (25) são a forma de informação do filtro de Kalman. É interessante notar que as expressões de estimação na forma de informação são mais simples do que as expressões para a forma tradicional. Já as expressões de predição da forma de informação são mais complicadas. Na forma de informação a dimensão das matrizes a serem invertidas é a dimensão do estado, enquanto na forma tradicional a dimensão das matrizes a serem invertidas é a dimensão da observação.

6 Filtro de Informação com Entradas Determinísticas

Tal como o filtro de Kalman, o filtro de informação também é usualmente utilizado em aplicações de controle onde os processos cujos estados devem ser estimados possuem entradas determinísticas, ou seja dinâmica do sistema é dada pela expressão 15. Assim, o filtro de informação necessita ser um pouco modificado para tratar este tipo de sistema. A única modificação necessária é na expressão da projeção da estimativa, que pode ser obtida pré-multiplicando-se (16) por $Z(k+1|k)$:

$$Z(k+1|k)\hat{x}(k+1|k) = Z(k+1|k)A(k)\hat{x}(k|k) + Z(k+1|k)B(k)u(k)$$

ou, de (21)

$$\hat{z}(k+1|k) = Z(k+1|k)A(k)Z^{-1}(k+1|k)\hat{z}(k|k) + Z(k+1|k)B(k)u(k)$$

que pode ser escrita como

$$\hat{z}(k+1|k) = L(k+1|k)\hat{z}(k|k) + M(k+1|k)u(k) \tag{26}$$

com

$$M(k+1|k) = Z(k+1|k)B(k)$$

7 Problemas de Implementação

O filtro de Kalman é um procedimento recursivo. A princípio, as iterações poderiam repetir-se indefinidamente. No entanto, existem problemas práticos que podem levar o algoritmo a divergir.

7.1 Erros de Arredondamento

Como todo procedimento interativo, os erros de arredondamento acumulam-se e podem causar problemas quando o número de iterações cresce. Especialmente em aplicações em tempo real, as restrições de *hardware* podem levar à necessidade de utilizar-se aritmética de ponto fixo, que causam problemas se a faixa dinâmica das variáveis do filtro for grande.

No entanto, se o sistema é observável, o filtro de Kalman possui uma certa estabilidade natural. Isto faz com que um valor de regime para a matriz P exista, mesmo que o processo seja não estacionário. Se esta matriz for perturbada do seu valor de regime, sem perder a sua característica de ser positiva definida, ela tende a voltar a este valor.

Algumas técnicas úteis para evitar os problemas de arredondamento são:

1. Evitar aritmética de ponto fixo. Utilizar aritmética de precisão dupla se em dúvida.

2. Se as medidas de dados são esparsas, cuidado ao propagar a matriz $P(k|k)$ em muitas etapas pequenas entre as medidas.

3. Se possível evitar processos determinísticos na modelagem do filtro (constantes). Usualmente isto leva à situações onde $P(k|k)$ aproxima-se de uma condição semi-definida, onde os erros de arredondamento podem torna-la não positiva definida. Uma solução é adicionar um pequeno ruído na diagonal principal da matriz $Q(k)$. Com isto perde-se a otimalidade do filtro, mas é melhor do que ter-se divergência.

4. Forçar a simetria de $P(k|k)$ e $P(k|k-1)$ a cada iteração. Sabe-se que a covariância deve ser simétrica, portanto as assimetrias são devido a erros de cálculo. O problema da assimetria é automaticamente resolvido se ao programar-se o filtro for utilizado este fato e utilizar-se apenas a parte triangular superior (ou inferior) da matriz nos cálculos.

7.2 Erros de Modelagem

Outra fonte de divergência são os erros de modelagem. Na presença de erros de modelagem, o filtro de Kalman estará tentando ajustar a curva errada aos dados experimentais.

Obviamente, na prática o modelo utilizado sempre é diferente do sistema real. Esta diferença é considerada na formulação do filtro de Kalman através do ruído de estado. Portanto, deve-se utilizar sempre um ruído de estado diferente de zero, mesmo que pela modelagem as variáveis envolvidas não sejam estocásticas.

7.3 Problemas de Observabilidade

No caso geral, uma ou mais variáveis de estado podem não ser observáveis, ou seja, elas estão ocultas do ponto de vista do observador (medidas). Como resultado, se os estados não observáveis forem instáveis, os erros de estimação também serão instáveis.

Isto reflete o fato de que às vezes as medidas não fornecem informação suficiente para estimar todas as variáveis de estado do sistema.

8 Filtro de Kalman Estendido

O filtro de Kalman é uma solução para o problema de estimar os estados de um sistema dinâmico estocástico de dimensão finita *linear*. Para sistemas não lineares, o filtro de Kalman não é, a rigor aplicável, pois a hipótese de linearidade é importante para a dedução do filtro de Kalman como um filtro ótimo. O *filtro de Kalman estendido* procura transpor esta dificuldade utilizando uma linearização em torno da estimativa do estado.

Considere um sistema não linear genérico na forma

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= f\left(x(k), u(k)\right) + w(k) \qquad (27)\\
y(k) &= h\left(x(k), u(k)\right) + v(k) \qquad (28)
\end{aligned}
$$

com

$$
E\left\{ \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^T(k) & v^T(k) \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} P_w & 0 \\ 0 & P_v \end{bmatrix} \delta(k-t)
$$

Seja $\hat{x}(k|k)$ uma estimativa do estado no instante k. Expandindo-se em série de Taylor as expressões (27) e (28) em torno de $x(k) = \hat{x}(k|k)$ e desprezando-se os termos de ordem superior tem-se:

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &\approx f\left(\hat{x}(k|k), u(k)\right) + F(k)[x(k) - \hat{x}(k|k)] + w(k) && (29)\\
y(k) &\approx h\left(\hat{x}(k|k), u(k)\right) + H(k)[x(k) - \hat{x}(k|k)] + v(k) && (30)
\end{aligned}
$$

onde

$$
F(k) = \left.\frac{\partial f\left(x(k), u(k)\right)}{\partial x(k)}\right|_{x(k)=\hat{x}(k|k)}
$$

$$
H(k) = \left.\frac{\partial h\left(x(k), u(k)\right)}{\partial x(k)}\right|_{x(k)=\hat{x}(k|k)}
$$

Utilizando-se as expressões (29) e (30) nas expressões do filtro de Kalman tem-se de (11), (8) e (12), as expressões de estimação do filtro de Kalman extendido:

$$
K(k) = P(k|k-1)H^T(k)\left(H(k)P(k|k-1)H^T(k) + P_v(k)\right)^{-1} \tag{31}
$$

$$
\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)\left[y(k) - h\left(\hat{x}(k|k-1), u(k)\right)\right] \tag{32}
$$

$$
P(k|k) = \left(I - K(k)H(k)\right)P(k|k-1) \tag{33}
$$

e de (16) e (14) tem-se as expressões de predição:

$$
\hat{x}(k+1|k) = f\left(\hat{x}(k|k), u(k)\right) \tag{34}
$$

$$
P(k+1|k) = F(k)P(k|k)F^T(k) + P_w(k) \tag{35}
$$

O filtro de Kalman estendido apresenta alguns problemas particulares. Ao contrário do filtro linear, pode ser que seja necessário calcular as matrizes de covariância e de ganho *on-line,* pois estas podem depender da estimativa do estado. Isto aumenta significativamente a quantidade de computação que deve ser feita *on-line*. Se o estado predito estiver muito longe do estado real, a matriz de covariância real será muito maior do que a covariância estimada e o filtro se tornará descasado com o modelo. Isto pode levar a problemas de instabilidade no filtro. Ou seja, não se pode, em geral, assegurar a otimalidade nem a estabiliade das estimativas obtidas com o filtro de Kalman estendido. Simulações exaustivas são usualmente necessárias para se avaliar o desempenho deste filtro.

Ao contrário do filtro linear, o filtro estendido deve ser inicializado adequadamente para que os modelos linearizados sejam válidos. Caso uma trajetória nominal $x_N(k)$ seja factível, pode-se utilizar o filtro de Kalman para o sistema linearizado em torno de $x_N(k)$. Neste caso o filtro é denominado filtro de Kalman linearizado.

9 Filtro de Informação Estendido

Similarmente ao caso linear, pode-se manipular as expressões do filtro de Kalman de forma a ter-se a estimativa da informação sobre os estados de interesse, ao invés da estimativa do estado diretamente. As vantagens e desvantagens do filtro de informação estendido em relação ao filtro de Kalman estendido são semelhantes às existentes para o caso linear. Por outro lado, o filtro de informação estendido também sofre dos mesmos problemas de instabilidade aos quais está sujeito o filtro de Kalman estendido. O filtro de informação estendido pode ser obtido como segue.

Considerando-se um sistema não linear descrito pela expressões (27) e (28) e somando-se e subtraindo-se $K(k)H(k)\hat{x}(k|k-1)$ na expressão de atualização do filtro de Kalman estendido (32) tem-se:

$$\begin{aligned}
\hat{x}(k|k) &= \hat{x}(k|k-1) - K(k)H(k)\hat{x}(k|k-1) + K(k)\left[y(k) - h\left(\hat{x}(k|k-1), u(k)\right)\right] \\
&+ K(k)H(k)\hat{x}(k|k-1) \\
&= \left(I - K(k)H(k)\right)\hat{x}(k|k-1) + K(k)\left[\nu(k) + H(k)\hat{x}(k|k-1)\right] \\
&= \left(I - K(k)H(k)\right)\hat{x}(k|k-1) + K(k)y'(k) \qquad (36)
\end{aligned}$$

onde

$$y'(k) = \nu(k) + H(k)\hat{x}(k|k-1) = \text{observação linearizada}$$

$$\nu(k) = y(k) - h\left(\hat{x}(k|k-1), u(k)\right) = \text{inovação}$$

De (12) pode-se escrever:

$$\left(I - K(k)H(k)\right) = P(k|k)P^{-1}(k|k-1) \qquad (37)$$

e de (18) tem-se

$$K(k) = P(k|k)H^T(k)R^{-1}(k) \qquad (38)$$

Substituindo-se (37) e (38) em (36):

$$\hat{x}(k|k) = P(k|k)P^{-1}(k|k-1)\hat{x}(k|k-1) + P(k|k)H^T(k)R^{-1}(k)y'(k)$$

e pré-multiplicando-se por $P^{-1}(k|k)$ obtém-se

$$\begin{aligned} P^{-1}(k|k)\hat{x}(k|k) &= P^{-1}(k|k)P(k|k)P^{-1}(k|k-1)\hat{x}(k|k-1) \\ &+ P^{-1}(k|k)P(k|k)H^T(k)R^{-1}(k)y'(k) \\ &= P^{-1}(k|k-1)\hat{x}(k|k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)y'(k) \end{aligned}$$

Portanto, de (20)

$$\hat{z}(k|k) = \hat{z}(k|k-1) + i(k) \tag{39}$$

onde

$i(k) = H^T(k)R^{-1}(k)y'(k) =$ contribuição de $y(k)$ para o estado de informação

De (17) pode-se obter

$$P^{-1}(k|k) = P^{-1}(k|k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)H(k) \tag{40}$$

ou, utilizando-se (19)

$$Z(k|k) = Z(k|k-1) + I(k) \tag{41}$$

onde

$I(k) = H^T(k)R^{-1}(k)H(k) =$ matriz de informação associada a $i(k)$

Pré-multiplicando-se (34) por $Z(k+1|k)$ tem-se

$$Z(k+1|k)\hat{x}(k+1|k) = Z(k+1|k)f\left(\hat{x}(k|k), u(k)\right)$$

ou, de (21)

$$\hat{z}(k+1|k) = Z(k+1|k)f\left(Z^{-1}(k|k)\hat{z}(k|k), u(k)\right) \tag{42}$$

Invertendo-se (35) tem-se

$$P^{-1}(k+1|k) = \left(F(k)P(k|k)F^T(k) + P_w(k)\right)^{-1}$$

e, novamente de (21)

$$Z(k+1|k) = \left(F(k)Z^{-1}(k|k)F^T(k) + P_w(k)\right)^{-1} \tag{43}$$

As expressões (39) e (41) são as expressões de estimação do filtro de informação estendido, enquanto as expressões (42) e (43) são as expressões de predição do filtro de informação estendido.

10 Exercícios

1. A figura 1 mostra um esboço do processo térmico PT236 da Feedback. Utilizando-se um período de amostragem de $2s$, pode-se obter o seguinte modelo discreto para este sistema:

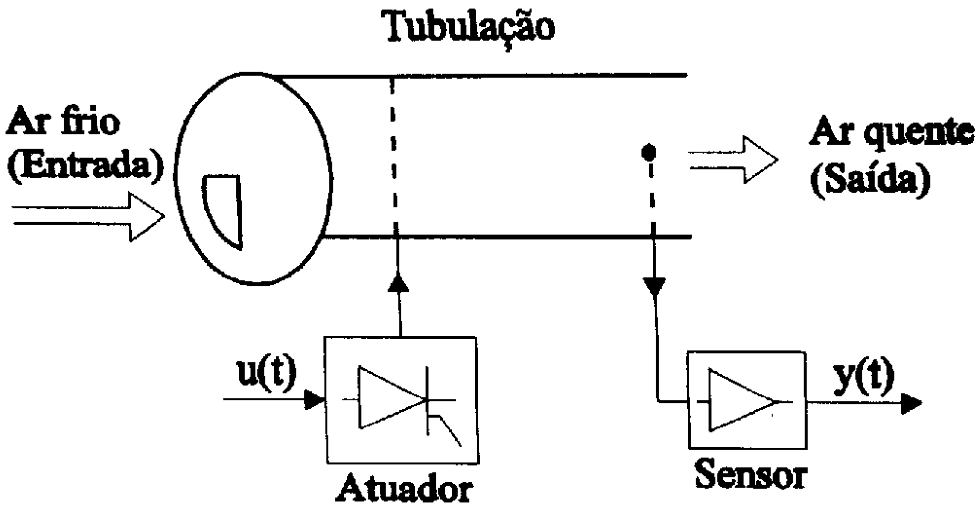

Figura 1: Processo Térmico PT326.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2272 & 1.0 \\ -0.3029 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0634 \\ 0.0978 \end{bmatrix} u(k) + w(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + v(k)$$

com $P_w(k) = 0.01I$ e $P_v(k) = 0.04$.

   (a) Simule a resposta do sistema ao degrau para $k = [0, 150]$ e apresente os gráficos de $x_1(k)$, $x_2(k)$ e $y(k)$.

   (b) Utilize o filtro de Kalman e obtenha uma estimativa para o estado do sistema. Apresente os gráficos de $x(k)$, $\hat{x}_1(k)$, $\hat{x}_2(k)$ e da diagonal principal da matriz de covariância.

2. Repita a questão 1 utilizando a forma de covariância inversa do filtro de Kalman.

3. Repita a questão 1 utilizando a forma de informação do filtro de Kalman.

4. Faça os gráficos das diferenças entre as estimativas obtidas nas questões 1, 2 e 3. A que conclusão se pode chegar observando-se estes gráficos?

5. Considere o sistema descrito pelo modelo ARX

$$y(t+1) = a_1 y(t) + \cdots + a_p y(t-p+1) + b_1 u(t) + \cdots + b_1 u(t-q+1) + w(t+1)$$

com $E[w^2(t+1)] = \sigma^2$ e p e q constantes. Considerando os parâmetros $a_1, \ldots, a_p, b_1 \ldots, b_q$ desconhecidos mas constantes, mostre como o filtro de Kalman poderia ser utilizado para estimar estes parâmetros.

6. Imagine a plataforma utilizada para filmar o carnaval no Rio de Janeiro. Esta plataforma move-se sobre trilhos por toda a extensão do sambódromo. Para medir a posição da plataforma, uma das rodas está equipada com um *encoder* incremental. No entanto, a distância trafegada obtida através do encoder, está sujeita a erros devido à fenômenos como escorregamento das rodas, imperfeições nas rodas e nos trilhos, imprecisão no valor do raio da roda, precisão finita do *encoder*, etc. Supondo que a plataforma também está equipada com um acelerômetro, mostre como se pode utilizar o filtro de Kalman para obter uma estimativa mais confiável da distância percorrida.

7. Considere um robô móvel com acionamento diferencial equipado com um *encoder* incremental em cada roda. Supondo que o robô também está equipado com com um receptor de GPS e uma bússola, mostre como se pode utilizar o filtro de Kalman estendido para obter uma estimativa mais confiável da posição e orientação robô.

8. Repita a questão 7 utilizando o filtro de informação estendido.

9. Obtenha as expressões do filtro de Kalman estendido na forma de covariância inversa.

Referências

[1] L. A. Aguirre. *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. Editora UFMG, Belo Horizonte, MG, 2000.

[2] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering*, pages 35–45, March 1960.

[3] A. G. O. Mutambara. *Decentralized Estimation and Control for Multisensor Systems*. CRC Press, Boca Raton, 1998.

A Resultados Úteis

Lema 1 (Lema de Inversão de Matrizes[1]) *Sejam A, B, C e D matrizes tais que A, C e $(A + BCD)$ sejam inversíveis, então*

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)^{-1} DA^{-1} \tag{44}$$

Prova 1 *Pré-multiplicando-se ambos os lados de (44) por $(A + BCD)$ tem-se:*

$$(A{+}BCD)(A{+}BCD)^{-1} = (A{+}BCD)A^{-1}{-}(A{+}BCD)A^{-1}B\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)^{-1} DA^{-1}$$

$$I = I + BCDA^{-1} - \left(I + BCDA^{-1}\right) B\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)^{-1} DA^{-1}$$

$$I = I + BCDA^{-1} - \left(B + BCDA^{-1}B\right)\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)^{-1} DA^{-1}$$

Colocando-se BC em evidência no terceiro termo, tem-se

$$I = I + BCDA^{-1} - BC\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)^{-1} DA^{-1}$$

$$I = I + BCDA^{-1} - BCDA^{-1}$$

e portanto

$$I = I$$