Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Elétrica
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
ELE00070—Tópicos Especiais em Controle e Automação I

Tensor de Inércia

Prof. Walter Fetter Lages

10 de outubro de 2006

1 Tensor de Inércia

Tensor de inércia é uma generalização do momento de inércia de um corpo.

$$\text{Momento de inércia} \Longrightarrow \text{Rotação em relação à um único eixo}$$

$$\text{Tensor de inércia} \Longrightarrow \text{Rotação em relação à eixos arbitrários}$$

O tensor de inércia de um corpo rígido em relação à um sistema $\{A\}$ é dado por

$$^{A}I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \int\int\int \left(y^2 + z^2\right) \rho dv \\
I_{yy} &= \int\int\int \left(x^2 + z^2\right) \rho dv \\
I_{zz} &= \int\int\int \left(x^2 + y^2\right) \rho dv \\
I_{xy} &= \int\int\int \left(xy\right) \rho dv \\
I_{xz} &= \int\int\int \left(xz\right) \rho dv \\
I_{yz} &= \int\int\int \left(yz\right) \rho dv
\end{aligned}$$

onde dv é a diferencial de volume e ρ é a densidade volumétrica de massa.

Cada volume incremental dv está localizado no corpo por ${}^{A}P = [\ x \quad y \quad z\ ]^{T}$, como mostra a figura 1. Percebe-se que os elementos I_{xx}, I_{yy} e I_{zz} são o produto da massa pelo quadrado da distância ao eixo respectivo. Por isto são chamados de **momentos de massa de inércia**. Os elementos I_{xy}, I_{xz} e I_{yz} são chamados de **produtos de massa de inércia**.

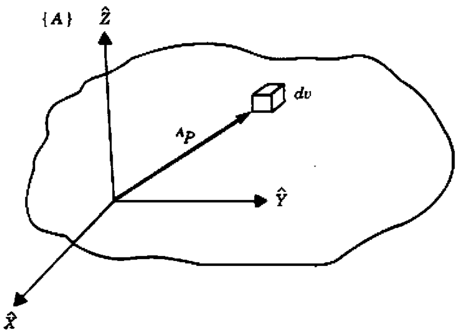

Figura 1: Volume incremental.

Os seis elementos dependem da posição e orientação do sistema no qual eles estão representados. Se for escolhido um sistema tal que $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$, os eixos deste sistema são chamados **eixos principais** e os elementos I_{xx}, I_{yy} e I_{zz} são chamados de **momentos principais de inércia**.

Exemplo 1 *Encontre o tensor de inércia para o corpo retangular da figura 2, assumindo densidade volumétrica de massa constante.*

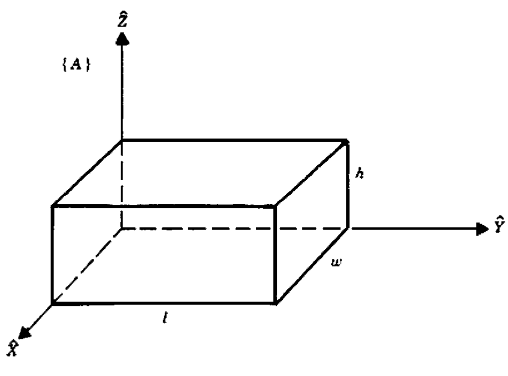

Figura 2: Corpo retangular.

$$I_{xx} = \int_0^h \int_0^l \int_0^w \left(y^2 + z^2\right) \rho dx dy dz$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^h \int_0^l \left(y^2 + z^2\right) \rho w dy dz \\
&= \int_0^h \left(\frac{l^3}{3} + z^2 l\right) \rho w dz \\
&= \left(\frac{hl^3 w}{3} + \frac{h^3 lw}{3}\right) \rho \\
&= \left(\frac{vl^2}{3} + \frac{vh^2}{3}\right) \rho
\end{aligned}
$$

$$I_{xx} = \frac{m}{3}\left(l^2 + h^2\right)$$

pela simetria do corpo:

$$I_{yy} = \frac{m}{3}\left(w^2 + h^2\right)$$

$$I_{zz} = \frac{m}{3}\left(l^2 + w^2\right)$$

$$
\begin{aligned}
I_{xy} &= \int_0^h \int_0^l \int_0^w xy\rho dx dy dz \\
&= \int_0^h \int_0^l \frac{w^2}{2} y\rho dy dz \\
&= \int_0^h \frac{w^2 l^2}{4} \rho dz \\
&= \frac{w^2 l^2}{4} h\rho \\
&= v\frac{wl}{4}\rho
\end{aligned}
$$

$$I_{xy} = \frac{m}{4} wl$$

e novamente pela simetria do corpo:

$$I_{xz} = \frac{m}{4} hw$$

$$I_{yz} = \frac{m}{4} hl$$

logo

$$
{}^{A}I = \left[\begin{array}{ccc}
\frac{m}{3}\left(l^2 + h^2\right) & -\frac{m}{4} wl & -\frac{m}{4} hw \\
-\frac{m}{4} wl & \frac{m}{3}\left(w^2 + h^2\right) & -\frac{m}{4} hl \\
-\frac{m}{4} hw & -\frac{m}{4} hl & \frac{m}{3}\left(l^2 + w^2\right)
\end{array}\right]
$$

2 Teorema do Eixo Paralelo

Teorema 1 (Teorema do Eixo Paralelo) *Seja $\{C\}$ localizado no centro de massa de um corpo e $\{A\}$ um sistema transladado em relação à $\{C\}$, então*

$$^{A}I_{zz} = {}^{C}I_{zz} + m\left({}^{A}x_C^2 + {}^{A}y_C^2\right)$$

$$^{A}I_{xy} = {}^{C}I_{xy} + m^{A}x_C{}^{A}y_C$$

onde $^{A}P_C = \left[\begin{array}{ccc} {}^{A}x_C & {}^{A}y_C & {}^{A}z_C \end{array}\right]^T$ *localiza o centro de massa em relação a* $\{A\}$.

Na forma matricial, o teorema 2 pode ser escrito como

$$^{A}I = {}^{C}I + m\left[{}^{A}P_C^{T\,A}P_C I_{3\times3} - {}^{A}P_C{}^{A}P_C^T\right]$$

onde $I_{3\times3}$ é a matriz identidade 3×3.

Exemplo 2 *Encontre o tensor de inércia do corpo mostrado na figura 3 cuja origem do sistema de coordenadas está no centro de massa.*

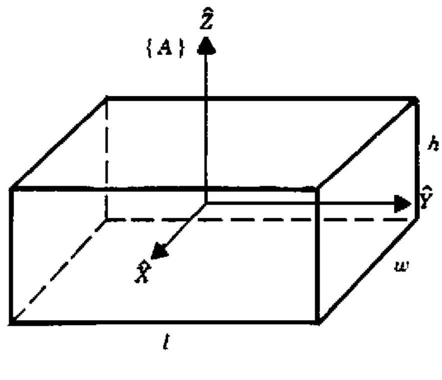

Figura 3: Corpo retangular com sistema de coordenadas no centro de massa.

Tem-se

$$\left[\begin{array}{c} {}^{A}x_C \\ {}^{A}y_C \\ {}^{A}z_C \end{array}\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c} w \\ l \\ h \end{array}\right]$$

logo

$$^{C}I_{zz} = \frac{m}{12}\left(w^2 + l^2\right)$$

$$^{C}I_{xy} = 0$$

portanto

$$^{C}I = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}\left(h^2 + l^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}\left(w^2 + h^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}\left(l^2 + w^2\right) \end{bmatrix}$$

que revela que o sistema em questão define os eixos principais do corpo.

É importante perceber que a maioria dos robôs tem elos cuja geometria e montagem são complexas, fazendo com que o cálculo de momentos seja complicado. Desta forma, muitas vezes é mais conveniente medir os momentos de inércia.

3 exercícios

1. Calcule o tensor de inércia de um cilindro de densidade de massa uniforme.

2. Determine o modelo dinâmico de um robô com 2 graus de liberdade com a primeira junta rotacional e a segunda prismática. Suponha que cada elo é retangular, com densidade de massa uniforme, dimensões l_i, w_i e h_i e massa m_i.

3. Repita o exercício anterior supondo que os elos são cilindros com comprimento l_i e raio r_i.

4. Repita os exercícios anteriores supondo que pode-se considerar que a massa dos elos está concentrada na sua extremidade contrária à qual está localizado o atuador correspondente.