# Exercícios no R de Distribuição de Probabilidade Contínua

Fernanda Eustáquio

2020

## Contents

Exercícios resolvidos com a linguagem R retirados do PortalAction e do livro Estatística Aplicada (inferência) Rebula (2018) do professor Prof. MSc Uanderson Rébula.

A descrição de cada distribuição, incluindo suas funções densidade de probabilidade (f.d.p), função densidade acumulada (f.d.a), quantil correspondente a dada probabilidade e o gerador aleatório de uma amostra da distribuição estão delhados em https://github.com/fernandase/statistic/tree/master/distribuicao-continua .

# 1 Distribuição Uniforme

## 1.1 Exemplo 6.1.1 no Portal Action

> "A ocorrência de panes em qualquer ponto de uma rede telefônica de 7 km foi modelada por uma distribuição Uniforme no intervalo [0, 7]."

a) Qual é a probabilidade de que uma pane venha a ocorrer nos primeiros 800 metros?

$P(X \leq 0.8) =$

```
punif(800/1000, max = 7)
```

```
## [1] 0.1142857
```

b) Qual a probabilidade de que ocorra nos 3 km centrais da rede?

$P(2 \leq X \leq 5) =$

```
punif(5, max = 7) - punif(2, max = 7)
```

```
## [1] 0.4285714
```

## 1.2 Rebula (2018) - Exemplo 1, página 39.

> "Com base em históricos, o tempo de vôo de Chicago - Nova York pode ter qualquer valor no intervalo de 120 a 140 minutos. Considerando que cada um dos intervalos de 1 minuto é igualmente provável, determine:"

a) A probabilidade do avião chegar entre 126 e 131 minutos.

$P(126 \leq X \leq 131) =$

```
punif(131, min = 120, max = 140) - punif(126, min = 120, max = 140)
```

```
## [1] 0.25
```

b) A probabilidade do avião chegar em 136 minutos ou mais.

$P(X \geq 136) =$

```
punif(136, min = 120, max = 140, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.2
```

ou

$1 - P(X \leq 136) =$

```
1 - punif(136, min = 120, max = 140)
```

```
## [1] 0.2
```

# 2 Distribuição Normal

## 2.1 Exemplo 6.2.2 no Portal Action

> "Determine a área sob a curva de uma normal padronizada para Z entre -0,20 e 1,93."

$P(-0.20 \leq Z \leq 1.93) =$

```r
pnorm(1.93) - pnorm(-0.2)
```

```
## [1] 0.5524563
```

## 2.2 Exemplo 6.2.3 no Portal Action

> "Suponha que a espessura média de arruelas produzidas em uma fábrica tenha distribuição normal com média 11,15 mm e desvio padrão 2,238 mm. **Qual a porcentagem de arruelas que tem espessura entre 8,70 mm e 14,70 mm?**"

### 2.2.1 Solução 01:

- No R é possível fazer o cálculo da probabilidade direto, sem ter que transformar a variável X em Z. Neste caso,

$P(8.70 \leq X \leq 14.70) =?$

```r
pnorm(14.70, mean = 11.15, sd = 2.238) - pnorm(8.70, mean = 11.15, sd = 2.238)
```

```
## [1] 0.8068393
```

### 2.2.2 Solução 02:

$P(8.70 \leq X \leq 14.70) =?$

$$z = \frac{8.70 - 11.15}{2.238} = -1.0947274$$

$$z = \frac{14.70 - 11.15}{2.238} = 1.5862377$$

$P(-1.0947274 \leq Z \leq 1.5862377) =$

```r
pnorm((14.70 - 11.15)/2.238) - pnorm((8.70 - 11.15)/2.238)
```

```
## [1] 0.8068393
```

**Resposta: A porcentagem de arruelas com espessura entre 8,70 e 14,70 é de 80.68 %.**

- No portal, os valores de -z e z foram arredondados para -z = 1.09 e z = 1.58. Desta forma:

$P(-1.09 \leq Z \leq 1.58) =$

```
pnorm(1.58) - pnorm(-1.09)
```

```
## [1] 0.80509
```

**Resposta: A porcentagem de arruelas com espessura entre 8,70 e 14,70 é de, 80.51 %.**

## 2.3 Exemplo

> "O tempo gasto no exame vestibular de uma universidade tem distribuição Normal, com média 120 min e desvio padrão 15 min."

a) Sorteando-se um aluno ao acaso, qual é a probabilidade dele terminar o exame antes de 100 minutos?

### 2.3.1 Solução 01:

$P(X \leq 100) =$

```
pnorm(100, mean = 120, sd = 15)
```

```
## [1] 0.09121122
```

### 2.3.2 Solução 02:

$P(X \leq 100) = P(Z \leq \frac{x-120}{15}) = P(Z \leq z)$

$z = \frac{100-120}{15} = -1.3333333$

$P(Z \leq -1.3333333) =$

```
pnorm((100 - 120)/15)
```

```
## [1] 0.09121122
```

**Resposta: A probabilidade do aluno terminar o exame antes de 100 minutos é de 9.12%**

b) Qual deve ser o tempo de prova de modo a permitir que 95% dos vestibulandos terminem no prazo estipulado?

### 2.3.3 Solução 01:

$P(X \leq x) = 0.95$

```
qnorm(0.95, mean = 120, sd = 15)
```

```
## [1] 144.6728
```

**Resposta: O tempo de prova deve ser de 144.6728 minutos.**

### 2.3.4 Solução 02:

$P(X \leq x) = P(Z \leq \frac{x-120}{15}) = P(Z \leq z) = 0.95$

$z =$

```
qnorm(0.95)
```

```
## [1] 1.644854
```

$z = 1.6448536 = \frac{x-120}{15}$

$x = 144.6728044$

```
cat('O tempo de prova deve ser de', round(qnorm(0.95) * 15 + 120, 4), 'minutos.')
```

```
## O tempo de prova deve ser de 144.6728 minutos.
```

c) Qual é o intervalo central (simétrico) de tempo, tal que 80% dos estudantes gastam para completar o exame?

### 2.3.5 Solução 01:

$P(x_1 \leq X \leq x_2) = 0.8$, considerando $x_1 = x_2$

$P(X \leq x) - [1 - P(X \leq x)] = 0.8$

$2P(X \leq x) = 1.80$

$P(X \leq x) = 0.9$

$x = x_2 =$

```
qnorm(1.8/2, mean = 120, sd = 15)
```

```
## [1] 139.2233
```

$P(X \leq 139.2232735) = 0.9$

$P(x_1 \leq X \leq 139.2232735) = 0.8$

$P(X \leq 139.2232735) - P(X \leq x_1) = 0.8$

$2P(X \leq x_1) = P(X \leq 139.2232735) - 0.8$

$P(X \leq x_1) = 0.1$

$x_1 =$

```
qnorm(0.1, mean = 120, sd = 15)
```

```
## [1] 100.7767
```

**Resposta: O intervalo de tempo será de [100.7767, 139.2233] minutos.**

### 2.3.6 Solução 02:

$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P\left(\frac{x_1 - 120}{15} \leq Z \leq \frac{x_2 - 120}{15}\right) = 0.8$

$P(-z \leq Z \leq z) = 0.8$

$P(Z \leq z) - [1 - P(Z \leq z)] = 0.8$

$P(Z \leq z) = 0.9$

$z = +-$

```r
qnorm(0.9)
```

```
## [1] 1.281552
```

$-z = -1.2815516 = \frac{x_1 - 120}{15}$

$x_1 = 100.7767265$

$z = 1.2815516 = \frac{x_2 - 120}{15}$

$x_2 = 139.2232735$

```r
cat('O intervalo de tempo será de [', -qnorm(0.9) * 15 + 120, ', ',
    qnorm(0.9) * 15 + 120, '] minutos.', sep = '')
```

```
## O intervalo de tempo será de [100.7767, 139.2233] minutos.
```

### 2.3.7 Solução 03:

$\frac{0.8}{2} = 0.4$ (para cada lado a partir da $\mu = 0$)

$P(0 \leq Z \leq x) = 0.4$

$P(Z \leq z) - P(Z \leq 0) = 0.4$

$P(Z \leq z) = P(Z \leq 0) + 0.4$

$P(Z \leq z) =$

```r
pnorm(0) + 0.4
```

```
## [1] 0.9
```

$P(Z \leq z) = 0.9$

$z = +-$

```r
qnorm(pnorm(0) + 0.4)
```

```
## [1] 1.281552
```

$-z = -1.2815516 = \frac{x_1 - 120}{15}$

$x_1 = 100.7767265$

$z = 1.2815516 = \frac{x_2 - 120}{15}$

$x_2 = 139.2232735$

```
cat('O intervalo de tempo será de [', -qnorm(pnorm(0) + 0.4) * 15 + 120, ', ',
    qnorm(pnorm(0) + 0.4) * 15 + + 120, '] horas.', sep = '')
```

```
## O intervalo de tempo será de [100.7767, 139.2233] horas.
```

## 2.4 Rebula (2018) - Exemplo 9, página 45.

> "Seja X o tempo de vida útil das lâmpadas produzidas pela PHILIPS. Sabe-se que a média de vida útil das lâmpadas é de 1000 horas com desvio padrão de 100 horas, ou seja, X ~ N[1000, 100]. O fabricante deseja fixar prazo de garantia, em horas, de tal modo que, se a duração da lâmpada for inferior à garantia, a lâmpada seja trocada."

a) De quantas horas deve ser este prazo para que somente 4% das lâmpadas sejam trocadas?

### 2.4.1 Solução 01:

$P(X \leq x) = 0.04$

$x =$

```
qnorm(0.04, mean = 1000, sd = 100)
```

```
## [1] 824.9314
```

**Resposta: O prazo deve ser de 825 horas.**

### 2.4.2 Solução 02:

$P(X \leq x) = P(Z \leq \frac{x - 1000}{100}) = P(Z \leq z) = 0.04$

$z =$

```r
qnorm(0.04)
```

```
## [1] -1.750686
```

$z = -1.7506861 = \frac{x-1000}{100}$

$x = 824.9313929$

```r
cat('O prazo deve ser de ', round(1000 + qnorm(0.04) * 100), ' horas.', sep = '')
```

```
## O prazo deve ser de 825 horas.
```

b) Dentro de que limite, de ambos os lados da média, ficará 95% das lâmpadas? Rebula (2018) - Exemplo 11, página 46.

### 2.4.3 Solução 01:

$P(x_1 \leq X \leq x_2) = 0.95$, considerando $x_1 = x_2$

$P(X \leq x) - [1 - P(X \leq x)] = 0.95$

$2P(X \leq x) = 1.95$

$P(X \leq x) = 0.975$

$x = x_2 =$

```r
qnorm(0.975, mean = 1000, sd = 100)
```

```
## [1] 1195.996
```

$P(X \leq 1195.9963985) = 0.975$

$P(x_1 \leq X \leq 1195.9963985) = 0.95$

$P(X \leq 1195.9963985) - P(X \leq x_1) = 0.95$

$2P(X \leq x_1) = P(X \leq 1195.9963985) - 0.95$

$P(X \leq x_1) = 0.025$

$x_1 =$

```r
qnorm(0.025, mean = 1000, sd = 100)
```

```
## [1] 804.0036
```

**Resposta: O intervalo de tempo será de [804, 1196] horas.**

### 2.4.4 Solução 02:

$\frac{0.95}{2} = 0.475$ (para cada lado a partir da $\mu = 0$)

$P(0 \leq Z \leq z) = 0.475$

$P(Z \leq z) - P(Z \leq 0) = 0.475$

$P(Z \leq z) = P(Z \leq 0) + 0.475$

$P(Z \leq z) =$

```r
pnorm(0) + 0.475
```

```
## [1] 0.975
```

$z = +-$

```r
qnorm(pnorm(0) + 0.475)
```

```
## [1] 1.959964
```

$-z = -1.959964 = \frac{x_1 - 1000}{100}$

$x_1 = 804.0036015$

$z = 1.959964 = \frac{x_2 - 1000}{100}$

$x_2 = 1195.9963985$

```r
cat('O intervalo de tempo será de [', round(1000 - qnorm(pnorm(0) + 0.475) * 100), ', '
    round(1000 + qnorm(pnorm(0) + 0.475) * 100), '] horas.', sep = '')
```

```
## O intervalo de tempo será de [804, 1196] horas.
```

### 2.4.5 Solução 03:

$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P\left(\frac{x_1 - 1000}{100} \leq Z \leq \frac{x_2 - 1000}{100}\right) = 0.95$

$P(-z \leq Z \leq z) = 0.95$

$P(Z \leq z) - [1 - P(Z \leq z)] = 0.95$

$P(Z \leq z) = 0.975$

$z = +-$

```
qnorm(0.975)
```

```
## [1] 1.959964
```

$-z = -1.959964 = \frac{x - 1000}{100}$

$x_1 = 804.0036015$

$z = 1.959964 = \frac{x - 1000}{100}$

$x_2 = 1195.9963985$

```
cat('O intervalo de tempo será de [', round(-qnorm(0.975) * 100 + 1000), ', ',
    round(qnorm(0.975) * 100 + 1000), '] horas.', sep = '')
```

```
## O intervalo de tempo será de [804, 1196] horas.
```

## 2.5 Rebula (2018) - Exemplo 10, página 46.

> "As pontuações para um teste de Engenheiro em uma empresa são normalmente distribuídas, com uma média de 7,5 com e um desvio padrão de 0,5. Para ser adequado ao emprego, você deve ter pontuação dentro dos 9% primeiros. **Qual é a menor pontuação que você pode conseguir e ainda ser adequado ao emprego?**"

### 2.5.1 Solução 01:

$P(X \geq x) = 0.09$

$x =$

```r
qnorm(0.09, mean = 7.5, sd = 0.5, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 8.170378
```

**Resposta: A menor pontuação deve ser de 8.17.**

### 2.5.2 Solução 02:

$P(X \geq x) = P(Z \geq \frac{x-7.5}{0.5}) = P(Z \geq z) = 0.09$

$z =$

```r
qnorm(0.09, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 1.340755
```

$z = 1.340755 = \frac{x-7.5}{0.5}$

$x = 8.1703775$

```r
cat('A menor pontuação deve ser de ', 7.5 +
      round(qnorm(0.09, lower.tail = FALSE) * 0.5,2), '.', sep = '')
```

```
## A menor pontuação deve ser de 8.17.
```

ou

$P(Z \geq z) = 1 - P(Z \leq z) = 0.09$

$P(Z \leq z) = 1 - 0.09 = 0.91$

$z =$

```r
qnorm(0.91)
```

```
## [1] 1.340755
```

$z = 1.340755 = \frac{x-7.5}{0.5}$

$x = 8.1703775$

```r
cat('A menor pontuação deve ser de ', round(7.5 + qnorm(0.91) * 0.5,2),
    '.', sep = '')
```

```
## A menor pontuação deve ser de 8.17.
```

# 3 Distribuição Qui-quadrado

## 3.1 Exemplo 6.3.2 no Portal Action

> "X segue uma distribuição qui-quadrado com 17 graus de liberdade e queremos encontrar $x_1$ e $x_2$ tais que"

$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = 0.95$

**Probabilidade acumulada até $x_1$:**

$P(X \leq x_1) = \frac{1-0.95}{2} = 0.025$

$x_1 =$

```r
qchisq(0.025, 17)
```

```
## [1] 7.564186
```

**Probabilidade acumulada até $x_2$:**

$P(X \leq x_2) = \frac{1+0.95}{2} = 0.975$

$x_2 =$

```r
qchisq(0.975, 17)
```

```
## [1] 30.19101
```

# 4 Distribuição t de Student

## 4.1 Rebula (2018) - Exemplo, página 67.

> "Um analista deseja estimar a média do tempo de vida útil das lâmpadas produzidas. Coletou uma amostra de 20 lâmpadas e verificou que a média de vida

útil é de 1000 horas, com desvio padrão de 100 horas. **Construa um Intervalo de Confiança (IC) de 90% para a média populacional.**"

$\bar{x} = 1000, \sigma = 100, \mu = ?$

n = 20 (tamanho da amostra)

Graus de liberdade = n - 1 = 19

$IC = \bar{x} + -t \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$P(X \leq t) = 0.05$

$t = +-$

```r
qt(0.05, 19, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 1.729133
```

$P(x_1 \leq X \leq x_2) = 0.9$

$x_1 = ?$

```r
1000 - qt(0.05, 19, lower.tail = FALSE) * 100/sqrt(20)
```

```
## [1] 961.3354
```

$x_2 = ?$

```r
1000 + qt(0.05, 19, lower.tail = FALSE) * 100/sqrt(20)
```

```
## [1] 1038.665
```

**Resposta: Com 90% de confiança, a média do tempo de vida útil das lâmpadas está em [961.3354, 1038.6646].**

# 5 Distribuição Exponencial

## 5.1 Exemplo 6.12.1 no Portal Action

> "O tempo até a falha do ventilador de motores a diesel tem uma distribuição Exponencial com parâmetro $\lambda = \frac{1}{28700}$ horas. **Qual a probabilidade de um destes ventiladores falhar nas primeiras 24000 horas de funcionamento?**"

$P(0 \leq X \leq 24000) = P(X \leq 24000) - P(X \leq 0) =$

```r
pexp(24000, 1/28700) - pexp(0, 1/28700)
```

```
## [1] 0.5666619
```

**Resposta: A probabilidade de falha nas primeiras 24000 horas é de 56.67%.**

## 5.2 Rebula (2018) - Exemplo 1, página 52.

> "O tempo médio que as pessoas acessam um caixa eletrônico de um banco é de 25 minutos. Qual a probabilidade de que o próximo acesso a este caixa."

a) Seja superior a 40 minutos

$P(X \geq 40) =$

```r
pexp(40, 1/25, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.2018965
```

**Resposta: A probabilidade é de 20.19%.**

b) Seja superior a 90 minutos

$P(X \geq 90) =$

```r
pexp(90, 1/25, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.02732372
```

**Resposta: A probabilidade é de 2.73%.**

c) Seja inferior a 10 minutos

$P(X \leq 10) =$

```r
pexp(10, 1/25)
```

```
## [1] 0.32968
```

**Resposta: A probabilidade é de 32.97%.**

## 5.3 Rebula (2018) - Exemplo 2, página 53.

> "O tempo médio entre ocorrências de acidentes na rodovia Barra Mansa - Angra é de 10 dias. Se um acidente acabou de acontecer, qual a probabilidade de que o próximo ocorra em um período:"

a) Inferior a 15 dias

$P(X \leq 15) =$

```r
pexp(15, 1/10)
```

```
## [1] 0.7768698
```

**Resposta: A probabilidade é de 77.69%.**

b) Entre 20 e 25 dias

$P(20 \leq X \leq 25) = P(X \leq 25) - P(X \leq 20) =$

```r
pexp(25, 1/10) - pexp(20, 1/10)
```

```
## [1] 0.05325028
```

**Resposta: A probabilidade é de 5.33%.**

# 6 Distribuição de Weibull

## 6.1 Rebula (2018) - Exemplo 1, página 54.

> "O rolamento de um motor segue uma variável aleatória de Weibull, com vida útil de 200 horas e fator de qualidade de 0,8. Determine a probabilidade de o rolamento:"

$\alpha(shape) = 0.8, \beta(scale) = 200$

a) Durar 300 horas ou mais

$P(X \geq 300) =$

```r
pweibull(300, 0.8, 200, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.2507844
```

**Resposta: A probabilidade é de 25.08%.**

b) Durar 70 horas ou menos

$P(X \leq 70) =$

```r
pweibull(70, 0.8, 200)
```

```
## [1] 0.3506426
```

**Resposta: A probabilidade é de 35.06%.**

# Referências

Rebula, Uanderson. 2018. *Estatística Aplicada (Inferência)*. https://www.academia.edu/37027227/Livro_pdf_Estat%C3%ADstica_aplicada_infer%C3%AAncia_Prof_MSc_Uanderson_Rebula.