

Exercícios no R de Distribuição de Probabilidade Contínua

Fernanda Eustáquio

2020

Contents

1	Distribuição Uniforme	3
1.1	Exemplo 6.1.1 no Portal Action	3
1.2	Rebula (2018) - Exemplo 1, página 39.	4
2	Distribuição Normal	4
2.1	Exemplo 6.2.2 no Portal Action	4
2.2	Exemplo 6.2.3 no Portal Action	5
2.3	Exemplo	6
2.4	Rebula (2018) - Exemplo 9, página 45.	10
2.5	Rebula (2018) - Exemplo 10, página 46.	13
3	Distribuição Qui-quadrado	15
3.1	Exemplo 6.3.2 no Portal Action	15
4	Distribuição t de Student	15
4.1	Rebula (2018) - Exemplo, página 67.	15
5	Distribuição Exponencial	17
5.1	Exemplo 6.12.1 no Portal Action	17
5.2	Rebula (2018) - Exemplo 1, página 52.	17
5.3	Rebula (2018) - Exemplo 2, página 53.	18

6	Distribuição de Weibull	19
6.1	Rebula (2018) - Exemplo 1, página 54.	19
	Referências	20



Exercícios resolvidos com a linguagem R retirados do PortalAction e do livro Estatística Aplicada (inferência) Rebula (2018) do professor Prof. MSc Uanderson Rébula.

A descrição de cada distribuição, incluindo suas funções densidade de probabilidade (f.d.p), função distribuição acumulada (f.d.a), quantil correspondente a dada probabilidade e o gerador aleatório de uma amostra da distribuição estão delhados em <https://github.com/fernandase/statistic/tree/master/distribuicao-continua> .

1 Distribuição Uniforme

1.1 Exemplo 6.1.1 no Portal Action

“A ocorrência de panes em qualquer ponto de uma rede telefônica de 7 km foi modelada por uma distribuição Uniforme no intervalo $[0, 7]$.”

- a) Qual é a probabilidade de que uma pane venha a ocorrer nos primeiros 800 metros?

$$P(X \leq 0.8) =$$

```
punif(800/1000, max = 7)
```

```
## [1] 0.1142857
```

- b) Qual a probabilidade de que ocorra nos 3 km centrais da rede?

$$P(2 \leq X \leq 5) =$$

```
punif(5, max = 7) - punif(2, max = 7)
```

```
## [1] 0.4285714
```

1.2 Rebula (2018) - Exemplo 1, página 39.

“Com base em históricos, o tempo de voo de Chicago - Nova York pode ter qualquer valor no intervalo de 120 a 140 minutos. Considerando que cada um dos intervalos de 1 minuto é igualmente provável, determine:”

a) A probabilidade do avião chegar entre 126 e 131 minutos.

$$P(126 \leq X \leq 131) =$$

```
punif(131, min = 120, max = 140) - punif(126, min = 120, max = 140)
```

```
## [1] 0.25
```

b) A probabilidade do avião chegar em 136 minutos ou mais.

$$P(X \geq 136) =$$

```
punif(136, min = 120, max = 140, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.2
```

ou

$$1 - P(X \leq 136) =$$

```
1 - punif(136, min = 120, max = 140)
```

```
## [1] 0.2
```

2 Distribuição Normal

2.1 Exemplo 6.2.2 no Portal Action

“Determine a área sob a curva de uma normal padronizada para Z entre -0,20 e 1,93.”

$$P(-0.20 \leq Z \leq 1.93) =$$

```
pnorm(1.93) - pnorm(-0.2)
```

```
## [1] 0.5524563
```

2.2 Exemplo 6.2.3 no Portal Action

“Suponha que a espessura média de arruelas produzidas em uma fábrica tenha distribuição normal com média 11,15 mm e desvio padrão 2,238 mm. **Qual a porcentagem de arruelas que tem espessura entre 8,70 mm e 14,70 mm?**”

2.2.1 Solução 01:

- No R é possível fazer o cálculo da probabilidade direto, sem ter que transformar a variável X em Z . Neste caso,

$$P(8.70 \leq X \leq 14.70) = ?$$

```
pnorm(14.70, mean = 11.15, sd = 2.238) - pnorm(8.70, mean = 11.15, sd = 2.238)
```

```
## [1] 0.8068393
```

2.2.2 Solução 02:

$$P(8.70 \leq X \leq 14.70) = ?$$

$$z = \frac{8.70 - 11.15}{2.238} = -1.0947274$$

$$z = \frac{14.70 - 11.15}{2.238} = 1.5862377$$

$$P(-1.0947274 \leq Z \leq 1.5862377) =$$

```
pnorm((14.70 - 11.15)/2.238) - pnorm((8.70 - 11.15)/2.238)
```

```
## [1] 0.8068393
```

Resposta: A porcentagem de arruelas com espessura entre 8,70 e 14,70 é de 80.68 %.

- No portal, os valores de $-z$ e z foram arredondados para $-z = 1.09$ e $z = 1.58$. Desta forma:

$$P(-1.09 \leq Z \leq 1.58) =$$

```
pnorm(1.58) - pnorm(-1.09)
```

```
## [1] 0.80509
```

Resposta: A porcentagem de arruelas com espessura entre 8,70 e 14,70 é de, 80.51 %.

2.3 Exemplo

“O tempo gasto no exame vestibular de uma universidade tem distribuição Normal, com média 120 min e desvio padrão 15 min.”

- a) Sorteando-se um aluno ao acaso, qual é a probabilidade dele terminar o exame antes de 100 minutos?

2.3.1 Solução 01:

$$P(X \leq 100) =$$

```
pnorm(100, mean = 120, sd = 15)
```

```
## [1] 0.09121122
```

2.3.2 Solução 02:

$$P(X \leq 100) = P(Z \leq \frac{x-120}{15}) = P(Z \leq z)$$

$$z = \frac{100-120}{15} = -1.3333333$$

$$P(Z \leq -1.3333333) =$$

```
pnorm((100 - 120)/15)
```

```
## [1] 0.09121122
```

Resposta: A probabilidade do aluno terminar o exame antes de 100 minutos é de 9.12%

- b) Qual deve ser o tempo de prova de modo a permitir que 95% dos vestibulandos terminem no prazo estipulado?

2.3.3 Solução 01:

$$P(X \leq x) = 0.95$$

```
qnorm(0.95, mean = 120, sd = 15)
```

```
## [1] 144.6728
```

Resposta: O tempo de prova deve ser de 144.6728 minutos.

2.3.4 Solução 02:

$$P(X \leq x) = P(Z \leq \frac{x-120}{15}) = P(Z \leq z) = 0.95$$

$$z =$$

```
qnorm(0.95)
```

```
## [1] 1.644854
```

$$z = 1.6448536 = \frac{x-120}{15}$$

$$x = 144.6728044$$

```
cat('O tempo de prova deve ser de', round(qnorm(0.95) * 15 + 120, 4), 'minutos.')
```

```
## O tempo de prova deve ser de 144.6728 minutos.
```

- c) Qual é o intervalo central (simétrico) de tempo, tal que 80% dos estudantes gastam para completar o exame?

2.3.5 Solução 01:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = 0.8, \text{ considerando } x_1 = x_2$$

$$P(X \leq x) - [1 - P(X \leq x)] = 0.8$$

$$2P(X \leq x) = 1.80$$

$$P(X \leq x) = 0.9$$

$$x = x_2 =$$

```
qnorm(1.8/2, mean = 120, sd = 15)
```

```
## [1] 139.2233
```

$$P(X \leq 139.2232735) = 0.9$$

$$P(x_1 \leq X \leq 139.2232735) = 0.8$$

$$P(X \leq 139.2232735) - P(X \leq x_1) = 0.8$$

$$2P(X \leq x_1) = P(X \leq 139.2232735) - 0.8$$

$$P(X \leq x_1) = 0.1$$

$$x_1 =$$

```
qnorm(0.1, mean = 120, sd = 15)
```

```
## [1] 100.7767
```

Resposta: O intervalo de tempo será de [100.7767, 139.2233] minutos.

2.3.6 Solução 02:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P\left(\frac{x_1 - 120}{15} \leq Z \leq \frac{x_2 - 120}{15}\right) = 0.8$$

$$P(-z \leq Z \leq z) = 0.8$$

$$P(Z \leq z) - [1 - P(Z \leq z)] = 0.8$$

$$P(Z \leq z) = 0.9$$

$$z = +-$$


```
qnorm(0.9)
```

```
## [1] 1.281552
```

$$-z = -1.2815516 = \frac{x_1 - 120}{15}$$

$$x_1 = 100.7767265$$

$$z = 1.2815516 = \frac{x_2 - 120}{15}$$

$$x_2 = 139.2232735$$

```
cat('O intervalo de tempo será de [', -qnorm(0.9) * 15 + 120, ', ',  
    qnorm(0.9) * 15 + 120, '] minutos.', sep = '')
```

```
## O intervalo de tempo será de [100.7767, 139.2233] minutos.
```

2.3.7 Solução 03:

$$\frac{0.8}{2} = 0.4 \text{ (para cada lado a partir da } \mu = 0 \text{)}$$

$$P(0 \leq Z \leq x) = 0.4$$

$$P(Z \leq z) - P(Z \leq 0) = 0.4$$

$$P(Z \leq z) = P(Z \leq 0) + 0.4$$

$$P(Z \leq z) =$$

```
pnorm(0) + 0.4
```

```
## [1] 0.9
```

$$P(Z \leq z) = 0.9$$

$$z = +-$$

```
qnorm(pnorm(0) + 0.4)
```

```
## [1] 1.281552
```

$$-z = -1.2815516 = \frac{x_1 - 120}{15}$$

$$x_1 = 100.7767265$$

$$z = 1.2815516 = \frac{x_2 - 120}{15}$$

$$x_2 = 139.2232735$$

```
cat('O intervalo de tempo será de [', -qnorm(pnorm(0) + 0.4) * 15 + 120, ', ',
    qnorm(pnorm(0) + 0.4) * 15 + 120, '] horas.', sep = '')
```

```
## O intervalo de tempo será de [100.7767, 139.2233] horas.
```

2.4 Rebula (2018) - Exemplo 9, página 45.

“Seja X o tempo de vida útil das lâmpadas produzidas pela PHILIPS. Sabe-se que a média de vida útil das lâmpadas é de 1000 horas com desvio padrão de 100 horas, ou seja, $X \sim N[1000, 100]$. O fabricante deseja fixar prazo de garantia, em horas, de tal modo que, se a duração da lâmpada for inferior à garantia, a lâmpada seja trocada.”

- a) De quantas horas deve ser este prazo para que somente 4% das lâmpadas sejam trocadas?

2.4.1 Solução 01:

$$P(X \leq x) = 0.04$$

$$x =$$

```
qnorm(0.04, mean = 1000, sd = 100)
```

```
## [1] 824.9314
```

Resposta: O prazo deve ser de 825 horas.

2.4.2 Solução 02:

$$P(X \leq x) = P(Z \leq \frac{x-1000}{100}) = P(Z \leq z) = 0.04$$

$$z =$$

```
qnorm(0.04)
```

```
## [1] -1.750686
```

$$z = -1.7506861 = \frac{x-1000}{100}$$

$$x = 824.9313929$$

```
cat('O prazo deve ser de ', round(1000 + qnorm(0.04) * 100), ' horas.', sep = '')
```

```
## O prazo deve ser de 825 horas.
```

- b) Dentro de que limite, de ambos os lados da média, ficará 95% das lâmpadas? Rebula (2018) - Exemplo 11, página 46.

2.4.3 Solução 01:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = 0.95, \text{ considerando } x_1 = x_2$$

$$P(X \leq x) - [1 - P(X \leq x)] = 0.95$$

$$2P(X \leq x) = 1.95$$

$$P(X \leq x) = 0.975$$

$$x = x_2 =$$

```
qnorm(0.975, mean = 1000, sd = 100)
```

```
## [1] 1195.996
```

$$P(X \leq 1195.9963985) = 0.975$$

$$P(x_1 \leq X \leq 1195.9963985) = 0.95$$

$$P(X \leq 1195.9963985) - P(X \leq x_1) = 0.95$$

$$2P(X \leq x_1) = P(X \leq 1195.9963985) - 0.95$$

$$P(X \leq x_1) = 0.025$$

$$x_1 =$$

```
qnorm(0.025, mean = 1000, sd = 100)
```

```
## [1] 804.0036
```

Resposta: O intervalo de tempo será de [804, 1196] horas.

2.4.4 Solução 02:

$\frac{0.95}{2} = 0.475$ (para cada lado a partir da $\mu = 0$)

$$P(0 \leq Z \leq z) = 0.475$$

$$P(Z \leq z) - P(Z \leq 0) = 0.475$$

$$P(Z \leq z) = P(Z \leq 0) + 0.475$$

$$P(Z \leq z) =$$

```
pnorm(0) + 0.475
```

```
## [1] 0.975
```

$z = +-$

```
qnorm(pnorm(0) + 0.475)
```

```
## [1] 1.959964
```

$$-z = -1.959964 = \frac{x_1 - 1000}{100}$$

$$x_1 = 804.0036015$$

$$z = 1.959964 = \frac{x_2 - 1000}{100}$$

$$x_2 = 1195.9963985$$

```
cat('O intervalo de tempo será de [', round(1000 - qnorm(pnorm(0) + 0.475) * 100), ', ',  
    round(1000 + qnorm(pnorm(0) + 0.475) * 100), '] horas.', sep = '')
```

```
## O intervalo de tempo será de [804, 1196] horas.
```

2.4.5 Solução 03:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P\left(\frac{x_1 - 1000}{100} \leq Z \leq \frac{x_2 - 1000}{100}\right) = 0.95$$

$$P(-z \leq Z \leq z) = 0.95$$

$$P(Z \leq z) - [1 - P(Z \leq z)] = 0.95$$

$$P(Z \leq z) = 0.975$$

$$z = + -$$

```
qnorm(0.975)
```

```
## [1] 1.959964
```

$$-z = -1.959964 = \frac{x - 1000}{100}$$

$$x_1 = 804.0036015$$

$$z = 1.959964 = \frac{x - 1000}{100}$$

$$x_2 = 1195.9963985$$

```
cat('O intervalo de tempo será de [', round(-qnorm(0.975) * 100 + 1000), ', ',  
    round(qnorm(0.975) * 100 + 1000), '] horas.', sep = '')
```

```
## O intervalo de tempo será de [804, 1196] horas.
```

2.5 Rebula (2018) - Exemplo 10, página 46.

“As pontuações para um teste de Engenheiro em uma empresa são normalmente distribuídas, com uma média de 7,5 com e um desvio padrão de 0,5. Para ser adequado ao emprego, você deve ter pontuação dentro dos 9% primeiros. **Qual é a menor pontuação que você pode conseguir e ainda ser adequado ao emprego?**”

2.5.1 Solução 01:

$$P(X \geq x) = 0.09$$

$$x =$$

```
qnorm(0.09, mean = 7.5, sd = 0.5, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 8.170378
```

Resposta: A menor pontuação deve ser de 8.17.

2.5.2 Solução 02:

$$P(X \geq x) = P(Z \geq \frac{x-7.5}{0.5}) = P(Z \geq z) = 0.09$$

$z =$

```
qnorm(0.09, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 1.340755
```

$$z = 1.340755 = \frac{x-7.5}{0.5}$$

$$x = 8.1703775$$

```
cat('A menor pontuação deve ser de ', 7.5 +  
    round(qnorm(0.09, lower.tail = FALSE) * 0.5, 2), '.', sep = '')
```

```
## A menor pontuação deve ser de 8.17.
```

ou

$$P(Z \geq z) = 1 - P(Z \leq z) = 0.09$$

$$P(Z \leq z) = 1 - 0.09 = 0.91$$

$z =$

```
qnorm(0.91)
```

```
## [1] 1.340755
```

$$z = 1.340755 = \frac{x-7.5}{0.5}$$

$$x = 8.1703775$$

```
cat('A menor pontuação deve ser de ', round(7.5 + qnorm(0.91) * 0.5, 2),  
    '. ', sep = '')
```

```
## A menor pontuação deve ser de 8.17.
```

3 Distribuição Qui-quadrado

3.1 Exemplo 6.3.2 no Portal Action

“X segue uma distribuição qui-quadrado com 17 graus de liberdade e queremos encontrar x_1 e x_2 tais que”

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = 0.95$$

Probabilidade acumulada até x_1 :

$$P(X \leq x_1) = \frac{1-0.95}{2} = 0.025$$

$x_1 =$

```
qchisq(0.025, 17)
```

```
## [1] 7.564186
```

Probabilidade acumulada até x_2 :

$$P(X \leq x_2) = \frac{1+0.95}{2} = 0.975$$

$x_2 =$

```
qchisq(0.975, 17)
```

```
## [1] 30.19101
```

4 Distribuição t de Student

4.1 Rebula (2018) - Exemplo, página 67.

“Um analista deseja estimar a média do tempo de vida útil das lâmpadas produzidas. Coletou uma amostra de 20 lâmpadas e verificou que a média de vida

útil é de 1000 horas, com desvio padrão de 100 horas. **Construa um Intervalo de Confiança (IC) de 90% para a média populacional.**”

$$\bar{x} = 1000, \sigma = 100, \mu = ?$$

n = 20 (tamanho da amostra)

Graus de liberdade = n - 1 = 19

$$IC = \bar{x} \pm t \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$P(X \leq t) = 0.05$$

$$t = \pm$$

```
qt(0.05, 19, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 1.729133
```

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = 0.9$$

$$x_1 = ?$$

```
1000 - qt(0.05, 19, lower.tail = FALSE) * 100/sqrt(20)
```

```
## [1] 961.3354
```

$$x_2 = ?$$

```
1000 + qt(0.05, 19, lower.tail = FALSE) * 100/sqrt(20)
```

```
## [1] 1038.665
```

Resposta: Com 90% de confiança, a média do tempo de vida útil das lâmpadas está em [961.3354, 1038.6646].

5 Distribuição Exponencial

5.1 Exemplo 6.12.1 no Portal Action

“O tempo até a falha do ventilador de motores a diesel tem uma distribuição Exponencial com parâmetro $\lambda = \frac{1}{28700}$ horas. Qual a probabilidade de um destes ventiladores falhar nas primeiras 24000 horas de funcionamento?”

$$P(0 \leq X \leq 24000) = P(X \leq 24000) - P(X \leq 0) =$$

```
pexp(24000, 1/28700) - pexp(0, 1/28700)
```

```
## [1] 0.5666619
```

Resposta: A probabilidade de falha nas primeiras 24000 horas é de 56.67%.

5.2 Rebula (2018) - Exemplo 1, página 52.

“O tempo médio que as pessoas acessam um caixa eletrônico de um banco é de 25 minutos. Qual a probabilidade de que o próximo acesso a este caixa.”

a) Seja superior a 40 minutos

$$P(X \geq 40) =$$

```
pexp(40, 1/25, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.2018965
```

Resposta: A probabilidade é de 20.19%.

b) Seja superior a 90 minutos

$$P(X \geq 90) =$$

```
pexp(90, 1/25, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.02732372
```

Resposta: A probabilidade é de 2.73%.

c) Seja inferior a 10 minutos

$$P(X \leq 10) =$$

```
pexp(10, 1/25)
```

```
## [1] 0.32968
```

Resposta: A probabilidade é de 32.97%.

5.3 Rebula (2018) - Exemplo 2, página 53.

“O tempo médio entre ocorrências de acidentes na rodovia Barra Mansa - Angra é de 10 dias. Se um acidente acabou de acontecer, qual a probabilidade de que o próximo ocorra em um período:”

a) Inferior a 15 dias

$$P(X \leq 15) =$$

```
pexp(15, 1/10)
```

```
## [1] 0.7768698
```

Resposta: A probabilidade é de 77.69%.

b) Entre 20 e 25 dias

$$P(20 \leq X \leq 25) = P(X \leq 25) - P(X \leq 20) =$$

```
pexp(25, 1/10) - pexp(20, 1/10)
```

```
## [1] 0.05325028
```

Resposta: A probabilidade é de 5.33%.

6 Distribuição de Weibull

6.1 Rebula (2018) - Exemplo 1, página 54.

“O rolamento de um motor segue uma variável aleatória de Weibull, com vida útil de 200 horas e fator de qualidade de 0,8. Determine a probabilidade de o rolamento:”

$\alpha(shape) = 0.8, \beta(scale) = 200$

a) Durar 300 horas ou mais

$P(X \geq 300) =$

```
pweibull(300, 0.8, 200, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.2507844
```

Resposta: A probabilidade é de 25.08%.

b) Durar 70 horas ou menos

$P(X \leq 70) =$

```
pweibull(70, 0.8, 200)
```

```
## [1] 0.3506426
```

Resposta: A probabilidade é de 35.06%.

Referências

Rebula, Uanderson. 2018. *Estatística Aplicada (Inferência)*. https://www.academia.edu/37027227/Livro_pdf_Estat%C3%A9stica_aplicada_infer%C3%A2ncia_Prof_MSc_Uanderson_Rebula.