

Solução da equação de difusão por diferenças finitas

Leonardo Uieda

30 de Setembro de 2010

Observatório Nacional

Objetivo

Objetivo

- ✓ Resolver numericamente:

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2}$$

Objetivo

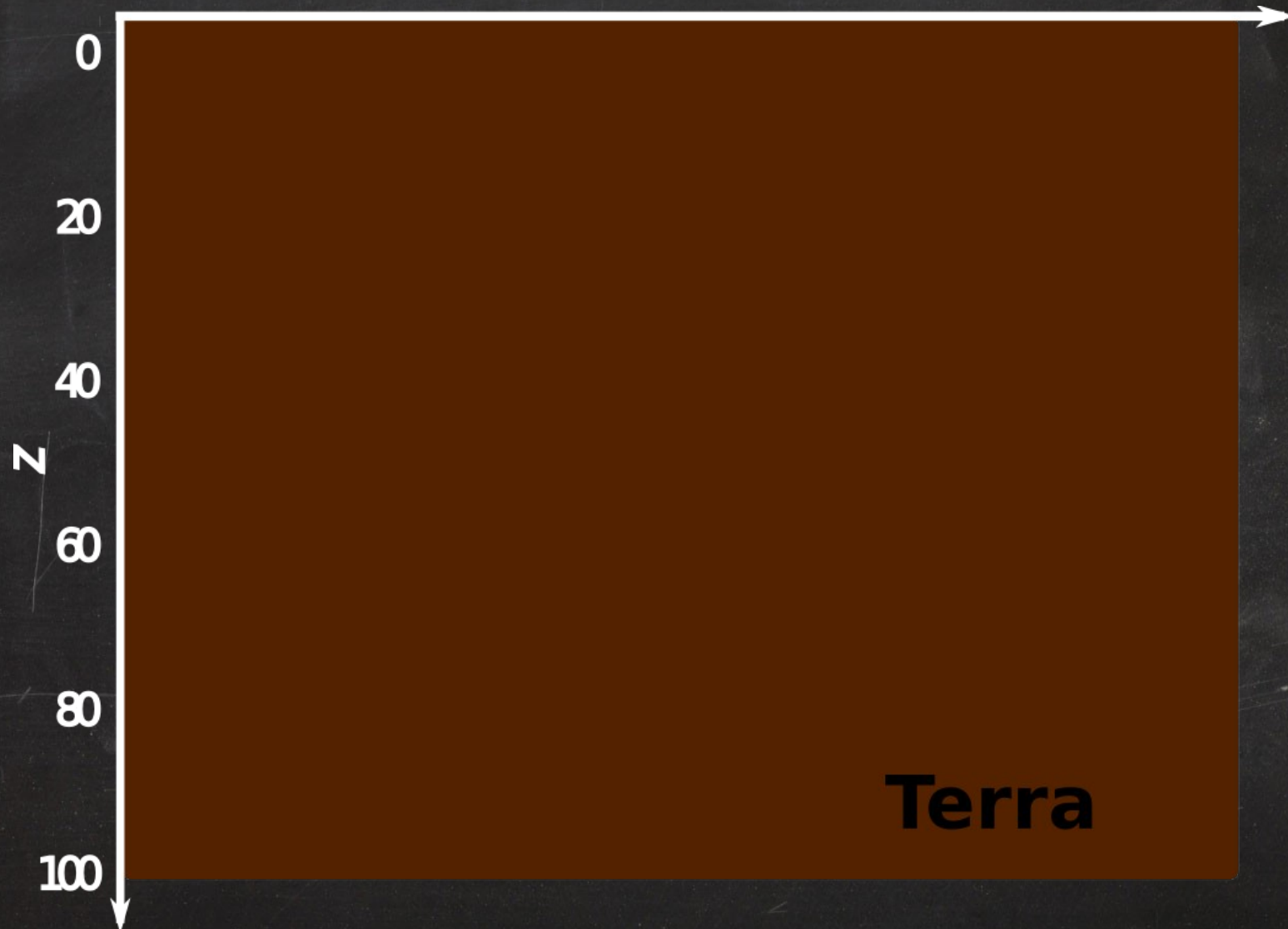
- ✓ Resolver numericamente:

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2}$$

- ✓ Obter valores de T em pontos z e tempos t

Aproximação

Aproximação



Aproximação



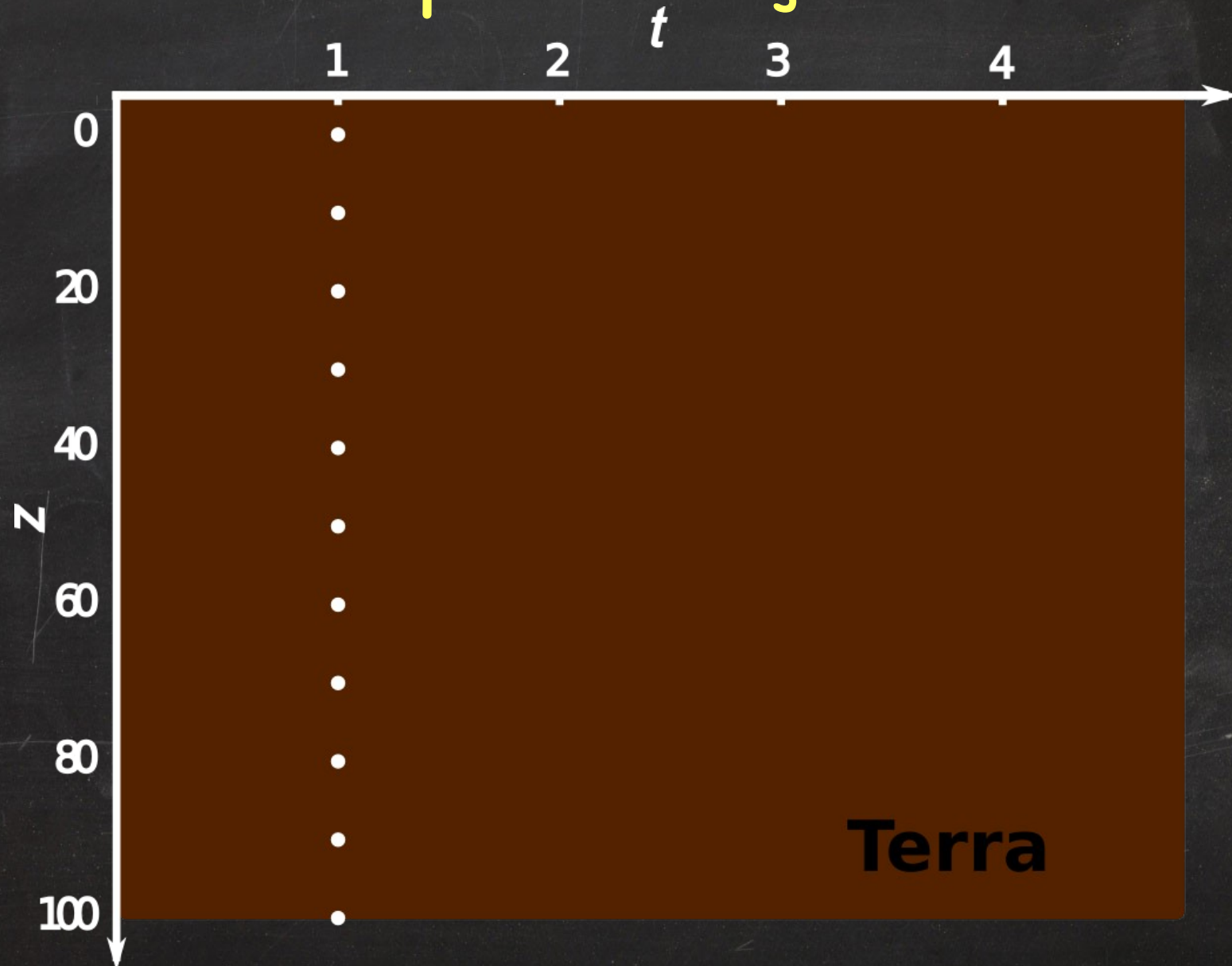
Aproximação



Aproximação



Aproximação



Aproximação



Aproximação



Aproximação

Calcular $T_{i,t}$ para diversos ts e is

Aproximação

- ✓ Trocar derivadas por diferenças

Aproximação

- ✓ Trocar derivadas por diferenças

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} \approx \frac{T_{i, t+1} - T_{i, t}}{\Delta t}$$

Aproximação

- ✓ Trocar derivadas por diferenças

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} \approx \frac{T_{i, t+1} - T_{i, t}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \approx \frac{T_{i+1, t} - 2T_{i, t} + T_{i-1, t}}{\Delta z^2}$$

Diferenças Finitas

Diferenças Finitas

- ✓ Equação de diferenças (explícita):

$$\frac{T_{i,t+1} - T_{i,t}}{\Delta t} = \kappa \frac{T_{i+1,t} - 2T_{i,t} + T_{i-1,t}}{\Delta z^2}$$

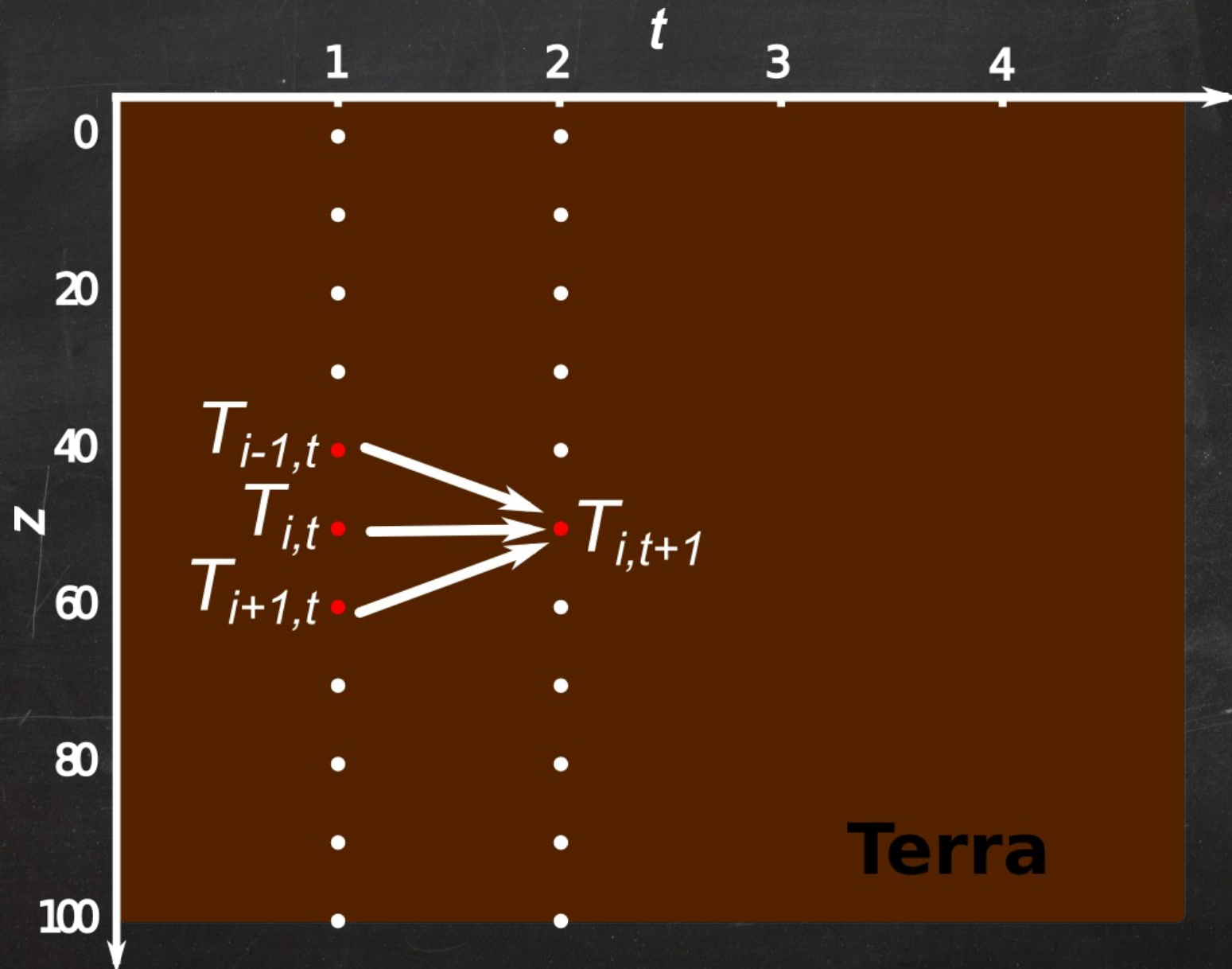
Diferenças Finitas

- ✓ Equação de diferenças (explícita):

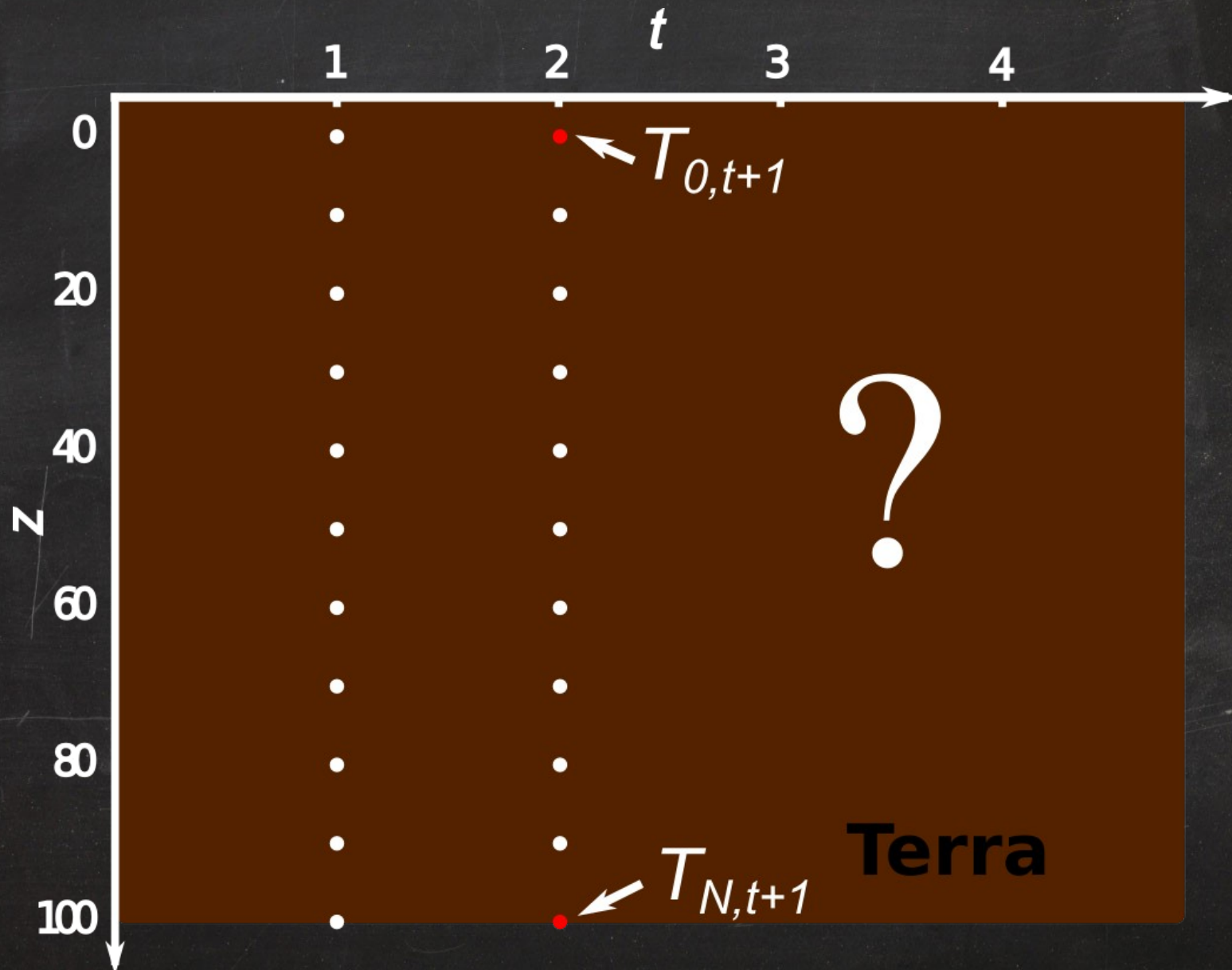
$$\frac{T_{i,t+1} - T_{i,t}}{\Delta t} = \kappa \frac{T_{i+1,t} - 2T_{i,t} + T_{i-1,t}}{\Delta z^2}$$

$$T_{i,t+1} = \kappa \frac{\Delta t}{\Delta z^2} (T_{i+1,t} - 2T_{i,t} + T_{i-1,t}) + T_{i,t}$$

Diferenças Finitas



Diferenças Finitas



Condições de Contorno

Condições de Contorno

✓ Fixa:

Condições de Contorno

✓ Fixa:

$$T_{0,t} = \text{const.}$$

$$T_{N,t} = \text{const.}$$

Condições de Contorno

✓ Fixa:

$$T_{0,t} = \text{const.}$$

$$T_{N,t} = \text{const.}$$

✓ Livre:

Condições de Contorno

✓ Fixa:

$$T_{0,t} = \text{const.}$$

$$T_{N,t} = \text{const.}$$

✓ Livre:

$$\frac{\partial T}{\partial z}(0,t) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}(z_N, t) = 0$$

Condições de Contorno

✓ Fixa:

$$T_{0,t} = \text{const.}$$

$$T_{N,t} = \text{const.}$$

✓ Livre:

$$\frac{\partial T}{\partial z}(0,t) = 0$$

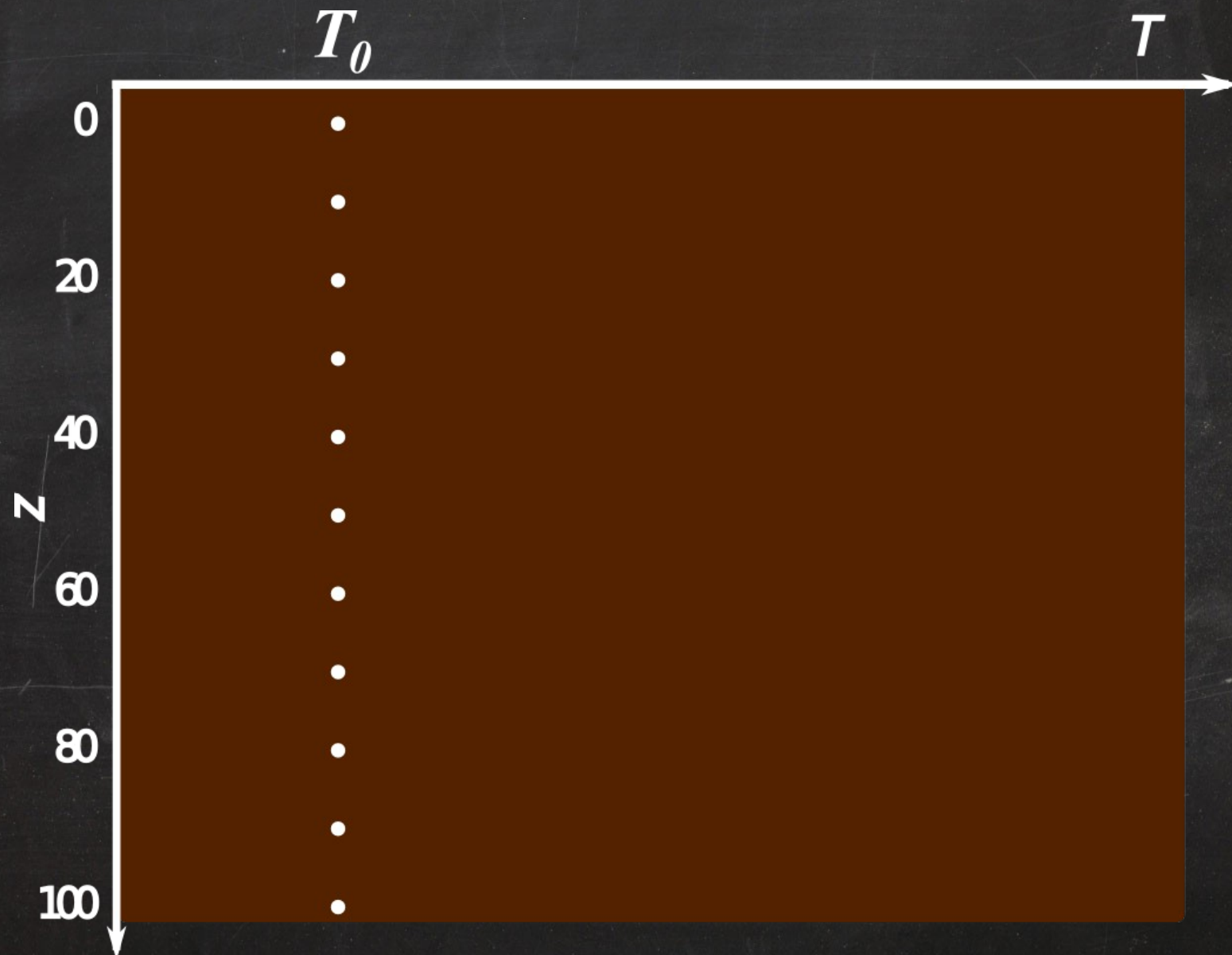
$$T_{0,t} = T_{1,t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}(z_N, t) = 0$$

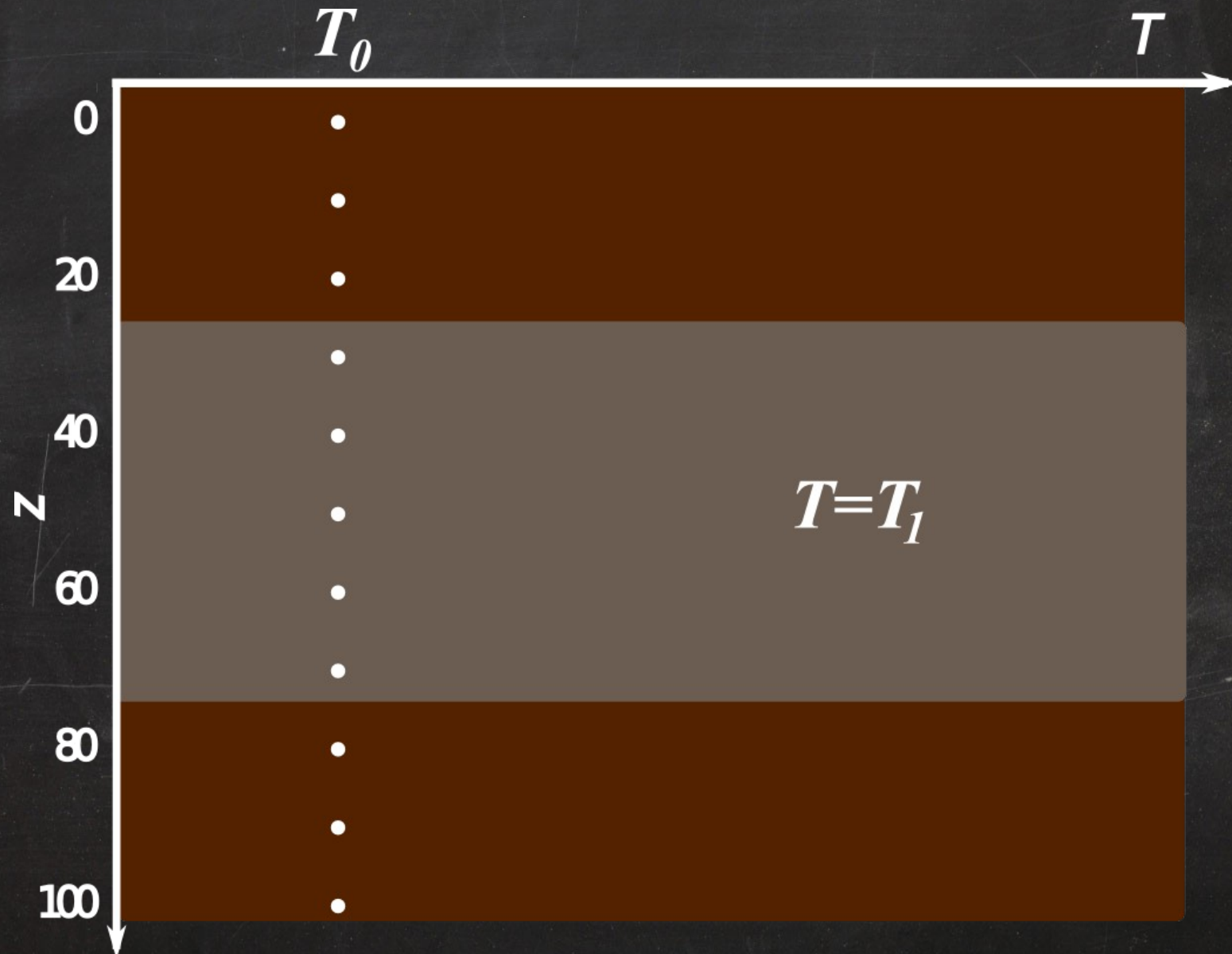
$$T_{N,t} = T_{N-1,t}$$

Exemplo: Intrusão

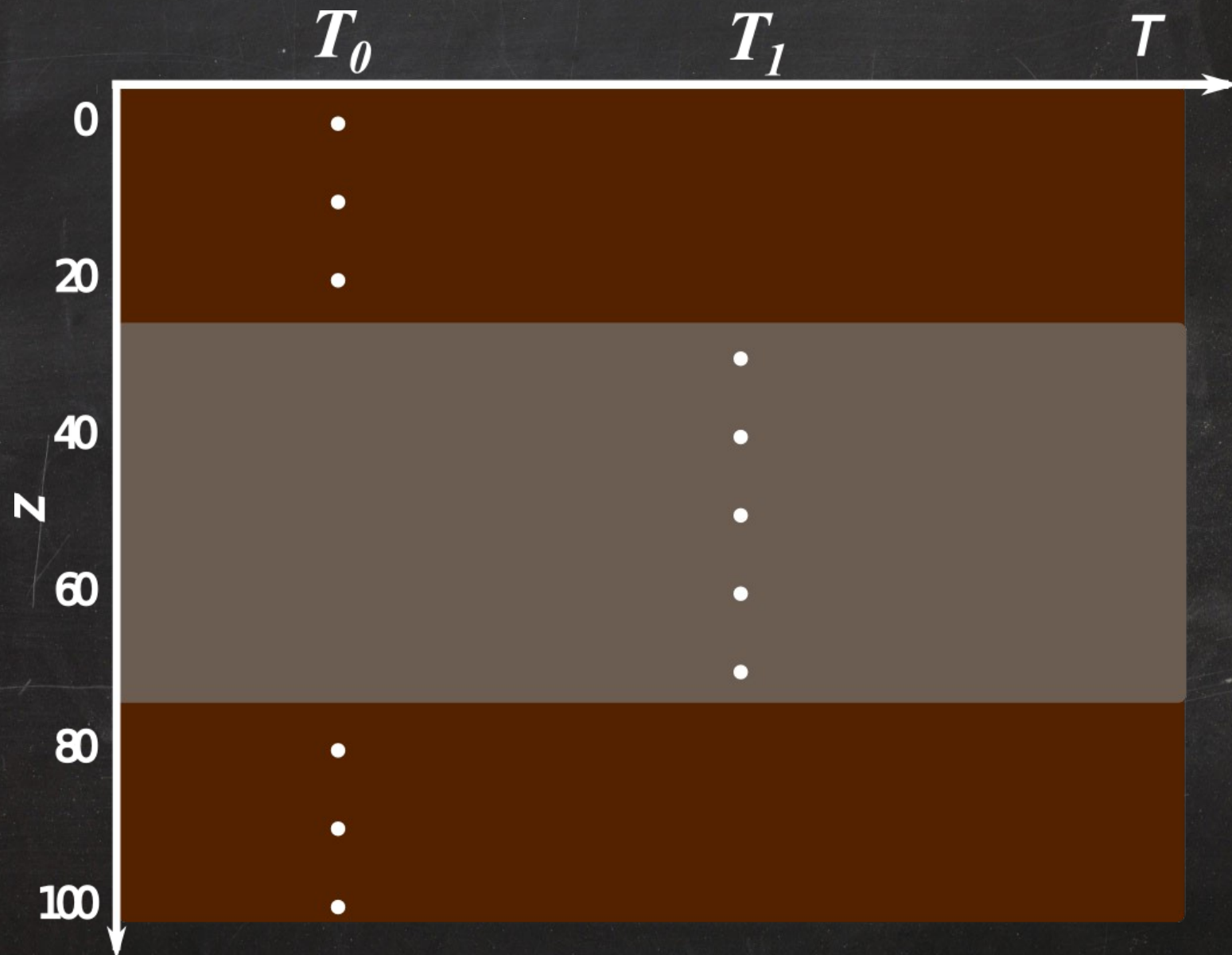
Exemplo: Intrusão



Exemplo: Intrusão



Exemplo: Intrusão

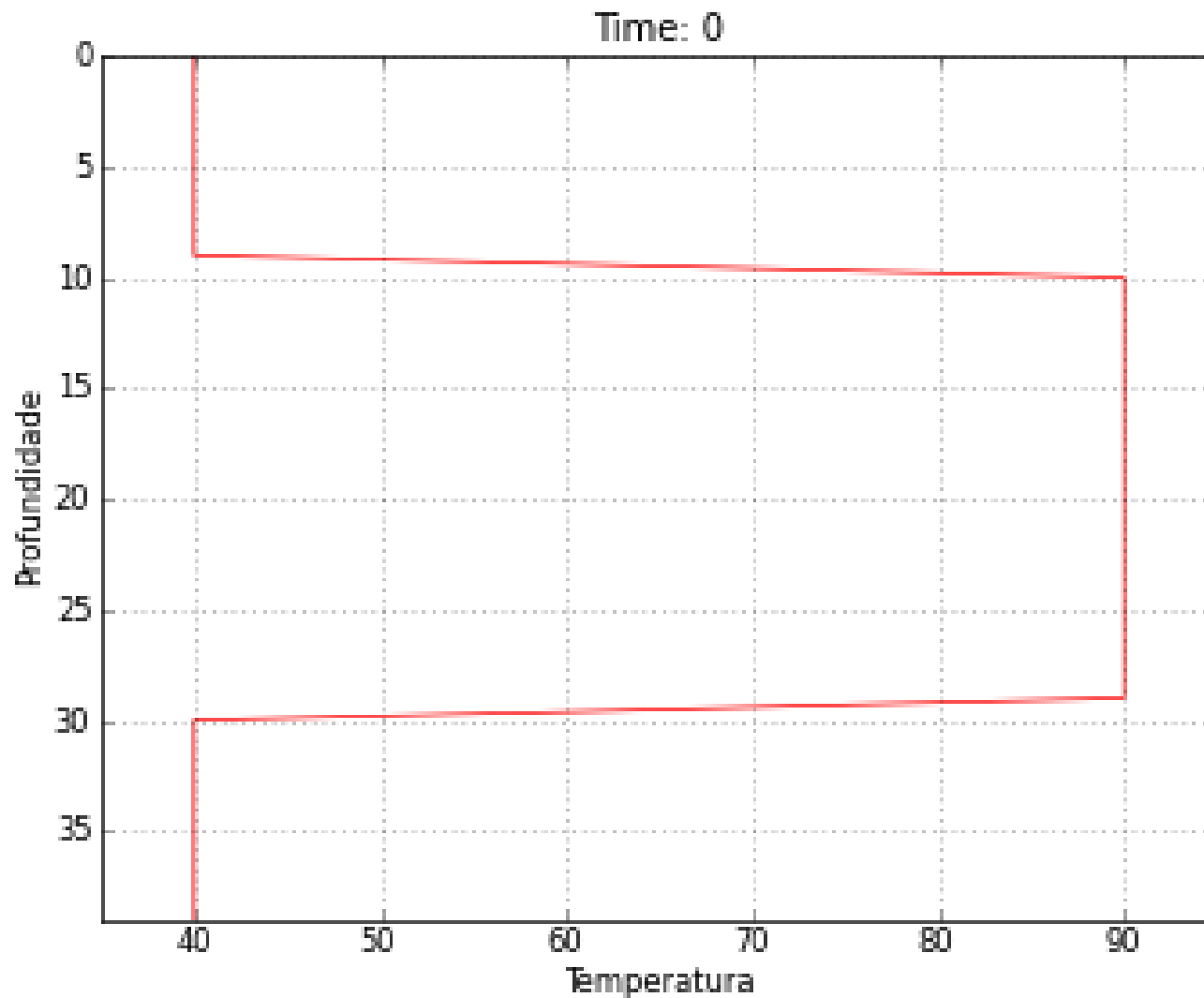


Exemplo: Intrusão

Caso 1:

- ✓ Condições de contorno: Livre
- ✓ Temperatura inicial constante

Exemplo: Intrusão



Exemplo: Intrusão

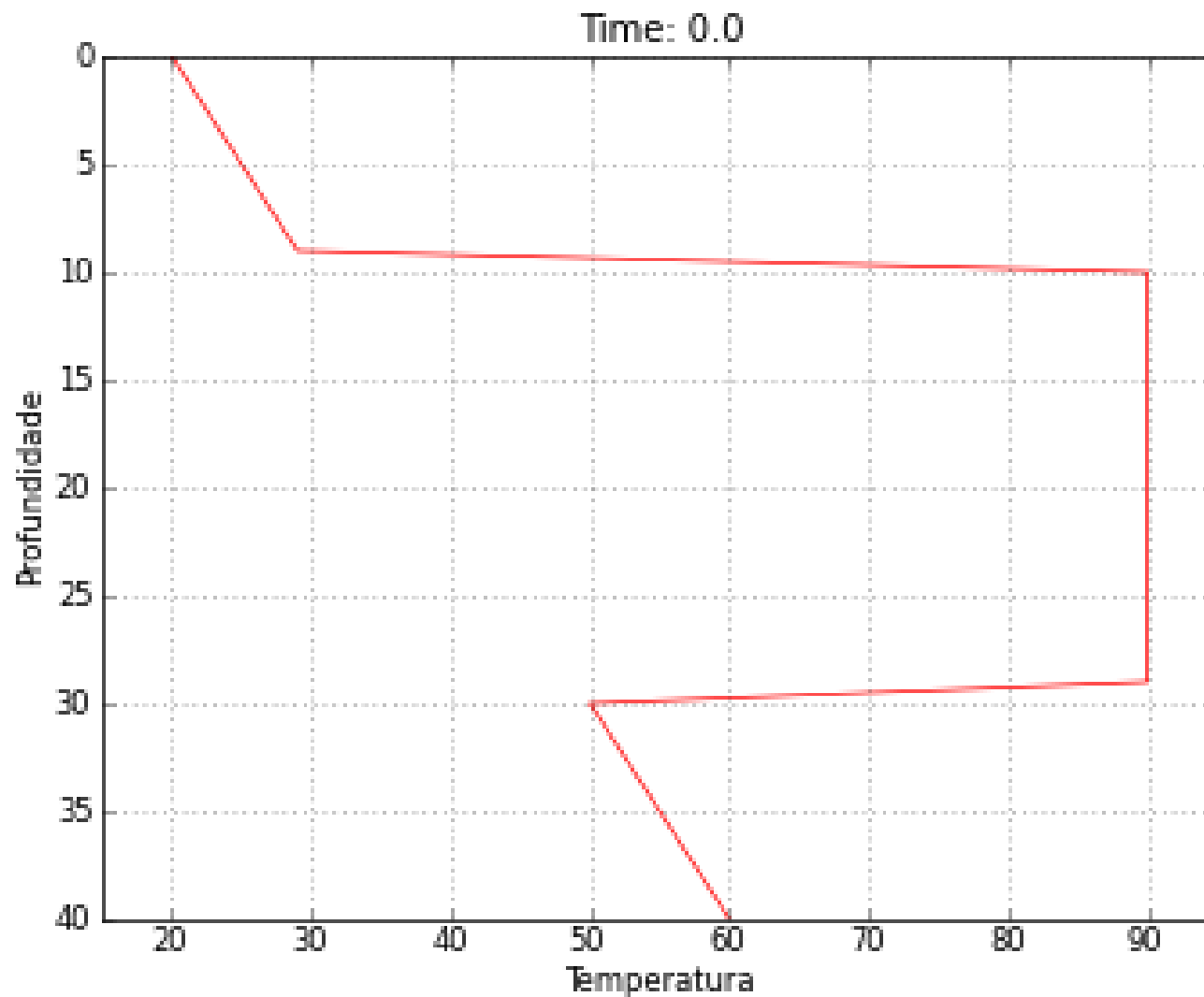


Exemplo: Intrusão

Caso 2:

- ✓ Condições de contorno: Fixas
- ✓ Gradiente geotérmico

Exemplo: Intrusão



Exemplo: Intrusão



Estabilidade Numérica

Estabilidade Numérica

- ✓ Depende muito da escolha de Δt e Δz

Estabilidade Numérica

- ✓ Depende muito da escolha de Δt e Δz
- ✓ Regra:

$$\frac{\kappa \Delta t}{\Delta z^2} \leq 0.5$$

Estabilidade Numérica

- ✓ Depende muito da escolha de Δt e Δz
- ✓ Regra:

$$\frac{\kappa \Delta t}{\Delta z^2} \leq 0.5$$

- ✓ Métodos implícitos são mais estáveis

Estabilidade Numérica

- ✓ Depende muito da escolha de Δt e Δz
- ✓ Regra:

$$\frac{\kappa \Delta t}{\Delta z^2} \leq 0.5$$

- ✓ Métodos implícitos são mais estáveis
- ✓ Mais complexos e lentos