

Module: 17

Electromagnétisme

Cours, TD, Exams

$$\overrightarrow{E_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\epsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$$

Équations de Maxwell

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q\vec{v} \wedge \frac{\vec{PM}}{|\vec{p_M}|^3}$$

Électromagnétisme

Dans le vide

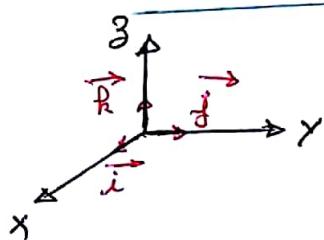
Plan :

1. Chapitre 0 : ^{Rappel Mathématique}
2. Chapitre 1 : La magnétostatique
dans le vide (Loi de Biot et Savar, Ampère Lorentz.)
3. Chapitre 3 : Équation de Maxwell
4. Chapitre 4 : Courant Alternatif

Chapitre 0 : Rappel Mathématique

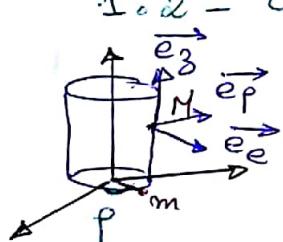
1. Représentation d'un point dans l'espace

1.1 - Coordonnées cartésiennes (x, y, z)



$$\begin{aligned}\vec{OM} &= x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \\ \Rightarrow d\vec{OM} &= dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \\ \Rightarrow dV &= dx dy dz\end{aligned}$$

1.2 - Coordonnées cylindrique (e, ρ, z)



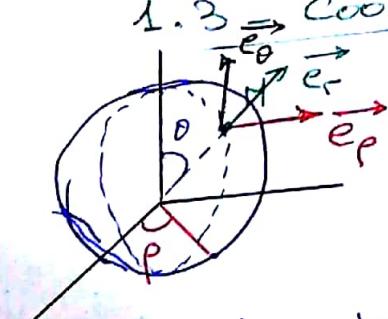
$$\begin{aligned}\vec{OM} &= e \vec{e}_e + z \vec{k} \\ d\vec{OM} &= de \vec{e}_e + e d\rho \vec{e}_\rho + d\rho \vec{e}_\phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dV &= e de d\rho dz \\ \text{Volume} \Rightarrow V &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^z e de d\rho dz = \pi R^2 h\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Surface} \Rightarrow S_{\text{base}} &= \iint e de d\rho = \pi R^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_L &= \iint R dz d\rho = 2\pi R h\end{aligned}$$

1.3 - Coordonnées sphérique



$$\begin{aligned}\vec{OM} &= r \vec{e}_r = e \vec{e}_e + z \vec{k} \\ \Rightarrow \vec{OM} &= e \cos \theta \vec{i} + e \sin \theta \vec{j} + z \vec{k} \\ \Rightarrow \vec{OM} &= r \sin \theta \cos \phi \vec{i} + r \sin \theta \sin \phi \vec{j} + r \cos \theta \vec{k}\end{aligned}$$

$$d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{e}_\phi = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{e}_\phi$$

$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$: volume élémentaire

$$V = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ Volume}$$

• Surface

$$dS = R^2 \sin\theta d\theta dp : \text{surface élémentaire}$$
$$\Rightarrow S = R^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} dp \quad \text{Donc} \quad S = 4\pi R^2$$

2. Vecteurs

2.1 - Produit scalaire

Soit $\vec{v}_1(x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{v}_2(x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs dans l'espace repérée par $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

P.S : $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$: est un scalaire $= v_1 \cdot v_2 \cdot \cos(\hat{\vec{v}_1, \vec{v}_2})$

2.2 - Produit vectoriel

P.V : $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = v_1 \cdot v_2 \cdot \sin(\hat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}) \vec{m}$ est vecteur tel que : $\vec{m} \perp \vec{v}_1$ et $\vec{m} \perp \vec{v}_2$, et $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{m})$ tétraèdre

2.3 - Champ scalaire vectoriel

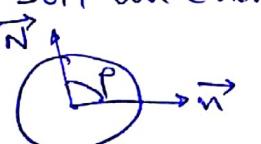
On parle d'un champ d'une grandeur lorsqu'on peut définir cette grandeur en tout points de l'espace

Exemples :

- champ de température
- " de vitesse
- " Électrique (E)
- " Potentiel
- " Magnétique (B)

2.4 - Flux d'un vecteur

Soit un champ du vecteur $\vec{V}(M)$ et une surface élémentaire dS



$$\vec{ds} = dS \cdot \vec{n}$$

$$d\phi = \vec{V} \cdot \vec{ds} : \text{flux élémentaire}$$

$$d\phi = V \cdot dS \cdot \cos \rho$$

\vec{n} : est toujours \perp à la surface dirigée de l'intérieur vers l'extérieur.

2.5 - Opérations différentielles

2.5.1 - Gradient (grad)

$\vec{\text{grad}} f(x, y, z) = \vec{\nabla} f(x, y, z)$: champ vectoriel.

$\vec{\nabla}$: vecteur nabla $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

$$\vec{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

Exemples :

1) $f(x, y, z) = x^2y + yz$
 $\vec{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f = 2xy \vec{i} + (x^2 + z) \vec{j} + y \vec{k}$

2) $E = -\vec{\text{grad}} V$

2.5.2 - Divergence (div)

$$\text{div } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} : P.S$$

ex : $\vec{v} = 2x \vec{i} + xy \vec{j} + zx \vec{k}$

alors : $\text{div } \vec{v} = \frac{\partial 2x}{\partial x} + \frac{\partial xy}{\partial y} + \frac{\partial zx}{\partial z} = 2 + 2x$

Théorème de Green

$$\iiint \text{div } \vec{w} dv = \iint \vec{w} \cdot \vec{ds}$$

Théorème de Stokes

$$\iint \vec{rot} \vec{w} \cdot \vec{ds} = \iint_s \vec{\nabla} \times \vec{w} \cdot \vec{ds} = \oint_c \vec{w} \cdot \vec{dl}$$

2.5.3 - Rotationnel (rot)

$$\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} : \text{vecteur}$$

2.5.4 - Laplacien (Δ)

$$\Delta \vec{v} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}$$

$$\boxed{\Delta = \vec{\nabla}^2}$$

Démonstrations

① Montrer que : $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} v) = \vec{0}$

On sait que :

- $\vec{\text{grad}} v = \vec{\nabla} v$
- $\vec{\text{rot}} \vec{u} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$

Alors :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} v) = \vec{\text{rot}}(\vec{\nabla} v)$$

$$\vec{u} = \vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} v) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} v$$

or $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$

et $\vec{\nabla} v = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$

$$\Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} v) = \vec{0}$

② $\text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = 0$

on sait que :

- $\text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{A}$

- $\vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

$$\Rightarrow \text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} A_x \\ A_y \\ A_z \end{array} \right] \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\
 &= \cancel{\frac{\partial^2 A_3}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial A_y}{\partial x \partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 A_3}{\partial y \partial x}} + \cancel{\frac{\partial A_x}{\partial y \partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x}} \\
 &\quad - \cancel{\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y}} = 0
 \end{aligned}$$

$\text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = 0$

③ $\text{div}(\vec{\text{grad}} v) = \Delta v$

on sait que :

- $\vec{\text{grad}} v = \vec{\nabla} v$

- $\text{div}(\vec{\text{grad}} v) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\text{grad}} v$

$$\vec{\text{grad}} v = \vec{\nabla} v = \frac{\partial v}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial v}{\partial z} \vec{k}$$

et $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$

$$\text{div}(\vec{\text{grad}} v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \Delta v$$

$$\boxed{\operatorname{div}(\vec{\text{grad}} v) = \Delta v = \vec{\nabla}^2 v}$$

$$④ \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{\text{grad}}(\operatorname{div} \vec{A}) - \vec{\Delta} \vec{A}$$

on sait que :

$$\cdot \vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$$\Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

d'après la formule du double PV

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \vec{\nabla} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{A}$$

avec : $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \operatorname{div} \vec{A}$

et $\vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{A} = \vec{\text{grad}}(\operatorname{div} \vec{A})$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{\text{grad}}(\operatorname{div} \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

$$\boxed{\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}}(A) = \vec{\text{grad}}(\operatorname{div} \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}}$$

Chap 1 : Magnéto statique Dans le vide

1) Généralité

Tout les phénomènes physique connue peuvent être expliquer à l'aide de quatre interactions fondamentals :

- Gravitationnelle : entre les masses indépendement la charge
- Forte : c'est la force qui permet la cohesion du noyau, quarks intégrissent via cette interaction
- Faible : responsable certains des intégration nucléaire β^+
- Electromagnétisme : Interaction entre les particule chargée. Il est important de noté que chaque interaction est liée à une théo physique caractérisée par certains propriétés:
 - Notions
 - Formalisme
 - Loi (Postulat)

2) Rappel Mathématique (voir chapitre 0)

$$\vec{\nabla} v = \text{grad } v \text{ est un vecteur}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \text{div } \vec{A} : \text{scalaire}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \text{rot } (\vec{A}) : \text{vecteur}$$

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 : \text{laplacien} \begin{cases} \text{vecteur} \rightarrow \text{vecteur} \\ \text{scalaire} \rightarrow \text{scalaire} \end{cases}$$

Propriétés

$$\cdot \text{rot}(\text{grad } f) = \vec{0}$$

$$\cdot \text{div}(\text{rot } \vec{A}) = 0$$

$$\cdot \text{div}(\text{grad } f) = \Delta f$$

$$\cdot \text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$\cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

$$\cdot \Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

3) Champ magnétique \vec{B}

La charge électrique est une propriété fondamentale de la matière, il peut prendre une valeur + (protons, positrons), - (électrons = $-1.6 \cdot 10^{-19} C$), nulle (Neutrons, neutrinos et photons). Dans l'étude des charges électriques on distingue 2 situations :

- Distribution discrète : $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ avec $\{v_1, \dots, v_n\}$ par conséquence on écrit des courants électriques

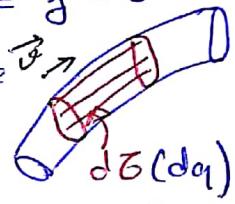
$$q_1 \xrightarrow{\rightarrow} j_1 = q_1 \cdot \frac{\vec{v}_1}{\Delta t}$$

- Distribution continue : comme dans les circuits électriques

$$\vec{j} = dq \vec{v} \Rightarrow dJ = e d\sigma \vec{v} \Rightarrow dJ = \vec{j} d\sigma$$

\vec{j} : la densité de courant, $d\sigma$: élément de volume

$$\vec{j} = \frac{d\vec{J}}{d\sigma} \quad (e = \frac{dq}{dV})$$



3.1 - Champ magnétique créé par pts ponctuels

3.1.1 - Cas d'une seul particule

on considère une particule de charge q située en un pts P animé d'une vitesse $\vec{v} = \vec{v}(P)$ dans un R.G. Le champ magnétique \vec{B} créé par cette particule en un pts M dans l'espace est donné par :

$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q \vec{v} \wedge \vec{PM}}{\ \vec{PM}\ ^3}$	$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{j} \wedge \vec{PM}}{r^2}$ $(E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot r}{r^3})$
$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{j} \wedge \vec{r}}{r^3}$	

Le module du CM \vec{B} :

$$\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{|q| \cdot \|\vec{v}\|}{\|\vec{PM}\|^2} \cdot \sin(\vec{v}, \vec{PM})$$

μ_0 : constante dimensionnelle appelée la perméabilité magnétique du vide (laisser passer) $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

Le CM \vec{B} dépend de la charge, la distance (Position du M)

Pour déterminer l'orientation du \vec{B} on pourra utiliser la règle de main droite

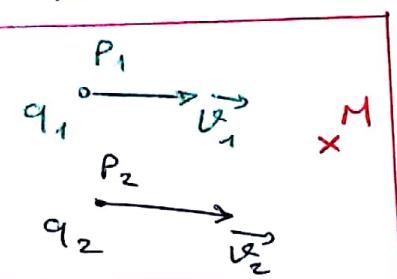
Rq : Si $q = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B} = \vec{0}$

- l'unité de \vec{B} est Tesla, on utilise le teslamètre pour mesurer en e.M.

- Le C.M es donnés par un P.V, alors c'est un pseudo-vecteur. cette propriété joue un rôle très important dans la simplification du calcul.

3.1.2 - Principe du superposition

$$q_1(P_1) \rightarrow \vec{v}_1 \rightarrow \vec{j}_1 = q \vec{v}_1 \text{ et } q_2(P_2) \rightarrow \vec{v}_2 \rightarrow \vec{j}_2 = q_2 \vec{v}_2$$



$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\vec{j}_1 \wedge \vec{U}_{P_1 M}}{r_1^2} + \frac{\vec{j}_2 \wedge \vec{U}_{P_2 M}}{r_2^2} \right]$$

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum \frac{\vec{j}_i \wedge \vec{U}_{P_i M}}{r_i^2}$$

3.1.3 - C.M crée par un courant stationnaire.

Expression général

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{j} \wedge \vec{U}_{PM}}{PM^2} \quad \text{avec } d\vec{j} = \vec{j} d\vec{z}$$

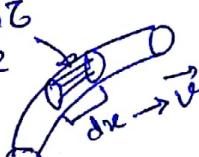
$$\Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{j} \wedge \vec{U}_{PM}}{PM^2} d\vec{z} \quad \text{Expression Local du } \vec{B}.$$

Alors on intègre trois fois pour obtenir \vec{B} .

$$\vec{B} = \iiint \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{j} \wedge \vec{U}_{PM}}{PM^2} \cdot d\vec{z} \quad \text{Expression intégrale.}$$

\vec{j} : densité de courant volumique.

$$Rq : I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$$



$$d\vec{z} = ds \cdot dx = v dt \cdot ds \text{ alors } d\vec{z} = \vec{v} ds \vec{n} dt$$

$$\text{et } dq = e d\vec{z} \Rightarrow dq = e \vec{v} ds \vec{n} dt \Rightarrow \frac{dq}{dt} = e \vec{v} ds \vec{n}$$

$$\text{on pose : } dI = \frac{dq}{dt} = e \vec{v} ds \vec{n} = \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

Le courant = le flux de \vec{j} à travers la surface S

3.2 - Loi de Biot et Savar

Dans cette partie on va s'intéresser aux circuits filiforme (distribution linéaire). Biot et Savar on postuler une expression pour calculer le champ magnétique créé par une source définie par un élément de courant (un courant filiforme)

* **Loi de Biot et Savar Locale :**

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

* **Loi de Biot et Savar intégrale :**

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \int \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

Cette relation permet de calculer d'une manière direct le C.M. créé en un pts M quelconque de l'espace par un circuit filiforme quelconque parcourue par un courant électrique stationnaire

4) Symétrie et le champ magnétique

on voit que la connaissance des symétries et des invariants permet de déterminer l'orientation et les variables dont dépend le C.M. En effet ce $\vec{B}(M)$ s'écrit en coordonnée cartésienne.

$$\vec{B}(M) = B(x, y, z) \vec{i} + B(x, y, z) \vec{j} + B(x, y, z) \vec{k}$$

Pour déterminer \vec{B} il faut trouver les trois composante. $B_i(x, y, z)$

on utilise la loi de Biot-Savart qui est parfois long et cependant il est simple dans le cas particulier des circuits possédant des symétries

Pour le C.M on distingue de type symétrie :

- Symétrie continue : associé à l'espace physique

- Symétrie directe : associé au plan de symétrie et plan anti-symétrie.

Les règles de symétrie

1° d'invariance (ou symétrie) par translation: c'est l'exemple infini sur l'axe oz parcourue par un courant permanent

• Pour calculer \vec{B} il est recommandé d'utiliser les c.m cylindriques (e, φ, z) dans ce modèle le C.M ne dépend pas du z .

$$\Rightarrow \frac{\partial B}{\partial z} = 0 \text{ et } B = B(\varphi, e)$$

on a aussi invariance par rotation autour du fil / φ

$$\text{donc } B = B(e)$$

2° Symétrie axial : c'est l'exemple d'une spire d'axe (oz) parcourue par un courant permanent. La spire est invariante par

rotation d'angle φ autour de l'axe (oz)

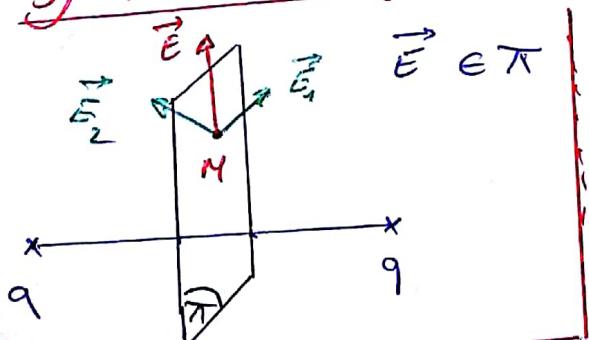
$$\Rightarrow \text{Le C.M ne dépend pas de } \varphi \Rightarrow B = B(e, z) \text{ et } \frac{\partial B}{\partial \varphi} = 0$$

3° symétrie cylindriques

Invariance par rapport à z et $\varphi \Rightarrow B = B(e)$

4° symétrie sphérique: on utilise système de coordonnées sphériques. (r, θ, φ) dans ce cas le C.M ne dépend que de r

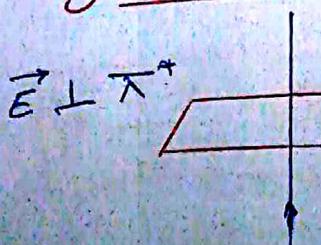
5) Plan de symétrie



c'est l'inverse dans le cas où on a la symétrie de densité de courant électrique.

$$\Rightarrow \vec{B} \perp \pi$$

6) Plan d'antisymétrie



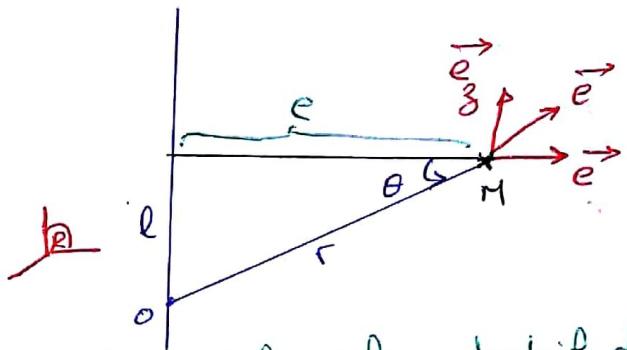
• π^* plan d'antisymétrie

• c'est l'inverse dans le cas où on a une antisymétrie de charge

$$\vec{B} \in \pi^*$$

Exemple d'application

I/ C.M crée par un fil infini



I - L'orientation et les valeurs dont il dépend \vec{B}

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \, dl \wedge \vec{PM}}{\| \vec{PM} \|^3}$$

* $\vec{B} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow B(e, p, z) \vec{e}_e$

* invariance / translation (z) et (p) $\Rightarrow B(e) \vec{e}_e = \vec{B}(N)$

II - Le calcul de $I \, dl \wedge \vec{PM}$

on a: $dl = dl \vec{e}_z$ et $\vec{PM} = \vec{OP} + \vec{PM} = l \vec{e}_z + e \vec{e}_e$

alors $dl \wedge \vec{PM} = dl \vec{e}_z \wedge (l \vec{e}_z + e \vec{e}_e) = e dl \vec{e}_p$

Conclusion

$$\boxed{\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{e dl}{r^3} \vec{e}_p}$$

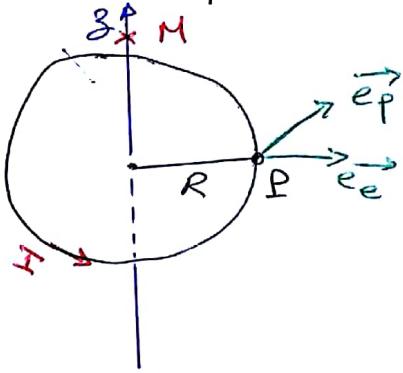
III - C.M total.

on sait que :

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \sin \theta = \frac{l}{r} \\ \cdot \cos \theta = \frac{e}{r} \Rightarrow e = r \cos \theta \Rightarrow r = \frac{e}{\cos \theta} \\ \cdot \operatorname{tg} \theta = \frac{l}{e} \Rightarrow l = e \operatorname{tg} \theta \Rightarrow \frac{dl}{d\theta} = \frac{e}{\cos^2 \theta} \Rightarrow dl = \frac{e d\theta}{\cos^2 \theta} \end{array} \right\}$$

Alors $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^2}{\cos^2 \theta} d\theta \cdot \frac{\cos^3 \theta}{e^3} \vec{e}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi e} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \vec{e}_p \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi e} \vec{e}_p}$

2^e C.N crée par une spire.



I de crée un champ magnétique élémentaire \vec{dB} tq

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \wedge \vec{PN}}{PN^3}$$

- I/ • Invariance à rotation (ϕ) $\Rightarrow B = B(R, z)$
• Symétrie \Rightarrow le plan horizontal est un plan de symétrie
 $\Rightarrow \vec{B} \perp \pi$

$$\vec{B} = B(z) \vec{e}_z$$

II/ $dl \wedge \vec{PN} = dl \vec{e}_p \wedge (-R \vec{e}_e + z \vec{e}_z) = dl R \vec{e}_z + \cancel{dl \vec{e}_e}$ m'est pas intéressant

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{R dl}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z \quad (dl = R d\phi)$$

III/ $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{R^2 d\phi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi \vec{e}_z$$

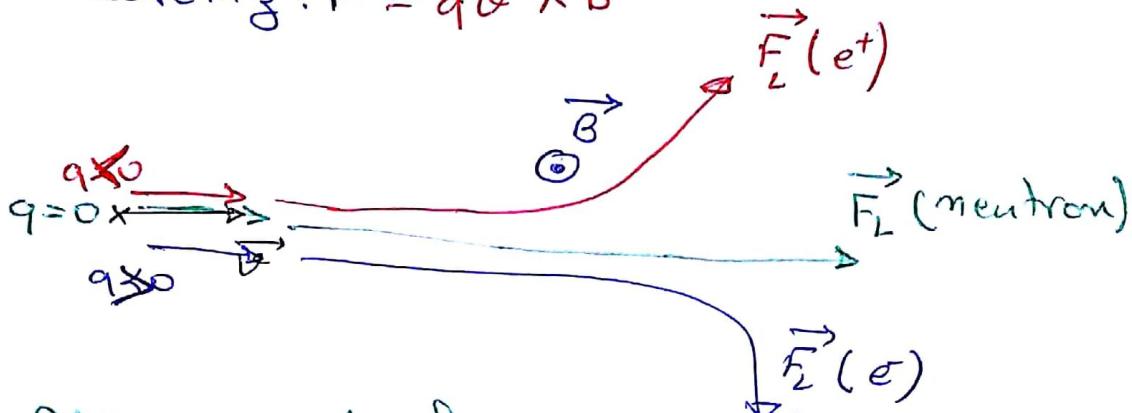
$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z}$$

f) Divergence et rotationnel du champ magnétique \vec{B}
L'objectif de cette section est de présenter deux équations fondamentales décrivant les lois de la magnétostatique ces deux équations sont données par :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \vec{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$
 forme locale du th d'Ampère.
on va étudier également la force magnétique

Propriétés

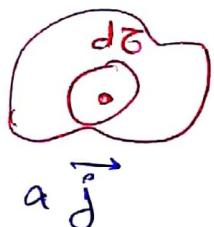
Force de Lorentz: $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$



F.1 - Divergence du champ magnétique

F.1.1 - Conservation du flux du c.m.

Premièrement on calcule la divergence du champ magnétique en tout points de l'espace M, créé par une distribution volumique de courant de densité j centré au pts P



$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{PM}}{PM^3} dV$$

Agissant ∇ sur \vec{B} $\text{div } \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B}$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_G \text{div} \left(\frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{PM}}{PM^3} dV \right)$$

on utilise la relation $\text{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot} \vec{b}$

$$\text{Alors } \text{div} \left(\frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{PM}}{PM^3} \right) = \frac{\vec{PM}}{PM^3} \text{rot} \vec{j} - \vec{j} \text{rot} \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

comme la densité du courant ne dépend pas de l'espace alors $\text{rot} \vec{j}(P) = \vec{0}$ $\Rightarrow \frac{\vec{PM}}{PM^3} \text{rot} \vec{j} = 0$ 1er terme est nul

de deuxième terme: on sait que

$$\text{rot grad} \left(\frac{1}{r} \right) = 0 \Rightarrow \text{rot} \frac{\vec{PM}}{PM^3} = \vec{0} \text{ est aussi nul}$$

Donc :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

c'est une relation générale très importante est qui est indépendante du courant. c'est une propriété intrinsèque du champ magnétique.

de flux du champ magnétique

$$\phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \stackrel{G.O}{=} \iiint_V \operatorname{div} \vec{B} \cdot dV = 0$$

alors le flux total du C.M à travers une surface fermée est nul, on dit : le flux du C.M est conservatif.

Rq⁸ - cette relation montre une différence remarquable entre le champ magnétique \vec{B} et le champ électrique \vec{E} dont le flux est : $\phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

- Il n'y a pas de charge magnétique analogue à la charge électrique.

f. 1.2 - Potentiel vecteur

d'expression $\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \exists \vec{A}$ tq $\vec{\operatorname{rot}} \vec{A} = \vec{B}$ (pour que $\operatorname{div} \vec{\operatorname{rot}} \vec{A} = 0$) (TD)

ce vecteur \vec{A} est appelé le potentiel vecteur du \vec{B} .
on dit que le C.M \vec{B} dérive d'un potentiel vecteur \vec{A} .

c'est un potentiel vecteur, c'est une propriété qui distingue le champ magnétique \vec{B} du C.E \vec{E} . On rappelle que $\vec{E} = -\vec{\operatorname{grad}}$

Rq: * le potentiel vecteur \vec{A} n'est pas unique. Alors il ne peut pas être observé physiquement. en effet le rotationnel du gradient d'une fonction scalaire est nul

on a l'invariance de jauge suivante :

$$\vec{A}' \longrightarrow \vec{A} + \vec{\text{grad}} f \Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{A}' = \vec{\text{rot}}(\vec{A} + \vec{\text{grad}} f) \\ \Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{A}' = \vec{\text{rot}} \vec{A}$$

indique

indiquant que le champ $\vec{B} \Rightarrow \vec{B}' = \vec{B}$ ne dépend pas du choix de f

- * $\vec{A}' \longrightarrow \vec{A} + \vec{\text{grad}} f$: transformation de jauge
- * si on impose une condition sur \vec{A} on dit qu'on a une jauge de coulomb: $\text{div } \vec{A} = 0$

on cherche $\vec{A} = ?$

A partire de $\vec{B}(M) = \iiint \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{j} \wedge \vec{PM}}{PM^3} d\vec{z}$ on peut déterminer \vec{A} . on utilise la relation: $\vec{\text{rot}}(f \vec{W}) = f \vec{\text{rot}} \vec{W} + \vec{\text{grad}} f \wedge \vec{W}$

$$\text{on a: } \vec{j} \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3} = -\vec{j} \wedge \vec{\text{grad}} \frac{1}{PM}$$

$$\Rightarrow \vec{j} \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3} = \vec{\text{grad}} \frac{1}{PM} \wedge \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{j} \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3} = \vec{\text{rot}} \left(\frac{\vec{j}(P)}{PM} \right) - \frac{1}{PM} \vec{\text{rot}} \left(\vec{j}(P) \right)$$

donc $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{\text{rot}} \left(\frac{\vec{j}(P)}{PM} \right) d\vec{z} = \vec{\text{rot}}(\vec{A})$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(P)}{PM} d\vec{z}$$

vecteur réel.

Ce potentiel vecteur posséde certains pp'té à savoir:

- il est un vrai vecteur $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \cdot d\vec{e}}{PM}$

- ses pp'té de transformation par les symétries sont tout à fait similaires à celle du champ électrique. \vec{E}

- Th de stokes permet de calculer la circulation le long d'un contour fermé M, Γ $\iint_S \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{e}$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

[la circulation du \vec{A} le long $d\vec{l}$ = le flux de \vec{B} à travers $d\vec{s}$]

Généralement, la circulation de \vec{A} n'est pas nul.
da surface S s'appuie sur le contour Γ

Exp:

on considère un circuit filiforme parcourue par un courant permanent I, dans ce cas le potentiel vecteur \vec{A} est donnés par : $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int \frac{I d\vec{l}}{PM}$

$$f.2 - \vec{rot} \vec{B} = ?$$

Dans cette partie, on s'intéresse au ppté du C.M \vec{B} faisant apparaître ses sources.

f.2.1 - Théorème d'ampère

Un ppté du C.M est donnée par le théorème d'ampère

Enoncé du th d'ampère

La circulation du C.M \vec{B} le long d'un parcour fermé Γ délimitant une surface S est égale au produit par N par la somme algébrique des courants I_i traversant cette surface

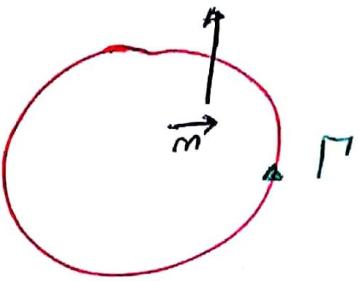
$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum_i I_i$$

Rq: - Le Th d'ampère est l'équivalent du Th de Gausse en électrostatique

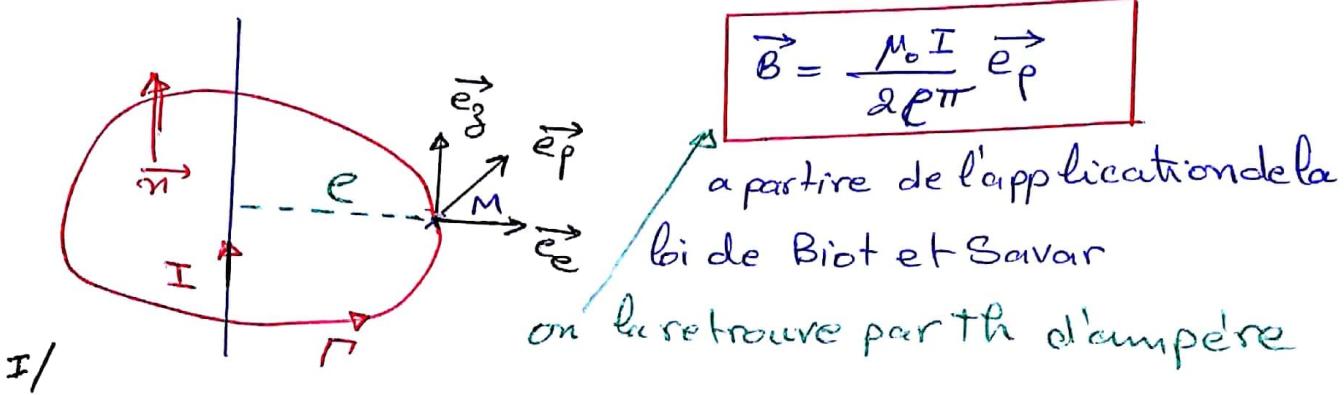
- Pour déterminer le champ magnétique \vec{B} on utilisant Th d'ampère il faut bien choisir le parcour Γ

- le parcours Γ doit passer par le point auquel on cherche le champ magnétique \vec{B} .

- des courants sont algébriquement comptés, ils sont positifs si leur orientation correspond à l'orientation de la surface S.



Exemple d'applications champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant permanent I .



- * de parcours Γ passe par M et il délimite la surface S t.q.
 $\vec{S} = S \vec{n}$

- * La somme des courants $\sum_i I_i = I > 0$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

- * N'importe quel plan contenant Γ est un plan d'antisymétrie
 $\Rightarrow \vec{B} \in \pi^*$ (π^* est le plan d'antisymétrie).
- * N'importe quel vertical contenant le fil est un plan de symétrie $\Rightarrow \vec{B} \perp \pi$ (π plan de symétrie).

Donc $\vec{B} = B \vec{e}_p$ (1) $d\vec{l} = dl \vec{e}_p$ (2)

de ① et ② on obtient: $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot dl$

II/
Sur le parcours Γ , le module du c.m \vec{B} est constant et porté par \vec{e}_p

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl = B \oint dl = B \int_0^{2\pi} ed\varphi = 2\pi e B$$

III/
 $2\pi B e = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi e}$ alors $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi e} \vec{e}_p$

8°) Les Forces magnétique et ses ppt's

8.1°) Force Electromagnétisme

Soit une particule de charge q (électron, proton...) et de vitesse \vec{v} se déplaçant dans un espace où régne un champ électrique \vec{E} et un C.M. \vec{B} . Cette particule est soumise à une force électromagnétique dite Force de Lorentz donné par la relation :

$$\vec{F}_{\text{em}} = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{F}_e + \vec{F}_m$$

Force électrique Force magnétique.

La force magnétique \vec{F}_m est tq : le tétridre ($\vec{F}_m, \vec{v}, \vec{B}$) est un tétridre direct.



$$\text{et } \vec{F}_m \perp (\vec{v}, \vec{B}) \text{ et } \|\vec{F}_m\| = |q| \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{B}| \sin \alpha$$

8.2°) La densité volumique des forces magnétiques

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \quad r = \frac{dq}{ds}, \quad \lambda = \frac{dq}{dl}$$

$$j_v = \frac{dI}{dV} [\text{A/m}^3] \text{ avec } I = \iint j_v \cdot ds [A]$$

Soit ρ et \vec{v} respectivement la densité volumique et la vitesse d'ensembles de charges mobiles au voisinage d'un point M. Un élément de volume $d\delta$ autour du point M contient mobile élément de volume $d\delta$

$$dq = \rho d\delta$$

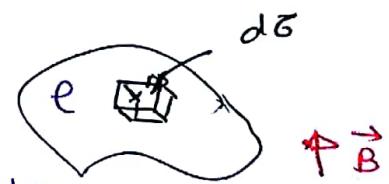
si \vec{B} est le C.M. au point M, les

charges contenues dans l'élément de volume $d\delta$

subissent la force magnétique $d\vec{F} = dq \vec{v} \wedge \vec{B}$ avec $dq = \rho d\delta$

$$\Rightarrow d\vec{F} = \rho \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\delta$$

$$\boxed{\frac{d\vec{F}}{d\delta} = \vec{J}_v \wedge \vec{B}}$$

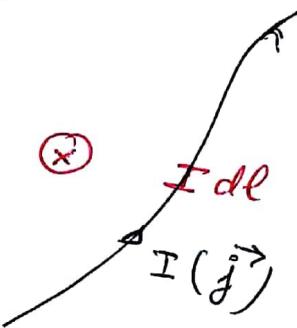


3.8 - Force exercée sur un élément de courant filiforme

"Force de Laplace"

soit un élément de longueur $d\ell$, d'un fil conducteur de faible section (surface) parcourue par courant d'intensité I et de densité j

Si \vec{B} est le C.N au niveau de cette élément de courant celui-ci subit la force : $d\vec{F} = I d\ell \wedge \vec{B}$ due à la force de Laplace.



- * tq : $d\vec{F} \perp (d\ell, \vec{B})$
- * le sens de $d\vec{F}$ est tq : $(d\vec{F}, d\ell, \vec{B})$ est un treidre direct.

8.4 - Équation de Poisson en magnétique

A partir des équations de $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

$$\text{Alors : } \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \mu_0 \vec{j}$$

$$\text{avec : } \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{A}) - \vec{\Delta} \vec{A}$$

$$\Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \mu_0 \vec{j} = \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{A}) - \vec{\Delta} \vec{A}$$

\uparrow
= 0 (jauge)

$$\text{on obtient : } \boxed{\mu_0 \vec{j} + \vec{\Delta} \vec{A} = 0}$$

En Electrostatique on aura :

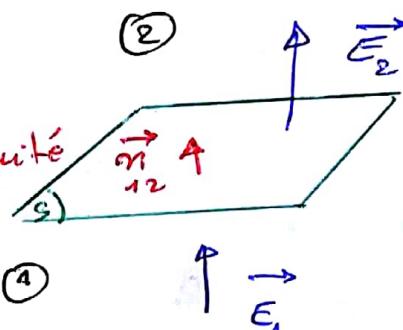
$$\boxed{\Delta V + \frac{e}{\epsilon_0} = 0}$$

8) Relation de continuité du champ magnétique.

Rappel Rappelons que on a dans le champ électrique \vec{E} , le passage d'un milieu à un autre (surface portant \vec{n}) se fait par la relation de passage.

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$$

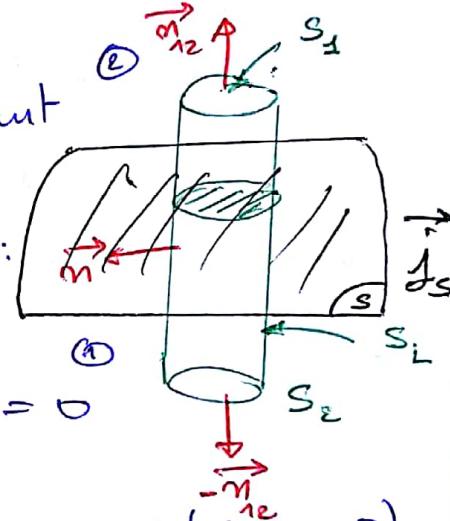
$$\Rightarrow \begin{cases} E_{2N} = E_{1N} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} & \text{Disc. de continuité normal} \\ E_{2t} - E_{1t} = 0 & \text{Continuité} \end{cases}$$



Dans le cas du champ magnétique \vec{B} : soit une distribution surfacique du courant j , séparant l'espace entre deux régions ① et ②

considérons une surface fictive, traversant la conservation du flux magnétique à travers la surface totale du cylindre écrit:

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{s}_1 + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{s}_2 + \iint_{S_L} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$



⇒ si on fait tendre la hauteur du cylindre $\rightarrow 0$ ($S_L \rightarrow 0$)

$$\Rightarrow \phi = 0 = \iint_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s} + \iint_{S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{s} = 0$$

Finalement

$$\iint (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot d\vec{s} = \iint (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \vec{n}_{12} d\vec{s} = 0$$

Donc :

$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \vec{n}_{12} = 0 \Rightarrow B_{2N} = B_{1N} \Rightarrow$ la continuité de la composante normale au passage d'un milieu (1) au milieu (2).

Résumé: Relation de Passage:

- Champ Electro statique \vec{E} :

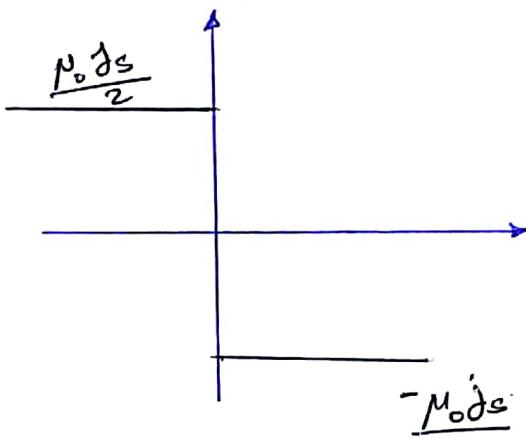
$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \Rightarrow E_{2N} - E_{1N} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{Discontinuité de la composante normale.}$$

$$\Rightarrow E_{2T} - E_{1T} = 0 \quad \text{continuité de la composante tangentielle}$$

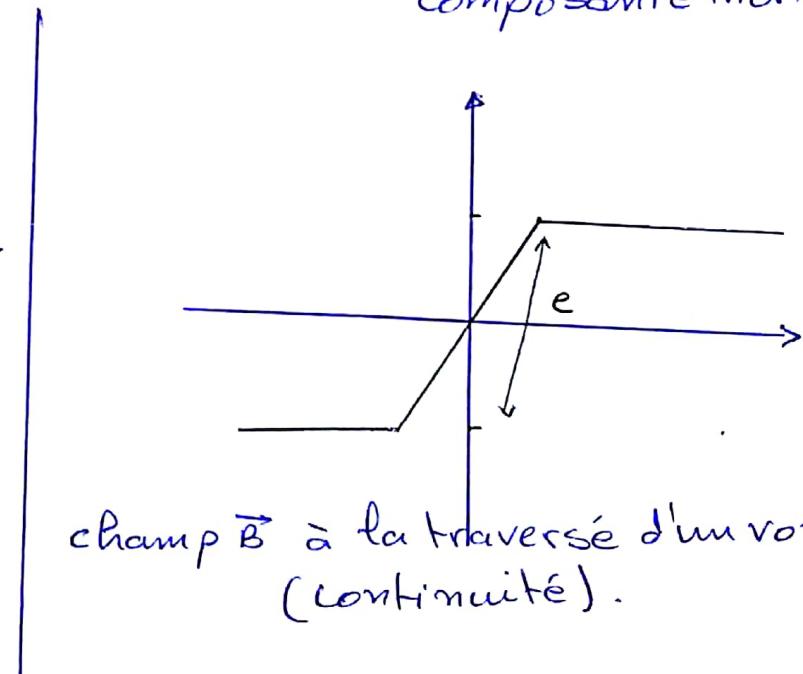
- Champ magnétique \vec{B} :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j} \wedge \vec{n}_{12} \Rightarrow B_{2T} - B_{1T} = \mu_0 j_s \quad \text{Discontinuité de la composante tangentielle}$$

$$\Rightarrow B_{2N} - B_{1N} = 0 \quad \text{continuité de la composante normale.}$$



champ \vec{B} à la traverser d'un surface



champ \vec{B} à la traversé d'un volume (continuité).

Ex 1 :

1°/ calculer $\vec{\text{grad}} V_r$ avec

$$V(r) = \frac{1}{r}$$

$$\vec{\text{grad}} V_r = \vec{\nabla} V(r)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) V(r)$$

$$\vec{\text{grad}} V_r = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-1/2}$$

on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left((x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \right) &= -\frac{1}{2} x (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \\ &= -x (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \end{aligned}$$

de \hat{m} on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left((x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \right) = -y (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

$$\text{et } \frac{\partial}{\partial z} \left((x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \right) = -z (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

done :

$$\vec{\text{grad}} V_r = \left(x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \right) \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-3/2}$$

$$\boxed{\vec{\text{grad}} V_r = \frac{-\vec{r}}{r^3}}$$

2°/ calculer $\text{div} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right)$

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

$$\| \vec{r} \| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$r^3 = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$$

$$\text{div} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \left(\frac{x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{r^3 - 3x^2 r}{r^6}$$

de \hat{m} :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{r^3 - 3y^2 r}{r^6}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{r^3 - 3z^2 r}{r^6}$$

Alors :

$$\text{div} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{r^3 + r^3 - (3x^2 r + 3y^2 r + 3z^2 r)}{r^6}$$

$$\text{div} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{3r^3 - 3r(x^2 + y^2 + z^2)}{r^6}$$

$$\text{div} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{3r^3 - 3r^3}{r^6} = 0$$

$$\boxed{\text{div} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0}$$

Equation de Maxwell

- $\text{div} \vec{E} = \frac{e}{\epsilon_0}$; $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$
- $\text{div} \vec{B} = 0$; $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

3/ Calculons les quantités physiques

a) $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} V(r))$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \\ \vec{\text{grad}} V_r = \vec{\nabla} V(r) \end{array} \right.$$

Alors: $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} V(r)) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} V(r) = \vec{0}$

$$\boxed{\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} V(r)) = \vec{0}}$$

b) $\text{div}(\vec{\text{rot}}(\vec{A}))$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \\ \vec{\text{rot}} \vec{A}(r) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$$

car $\vec{\nabla} \perp (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$

$$\boxed{\text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = 0}$$

c) $\text{div}(\vec{\text{grad}} f)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \\ \vec{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f \end{array} \right.$$

$$\text{div}(\vec{\text{grad}} f) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right)$$

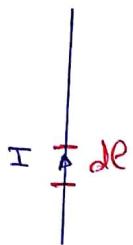
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{div}(\vec{\text{grad}} f) = \Delta f}$$

Ex 2 :

1/ Determiner les symétries

a -



- * n'importe quel plan π qui est vertical qui contient le fil est un plan de symétrie.
- * (π^*) est un plan d'antisymétrie de la densité de courant
 $\Rightarrow \vec{B} \in \pi^*$

b - un fil de longueur fini

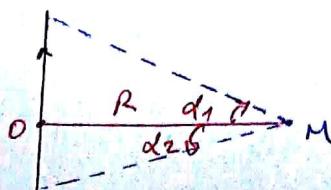
- \forall plan vertical \Rightarrow symétrie
- \forall plan horizontal passe par la moitié du fil \Rightarrow antisymétrie

c - Deux fil parallèle.



- * Si $I_1 = I_2$
 π est un plan de symétrie
- * Si $I_1 = -I_2$
 $\Rightarrow \pi$ est un plan d'antisymétrie

2/



I - on utilise les coordonnées cylindriques (e, p, z) .

- Invariance : par rotation (p)
 $\Rightarrow \vec{B} = B(z, e)$

- Symétrie : le plan méridien π est un plan d'antisymétrie.

$$\Rightarrow \vec{B} \in \pi^*$$

alors \vec{B} porter par \vec{e}_p

$$\vec{B} = B(e, z) \vec{e}_p \quad (1)$$

II - $I d\ell$ crée un champ \vec{B}

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{I d\ell \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

$$d\ell \wedge \vec{PM} = d\ell \vec{e}_z \wedge (\ell \vec{e}_z + e \vec{e}_e) \\ = d\ell R \vec{e}_p$$

Alors :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\ell R}{PM^3} \vec{e}_p$$

III : on a

- $\cos \theta = \frac{R}{PM} \Rightarrow \frac{1}{PM} = \frac{\cos \theta}{R}$
 $\Rightarrow \frac{1}{PM} = \frac{\cos^3 \theta}{R^3}$

- $\sin \theta = \frac{\ell}{PM}$

- $\tan \theta = \frac{\ell}{R} \Rightarrow \ell = R \tan \theta$
 $\Rightarrow d\ell = \frac{R}{\cos^2 \theta} d\theta$

Alors :

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{R^2 \cdot \cos^3 \theta}{\cos^2 \theta \cdot R^3} \vec{e}_p d\theta$$

$$d\vec{B} = \frac{N_0 I}{4\pi R} \cos\theta d\theta \hat{e}_p$$

donc

$$\vec{B} = \frac{N_0 I}{4\pi R} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \cos\theta d\theta \hat{e}_p$$

$$\vec{B} = \frac{N_0 I}{4\pi R} [\sin\theta]_{\alpha_2}^{\alpha_1}$$

$$\vec{B} = \frac{N_0 I}{4\pi R} (\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)$$

or:

$$\sin\alpha_1 = \frac{z_1}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{z_2}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{N_0 I}{4\pi R} \left(\frac{z_1}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{z_2}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \hat{e}_p}$$

En déduire le champ créé par un fil filiforme infini :

de champ créé par un fil filiforme infini traduit par :

$$\alpha_1 \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ et } \alpha_2 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

ce qui donne :

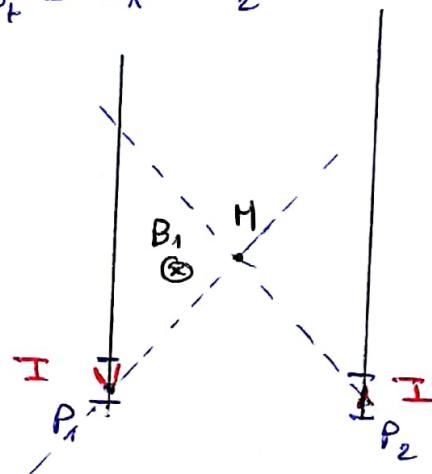
$$\boxed{\vec{B} = \frac{N_0 I}{4\pi R} \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2}) \right) \hat{e}_p}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{N_0 I}{2\pi R} \hat{e}_p}$$

3/ Calcul du C.M crée par deux fils parallèles parcourus par des courants de même intensité I , de sens opposé

on utilise le principe de superposition

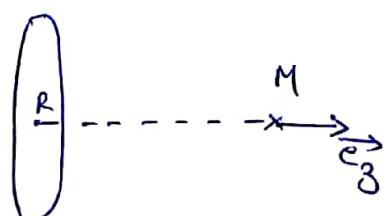
$$\vec{B}_t = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$



$$\boxed{\vec{B} = \frac{N_0 I}{\pi R} \hat{e}_p}$$

Ex 3

Déf : on appelle une spire est une structure circulaire de rayon R



* Re-calcule du \vec{B}

I -> le plan (π^*) tq $\pi^* \perp \vec{e}_g$ est un plan de symétrie

$$\Rightarrow \vec{B} \perp \pi^* \text{ alors } \vec{B} = B \hat{e}_g$$

* Inv: rotation par rapport à ρ

$$\Rightarrow \vec{B} = B(\rho, \theta)$$

$$\Rightarrow \vec{B} = B(\theta), \rho = R = \text{cte}$$

$$\text{II: } d\vec{l} \wedge \vec{PM} = d\vec{l} \cdot \vec{e}_\rho \wedge (-R\vec{e}_\theta + \vec{e}_z)$$

$$\Rightarrow d\vec{l} \wedge \vec{PN} = d\vec{l} \cdot R \vec{e}_z + \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\rho$$

$$\text{Alors: } \vec{B} = \frac{N_0 I}{4\pi} \int \frac{R d\ell}{(R^2 + \rho^2)^{3/2}} \vec{e}_\theta$$

$$\text{avec } [d\ell = R d\rho]$$

$$\vec{B} = \frac{N_0 I}{4\pi} \int \frac{R^2}{(R^2 + \rho^2)^{3/2}} d\rho \vec{e}_\theta$$

$$\vec{B} = \frac{N_0 I}{4\pi} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + \rho^2)^{3/2}} \cdot 2\pi \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{N_0 I}{2R} \cdot \frac{R^2 \times R}{(R^2 + \rho^2)^{3/2}} \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{N_0 I}{2R} \left(\frac{R^2}{\sqrt{R^2 + \rho^2}} \right)^3 \vec{e}_\theta$$

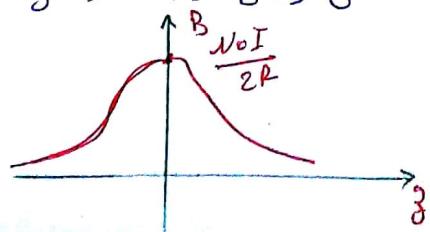
$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{N_0 I}{2R} \sin^3 \theta \vec{e}_\theta}$$

Représentation du \vec{B}

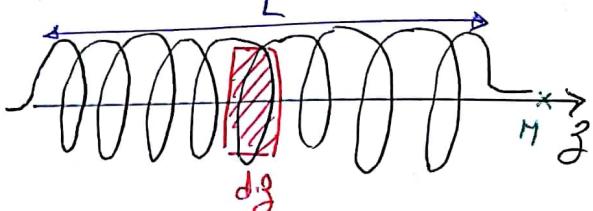
$$\text{on a } \vec{B}(\theta) = \frac{N_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

$$\text{si } \theta \rightarrow 0 \Rightarrow B \rightarrow \frac{N_0 I}{2R}$$

$$\theta \rightarrow \infty \Rightarrow B \rightarrow 0$$



1/ Schéma illustratif



on appelle un solinoïde un ensemble de spires jointives connectées en série donc traversé par le même courant et forme un cylindre d'axe (og)

2/ La densité dm de spire par unité de longueur

$$\begin{aligned} L &\longrightarrow N \\ dg &\longrightarrow dm \end{aligned} \quad \text{spire}$$

$$\Rightarrow \boxed{dm = \frac{N}{L} dg}$$

3/ Par considérations des symétries déterminer $d\vec{B}(z)$ créé en un pts M

D'après le résultat du calcul du c.m. \vec{B} créé par une spire

$$\vec{B} = \frac{N_0 I}{2R} \sin^3 \theta \vec{e}_\theta$$

* N'importe quel plan horizontal contenant l'axe (og) est un plan d'antisymétrie

$$\Rightarrow \vec{B} \in \pi^*$$

* N'importe quel plan vertical qui passe par le milieu est un plan de symétrie

$$\Rightarrow \vec{B} \perp \pi$$

$$\Rightarrow \vec{B} = B(z) \hat{e}_z$$

- Dans dz il y a dm spire qui crée un champ élémentaire

$$dB = \vec{B} \cdot dm$$

$$= \frac{N_0 I}{2R} m \sin^3 \theta dz$$

Avec : $m = \frac{N}{L}$ nombre de spire

- de champ magnétique total créé par le solénoïde est

$$\vec{B} = \int dB$$

$$\text{avec } \tan \theta = \frac{R}{z+R}$$

$$\Rightarrow z = R - \frac{R}{\tan \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{d\theta} = -R \left(\frac{1}{\tan^2 \theta} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{d\theta} = -\frac{R}{\sin^2 \theta}$$

Alors :

$$dB = \frac{N_0 I}{2R} m \frac{R \sin^3 \theta}{\sin^2 \theta} d\theta \hat{e}_z$$

$$dB = \frac{N_0 I}{2} m \sin \theta d\theta \hat{e}_z$$

$$\vec{B} = \frac{N_0 I}{2} m \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \hat{e}_z$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{N_0 I}{2} m (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \hat{e}_z}$$

4/ C.M crée par un solénoïde infini

En faisant tendre

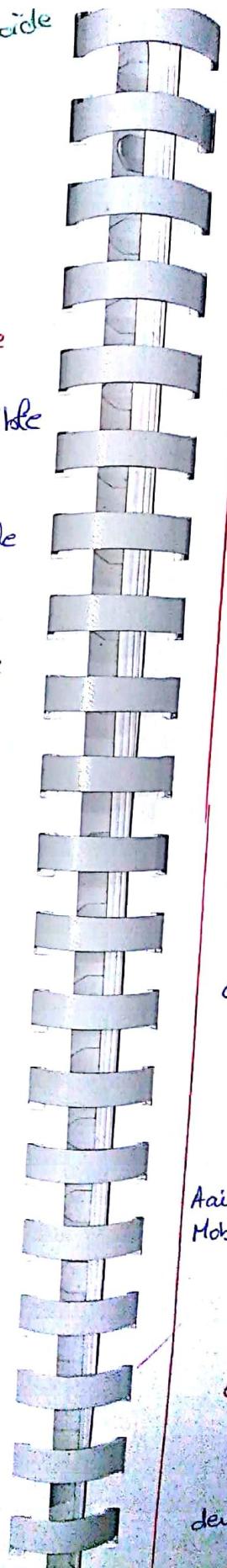
$$\theta_1 \rightarrow 0 \text{ et } \theta_2 \rightarrow \pi$$

$$\boxed{\vec{B} = m N_0 I} \text{ champ uniforme}$$

En pratique il est impossible de réaliser un solénoïde

infini, mais pour un solénoïde de longueur $L \gg 10R$

le C.M est cte sur l'axe (z).



Axe
Mobile

1°)

Dans
deux lot

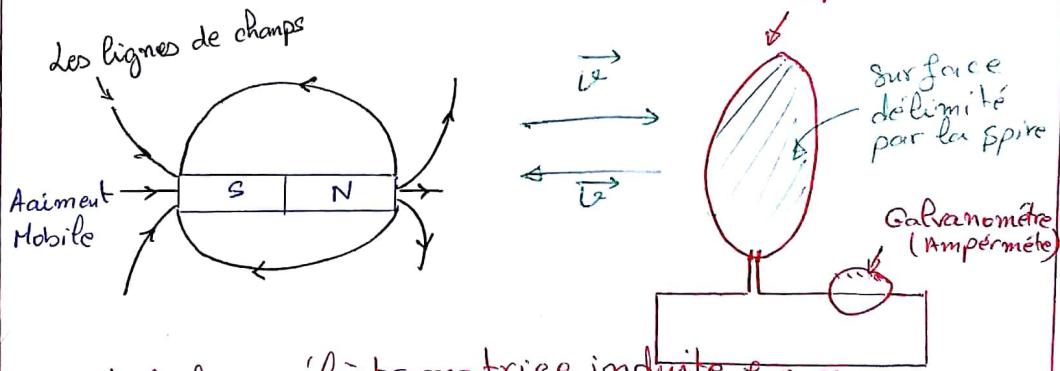
Chapitre 3 : Induction magnétique

Dans les chapitres précédents, on a vu qu'un courant électrique i crée un champ magnétique \vec{B} .

Particulièrement, on établit une relation générale suivante $B \sim k_i$, où k est une quantité physique qui dépend de la configuration géométrique de la circuit.

Dans ce chapitre on va démontrer comment produire un courant électrique i à partir d'un champ magnétique externe. ce courant produit n'est pas permanent. Il dépend du temps $i = i(t)$, $\frac{di(t)}{dt} \neq 0$

Il s'agit du phénomène d'induction électromagnétique découverte en 1831 par Faraday.
on va manipuler des champ magnétique variable au cours du temps et des circuits électrique mobiles.



1) La force électromotrice induite f.e.m

1.1 - Lois d'induction

Dans l'étude d'induction électromagnétique, on distingue deux lois :

- * Loi de Faraday qui définit la f.e.m induite
- * Loi de Lenz qui concerne le sens du courant induit

Rq : Ces deux lois qui sont liées, reposent sur une variation non nulle du flux du C.M : $\frac{d\phi_B}{dt} \neq 0$

* Observation de l'expérience (page précédente)

1% si l'aimant est immobile ($\vec{\omega} = \vec{0}$), le flux du C.M

$$\phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \text{ à travers la surface } S \text{ est indépendant du temps} \quad \frac{d\phi_B}{dt} = 0 \Rightarrow \text{Pas de courant induit}$$

2% si on déplace l'aimant avec une vitesse \vec{v} , on engendre un flux magnétique ϕ_B variable dans le temps :

$$\frac{d\phi_B}{dt} \neq 0 \Rightarrow \text{Il y a un courant électrique induit.}$$

3% si la quantité $\frac{d\phi_B}{dt}$ est grande, alors le courant électrique devient important.

4% si la quantité $\frac{d\phi_B}{dt}$ est faible $\Rightarrow i(t)$ devient faible

* Interprétation :

La variation du flux magnétique $\frac{d\phi_B}{dt}$ induit un courant électrique $i(t)$ dans les conducteurs circulaires ce courant électrique induit est dû à une force électromotrice induite.

f.e.m appellée la force électromotrice induite

cette force est donnée par la loi de Faraday suivante

$$e = -\frac{d\phi_B}{dt} ; \quad \phi_B(t) = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Rq : l'unité de la force électromotrice est Volt [V]

. de flux magnétique $\phi_B(t)$ s'exprime en Weber (W)

$$1 \text{ W} = \text{T} \cdot \text{m}^2 \Rightarrow 1 \text{ V} = \frac{\text{W}}{\text{s}} = \frac{\text{T} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

Loi de Lenz

Cette loi concerne du courant induit. Elle est formulée comme suit :

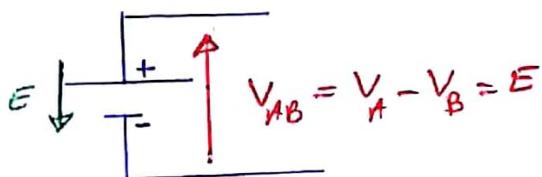
les effets du courants induit s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance"

de champ électrique varie dans le sens du potentiel décroissant. (Rappel).

* de sens de la force électromotrice :

$$\vec{F} = q \vec{E} \Rightarrow \begin{cases} \text{si } q > 0 \text{ alors } \vec{F} \rightarrow \vec{E} \\ \text{si } q < 0 \text{ alors } \vec{F} \leftarrow \vec{E} \end{cases}$$

Pour un générateur de tension



* $V_A > V_B \Rightarrow \vec{E}$ au sens inverse du V_{AB} (champ électrique) \Rightarrow puisque $\vec{F} = q \vec{E}$ alors \vec{F} au sens opposé du \vec{E}

Alors : création d'une force électromotrice $\vec{E}_{em} = -e \vec{E}_{elec}$ sup à la force électrostatique \vec{F}) Pour qu'on obtienne le déplacement du charge électrique vers le bas

\Rightarrow création du courant électrique I.

Rq : si $\vec{E}_{elec} (\vec{F} > \vec{E}_{em}) \Rightarrow$ Force contramotrice

\Rightarrow le courant convention Récepteur.



1.2 - Champ Electromoteur

On rappelle qu'un courant est un déplacement des charges - la circulation du courant induit dans la spire montre l'existence d'un **champ électromoteur** \vec{E}_H qui met les e⁻ libre en déplacement (en mouvement). Autrement dit il fournit de l'énergie aux charges électriques pour qu'il puisse se déplacer, Sa circulation le long de (ℓ): contour fermé) est égale à

f.e.m :
$$e = \oint_{\ell} \vec{E}_H \cdot d\ell$$

Ce champ électromoteur ne dérive pas d'un potentiel électrique V_s scalaire et son rotationnel non nul.

Remarque

- * de champ Electromoteur est différent du champ électrique ($\vec{E}_H \neq \vec{E}_S$), $\vec{E}_S = -\nabla V$
- * \vec{E}_H et \vec{E}_S forment un champ électrique $\vec{E} = \vec{E}_H + \vec{E}_S$

1.2.1 - Rotationnel du Champ \vec{E}_H

on considère une surface S qui s'appuie sur le contour d'un circuit fermé (ℓ) on utilisant le Th^{em} de stocks :

$$e = \oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\ell = \iint_S \text{stocks} \vec{rot} \vec{E}_H \cdot d\vec{s} = - \frac{d\phi}{dt}$$

on considère la surface est indépendante du temps

$$e = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = - \iint_S \frac{d}{dt} (\vec{B} \cdot d\vec{s})$$

$$\Rightarrow e = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = - \iint_S \vec{rot} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Donc :
$$\vec{rot} \vec{E}_H = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
 4^{ème} Eqty de Maxwell

Il faut noter que cette équation vérifier pour toute surface S.

Ag : - Cette équation illustre le fait que \vec{E}_M est relié à la variation du C.M \vec{B} dans le temps.
 - La variation temporelle de \vec{B} est considérée comme une source du champ Electromoteur \vec{E}_M .

1.2.2 - Relation de Maxwell - Faraday:

* $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$: \vec{B} dérive d'un potentiel vecteur
 (En électrostatique : $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$: \vec{E} dérive d'un pot scalaire)

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = -\vec{\text{rot}} \vec{E}_M$$

$$\Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{E}_M = -\vec{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad \text{Donc} \quad \boxed{\vec{\text{rot}} (\vec{E}_M + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \vec{0}}$$

On sait que : $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} \phi) = \vec{0}$
 $\Rightarrow \vec{E}_M + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{\text{grad}} \phi \quad \text{or} : \vec{\text{rot}} \vec{E}_S = \vec{0}$

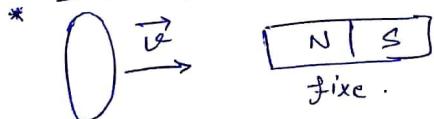
On peut écrire :

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\text{grad}} V} \quad \text{champ électrique totale.}$$

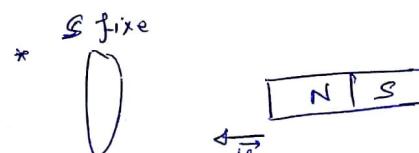
associé à des charges q statique et des densité de courants \vec{j}

Son rotationnel : $\boxed{\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$ Eq Maxwell - Faraday.

Conclusion
 * S mobile



$$e = \int \vec{E}_M \cdot d\ell = \int (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\ell$$



$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

* Si l'élément et la spire sont en mvT

$$e = \int (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

2° Inductance

Dans cette section on va étudier le phénomène d'induction. Il est à noté que toujours compte des effets d'induction quel soit la vitesse de variation du C.M \vec{B}

2.1 - Induction propre

on considère un circuit C filiforme parcourue par courant i . Ce circuit traversé par flux ϕ , c'est le flux propre du C.M créé par le courant i traversant le circuit. de flux est proportionnel à i

$$\boxed{\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = L i}$$

avec : S : Surface s'appuie sur le contour C

L : Coeff d'inductance propre (auto inductance)

$\Rightarrow L > 0$ (tjrs positive).

il ne dépend que de la configuration géométrique du circuit. Il se mesure en Henry (H) $\equiv \left[\frac{\text{Weber}}{A} \right]$

Remarques :

* de flux de \vec{B} (ϕ_B) à travers S est dit flux propre

$$+ \left[L \right] = \frac{[\phi]}{[i]} = W \cdot A^{-1} = \frac{T \cdot m^2}{A} \quad \left(\frac{[B][S]}{[i]} \right)$$

* La variation du courant i à travers le circuit fournit la force électromotrice $e = -\frac{d\phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}$

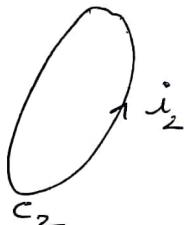
Exemple : fil filiforme-parcouru par i permanent.

$$\vec{B} = \frac{N_0}{4\pi} \int_C \frac{i d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

$$\phi = \iint_C \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \left[\frac{N_0}{4\pi} \int_C \frac{i d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \right] d\vec{S} = Li$$

$$L = \frac{\phi}{i} = \iint_S \left(\frac{N_0}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l} \wedge \vec{B}}{r^3} \right) d\vec{S}$$

2.2 - Inductance mutuelle (réiproque)



$$\phi_{t1} = L_1 i_1 + \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1$$

$$\phi_{t2} = L_2 i_2 + \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2$$

$$\begin{aligned} \phi_{t2} &= \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \iint_{S_2} \vec{r}_0 + \vec{A}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 \\ &= \frac{N_0}{4\pi} \iint_{C_1 C_2} \frac{i_1 d\vec{l}_1}{r} \cdot d\vec{l}_2 \end{aligned}$$

$$\phi_{t1} = \frac{N_0}{4\pi} \iint_{C_1 C_2} \frac{i_2 d\vec{l}_1}{r} \cdot d\vec{l}_2$$

Si on pose : $\phi_{t2} = M_{12} i_1$
 $\phi_{t1} = M_{21} i_2 \Rightarrow M_{12} = \frac{N_0}{4\pi} \iint_{C_1 C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r} = M_{21}$

Le coeff $M_{12} = M_{21} = M$ est appelé coeff d'induction mutuelle

$$\phi_{t1} = \phi_{t1} + \phi_{21} \Rightarrow \phi_{t1} = L_1 i_1 + M i_2$$

$$\phi_{t2} = \phi_{t2} + \phi_{12} \Rightarrow \phi_{t2} = L_2 i_2 + M i_1$$

En générale

$$\begin{pmatrix} \phi_1 = \phi_{t1} \\ \phi_2 = \phi_{t2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

c'est une Matrice 2×2 .

Pour un système de n circuit, le flux ϕ_k traverse un circuit C_k .

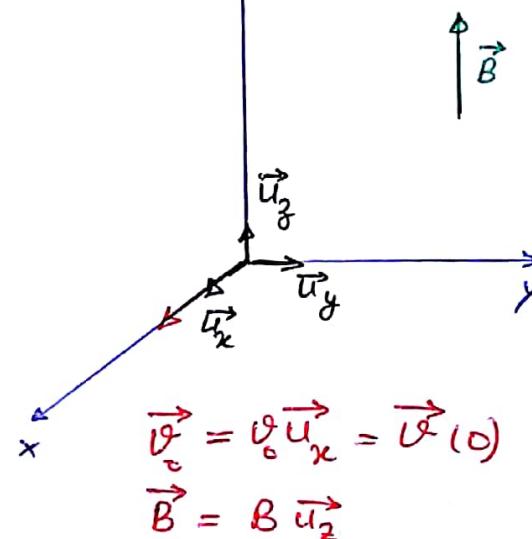
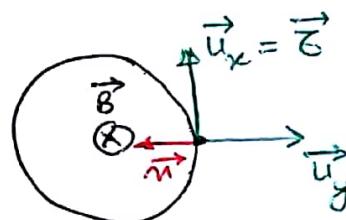
$$\phi_k = L_k i_k + \sum_{\alpha \neq k}^n M_{k\alpha} i_\alpha \quad , \quad k = 1, \dots, n$$

Correction TD N° 2

Exo 1 : Particule chargé (\vec{v}) plongé dans un C.N \vec{B} .

1- M_g le mvt de la particule est circulaire uniforme \Rightarrow

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q \vec{v} \wedge \vec{B} ;$$



* on travail avec la base de Fresnel
 $(\vec{e}, \vec{n}, \vec{e} \wedge \vec{n} = b = -\vec{u}_z)$

on applique le PFD

$$\Rightarrow \sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{\gamma} \Rightarrow \vec{P} + \vec{F}_L = m \vec{\gamma}$$

on néglige $\vec{P} = m \vec{g}$ on obtient donc :

$$\boxed{\vec{F}_L = m \vec{\gamma}}$$

$$\Rightarrow q \vec{v} \wedge \vec{B} = m \vec{\gamma} = m \vec{\gamma}_t + m \vec{\gamma}_n + m \vec{\gamma}_g$$

or d'accélération $\vec{\gamma} = \gamma(\gamma_t, \gamma_n, \gamma_g)$

$$\Rightarrow |q||v| \cdot B \vec{u}_y = m \vec{\gamma}_t - m \gamma u_y \vec{i} + m \gamma_g \vec{j}$$

$$\text{donc } \gamma_t = \gamma_g = 0 \Rightarrow \gamma_t = \frac{du_t}{dt} = 0 \Rightarrow u_t = \text{cte}$$

d'où le mouvement est uniforme.

2^{ème} méthode Th d'énergie cinétique

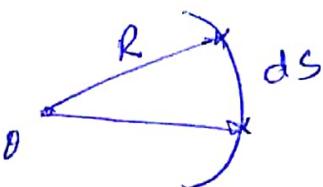
$$dE_c = S \, dW(F)$$

Puisque la force de Lorentz ne travail pas : $dW = \vec{F}_L \cdot \vec{dl}$

$$dW = (q \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0$$

$$\Rightarrow dE_c = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = 0 \\ \Rightarrow [v = \text{cte}]$$

D'où la mvt est uniforme.



$$\vec{v} = \frac{\vec{ds}}{dt} \quad \text{ave } \vec{ds} = ds \vec{t}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{t} = v \vec{t}$$

$$\vec{r} = \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{t} + \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{t}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{t}}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{t}}{d\alpha} \cdot \frac{v}{R}$$

$$\text{Alors : } \vec{r} = \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{t} + \frac{v^2}{R} \vec{n} = \vec{r}_t + \vec{r}_n$$

\Rightarrow Mouvement circulaire uniforme.

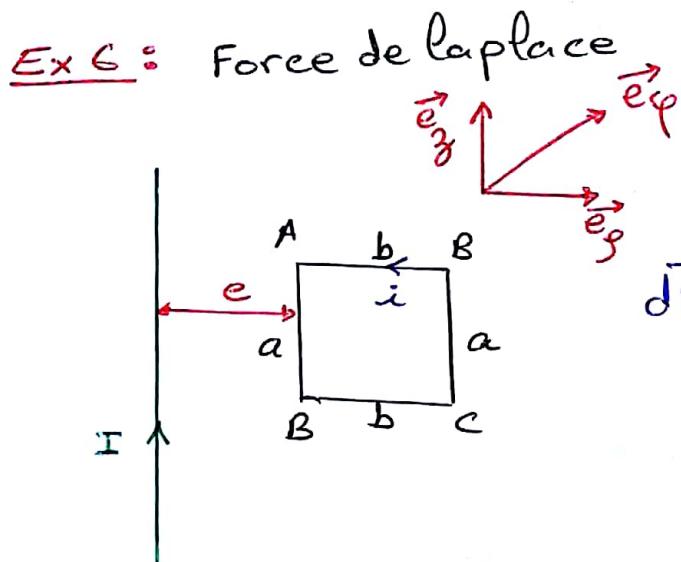
2^y Exprimer le rayon du trajectoire en fonction de B, m, q et v

$$\vec{F}_L = m \vec{a} = m \vec{r}_n$$

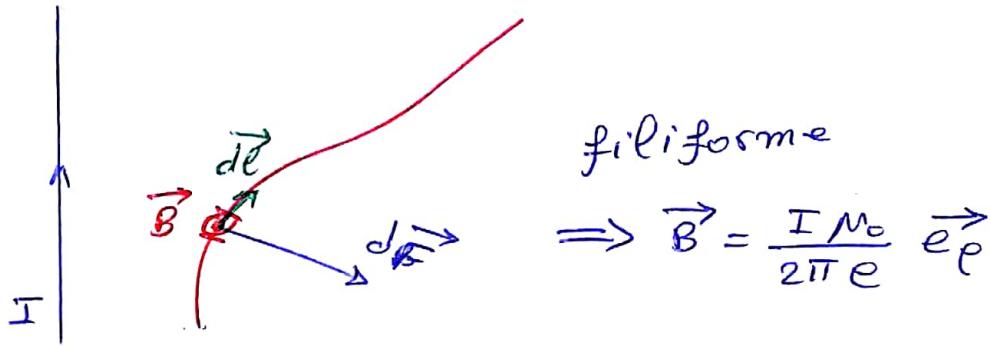
$$q \vec{v} \wedge \vec{B} = m \frac{v^2}{R} \vec{n}$$

$$|q| \cdot v \cdot B \vec{n} = m \frac{v^2}{R} \vec{n}$$

$$\boxed{R = \frac{m v}{q B}}$$



Si un filiforme (1) $\Rightarrow \vec{B}$



\Rightarrow si un fil(2) parcourue par un courant i plongé dans \vec{B} \Rightarrow yl es soumis à la force de Laplace :

$$d\vec{F} = i d\ell \wedge \vec{B}$$

* on calcule la force :

$$\vec{F}_{AB} = i \int d\ell \wedge \vec{B} = i \int_{x_A}^{x_B} -dx \vec{e}_x \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{AB} = -i \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int \frac{dx}{x} \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} i \int_{x_A}^{x_B} \frac{dx}{x} \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{AB} = -\frac{i I \mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{x_B}{x_A}\right) \vec{e}_z}$$

$$\text{On a } \vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{DC} \implies \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{DC} = \vec{0}$$

$$* \vec{F}_{AD} = i \int d\ell \wedge \vec{B} = i \int -d\ell \vec{e}_3 \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi e} \vec{e}_y$$

$$\boxed{\vec{F}_{AD} = +iI \frac{\mu_0}{2\pi e} a \vec{e}_x}$$

$$* \vec{F}_{CB} = i \int d\ell \wedge \vec{B} = i \int d\ell \vec{e}_3 \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi(e+b)} \vec{e}_y$$

$$\boxed{\vec{F}_{CB} = -\frac{\mu_0 i I a}{2\pi(e+b)} \vec{e}_x}$$

Done :

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \frac{\mu_0 I i}{2\pi} \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e+b} \right) \vec{e}_x$$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{tot}} = \frac{i I \mu_0}{2\pi} \cdot \frac{ba}{e(e+b)}} \quad ||\vec{F}|| =$$

\Rightarrow la force pousse le cadre rectangulaire vers le sens des $x > 0$.

Rq si le cadre est distant de x du fil :

$$\boxed{\vec{F}(x) = \frac{\mu_0 I i}{2\pi} \cdot \frac{ab}{x(x+b)} \vec{e}_x}$$

Ex3 :

Rappel : Théorème d'Ampère

La circulation du C.N \vec{B} le long d'un parcourt P fermé, orientée (sens) égale le produit par μ_0 de la somme des courants enlacés (traversés) par ce parcours

$$\oint_P \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

$d\vec{l}$: élément de courant tq :

$$[d\vec{l}] = A \cdot m$$

$d\vec{l} = I d\vec{l}$	(filiforme)	I en A
$d\vec{l} = j d\vec{v}$	(volume)	j en m^{-2}
$d\vec{l} = j_s d\vec{S}$	(surface)	j_s en m^{-1}

I Ex : (Fil filiforme)

* loi de Biot et Savart :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{\|PM\|^3}$$

* Raison d'invariance : $\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}(e)$
* .. de symétrie $\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}(e) \vec{ep}$

* sur le parcours P : $d\vec{l} = dl \vec{ep}$

Finalement

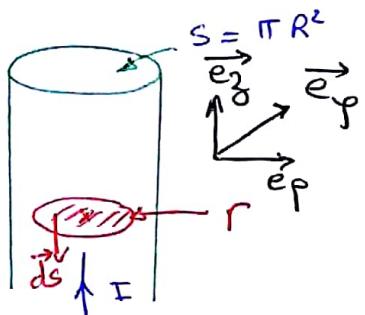
$$\oint_P \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_P \vec{B} \cdot dl = \vec{B} \oint dl = \vec{B}(P) 2\pi P$$

$$* \mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow \vec{B}(P) \cdot 2\pi P = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow \vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi P} \vec{ep}$$

III Cylindre de Rayon R infini portant une densité volumique j_{v} , calcule $\vec{B}(\mathbf{N})$



* Invariance :
le CM est invariant par rapport au rotateur suivant \vec{e}_ϕ et translation selon z
 $\Rightarrow \bar{B} = \bar{B}(P)$

* Symétrie :
• n'importe que plan vertical porte le cylindre
est un plan de symétrie $\Rightarrow \vec{B} \in (\pi)$
• n'importe que plan Horiz est un plan d'anti-symétrie $\Rightarrow \vec{B} \in (\pi^*)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \bar{B} \vec{e}_\phi}$$

* Calculer $\vec{B} \cdot d\ell$

$$\int \vec{B} \cdot d\ell = \int B \vec{e}_\phi \cdot (-d\ell \vec{e}_\phi) = - \int B \cdot d\ell = - \bar{B} 2\pi r$$

* Calculer $\mu_0 \sum I_i = \mu_0 I'$

$$\underline{r < R} \quad I' = \oint j_v \cdot ds = -j_v \pi r^2$$

$$\text{alors } I' = -\frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi r^2 \Rightarrow I' = -\frac{r^2}{R^2} I$$

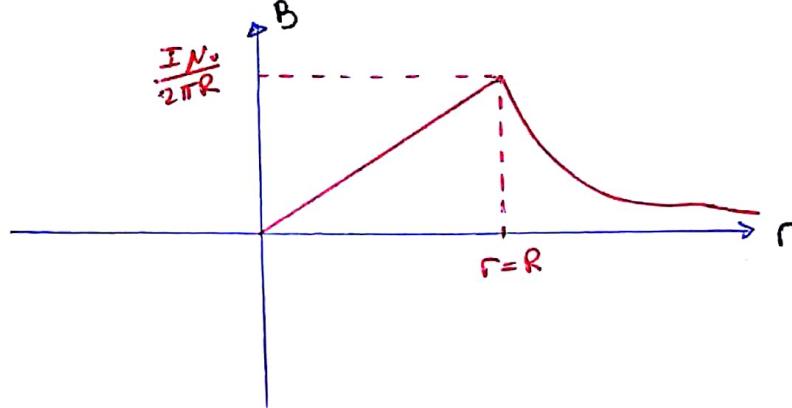
$$\text{Donc : } -\bar{B} 2\pi r = -\frac{r^2}{R^2} I N_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{r}{R^2} \cdot \frac{I N_0}{2\pi} \vec{e}_\phi} \quad (r < R)$$

$$\underline{r > R} \therefore \text{on a tjs} \quad \int \vec{B} \cdot d\ell = -\bar{B} 2\pi r = -N_0 I$$

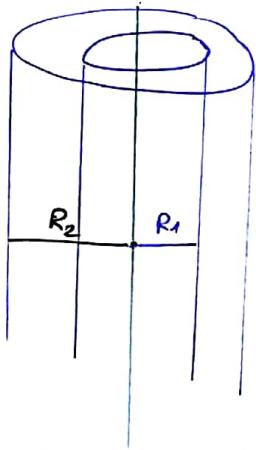
$$\text{Donc : } \boxed{\vec{B} = \frac{N_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\phi} \quad (r > R)$$

Variation du C.M \vec{B} en fonction de r



III - Cylindre Creux :

on calcule \vec{B} en M ?



1^{er} cas ($r \leq R_1$)

on choisit un parcours à l'intérieur du cavité (cercle) orienté vers le haut ($d\vec{s} = d\vec{s} \hat{m}$)

$$\begin{aligned} & \int \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r \\ & N_o \sum I_i = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

2^{ème} cas ($R_1 \leq r \leq R_2$)

on choisit un parcours de rayon r tq $R_1 \leq r \leq R_2$ orienté vers le haut ($d\vec{s} = ds \hat{m}$)

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r$$

$$I = (R_2^2 - R_1^2) \pi j_{av} = j_{av} (S_2 - S_1)$$

$$\Rightarrow I' = \pi j_{av} (r^2 - R_1^2)$$

$$\Rightarrow I' = I \cdot \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

Finalement

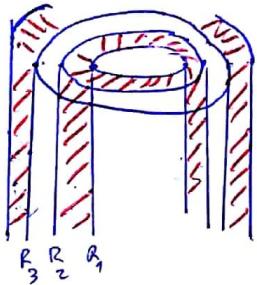
$$\boxed{\vec{B}(r) = \frac{N_o I}{2\pi r} \cdot \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \hat{e}_\phi}$$

3^{ème} cas ($r > R_2$)

$$\boxed{\vec{B}(r) = \frac{N_o I}{2\pi r} \hat{e}_\phi}$$

Exo 3 : Cable Co-axial.

1) calcule \vec{B}



on a 4 cas à traités :

- $r \leq R_1$
- $R_1 \leq r \leq R_2$
- $R_2 \leq r \leq R_3$
- $r \geq R_3$

* on a déjà (utilisant les inv et les symétrie)

$$\cdot \vec{B} = \bar{B}(r) \hat{e}_\phi$$

* par application du Théorème d'ampère :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$$

1^{er} cas $r \leq R_1$

on choisit un chemin fermé (cercle) orienté tq $d\vec{s}$ vers le bas ($d\vec{s} = ds \hat{m}$)

$$\cdot \vec{B} \cdot d\vec{l} = \bar{B} \hat{e}_\phi \cdot (-dl \hat{e}_\phi) = -\bar{B} dl$$

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\bar{B} 2\pi R$$

$$+ \mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 I' \quad \text{avec} \quad I' = \frac{I \cdot R^2}{R_1^2}$$

$$\Rightarrow \bar{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \frac{r^2}{R_1^2} \Rightarrow \boxed{\bar{B}(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \frac{r}{R_1^2} \hat{e}_\phi} \quad r \leq R_1$$

2^{ème} cas $R_1 \leq r \leq R_2$

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \bar{B}(r) 2\pi r \\ \cdot \mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 I \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\bar{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{e}_\phi} \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

3^{ème} cas: $R_2 \leq r \leq R_3$

$$\cdot \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \bar{B}(r) 2\pi r$$

$$\cdot \mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 (I + I'') \quad \text{avec} \quad I'' = -j_V \pi (R_1^2 - R_2^2) = j_V \pi \underline{R_1^2 - R_2^2}$$

$$\Rightarrow N_0 \sum I_i = N_0 I \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)$$

$$= N_0 I \left(\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)$$

Finalement

$$\boxed{\vec{B}(r) = \frac{N_0 I}{2\pi r} \cdot \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \hat{e}_\phi}$$

1^{er} cas $r \geq R_3$

$$\vec{B} = \vec{0} \text{ car } \sum_i I = I - I = 0$$

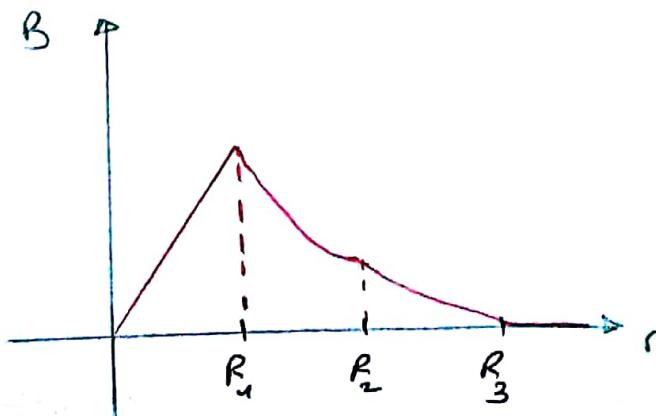
a) Etudier la continuité de $\vec{B}(r)$

- au pts R_1 on a : $B(r=R_1^-) = \frac{N_0 I}{2\pi R_1}$ } $B(r=R_1)$
 $B(r=R_1^+) = \frac{N_0 I}{2\pi R_1}$

- au pts R_2 on a : $B(r=R_2^-) = \frac{N_0 I}{2\pi R_2}$ } $B(r=R_2)$
 $B(r=R_2^+) = \frac{N_0 I}{2\pi R_2}$

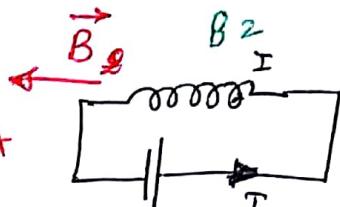
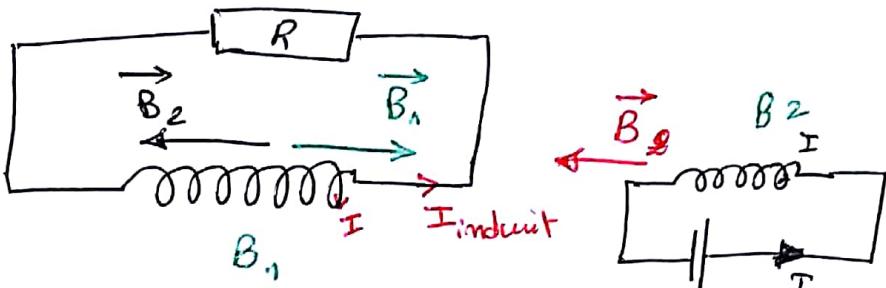
- au pts R_3 on a : $B(r=R_3^-) = 0$ } $B(r=R_3)$.
 $B(r=R_3^+) = 0$

b) Représentation du $B(r) = f(r)$.



Exo 4:

1^o

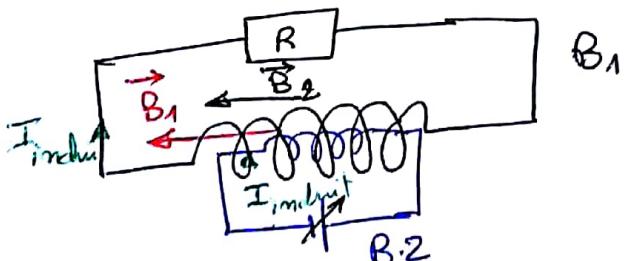


champ magnétique créé par le passage du courant I dans la boussole B_2

- champ magnétique $\| \vec{B}_2 \|$ est la cause du courant induit (B_1)
- des effets du courant induit : $\| \vec{B}_1 \|$
- \Rightarrow le sens du courant induit est tel que : les effets s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance
- d'inducteur est la boussole B_2 .
- d'induit est la boussole B_1 .

- lorsqu'on introduit B_2 à l'intérieur de $B_1 \Rightarrow \| \vec{B}_2 \| \uparrow$
- des effets $\| \vec{B}_1 \|$ se dirigent dans le sens inverse de \vec{B}_2 pour le faire diminuer.

2^o:



on a : $\| \vec{B} \| = \alpha I$, dans notre cas $\| \vec{B}_2 \| \downarrow$ mais il garde le même sens que le cas précédent, on aura un champ magnétique \vec{B}_1 induit tq : \vec{B}_1 varie de telle sorte à faire augmenter B_2 donc il aura le même sens que \vec{B}_2

Chapitre 4: Équation de Maxwell et ondes Electromagnétique (OEM)

1^o/ des Quatre Equations Maxwell

1^o.1 - Expression et Interprétation physique

Quatre équation, ajoutées à la loi d'interaction ($\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{B} \times \vec{v})$) forment les postulats de base de l'électromagnétisme.

* Equation de Maxwell Flux (MF) ($\operatorname{div} \vec{B} = 0$)

Elle signifie que le flux de \vec{B} à travers une surface est nul

$$\Rightarrow \iiint_V \operatorname{div} \vec{B} \cdot d\vec{z} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 = \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

c'est une propriété intrinsèque qui montre que le C.M ne peut pas diverger à partir d'une pts de l'espace ou encore qu'il n'existe pas une charge magnétique.

* Equation de Maxwell Faraday ($\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$)

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} =$$

$$= \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \text{ Forme différentiel}$$

Cette équation décrit tous les phénomènes magnétique et montre qu'un champ magnétique variable peut créer un champ électrique à circulation non nulle.

* Equation de Maxwell Gausse ($\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$)

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\text{Q int}}{\epsilon_0} = \iiint_V \frac{\rho d\vec{z}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho d\vec{z}$$

$$\text{Green} \quad \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot d\vec{z} \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

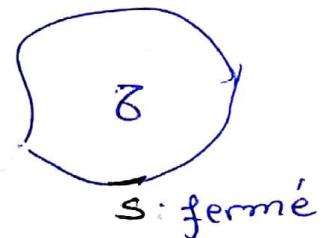
Elle exprime le flux du C.M à travers une surface fermée = somme des charges à l'intérieur de la surface fermée divisé par ϵ_0 et elle montre que le champ électrique peut diverger à partir du(s) ou se trouvent des charge(s) électrique(s).

* Équation de Maxwell - Ampère

Equation de **conservation** de la charge électrique (Equation de continuité).

S : surface délimité par un volume V

Pour un courant net sortie de la surface S , il doit y avoir une **diminution** de charges positives :



$$I = \oint \vec{j} \cdot d\vec{s} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\text{Avec } \Phi = \iiint_V \rho \, dV \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = -I$$

$$= - \oint \vec{j} \cdot d\vec{s} \stackrel{\text{Green}}{=} - \iiint_V \text{div} \vec{j} \cdot dV$$

On obtient

$$\boxed{\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

A partir de l'équation de la magnétostatique $\vec{\text{rot}} \vec{B} = N_o \vec{j}$

$$\Rightarrow \text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = 0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = 0$$

$$\Rightarrow \mu \text{div} \vec{j} = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{j} = 0$$

donc : $\begin{cases} \text{div} \vec{j} = 0 \\ \text{div} \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{cases}$ c'est une contradiction

Pour contourner le problème, on doit corriger l'équation

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \text{ au } \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \vec{j}_d$$

et on démontre que $\vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

\vec{j}_d : densité de courant de déplacement.

\vec{j} : " " " de conduction.

En effet : $\text{div}(\text{rot } \vec{B}) = \mu_0 \text{div} \vec{j} + \mu_0 \text{div} \vec{j}_d = 0$

$$\Rightarrow \text{div} \vec{j} = - \text{div} \vec{j}_d = - \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{div} \vec{j}_d = \frac{\partial P}{\partial t}} \quad (*)$$

M-G : $\text{div} \vec{E} = \frac{P}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial t} = \text{div} (\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \quad (**)$

(*) \equiv (**) $\Rightarrow \vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

déplacement

D'où :

$$\boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

conduction

Eq Maxwell - Ampère.

Les formes intégrales de l'équation de M-A

$$\iint \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \underset{\text{stockes}}{\oint} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot d\vec{s} + \mu_0 \epsilon_0 \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

$$\boxed{\iint \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{s} = [I + I_d] N_0}$$

1.2^e. Linéarité des équations

La linéarité des équations de Maxwell est fondamentale. Elle permet d'affirmer que si une distribution de charge du courant (ρ_1, \vec{j}_1) produit un champ (\vec{E}_1, \vec{B}_1) et une autre (ρ_2, \vec{j}_2) crée le champ (\vec{E}_2, \vec{B}_2). Alors :

$$(\lambda\rho_1 + \mu\vec{j}_1, \lambda\rho_2 + \mu\vec{j}_2) \text{ produit } (\lambda\vec{E}_1 + \vec{E}_2, \lambda\vec{B}_1 + \mu\vec{B}_2)$$

1.3^e. Couplage entre les champs \vec{E}, \vec{B}

Les équations de M-A et M-F montrent que les champs \vec{E} et \vec{B} sont couplés. On a donc à un individu physique le champ électromagnétique et qui contient deux composantes

$$\vec{E} \text{ et } \vec{B}$$

2^e. Des potentiels électromagnétiques

2.1^e. Existence du potentiel associé au champ

A partir de $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ puisque $(\operatorname{div}(\vec{\operatorname{rot}} + \vec{A})) = 0$

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{\operatorname{rot}} + \vec{A}$$

$$E = -\vec{\operatorname{grad}} V$$

et à partir de l'équation de M-F : $\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\operatorname{rot}} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$

$$\Rightarrow \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\vec{\operatorname{rot}} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{\operatorname{rot}} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

on sait que $\vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{grad}} V) = 0$

$$\boxed{\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\operatorname{grad}} V} \Rightarrow \boxed{E = -\vec{\operatorname{grad}} V - \frac{\partial A}{\partial t}}$$

Done Pour un couple (\vec{E}, \vec{B}) , on a un infinité de couple (V, \vec{A}) , possible. Ceci présente une indétermination. Cette indétermination peut être remise au profit en imposant une condition supplémentaire, cette condition appelée **choix de Jauge**

$$\boxed{\vec{E} = -g \vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \quad \begin{array}{l} V: \text{potentiel} \rightarrow \infty \\ \vec{A} \quad \Rightarrow \text{magnétique} \end{array}$$

Équation de M-G $\text{div } \vec{E} = \frac{P}{\epsilon_0}$ et $M-A \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{A}) = g \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad (a)$$

$$= \mu_0 \left[\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-g \vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \right]$$

$$= \mu_0 \left[\vec{j} - \epsilon_0 g \vec{\text{grad}} \frac{\partial V}{\partial t} - \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right] \quad (b)$$

$$a=b \Rightarrow \Delta \vec{A} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = g \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{A}) + \mu_0 \epsilon_0 g \vec{\text{grad}} \frac{\partial V}{\partial t} - \vec{j} \mu_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} + g \vec{\text{grad}} \left(\text{div} \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right)}$$

on impose la condition de Jauge Lorenz suivante

$$\boxed{\text{div} \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0}$$

et on aura $\boxed{\Delta \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}} \quad ①$

$$\boxed{\Delta V - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{P}{\epsilon_0}} \quad ②$$

① et ② sont les équations de Poisson de l'électromagnétisme
Pour le cas du régime variable

$$(2) \Rightarrow -\nabla^2 \vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \mu \vec{j}$$

on note $\boxed{\square \equiv \Delta - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}}$

avec $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

on obtient donc :

$$\boxed{\square \vec{A} = -\mu \vec{j}}$$

c : célérité

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

Dans le vide les équations ① et ② devenant

$$\boxed{\begin{aligned} \square \vec{A} &= 0 \\ \square V &= 0 \end{aligned}}$$

$$\vec{j} = 0 \text{ et } \rho = 0$$

pas de charge électrique
ni de densité de courant.

de laplacien en statique est remplacé
le d'atamberrien en régime variable

\square : opérateur d'atamberrien.

3°) Propagation des ondes électromagnétisme dans le vide (onde plane)

Dans cette section, on va étudier le phénomène de propagation des OEN dans le vide (μ_0, ϵ_0) et en l'absence de toute charge et de tout courant. Elles sont caractérisées par l'invariance de leur vitesse de propagation c par changement référentiel galilien et en l'absence de support matériel de cette propagation

3.1 - Équation de propagation du champ et potentiel

* Détermination de l'équation de propagation de \vec{E}

On a :
$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{P}{\epsilon_0} & \textcircled{1} \quad (\text{H-G}) \\ \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \textcircled{2} \quad (\text{H-F}) \end{cases}$$

Dans le vide :

$$\textcircled{1} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (*)$$

on applique le rotationnel à l'équation (*) on obtient :

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\operatorname{rot}} \vec{B})$$

$$\Rightarrow \vec{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad | \quad \square \vec{E} = 0}$$

* Détermination de l'équation de propagation de \vec{B} .

On a :
$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 & \textcircled{1} \\ \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \textcircled{2} \end{cases}$$

Dans le vide :

$$\textcircled{1} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (***)$$

on applique le rotationnel à l'équation (***) on obtient

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\operatorname{rot}} \vec{E}) = \vec{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{B} - \Delta \vec{B}$$

$$\Rightarrow -\Delta \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}}$$

En Résumé on a les équation de propagation de \vec{E} et \vec{B}

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0 & \square \vec{E} &= \vec{0} \\ \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= 0 & \square \vec{B} &= \vec{0} \end{aligned}}$$

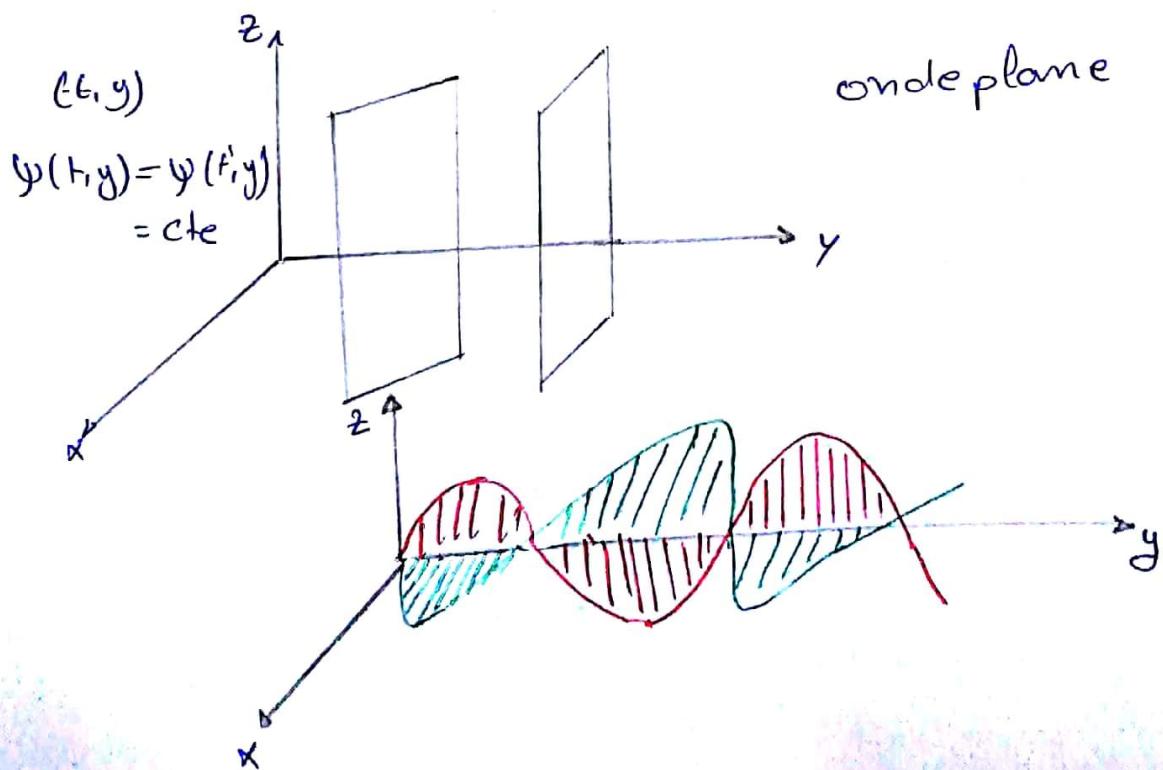
$$\boxed{\begin{aligned} \nabla V &= 0 \\ \nabla \vec{A} &= 0 \end{aligned}}$$



avec $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$

la constante c est homogène à une vitesse, elle représente la vitesse de propagation du OEN dans le vide sa valeur à été choisit exacte en 1983 elle vaut $c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$

4) Solution de l'équation de propagation (onde-plane)



4.1 - Ondes planes, définition équation d'onde et solution
 L'onde est dite plane lorsque sa propagation se fixe à une direction bien privilégiée ou aussi lorsque sa fonction d'onde ne dépend que d'une seule variable de l'espace par exemple si on prend cette direction Oy , l'équation d'onde suivante :

$$\frac{\partial^2 \psi(y, t)}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

$$\vec{\psi} \equiv (\vec{B}, \vec{E}, v, \vec{A})$$

La solution de cette équation est donnée par :

$$\boxed{\psi(y, t, c) = F(t + \frac{y}{c}) + G(t - \frac{y}{c})}$$

- $F(t + \frac{y}{c})$: la fonction d'onde qui se propage dans le sens inverse de (Oy) donc il progresse dans le sens des y négatives.
- $G(t - \frac{y}{c})$: la fonction d'onde qui se propage dans le sens de (Oy) donc il progresse dans le sens des y positives.

1-2 Transversalité d'une onde EM plane

d'après l'équation de M-G $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_y}{\partial t} = 0$ par conséquent $E_y = 0$, de même $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ conduit à $B_y = 0$ (constants qu'on prend null).

\Rightarrow le champ de OEM d'une onde plane dans le vide est

transverse

\Rightarrow c.à.d que le champ \vec{E} et \vec{B} sont orthogonaux à la direction de propagation et donc contenue dans le même plan d'onde.

\Rightarrow l'onde est dite transverse électrique et magnétique (TEM)

5° Aspect énergétique de l'OEM :

5.1 - Densité d'énergie

$$U_{em} = U_{elec} + U_m = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2 \mu_0} B^2$$

En tenant compte du fait que (Voir TD)

$$\|\vec{E}\| = c \cdot \|\vec{B}\| \text{ et } \mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$$

on aura :

$$U_{em} = \epsilon_0 E^2$$

5.2 Vecteur de poynting

Le vecteur de poynting est défini par la relation suivante

$$\vec{P} = \frac{\text{Re}(\vec{E}) \wedge \text{Re}(\vec{B}^*)}{\mu_0}$$

Pour une onde E-N plane progressive . On montre que : (TD)

$$\vec{P} = C \epsilon_0 E^2 \vec{e}_y = U_{emi} c \vec{e}_y$$

Le vecteur de poynting représente la densité d'énergie transporté par l'onde est colinéaire avec la direction de propagation de l'onde.

6° onde plane monochromatique (harmonique)

6.1 Propriété de l'onde

Soit une onde monochromatique ψ qui se propage dans la direction des y croissants alors il aura pour expression

$$\psi = \psi_m \cos\left(\omega t - \frac{ky}{c} \pm \varphi_0\right) = \psi_m \cos(\omega t - ky - \varphi_0)$$

$\vec{k} = \frac{\omega}{c}$: c'est le vecteur d'onde (Nombre d'onde)

ω : Pulsation (fréquence angulaire) = $2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda}$

φ_0 : la phase à l'origine du temps et de l'espace

A_m : amplitude maximale.

on introduit généralement la période spatiale où longue
d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ et la période temporelle $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$

Correction Série N° 3

Exo 1

1/ des équations de Maxwell

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E} \\ \vec{B} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \bullet \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\rho_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \text{Green M-G} \\ \bullet \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \iint_S \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{Stokes M-Far} \\ \bullet \operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \iiint_V \operatorname{div} \vec{B} \cdot dV = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{M. Flux} \\ \bullet \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \iint_S \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \\ \Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 [I_d + I_{\text{cond}}] \end{array}$$

Dans le vide : (on s'éloigne de la source).

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \bullet \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \bullet \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \bullet \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right\} \text{Valable dans le Vide}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \textcircled{1} \\ \bullet \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \textcircled{2} \\ \bullet \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \textcircled{3} \\ \bullet \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \textcircled{4} \end{array} \right\} \text{Dans le cas Général.}$$

2^e/ Preuve de la conservation de la charge utilisant Maxwell

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0}$$

on applique l'opérateur l'opérateur $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A}) = \operatorname{div} \vec{\operatorname{rot}} \vec{B}$

on obtient :

$$\mu_0 \operatorname{div} \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{E}) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} + \epsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{\epsilon_0} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial t} = 0} \quad \Delta$$

Exo 2:

1^e/ Calculer $\operatorname{grad} (e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - wt)})$

$$\begin{cases} \vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z \\ \vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r} = k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z$$

$$* \operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - wt)} = j e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - wt)} (k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{grad} e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - wt)} = j e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - wt)} \vec{k}} \quad \vec{k} \text{ vecteur d'onde}$$

2^e/ calcule $\operatorname{div} \vec{\Psi}$ avec $\operatorname{div} f \vec{x} = f \operatorname{div} \vec{x} + \vec{x} \operatorname{grad} f$

$$\operatorname{div} \vec{\Psi} = \operatorname{div} \left(\Psi_0 e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - wt)} \right) = e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - wt)} \left(\operatorname{div} \vec{\Psi}_0 + \vec{\Psi}_0 \operatorname{grad} (e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - wt)}) \right)$$
$$= \vec{\Psi}_0 j \vec{k} e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - wt)} = j \vec{k} \vec{\Psi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div}(\underline{\psi}) = j \vec{k} \cdot \underline{\psi}}$$

En déduire que $\vec{B} \perp \vec{k}$

- si $\underline{\psi} \equiv \vec{B} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{B} = j \vec{k} \cdot \vec{B}$

or M-F $\Rightarrow \operatorname{div} \vec{B} = 0$

Donc $j \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{B} \perp \vec{k}}$

- si $\underline{\psi} \equiv \vec{E} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = j \vec{k} \cdot \vec{E}$

or M-G $\Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = 0$ (dans le vide)

$$\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{k} \perp \vec{E}}$$

3°) constante $\vec{\operatorname{rot}} \underline{\psi}$

$$\vec{\operatorname{rot}}(f \cdot \vec{x}) = f \vec{\operatorname{rot}} \vec{x} + \vec{\operatorname{grad}} f \wedge \vec{x}$$

$$\vec{\operatorname{rot}} \underline{\psi} = \vec{\operatorname{rot}} [\underline{\psi}_0 e^{j(kr - wt)}]$$

$$= e^{j(kr - wt)} \vec{\operatorname{rot}} \underline{\psi}_0 + \vec{\operatorname{grad}}(e^{j(kr - wt)}) \wedge \underline{\psi}_0$$

$$= j e^{j(kr - wt)} \vec{k} \wedge \underline{\psi}_0$$

$$\boxed{\vec{\operatorname{rot}} \underline{\psi} = j \vec{k} \wedge \underline{\psi}}$$

En déduire : $\vec{\omega} \times \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

on a : $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{-j(wt - kr)}$ (*)

et : $\left\{ \begin{array}{l} \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \textcircled{1}$

(*) $\Rightarrow -j\omega \vec{B} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = -j \vec{k} \wedge \vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{j \vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}}$

$$* \quad \vec{E} = \frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B}$$

si $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{-j(\omega t + kr)}$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = j \vec{k} \wedge \vec{B} \Rightarrow \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j \vec{k} \wedge \vec{B} = \vec{r} \vec{\omega} + \vec{B}$$

$$\text{et} \vec{\text{rot}} \vec{E} = j \vec{k} \wedge \vec{B}$$

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} j \omega \underline{\vec{E}} \quad \textcircled{1}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{c^2} j \omega \underline{\vec{E}} = j \vec{k} \wedge \vec{B}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{E}} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{k} \wedge \vec{B}$$

4- si $k = \frac{\omega}{c}$ relation de dispersion; $\|\vec{B}\| = \frac{k}{\omega} \cdot E = \frac{E}{c}$

$$\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c} \Rightarrow \|\vec{E}\| = c \|\vec{B}\|$$

• on a: $\text{div} \vec{y} = j \vec{k} \cdot \vec{y} \approx 0 \Leftrightarrow$

$$\text{si } \vec{y} = \vec{E} \Rightarrow \text{div} \vec{E} = j \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}$$

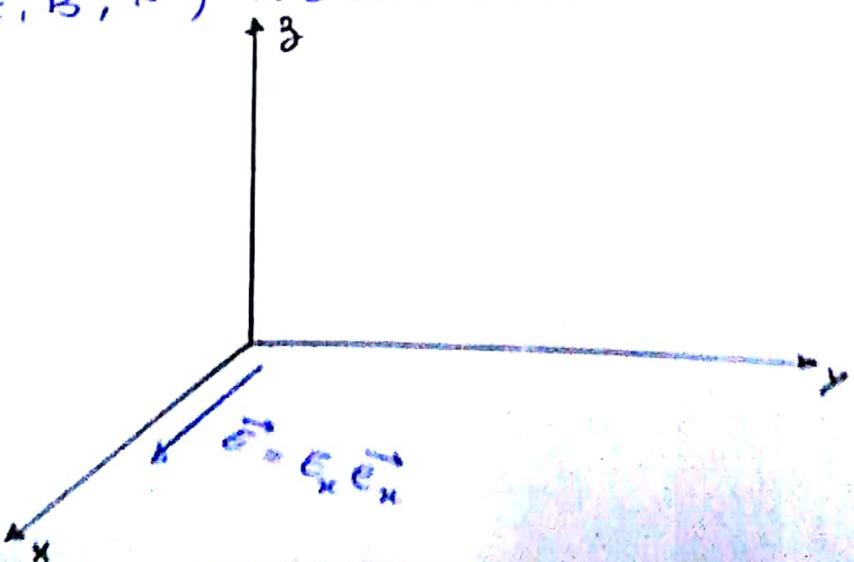
$$\text{si } \vec{y} = \vec{B} \Rightarrow \text{div} \vec{B} = j \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{B}$$

et puisque $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

$$\Rightarrow (\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}) \text{ triadre direct}$$

Exo 3:

$$\vec{k} = k \vec{e}_y$$



$$1) \vec{OM} = \vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

Ecrire l'annotation réel du vecteur onde \vec{E}

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{e}_x$$

$$\vec{OM} = \vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \text{ car } \vec{k} \text{ porté par } \vec{e}_y$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on a : $\boxed{\vec{k} \cdot \vec{r} = k_y}$

2) Utilisant les E.M dans le vide, établir l'équation de propagation du \vec{E} .

on a les équations de Maxwell dans le vide :

$$\begin{aligned} \cdot \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & M.G. & \textcircled{1} \\ \cdot \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & M.\text{Flux} & \textcircled{2} \\ \cdot \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & M.F. & \textcircled{3} \\ \cdot \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & M.A. & \textcircled{4} \end{aligned}$$

Forme différentiel.

$$\textcircled{2} \Rightarrow \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{on introduit l'opérateur } \vec{\operatorname{rot}}$$

$$\Rightarrow \vec{\operatorname{rot}} \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = \vec{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = \vec{\operatorname{rot}} \left(- \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\operatorname{rot}} \vec{B})$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0} \quad \boxed{\square \vec{E} = 0}$$

$$\boxed{\square \vec{A} = \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}}$$

• on introduit $\vec{\text{rot}}$ à l'équation ④

$$\Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{\text{grad}} \overset{1}{\vec{\text{div}}} \vec{B} - \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{E})$$

$$\Rightarrow -\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{-\Delta \vec{B} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0} \quad \boxed{\square \vec{B} = 0}$$

En déduire l'équation de dispersion.

$$\text{On a : } \frac{\partial E_x}{\partial y} = \epsilon_0 k \sin(\omega t - ky)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = -\epsilon_0 k^2 \cos(\omega t - ky)$$

$$\bullet \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\epsilon_0 \omega \sin(\omega t - ky)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -\epsilon_0 \omega^2 \cos(\omega t - ky) =$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -\epsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} \cos(\omega t - ky)$$

D'après l'équation de dispersion on obtient

$$-\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}_x}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \epsilon_0 k^2 \cos(\omega t - ky) + \epsilon_0 \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \cos(\omega t - ky) = 0 \\ \Rightarrow k^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{k = \pm \frac{\omega}{c}}$$

3°) Expression de \vec{B} .

$$\vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \overset{0}{\cancel{e}_x} + \overset{0}{\cancel{\frac{\partial E_x}{\partial z}}} \vec{e}_y + \overset{0}{\cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}}} \vec{e}_z = -\frac{\partial E_x}{\partial y} \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial B_x}{\partial t} \vec{e}_x - \frac{\partial B_y}{\partial t} \vec{e}_y - \frac{\partial B_z}{\partial t} \vec{e}_z = \frac{\partial E_x}{\partial y} \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow +\frac{\partial B_z}{\partial t} \vec{e}_z = \frac{\partial E_x}{\partial y} \vec{e}_z$$

or on a : $E_x = E_0 \cos(\omega t - ky)$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial y} = E_0 k \sin(\omega t - ky) \vec{e}_y = \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\Rightarrow B_z = \int E_0 k \sin(\omega t - ky)$$

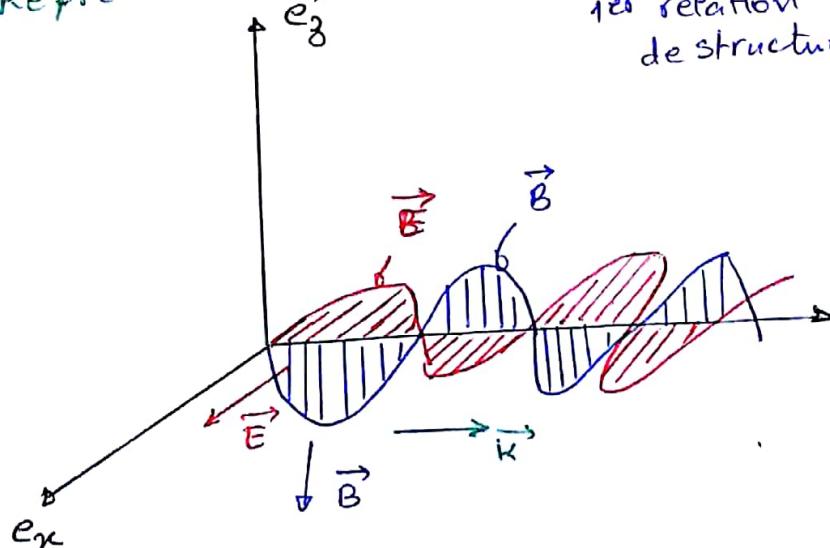
$$\Rightarrow B_z = -\frac{E_0 k}{\omega} \cos(\omega t - ky) + cte$$

avec $cte = 0$ car on a absence du champ statique

$$\Rightarrow \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -B_0 \cos(\omega t - ky) \end{pmatrix} \quad \text{avec } B_0 = +\frac{E_0 k}{\omega} \quad (\vec{B} = \vec{k} \wedge \vec{E})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{E_0}{c^2} \cos(\omega t - ky) \end{pmatrix}$$

2^e/ Représente $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$.



1^{er} relation de structure : $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

QEM: longitudinal ou transversal:

- onde longitudinal: la déformation se fait dans le même direction de propagation (ressort)
- onde transversal " se fait \perp à la direction de propagation (courde).
- onde mixte des deux à la fois.

Dans notre cas, c'est une onde transversale car ces composante (\vec{E} et \vec{B}) sont \perp à la direction de propagation.

5°) Calculer la densité d'énergie électromagnétique

$$\text{On a} \quad \cdot E_{\text{elec}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

$$\cdot E_m = \frac{1}{2 \mu_0} B^2$$

$$\Rightarrow U_T = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(wt - ky) + \frac{1}{\mu_0} B_0^2 \cos^2(wt - ky) \right)$$

$$\boxed{B_0 = \frac{\epsilon_0}{c}}$$

$$U_T = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(wt - ky) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(wt - ky)$$

$$\begin{aligned} \text{Alors: } U_T &= \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(wt - ky) \left(\epsilon_0 + \frac{1}{\mu_0 c^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0^2 \cos^2(wt - ky) \left(\epsilon_0 + \frac{1}{\mu_0 c^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0^2 \cos^2(wt - ky) \left(\frac{\mu_0 \epsilon_0 c^2 + 1}{\mu_0 c^2} \right) \\ &= \epsilon_0^2 \cos^2(wt - ky) \cdot \frac{1}{\mu_0 c^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{U_T = \epsilon_0^2 \cos^2(wt - ky) \epsilon_0}$$

la valeur moyenne $\langle u \rangle = \langle E_0^2 \cos^2(\omega t - ky) \epsilon_0 \rangle$

Par définition de $\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$

$$\rightarrow \langle \cos t \rangle = 0$$

$$\rightarrow \langle \sin t \rangle = 0$$

Rappelle

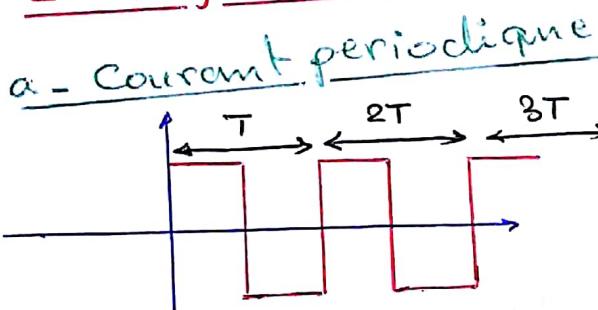
$$\langle u \rangle = E_0^2 \epsilon_0 \langle \cos^2(\omega t - ky) \rangle$$

Chapitre IV : Circuits en courant alternatif (RLC)

Objectif: Résolution des circuits alimentés par des tensions sinusoidales dans le cadre de l'AR QF (approximation des régimes quasi permanents).

⇒ toutes les lois déjà établies en régime continu restent valables à savoir : la loi de Kirchoff (Nœuds, Mailles), loi des théorèmes généraux (Thévenin, Norton, ...), Diviseur de courant et de Thévenin.

I - Définitions



$$f(t) = g(t + nT), n \in \mathbb{N}$$

période $T = \frac{1}{N}$ fréquence

b - Courant alternatif

courant périodique tel que $i(t) = g(t) = -g(t + \frac{T}{2})$

c - Courant alternatif sinusoïdal

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$

Amplitude maximale pulsation la phase à l'origine

$$\omega = 2\pi f$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

on peut définir d'autre grandeur sinusoïdales :

$$e = E_m \cos(\omega t + \phi): \text{force électromotrice sinusoïdale}$$

$$U = U_m \cos(\omega t + \phi): \text{ddp sinusoïdale.}$$

$$B = B_m \cos(\omega t + \phi): \text{c.m sinusoïdale.}$$

* La fréquence : $f = 50 \text{ Hz}$ au maroc.

d - la valeur moyenne

$$\langle i(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt.$$

e - la valeur moyenne quadratique

$$\langle i^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt$$

Si $i(t)$ sinusoïdal :

$$\langle i^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_m \cos(\omega t + \phi) dt$$

$$\Rightarrow \langle i^2 \rangle = \frac{I_m^2}{2}$$

de cette relation on tire une nouvelle valeur : valeur efficace :

$$i_{\text{eff}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

f - Intensité et ddp efficaces

* La valeur efficace d'un courant alternatif est la valeur du courant continue qui a le même effet que le courant alternatif.

* L'intensité efficace d'un courant sinusoïdal est relié à son amplitude par : $I_{\text{eff}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

idem pour la ddp : $U_{\text{eff}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$

Exemple : un courant continue égale à 9 A à la m² effet qu'un courant sinusoïdal de valeur max $I_m = 9\sqrt{2} \text{ A}$

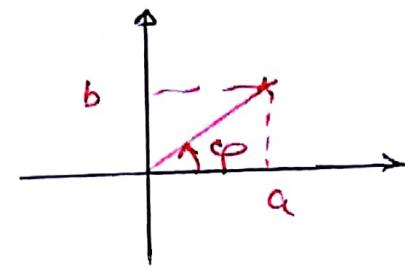
Rq : les valeurs indiquées par les appareils de mesure de type Voltmètre ou ampèremètre sont toujours des valeurs efficaces.

II - Notation complexe.

Soit un nombre complexe $\underline{z} = a + jb \Rightarrow |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$
 et $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \Rightarrow \varphi = \arctg \left(\frac{b}{a} \right)$

φ : argument de \underline{z}

$|\underline{z}|$: le module de \underline{z}



exemples $e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j$

* Si $\varphi = 0 \Rightarrow \underline{z}$ est réel pur

$$\underline{z} = |\underline{z}| e^{j\varphi}$$

* Si $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \underline{z}$ est imaginaire pure.

$$\underline{z} = j \quad j^2 = -1$$

* Si φ : $\underline{z} = a + jb \Rightarrow \bar{\underline{z}} = a - jb$ tq $a, b \in \mathbb{R}$

le conjugué de \underline{z} avec :

$$\underline{z} \cdot \bar{\underline{z}} = a^2 + b^2 = |\underline{z}|^2$$

• Produit: $\underline{z}_1 = a + jb = |\underline{z}_1| e^{j\theta_1}$

$$\underline{z}_2 = a' + jb' = |\underline{z}_2| e^{j\theta_2}$$

$$\Rightarrow \underline{z} = \underline{z}_1 \times \underline{z}_2 = |\underline{z}_1| \cdot |\underline{z}_2| e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

• Quotient: $\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \left| \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} \right| e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

Représentation des grandeurs physiques.

$$U(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) = \sqrt{2} U_{\text{eff}} \cos(\omega t + \varphi_u)$$

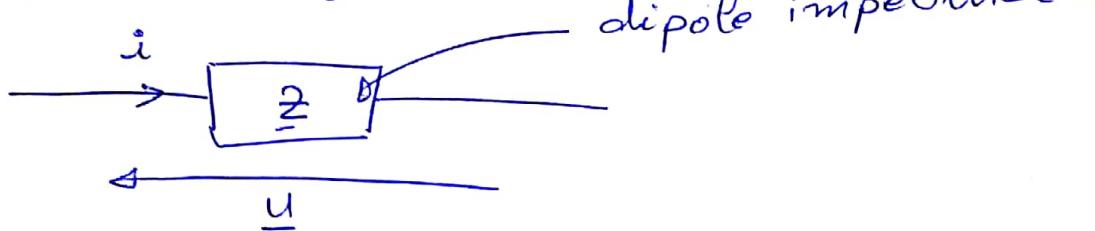
$$\underline{U}(t) = U_m e^{j\varphi_u} e^{j\omega t} = \underline{U} e^{j\omega t}$$

$$U = U_m e^{j\varphi_u}$$

$$\boxed{U(t) = U e^{j\omega t}} \quad \text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

III - loi d'ohme et Impédance complexe

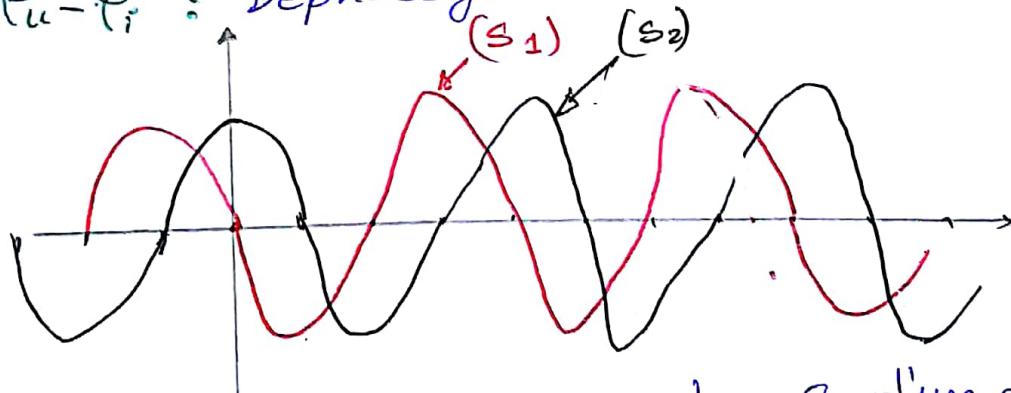
d'une manière général :



$$Z = |Z| e^{j\omega t}$$

$$U = Z \cdot I \Rightarrow Z = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

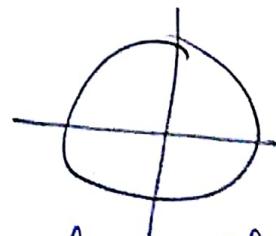
$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$: Déphasage entre tension courant.



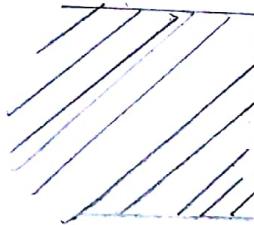
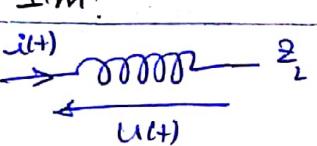
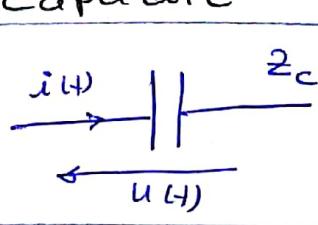
S_1 est en avance par rapport à S_2 d'un déphasage

$$\Delta \varphi = \frac{t}{T} 360^\circ = \frac{t}{T} 2\pi$$

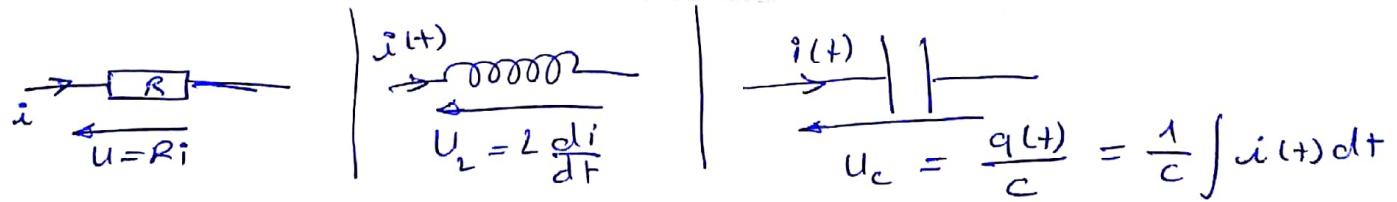
$$\begin{aligned} T &\rightarrow 2\pi \\ t &\rightarrow \Delta \varphi \end{aligned} \Rightarrow \Delta \varphi = \frac{t}{T} 2\pi$$



$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$: est le déphasage provoqué par le dipôle entre la tension aux bornes de dipôle et le courant que le traverse en [rad] ce qui donne les dipôles R, L, C

	Résistance	Inductance	Capacité
			
Impédance	$Z_R = R$	$Z_L = L \omega$	$Z_C = \frac{1}{C \omega}$
Déphasage	$\varphi_R = 0$	$\varphi_L = \frac{\pi}{2}$	$\varphi_C = -\frac{\pi}{2}$
Impédance complexe	$Z_R = R$	$Z_L = jL\omega$	$Z_C = \frac{-j}{C\omega} = \frac{1}{jC\omega}$
Admittance complexe	$Y_R = \frac{1}{R}$	$Y_L = \frac{j}{L\omega}$	$Y_C = jC\omega$

l'admittance est l'inverse de l'impédance Z



a) Association des dipôles

* En Série

$$i(t) \rightarrow [Z_1] \rightarrow [Z_2] \rightarrow [Z_3] \equiv i(t) \rightarrow [Z_{eq}]$$

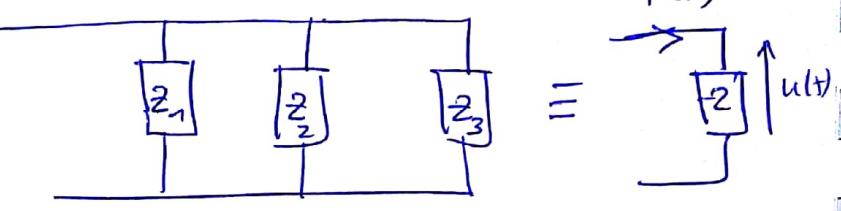
$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + Z_3$$

$$U(t) = Z_{eq} \cdot i(t)$$

$$\text{En général : } Z_{eq} = \sum_{i=1}^n Z_i$$

En parallèle

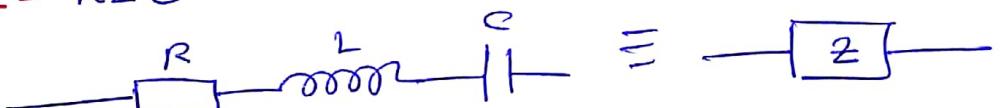
$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}$$



En générale :

$$\frac{1}{Z} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Z_i}$$

Exemple 1 RLC en série

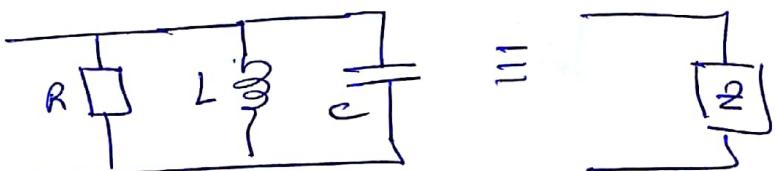


$$Z_{eq} = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega}) \Rightarrow |Z| = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$$

Rq c'est une impédance pure lorsque :

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow [L\omega^2 = 1] \text{ résonnance}$$

Exemple 2 : RLC parallèle



$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} \Rightarrow Y_{eq} = Y_R + Y_C + Y_L$$

$$Y = \frac{1}{R} + j(C\omega - \frac{1}{L\omega})$$

$$|Y| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$$

$$\Rightarrow |Z| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}$$

Impédance
Équivalence

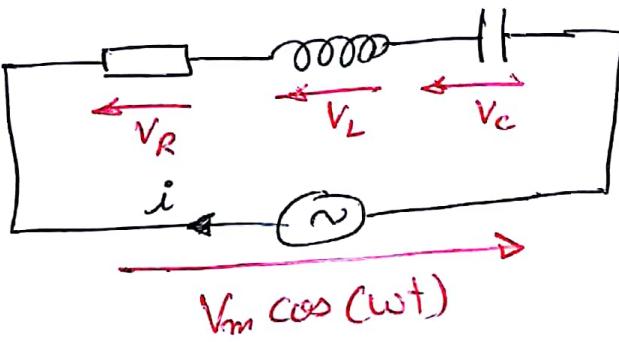
b) Position du problème

Soit un circuit RLC alimenté par une ddp sinusoïdale

$$v(t) = V_m \cos(\omega t)$$

\Rightarrow il faut déterminer $i(t)$ et φ_i en régime permanent (régime forcé). On doit résoudre équation différentiel

$$\boxed{L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_m \cos(\omega t)}$$



$$V_R + V_L + V_C = V_m \cos(\omega t)$$

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = V_m \cos(\omega t)$$

$$R \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = V_m \cos(\omega t)$$

on cherche: $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$

1^e Méthode algébrique

$$\begin{aligned} V_m \cos(\omega t) &= R I_m (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) \\ &\quad - I_m L \omega (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) \\ &\quad + \frac{I_m}{C \omega} (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_m \left[R \cos \varphi - L \omega \sin \varphi + \frac{1}{C \omega} \sin \varphi \right] = V_m \\ I_m \left[R \sin \varphi - L \omega \cos \varphi + \frac{1}{C \omega} \cos \varphi \right] = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_m \left[R \cos \varphi - L \omega \sin \varphi + \frac{1}{C \omega} \sin \varphi \right] = V_m \\ I_m \left[R \sin \varphi - L \omega \cos \varphi + \frac{1}{C \omega} \cos \varphi \right] = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

$$(2)^2 + (3)^2 \Rightarrow R^2 + \left(L \omega - \frac{1}{C \omega} \right)^2 = \frac{V_m^2}{I_m^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(L \omega - \frac{1}{C \omega} \right)^2}}} \quad (*)$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow R \sin \varphi = \left(\frac{1}{cw} - L\omega \right) \cos \varphi$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{cw} - L\omega \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \arctg \left(\frac{1}{R} \left(\frac{1}{cw} - L\omega \right) \right)} \quad (*)$$

Finalement

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{cw} \right)^2}} \cos \left(\omega t + \arctg \left(\frac{1}{R} \left(\frac{1}{cw} - L\omega \right) \right) \right)$$

2^e Méthode de Fresnel

$$\varphi(t) = R i(t) + \frac{q}{c} + L \frac{di}{dt} = R i(t) + \frac{1}{c} \int i(t) dt + L \frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \int i(t) dt &= \frac{1}{c} \int I_m \cos(\omega t + \phi) dt \\ &= \frac{I_m}{cw} \sin(\omega t + \phi) = \frac{I_m}{cw} \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

$$L \frac{di}{dt} = -L I_m \omega \sin(\omega t + \phi) = L I_m \omega \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin \alpha \\ \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin \alpha \end{cases}$$

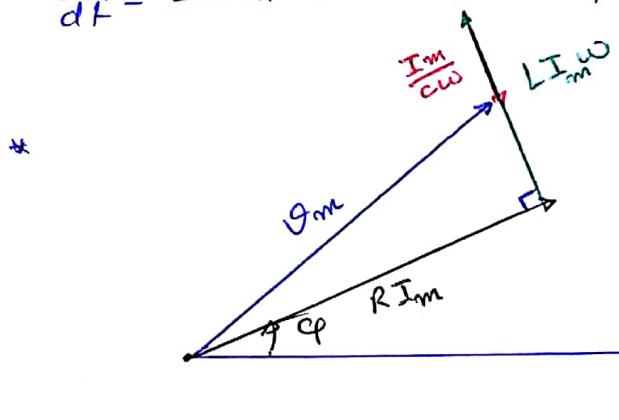


$$\text{Alors: } v(t) = V_m \cos \omega t \rightarrow \begin{cases} V_m \\ 0 \end{cases}$$

$$R i(t) = I_m R \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \begin{cases} I_m R \\ \varphi \end{cases}$$

$$\frac{1}{c} \int i(t) dt = \frac{I_m}{cw} \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) \rightarrow \begin{cases} I_m / cw \\ \varphi - \pi/2 \end{cases}$$

$$\frac{dI}{dt} = L I_m \omega \cos(\omega t + \varphi + \pi/2) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L I_m \omega \\ \varphi + \pi/2 \end{array} \right.$$

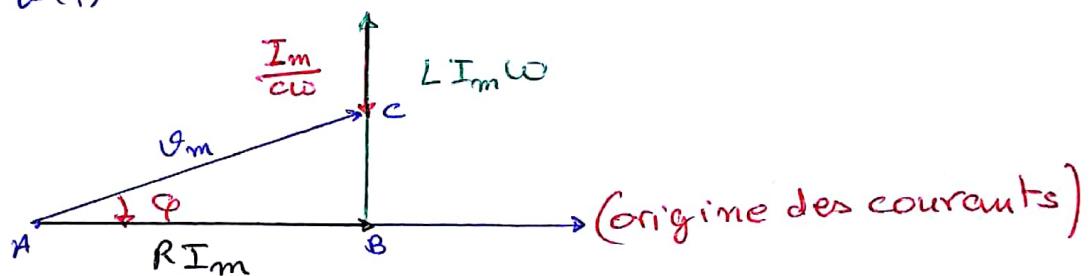


$$V_{\text{left}} = V_m \cos(\omega t)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

(origine des phases)

Si $i(t) = I_m \cos \omega t$
 $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$



on a : $V_m^2 = R^2 I_m^2 + \left(L I_m \omega - \frac{I_m}{c \omega} \right)^2$

$$\Rightarrow I_m^2 \left[R^2 + \left(L \omega - \frac{1}{c \omega} \right) \right] = V_m^2$$

$$\Rightarrow I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(L \omega - \frac{1}{c \omega} \right)}} \quad \checkmark$$

$\tan \varphi = - \frac{\left(L I_m \omega - \frac{I_m}{c \omega} \right)}{R I_m} = \frac{\frac{1}{c \omega} - L \omega}{R}$

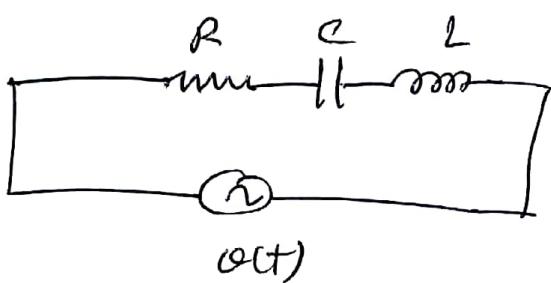
Donc : $\varphi = \arctan \left(\frac{\frac{1}{c \omega} - L \omega}{R} \right)$ ✓

l'expression du courant donc :

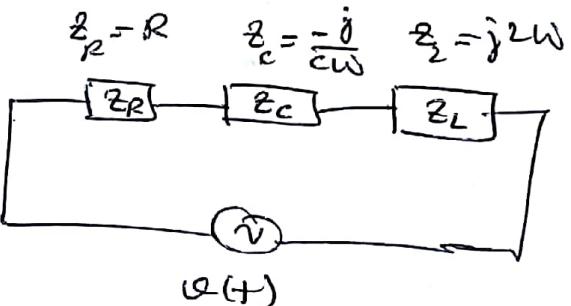
$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(L \omega - \frac{1}{c \omega} \right)}} \cos \left[\omega t + \arctan \left(\frac{\frac{1}{c \omega} - L \omega}{R} \right) \right]$$

Rq: la méthode de Fresnel est une méthode simple mais, très difficile à utiliser dans les circuit complexe.

3^e Méthode des Complexes



=



$$Z = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega}) \text{ et } \begin{cases} V(t) = V_m e^{j\varphi_u} \\ i(t) = I_m e^{j\varphi_i} \end{cases}$$

Loi d'Ohm

$$\underline{V} = \underline{Z} \underline{I}$$

$$\Rightarrow \underline{I} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}}$$

$$\bullet \quad I_m = |\underline{I}| = \frac{|V|}{|Z|} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

$$\boxed{I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}}$$

$$\bullet \quad \varphi_i = \operatorname{Arg}(\underline{I}) = \operatorname{Arg}(\underline{V}) - \operatorname{Arg}(\underline{Z})$$

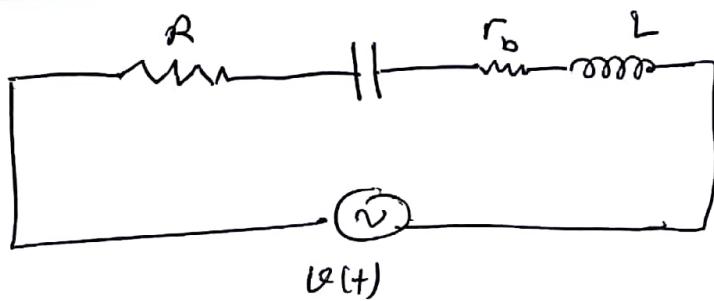
$$\Rightarrow \varphi_i = 0 - \operatorname{arctg} \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \right)$$

$$\Rightarrow \varphi_i = -\operatorname{arctg} \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \right)$$

$$\boxed{i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} \cos(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R})}$$

Correction Série N° 4

Exe 1 g



1 - Equation diff du $U(t)$

da loi des mailles :

$$U(t) = (R + r_b) i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt + L \frac{di}{dt}$$

Soit $i(t) = I_m \cos(\omega t)$

$$\Rightarrow (R + r_b) i(t) = (R + r_b) I_m \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{I_m}{C\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow L \frac{di}{dt} = L I_m \omega \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Done :

$$U(t) = I_m \left[(R + r_b) \cos \omega t + \frac{1}{C\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) + L \omega \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \right]$$

avec $\omega = 2\pi f$

2 - $f = 318$, calculer

a) $|Z| = \sqrt{(R + r_b)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \Rightarrow A \cdot n : |Z| = 923 \Omega$

b) On a : $V = I \times Z \Rightarrow I = \frac{V}{Z}$

¶ $I_{eff} = \frac{V_{eff}}{|Z|} = \frac{10}{923} = 10,82 mA$

$$c) \quad P = (R + r_b) I^2$$

$$\Rightarrow A.N. \quad P = 2,33 \cdot 10^{-2} W$$

$$d) \quad \varphi = \arctg \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C}\omega}{R + r_b} \right)$$

$$\Rightarrow \varphi = -1,35 \text{ rad}$$

Puisque $\varphi < 0$ donc le courant est en avance par rapport à la tension.

Exercice 8



on a :

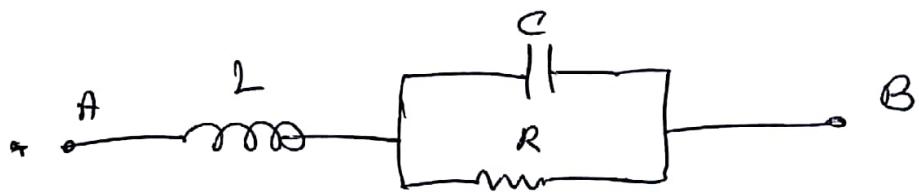
$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + jC\omega - \frac{j}{L\omega} \Rightarrow \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + j(C\omega - \frac{1}{L\omega})$$

$$\Rightarrow Z = \frac{1}{\frac{1}{R} + j(C\omega - \frac{1}{L\omega})}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{\frac{1}{R} - j(C\omega - \frac{1}{L\omega})}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$$

$$\text{Donc : } Z = \frac{1}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$$

$$\text{Arg } Z =$$



$$Z_L + (Z_C \parallel Z_R)$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_L + \frac{\underline{Z}_C \times \underline{Z}_R}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} = jL\omega + \frac{-j\frac{R}{C\omega}}{R - \frac{j}{C\omega}}$$

$$\Rightarrow \underline{Z} = jL\omega + \frac{-jR}{RC\omega - j}$$

$$\Rightarrow \underline{Z} = jL\omega - \frac{jR(RC\omega + j)}{R^2C^2\omega^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \underline{Z} = jL\omega - \frac{-R + jR^2C\omega}{R^2C^2\omega^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \underline{Z} = jL\omega + \frac{R + jR^2C\omega}{R^2C^2\omega^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \underline{Z} = \frac{R}{R^2C^2\omega^2 + 1} + j\left(L\omega - \frac{R^2C\omega}{R^2C^2\omega^2 + 1}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{Z} = \frac{R}{R^2C^2\omega^2 + 1} \left[1 + j \left(LRC^2\omega^3 + \frac{L\omega}{R} - RC\omega \right) \right]}$$

$$|\underline{Z}| = Z = \frac{R}{R^2C^2\omega^2 + 1} \sqrt{1 + \left(LRC^2\omega^2 + \frac{L\omega}{R} - RC\omega \right)^2}$$

on veut remplacer les associations par deux éléments passifs en série.

Rappel :

$$Z = a + jb : \quad \text{si } b = 0 \Rightarrow Z \equiv [R]$$

$$\quad \text{si } b > 0 \Rightarrow Z \equiv [R + \text{Ind}]$$

$$\quad \text{si } b < 0 \Rightarrow Z \equiv [R + \text{Cap}]$$

1er circuit (cas supplémentaire)



$$Z = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega}) , \quad \boxed{L\omega - \frac{1}{C\omega} > 0}$$

$$L = 100 \text{ mH}$$

$$C = 200 \mu\text{F}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 50 \text{ Hz}$$

2ème cas

$$Z = \frac{\frac{1}{R^2} + j(\frac{1}{L\omega} - C\omega)}{D^2} \quad \text{or} \quad \frac{1}{L\omega} - C\omega < 0$$



$$\text{avec : } C' = C \left[\frac{1}{L\omega} - \omega \right]$$

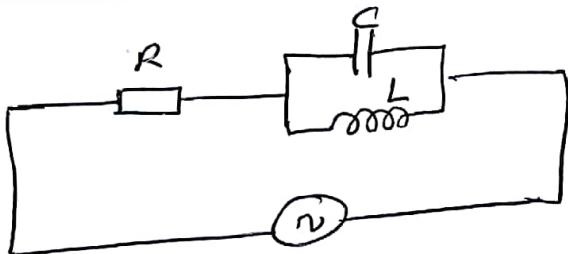
2^{em} circuit

$$\underline{Z} = \frac{1}{R^2 C^2 \omega^2 + 1} \left[R + j R \left(\frac{\omega}{R} + \frac{RC^2 \omega^3 - RC\omega}{R^2 C^2 \omega^2 + 1} \right) \right]$$

or : $\frac{\omega}{R} + \frac{RC^2 \omega^2 - RC\omega}{R^2 C^2 \omega^2 + 1} > 0$

\Rightarrow le C. Eq est ~~un~~ $R \quad L'$

Exe 3 Soit le circuit suivant :



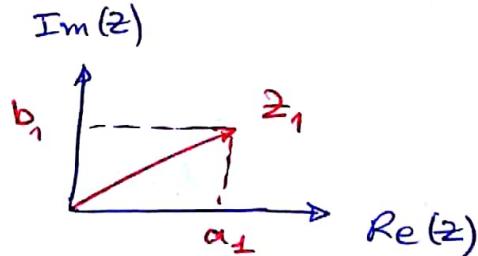
$$i(t) = \cos(\omega t) \times I_{\max}$$

1) Déterminer $v_1(t) = V_B - V_D$

$$v_1(t) = V_{\max} \cos(\omega t + \varphi)$$

Rappel

$$\begin{cases} z_1 = a_1 + j b_1 \\ z_2 = a_2 + j b_2 \end{cases}$$



$$\cdot |z_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

$$\cdot \arg(z_1) = \arctg \frac{b_1}{a_1}$$

$$\rightarrow |z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \times z_2| = \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \times \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

$$\cdot \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \\ \arg \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \arg z_1 - \arg z_2 \end{cases}$$

$$\cdot \text{ si } \text{Re}(z) = 0 \Rightarrow \varphi = \pm \pi \Rightarrow \begin{cases} \text{Im}(z) > 0 \Rightarrow \pi/2 \\ \text{Im}(z) < 0 \Rightarrow -\pi/2 \end{cases}$$

$$\underline{V}_1 = \underline{Z} \cdot \underline{I} \quad \text{avec } \underline{I} = I_m e^{j\varphi_i} = I_m$$

$$|\underline{V}_1| = |\underline{Z}| \cdot I_m$$

On a : $\underline{Z} = Z_c \parallel Z_L = \frac{Z_c \times Z_L}{Z_c + Z_L} = \frac{-\frac{j}{c\omega} \times jL\omega}{jL\omega - \frac{j}{c\omega}}$

$$\underline{Z} = \frac{\frac{L}{c}}{\frac{j(Lc\omega^2 - 1)}{c\omega}} = \frac{jL\omega}{1 - Lc\omega^2}$$

$$\cdot \varphi_2 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } 1 - Lc\omega^2 > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } 1 - Lc\omega^2 < 0 \end{cases}$$

$$\cdot |\underline{Z}| = \frac{L\omega}{|1 - Lc\omega^2|}$$

Donc : $V_1(t) = I_m \frac{L\omega}{|1 - Lc\omega^2|} \cos(\omega t + \varphi_1)$

$$\varphi_1 = \arg \underline{Z} + \arg \underline{I} = \arg \underline{Z}$$

$$\boxed{V_1(t) = I_m \frac{L\omega}{|1 - Lc\omega^2|} \cos(\omega t \pm \frac{\pi}{2})}$$

② calculer $i_L(t)$ et $i_C(t)$
on peut utiliser le diviseur de courant

$$\cdot \underline{I}_C = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L} \cdot \underline{I} \Rightarrow |I_C| = \frac{|Z_L|}{|Z_C + Z_L|} \cdot |I| = \frac{I_m L c \omega^2}{|L c \omega^2 - 1|}$$

$$\underline{Z}_L + \underline{Z}_C = jL\omega - \frac{j}{c\omega} = j\left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right)$$

$$|Z_L + Z_C| = \left| \frac{L\omega^2 C - 1}{c\omega} \right|$$

$$\varphi_{IC} = \arg\left(\frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L}\right) + \arg(\underline{I}) = 0$$

$$= \arg(\underline{Z}_C) - \arg(Z_C + Z_L)$$

$$\varphi_i = \frac{\pi}{2} - (\pm \frac{\pi}{2}) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \pi \end{array} \right.$$

$$\dot{i}_c(+)=\frac{Im LC\omega^2}{|LC\omega^2-1|} \cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{i}_c(+)=\pm \frac{Im LC\omega^2}{|LC\omega^2-1|} \cos(\omega t)}$$

$$* \underline{V}_L = \underline{Z}_L \cdot \underline{i}_2 \Rightarrow \underline{i}_2 = \frac{\underline{V}_L}{\underline{Z}_L}$$

$$\Rightarrow |\underline{i}_2| = \frac{|V_L|}{|Z_L|} = \frac{Im}{|1-LC\omega^2|}$$

$$\arg \underline{i}_L = \arg V_L - \arg Z_L$$

$$= \pm \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ -\pi \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{i}_L(+)=\pm \frac{Im}{|1-2C\omega^2|} \cos(\omega t)}$$

Rq : $\dot{i}_c(+)$ et $\dot{i}_L(+)$ sont en opposition de phase

2^{ème} Méthode

$$\underline{I}_L =$$

3) calculer le déphasage entre $i(t)$ et $v(t)$

$$\underline{V} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$

$$\arg \underline{V} = \arg \underline{Z} + \arg \underline{I} = \arg \underline{Z}$$

on a

$$\underline{Z} = R + \frac{j \omega L}{1 - j \omega C}$$

$$\Rightarrow \varphi = \arg \left(\frac{\omega L}{R - j \omega LC} \right)$$