TD 2 - Probabilité :

1

1

EX : 2.1

le nombre de chemins est le nombre de choix de $n=2$ cases par des deplacements en hauteur (H) parmi $n+m=6$ cases disponibles avec des choix distincts et non ordonnés.

On generalise facilement :

Pour se déplacer à O au point $P(m,n)$ il y a $m+n$ deplacement dont n déplacement à droite et n déplacements en haut.

Donc le nombre de chemins possibles est :
$C_{m+n}^{m} = C_{m+n}^{n}$ car les choix sont faits distincts et non ordonnés.

H	D	H	D	H	H	D	H	H	H

EX : 2.2

1) $\Omega = [\![1,6]\!]^4$

$card(\Omega) = 6^4 = 1296$

2) Carrés : $\{(a,a,a,a), a \in [\![1,6]\!]\}$

$card(\text{Carrés}) = C_6^1 = 6$

* Brelan : $\{(a,a,a,b), a \in [\![1,6]\!], b \in [\![1,6]\!], a \neq b\}$

2

- Pour ~~Pour~~ choisir d'abord a, on a 6 choix.
- Pour ~~Pour~~ choisir ~~d'abord~~ après b, on a 5 choix.

la position de b est une position parmi 4.

$\text{Nb}(\text{Brelan}) = 6 \times 5 \times 4 = \boxed{120}$ choix

* Deux paires : $\{(a, a, b, b),\ a \neq b\}$

Pour choisir d'abord a, on a 6 choix.
Pour choisir après b, on a 5 choix.

Les disposition possibles sont 3 :
(a, a, b, b), (a, b, a, b), (a, b, b, a)

$\text{Nb}(2 \text{ pairs}) : 6 \times 5 \times 3 = \boxed{90}$

* Une paire : $\{(a, a, b, c),\ a \neq b \neq c\}$

Pour choisir d'abord a : on a 6 choix
" " après b : " " 5 "
" " " c : " " 4 "

Pour une paire, on choisit $C_4^2 = 6$ position possible.

$\text{Nb}(\text{une paire}) = 6 \times 5 \times 4 \times 6 = \boxed{720}$

* Qelconque : $\{(a, b, c, d),\ 4 \text{ valeurs diffs}\}$

$\text{Nb}(\text{Qelconque}) = A_6^4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = \boxed{360}$

③ la somme des cardinaux :

$$6 + 120 + 90 + 720 + 360 = 1296$$

$\boxed{\text{EX : 2.3}}$

On a 15 volumes à positionner (sans contraintes) dans 15 positions : il s'agit du nombre de 15 elements, il y a $15! = N$ total.

On va éliminer ceux tels que les tomes I et II sont côte à côte.

$$Nb = \left\{ \begin{array}{l} V_1 V_2 \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{13 \text{ autres}} = \overset{V_1}{14} \times \overset{V_2}{1} \times 13! \\ \text{ou} \\ V_2 V_1 \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{13 \text{ autres}} = \overset{V_2}{14} \times \overset{V_1}{1} \times 13! \end{array} \right\} = 2 \times 14!$$

Si on veut que les Tome I et II ne soient pas côte à côte.

Donc il y en a : $15! - 2 \times 14! = 13 \times 14!$

$\boxed{\text{EX : 2.4}}$

① exemple :

$$\sum\nolimits^{*}{}_{s=6}^{p=3} = \{(1,1,4),(1,2,3),(1,3,2),(1,4,1),$$
$$(2,1,3),(2,2,2),(2,3,1),$$
$$(3,1,2),(3,2,1),$$
$$(4,1,1)\}$$

il y a S cases, ~~..~~ donc il y a S-1 barres séparatrices internes parmi lesquelles on choisit P-1 distinctes et non ordonnés.

Donc : $card(\overset{*}{\Sigma}{}_s^p) = C_{S-1}^{P-1}$

~~Autres cas~~

~~Au~~ Method ② :

$$\overset{*}{\Sigma}{}_s^p \xrightarrow{\varphi} \Sigma_{s'}^{p'}$$

$$(n_1, n_2, \dots, n_p) \longrightarrow (n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_p - 1)$$

$$\sum_{i=1}^{p} n_i = S \Longrightarrow \sum_{i=1}^{p} (n_i - 1) = S - p \Rightarrow S' = S - p$$

② ⓐ Soient :

n_1 le nombre de tableau reçus par l'école n°1

n_2 " " " " " " " " 2

n_3 " " " " " " " " 3

$$n_i \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{p=3} n_i = 15$$

Il s'agit donc de cardinal de $\Sigma_{s=15}^{p=3}$

D'où : $Nb = C_{15+3-1}^{3-1} = C_{17}^{2} = 136$

ⓑ Dans ce cas $n_i \in \mathbb{N}^*$; $\sum_{i=1}^{p=3} n_i = 15$

Il s'agit donc de cardinal de $\sum_{s=15}^{*\,p=3} = C_{14}^{2}$

$= \boxed{91}$

(3) (a) Il y a 4 placements.

[redacted] Soit n_i le nombre de milliers de dirhams à investir sur le placement n°i $1 \leq i \leq 4$, $n_i \in \mathbb{N}$, $\sum n_i = 20$

le nombre cherché est card$\left(\sum_{s=20}^{p=4}\right) = C_{23}^{3}$

$= 1771$

(b) Dans ce cas, on ajoute n_5 la somme investie $0 \leq n_5 \leq 20$.

On cherche ici card$\left(\sum_{s=20}^{p'=5}\right) = C_{24}^{4}$

(4) $\Omega = \{(1,1,1,1,1), (1,1,1,1,2), \ldots, (2,2,3,3,3)$

$(3,3,3,4), \ldots, (4,4,4,4)\}$

Soit n_1 le nombre de répitition du chiffre 1 suivie de

n_2 " " " " " " 2 " "

n_3 " " " " " " 3 " "

n_4 " " " " " " 4

n_i pour $1 \leq i \leq 4$; $n_i \in \mathbb{N}$; $\sum_{i=1}^{4} n_i = 5$

5 exemple $\begin{cases} r=3 \\ n=3 \end{cases}$ $\frac{\partial^3 f}{\partial^2 x_1 \partial x_3}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial^1 x_1 \partial^1 x_2 \partial^1 x_3}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial^3 x_2}$

une dérivée partielles d'ordre r s'écrira :

$$\frac{\partial^r f}{\partial^{k_1} x_1 \, \partial^{k_2} x_2 \, \partial^{k_3} x_3}$$

et on a : $0 \leq k_i \leq r \; ; 1 \leq i \leq n \; ; \sum_{i=1}^{n} k_i = r$

Il s'agit de cardinal de :

$$\text{card}\left(\sum_{s=r}^{n}\right) = C_{r+n-1}^{n-1}$$

$\boxed{\text{EX : 2.5}}$

Modèle 1 : MB :

p particules discernables à mettre dans K cellules distinctes pouvant contenir un nombre infini de particules.

la 1^{ere} particules a K choix.
2^{eme} " " K " .
3^{eme} " " K " .

On aura, via le principe de multiplication K^p

Modele 2 :

p particules identiques à mettre dans K cellules pouvant contenir une infinité de particules.

Soit n_1 le nombre de particules dans la cellule n°1

n_2 " " " " " " " " 2

n_3 " " " " " " " " 3

⋮

n_K " " " " " " " " K

$n_i \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{K} n_i = p$

Il s'agit de card $\left(\Sigma^{K}_{S=p}\right) = C^{K-1}_{p+K-1}$

Modèle 3

Les p particules sont identique, mais cette fois les cellule peut contenir au maximum une particule.

1er cas : si $p > K$, $Nb_{F-D} = 0$ (cas impossible il y a plus de p que de cellules)

2ème cas : si $p = K$, $Nb_{F-D} = 1$

3ème cas : si $p < K$, on choisit p cellules plein et K-p vides

donc $Nb_{F-D} = C^{p}_{K}$

2,6

$$\left(\sum a_i x^i\right) \cdot \left(\sum b_j x^j\right) = \sum c_k x^k$$

où $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i X^i \cdot \sum_{j=0}^{m} C_m^j X^j = \sum_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^k X^k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k = \sum_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^k X^k \quad \text{où} \quad \boxed{c_k = \sum_{i+j=k} C_n^i C_m^j}$$

2.7 **Soit** $\Omega_n = [\![1,6]\!]^n$

$A_n = \left\{ (r_1, r_2, \dots, r_n), \sum_{i=1}^{n} r_i \text{ est pair} \right\}$

$B_n = \overline{A_n} = \left\{ (r_1, r_2, \dots, r_n), \sum_{i=1}^{n} r_i \text{ est impair} \right\}$

Considerons : $\varphi : \Omega_n \longrightarrow \Omega_n$

$(r_1, \dots, r_n) \longmapsto (7 - r_1, \dots, r_n)$

$r_1 \in [\![1,6]\!] \Rightarrow 1 \leq r_1 \leq 6 \Rightarrow -6 \leq -r \leq -1$

$\Rightarrow 1 \leq 7 - r_1 \leq 6$

$\Rightarrow$ donc φ est bien definie

φ est injective :

$$\varphi(r_1, r_2, \dots, r_n) = \varphi(r'_1, r'_2, \dots, r'_n)$$

$$\Rightarrow (7-r_1, r_2, \dots, r_n) = (7-r'_1, r'_2, \dots, r'_n)$$

$$\Rightarrow r_i = r'_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

φ est injective de Ω_n dans Ω_n avec Ω_n fini donc φ est bijective.

On peut aussi remarquer que $\varphi \circ \varphi = Id_{\Omega_n}$

$$\varphi(\varphi(r_1, \dots, r_n)) = (r_1, \dots, r_n)$$

Montrons que $\varphi(A_n) = B_n$

si $(r_1, \dots, r_n) \in A_n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} r_i$ est paire.

$$\varphi(r_1, r_2, \dots, r_n) = (r'_1 = 7 - r_1, r'_2 = r_2, \dots, r'_n = r_n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} r'_i = (7 - r_1) + r_2 + r_3 + \dots + r_n$$

$$= \underbrace{\underbrace{7 - 2r_1}_{\text{impaire}} + \underbrace{r_1 + r_2 + \dots + r_n}_{\text{paire}}}_{\text{impaire}}$$

on vient de montrer que $\varphi(A_n) \subset B_n$

si $V=(r_1', r_2', \dots, r_n') \in B_n$ alors $(7-r_1', r_2', \dots, r_n') \in A_n$

$\varphi(7-r_1', r_2', \dots, r_n') = (r_1', r_2', \dots, r_n')$

d'où $B_n \subset \varphi(A_n)$

Finalement : $\varphi_{/A_n}$ est une bijection qui vérifie

$$\boxed{\varphi_{/A_n}(A_n) = B_n}$$

Donc A_n et B_n ont le même cardinal.

$\boxed{q.8}$

Indications :

* l'élément chio