3. Différentiabilité

Tous les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre, notés E et F etc, sont réels et de dimensions finies. Sous cette condition, rappelons que toutes normes d'un espace vectoriel sont équivalentes, et que les application linéaires ou bilinéaires sont continues. En pratique, nous prenons souvent $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^n$ $(p, n \in \mathbb{N}^*)$ munis de l'une de leurs normes usuelles.

3.1 Dérivées premières

Soient $f : U \to F$ une application d'un ouvert U de E dans F et $a \in U$.

3.1.1 Dérivée suivant un vecteur

Soit $v \in E \setminus \{0\}$, l'ensemble $I_{a,v} = \{t \in \mathbb{R}\,;\, a + tv \in U\}$ est voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}$.

Définition 3.1 On dit que f admet **une dérivée première en a suivant v** (ou **f est dérivable en a suivant le vecteur v**) lorsque l'application

$$\varphi_{a,v} : I_{a,v} \to F,\, t \mapsto f(a+tv) \text{ est dérivable en } 0.$$

On appelle alors **dérivée première de f en a suivant v**, notée $D_v f(a)$, le vecteur

$$\varphi'_{a,v}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_{a,v}(t) - \varphi_{a,v}(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \in F \quad \text{(si elle existe)}.$$

Remarque. *L'existence de dérivées première suivants des vecteurs en un point n'entraîne pas en général la continuité en ce point. Par exemple, l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2/x & si \quad x \neq 0, \\ f(0,y) = 0 \end{cases}$$

est dérivable en $a=(0,0)$ suivant tout vecteur $v=(u,w)$, puisque, on a

$$f((0,0)+t\,(u,w)) = \begin{cases} t\,\dfrac{w^2}{u} & \text{si } u\neq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad D_v f(a) = \begin{cases} \dfrac{w^2}{u} & \text{si } u\neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Mais, f n'est pas continue en $a=(0,0)$ puisque la suite $(1/n^2,1/n)_{n>0}$ converge vers $(0,0)$, alors que $(f(1/n^2,1/n))_{n>0}$ est constante égale à 1, ne converge pas vers $f(0,0)=0$.

Remarque. *Si on écrit $f=(f_1,f_2,\dots,f_n)$ dans une base $\mathcal{C}=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ de F, alors f admet une dérivée première en a suivant v lorsque toutes les fonctions composantes f_i admettent des dérivées premières en a suivant v, et dans ce cas, on a*

$$D_v f(a) = (D_v f_1(a),\dots,D_v f_n(a)).$$

3.1.2 Dérivées partielles

Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$ une base de E, alors

Définition 3.2 Pour tout $j\in\{1,\cdots,p\}$, on dit que f admet **une $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle première (dans la bases $\mathcal{B}$) en a**, si elle admet une dérivée première en a suivant le vecteur e_j.

La $j^{\text{ème}}$ **dérivée partielle première de f en a**, est notée $D_j f(a)$, et on a

$$D_j f(a) = \varphi'_{a,e_j}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\,e_j)-f(a)}{t} \text{ (si elle existe).}$$

En particulier, si $E=\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$ sa base canonique, on a la définition suivante

Définition 3.3 On dit que f admet **une $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle première en a** lorsque f admet une dérivée première en a suivant le vecteur e_j.

La $j^{\text{ème}}$ **dérivée partielle première de f en** $a=(a_1,\dots,a_p)$, notée $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ ou $f'_{x_j}(a)$, n'est alors que la dérivée en a_j de la $j^{\text{ème}}$ application partielle en a ;

$$f_j : x_j \mapsto f(a_1,\dots,a_{j-1},x_j,a_{j+1},\dots,a_p),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = f'_j(a_j) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\,e_j)-f(a)}{t} \text{ (si elle existe),}$$

Remarque. *La $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle première en a de l'application $f : E=\mathbb{R}^p \to F$ s'écrit*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,\cdots,a_{j-1},a_j+t,a_{j+1},\cdots,a_p)-f(a_1,\cdots,a_{j-1},a_j,a_{j+1},\cdots,a_p)}{t}.$$

Exemple 1. Soient $a=(a_1,a_2)$ quelconque de $\mathbb{R}^2$, et $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=x^2y.$$

La première application partielle de f au point a est

$$\varphi_1 : x \mapsto f(x,a_2) = x^2a_2.$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc en a_1 avec $\varphi_1'(a_1) = 2a_1a_2$. Par conséquent

$$D_1f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = 2a_1a_2.$$

D'autre part, la deuxième application partielle en a est la fonction

$$\varphi_2 : y \mapsto f(a_1, y) = a_1^2 y.$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc en a_2 avec $\varphi_2'(a_2) = a_1^2$. Par conséquent

$$D_2f(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = a_1^2.$$

2. Les dérivées partielles premières en (x,y) de l'application $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Dans le cas pratique $E = \mathbb{R}^p$, $F = \mathbb{R}^n$ munis de leurs bases canoniques respectives, on a

Proposition 3.1 On dit que $f : x \mapsto (f_1(x), \cdots, f_n(x))$ admet une $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle première en $a \in U$ lorsque, toutes ses applications composantes $f_1, \cdots, f_n$ admettent des $j^{\text{ème}}$ dérivées partielles premières en a. Et dans ce cas, on a

$$\forall j \in \{1, \cdots, p\}, \quad D_jf(a) = \big(D_jf_1(a), \cdots, D_jf_n(a)\big).$$

Preuve *L'application $x_j \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ est dérivable en a_j si toutes ses composantes $f_k : x_j \mapsto f_k(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ sont dérivables en a_j $(k = 1, \cdots, n)$.* ■

Définition 3.4 — Matrice Jacobienne-Jacobien. Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. On appelle matrice jacobienne dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de l'application $f : U \subset E \to F$ en a, la matrice des dérivées partielles premières de ses applications partielles f_i en a ;

$$J_f(a) = \big(D_jf_i(a)\big)_{1 \le i \le n,\, 1 \le j \le p} \quad \text{(lorsqu'elles existent).}$$

Lorsque $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, on appelle Jacobien dans la base $\mathcal{B}$ de f en a, le déterminant de la matrice jacobienne dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ de f en a (lorsqu'elles existe).

Définition 3.5 On appelle fonctions dérivées partielles premières de $f : U \to F$, les p fonctions

$$D_jf : x \mapsto D_jf(x) \quad \text{où} \quad 1 \leqslant j \leqslant p, \quad \text{notée également } \frac{\partial f}{\partial x_j} \text{ ou } f_j'.$$

Remarque. *Les fonctions D_jf sont définies sur des parties de l'ensemble U. Par exemple, si*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (x,y) \mapsto (y, |x|),$$

alors la première dérivée partielle première $D_1 f$ est définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par :

$$D_1 f : (x,y) \mapsto \begin{cases} (0,1) & si \quad x > 0 \\ (0,-1) & si \quad x < 0 \end{cases}$$

et la deuxième dérivée partielle première $D_2 f$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$D_2 f : (x,y) \mapsto (1,0).$$

3.2 Applications de classe C^1 sur un ouvert

Soient U un ouvert de E, $f : U \to F$ une application et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.

Définition 3.6 On dit que f est de classe C^1 sur U si pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$ et $a \in U$, on a :

1. f admet une dérivée première en a suivant chaque vecteur e_j, notée $D_{e_j} f(a)$,
2. les dérivées premières $(D_{e_j} f)_{1 \le j \le p}$ sont continues sur U.

La notion *classe* C^1 est indépendente du choix de la base de E. Et si $E = \mathbb{R}^p$, on a :

Définition 3.7 On dit que f est de classe C^1 sur U si pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$ et $a \in U$, on a :

1. f admet une $j^{\text{ème}}$ dérivée partielles première en a, notée $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ ou $f'_j(a)$,
2. les dérivées partielles premières $(f'_j)_{1 \le j \le p}$ sont continues sur U.

On se place dans le cas $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^n$. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $a = (a_1, \cdots, a_p) \in U$, l'ensemble $U_0 = \{h = (h_1, \cdots, h_p) \in \mathbb{R}^p ;\ a + h \in U\}$ est voisinage ouvert de $0_{\mathbb{R}^p} = (0, \ldots, 0)$.

Proposition 3.2 — Développement limité d'ordre 1. Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 sur U, alors il existe une application $\varepsilon : U_0 \to \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall h \in U_0, \quad f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \underbrace{\|h\| \, \varepsilon(h)}_{o(\|h\|)} \quad \text{où} \quad \varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a (en abrégé $\mathrm{DL}_1(a)$).

Preuve *En exercice.* ■

Rappel Soit V un voisinage de 0, rappelons que l'application $r : V \to F$, $h \mapsto r(h)$ est négligeable devant $\|h\|$ en 0, (ou que r est $o(\|h\|)$), si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

- il existe une application $\varepsilon : V \to F$ telle que

$$\forall h \in V, \quad r(h) = \|h\| \, \varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

- pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall h \in V, \quad \|h\| \le \eta \implies \|r(h)\| \le \varepsilon.$$

- il existe une application $\alpha : V \to F$ telle que

$$\forall h \in V, \quad \|r(h)\| \le \|h\| \, \alpha(h) \quad \text{et} \quad \alpha(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

Corollaire 3.1 Si f est de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, alors f est continue sur U.

Preuve *D'après la proposition 3.2, nous avons*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o(\|h\|) \xrightarrow[h\to 0]{} f(a).$$

■

Exercice 3.1 *Étudier la continuité et le caractère C^1 sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction f définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3.3 Différentielle d'une application de classe C^1

Dans cette section, on se restreint à $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^n$. Soit U un ouvert de E et $a \in U$.

Définition 3.8 Soient $f : U \to F$ de classe C^1 sur U, on appelle différentielle de f en a, l'application linéaire, notée $d_a f$ et définie par

$$d_a f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n, \ (h_1, \cdots, h_p) \mapsto \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Exemple Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}$, alors la différentielle de f en $a \in U$, est l'application linéaire $d_a f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par

$$d_a f(h) = f'(a) \times h.$$

Proposition 3.3 Tout application linéaire $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^p$ et on a :

$$\forall a \in \mathbb{R}^p, \quad d_a f = f.$$

Preuve *Soient $B = (e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $a \in U$. Pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$, on a :*

$$D_j f(a) = f_j'(a_j) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_j) - f(a)}{t} = f(e_j), \ (\textit{puisque } f \textit{ est linéaire}).$$

Alors f admet des dérivées partielles premières en a avec $D_j f(a) = f(e_j)$ et on a :

$$\forall h = (h_1, \ldots, h_p) \in \mathbb{R}^p, \quad (d_a f)(h) = \sum_{j=1}^{p} h_j D_j f(a) = \sum_{j=1}^{p} h_j f(e_j) = f(\sum_{j=1}^{p} h_j e_j) = f(h).$$

Finalement, nous obtenons

$$d_a f = f.$$

■

Notation. *Pour $1 \leqslant j \leqslant p$, on note la $j^{ème}$ projection $pr_j : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_p) \mapsto x_j$ par $\mathbf{x_j}$, donc*

$$d_a pr_j = \mathbf{d_a x_j} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \ (h_1, \dots, h_p) \mapsto h_j.$$

Comme $\mathbf{d_a x_j}$ ne dépend pas de a, on la note $\mathbf{dx_j}$. Dans ce cas, si $f : U \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1, alors

$$\forall a \in U, \ d_a f = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j.$$

Définition 3.9 Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, on appelle matrice jacobienne de f en $a \in U$, notée $J_f(a)$, la matrice de $d_a f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.

Remarque. *Soit $(f_1, \dots, f_n)$ les fonctions composantes de $f : U \to F = \mathbb{R}^n$, on a :*

$$\forall x \in U, \ f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

On a alors :

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{1 \leq i, j \leq p} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

Exemple Soit f une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, définie par

$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} x^2 y + \dfrac{1}{z} \\ x\sin(y)e^z \end{bmatrix}$$

Les deux fonctions $f_1(x,y,z) = x^2 y + \dfrac{1}{z}$ et $f_2(x,y,z) = x\sin(y)e^z$ sont de classe C^1 sur $U = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*$, alors la matrice jacobienne de f en tout point $(x,y,z) \in U$ s'écrit

$$J_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 & -\dfrac{1}{z^2} \\ \sin(y)e^z & x\cos(y)e^z & x\sin(y)e^z \end{bmatrix}$$

Définition 3.10 Si $n = p$, on appelle jacobien de f en a, le déterminant de la matrice $J_f(a)$.

Théorème 3.1 — Composition d'applications de C^1. Si $f : U \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ et si $g : V \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^1 un ouvert V de $\mathbb{R}^n$, telles que $f(U) \subset V$, alors l'application composée $g \circ f : U \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^1 sur U, et on a :

$$\forall a \in U, \quad d_a(g \circ f) = d_{f(a)} g \circ d_a f \quad \text{et} \quad J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a).$$

Exemple Soient $f=(f_1,f_2):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ deux applications de classe C^1 respectivement sur les ouverts $U\subset\mathbb{R}^3$ et $V\subset\mathbb{R}^2$ telles que $f(U)\subset V$, alors l'application $g\circ f$ est de classe C^1 sur U. De plus, en notant $\omega=(x,y,z)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(\omega),\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(\omega),\frac{\partial(g\circ f)}{\partial z}(\omega)\right)\\
&=J_{g\circ f}(\omega)\\
&=J_g(f_1(\omega),f_2(\omega))\times J_f(\omega)\\
&=\left(\frac{\partial g}{\partial u}(f_1(\omega),f_2(\omega)),\frac{\partial g}{\partial v}(f_1(\omega),f_2(\omega))\right)\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}(\omega) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\omega) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(\omega)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\omega) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\omega) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(\omega)\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

On peut en déduire, par exemple :

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(\omega)=\frac{\partial g}{\partial u}(f_1(\omega),f_2(\omega))\,\frac{\partial f_1}{\partial x}(\omega)+\frac{\partial g}{\partial v}(f_1(\omega),f_2(\omega))\,\frac{\partial f_2}{\partial x}(\omega).$$

Corollaire 3.2 Si $g:U\to\mathbb{R}$ est de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^p$ est dérivable sur intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $f(I)\subset U$, alors, $F=g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est dérivable sur I, et on a

$$\forall t\in I,\quad F'(t)=\sum_{i=1}^{p}f_i'(t)\,\frac{\partial g}{\partial x_i}(f(t))\quad (\text{où }\ f=(f_1,\cdots,f_p)).$$

Proposition 3.4 Si $f,g:U\to\mathbb{R}^n$ et $\lambda:U\to\mathbb{R}$ sont de classe C^1 sur U, alors

$$f+\lambda\,g \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } U.$$

Preuve *L'application $f+\lambda\,g$ est la composée des deux applications suivantes*

$$U\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\ x\mapsto(\lambda(x),f(x),g(x))\ \ \textit{et}\ \ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\ (t,u,v)\mapsto t\,u+v$$

qui sont de classe C^1 sur U.

■

Exercice 3.2 *Pour les applications $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ suivantes, étudier la continuité de f, et l'existence et la continuité de ses dérivées partielles premières :*

$a)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^3)-\sin(y^3)}{x^2+y^2} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0).\end{cases}$

$c)\ f(x,y)=\max(|x|,|y|),$

$b)\ f(x,y)=\begin{cases}x\sin(y/x) & si\ \ x\neq 0\\ 0 & si\ \ x=0.\end{cases}$

$d)\ f(x,y)=\max(x^2,y^2),$

Exercice 3.3 *Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi''(0) \neq 0$. On considère*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\varphi(y) - y\varphi(x)}{x^2+y^2} & si \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$, mais n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

3.4 Différentiabilité d'une application

Il s'agit ici de définir la différentiabilité dans un cadre plus général que celui des applications de classe C^1.

Définition 3.11 Soient $f : U \to F$ une application d'un ouvert U de **evn** E dans **evn** F. On dit que f est différentiable en $a \in U$ lorsqu'il existe $L_a \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que

$$\forall h \in U_0 = \{h \in E,\ a+h \in U\};\ \ f(a+h) = f(a) + L_a(h) + \underset{0}{o}(\|h\|).$$

L'application L_a, dite la différentielle de f en a et notée d_af, est unique. En effet, supposons qu'il existe deux applications $L_a, L'_a \in \mathcal{L}(E,F)$ telles que

$$f(a+h) = f(a) + L_a(h) + \underset{0}{o}(\|h\|) \quad \text{et} \quad f(a+h) = f(a) + L'_a(h) + \underset{0}{o}(\|h\|).$$

Alors, on obtient $(L_a - L'_a)(h) = \underset{0}{o}(\|h\|)$. Soit $v \in E \setminus \{0\}$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$t\,(L_a - L'_a)(v) = (L_a - L'_a)(t\,v) = \underset{0}{o}(\|tv\|) = \underset{0}{o}(|t|).$$

D'où

$$(L_a - L'_a)(v) = \underset{t\to 0}{o}(1).$$

Donc $(L_a - L'_a)(v) = 0$ puisque cette quantité ne dépend de t, et on conclut que $L_a = L'_a$.

Remarque. *Si l'application f est différentiable au point a, on a alors*

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \underset{0}{o}(\|h\|)$$

Définition 3.12 f est dite différentiable sur U lorsque f est différentiable en tout $a \in U$, et dans ce cas, on appelle la différentielle de f, l'application

$$df : U \to \mathcal{L}(E,F),\ \ x \mapsto d_xf.$$

Exemple Si E est muni du produit scalaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ et de sa norme euclidienne associé

$$\|x\| = \sqrt{\varphi(x,x)}.$$

Soient $a = (a_1,a_2)$, $h = (h_1,h_2) \in E \times E$, on a

$$\varphi(a+h) = \varphi(a_1+h_1, a_2+h_2) = \varphi(a_1,a_2) + \varphi(a_1,h_2) + \varphi(h_1,a_2) + \varphi(h_1,h_2).$$
$$= \varphi(a) + L_a(h) + \varphi(h_1,h_2),$$

où $L_a : E \times E \to \mathbb{R}$ est l'application linéaire définie par

$$L_a(h) = L_a(h_1, h_2) = \varphi(a_1, h_2) + \varphi(h_1, a_2).$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\varphi(h_1, h_2)| \leqslant \sqrt{\varphi(h_1, h_1)}\sqrt{\varphi(h_2, h_2)} = \|h_1\|\,\|h_2\| \leqslant \max(\|h_1\|, \|h_2\|)^2.$$

On suppose que $E \times E$ est muni de la norme $\|h\| = \max(\|h_1\|, \|h_2\|)$, alors

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + L_a(h) + \underset{0}{o}(\|h\|).$$

Ainsi, le produit scalaire φ est différentiable et sa différentielle en un point $a = (a_1, a_2)$ s'écrit

$$d_a\varphi(h_1, h_2) = \varphi(a_1, h_2) + \varphi(h_1, a_2).$$

Exercice 3.4 *Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés. Montrer que toute application bilinéaire continue $B : E \times F \to G$ est différentiable sur $E \times F$, et déterminer sa différentielle.*

Théorème 3.2 Si f est différentiable en $a \in U$, alors f est une application continue en a.

Preuve *Comme E est de dimension finie, d_af est linéaire continue, et donc*

$$d_af(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Finalement, on obtient

$$f(a+h) = f(a) + d_af(h) + o(\|h\|) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(a).$$

■

Théorème 3.3 Si f est différentiable en $a \in U$, alors f est dérivable en a suivant tout vecteur non nul $v \in E \setminus \{0\}$, et sa dérivée première en a suivant v est donnée par $D_vf(a) = d_af(v)$.

Preuve *Puisque f est différentiable en a, on a*

$$f(a+h) = f(a) + d_af(h) + \underset{0}{o}(\|h\|).$$

$h = tv$

$(h \to 0 \Rightarrow t \to$

En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + tv \in U$, il vient

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{d_af(tv) + \underset{0}{o}(\|tv\|)}{t} = \lim_{t\to 0} d_af(v) + \underset{0}{o}(1) = d_af(v).$$

■

Corollaire 3.3 Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $a \in U$. Si $f : U \to F$ est différentiable en a, alors l'application f admet des dérivée partielles premières en a et on a

$$\forall (h_1, \cdots, h_p) \in \mathbb{R}^p, \quad (d_af)(h_1, \cdots, h_p) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Preuve *D'après le Théorème 3.3, f admet des dérivée partielles premières en a et on a :*

$$\forall j = 1,\dots,p, \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = D_{e_j}(a) = (d_a f)(e_j),$$

où $(e_1,\dots,e_p)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Finalement, on en déduit :

$$\forall (h_1,\cdots,h_p) \in \mathbb{R}^p, \quad (d_a f)(h_1,\cdots,h_p) = \sum_{j=1}^{p} h_j (d_a f)(e_j) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

■

Remarque. *Il se peut qu'une application admette des dérivées partielles premières en a sans être différentielle en a. Par exemple, l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad xy \neq 0, \\ 1 & si \quad xy = 0, \end{cases}$$

admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$ avec $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, puisque on a

$$f(\cdot,0) : x \mapsto f(x,0) = 1 \quad et \quad f(0,\cdot) : y \mapsto f(0,y) = 1.$$

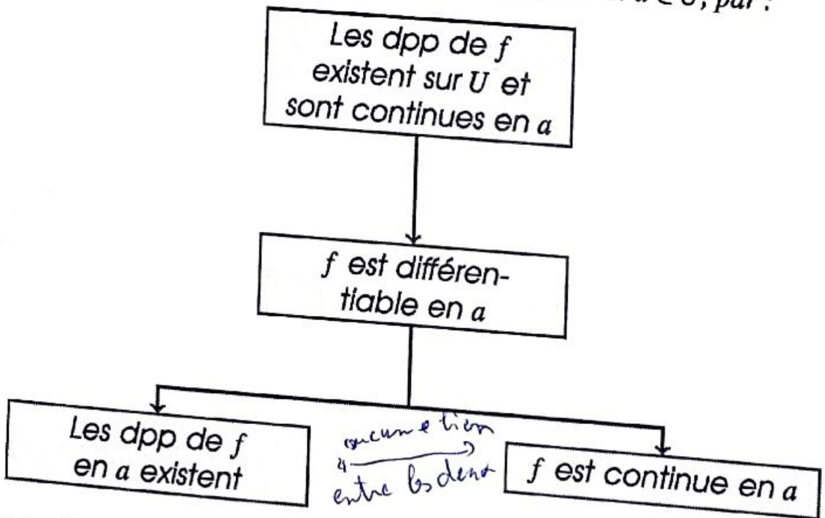
Mais, l'application f n'est pas différentiable en $(0,0)$ car elle n'est pas continue en $(0,0)$.

Théorème 3.4 Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in U$ et $f : U \to F$ telles que

1. f admet des dérivées partielles premières sur U,
2. les dérivées partielles premières de f sont continues en a,

alors, l'application f est différentiable en a.

Remarque. *Ici l'abbréviation "dpp" désigne "dérivée partielle première". On résume les trois théorèmes précédents, pour $f : U \to F$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $a \in U$, par :*



Chacune des implications inverses étant fausse. En particulier, il n'y a aucune 'implication' entre les deux dernières assertions : l'existence de "ddp" n'implique pas "la continuité", et "la continuité" n'implique pas "la dérivabilité partielle".

Théorème 3.5 Soient U un ouvert de E et V un ouvert de F. Si $f : U \to F$ est différentiable en $a \in U$ et si $g : V \to G$ est différentiable en $f(a)$ telles que $f(U) \subset V$, alors l'application composée $g \circ f$ est différentiable en a, et on a

$$d_a(g \circ f) = (d_{f(a)}g) \circ (d_a f).$$

Exemple Soit E un espace $\mathbb{R}$-vectoriel muni du produit scalaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ et de sa norme euclidienne associé $N(x) = \sqrt{\varphi(x,x)}$. Cette norme est la composée des deux fonction suivantes

$$f : E \to \mathbb{R},\ x \mapsto \varphi(x,x) \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ y \mapsto \sqrt{y}.$$

La fonction f est différentiable sur E avec

(p.s. symétrique)

$$\forall x \in E, \quad d_x f : h \mapsto \varphi(x,h) + \varphi(h,x) = 2\,\varphi(x,h).$$

D'autre part, la fonction g est différentiable sur $]0,+\infty[$ avec

$$\forall y \in]0,+\infty[, \quad d_y g : h \mapsto \frac{1}{2\sqrt{y}} h.$$

La norme N est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$ et sa différentielle en $x \neq 0_E$ s'écrit

$$d_x N(h) = (d_{f(x)} g \circ d_x f)(h) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} d_x f(h) = \frac{1}{2\sqrt{\varphi(x,x)}} 2\,\varphi(x,h) = \frac{\varphi(x,h)}{N(x)}.$$

Exercice 3.5 *Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $f_k : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X \mapsto X^k$ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle en tout point.*

Exercice 3.6 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{\sqrt{x^2+y^4}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. *Montrer que f est continue en $(0,0)$.*
2. *Montrer que, pour tout $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f admet une dérivée première en $(0,0)$ suivant v.*
3. *Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.*

Proposition 3.5 Soient U un ouvert de E et $f : U \to F$ différentiable sur U. Pour que f soit de classe C^1 (ou continûment différentiables) sur U, il faut et il suffit que

$$df : U \to \mathcal{L}(E,F);\ x \mapsto d_x f$$

est une application continue.

Notation. *L'ensemble des applications de classe C^1 d'un ouvert U de E dans F, est noté $C^1(U,F)$.*

Remarque. *Une application $L : U \to \mathcal{L}(E,F)$ est continue si on a l'une des assertions suivantes :*

- *Pour tout $h \in E$, l'application $x \mapsto L(x)(h)$ de U dans F, est continue,*
- *Soit $(e_j)_j$ une base de E. Pour tout j, l'application $x \mapsto L(x)(e_j)$ est continue.*

On déduit de la remarque précédente, la proposition pratique suivante.

Proposition 3.6 Une application différentiable f d'un ouvert U dans F est de classe C^1, si elle vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :

- pour tout $h \in E$, la dérivée suivant un vecteur $D_h : U \to F$, $x \mapsto d_x f(h)$ est continue,
- pour tout j, l'application dérivée partielle $D_j : U \to F$, $x \mapsto f'_j(x)$ est continue.

Exemple L'application $I : u \mapsto u^{-1}$ de l'ouvert $\mathcal{GL}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ est de classe C^1. En effet, l'application $L_u : h \mapsto -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ et on a :

$$\begin{aligned}
\forall h \in \mathcal{GL}(E) - u, \quad r(h) &= (u+h)^{-1} - u^{-1} - L_u(h) \\
&= (u+h)^{-1} \circ (\overset{Id}{u} - (u+h)) \circ u^{-1} + u^{-1} \circ h \circ u^{-1} \\
&= \left(u^{-1} - (u+h)^{-1}\right) \circ h \circ u^{-1}.
\end{aligned}$$

Id $= u \circ u^{-1}$

La majoration $\|r(h)\| \leqslant \|u^{-1}\| \, \|u^{-1} - (u+h)^{-1}\| \, \|h\|$ et la continuité de I en u montrent que

$$r(h) = o(\|h\|).$$

L'application I est donc différentiable en u et sa différentielle en u est

$$d_u I : h \mapsto -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}.$$

Pour tout $h \in \mathcal{L}(E)$, la dérivée suivant le vecteur h est

$$D_h I : u \in \mathcal{GL}(E) \mapsto d_u I(h) = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}.$$

Elle est continue, et par conséquent I est de classe C^1 (continûment différentiable).

3.5 Inégalité des accroissements finis

Rappelons que le segment $[x,y]$ d'extrémités $x, y \in E$, est la partie de E définie par :

$$[x,y] = \left\{\lambda x + (1-\lambda) y \,, \; \lambda \in [0,1]\right\}.$$

Théorème 3.6 Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $(a,b) \in U^2$ tels que $[a,b] \subset U$, $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur U et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\forall x \in [a,b]; \quad \sum_{j=1}^{p} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \leqslant M.$$

Alors, on a

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M \|b-a\|_\infty \quad \text{où} \quad \|b-a\|_\infty = \max_{1 \leqslant j \leqslant p} |b_j - a_j|.$$

Preuve *Puisque $[a,b] \subset U$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, il existe $\lambda \in]0,+\infty[$ tel que*

$$\forall t \in]-\lambda, 1+\lambda[, \quad a+t(b-a) \in U.$$

L'application $\psi :]-\lambda, 1+\lambda[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(a+t(b-a))$ est de classe C^1 (composée d'applications de classe C^1). D'après l'inégalité des accroissements finis pour une fonction à variable réelle, on a

$$|f(b)-f(a)| = |\psi(1)-\psi(0)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |\psi'(t)|.$$

En notant $h = b-a = (h_1, \ldots, h_p)$, alors pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\psi'(t) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+th).$$

Finalement, il vient

$$\sup_{t\in[0,1]} |\psi'(t)| \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant p} |h_j| \sum_{j=1}^{p} \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(a+th)\right| \leqslant M\|h\|_\infty.$$

■

Remarque. *Lorsque f est de classe C^1 sur U, l'existence de M est assurée (quitte à remplacer U par un ouvert borné V tel que $[a,b] \subset V \subset \overline{V} \subset U$), car les dpp de f sont continues sur le fermé borné (compact) $\overline{V}$ de $\mathbb{R}^p$.*

Remarque. *Dans le Théorème 3.6, on peut remplacer simultanément la norme $\|\cdot\|_\infty$ et la condition de majoration des dpp, par la norme $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbb{R}^p$ et la condition :*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [a,b]; \quad \max_{1\leqslant j\leqslant p} \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right| \leqslant M.$$

Corollaire 3.4 Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur un ouvert convexe U de $\mathbb{R}^p$ telle que

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in U; \quad \sum_{j=1}^{p} \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right| \leqslant M.$$

Alors, l'application f est M-lipschitzienne sur U, c'est-à-dire

$$\forall (x,y) \in U^2; \quad |f(x)-f(y)| \leqslant M\|x-y\|_\infty.$$

Corollaire 3.5 Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U, alors

$$f \text{ est constante sur } U \iff \forall j \in \{1, \cdots, p\}, \forall x \in U; \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0.$$

Remarque. *On rappelle qu'une partie A d'un evn E est dite connexe si et seulement si les seuls parties de A à la fois ouvertes et fermées dans A sont $\emptyset$ et A. De plus, toute partie connexe par arcs A de E, est aussi connexe et inversement toute partie ouverte connexe de E, est connexe par arcs.*

Preuve *Si f est constante sur U, il est évident que les dpp de f sont nulles sur U. Inversement, supposons que les dpp de f sont nulles sur U. Soit $a \in U$ et considérons*

$$C = \{x \in U,\ f(x) = f(a)\} = f^{-1}(\{f(a)\}).$$

La partie C est non vide, fermée dans U puisque $a \in C$, $\{f(a)\}$ un fermé dans F et f est continue. Montrons que C est ouvert dans U. Soit $x \in C$, puisque $C \subset U$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, alors

$$\exists r > 0;\ B(x,r) \subset U.$$

D'où

$$\forall y \in B(x,r);\ [x,y] \subset B(x,r) \subset U.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis ($M = 0$), on en déduit $f(x) = f(y)$ d'où $y \in C$, et donc

$$\forall x \in C, \exists r > 0;\ B(x,r) \subset C.$$

Ainsi, C est un ouvert de E et donc dans U (car U ouverte dans E). Or C est une partie ouverte et fermée non vide du connexe (connexe par arcs) U, alors $C = U$ et donc f est constante sur U. ■

Exercice 3.7 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x^2 - y, x^2 + y^2)$ et $g = f \circ f$.*

1. *Montrer que f et g sont de classe C^1.*
2. *Calculer en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la matrice jacobienne de f, et celle de g au point $(0,0)$.*
3. *Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in B'(0_{\mathbb{R}^2}, \rho)$, on a*
$$\|D_{(x,y)}g\| \leqslant \frac{1}{2}.$$
4. *Montrer que la fonction g admet un unique point fixe dans $B'(0_{\mathbb{R}^2}, \rho)$.*

3.6 Difféomorphisme de classe C^1 (C^1-difféomorphisme)

Définition 3.13 On dit qu'une application φ d'un ouvert U de E dans un ouvert V de F, est un difféomorphisme de classe C^1 de U sur V si φ est bijective et si φ et φ^{-1} sont de classe C^1.

Exemple

1. Si $L \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective, sa réciproque $L^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$, et comme toute application linéaire est de classe C^1, alors l'application L est un C^1-difféomorphisme de E sur F. En particulier, si U un ouvert de E, alors L est également un C^1-difféomorphisme de U sur $\varphi(U)$.
2. L'application $L : (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$ est linéaire, donc C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Soit φ l'application définit sur l'ouvert $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x < y\}$ de $\mathbb{R}^2$ par
$$\varphi(x,y) = (x+y, xy).$$
   - Puisque les fonctions coordonnées de φ sont polynomiales, alors φ est de classe C^1.
   - Un élément $(s,p) \in \mathbb{R}^2$ appartient à l'image V de φ s'il existe $x < y$ tels que
$$s = x + y \quad \text{et} \quad p = xy.$$

Alors, $x = r_1$ et $y = r_2$ (avec $r_1 < r_2$) sont donc les racine distincts du polynôme

$$X^2 - sX + p.$$

On en déduit donc que l'image de φ est l'ouvert $V = \{(s,p) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 4p < s^2\}$ de $\mathbb{R}^2$.

- L'application $\varphi : U \to V$ est bijective d'application réciproque

$$\varphi^{-1} : V \to U, \quad \varphi^{-1}(s,p) = \frac{1}{2}\left(s - \sqrt{s^2 - 4p}, s^2 + \sqrt{s^2 - 4p}\right)$$

- L'application réciproque φ^{-1} est clairement de classe C^1.

Finalement, on conclut φ est un difféomorphisme de classe C^1 de U sur V.

Remarque. *1. L'application Id_U est un C^1-difféomorphisme de l'ouvert U sur U.*

2. Si $\varphi : U \to V$ et $\psi : V \to W$ sont deux C^1-difféomorphismes, alors l'application

$$\psi \circ \varphi : U \to W \quad \textit{est un } C^1\textit{-difféomorphisme de } U \textit{ sur } W.$$

3. Si $\varphi : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme, alors $\varphi^{-1} : V \to U$ est un C^1-difféomorphisme.

Pour montrer qu'une application de classe C^1, est un C^1-difféomorphisme, on utilise

Théorème 3.7 Soit φ une application de classe C^1 d'un ouvert U de E dans F. Si φ est injective et si sa différentielle en tout $x \in U$ est un isomorphisme de E dans F ($J_f(x)$ est inversible), alors

1. l'image $V = \varphi(U)$ est un ouvert de F,
2. l'application $\varphi : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme.

Proposition 3.7 Soit $\varphi : U \to V$ un C^1-difféomorphisme, alors $\dim(E) = \dim(F)$, et pour tout $a \in U$, l'application $d_a\phi$ est un isomorphisme E sur F tel que

$$(d_a\phi)^{-1} = d_{\phi(a)}\phi^{-1}.$$

Preuve *On a $d_a\phi$ et $d_{\phi(a)}\phi^{-1}$ sont des isomorphismes réciproques, puisque*

$$(d_{\phi(a)}\phi^{-1}) \circ d_a\phi = d_a(\phi^{-1} \circ \phi) = d_a(I_U) = Id_E$$

et

$$d_a\phi \circ (d_{\phi(a)}\phi^{-1}) = d_a(\phi \circ \phi^{-1}) = d_a(I_V) = Id_F.$$

Par conséquent, on obtient que $\dim(E) = \dim(F)$ *et que* $(d_a\phi)^{-1} = d_{\phi(a)}\phi^{-1}$.

■

Théorème 3.8 — Théorème de l'inverse local. Soit φ de classe C^1 sur un ouvert U de E dans F et $a \in U$. Si la différentielle $d_a\varphi$ est bijective, alors $\dim(E) = \dim(F)$ et de plus, il existe un ouvert $V \in \mathcal{V}_E(a)$ tel que φ soit un C^1-difféomorphisme de V sur $\varphi(V)$.

Ce théorème signifie qu'une application $\varphi : U \to F$ de classe C^1, est localement inversible au voisinage d'un point $a \in U$ si sa matrice jacobienne est régulière en ce point ($\det(J_f(a)) \neq 0$), et dans ce cas φ est un C^1-difféomorphisme local.

Exemple Déterminons l'ouvert D de $\mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(x,y) = (x-y, xy)$ soit un difféomorphisme de classe C^1 de D sur $\varphi(D)$. La matrice jacobienne de φ en un point (x,y) s'écrit

$$J_{(x,y)}\varphi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ y & x \end{bmatrix}.$$

Elle est régulière si $x+y \neq 0$ d'où φ ne peut être un C^1-difféomorphisme de D sur $\varphi(D)$ que si

$$D \subseteq D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\; x+y < 0\} \quad \text{ou} \quad D \subseteq D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\; x+y > 0\}.$$

Corollaire 3.6 Soit φ une application d'un ouvert U de E dans un ouvert V de F. Si φ est bijective de classe C^1, et si pour tout $a \in U$, la différentielle $d_a\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective, alors $\dim(E) = \dim(F)$ et l'application $\varphi : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme de U dans V.

Preuve *Soit $b \in V$, d'après le théorème de l'inverse local, appliqué en $a = \varphi^{-1}(b)$, il existe un voisinage ouvert U_1 de a inclus dans U tel que $\varphi : U_1 \to \varphi(U_1)$ est un C^1-difféomorphisme. Donc, $\varphi(U_1)$ est un voisinage ouvert de b dans F et φ^{-1} est de classe C^1 sur $\varphi(U_1)$. Et donc, comme φ^{-1} est de classe C^1 sur tout voisinage de tout point de V, il en résulte que φ^{-1} est de classe C^1 sur V.* ■

Exemple — Passage en coordonnées sphériques.

Soit $U =]-\pi,\pi[\times]0,+\infty[\times]0,\pi[$ et $V = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R})$. L'application Φ définie par

$$\Phi : U \to V, \quad \Phi(\theta,\rho,\varphi) = \big(\rho\cos(\theta)\sin(\varphi), \rho\sin(\theta)\sin(\varphi), \rho\cos(\varphi)\big)$$

est bijective de classe C^1. De plus, le jacobien de Φ en tout point $(\theta,\rho,\varphi) \in U$ est donné par :

$$\det(J_\Phi(\theta,\rho,\varphi)) = \begin{vmatrix} -\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\theta)\sin(\varphi) & \rho\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) & \sin(\theta)\sin(\varphi) & \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ 0 & \cos(\varphi) & -\rho\sin(\varphi) \end{vmatrix} = \rho^2\sin^2(\varphi) \neq 0.$$

D'après le corollaire 3.6, l'application Φ est un C^1-difféomorphisme de U sur V.

Exercice 3.8 *Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x+y^2, y+z^2, z+x^2)$. Montrer qu'il existe deux voisinages ouverts $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^3}(1,1,1)$ et $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^3}(2,2,2)$ tels que $V = \varphi(U)$, et que φ soit un C^1-difféomorphisme de U sur V. Calculer la matrice jacobienne de φ_1^{-1} au point $(2,2,2)$.*

Exercice 3.9 *Montrer que $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (e^x - e^y, x+y)$ est un C^1-difféomorphisme.*

Exercice 3.10 *Montrer que $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x^3 + 3xe^y, y - x^2)$ est un C^1-difféomorphisme.*

Exercice 3.11 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :*

$$f(x,y) = \left(x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}, \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\right).$$

1. *Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer le jacobien de f en tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*
2. *Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$. Est-ce que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$?*