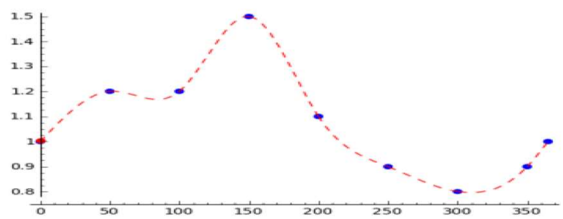
Chapitre 3

Interpolation polynômiale

3.1 Introduction

— Soit f une fonction
  — connue seulement en certains points $x_0, x_1, ..., x_n$
  — ou évaluable par un calcul coûteux



Représenter f par une fonction simple, facile à programmer, à évaluer, ...

En physique par exemple, on mesure expérimentalement la température d'un objet qui refroidit au cours du temps. On obtient une suite de valeurs à chaque instant t_i.
On cherche alors à tracer la courbe de refroidissement (notée f) qui passe par les points mesurés, et ainsi à estimer des valeurs de la fonction f en des points non mesurés.

i	t_i	y_i
0	t_0	y_0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	t_n	y_n

Comment fait-on pour évaluer cette fonction f en un point t donné, proche des points mesurés ?
— L'interpolation de f, vue comme une fonction, en utilisant les données expérimentales (t_i, y_i) s'impose naturellement.
— Il existe une **infinité** de solutions !

3.1.1 Poblème d'interpolation

Les fonctions les plus faciles à évaluer numériquement sont les polynômes. Il est donc important de savoir interpoler une fonction arbitraire par des polynômes.

Dans la suite, on désignera par $\mathbb{P}_n$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$ à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n. On a donc $dim(\mathbb{P}_n) = n + 1$.

Problème 3.1.2

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.
On donne $(n+1)$ points $x_0, x_1, ..., x_n$ dans $[a, b]$ distincts 2 à 2.
Existe-t-il un polynôme $p_n \in \mathbb{P}_n$ tel que :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} p_n(x_i) = f(x_i) \\ \quad i \quad = 0, ..., n \end{cases} \tag{3.1}$$

Les points $(x_i, f(x_i))_{i=0,\cdots,n}$ sont appelés points d'interpolation.

3.1.3 Un peu d'algèbre linéaire

Définition 3.1.4

Soit $\mathcal{F} = (e_1, \cdots, e_k)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E, on appelle **rang** de la famille $\mathcal{F}$ la dimension de $Vect(e_1, \cdots, e_k)$

Définition 3.1.5

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ le rang de f, s'il existe, est la dimension de l'image de f. On le note $rg(f)$.

Théorème 3.1.6 (Théorème du rang)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie, alors $rg(f) + dim(ker(f)) = dim(E)$.

Corollaire 3.1.7

Soit $f \in (E)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie, f est **bijectif** si et seulement si il est **injectif** ou **surjectif**.

Corollaire 3.1.8

Si un polynôme P de degré inférieur à n admet $n+1$ racines distinctes, alors P est le polynôme nul.

3.2 Interpolation polynômiale

Théorème 3.2.1

Soit $x_0, x_1, ..., x_n$, $n+1$ réels distincts et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors il existe un unique polynôme P de degré au plus n qui vérifie $P(x_i) = f(x_i), \quad \forall\, i \in \{0, ..., n\}$

Preuve

On cherche une solution P dans $\mathbb{P}_n$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, c'est à dire,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Les équations qui doivent être satisfaites sont donc :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k = f(x_i), \qquad \forall\, i \in \{0, ..., n\} \tag{3.2}$$

Soit F l'application linéaire :

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^{n+1} & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ (a_0, \cdots, a_n) & \to & \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x_0^k, \cdots, \sum_{k=0}^{n} a_k x_n^k \right) \end{array}$$

D'après le Théorème du rang, $rg(F) + dim(ker(F)) = n+1$ c-à-d :
F injective $\Leftrightarrow$ F surjective $\Leftrightarrow$ F bijective.

On va montrer que F est injective :
Soit $(b_0, \cdots, b_n)$, vérifiant, pour tout $i \in \{0, ..., n\}$

$$\sum_{k=0}^{n} b_k x_i^k = 0$$

Alors le polynôme, $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ possède $n+1$ racines distinctes.
Donc $Q(x) = 0$.
Ainsi, l'application F est donc injective.

Remarque 3.2.2

On peut aussi voir les choses différemment.
Le système (3.2) s'écrit sous forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_n \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

La matrice de ce système est une matrice de type Vandermonde.
On montre que son déterminant est

$$det = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

On a $det \neq 0$ si tous les x_i sont distincts. On peut donc trouver un unique vecteur de coefficients $(a_n, \ldots, a_0)^t$ résolvant le problème.

Remarque 3.2.3

Il est connu (à admettre) que les matrices de type **Vandermonde** deviennent très mal conditionnées lorsque n augmente (elle sont très sensible aux erreurs d'arrondies).
Dans la pratique, cette méthode n'est à utiliser que si $n \leq 3$. Il serait à la fois inutile et dangereux de vouloir l'utiliser pour n grand.

Exemple 3.2.4

Trouver un polynôme qui interpole le nuage de points $(0, 0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{81})$, $(\frac{2}{3}, \frac{16}{81})$ et $(1, 1)$.

Le nuage contient 4 points distincts, le polynôme cherché est donc de degré 3. Ses coefficients a_i sont solution de

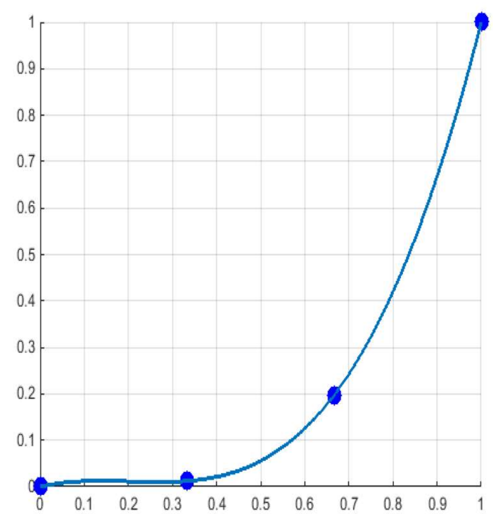
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{27} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{8}{27} & \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{81} \\ \frac{16}{81} \\ 1 \end{pmatrix}$$

dont la solution est $(\frac{18}{9}, \frac{-11}{9}, \frac{2}{9}, 0)^t$. Le polynôme recherché est donc :

$$P_3(x) = \frac{18x^3 - 11x^2 + 2x}{9}$$

Code Matlab 3.2.5

```
A=[0 0 0 1;1/27 1/9 1/3 1;...
    8/27 4/9 2/3 1;1 1 1 1];
B=[0 1/81 16/81 1]';
S=A\B
x=0:0.1:1;
hold on
plot(0,0,'b--o')
plot(1/3,1/81,'b--o')
plot(2/3,16/81,'b--o')
plot(1,1,'b--o')
h=plot(x,(18*x.^3-11*x.^2+2*x)/9);
h.LineWidth = 2;
```



3.3 Interpolation de Lagrange

L'interpolation de Lagrange est une façon simple et systématique de construire un polynôme d'interpolation.
Prenons l'exemple d'une interpolation linéaire $n = 1$.

On considère deux points $(x_0, y_0),\ (x_1, y_1)$ avec :

$$\begin{cases} x_0 \neq x_1 \\ y_0 = f(x_0) \text{ et } y_1 = f(x_1) \end{cases}$$

Pour déterminer le polynôme $P_1(x)$ de degré 1 (d'équation : $y = ax + b$) qui passe par deux points distincts (x_0, y_0), (x_1, y_1).

On peut résoudre le système d'équations : $\begin{cases} ax_0 + b &= y_0 \\ ax_1 + b &= y_1 \end{cases}$

d'où $\begin{cases} a = & \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ b = & y_0 - ax_0 = \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} \end{cases}$

On a : $P_1(x) = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x + \dfrac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0}$
avec $P_1(x_0) = y_0$ et $P_1(x_1) = y_1$

On pose $L_0(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1}$ et $L_1(x) = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x + \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} \\ &= y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\ &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) \end{aligned}$$

On a $P_1(x_0) = y_0$ et $P_1(x_1) = y_1$
car

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

Considérons maintenant, 3 points (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2) avec :

$$\begin{cases} x_0 \neq x_1, \; x_0 \neq x_2, \text{ et } x_1 \neq x_2 \\ y_0 = f(x_0), \; y_1 = f(x_1) \text{ et } y_2 = f(x_2) \end{cases}$$

Pour déterminer le polynôme $P_2(x)$ de degré 2, d'équation $y = ax^2 + bx + c$ qui passe par trois points distincts (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2), on doit construire trois fonctions $L_i(x)$. Le raisonnement et le même, il suffit de poser :

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \\ L_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ L_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

Ces trois fonctions vérifiant les conditions suivantes :

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

Ainsi,

$$P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

est le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 2 associé aux points (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2).

On analyse le cas général de la même façon. L'expression générale pour la fonction $L_i(x)$ est donc

$$\begin{aligned} L_i(x) &= \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \\ &= \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \end{aligned}$$

L_i est donc un polynôme de degré n qui vaut 1 si $x = x_i$ et qui s'annule à tous les autres points d'interpolations.

Définition 3.3.1 (Définition des polynômes de Lagrange)

On appelle polynômes de Lagrange associés aux nœuds $\{x_i\}_{i=0,\cdots,n}$, les $n+1$ polynômes $L_i \in \mathcal{P}_n, i = 0, \cdots, n$, définis par

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

Proposition 3.3.2

Les polynômes de Lagrange $\{L_i\}_{i=0,\cdots,n}, n \geq 1$, sont tous de degré n, vérifient $L_i(x_j) = \delta_{ij},\ i, j = 0, \cdots, n$, et forment une base de $\mathcal{P}_n$.

Preuve

Le résultat est évident si $n = 1$. Si $n \geq 1$, les deux premières propriétés découlent directement de la définition des polynômes de Lagrange.
La famille $\{L_i(x)\}_{i=0,\cdots,n}$ est composée de $n+1$ éléments. Pour montrer qu'elle forme une base de $\mathcal{P}_n$, qui est de dimension $n+1$, il faut et il suffit d'établir que les $L_i(x)$ sont linéairement indépendants.
Soient $\lambda_0, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, tels que

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x) = 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

On a, pour $x = x_j$

$$0 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x_j) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j, \ \ j = 0, \cdots, n$$

Donc $\lambda_j = 0$ pour tout $j = 0, \cdots, n$.
Ainsi la famille $\{L_i(x)\}_{i=0,\cdots,n}$ forme une base de l'espace $\mathcal{P}_n$ (espace des polynômes de degré $\geq n$), appelée **Base de Lagrange**.

Théorème 3.3.3

Soient $n+1$ points distincts x_i réels et $n+1$ réels y_i, il existe un unique polynôme $P \in \mathcal{P}_n$ tel que

$$P(x_i) = y_i \quad \text{pour} \quad i = 0, ..., n$$

Ce polynôme s'écrit : $\quad P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$

avec $\quad L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad$ (polynômes de Lagrange)

On a en particulier deux propriétés :

— L_i est de degré n pour tout i

— $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq n$ c'est-à-dire $L_i(x_i) = 1$ et $L_i(x_j) = 0$ pour $i \neq j$

Preuve

— **Unicité**

Soient P_n et Q_n deux polynômes de degré inférieur ou égal à n tels que :

$$P_n(x_i) = Q_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \cdots, n.$$

Notons $R_n = P_n - Q_n$, ce polynôme est de degré inférieur ou égal à n, et possède au moins $n+1$ racines (les $x_i, i = 0, \cdots, n$), ce qui signifie que R_n ne peut être que le polynôme nul.

— **Existence**

On commence par chercher des polynômes L_j de degré n tels que

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}, \quad i = 0, \cdots, n$$

Alors L_j s'annule en $x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n$ donc L_i s'écrit :

$$L_j(x) = \alpha(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\cdots(x - x_n)$$

$\Rightarrow L_j$ est bien de degré n.

Reste à trouver α. Pour cela, on utilise le fait que $L_j(x_j)$ doit être égal à 1 :

$$L_j(x_j) = 1 = \alpha(x_j - x_0)(x_j - x_1)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_n),$$

soit $\alpha = \frac{1}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$.

Donc

$$L_j(x) = \frac{(x - x_1)\cdots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\cdots(x - x_n)}{(x_j - x_1)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_n)}$$

On pose alors $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$. Comme

$$P_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i \delta_{ij} = y_j, \quad j = 0, \cdots, n$$

par unicité, le polynôme P_n est le polynôme cherché.

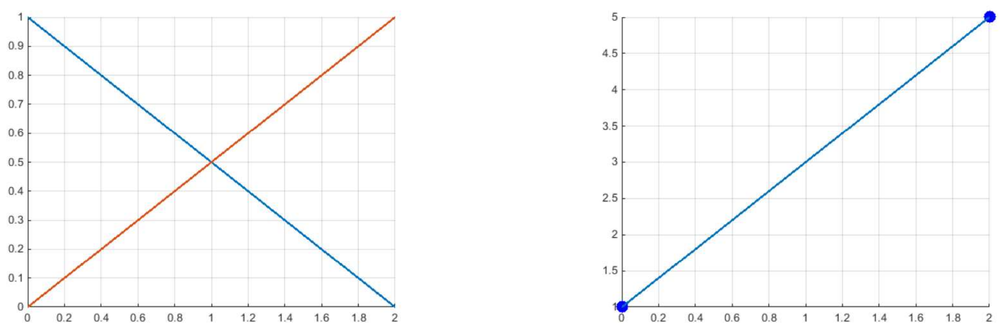
Exemple 3.3.4 (Interpolation de Lagrange : Linéaire ($n = 1$))

Déterminer le polynôme d'interpolation $P_1(x)$ de degré 1 tel que

$$P_1(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1$$

avec $y_i = f(x_i),\ i = 0, 1$, $(x_0, y_0) = (0, 1), (x_1, y_1) = (2, 5)$
On a déjà déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange qui passe 2 points. Donc

$$\begin{aligned} P_1(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) \\ &= y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\ &= 1 \frac{x - 2}{0 - 2} + 5 \frac{x - 0}{2 - 0} \\ &= 2x + 1 \end{aligned}$$



(a) La base de Lagrange

(b) Interpolation de Lagrange

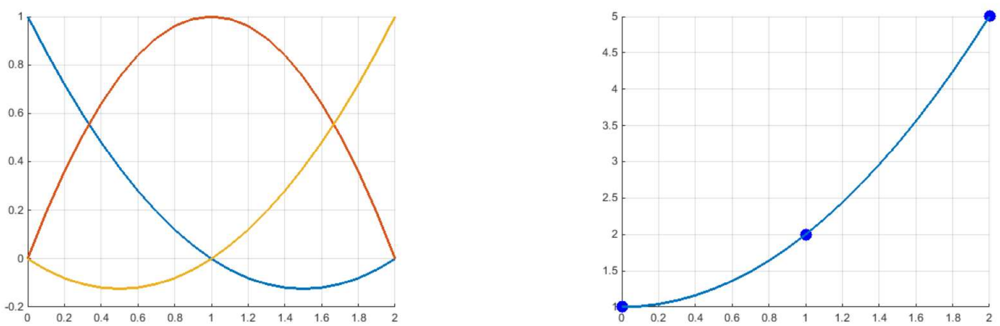
FIGURE 3.1 – Interpolation de Lagrange : Linéaire ($n = 1$)

Exemple 3.3.5 (Interpolation de Lagrange : quadratique $(n = 2)$)

On suppose que $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $(x_1, y_1) = (1, 2)$ et $(x_2, y_2) = (2, 5)$.
Déterminer le polynôme $P_2(x)$ d'interpolation polynômiale qui passe par les points $(x_i, y_i)_{i=0,1,2}$
D'après la méthode de Lagrange,

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) \\
&= y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\
&\quad + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\
&= 1 \frac{(x - 1)(x - 2)}{(0 - 1)(0 - 2)} + 2 \frac{(x - 0)(x - 2)}{(1 - 0)(1 - 2)} + 5 \frac{(x - 0)(x - 1)}{(2 - 0)(2 - 1)} \\
&= x^2 + 1
\end{aligned}
$$

On a bien $P_2(0) = 1$, $P_2(1) = 2$ et $P_2(2) = 5$



(a) La base de Lagrange

(b) Interpolation de Lagrange

FIGURE 3.2 – Interpolation de Lagrange : quadratique $(n = 2)$

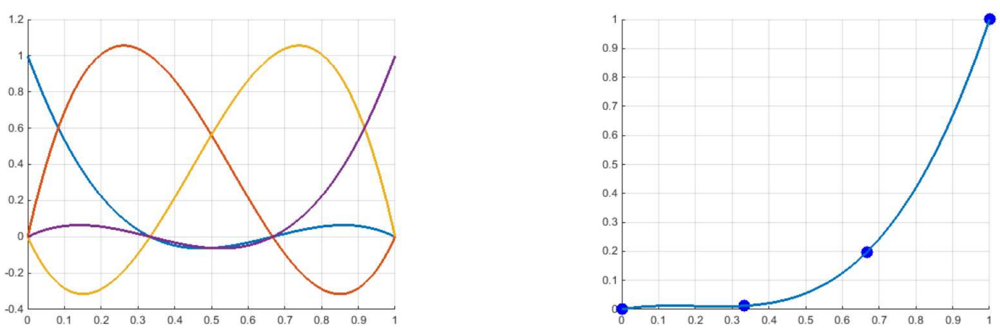
Exemple 3.3.6 (Interpolation de Lagrange : cubique ($n = 3$))

Reprenons les points $(0,0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{81})$, $(\frac{2}{3}, \frac{16}{81})$ et $(1,1)$, pour lesquels nous avons obtenu le polynôme $P_3(x) = \frac{18x^3-11x^2+2x}{9}$ à l'aide de Vandermonde.
La base de Lagrange est donnée par :

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = -\frac{1}{2}(x-1)(3x-2)(3x-1) \\
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{9}{2}x(x-1)(3x-2) \\
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = -\frac{9}{2}x(x-1)(3x-1) \\
L_3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{1}{2}x(3x-2)(3x-1)
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
P_3(x) &= 0L_0(x) + \frac{1}{81}L_1(x) + \frac{16}{81}L_2(x) + 1L_3(x) \\
&= \frac{18x^3-11x^2+2x}{9}
\end{aligned}
$$



(a) La base de Lagrange

(b) Interpolation de Lagrange

FIGURE 3.3 – Interpolation de Lagrange : quadratique ($n = 3$)

3.4 Polynôme d'interpolation de Newton

La détermination et l'évaluation des polynômes de Lagrange sont assez coûteuses lorsque le nombre de nœuds s'accroît.
Une autre façon de construire $P \in \mathbb{P}_n$ tel que $P(x_i) = f(x_i)$ est d'utiliser la formule de Taylor et d'introduire les **différences divisées**.
L'interpolation itérée de Newton-Côtes est un procédé itératif qui permet de calculer le polynôme d'interpolation $P_n(x)$ de degré n basé sur $(n+1)$ points $(x_i, y_i)_{i=0,\ldots,n}$ à partir du polynôme d'interpolation

$P_{(n-1)}(x)$ de degré $(n-1)$ basé sur n points $(x_i, y_i)_{i=0,\ldots,n-1}$, en posant

$$P_n(x) = P_{(n-1)}(x) + C(x),\ n \geq 1$$

Définition 3.4.1 (Proposition : Base de Newton)

Les polynômes $1, (x-x_0), (x-x_0)(x-x_1), \cdots, (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$ constituent une base de $\mathcal{P}_n$ (appelée base de Newton) associée aux nœuds x_i.

Preuve

La famille $\{1, (x-x_0), (x-x_0)(x-x_1), \cdots, (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\}$ est composée de $n+1$ éléments (polynômes).
Ils sont indépendants parce que de degrés différents, donc forme une base de $\mathcal{P}_n$, qui est de dimension $n+1$.

3.4.2 Différences divisées

Le polynôme d'interpolation de Newton de degré n relatif à la subdivision $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, s'écrit :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \alpha_0 + \alpha_1(x-x_0) + \alpha_2(x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad + \ldots + \alpha_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k(x), \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} e_0 = 1, \\ e_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}), \quad k = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Avec

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad \forall i = 0, \ldots, n.$$

Il faut alors déterminer les coefficients $(\alpha_k)_{0\leq k\leq n}$

Le polynôme d'interpolation de Newton de degré n, $P_n(x)$ évalué en x_0 donne :

$$P_n(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k(x_0) = \alpha_0 = f(x_0) = f[x_0]$$

De manière générale, on note

$$f[x_i] = f(x_i), \quad \forall i = 0, \ldots, n$$

$\mathbf{f}[\mathbf{x_i}]$ est appelée **différence divisée d'ordre 0**.

Le polynôme d'interpolation de Newton de degré n, P_n évalué en x_1 donne :

$$\begin{aligned} P_n(x_1) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k(x_1) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1(x_1 - x_0) \\ &= f[x_0] + \alpha_1(x_1 - x_0) \\ &= f[x_1] \end{aligned}$$

d'où

$$\alpha_1 = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$

$\mathbf{f[x_0, x_1]}$ est appelée **différence divisée d'ordre 1**.

On définit les premières différences divisées de la fonction $f(x)$ par :

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Le polynôme P_n évalué en x_2 donne :

$$\begin{aligned} P_n(x_2) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k(x_2) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1(x_2 - x_0) + \alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x_2 - x_0) + \alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ &= f[x_2] \end{aligned}$$

on a alors :

$$\begin{aligned} \alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) &= f[x_2] - f[x_0] - f[x_0, x_1](x_2 - x_0) \\ \alpha_2 &= \frac{f[x_2] - f[x_0] - f[x_0, x_1](x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{1}{(x_2 - x_0)}\Big(\frac{f[x_2] - f[x_0]}{(x_2 - x_1)} - f[x_0, x_1]\frac{(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1}\Big) \\ &= \frac{1}{(x_2 - x_0)}\Big(\frac{f(x_2) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_0)}{(x_2 - x_1)} - f[x_0, x_1]\frac{(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1}\Big) \\ &= \frac{1}{(x_2 - x_0)}\Big(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}\frac{(x_1 - x_0)}{x_2 - x_1} - f[x_0, x_1]\frac{(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1}\Big) \\ \alpha_2 &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2] \end{aligned}$$

$\mathbf{f[x_0, x_1, x_2]}$ est appelée **différence divisée d'ordre 2**.

On obtient alors par récurrence :

$$\alpha_k = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} = f[x_0, \ldots, x_k]$$

Notation 3.4.3

$\mathbf{f[x_0, \cdots, x_k]}$ est appelée **différence divisée d'ordre** k.
Soit P_k le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, ..., x_k$, $f[x_0, ..., x_k]$ est le coefficient directeur du polynôme P_k

Remarque 3.4.4

L'ordre des points $x_0, ..., x_k$ n'influence pas la valeur de $f[x_0, ..., x_k]$

Théorème 3.4.5

1. Le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, ..., x_n$ s'écrit :

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, ..., x_k](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})$$

2. Les coefficients $f[x_0, ..., x_k]$ sont déterminés par la formule recurente suivante :

$$\begin{cases} f[x_0, ..., x_k] = \frac{f[x_1,...,x_k] - f[x_0,...,x_{k-1}]}{x_k - x_0} \\ f[x_i] = f(x_i) \end{cases}$$

3.4.6 Différences divisées : Algorithme de Hörner

On décrit une méthode simple et efficace permettant de calculer les polynômes d'interpolation de Lagrange.

Il s'agit maintenant de calculer les P_k en pratique. Cette manipulation comporte deux étapes : le calcul des $f[\cdots]$ puis la déduction des P_k via la formule de Newton.

La manière la plus simple consiste à construire une table dite de différences divisées de la façon suivante.

etape 0	etape 1	etape 2	...	etape n
$f[x_0]$				
$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$			
$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
$f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$		
$\vdots$				
$\vdots$				
$f[x_n]$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	...	$f[x_0, ..., x_n]$

Remarque 3.4.7

La construction de cette table est simple.

Pour obtenir par exemple $f[x_0, x_1, x_2]$, il suffit de soustraire les 2 termes adjacents $f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]$ et de diviser le résultat par $(x_2 - x_0)$.

De même, pour obtenir $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$, on soustrait $f[x_0, x_1, x_2]$ de $f[x_1, x_2, x_3]$ et on divise le résultat par $(x_3 - x_0)$.

La formule de Newton utilise la **diagonale principale** de cette table.

À de la k^{ieme} étape la case mémoire $table(k)$ contient le coefficient $f[x_0, ..., x_k]$ et on utilise l'algorithme de Hörner pour calculer $P_n(x) = f[x_0] + (x - x_0)(f[x_0, x_1] + (x - x_1)(f[x_0, x_1, x_2] + ... + (x - x_n)(f[x_0, ..., x_{n-1}]))..)$

Exemple 3.4.8

x_i	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$f(x_i) = x_i^4$	0	$\frac{1}{81}$	$\frac{16}{81}$	1

etape 0	etape 1	etape 2	etape 3
0			
$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{27}$		
$\frac{16}{81}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{7}{9}$	
1	$\frac{65}{27}$	$\frac{25}{9}$	2

$$P_3(x) = 0 + \frac{1}{27}(x - x_0) + \frac{7}{9}(x - x_0)(x - x_1) + 2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Soit en développant l'expression de P_3 dans la base canonique :

$$P_3(x) = \frac{18x^3 - 11x^2 + 2x}{9}$$

3.5 Etude de l'erreur

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction donnée, on construit le polynôme $P(x)$ qui interpole les valeurs de f aux points $x_0, x_1, ..., x_n$ ($x_i \in [a, b]$), ce qui conduit à $y_i = f(x_i)$ pour $i = 1, 2, ..., n$.
Quelle est alors l'erreur commise si on considère le polynôme $P(x)$ comme étant une approximation de la fonction f ?
Pour mesurer la qualité de cette approximation, nous devons estimer l'erreur entre $f(x)$ et $P(x)$, c'est-à-dire trouver une majoration de la valeur absolue de $P(x) - f(x)$.

3.5.1 Etude de l'erreur : cas de Lagrange

Théorème 3.5.2

Soient $x_0, x_1, ..., x_n$, $n+1$ points distincts dans $[a,b]$ et soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$. Alors pour tout $x \in [a,b]$ il existe un point $\xi \in]a,b[$ tel que :

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi), \tag{3.3}$$

où $\pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

Pour la démonstration, nous avons besoin du théorème de **Rolle** généralisé.

Théorème 3.5.3 (Théorème de **Rolle** généralisé)

Si f est un fonction continue sur $[a,b]$et n fois derivable sur $]a,b[$ qui s'annule en $n+1$ points $x_i,\ i = 0, \cdots, n$, alors il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(\xi) = 0$.

Remarque 3.5.4

L'énonce habituel du théorème de Rolle correspond au cas $n = 1$.

Preuve

Fixons $x \in [a,b]$.

— Si $x = x_i$

on a $\pi_{n+1}(x_i) = 0$. Donc tout point ξ convient. c-à-d la formule (3.3) donne seulement $0 = 0$.

— Si x est distinct des points x_i,

soit Q_{n+1} le polynôme d'interpolation de f aux points $x, x_0, x_1, ..., x_n$.
Par construction on a : $f(x) - P(x) = Q_{n+1}(x) - P(x)$.
Or $Q_{n+1} - P$ est de degré $\leq n+1$ et s'annule aux points $x_0, x_1, ..., x_n$.
Donc $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $Q_{n+1}(t) - P(t) = c\pi_{n+1}(t)$.
Posons maintenant, $g(t) = f(t) - Q_{n+1}(t) = f(t) - P(t) - c\pi_{n+1}(t)$.
Alors g admet $n+2$ racines distincts et d'après le Théorème de **Rolle** généralisé, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $g^{(n+1)}(\xi) = 0$.
D'autre part on a : $P \in \mathbb{P}_n$ c-à-d $P^{(n+1)} = 0$ et $\pi_{n+1}^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$
D'où la valeur de c : $c = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$.

3.5.5 Etude de l'erreur : cas de Newton

Dans le cas de l'erreur d'interpolation à partir de la forme de Newton, on a :

$$f(x) - P_n(x) = f[x, x_0, ..., x_n]\pi_n(x).$$

où $\pi_n(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})$ Comme on a la même fonction f selon les mêmes points x_i pour $i=0,...,n$, il s'agit de deux formes du même polynôme, et l'erreur d'interpolation est la même, d'où

$$f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\pi_n(x)=f[x,x_0,...,x_n]\pi_n(x).$$

Déterminer l'erreur d'interpolation polynômiale dans le cas de l'interpolation parabolique
On approche la fonction $f(x)$ par la parabole passant par les points $(x_0,y_0)=(0,1)$, $(x_1,y_1)=(1,2)$ et $(x_2,y_2)=(2,5)$. Le polynôme d'interpolation $P_2(x)$ de degré 2 tel que
$P_2(x_i)=f(x_i)$, $i=0,1$ et 2
avec $y_i=f(x_i)$ $i=0,1$ et 2, $(x_0,y_0)=(0,1)$, $(x_1,y_1)=(1,2)$ et $(x_2,y_2)=(2,5)$

D'après la méthode de Lagrange,

$$\begin{aligned}P_2(x) &= y_0L_0(x)+y_1L_1(x)+y_2L_2(x)\\ &= 1\frac{(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)}+2\frac{(x)(x-2)}{(1)(-1)}+5\frac{(x)(x-1)}{(2)(1)}\\ &= x^2+1\end{aligned}$$

D'après le théorème précédent,

$$\begin{aligned}f(x)-P_2(x) &= \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\\ &= \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x(x-1)(x-2)\end{aligned}$$

Si $|f^{(3)}(x)|\leq M$ alors $\forall x\in[0,2], |f(x)-P_2(x)|$

$$\begin{aligned}|f(x)-P_2(x)| &\leq \frac{M}{6}|x(x-1)(x-2)|\\ &\leq \frac{M}{6}x(x-1)(x-2)\end{aligned}$$

le maximum de $u(x)=x(x-1)(x-2)$ est atteint en $x^*=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ d'où $\frac{1}{6}u(x^*)=\frac{1}{6}\frac{3-\sqrt{3}}{3}(\frac{3-\sqrt{3}}{3}-1)(\frac{3-\sqrt{3}}{3}-2)=0.06415\approx 6.4\times 10^{-2}$.

$$|f(x)-P_2(x)|\leq 6.4\times 10^{-2}\times M$$

3.5.6 Phénomène de Runge

Proposition 3.5.7

Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,\ b]$, alors :

$$\forall x\in[a,\ b], |f(x)-P_n(x)|\leq\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{(n+1)}$$

Remarque 3.5.8 (Phénomène de Runge)

Intuitivement, connaissant la Proposition 3.5.7 et sachant que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} = 0$, on peut penser qu'en augmentant le degré du polynôme interpolateur de f sur $[a,\ b]$, celui-ci va approcher de mieux en mieux la fonction f.
Mais on ne connait pas $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} M_{n+1}$.
En réalité, nous allons voir que notre intuition est fausse, et qu'en pratique on obtient souvent le résultat opposé à celui attendu : c'est le **phénomène de Runge**.

En pratique, on utilise l'interpolation polynômiale avec des polynômes de degré n assez grand ou l'interpolation polynômiale par morceaux.

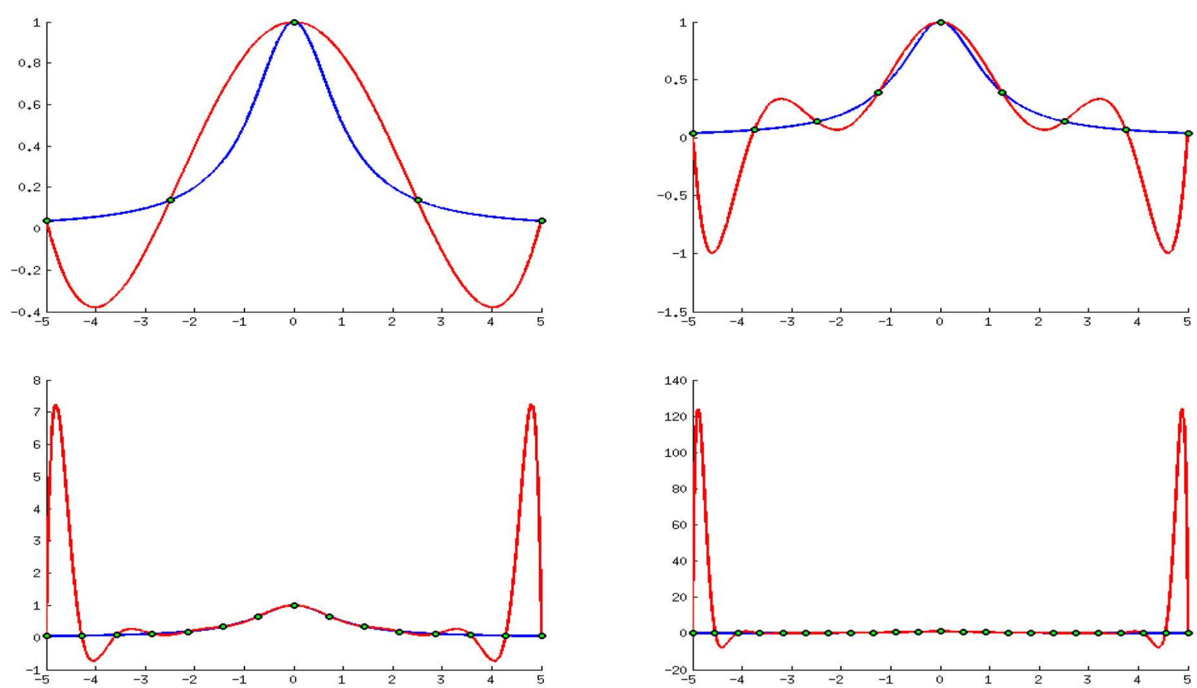
Si on a valeurs expérimentales. L'interpolation polynômiale est une technique peu appropriée pour de telles situations. Les polynômes de degré élevé sont sensibles à la perturbation des données.

La méthode de Lagrange s'adapte mal au changement du nombre de points.

Exemple 3.5.9

Soit la fonction dite de Runge $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ définie sur $[-5,\ 5]$.

En interpolant avec une subdivision réguliér et $n = 4$, $n = 8$, $n = 14$ et $n = 22$.



3.5.10 Comment évité le phénomène de Runge

Le phénomène peut être évité si dans un intervalle arbitraire $[a,\ b]$, on choisit comme points d'interpolation ce que l'on appelle les nIJuds de **Chebyshev-Gauss-Lobatto**

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{i\pi}{n}\right),\ i = 0, ..., n$$

Exemple 3.5.11

Soit la fonction dite de Runge $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ définie sur $[-5,\ 5]$.

En interpolant avec une subdivision régulier et $n = 4$, $n = 8$, $n = 14$ et $n = 22$.