# Chapitre 1

# Diagonalisation

Dans ces notes, $K$ désigne un corps commutatif et les espaces vectoriels considérés sont de dimension non nul.

## 1.1 Valeurs propres, vecteurs propres

Soit $u$ un endomorphisme d'un ev $E$ sur $K$ (de dimension finie ou infinie).

**Définition 1.1.1.** S'il existe $x \in E - \{0\}$ et $\lambda \in K$ tels que $u(x) = \lambda x$, on dit que $\lambda$ est **valeur propre** de $u$ et $x$ est un **vecteur propre** de $f$ **associé** à $\lambda$.

**Proposition 1.1.2.** *$\lambda$ est une valeur propre de $u$ si et seulement si*

$$V(\lambda) := \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\} \neq \{0\}.$$

*Démonstration.* Puisque $V(\lambda)$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors $0_E \in V(\lambda)$. Donc $V(\lambda) \neq \{0\} \iff$ il existe $x \in V(\lambda)$, $x \neq 0_E$. □

**Définition 1.1.3.** Si $\lambda$ est une valeur propre de $u$, le sous-espace vectoriel

$$V(\lambda) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)$$

de $E$ est appelé **sous-espace propre associé** à $\lambda$.

**Remarque 1.1.4.** Les vecteurs non nuls de $V(\lambda)$ sont les vecteurs propres de $u$ associés à $\lambda$.

**Proposition 1.1.5.** *1) Un vecteur propre de $u$ ne peut être associé à deux valeurs propres différentes.*

*2) Tout sous-espace propre $V(\lambda)$ de $u$ est stable par $u$, c'est-à-dire, $u(V(\lambda)) \subset V(\lambda)$.*

*Démonstration.* 1) Soit $x$ un vecteur propre de $u$ associé à deux valeurs propres $\lambda, \mu$. Donc $u(x) = \lambda x = \mu x$. Par suite $(\lambda - \mu)x = 0_E$. D'où $\lambda = \mu$.

2) Soit $x \in V(\lambda)$. Donc $u(x) = \lambda x \in V(\lambda)$ car $V(\lambda)$ est un sous-espace vectoriel de $E$. □

**Proposition 1.1.6.** *Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des valeurs propres deux à deux distinctes de $u$, alors*

$$V(\lambda_1) + \dots + V(\lambda_n) = V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_n),$$

*c'est-à-dire, tout vecteur $x \in V(\lambda_1) + \dots + V(\lambda_n)$ s'écrit d'une façon unique sous la forme*

$$x = x_1 + \dots + x_n$$

*avec $x_1 \in V(\lambda_1), \dots, x_n \in V(\lambda_n)$.*

*Démonstration.* On procède par récurrence sur $n$. Le cas où $n = 1$ est trivial. Supposons que le résultat est valable pour $n-1$ et montrons le pour $n$. Il suffit de montrer ce résultat pour $x = 0_E$. Supposons que $0_E = x_1 + \dots + x_n (*)$ avec $x_1 \in V(\lambda_1), \dots, x_n \in V(\lambda_n)$. Donc

$$0_E = u(x_1 + \dots + x_n) = u(x_1) + \dots + u(x_n) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n (**).$$

Si on multiplie $(*)$ par $\lambda_n$, on obtient de $(*)$ et $(**)$,

$$0_E = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_n)x_1}_{\in V(\lambda_1)} + \dots + \underbrace{(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x_{n-1}}_{\in V(\lambda_{n-1})}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $(\lambda_1 - \lambda_n)x_1 = 0_E, \dots, (\lambda_{n-1} - \lambda_n)x_{n-1} = 0_E$. Donc $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0_E$ (car les $\lambda_i$ sont deux à deux distinctes). Finalement, $x_n = 0_E$. □

**Définition 1.1.7.** Soit $A \in K^{n \times n}$. On sait qu'il existe un endomorphisme unique $u$ de $K^n$ tel que $\mathrm{Mat}_{e_0}(u) = A$ où $e_0$ est la base canonique de $E = K^n$.

Les **valeurs** et les **vecteurs propres** de $A$ sont ceux de $u$.

**Théorème 1.1.8.** *Soient $A \in K^{n \times n}$ et $\lambda \in K$. On a l'équivalence de*

*1)* *$\lambda$ est une valeur propre de $A$.*

*2)* *$A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.*

*3)* $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} 1) &\iff \mathrm{Ker}(u - \lambda 1_E) \neq \{0\} \\ &\iff u - \lambda 1_E \text{ n'est pas injectif} \\ &\iff u - \lambda 1_E \text{ n'est pas bijectif} \\ &\iff \mathrm{Mat}_{e_0}(u - \lambda 1_E) = A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff 3) \end{aligned}$$

□

**Définition 1.1.9.** Soient $A = (\alpha_{ij}) \in K^{n\times n}$ et $u$ l'endomorphisme de $K^n$ tel que $\mathrm{Mat}_{e_0}(u) = A$ où $e_0$ est la base canonique de $K^n$. Le **polynôme caractéristique** de $A$ et aussi de $u$, noté $\chi_A(X)$ ou $\chi_u(X)$, est, par définition, le polynôme :

$$\det(A - XI_n) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - X & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - X & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} - X \end{vmatrix}.$$

**Remarque 1.1.10.** D'après la définition du déterminant d'une matrice carrée,

$$\chi_A(X) = \underbrace{(\alpha_{11} - X)(\alpha_{22} - X)\dots(\alpha_{nn} - X)}_{\text{terme associé à } \sigma=\mathrm{id}_{\{1,\dots,n\}}} + Q$$

où $Q$ est un polynôme de degré $\leq n-1$. Donc $\chi_A(X)$ est un polynôme de degré $n$ dont le coefficient dominant est $(-1)^n$.

Le coefficient constant de $\chi_A(X)$ est clairement $\det(A)$.

**Corollaire 1.1.11.** Soient $A \in K^{n\times n}$ et $\lambda \in K$. On a l'équivalence de

1) $\lambda$ est une valeur propre de $A$.

2) $\lambda$ est une racine de $\chi_A(X)$.

Donc $A$ admet un nombre fini de valeurs propres.

**Exemples 1.1.12.** 1. Si $A = (a_{ij})$ est triangulaire, $\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - \lambda)$. Donc les valeurs propres de $A$ sont ses coefficients diagonaux.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$. Donc

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - X & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - X \end{vmatrix} = X^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})X + (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}).$$

3. Si $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ \mathbf{0} & A_2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre $n$ telle que $A_2$ est une matrice carrée d'ordre $n-m$ et $C$ est une matrice de type $(m, n-m)$. D'après Ex. **??**,

$$\chi_A(X) = \chi_{A_1}(X)\chi_{A_2}(X).$$

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 3-\lambda & 1-\lambda & 1 \\ 3-\lambda & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\lambda^2. \end{aligned}$$

On a 3 est une racine simple et 0 est une racine double.
On va chercher les sous-espaces propres $V(0)$ et $V(3)$. D'abord

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow x+y+z=0.$$

Donc $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ est une base de $V(0)$. De même

$$(A-3I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow x=y=z,$$

car

$$\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&-3&3\\0&3&-3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&-3&3\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Donc $\{(1,1,1)\}$ est une base de $V(3)$.

**Proposition 1.1.13.** *Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.*

*Démonstration.* Soient $A,B\in K^{n\times n}$ deux matrices semblables et $\lambda\in K$. On a $B=P^{-1}AP$ pour une certaine matrice inversible $P$. Donc

$$\chi_B(\lambda)=\det(B-\lambda I_n)=\det(P^{-1}AP-\lambda I_n)=\det(P^{-1}(A-\lambda I_n)P)=\det(A-\lambda I_n)=\chi_A(\lambda).$$

□

Soit $u$ un endomorphisme d'un $K$-ev $E$ de dimension $n$. Soient $e=(e_1,\dots,e_n)$ une base de $E$ et $A=\mathrm{Mat}_e(u)$. Soient $x=x_1e_1+\cdots+x_ne_n\in E$ et $\lambda\in K$. Donc

$$u(x)=\lambda x\Longleftrightarrow A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\Longleftrightarrow u_0(x_1,\dots,x_n)=\lambda(x_1,\dots,x_n).$$

où $u_0$ l'endomorphisme de $K^n$ vérifiant $\mathrm{Mat}_{e_0}(u_0)=A$ où $e_0$ est la base canonique de $K^n$.

Donc $u$ et $A$ (et $u_0$) ont les mêmes valeurs propres.

**Définition 1.1.14.** Soit $u$ un endomorphisme d'un $K$-ev $E$ de dimension $n$. D'après la prop. 1.1.13, le polynôme caractéristique de $\mathrm{Mat}_e(u)$ ne dépond pas de la base choisie $e$. Ce polynôme est appelé aussi **polynôme caractéristique** de $u$ et noté $\chi_u(X)$.

**Proposition 1.1.15.** *Soit $u$ un endomorphisme d'un ev $E$ de dimension $n$.*

*1) Si $E_1$ est un sous-espace de $E$ stable par $u$, alors $\chi_{u_1}\mid\chi_u$.*

*2) Si $E = E_1 \oplus E_2$ où $E_1$ et $E_2$ deux sous-espaces stables par $u$, alors $\chi_u = \chi_{u_1}\chi_{u_2}$.*

*3) Si $\lambda$ est une racine d'ordre $k$ de $\chi_u(X)$, alors*

$$1 \leq \dim V(\lambda) \leq k.$$

*Démonstration.* 1) Soit $(e_1, \ldots, e_m)$ une base de $E_1$. On complète cette base en une base $e = (e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n)$ de $E$. Donc

$$A = \mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{(e_1,\ldots,e_m)}(u_1) & C \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$$

où $B$ est une matrice carrée d'ordre $n-m$ et $C$ est une matrice de type $(m, n-m)$. D'après l'exemple 1.1.12, 3),

$$\chi_u(X) = \chi_A(X) = \chi_{u_1}(X)\chi_B(X).$$

D'où $\chi_{u_1} \mid \chi_u$.

2) se démontre de même.

3) Soit $\lambda$ une racine d'ordre $k$ de $\chi_u$. On pose $\dim V(\lambda) = m$. D'après 1), $(\lambda - X)^m \mid \chi_u$. D'où $m \leq k$. □

## 1.2 Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

**Définition 1.2.1.** On dit qu'une matrice $A \in K^{n\times n}$ est **diagonalisable** si elle admet une matrice semblable diagonale.

**Proposition 1.2.2.** *Soit $u$ un endomorphisme d'un ev $E$ de dimension $n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

*1) il existe une base de $E$ formée de vecteurs propres ;*

*2) il existe une base $e$ de $E$ telle que $\mathrm{Mat}_e(u)$ est diagonale ;*

*3) il existe une base $e$ de $E$ telle que $\mathrm{Mat}_e(u)$ est diagonalisable ;*

*4) pour toute base $e$ de $E$, $\mathrm{Mat}_e(u)$ est diagonalisable ;*

*5) les vecteurs propres de $u$ engendrent $E$.*

*Démonstration.* 1) $\Longleftrightarrow$ 2) Si $e$ est une base de $E$, alors $e$ est formée de vecteurs propres si et seulement si $\mathrm{Mat}_e(u)$ est diagonale.

2) $\Longrightarrow$ 3) évidente.

3) $\Longrightarrow$ 2) Soit $e$ une base de $E$ telle que $A = \mathrm{Mat}_e(u)$ est diagonalisable. Donc $P^{-1}AP$ est diagonale pour une certaine matrice carrée inversible $P$. Soit $e'$ la base de $E$ dont la matrice de passage est $P$. D'où $\mathrm{Mat}_{e'}(u) = P^{-1}AP$.

4) $\Longrightarrow$ 3) triviale.

2) $\Longrightarrow$ 4) Soit $e$ une base de $E$ et soit $e'$ une base de $E$ telle que $\mathrm{Mat}_{e'}(u)$ est diagonale. La condition 4) découle du fait que les deux matrices $\mathrm{Mat}_e(u)$ et $\mathrm{Mat}_{e'}(u)$ sont semblables.

1) $\Longrightarrow$ 5) évidente.

5) $\Longrightarrow$ 1) Immédiate en utilisant le théorème de la base incomplète. □

**Définition 1.2.3.** Si l'une des conditions équivalentes de la prop. 1.2.2 est vérifiée, on dit que $u$ est **diagonalisable**.

**Définition 1.2.4.** Un polynôme $f \in K[X]$ est dit **scindé** sur $K$ si toutes ses racines sont dans $K$.

**Théorème 1.2.5.** *Soit $u$ un endomorphisme d'un ev $E$ sur $K$ de dimension $n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

*1) $u$ est diagonalisable.*

*2) $\chi_u(X)$ est scindé sur $K$ (ce qui est le cas si $K = \mathbb{C}$), et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les valeurs propres de $u$,*

$$E = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_r).$$

*3) $\chi_u(X)$ est scindé sur $K$, et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les racines de $\chi_u(X)$ dont leurs ordres de multiplicités respectives $k_1, \ldots, k_r$, alors*

$$\dim V(\lambda_i) = k_i$$

*pour $i = 1, \ldots, r$.*

*Démonstration.* 1) $\Longrightarrow$ 2) Si $e$ est une base de $E$ formée de vecteurs propres alors $A = \mathrm{Mat}_e(u)$ est diagonale. Donc $\chi_u(X) = \chi_A(X)$ est scindé sur $K$. On sait que les vecteurs propres de $u$ engendrent $E$, donc

$$\begin{aligned} E &= \mathrm{Vect}\left(\left(V(\lambda_1) - \{0\}\right) \cup \cdots \cup \left(V(\lambda_r) - \{0\}\right)\right) \\ &= \mathrm{Vect}(V(\lambda_1) - \{0\}) + \cdots + \mathrm{Vect}(V(\lambda_r) - \{0\}) \\ &= V(\lambda_1) + \cdots + V(\lambda_r)(*) \end{aligned}$$

(car

$$\mathrm{Vect}(A_1 \cup \cdots \cup A_r) = \mathrm{Vect}(A_1) + \cdots + \mathrm{Vect}(A_r),$$

où les $A_i$ sont des parties de $E$.) $\square$

2) $\Longrightarrow$ 1) évidente d'après $(*)$.
2) $\Longleftrightarrow$ 3) Supposons que $\chi_u(X)$ est scindé sur $K$. Donc

$$\begin{aligned} E = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_r) &\Longleftrightarrow n = \dim E = \dim V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_r) \\ &\Longleftrightarrow n = \dim E = k_1 + \cdots + k_r = \dim V(\lambda_1) + \cdots + \dim V(\lambda_r) \\ &\Longleftrightarrow (k_1 - \dim V(\lambda_1)) + \cdots + (k_r - \dim V(\lambda_r)) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \dim V(\lambda_1) = k_1, \ldots, \dim V(\lambda_r) = k_r \\ &\quad\ \text{(D'après la prop. 1.1.15.)} \end{aligned}$$

**Corollaire 1.2.6.** Si $\chi_f$ a $n$ racines simples dans $K$ alors $u$ est diagonalisable.

**Corollaire 1.2.7.** Soit $A \in K^{n \times n}$. On a l'équivalence de

1) $A$ est diagonalisable.
2) $\chi_A(X)$ est scindé sur $K$, et si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les racines de $\chi_A(X)$ dont leurs ordres de multiplicités respectives $k_1, \dots, k_r$, alors

$$\dim V(\lambda_i) = k_i$$

pour $i = 1, \dots, r$.

**Exemple 1.2.8.** La matrice $A$ de l'exemple 1.1.12, 4), est diagonalisable car $\dim V(0) = 2$ et $\dim V(3) = 1$. Donc

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $e' = ((1,1,1), (1,0,-1), (0,1,-1))$.

## 1.3 Applications

### 1.3.1 Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable

Soit $A \in K^{n \times n}$ une matrice diagonalisable. On sait qu'il existe une matrice inversible $P$ et une matrice diagonale $D$ telle que $P^{-1}AP = D$.

Si $X$ et $Y$ deux matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\mu_1, \dots, \mu_n$ respectivement, alors $XY$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_n$.

Donc

$$A^k = (PDP^{-1})^k = \underbrace{PDP^{-1} \dots PDP^{-1}}_{k \text{ fois}} = PD^kP^{-1}.$$

Si les coefficients diagonaux de $D$ sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors, par réccurence sur $k$, $D^k$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$.

### 1.3.2 Calcul du terme général d'une suite récurrente linéaire

On se propose d'étudier la suite réelle définie par la donnée de $u_0, u_1$ et vérifiant

$$u_{n+2} = bu_{n+1} - cu_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a $\underbrace{\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}}_{X_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b & -c \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}}_{X_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, par récurrence sur $n$,

$$X_n = A^n X_0.$$

On a $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - b\lambda + c$. Le discriminant $\Delta' = b^2 - 4c$. Donc $A$ est diagonalisable par voie réelle si et seulement si $b^2 > 4c$. On va déterminer le terme général de cette suite dans ce cas.

Soient $\lambda_1, \lambda_2$ les deux racines de $\chi_A(\lambda)$. Il existe une matrice d'ordre 2 inversible telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. D'où

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'où

$$u_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

On considère la suite de Fibonacci : $u_0 = 0, u_1 = 1$ et

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le trinôme associé à cette suite est $\lambda^2 - \lambda - 1$ qui a deux racines distinctes $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or) et $\varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}$. Les conditions initiales donnent $\alpha + \beta = 0,\ \alpha - \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$. D'où $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, et

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$