Chapitre 2

# Résolution numérique de l'équation $f(x) = 0$

## 2.1 Introduction

1896 Héron d'Alexandrie : approximation de $\sqrt{a},\ a > 0$.
Rechercher la racine carrée de $a$ revient à déterminer l'unique racine positive de l'équation $x^2 - a = 0$.
Comment fait-on pour déterminer cette racines ?
Il existe de nombreuses méthodes de recherche de racines.

**Problème 2.1.1**

Étant donné $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
On cherche un vecteur $x \in \mathbb{R}$ solution de

$$f(x) = 0. \tag{2.1}$$

Nous allons traiter dans de ce chapitre la résolution de l'équation non-linéaire à une seule variable $f(x) = 0$ ou $f(x) = g(x)$.

Puisqu'il n'existe pas de formule générale pour des fonction aussi simples que des polynômes, il est peu probable que l'on puisse résoudre analytiquement l'équation (2.1) dans tous les cas qui nous intéressent.

**Exemple 2.1.2**

- $f(x) = ax + b$. Dans ce cas, l'équation f(x) = 0 est dite équation linéaire.
- $f(x) = ax^2 + bx + c$. (discriminant positif, négatif ou nul).
- Soit la résolution analytique est très coûteuse
- Soit on n'a pas de solution analytique

**Remarque 2.1.3**

Il existe plusieurs méthodes permettent de calculer les zéros de $f$ par approximations successives avec, théoriquement, la précision désirée.

Ces méthodes supposent toutefois que les zéros soient plus ou moins localisés. Ainsi, pour chaque zéro, on devrait pouvoir donner un intervalle $[a,\ b]$ qui ne contient pas d'autre zéro que celui recherché.

Souvent des informations sur le comportement de la fonction $f$ (dérivée première, dérivée seconde) sont nécessaires.

Dans ce qui suit, nous présentons quelques méthodes numériques de résolutions, chacune ayant ces avantages et inconvénients.

La convergence des itérations est caractérisée par la définition suivante :

**Définition 2.1.4**

On dit qu'une suite $(x_k)$ construite par une méthode numérique converge vers $x$ avec un ordre $p \geq 1$ si

$$\exists\, c > 0 : \frac{|x_{k+1} - x|}{|x_k - x|^p} \leq c,\ \forall\, k \geq k_0, \tag{2.2}$$

où $k_0 \geq 0$ est un entier. Dans ce cas, on dit que la méthode est d'ordre $p$.

**Remarque 2.1.5**

Si $p$ est égal à 1, il est nécessaire que $c < 1$ dans (2.3) pour que $(x_k)$ converge vers $x$.
On appelle alors la constante $c$ facteur de convergence de la méthode.

La convergence des méthodes itératives pour la détermination des racines d'une équation non linéaire dépend en général du choix de la donnée initiale $x_0$.
Le plus souvent, on ne sait établir que des résultats de convergence locale, c'est-à-dire valables seulement pour un $x_0$ appartenant à un certain voisinage de la racine $x$. Les méthodes qui convergent vers $x$ pour tout choix de $x_0$ dans l'intervalle $]a, b[$ sont dites *globalement convergentes* vers $x$.

Résoudre numériquement l'équation $f(x) = 0$, revient à chercher $x$ tel que $\mid f(x) \mid \leq \varepsilon$, avec $\varepsilon$ très petit.

L'objet essentiel de ce chapitre est l'approximation des racines d'une fonction réelle d'une variable réelle, c'est-à-dire la résolution approchée du problème (2.1).

Les méthodes pour approcher une racine $x$ de $f$ sont en général **itératives** : elles consistent à construire une suite $(x_k)$ convergente (le plus rapidement possible) vers $x$, i.e.

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = x.$$

## 2.2 Méthode de la bissection (ou de dichotomie)

Cette méthode repose sur le théorème des valeurs intermédiaires suivant :

**Théorème 2.2.1** (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit un intervalle non vide $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et $f$ une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ si $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe $x \in ]a, b[$ tel que $f(x) = 0$.

Le moyen le plus simple de montrer l'existence d'une solution c'est de chercher deux points $a$ et $b$ tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposé et de conclure par le théorème des valeurs intermédiaires.

**Remarque 2.2.2**

L'unicité de la solution provient le plus souvent d'une hypothèse de monotonie.

La méthode de dichotomie consiste à construire une suite d'intervalles emboîtés qui contiennent le zéro de $f$ cherché.

Si on note $I_0 = ]a, b[$ et $I_k$ le sous-intervalle retenu à l'étape $k$, on choisit le sous-intervalle $I_{k+1}$ de $I_k$ pour lequel $f$ a un signe différent à ses deux extrémités.

Plus précisément, on calcule $x_k$ le milieu de l'intervalle $I_k$

— Si $f(a_k) \times f(x_k) < 0$, le zero de $f$ appartient a l'intervalle $I_{k+1} = [a_k,\ x_k]$.

— Si $f(x_k) \times f(b_k) < 0$, le zero de $f$ appartient a l'intervalle $I_{k+1} = [x_k,\ b_k]$.

On poursuit les calculs aussi longtemps que la longueur de l'intervalle $I_k$ est supérieure à la précision voulue. La suite $(x_k)$ des milieux des intervalles $I_k$ convergera vers $x$ (le zéros de $f$).

Plus précisément, on suppose que $f$ est continue dans $[a, b]$ et que $f(a) \times f(b) < 0$

— On pose $c = \frac{a+b}{2}$,
  - — si $f(c) = 0$ Alors $x = c$,
  - — si $f(a) \times f(c) < 0$ on remplace $b$ par $c$,
  - — sinon on remplace $a$ par $c$.

— On continue cette opération jusqu'à ce qu'on trouve $x$ avec la précision demandée.

De cette façon, on construit de manière récurrente trois suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $a_0 = a$, $b_0 = b$ et vérifiant, pour entier naturel $k$,

— $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$,

— $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = x_k$ si $f(a_k) \times f(x_k) < 0$,

— $a_{k+1} = x_k$ et $b_{k+1} = b_k$ si $f(x_k) \times f(b_k) < 0$.

Répéter ces étapes jusqu'à l'obtention de la précision désirée, c'est à dire jusqu'à ce que $|f(x_k)| < \epsilon$, ou $|f(x_k) - f(x_{k-1})| < \epsilon$, $\epsilon$ étant la précision désirée.

**Théorème 2.2.3**

Les $a_k$, $b_k$ et $x_k$ satisfaisant les conditions suivantes :

1. $[a_{k+1},\ b_{k+1}] \subset [a_k,\ b_k]$
2. $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}$
3. $|x_k - x| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}$ et la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $x$ la racine de $f$

**Preuve**

1- Pour $k \geq 0$, on a $x_k = \frac{b_k + a_k}{2}$ et $[a_{k+1},\ b_{k+1}] = [a_k,\ x_k]$ ou $[a_{k+1},\ b_{k+1}] = [x_k,\ b_k]$ donc $[a_{k+1},\ b_{k+1}] \subset [a_k,\ b_k]$.

2- On a par construction $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2}$, montrons par récurrence que : $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}$
Pour $k = 0$ la relation est vérifiée.
Si on suppose que la relation est vraie à l'ordre $k$ ($b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$) alors on a : $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2 \times 2^k} = \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}$

3- On a $x \in [a_k,\ b_k]$ et $x_k = \frac{b_k + a_k}{2} \in [a_k,\ b_k]$ donc $|x_k - x| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}$
En d'autres termes, on a : $x - \frac{b-a}{2^{k+1}} \leq x_k \leq x + \frac{b-a}{2^{k+1}}$,
et comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{b-a}{2^{k+1}} = 0$ on déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} = x$.

**Remarque 2.2.4**

Il est donc possible d'estimer à l'avance le nombre d'itérations nécessaires pour approcher $x$ avec une précision donnée. Si on désire une tolérance $\tau$ sur la racine, alors on a $|x_k - x| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}} \leq \tau$ c-à-d, $\frac{b-a}{\tau} \leq 2^{k+1} \Leftrightarrow log(\frac{b-a}{\tau}) \leq (k+1)log(2)$
On en déduit le minorant de $k$

$$k > \frac{\ln(b-a) - \ln(\tau)}{\ln(2)} - 1$$

## 2.2.5 Algorithme de la bissection

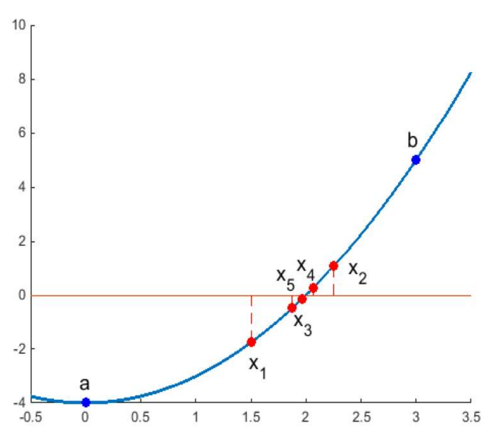
Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ pour lequel $f(a) \times f(b) \leq 0$, trouver une approximation de la solution de $f(x) = 0$ dans cet intervalle en construisant une suite d'intervalles $([a_n, b_n])_n$ contenant cette racine et tels que $a_n$ ou $b_n$ est le milieu de l'intervalle $[a_{n-1}, b_{n-1}]$.

**Algorithme de la bissection**

| | | |
|---|---|---|
| **Entrées** | : | $a, b$ les extrémités de l'intervalle.<br>$\epsilon$ la précision désirée.<br>$N_0$ le nombre maximal d'itérations. |
| **Sortie** | : | la valeur approchée de la solution de $f(x) = 0$. |
| **Etape 0** | : | Si $f(a) = 0$ Alors imprimer la solution est $a$, aller à l'étape **9**.<br>Si $f(b) = 0$ Alors imprimer la solution est $b$, aller à l'étape **9**. |
| **Etape 1** | : | Si $f(b) \times f(a) > 0$ Alors imprimer(pas de changement de signe)<br>aller à l'étape **9**. |
| **Etape 2** | : | Poser $N = 1$. |
| **Etape 3** | : | Tant que $N \leq N_0$ Faire les étapes **4** à **7**. |
| **Etape 4** | : | Poser $x = \frac{a+b}{2}$. |
| **Etape 5** | : | Si $f(x) = 0$ ou $\frac{b-a}{2} < \epsilon$ Alors imprimer $x$ aller à l'étape **9**. |
| **Etape 6** | : | Poser $N = N + 1$. |
| **Etape 7** | : | Si $f(a) \times f(x) > 0$ Alors poser $a = x$ sinon poser $b = x$. |
| **Etape 8** | : | Imprimer après $N_0$ itérations l'approximation obtenue est $x$<br>et l'erreur maximale est $\frac{b-a}{2}$. |
| **Etape 9** | : | Fin. |

**Exemple 2.2.6**

On se propose de calculer une racine de la fonction $f(x) = x^2 - 4$ dans l'intervalle $[0, 3]$.
$f$ est continue sur $[0, 3]$ et on a $f(0) = -4$ et $f(3) = 5$
Donc $f(0) \times f(3) < 0$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f$ possède une racine sur $[0, 3]$.
Nous allons utiliser la méthode de dichotomie pour calculer une estimation de cette racine.




Le tableau suivant récapitule les étapes de résolution de l'équation f(x)=0 par la méthode de dichotomie. Chaque ligne correspond à une itération. xi désigne l'estimation de la racine à l'itération i et erri l'erreur relative à cette estimation. La précision demandée est $= 10^{-3}$.

| $k$ | $a_k$ | $f(a_k)$ | $b_k$ | $f(b_k)$ | $x_k$ | $f(x_k)$ | $err_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.5000 | -1.7500 | 3.0000 | 5.0000 | 1.5000 | -1.7500 | 1.5000 |
| 2 | 1.5000 | -1.7500 | 2.2500 | 1.0625 | 2.2500 | 1.0625 | 0.7500 |
| 3 | 1.8750 | -0.4844 | 2.2500 | 1.0625 | 1.8750 | -0.4844 | 0.3750 |
| 4 | 1.8750 | -0.4844 | 2.0625 | 0.2539 | 2.0625 | 0.2539 | 0.1875 |
| 5 | 1.9688 | -0.1240 | 2.0625 | 0.2539 | 1.9688 | -0.1240 | 0.0938 |
| 6 | 1.9688 | -0.1240 | 2.0156 | 0.0627 | 2.0156 | 0.0627 | 0.0469 |
| 7 | 1.9922 | -0.0312 | 2.0156 | 0.0627 | 1.9922 | -0.0312 | 0.0234 |
| 8 | 1.9922 | -0.0312 | 2.0039 | 0.0156 | 2.0039 | 0.0156 | 0.0117 |
| 9 | 1.9980 | -0.0078 | 2.0039 | 0.0156 | 1.9980 | -0.0078 | 0.0059 |
| 10 | 1.9980 | -0.0078 | 2.0010 | 0.0039 | 2.0010 | 0.0039 | 0.0029 |
| 11 | 1.9995 | -0.0020 | 2.0010 | 0.0039 | 1.9995 | -0.0020 | 0.0015 |
| 12 | 1.9995 | -0.0020 | 2.0002 | 0.0010 | 2.0002 | 0.0010 | 0.0007 |

**Remarque 2.2.7**

La méthode de dichotomie converge vers la solution $x = 2.0002$ à l'itération $k = 12$ comme le prédit la formule vue auparavant :

$$k \geq \frac{\ln(b-a) - \ln(\tau)}{\ln(2)} = \frac{\ln(3-0) - \ln(10^{-3})}{\ln(2)} = 11.5507$$

## 2.3 Méthode de Newton

Cette méthode est la plus utilisée pour la recherche de racines dans les problèmes à une dimension. Elle requiert cependant l'évaluation de $f(x)$ et de $f'(x)$.
Le principe est le suivant : on prend la tangente de $f(x)$ au point $x_i$ (solution approchée), et on la prolonge jusqu'à l'axe des abscisses (fig. 2.1). On utilise alors cette nouvelle abscisse comme point $x_{i+1}$, et l'on recommence tant que $x_{i+1} - x_i$ ne satisfait pas le critère de convergence.

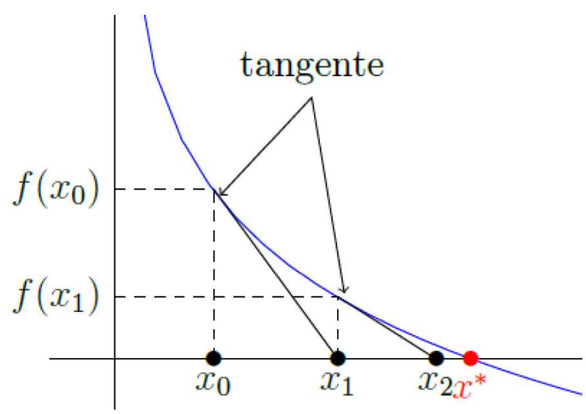



FIGURE 2.1 – Construction des premiers itérés de la méthode de Newton-Raphson.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $x_0$ un point donné.
Supposons que $f'(x) \neq 0$.

On considère la droite $y(x)$ qui passe par le point $(x_k, f(x_k))$ et qui a comme pente $f^{'}(x_k)$ :

$$y(x) = f(x_k) + (x - x_k)f^{'}(x_k)$$

On définit $x_{k+1}$ comme étant le point où cette droite intersecte l'axe des abscisses (Ox), c'est à dire $y(x_{k+1}) = 0$.

**Définition 2.3.1** (Méthode de Newton)

$$\begin{cases} x_0, \quad \text{donnée}\,; \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f^{'}(x_k)},\ \forall k \geq 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

**Théorème 2.3.2** (Théorème de convergence Théorème)

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,\ b])$ satisfaisant les conditions suivantes :

1. $f(a) \times f(b) < 0$
2. $\forall\ x \in ]a,\ b[,\ f'(x) \neq 0$
3. $f''$ est de singe constant sur $[a,\ b]$ (convexité ou concavité)

Alors la méthode de Newton converge quadratiquement vers l'unique solution $\alpha$ de $f(x) = 0$ dans $[a,\ b]$ et ceci pour n'importe quel choix de $x_0 \in [a,\ b]$.

**Preuve**

Considérons le cas : $f'(x) < 0$ et $f''(x) < 0$

— $f$ ; continue, décroissante ($f'(x) < 0$) et $f(a) \times f(b) < 0$
  $\Rightarrow \exists\ \alpha$ unique solution de $f(x) = 0$

D'après la formule de Taylor-Lagrange appliquée à $f$ sur l'intervalle $[x_n,\ \alpha]$ on a : $f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(z)}{2}(\alpha - x_n)^2, z \in [\alpha,\ x_n]$ c-à-d $x_{n+1} - \alpha = \frac{f''(z)}{2f'(x_n)}(\alpha - x_n)^2$.

Donc le signe de $x_{n+1} - \alpha$ est celui de $\frac{f''(z)}{f'(x_n)}$, ainsi $x_{n+1} > \alpha$

Donc $(x_n)$ est minorée par $\alpha$ à partir de $x_1$.

Il reste à montrer que la suite $(x_n)$ est décroissante.

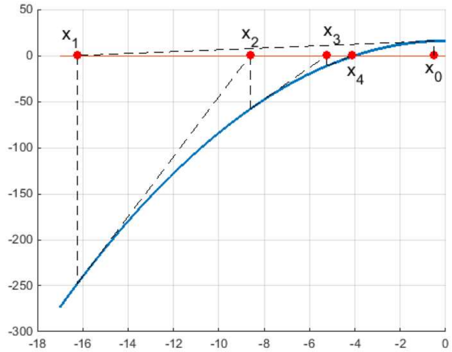
on distingue deux cas :

— $x_0 > \alpha$, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \leq x_0$ et on montre que $x_{n+1} \leq x_n$ pour tout $n \geq 0$

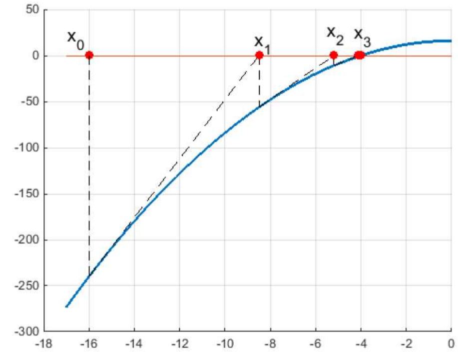
— $x_0 < \alpha$, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \geq x_0$ et on montre que $x_{n+1} \leq x_n$ pour tout $n \geq 1$

$x_0 > \alpha \Rightarrow F(x_0) = x_1 > F(\alpha) = \alpha$ d'autre part : $F(x_0) = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 < x_0$ ($f'(x) < 0$ et $f$ décroissante $\Rightarrow f(x_0) > 0$).

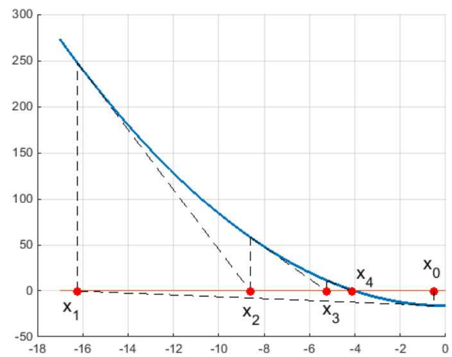
— $\frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} < \left|\frac{f''(z)}{2f'(x_n)}\right|$ la méthode est d'ordre (converge quadratique).



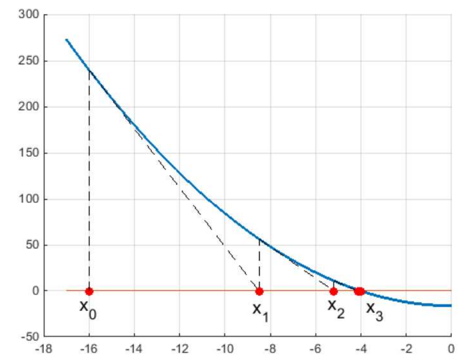

(a) $f$ croissante et $x_0 > \alpha$




(b) $f$ croissante et $x_0 < \alpha$




(c) $f$ décroissante et $x_0 > \alpha$




(d) $f$ décroissante et $x_0 < \alpha$

**Remarque 2.3.3**

Bien que plus rapide, la méthode de Newton échoue dans plusieurs cas. Par exemple lorsque l'on se trouve loin d'une racine de la fonction étudiée, l'intervalle initial de recherche peut être proche d'un extrémum local (fig. 2.2), ce qui signifie que $f^{'}(x) \to 0$. Cela sera fatal dans le cadre de cette méthode

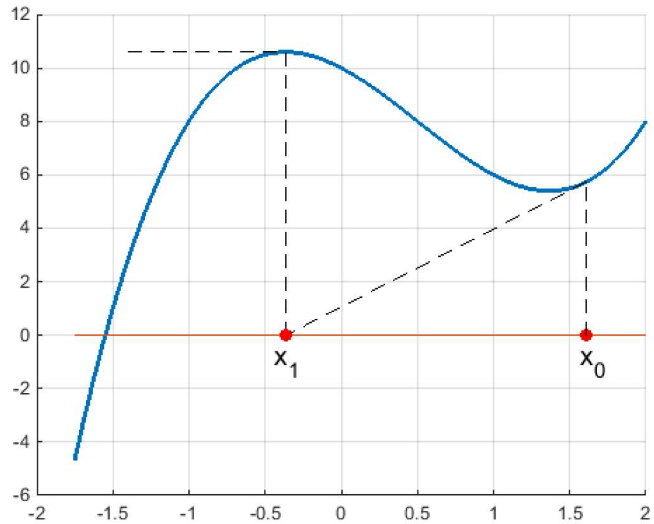
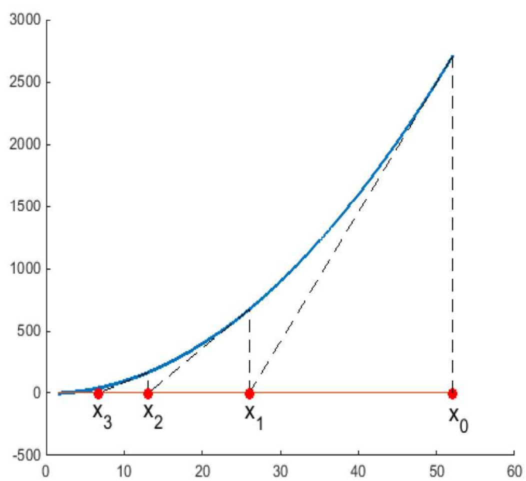



FIGURE 2.2 – Cas particulier où l'on trouve un extrémum local. Dans ce cas la méthode de Newton diverge.

### 2.3.4 Algorithme de Newton

**Exemple 2.3.5**

On se propose de calculer une racine de la fonction $f(x) = x^2 - 4$ dans l'intervalle $[0, 52]$.
$f$ est continue sur $[0, 52]$ et on a $f(0) = -4$ et $f(52) = 2700$
Nous allons utiliser la méthode de Newton pour calculer une estimation de cette racine avec $x_0 = 52$



| **Algorithme de Newton** | | |
|---|---|---|
| **Entrées** | : | une approximation initiale $x_0$.<br>$\epsilon$ (la précision désirée).<br>$N_0$ (le nombre maximal d'itérations). |
| **Sortie** | : | la valeur approchée de la solution de $f(x) = 0$ |
| | : | ou un message d'échec. |
| **Etape 1** | : | $N = 1$ |
| **Etape 2** | : | Tant que $N \leq N_0$ Faire les étapes **3** à **6**. |
| **Etape 3** | : | Poser $x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. |
| **Etape 4** | : | Si $\lvert x - x_0 \rvert \leq \epsilon$ Alors imprimer $x$, aller à l'étape **8**. |
| **Etape 5** | : | Poser $N = N + 1$. |
| **Etape 6** | : | Poser $x_0 = x$. |
| **Etape 7** | : | Imprimer la méthode a échoué après $N$ itérations. |
| **Etape 8** | : | Fin. |

| $k$ | $x_{k-1}$ | $f(x_{k-1})$ | $x_k$ | $f(x_k)$ | $err_k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 52 | 2700 | 26 | 674 | 26 |
| 2 | 26 | 674.0015 | 13.0960 | 167.5063 | 12.9424 |
| 3 | 13.0960 | 167.5063 | 6.7007 | 40.8999 | 6.3953 |
| 4 | 6.7007 | 40.8999 | 3.6488 | 9.3141 | 3.0519 |
| 5 | 3.6488 | 9.3141 | 2.3725 | 1.6289 | 1.2763 |
| 6 | 2.3725 | 1.6289 | 2.0292 | 0.1178 | 0.3433 |
| 7 | 2.0292 | 0.1178 | 2.0002 | 0.0008 | 0.0290 |

$$ordre = \frac{\log(2.0002 - 2)}{\log(2.0292 - 2)} = 2.41035 \rightsquigarrow \simeq 2$$

## 2.4 Méthode de la sécante

Bien que la méthode de Newton est très utilisée dans la pratique, son principal inconvénient vient du fait de l'utilisation à chaque itération de la dérivée. Quand la fonction $f$ n'est pas définie explicitement, on n'a pas toujours accès à sa dérivée.
C'est pourquoi nous allons voir maintenant la méthode de la sécante qui n'utilise pas la dérivée de $f$.
Connaissant $x_{k-1}$ et $x_k$ alors on définie $x_{k+1}$ comme le zéros ($P(x_{k+1}) = 0$) de l'interpolant de Lagrange de $f$ aux points $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ et $(x_k, f(x_k))$. En effet

$$P(x) = \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} f(x_{k-1}) + \frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k} f(x_k)$$

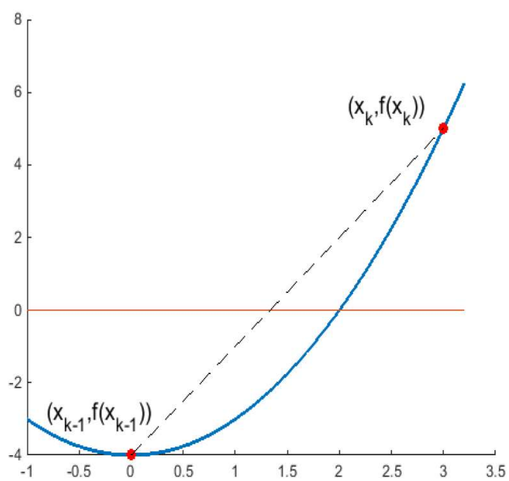
Ainsi $P(x_{k+1}) = 0$ implique que

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \ \forall k \geq 0.$$

**Remarque 2.4.1**

L'algorithme ne peut démarrer que si on dispose de deux valeurs $x_0$, $x_1$ proches, si possible, de la solution recherchée de $x$.

$$\begin{cases} x_0,\ x_1 \quad \text{données}\,; \\ x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})} f(x_k) \end{cases} \tag{2.4}$$




**Théorème 2.4.2**

La méthode de la sécante a un ordre de convergence $= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618$. En d'autres termes, on a

$$\mid x_{n+1} - x \mid < C \mid x_n - x \mid^{1.618}$$

La preuve de ce théorème est extrêmement technique et dépasse le cadre de ce cours.

### 2.4.3 Algorithme de la sécante

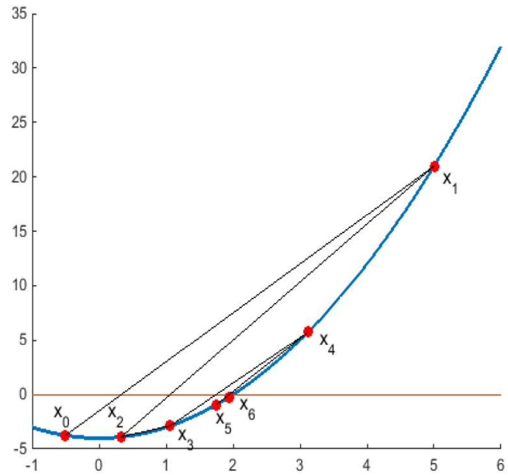
| | | |
|---|---|---|
| | **Algorithme de la sécante** | |
| **Entrées** | : | deux approximations initiales $x_0$ et $x_1$.<br>$\epsilon$ (la précision désirée).<br>$N_0$ (le nombre maximal d'itérations). |
| **Sortie** | : | la valeur approchée de la solution de $f(x) = 0$ |
| | : | ou un message d'échec. |
| **Etape 1** | : | Poser $N = 1$, $z_0 = f(x_0)$, $z_1 = f(x_1)$ |
| **Etape 2** | : | Tant que $N \leq N_0 + 1$ Faire les étapes **3** à **6**. |
| **Etape 3** | : | Poser $x = x_1 - z_1 \frac{x_1 - x_0}{z_1 - z_0}$. |
| **Etape 4** | : | Si $\|x - x_1\| \leq \epsilon$ Alors imprimer $x$, aller à l'étape **8**. |
| **Etape 5** | : | Poser $N = N + 1$. |
| **Etape 6** | : | Poser $x_0 = x_1$, $z_0 = z_1$, $x_1 = x$, $z_1 = f(x)$. |
| **Etape 7** | : | Imprimer la méthode a échoué après $N_0$ itérations. |
| **Etape 8** | : | Fin. |

**Exemple 2.4.4**

On se propose de calculer une racine de la fonction $f(x) = x^2 - 4$ dans l'intervalle $[-1, 6]$. Nous allons utiliser la méthode de la sécante pour calculer une estimation de cette racine avec $x_0 = -0.5$ et $x_1 = 5$.

| $k$ | $x_{k-1}$ | $f(x_{k-1})$ | $x_k$ | $f(x_k)$ | $err_k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -0.50000 | -3.7500 | 5 | 21.0000 | 5.5000 |
| 1 | 5.0000 | 21.0000 | 0.3333 | -3.8889 | 4.6667 |
| 2 | 0.3333 | -3.8889 | 1.0625 | -2.8711 | 0.7292 |
| 3 | 1.0625 | -2.8711 | 3.1194 | 5.7307 | 2.0569 |
| 4 | 3.1194 | 5.7307 | 1.7491 | -0.9408 | 1.3704 |
| 5 | 1.7491 | -0.9408 | 1.9423 | -0.2275 | 0.1932 |
| 6 | 1.9423 | -0.2275 | 2.0039 | 0.0157 | 0.0616 |

$$\frac{log2(0.0616)}{log2(0.1932)} = 1.6953$$




## 2.5 Méthode de point fixe

Trouver les racines d'une équation non-linéaire $f(x) = 0$ consiste en la transformer en un problème équivalent $x = \phi(x)$, où la fonction auxiliaire $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ doit avoir la propriété suivante :

$$\alpha = \phi(\alpha) \quad \text{ssi} \quad f(\alpha) = 0$$

**Remarque 2.5.1**

Cette transformation est toujours possible mais elle n'est pas unique. Voir l'exemple $f(x) = x^2 - 2$.

Ceci nous permettra d'obtenir une méthode itérative de la forme

$$\begin{cases} x_0 \quad \text{donnée}\,;, \quad \text{initialisation}\,; \\ x_{n+1} = \phi(x_n) \end{cases} \tag{2.5}$$

Si cette itération converge, elle converge vers le point-fixe de $\phi$, donc de manière équivalente vers le zéro recherché de $f$.

**Exemple 2.5.2**

Soit la fonction $f(x) = x^2 - 2$. Trouver une racine de $f(x)$ en utilisant la méthode de points fixes.
Il existe trois façons de définir la fonction $\phi(x)$ :

$$x = 2/x \quad \Rightarrow \quad \phi_1(x) = 2/x$$

$$x = x^2 + x - 2 \quad \Rightarrow \quad \phi_2(x) = x^2 + x - 2$$

$$x = \lambda(x^2 - 2) + x \quad \Rightarrow \quad \phi_3(x) = \lambda(x^2 - 2) + x$$

Pour chacune d'elles, nous allons appliquer la méthode de points fixes. **Il faut toutefois noter que ce type de transformations introduisent des solutions "parasites"**.

Par exemple : résoudre $1/x = a$ ou encore $x = 2x - ax^2$.
On voit que $0$ est racine de la deuxième équation mais pas de la première.

La condition de convergence essentielle est une condition de contraction sur la fonction $\phi$.

**Théorème 2.5.3**

Soit $\phi(x)$ une fonction continue. $\alpha$ est un point fixe de $\phi$ si $\phi(\alpha) = \alpha$.
Géométriquement, un point fixe correspondant à l'intersection du graphe de $\phi$ avec la droite $y = x$.

**Proposition 2.5.4**

Soit $(E, d)$ un espace métrique complet et $\phi : E \to E$ une application continue. On dit que $\phi$ est contractante si $\phi$ est k-lipschitzienne avec $0 < k < 1$ tel que

$$\forall x, y \in E,\ d(\phi(x), \phi(y)) < K\, d(x, y)$$

**Théorème 2.5.5**

Soit $\phi : E \to E$ une application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même. Alors $\phi$ admet un point fixe unique $\alpha \in E$. De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$ la suite itérée $x_n$ définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers $\alpha$.

**Théorème 2.5.6** (Théorème des Accroissements Finis)

Soit $\phi$ une fonction définie sur $[a, b]$ et a valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si $\phi$ est continue sur $[a, b]$ et derivable sur $]a, b[$, alors il existe un reel $c \in ]a, b[$ tel que : $\phi(b) - \phi(a) = (b - a) \times \phi'(c)$.

**Théorème 2.5.7**

Soit $\phi$ une fonction differentiable sur $[a, b] \in \mathbb{R}$. Si $\|\phi'(x)\| < K$ pour tout $x$ dans $[a, b]$, alors $\phi$ est k-Lipschitzienne sur $[a, b]$.

**Preuve**

Soient $x$ et $y$ dans $[a, b]$. Puisque le segment $[x, y]$ est inclus dans $[a, b]$, on a

$$\phi(y) - \phi(x) = \int_0^1 \phi'(x + t(y - x))(y - x)dt$$

donc

$$\begin{aligned}
\|\phi(y) - \phi(x)\| &\leq \int_0^1 \|\phi'(x + t(y - x))(y - x)\|dt \\
&\leq \int_0^1 \|\phi'(x + t(y - x))\| \, \|y - x\|dt \\
&\leq k \, \|y - x\|
\end{aligned}$$

**Définition 2.5.8** (Définition : Ordre de convergence)

Soit $\alpha$ un point fixe de $\phi$ et $e_n = x_n - \alpha$ l'erreur d'approximation de $\alpha$ par $x_n$.

La méthode de points fixes converge à l'ordre $p$ (p le plus grand possible) si $|\frac{e_{n-1}}{(e_n)^p}|$ converge, i.e

$|e_{n+1}| \approx C|e_n|^p$ où $C$ est une constante positive.

Plus $p$ est grand, plus l'erreur diminue rapidement.

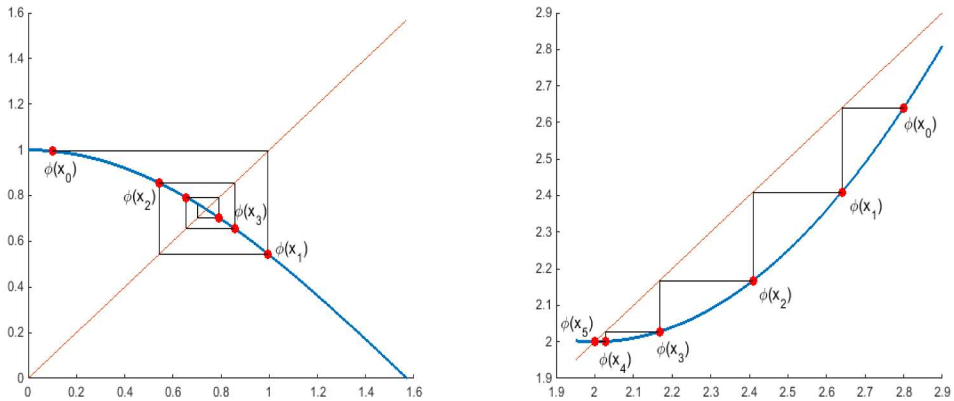
L'ordre de convergence d'une méthode de points fixes dépend de la fonction $\phi$.

### 2.5.9 Lien entre la méthode de points fixes et les équations algébriques

**Remarque 2.5.10**

Pour résoudre une équation $f(x) = 0$, on peut utiliser la méthode de points fixes en procédant comme suit :

- Déterminer $\phi(x)$ tel que $\phi(x) = x$ implique $f(x) = 0$.
- Déterminer une racine de $f$ revient à trouver un point fixe de $\phi$.




(a) $\phi' < 0$ (b) $\phi' > 0$

FIGURE 2.3 – Point fixe

### 2.5.11 Algorithme de la méthode du point fixe

| **Algorithme du point fixe** | | |
|---|---|---|
| **But** | : | trouver une solution de $\phi(x) = x$. |
| **Entrées** | : | une approximation initiale $\alpha_0$.<br>$\epsilon$ (la précision désirée).<br>$N_0$ (le nombre maximal d'itérations). |
| **Sortie** | : | la valeur approchée de $\alpha$<br>ou un message d'échec. |
| **Etape 1** | : | Poser $N = 1$ |
| **Etape 2** | : | Tant que $N \leq N_0$ Faire les étapes **3** à **6**. |
| **Etape 3** | : | Poser $\alpha = \phi(\alpha_0)$. |
| **Etape 4** | : | Si $\|\alpha - \alpha_0\| \leq \epsilon$ Alors imprimer $\alpha$, aller à l'étape **8**. |
| **Etape 5** | : | Poser $N = N + 1$. |
| **Etape 6** | : | Poser $\alpha_0 = \alpha$. |
| **Etape 7** | : | Imprimer la méthode a échoué après $N_0$ itérations. |
| **Etape 8** | : | Fin. |

### 2.5.12 Point fixes attractifs, répulsifs et douteux

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et $\phi : [a, b] \to [a, b]$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit $\alpha \in [a, b]$ un point fixe de $\phi$.
On peut distinguer trois cas :

— $\mid \phi'(\alpha) \mid < 1$

**Théorème 2.5.13**

Soit $\phi : [a, b] \to [a, b]$ de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $\alpha = \phi(\alpha)$ un point fixe.
Si $| \phi'(\alpha) | < 1$ alors $\alpha$ est un point fixe **attractif**.

Soit $K$ tel que $| \phi'(\alpha) | < K < 1$. Par continuité de $\phi'$ il existe $h$ tel que $| \phi' | < K$ sur $E = [\alpha - h, \alpha + h]$.
On applique le théorème des accroissements finis : pour tout $x \in E$ il existe $\xi$ entre $x$ et $\alpha$ tel que $\phi(x) - \phi(\alpha) = \phi'(\xi)(x - \alpha)$.
Ainsi, $| \phi(x) - \alpha | = | \phi(x) - \phi(\alpha) | = | \phi'(\xi)(x - \alpha) | \leq K | x - \alpha |$.
Donc les images itérées de $x \in E$ convergent vers $\alpha$.
$| \phi^n(x) - \alpha | \leq K^n | x - \alpha |$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\alpha$ est un point **attractif**.

— $| \phi'(\alpha) | > 1$

**Théorème 2.5.14**

Soit $\phi : [a, b] \to [a, b]$ de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $\alpha = \phi(\alpha)$ un point fixe.
Si $| \phi'(\alpha) | > 1$ alors $\alpha$ est un point fixe **répulsif**.

On peut choisi $K \in \mathbb{R}$ tel que $| \phi'(\alpha) | > K > 1$
La continuité de $\phi'$ assure l'existence d'un $h > 0$ tel que $| \phi'(\xi) | > K$ pour tout $\xi \in E = [\alpha - h, \alpha + h]$.
On applique le théorème des accroissements finis : pour tout $x \in E$ il existe $\xi$ entre $x$ et $\alpha$ tel que $\phi(x) - \phi(\alpha) = \phi'(\xi)(x - \alpha)$.
Ainsi, $| \phi(x) - \alpha | = | \phi(x) - \phi(\alpha) | = | \phi'(\xi)(x - \alpha) | \geq K | x - \alpha |$.
Donc les images itérées de $x \in E$ s'éloignent de $\alpha$.
$| \phi^n(x) - \alpha | \geq K^n | x - \alpha |$, puis ils sortent du voisinage.
$\alpha$ est un point **répulsif**.

— $| \phi'(\alpha) | = 1$

**Remarque 2.5.15**

Le cas d'un point fixe $\alpha$ avec $| \phi'(\alpha) | = 1$ est **douteux**.

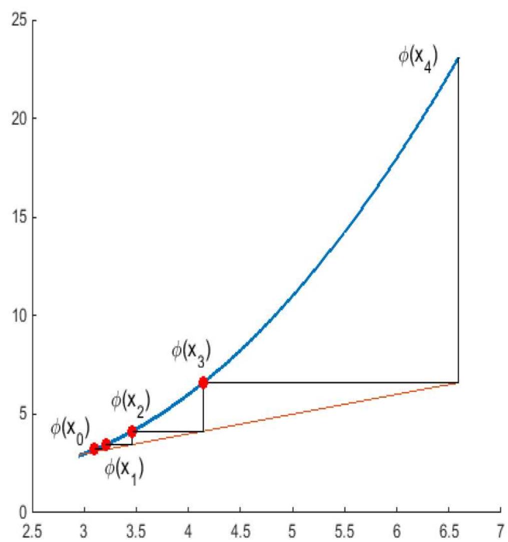
**Exemple 2.5.16** (Exemples typiques)

- ✓ Pour $f(x) = x - x^3$ le point fixe $0$ est attractif.
- ✓ Pour $f(x) = x + x^3$ le point fixe $0$ est répulsif.
- ✓ Pour $f(x) = x + x^2$ le point fixe $0$ est attractif à gauche mais répulsif à droite.
- ✓ Pour $f(x) = x - x^2$ le point fixe $0$ est attractif à droite mais répulsif à gauche.

**Exemple 2.5.17** (répulsif)

$f(x) = x^2 - 5x + 6 = 0,\ \alpha = 3$
$\phi(x) = x^2 - 4x + 6$
$\phi'(x) = 2x - 4, \mid \phi'(3) \mid = 2 > 1$
3 est un point **répulsif**
$x_0 = 3.1; eps = 0.1; [a, b] = [2.95, 6.6]$

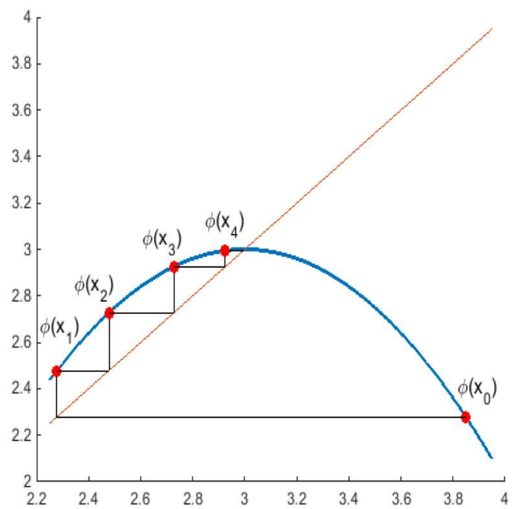
| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ |
|---|---|---|
| 0 | 3.1000 | 0.1100 |
| 1 | 3.2100 | 0.2541 |
| 2 | 3.4641 | 0.6795 |
| 3 | 4.1436 | 2.4514 |
| 4 | 6.5950 | 16.5188 |
| 5 | 23.1138 | 424.6778 |



**Exemple 2.5.18** (Point attractif)

$f(x) = x^2 - 5x + 6 = 0,\ \alpha = 3$
$\phi(x) = -x^2 + 6x - 6$
$\phi'(x) = -2x + 6, \mid \phi'(3) \mid = 0 < 1$
3 est un point **attractif**
$x_0 = 3.85;\ eps = 0.1;\ [a, b] = [2.25, 3.95]$

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ |
|---|---|---|
| 0 | 3.8500 | 1.5725 |
| 1 | 2.2775 | -0.2005 |
| 2 | 2.4780 | -0.2495 |
| 3 | 2.7275 | -0.1982 |
| 4 | 2.9257 | -0.0687 |
| 5 | 2.9945 | -0.0055 |




## 2.5.19 Procédé pratique

Lorsque l'énoncé de l'exercice ne pose pas de questions intermédiaires, voilà une technique pratique pour étudier une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

- La première chose à vérifier est que la fonction $f$ est continue, au moins sur un intervalle stable (contenant les termes de la suite !) sur lequel on va l'étudier.
  Si $f$ n'est pas continue, alors tout ce qui va suivre ne s'applique pas.
- Il faut trouver un intervalle $I = [a, b]$ qui soit stable par $f$, c'est-à-dire que $f(I) \subset I$. Stable par $I \Rightarrow I$ contient tous les termes de la suite à étudier, au moins à partir d'un certain rang.
- Ensuite il faut chercher les points fixes de $f$ dans $I$ : y en a-t-il un ou plusieurs ? S'il sont ń calculables ż il faut les calculer.

### 2.5.20 Comparaison des différentes méthodes

- **Dichotomie**
  - inconvénient : convergence très lente
  - avantage : convergence assurée
- **Newton**
  - inconvénient : calcul des dérivées
  - avantage : convergence quadratique
- **Sécante**
  - inconvénient : convergence super-linéaire
  - avantage : pas de calcul des dérivées
- **Point Fixe**
  - inconvénient : convergence linéaire
  - inconvénient : choix de $\phi$

**Problème général : initialisation de la suite.**