Université Sultan Moulay Slimane
Faculté Polydisciplinaire
Khouribga

A.U. 2019-2020
Filière: SMA/SMI
Module: Analyse 1

Examen d'Analyse
Durée: 2h

- Les documents et téléphones portables sont formellement interdits.
- Les calculatrices sont à usage personnel.

Exercice 1.($3pts$)

(1) Rappeler l'énoncé de la propriété de la borne supérieure.

(2) Soit $A = \{x^2 + y^2,\ x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R} /\ xy = 1\}$

(a) Montrer que $x^2 + y^2 \geq 2xy,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que A possède une borne inférieure que l'on déterminera.

(c) Que peut on-dire de la borne supérieure?

(*On pourra considérer les suites* $x_n = n$ *et* $y_n = \frac{1}{n}$)

Exercice 2.($5pts$)

(1) (a) Rappeler l'énoncé du théorème des accroissements finis et donner sa démonstration.

(b) Montrer que pour tout $x > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} < 2\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

(2) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(a) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*;\quad u_n > 2\sqrt{n+1} - 2$

(b) En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(3) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général:

$$v_n = u_n - 2\sqrt{n}$$

(a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.

(b) En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que $\lim v_n \in [-2, 0]$.

Exercice 3. ($4pts$)

(1) Rappeler l'énoncé de théorème de Rolle et du théorème de valeurs intermédiaire.

(2) **Application :** Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$ telle que : $f(0) = 0$ et $f'(1)f(1) < 0$. On introduit la fonction g définie sur $[0,1]$ par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} & si\ x \in [0, 1[\\ f'(1) & si\ x = 1 \end{cases}$$

(a) Montrer qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

(b) En déduire qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 4. (8*pts*)

(1) **Question de cours:**

(a) Rappeler la définition des fonctions sinh et cosh puis donner leurs tableaux de variations.

(b) Montrer que $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

(2) Le but de cette question est d'étudier les variations des fonctions f et g définies par

$$f(x) = \cosh^2 x + \sinh x, \quad g(x) = e^{\sinh x} - x - 1.$$

(a) Justifier que l'équation $2\sinh x + 1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note a cette solution. (*On ne demande pas de calculer* a).

(b) Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq \frac{3}{4} > 0$.

(c) Donner le domaine de dérivation de g et calculer sa dérivée.

(d) Montrer que la fonction dérivée g' est croissante (*on pourra calculer* $g''(x)$).

(e) Calculer $g'(0)$ puis étudier les variations de la fonction g.

(f) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$.

(3) Le but de cette question est de déterminner la nature de la suite $(S_n)_n$ définie pour tout $n \geq 2$ par

$$S_n = \sum_{k=n}^{3n} \sinh\left(\frac{1}{k}\right)$$

(a) Montrer que : pour tout $x \in]0,1[$

$$1 + x \leq e^{\sinh x} \leq \frac{1}{1-x}$$

(*On pourra utiliser la question précédente*).

(b) En déduire que pour tout $n \geq 2$

$$\ln\left(\frac{3n+1}{n}\right) \leq S_n \leq \ln\left(\frac{3n}{n-1}\right)$$

(c) Déterminer alors la nature de la suite $(S_n)_n$.

Université Sultan Moulay Slimane
Faculté Polydisciplinaire
Khouribga

A.U. 2019-2020
Filière: SMA/SMI
Module: Analyse 1

Examen de Rattrapage
Durée: 1h30

- Les documents et téléphones portables sont formellement interdits.
- Les calculatrices sont à usage personnel.

Questions de cours.(*4pts*)

(1) Rappeler la définition de la densité d'un ensemble D dans $\mathbb{R}$.
(2) Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1.(*4pts*)

Calculer la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum, s'ils existent, des ensembles suivants:

$$\mathcal{N} = \left\{1 + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad \mathcal{X} = [-1, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$$

Exercice 2.(*6pts*)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < b < a$. On définit les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$x_0 < y_0 \text{ et } \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{ax_n + by_n}{a+b} \\ y_{n+1} = \dfrac{ay_n + bx_n}{a+b}. \end{cases}$$

(1) Montrer que $x_n < y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(2) Etudier la monotonie des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(3) On pose $t_n = y_n - x_n$. Démontrer que $(t_n)_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison. En déduire que les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont adjacentes.
(4) Exprimer $x_{n+1} + y_{n+1}$ en fonction de $x_n + y_n$. Que peut-on déduire?
(5) Justifier que les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont convergentes et calculez leur limite.

Exercice 3. (*6pts*)

On appelle **sécante hyperbolique** la fonction, notée **sch**, et définie par

$$sch(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$$

(1) Déterminez l'ensemble de définition D de la fonction ***sch*** et étudiez sa parité.
(2) Etudiez la dérivabilité de la fonction ***sch*** et exprimez sa dérivée en fonction de tanh.
(3) Montrez que la restriction de ***sch*** à l'intervalle $[0, +\infty[$ induit une bijection sur un intervalle J à préciser. On note ***Argsch*** sa bijection réciproque.
(4) Donnez les ensembles de continuité et de dérivabilité de ***Argsch***. Puis montrrer que

$$(Argsch(x))' = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

(Vous pouvez commencer par montrer que: $\tanh(x) = \sqrt{1 - sch^2(x)}, \quad \forall x \in [0, +\infty[$*)*

Université Hassan 1
Faculté Polydisciplinaire
Khouribga

A. U. 2017-2018
Filière: SMA/SMI
Module : Analyse I.
Responsable: N.Mrhardy

Examen de Rattrapage
Durée: 2h

- Les documents et téléphones portables sont formellement interdits.
- Les calculatrices sont à usage personnel.

Questions de cours (5 *pts*)

(1) Donner la définition:
   (a) D'une suite bornée.
   (b) D'une suite tendant vers $+\infty$.
(2) Montrer, en utilisant la définition, que:
   (a) La suite $\left(\dfrac{1-2\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -2.
   (b) La suite $\left(\ln(1+n^2)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
(3) Montrer que
   (a) Toute suite croissante est minorée.
   (b) La somme d'une suite convergente et une suite tendant vers $+\infty$ est une suite qui tend vers $+\infty$.
(4) (a) Donner la définition de la continuité uniforme d'une fonction.
   (b) Montrer que l'application $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 1.(5 *pts*)

(1) Calculer, si elles existent, les limites suivantes:

$$(a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2(x)},\qquad (b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{E(\ln(x))}{x},\qquad (c)\ \lim_{x\to 0}(x+\frac{\sqrt{x^2}}{x})$$

(2) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer
   (a) Pour tout $x>0$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

   (b) Pour tous x, y éléments de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$,

$$|\ln(\tan(x))-\ln(\tan(y))| \geq 2|x-y|$$

Exercice 2.(3*pts*)

Soit la fonction $f:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}$ définit pour tout $x>0$ par: $\quad f(x)=1-xE\left(\dfrac{1}{x}\right).$

(1) Montrer que pour tout $x>0$, on a

$$0\leq f(x)<x$$

(2) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, donner son prolongement.

(3) Montrer que pour tout $x > 1$, $f(x) = 1$. La fonction f est-elle continue en 1.

Exercice 3. (4 pts) (TD)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \arg\sinh\left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right)$$

(1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f.

(2) Montrer que $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x > 0$ et $f'(x) = \dfrac{-1}{x}$ si $x < 0$

(3) En déduire une expression de $f(x)$ en fonction de la fonction $\ln(x)$.

Exercice 4 (3 pts)

Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une fonction croissante définie sur un segment non trivial de $\mathbb{R}$.

On considère l'ensemble $E = \{x \in [a, b] / f(x) \geq x\}$

(1) Montrer que E admet une borne supérieure que l'on notera α.

(2) Montrer par l'absurde que α est un point fixe de f.

Indication: On pourra étudier les deux cas: $f(\alpha) > \alpha$ et $f(\alpha) < \alpha$

Université Hassan 1
Faculté Polydisciplinaire
Khouribga

A.U. 2017-2018
Filière: SMA/SMI
Responsable: N.MRHARDY

Analyse I

Durée: 2h

- Les documents et téléphones portables sont formellement interdits.
- Les calculatrices sont à usage personnel.

Questions de cours.(*4 pts*)

(1) (a) Rappeler l'énoncé de la caractérisation de la borne supérieure.
(b) On suppose que A et B possèdent chacune une borne supérieure. Montrer que l'ensemble $A+B$ possède une borne supérieure et de plus ;

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$

(2) (a) Rappeler la définition de la densité d'un ensemble D dans $\mathbb{R}$.
(b) Montrer que l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1.(*4 pts*)

Soit $a > 0$. On définit les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ par

$$x_n = (1+a)(1+a^2)\ldots(1+a^n), \qquad y_n = a + a^2 + \ldots + a^n$$

(1) Montrer que la suite $(x_n)_n$ est croissante.
(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer (y_n) puis déduire que si $0 < a < 1$ alors (y_n) est majorée.
(3) Montrer que pour tout $x > 0$,

$$1 + x \leq e^x$$

(4) En déduire que si $0 < a < 1$ alors $(x_n)_n$ est convergente.

Exercice 2. (*2 pts*)

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue strictement positive, on suppose que f est dérivable sur $]a,b[$. Monter qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left((b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}\right)$$

Exercice 3.(*3 pts*)

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \arccos(\tanh x), \qquad g(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\cosh x}\right)$$

(1) Préciser le domaine de définition et de dérivabilité de chacune des fonctions f et g puis calculer leurs dérivées.
(2) En déduire une relation entre f et g.

T.S.V

Exercice 4. (5 *pts*) T.D.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x)+1}$$

(1) Déterminer le domaine de définition de f puis calculer les limites sur ses bornes.

(2) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0? Si oui donner son prolongement en 0.

(3) Montrer directement que f est strictement monotone sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$. (sans utiliser la dérivée).

(4) En déduire que f est bijective de $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera puis déterminer f^{-1}.

Exercice 5. (2 *pts*).

(1) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$, on a T.D

$$\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leq \sqrt{|a-b|}$$

(2) En déduire que l'application $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. exam de Ra 2017/

... Moulay Slimane
Faculté Polydisciplinaire
Khouribga

Examen de Rattrapage

Durée: 2h

- Les documents et téléphones portables sont formellement interdits.
- Les calculatrices sont à usage personnel.

Exercice 1.(6pts)

Les questions ci-dessous sont indépendantes:

(1) Soit A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}^+$. $\sqrt{A}$ désigne l'ensemble des $\sqrt{x}$, pour $x \in A$. Montrer que $\sqrt{A}$ admet une borne supérieure et

$$\sup \sqrt{A} = \sqrt{\sup A}$$

(2) Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $B = \{y = -x; \quad x \in A\}$

(a) Montrer que B est minoré si et seulement si A est majoré.

(b) En supposant que A est majoré, démontrer que B admet une borne inférieure et que

$$\inf(B) = -\sup(A)$$

(3) Calculer la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum, s'ils existent, des ensembles suivants

$$\mathcal{N} = \left\{\frac{n-1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \mathcal{X} = \left\{\frac{2xy}{x^2+y^2};\ x \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R}^*\right\}$$

Exercice 2.(7pts)

(1) (a) Rappeler l'énoncé du théorème des accroissements finis (T.A.F).

(b) Montrer que pour tout $x > 0$

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

(2) On considère la suite $(S_n)_n$ de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

(a) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad \ln(n+1) \leq S_n \leq \ln(n) + 1$

(b) En déduire la nature de la suite $(S_n)_n$.

(3) On considère la suite $(u_n)_n$ de terme général:

$$u_n = S_n - \ln(n)$$

(a) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée et décroissante.

(b) En déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et que $\lim u_n \in [0, 1]$.

T.S.V

2

Exercice 3. (7 pts)

(1) **Question de cours:**

(a) Rappeler la définition de la fonction arg cosh et donner son domaine de définition.

(b) Donner le domaine de dérivablitée de arg cosh et sa dérivée.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arg\cosh\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]$$

Le but de cet exercice est de simplifier l'expression de f. Précisement, on veut montrer, de deux manière différentes, que la fonction f s'écrit sous forme:

$$\forall x > 0, \quad f(x) = |\ln(x)| \quad (*)$$

(2) **En utilisant la dérivée:**

(a) Montrer que $\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \in [1, +\infty[$ si et seulement si $x \in]0, +\infty[$. En déduire le domaine de définition de f.

(b) Donner le domaine de dérivation de f et calculer sa dérivée.

(c) En déduire l'expression (*).

(3) **En utilisant l'expression de arg cosh sous forme de logarithme :**

(a) Montrer que : pour tout $x \geq 1$

$$\arg\cosh(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

(b) En déduire l'expression (*).

Examen d'Analyse

Durée: 2h

- Les documents et téléphones portables sont formellement interdits.
- Les calculatrices sont à usage personnel.

Exercice 1.($3pts$)

Démontrer que les réels suivants sont irrationnels :

(1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ où x et y sont des rationnels positifs tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont irrationnels.

(2) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

Indication: On pourra supposer que $r=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ *est rationnel et calculer* $(r-\sqrt{2})^2$

Exercice 2.($5pts$)

Soient u_0 et v_0 deux nombres réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$u_{n+2}=\frac{u_n+u_{n+1}}{2} \quad \text{et} \quad v_n=u_{n+1}+\frac{1}{2}u_n$$

(1) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante puis déterminer sa valeur.

(2) Donner une relation entre u_n et u_{n+1} satisfaite pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3) Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(u_n-\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique.

(4) En déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de n, u_0 et u_1.

(5) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

Exercice 3. ($5\ pts$)

Soient $f;g\ :\ [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ ($a<b$) et dérivables sur $]a,b[$: On suppose que $g'(x)\neq 0$ pour tout $x\in]a,b[$.

(1) Rappeler l'énoncé de théorème de Rolle.

(2) Montrer que $g(x)\neq g(a)$ pour tout $x\in]a,b[$.

(3) On pose

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)), \quad \forall x\in[a,b]$$

Montrer que F vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un nombre réel $c\in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(4) On suppose que $\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\ell\in\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)}=\ell$$

(*Indication: On pourra utiliser le résultat précédent sur l'intervalle* $]x,b[$)

(3) **Application:** Calculer

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 4. (7 pts)
On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

(1) En étudiant la fonction $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$, montrer que $\dfrac{1-x}{1+x} \in [-1, 1]$ si et seulement si $x \in \mathbb{R}^+$. En déduire le domaine de définition de f.
(2) Donner le domaine de dérivation de f et calculer sa dérivée.
(3) Justifier que la fonction $x \longmapsto \arctan(\sqrt{x})$ est dérivable et calculer sa dérivée.
(4) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $f(x) = 2\arctan(\sqrt{x})$.
(5) Donner le tableau de variation complet de f ainsi que les asymptotes de la courbe représentative C_f de f.
(6) Justifier que C_f admet une tangente verticale au point d'abscisse $x = 0$.
(7) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle J que l'on précisera puis déterminer f^{-1}.

Analyse I

Durée: 2h

- Les documents et téléphones portables sont formellement interdits.
- Les calculatrices sont à usage personnel.

Questions de cours.

(1) Ecrire l'énoncé du **théorème des accroissements finis généralisé.**
(2) En utilisant le théorème de Rolle, donner une preuve du **théorème des accroissements finis généralisé.**
(3) **Application:** Calculer

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}},\qquad \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

Exercice 1.
Soit A l'ensemble définie par

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists(p,q)\in\mathbb{Z}^2,\ x=p+q\sqrt{2}\right\}$$

(1) On considère la suite $(x_n)_n$ de terme général $x_n=(-1+\sqrt{2})^n$, $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $(x_n)\in A$.
(2) En déduire que $\inf A=0$.

Exercice 2.
Considérons la fonction f définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\arctan x+\frac{1}{2}$$

(1) En utilisant le théorème des valeusr intermédiaires, montrer que la fonction f admet un point fixe α sur l'intervalle $[0,1]$.
(2) Etudier la dérivabilité de f puis montrer que sa dérivée est bornée.
(3) En déduire que f est contractante c.à.d

$$\exists k\in]0,1[,\ \forall(x,y)\mathbb{R}^2\quad |f(x)-f(y)|\leq k|x-y|$$

(4) On considère maintenant la suite $(x_n)_n$ définie par $x_0\in\mathbb{R}$, $x_{n+1}=f(x_n)$
  (a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\quad |x_{n+1}-\alpha|\leq k|x_n-\alpha|$
  (b) En déduire que la suite $(x_n)_n$ converge vers α.

T.S.V

2

Problème.

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction sécante hyperbolique et sa fonction réciproque

(1) On appelle sécante hyperbolique la fonction définie par

$$sch(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$$

(a) Déterminez l'ensemble de définition D de la fonction sch et étudiez sa parité.

(b) Etudiez la dérivabilité de la fonction sch et exprimez sa dérivée en fonction de tanh.

(c) Dressez le tableau de variations de la fonction sch en précisant ses limites sur les bornes de D.

(d) Montrez que la restriction de sch à l'intervalle $[0, +\infty[$ induit une bijection sur un intervalle J à préciser.

(2) On note $Argsch$ la bijection réciproque de sch.

(a) Donnez les ensembles de définition et de continuité de $Argsch$ ainsi que ses variations.

(b) Sur quel ensemble la fonction $Argsch$ est-elle dérivable ? Montrez que sa dérivée sur cet ensemble est donnée par:

$$(Argsch(x))' = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

Indication: Vous pouvez commencer par montrer que:

$$\tanh(x) = \sqrt{1 - sch^2(x)}, \quad \forall x \in [0, +\infty[$$

(c) Montrez que pour tout

$$x \in]0, 1], \qquad Argsch(x) = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

(d) La fonction $Argsch$ est-elle prolongeable par continuité en 0? Si oui donnez son prolongement.

(3) Etudiez la convexité de la fonction sch sur le domaine D.

ss fonction

Université Hassan 1
Faculté Polydisciplinaire
Khouribga

A. U. 2016-201
Filière: SMA/SM
Module: Analyse
Responsable: N.MRHARD

Examen de rattrapage

Durée: 2h

- Les documents et téléphones portables sont formellement interdits.
- Les calculatrices sont à usage personnel.

Exercice 1.

(1) Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad a \leq b$$
Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$.

(2) Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. On pose
$$\alpha = \inf A \quad \text{et} \quad B = A \cap]-\infty, \alpha + 1]$$
Montrer que $\inf A = \inf B$

(3) Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que
$$\sup\{|x-y|, (x,y) \in A^2\} = \sup A - \inf A.$$

Exercice 2.

(1) Montrer que pour tout $x > 0$
$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

(2) Pour n entier naturel non nul, on pose
$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) < H_n < 1 + \ln(n)$ et en déduire $\lim\limits_{n\to\infty} H_n$

(3) Pour n entier naturel non nul, on pose
$$u_n = H_n - \ln(n) \quad et \quad v_n = H_n - \ln(n+1)$$

(a) Etudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n).

(b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite γ.

(c) Montrer que $\gamma \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (γ est appelée la constante d'Euler).

Problème.

On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \arcsin(\sin 2x)$$

(1) (a) Etudiez la parité et la périodicité de φ.

(b) Montrez que

$$\varphi(x) = 2x \quad \text{pour} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

et

$$\varphi(x) = \pi - 2x \quad \text{pour} \quad x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

(2) Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

(a) Justifiez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|2x| \leq 1 + x^2$. Précisez les cas d'égalité.

(b) Déduisez de la question précédente le domaine de définition de f.

(c) Etudiez la parité de f.

(d) Pout tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, exprimez $\dfrac{2\tan(t)}{1+\tan^2(t)}$ en fonction de $\sin(t)$ puis déduisez que

$$f(\tan t) = \varphi(t)$$

(e) Exprimez, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ à l'aide de φ et de arctan.

(f) Déduisez des questions précédentes les variations de f sur $\mathbb{R}$.

(g) Dressez le tableau de variations de f en précisant ses limites en $\pm\infty$

(3) (a) Calculez $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.

(b) Donnez les équations des tangentes aux points d'abscisses 0, $\sqrt{3}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

(c) Déterminez les limites $\lim_{x\to 1^+} f'(x)$ et $\lim_{x\to 1^-} f'(x)$.

Rattrapage d'Analyse 1 — 2018/2019 — SMA/SMI S1

Exercice 2

(1) A est majorée, $\exists M > 0$, $\forall x \in A$, $0 \leq x \leq M$

$\Rightarrow \forall x \in A$, $\sqrt{x} \leq \sqrt{M}$

$\Rightarrow \sqrt{A}$ est majorée donc admet une borne sup $\alpha = \sup \sqrt{A}$.

on note $\beta = \sup A > 0$

on a $\forall x \in A$, $x \leq \beta \Rightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{\beta} \in M(\sqrt{A}) \Rightarrow \boxed{\sqrt{\beta} \geq \alpha}$

de m̂ $\alpha \in M(\sqrt{A}) \Rightarrow \forall y \in \sqrt{A}$ / $y \leq \alpha$

$\Rightarrow \forall x \in A$ / $\sqrt{x} = y \leq \alpha \Rightarrow x \leq \alpha^2$

$\Rightarrow \alpha^2 \in M(A) \Rightarrow 0 < \beta \leq \alpha^2 \Rightarrow \boxed{\sqrt{\beta} \leq \alpha}$

donc $\boxed{\alpha = \sqrt{\beta}}$

(2) (a) si B est minoré $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{R}$ / $\forall y \in B$ / $y \geq m$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{R}$ / $\forall x \in A$; $-x \geq m$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{R}$ / $\forall x \in A$, $x \leq -m$

$\Rightarrow$ A est majorée (par $-m$)

de même si A est majorée $\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ / $\forall x \in A$ $x \leq M$

(on a $y \in B \Rightarrow \exists x \in A / y = -x$) $\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ / $y = -x \geq -M$

$\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ / $\forall y \in B$, $y \geq M$

$\Rightarrow$ B est eminnée

(2) (b) · A est majorée donc admet une borne supérieure et d'après (a) B est minorée donc admet une borne inférieure.

d'après (a) si $M \in \mathcal{M}(A) \Rightarrow -M \in m(B)$

$\Rightarrow \inf(B) \geq -M \Rightarrow -\inf(B) \leq M \in \mathcal{M}(A)$

$\Rightarrow \boxed{-\inf(B) \leq \sup A}$

de même $m \in m(B) \Rightarrow -m \in \mathcal{M}(A) \Rightarrow \sup A \leq -m$

$\Rightarrow m \leq -\sup A \Rightarrow + \boxed{\sup A \leq \inf(B)}$

d'où $\boxed{-\sup A = \inf B}$

(3). on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq \frac{n-1}{n+1} \leq 1$

donc N est majorée par 1 et minorée par -1 donc admet une borne inf et sup.

on a $\cdot \begin{cases} -1 \in m(A) \\ \text{pour } n=0 : \quad -1 \in A \end{cases} \Rightarrow -1 = \min(A) = \inf(A)$

$\cdot \begin{cases} 1 \in \mathcal{M}(A) \\ \lim\limits_{+\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1 \text{ et } \left(\frac{n-1}{n+1}\right)_n \in A \end{cases} \Rightarrow 1 = \sup A$

$1 \notin A$: A n'a pas de max

· on a $(x+y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2+2xy \geq 0 \Rightarrow \frac{2xy}{x^2+y^2} \geq -1$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^*$

donc X est minorée par -1 donc admet une borne inf.

$\boxed{2018/2019}$

(a) d'après (2)(1) $S_n \geq \ln(n+1) \geq \ln(n)$

$\Rightarrow S_n - \ln(n) \geq 0$

$\Rightarrow \boxed{u_n \geq 0}$

d'autre part $S_n \leq \ln(n)+1 \Rightarrow \boxed{u_n \leq 1}$

alors $\boxed{0 \leq u_n \leq 1}$

Monotonie $u_{n+1} - u_n = S_{n+1} - S_n - \ln(n+1) + \ln(n)$

$= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \leq 0$ d'après (1)

donc $(u_n)_n$ est décroissante

b) (u_n) décroissante minorée par 0 donc convergente

puisque $0 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \lim u_n \leq 1$

Exercice 3

(1) voir cours

(2) $f(x) = \operatorname{argch}\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)$

(a) $\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2 > 0$

$\Leftrightarrow x > 0$ et $x^2+1 \geq 2x \Leftrightarrow x > 0$ et $(x-1)^2 \geq 0$

donc $\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \in [1, +\infty[$ ssi $x \in \mathbb{R}^{+*}$

or $x \mapsto \operatorname{argsh} x$ définie sur $[1,+\infty[\Rightarrow \boxed{D_f = \mathbb{R}^{+*}}$

et $-1 \in m(\mathcal{X})$ et pour $y=-x$: $-1 = \frac{2x(-x)}{x^2+y^2} \in \mathcal{X}$

donc $-1 = \min(\mathcal{X}) = \inf(\mathcal{X})$

d'autre part : $(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{2xy}{x^2+y^2} \leq 1$

$\mathcal{X}$ majorée donc admet une borne sup.

et on a $\begin{cases} 1 \in M(\mathcal{X}) \\ 1 = \frac{2x \times x}{x^2+x^2} \in \mathcal{X} \ (y=x) \end{cases} \Rightarrow 1 = \max \mathcal{X} = \sup \mathcal{X}$

Exercice 2

(1) (a) voir cours

(b) voir TD

(2) (a) on a d'après (b) :

$\frac{1}{2} < \ln(2) - \ln(1) < 1$

$1/3 < \ln(3) - \ln(2) < \frac{1}{2}$

$\vdots$

$1/n < \ln(n) - \ln(n-1) \leq \frac{1}{n-1}$

$\Rightarrow S_n - 1 \leq \ln(n) \Rightarrow S_n < \ln(n) + 1$

de même on a $S_n > \ln(n+1)$

d'où $\ln(n+1) \leq S_n \leq \ln(n) + 1$

(b) on $S_n \geq \ln(n+1)$ et $\lim_{+\infty} \ln(n+1) = +\infty$

donc $\lim_{+\infty} S_n = +\infty \Rightarrow (S_n)_n$ diverge

2018/2019

Raf

b) $x \mapsto \operatorname{argsh} x$ dérivable sur $]1,+\infty[$ donc f dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

et $$f'(x) = \left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)' \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)-1}}$$

$$= \frac{x^2-1}{2x^2\sqrt{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}-1}} = \frac{x^2-1}{2x^2\sqrt{\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$$

$$= \frac{x^2-1}{2x^2 \cdot \frac{\sqrt{(x^2-1)^2}}{2x}}.$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2-1}{x\left|x^2-1\right|}, \ \forall x \in \mathbb{R}^{+*}}$$

c) si $0 < x < 1 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = -\frac{1}{x} \\ \ln(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = -\frac{1}{x} \\ |\ln(x)| = -\ln(x) \end{cases}$

$\Rightarrow f'(x) = \left(-\ln(x)\right)' = \left(+|\ln(x)|\right)'$

$\Rightarrow f(x) = |\ln(x)| + C$ $\quad$ ($C=0$ car $f(1)=0$)

$\Rightarrow \boxed{f(x) = |\ln(x)|}$

si $x > 1 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \\ \ln(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \ln(x) + C \quad (C=0) \\ |\ln(x)| = \ln(x) \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = |\ln(x)|$ donc $\forall x > 0$ $\quad f(x) = |\ln(x)|$

Rat

10/10/2017

(2)(b) . . . . .

(3) (a) Voir cours

(b) d'après (a). $f(x) = \ln\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 1}\right)$

$= \ln\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x}\right) + \sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{4x^2}}\right)$

$= \ln\left(\frac{1}{2}\,\frac{x^2+1}{x} + \frac{|x^2-1|}{2x}\right)$

$= \ln\left(\frac{x^2+1+|x^2-1|}{2x}\right) = \begin{cases} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \text{ si } \ldots \\ \ln(x) \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

donc $\boxed{f(x) = |\ln(x)|}$

Scanné avec CamScanner

2017/2018
SAA / SMI

Examen de Rattrapage

Analyse 1

Questions de cours :

① Voir cours

② soit $\varepsilon > 0$, on pose $N = E\left(\frac{3}{\varepsilon} - 1\right)^2 + 1 \in \mathbb{N}$

alors $\forall n \geq N \Rightarrow n \geq E\left(\frac{3}{\varepsilon} - 1\right)^2 + 1 > \left(\frac{3}{\varepsilon} - 1\right)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \sqrt{n} > \left|\frac{3}{\varepsilon} - 1\right| > \frac{3}{\varepsilon} - 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} + 1 > \frac{3}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}+1} < \frac{\varepsilon}{3} \text{ car } \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1 - 2\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} - (-2)\right| = \frac{3}{1+\sqrt{n}} < \varepsilon$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1 - 2\sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}} = -2$

b) soit $A \in \mathbb{R}^+$, on pose $N = E\left(\sqrt{e^A - 1}\right) + 1 \in \mathbb{N}$

alors $\forall n \geq N \Rightarrow n > \sqrt{e^A - 1} \Rightarrow n^2 > e^A - 1$

$$\Rightarrow \ln(n^2 + 1) > A$$

$$\Rightarrow \lim_{+\infty} \ln(1 + n^2) = +\infty$$

③ (a) Soit $(U_n)_{n \geq n_0}$ suite croissante donc $(U_n)_{n \geq n_0}$ minorée par U_{n_0} car $\forall n \geq n_0 : U_{n_0} \leq U_n$

(3)

. $\lim_{+\infty} u_n = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1 \; |u_n - l| < \varepsilon$

$l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon$

. $\lim_{+\infty} v_n = +\infty \Rightarrow \forall B \in \mathbb{R}, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2 \quad v_n > B$

Soit $A \in \mathbb{R}$, on pose $N = \max(N_1, N_2)$

donc $\forall n \geq N$: $\quad u_n + v_n \geq l - \varepsilon + B$ (on pose $B = A - l + \varepsilon$)

$u_n + v_n \geq A$

donc $\lim_{+\infty} u_n + v_n = +\infty$

(4) ...

(5) soit $\varepsilon > 0$, on pose $\delta = \varepsilon^2$: soit $x, y \in \mathbb{R}^+$ /

$|x - y| \leq \delta$, puisque $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$

alors $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$

donc $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow$ f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 1 (1) Par la RH

$$\lim_{0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{(1+x^2)\,2\sin x \cos x} = \lim_{0} \left(\frac{x}{\underbrace{\sin x}_{1}}\right) \frac{1}{\underbrace{(1+x^2)\cos x}_{1}}$$

$= 1$

2077/2016

Rat

Scanné avec CamScanner

(b) $\forall x>0 \quad \ln(x)-1 \leq E(\ln(x)) < \ln(x)$

$$\frac{\ln(x)-1}{x} \leq \frac{E(\ln(x))}{x} < \frac{\ln(x)}{x}$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{+\infty} \frac{E(\ln(x))}{x} = 0$

(c) On remarque $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x} = x + \frac{|x|}{x} = \begin{cases} x+1 & \text{si } x>0 \\ x-1 & \text{si } x<0 \end{cases}$

On étudie la limite à droite et à gauche de 0.

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -1$

$\lim\limits_{0^+} f(x) \neq \lim\limits_{0^-} f(x) \Rightarrow f$ n'admet pas de limite en 0

② (a) voir TD.

(b) On pose $f(t) = \ln(\tan(t))$, $t\in[x,y]$ et $x,y \in]0,\frac{\pi}{2}[$

f continue sur $[x,y]$ dérivable sur $]x,y[$ alors

T.A.F $\Rightarrow \exists c \in]x,y[\mid \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c) = \frac{1+\tan^2 c}{\tan c}$

$\Rightarrow \exists c\in]x,y[\,/\, |f(x)-f(y)| = \left|\frac{1+\tan^2 c}{1+\tan c}\right| |x-y|$

On pose $g(t) = \frac{1+\tan^2 t}{\tan t} \Rightarrow g'(t) = \frac{\tan^4 t - 1}{\tan^2 t} = 0$ ssi $t = \frac{\pi}{4}$

t	0		$\pi/4$		$\pi/2$
g'		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow \forall t \in]0,\frac{\pi}{2}[: g(t) \geq 2 > 0$

donc $\left| \frac{1+\tan^2 c}{\tan c} \right| = |g(c)| \geq 2$

d'où $|f(x)-f(y)| \geq 2|x-y|$, $\forall x,y \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice (1)

Exercice 2 :

(1) on sait que $\frac{1}{x} - 1 \leq E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x}$

puisque $x>0$: $1-x < x E(1/x) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -xE(\frac{1}{x}) < x-1$

$\Rightarrow 0 \leq f(x) < x$

(2) le théorème d'encadrement : puisque $0 \leq f(x) < x$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ finie

donc f se prolonge par continuité en 0 en une fonction continue $\tilde{f}$ définie par : $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

(3) si $x > 1$, $0 < \frac{1}{x} < 1$ donc $E(\frac{1}{x}) = 0$

d'où si $x > 1 \Rightarrow f(x) = 1$ et $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

or on a $E(1) = 1$ donc $f(1) = 0$

c à d $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \neq f(1) \Rightarrow f$ n'est pas continue en 1.

Exercice 3

Voir TD

|2017/2018| √Rat|

Exercice 4

(1) on a $f(a) \in [a,b] \Rightarrow f(a) \geq a \Rightarrow a \in E$

$\Rightarrow \boxed{E \neq \emptyset}$ et $\forall x \in E \,/\, a < x < b \in M(E)$

d'après la propriété de la borne sup, E admet une borne sup

on note $\alpha = \sup E$

(2) On suppose $f(\alpha) \neq \alpha$: on aura 2 cas:

* si $f(\alpha) < \alpha$: soit $x \in E$ alors $x \leq \alpha$

et $\underset{(x \in E)}{x \leq f(x)} \leq f(\alpha)$. car f croissante

$\Rightarrow \quad x \leq f(\alpha) \quad \forall x \in E \Rightarrow f(\alpha)$ est un majorant de E

$\Rightarrow f(\alpha) \geq \alpha = \sup E$ absurde (*)

** si $f(\alpha) > \alpha$: on pose $\beta = f(\alpha) \in [a,b]$ et $\beta > \alpha$

puisque f croissante $\quad f(\beta) \geq f(\alpha) = \beta \in [a,b]$

$\Rightarrow \beta \in E$ or $\alpha = \sup E \Rightarrow \beta < \alpha$ contredit $\beta >$

dans les 2 cas on trouve une contradiction

donc $f(\alpha) = \alpha \Rightarrow \alpha$ est un point fixe de f

Scanné avec CamScanner