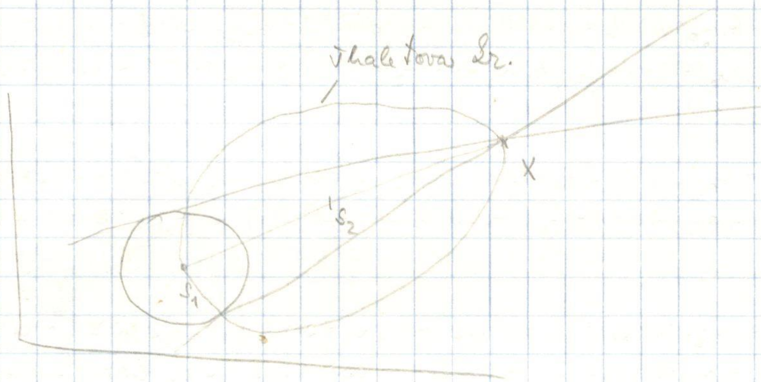
Tečny ke kružnici



$$x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0$$
$$x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_1=0$$

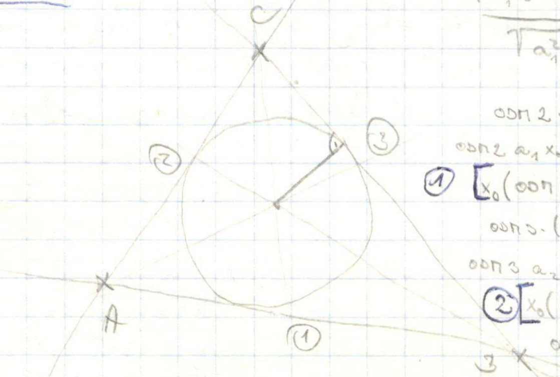
$$(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+(c_1-c_2)=0$$
$$(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y=c_2-c_1$$

$$x=\underbrace{\frac{b_2-b_1}{a_1-a_2}}_{t}\,y+\underbrace{\frac{c_2-c_1}{a_1-a_2}}_{u}=t\,y+u$$

$$(yt+u)^2+y^2+a_1(yt+u)+b_1y+c_1=0$$
$$y^2t^2+2ytu+u^2+y^2+a_1yt+a_1u+b_1y+c_1=0$$
$$y^2\underbrace{(t^2+1)}_{a}+y\underbrace{(2tu+a_1t+b_1)}_{b}+\underbrace{a_1u+c_1+u^2}_{c}=0$$

$$y_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$y_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Vep. kr.



3x4 řešení => 12 ř.

$$\frac{\pm|a_1x_0+b_1y_0+c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{\pm|a_2x_0+b_2y_0+c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}=\frac{\pm|a_3x_0+b_3y_0+c_3|}{\sqrt{a_3^2+b_3^2}}$$

$$ODM2\cdot\pm(a_1x_0+b_1y_0+c_1)=ODM1\cdot\pm(a_2x_0+b_2y_0+c_2)$$
$$ODM2\,a_1x_0+ODM2\,b_1y_0+ODM2\,c_1=ODM1\,a_2x_0+ODM1\,b_2y_0+ODM1\,c_2$$
1 $$\left[x_0(ODM2\,a_1-ODM\,a_2)+y_0(ODM2\,b_1-ODM1\,b_2)=ODM1\,c_2-ODM2\,c_1\right]$$
$$ODM3\cdot(a_2x_0+b_2y_0+c_2)=ODM2\cdot(a_3x_0+b_3y_0+c_3)$$
$$ODM3\,a_2x_0+ODM3\,b_2y_0+ODM3\,c_2=ODM2\,a_3x_0+ODM2\,b_3y_0+ODM2\,c_3$$
2 $$\left[x_0(ODM3\,a_2-ODM2\,a_3)+y_0(ODM3\,b_2-ODM2\,b_3)=ODM2\,c_3-ODM3\,c_2\right]$$
$$ODM3(a_1x_0+b_1y_0+c_1)=ODM1\cdot(a_3x_0+b_3y_0+c_3)$$
$$ODM3\,a_1x_0+ODM3\,b_1y_0+ODM3\,c_1=ODM1\,a_3x_0+ODM1\,b_3y_0+ODM1\,c_3$$
3 $$\left[x_0(ODM3\,a_1-ODM1\,a_3)+y_0(ODM3\,b_1-ODM1\,b_3)=ODM1\,c_3-ODM3\,c_1\right]$$

$$ODM2 \cdot \pm(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1) = ODM1 \cdot \pm(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2)$$

① $\boxed{++}$

$$a_1x_0\,ODM2 + b_1y_0\,ODM2 + c_1\,ODM2 = a_2x_0\,ODM1 + b_2y_0\,ODM1 + c_2\,ODM1$$
$$\left[x_0(a_1\,ODM2 - a_2\,ODM1) + y_0(b_1\,ODM2 - b_2\,ODM1) = c_2\,ODM1 - c_1\,ODM2\right]$$

$\boxed{--}$

$$-a_1x_0\,ODM2 - b_1y_0\,ODM2 - c_1\,ODM2 = -a_2x_0\,ODM1 - b_2y_0\,ODM1 - c_2\,ODM1$$
$$\left[x_0(-a_1\,ODM2 + a_2\,ODM1) + y_0(-b_1\,ODM2 + b_2\,ODM1) = -c_2\,ODM1 + c_1\,ODM2\right]$$

$\boxed{+-}$

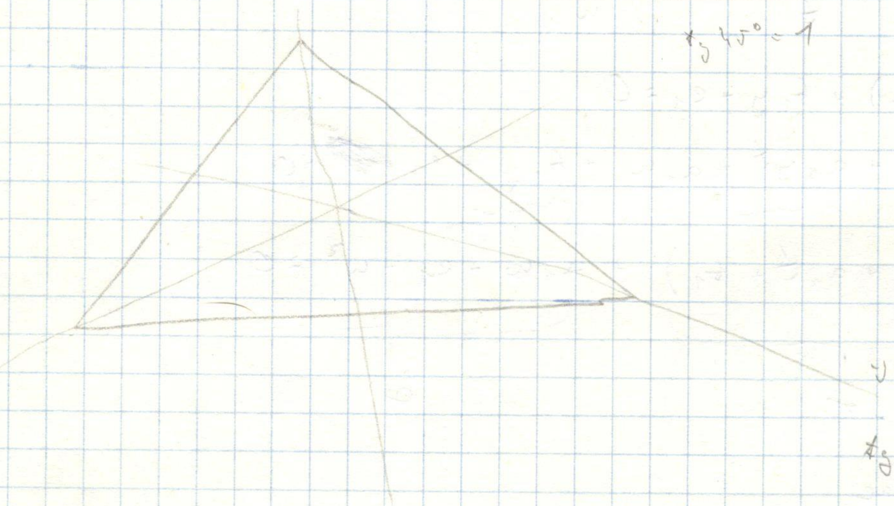
$$a_1x_0\,ODM2 + b_1y_0\,ODM2 + c_1\,ODM2 = -a_2x_0\,ODM1 - b_2y_0\,ODM1 - c_2\,ODM1$$
$$\left[x_0(a_1\,ODM2 + a_2\,ODM1) + y_0(b_1\,ODM2 + b_2\,ODM1) = -c_2\,ODM1 - c_1\,ODM2\right]$$

$\boxed{-+}$

$$-a_1x_0\,ODM2 - b_1y_0\,ODM2 - c_1\,ODM2 = a_2x_0\,ODM1 + b_2y_0\,ODM1 + c_2\,ODM1$$
$$\left[x_0(-a_1\,ODM2 - a_2\,ODM1) + y_0(-b_1\,ODM2 - b_2\,ODM1) = c_2\,ODM1 + c_1\,ODM2\right]$$

↑ ↑ ↑

TAK NE !



$tg\,45° = 1$

$$ax + by + c = 0$$
$$by = -ax - c$$
$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$y = kx + q$

$k = -\frac{a}{b}$ $\quad q = -\frac{c}{b}$

$y = kx + q$

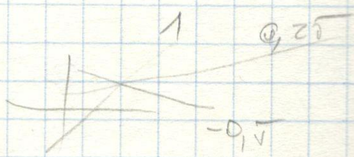
$q = y - kx$

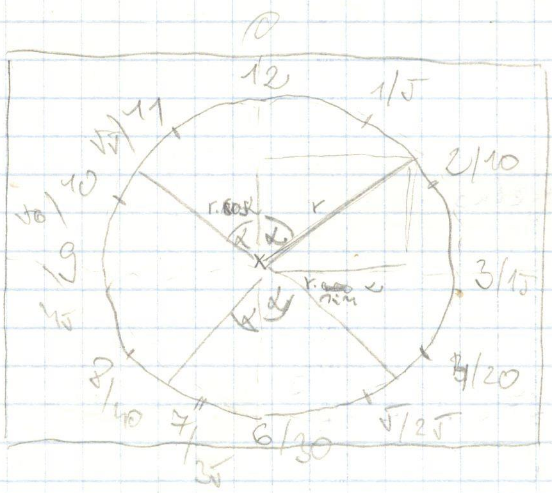
$tg\,\gamma = k$

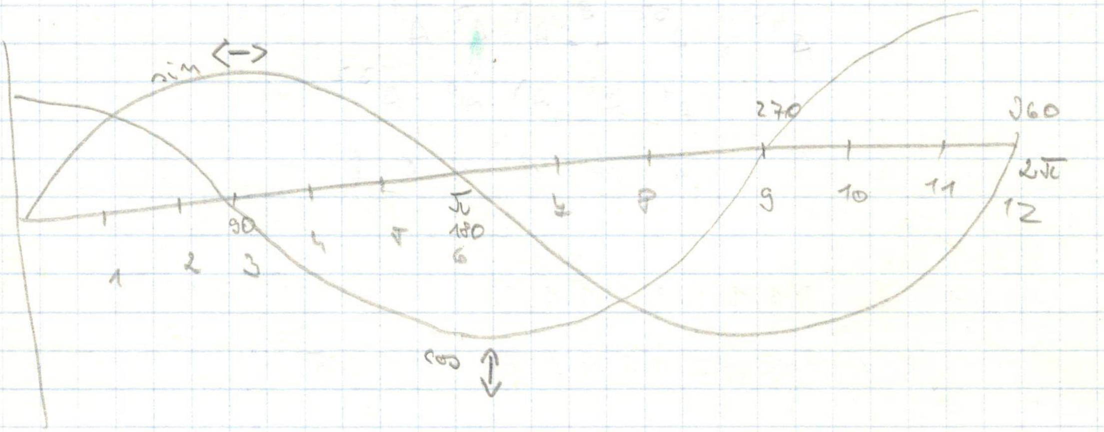
$\gamma = arctg(k)$

$$y_0 = k_1x_0 + q_1$$
$$y_0 = k_2x_0 + q_2$$

$$-k_1x_0 + y_0 = q_1$$
$$-k_2x_0 + y_0 = q_2$$







(1) Nalezněte všechna přir. čísla menší než dané N, kt. jsou dělitelná každou svou cifrou.

i:=0

N1 = 2468

i:=i+1

(2) Přirozené číslo se nazývá PALINDROM, je-li jeho dekadický zápis symetrický (čte se stejně zepředu a zezadu - 313)
Nalezněte všechny palindromy z intervalu <A,B>

(3) spočítejte a vytiskněte všechna 3-ciferná čísla, v nichž se žádná cifra neopakuje. (tzn. všechny 3 cifry jsou různé)

$9 \cdot \underbrace{9 \cdot 8}_{} = 648$ VARIACE

$9 \cdot V_{2}(9)$

4x4

4. Napište pro počítání velkých mocnin matice.
Prvky matice jsou celá čísla <-5,5>
vstup N... mocnitel

$$A^N = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n}$$

2 způsoby
- $A \cdot A \cdot A \ldots$ for cyklus
- $A^1, A^2, A^4, A^8, A^{16}$

$A^5 = A^1 \cdot A^4$ → 101

$A^7 = A^1 \cdot A^2 \cdot A^3$ → 111

$$A^{47} = A^{32} \cdot A^8 \cdot A^4 \cdot A^2 \cdot A^1$$

$$A^1 \cdot A^2 \cdot A^4 \cdot A^8 \cdot A^{32}$$

1 1 1 1 0 1

1 1 1 1 1 1 1 1

128 64 32 16 8 4 2 1 255

```
procedure DejMocninu(X: TMatice44; N: Byte; var V: PMatice44);
var PomMat: TMat44;
    I: Byte;
    S: String[8];

begin
  PomMat := X;
```

~~7:2 = 3 1~~
~~3:2 = 1 1~~
~~1:2 = 0 1~~

6:2 = 3
3:2 = 1
1:2 = 0

0	1
1	2
1	4
0	8
0	16
0	32
0	64
0	128

JeČíslo → PČíslo → PomT

Nas(X, PomT, Mezisouč);

DejMocninuMat(X, Číslo, NováP);
PČíslo := NováP;
JeČíslo := True;
PČíslo => PomT;
Nas(X, PomT, Mezisouč);

2

4	-4	5	5
0	0	3	-2
0	-2	2	5
-1	4	-2	-5

=>

-4	14	-12	-22
8	-17	10	25
-20	16	-12	-11
4	0	38	-13

=> X

=>

2

42	32	162	-190
-67	48	-112	-7
-36	60	146	-137
60	-144	-78	275

?

-5	1	0	-3
2	0	4	-5
3	5	1	-2
5	-1	-1	-4

=>

12	-2	7	22
-23	27	9	8
-12	10	20	-20
-50	4	-1	8

X

-5	1	0	-3
2	0	4	-5
3	5	1	-2
5	-1	-1	-4

67	25	-23	-128
236	14	109	-116
49	123	53	20
295	-63	7	100

5) ÚLOHA:

ověřit, zda platí komutativnost ~~ve~~ matic

proc. zadani_matice
tisk_matice
soucin_matic

fce typu boolean, kt. otestuje zda platí (neplatí)

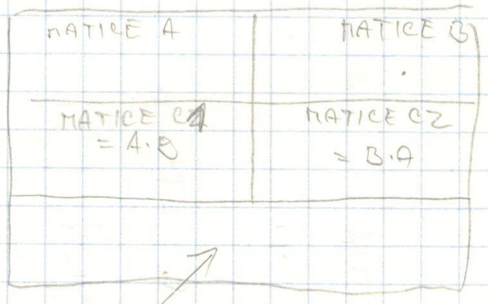
$A \cdot B = B \cdot A$

c1 c2

function Porovnani (cc1, cc2 : Mat) : B ;

while cykly

6/ CVT



výsledek porovnání

7/ Nalezněte všechny PYTHAGOREJSKÉ △, jejichž všechny 3 strany jsou menší než dané N.

N

? a, b, c že $a \leq b \leq c \wedge a^2 + b^2 = c^2$

Přir. č. se nazývá dokonalé, je-li rovno součtu všech svých dělitelů (kladných) s výjimkou sebe sama.

6 → 1 + 2 + 3

Př. vytiskne všechna dok. čísla než dané n.

Dynamické proměnné a typ ukazatel

Přímý přístup
(statické proměnné)

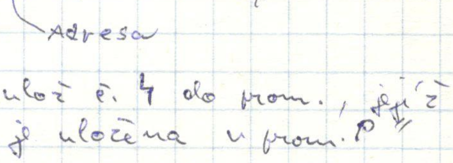
var A: Integer

A:

„dej do A č. 4"

Nepřímý přístup
(dynamické prom.)

var P: ^Integer;



„ulož č. 4 do prom., jejíž adresa je uložena v prom. P^"

REFERENCE – ukazování na dyn. proměnnou
DEREFERENCE – operace přístupu k dyn. proměnné pomocí ukazatele

Vytvoření dyn. proměnné

P: [?]

New(P); P: [·]→[?]

P^:= 10 P: [·]→[10]

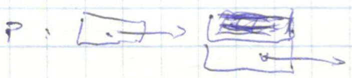
Dispose(P); P: [·]→[ ]

Někdy je zapotřebí, aby ukazatel nereferencoval žádnou dyn. proměnnou, avšak měl hodnotu P: [•] P:= nil;

z 95%

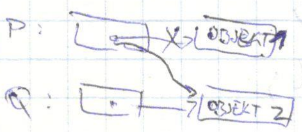
```
type    Ukazatel = ^Objekt;
        Objekt   = record
                     Info : TypInfo;
                     Dalsi : Ukazatel;
                   end;
```

```
var P: Ukazatel;
```



Př:
```
type RefOsoba = ^Osoba;
     Osoba    = record
                  Jmeno    : String[15];
                  Prijmeni : String[20];
                  Vek      : Integer;
                  Dalsi    : RefOsoba;
                end;
```

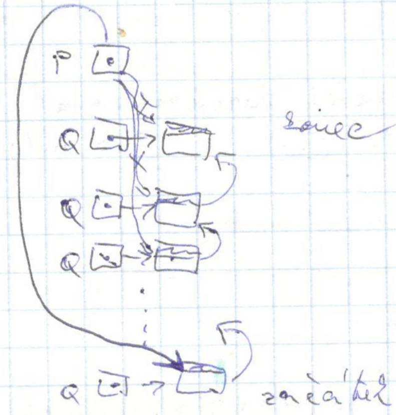
```
var Os : RefOsoba;

New(Os);                         with Os^ do
Read(Os^.Jmeno);       Pr, Vek
```



P:= Q

Lineární spojový seznam

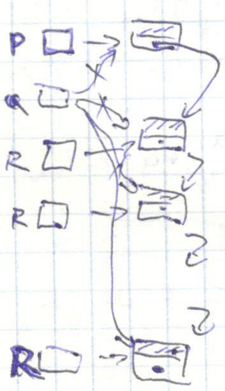
```
type   Uk = ^T;
       T = record
             Info : TypInfo;
             Dalsi : Uk;
           end;

var P,Q : Uk;

P := nil;
„OPAKUJ"
 New(Q);
 „vezmi Q^.Info"
 Q^.Dalsi := P;
 P := Q;
„Konec Opakuj"
```



Procházení

```
while P<>nil do
 begin
   něco udělej s P^.Info;
   P:= P^.Dalsi;
 end;
```

Např. proceduru, kt. vytvoří lin. spoj. seznam celých čís. 10 prvků s hodn. 1..10.



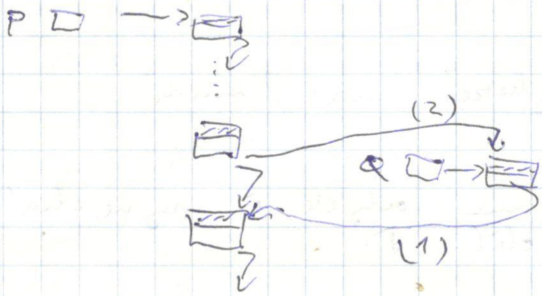

```
New(P);
P^.Info:= ...;
P^.Dalsi:= nil;
Q:= P;
„OPAKUJ"
  New(R);
  R^.Info := ...;
  Q^.Dalsi := R;
  Q := R;
  Q^.Dalsi := nil;
```

Lineární spojové seznamy

Uložení údajů ve srovnání s polem

- výhodné, neznáme-li velikost (počet prvků)
- snadné vkládání a vyjmutí prvku uprostřed seznamu
- nevýhoda: není přístup (přímý) ke k-tému prvku

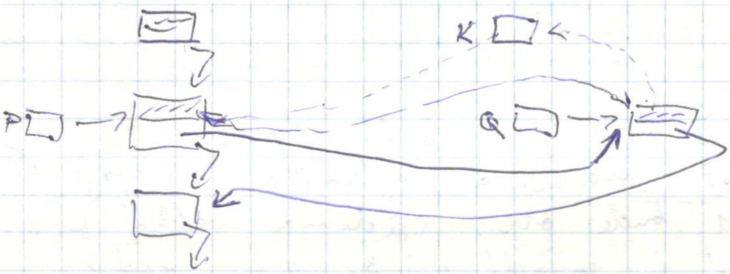
VKLÁDÁNÍ za daný prvek



(1) Q^.Dalsi := P^.Dalsi
(2) P^.Dalsi := Q;

VKLÁDÁNÍ před daný prvek

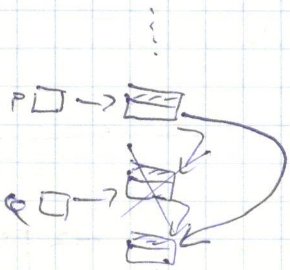
TRIK → zapojí se za P a vymění se obsah P a Q



Q^.Dalsi := P^.Dalsi
K := Q^.Info
Q^.Info := P^.Info
P^.Info := K
P^.Dalsi := Q

VYPUŠTĚNÍ - známe předchůdce

P - předchůdce rušeného prvku, rušíme následníka P



Q := P^.Dalsi
Q je rušený prvek
P^.Dalsi := Q^.Dalsi
Dispose(Q)

1) V prvcích lin. spoj. seznamu jsou uložena celá čísla. Nap. fci, kt. vrátí počet prvků seznamu obsahujících č. dělit. 5.

2) Napište proceduru (fci), kt. vybere max / min ze seznamu.

3) Nap. proc. kt. z daného seznamu celých č. vynechá všechny prvky obsahující č. dělit. 5.

6

16 17 18 19 20

Pom1 Pom2 Pom2 Pom2 Pom2 Pom2

Pom1 Pom1 Pom1

4) Nap. proced., kt. přečte ze vst. text. soub. zadanou posloupnost znaků a vytvoří 2 spojové seznamy znaků. 1. bude obs. všechna velká písm. ang. abec. ve stejném pořadí, jak ta byla zadána. Do druhého seznamu se uloží všechny číslice, a to v opač. pořadí, než co byly zadány.

7 z 6 A ** 3 5 B C

1S : A B C
2S : 5 3 6 7

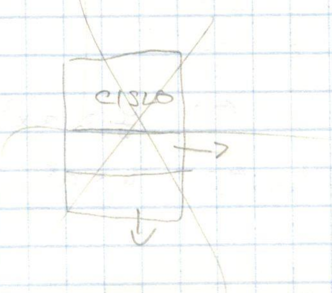
Determinanty - opak

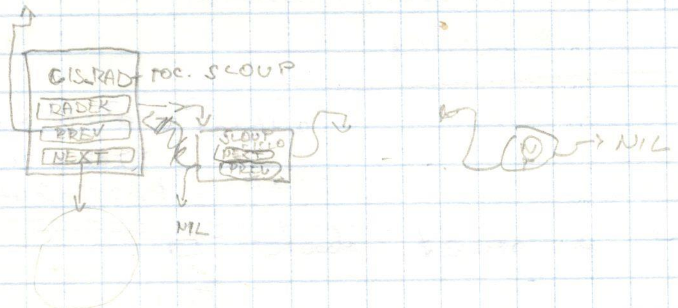
Rozvoj

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & +2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

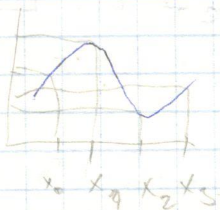
: udělat dynam. matici





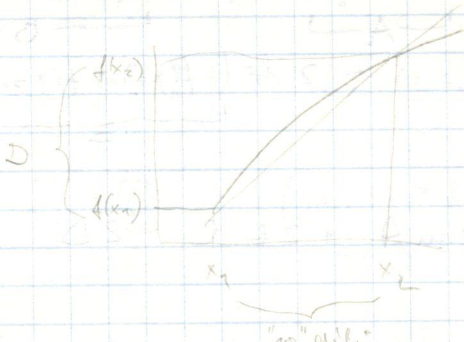
Metoda extrapolace metodou nejmenších čtverců

Interpolace



najít polynom $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

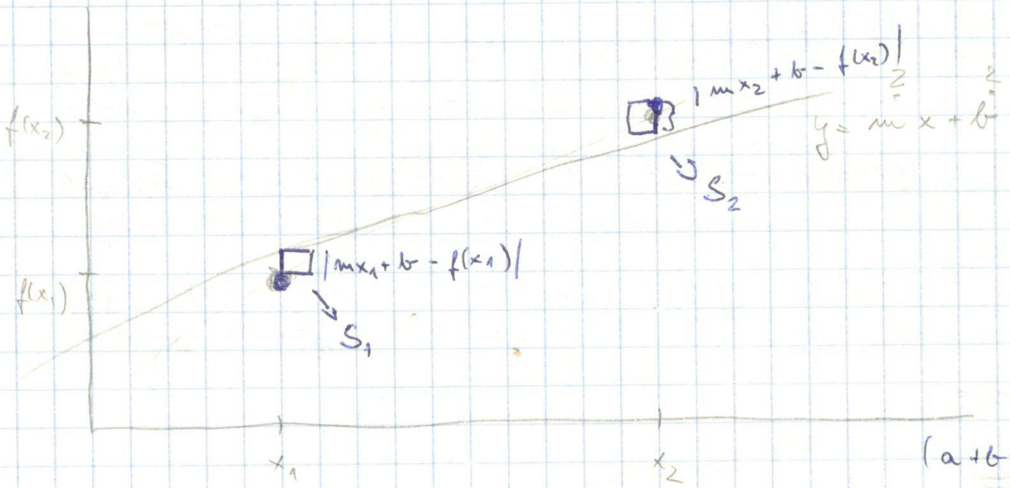
Lineární interpolace



D – diference

Extrapolace

předpověď
trend



m. $y = ax^2+bx+c$

m. $y = a^x$

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2$
$+2ab+2ac+2bc$

Pro jaké hodnoty m, b je součet obsahů $\square$ co nejmenší?

$$S = S_1+S_2$$

$$S = m^2x_1^2 + b^2 + f^2(x_1) + 2mx_1b - 2mx_1f(x_1) - 2bf(x_1) +$$
$$+ m^2x_2 + b^2 + f^2(x_2) + 2mx_2b - 2mx_2f(x_2) - 2bf(x_2)$$

$$S = m^2\underbrace{(x_1^2+x_2^2)}_{A} + 2b^2 + \underbrace{\left(f^2(x_1)+f^2(x_2)\right)}_{B} + 2mb\underbrace{(x_1+x_2)}_{C} - 2m\underbrace{(x_1f(x_1)+x\ldots}_{D}$$
$$- 2b\underbrace{\left(f(x_1)+f(x_2)\right)}_{E}$$

$$S'_{(m)} = 2mA + 2bC - 2D$$

$$S'_{(b)} = 4b + 2mC - 2E$$

$$S'(m) = 0 \quad \wedge \quad S'(b) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$mA + bC = D$$
$$mC + 2b = E$$

V EXCELU

CZ : LINTREND (POLE_Y; POLE_X; NOVÉ_X; B)
ENG : TREND

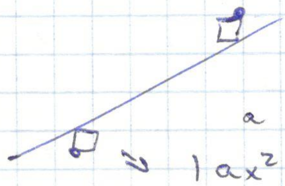
lineární trend metodou nejm. □

SLOPE (POLE_Y, POLE_X)
směrnice přímky

INTERCEPT (POLE_Y, POLE_X)
průsečík přímky s osou X — regresní přímky

KVADRATICKÁ FNCTV.

$$(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2 + 2ab+2ac+2ad + 2bc+2bd+cd$$



$$\Rightarrow \left|\overset{a}{ax^2} + \overset{b}{bx} + \overset{c}{c} - \overset{d}{f(x)}\right|$$

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$$

$$S = a^2x_1^4 + b^2x_1^2 + c^2 + f^2(x_1) + 2abx_1^3 + 2acx_1^2 - 2ax_1^2 f(x_1) + 2bcx_1 - 2bx_1 f(x_1) - 2cf(x_1)$$
$$+ \dots +$$
$$a^2x_n^4 + b^2x_n^2 + c^2 + f^2(x_n) + 2abx_n^3 + 2acx_n^2 - 2ax_n^2 f(x_n) + 2bcx_n - 2bx_n f(x_n) - 2cf(x_n)$$

$$S = a^2\underbrace{(x_1^4+\dots+x_n^4)}_{A} + b^2\underbrace{(x_1^2+\dots+x_n^2)}_{B} + \underbrace{\boxed{n}}_{C}c^2 + \underbrace{(f^2(x_1)+\dots+f^2(x_n))}_{D} + 2ab\underbrace{(x_1^3+\dots+x_n^3)}_{E}$$
$$+ 2ac\underbrace{(x_1^2+\dots+x_n^2)}_{F} - 2a\underbrace{(x_1^2 f(x_1)+\dots+x_n^2 f(x_n))}_{G} + 2bc\underbrace{(x_1+\dots+x_n)}_{H}$$
$$- 2b\underbrace{(x_1 f(x_1)+\dots+x_n f(x_n))}_{I} - 2c\underbrace{(f(x_1)+\dots+f(x_n))}_{J}$$

$$S = a^2A + b^2B + c^2C + D + 2abE + 2acF - 2aG + 2bcH - 2bI - 2cJ$$

$$S'(a) = 2aA + 0 + 0 + 0 + 2bE + 2cF - 2G + 0 - 0 - 0$$

$$S'(b) = 0 + 2bB + 0 + 0 + 2aE + 0 - 0 + 2cH - 2I - 0$$

$$S'(c) = 0 + 0 + 2cC + 0 + 0 + 2aF - 0 + 2bH - 0 - 2J$$

$$S'(a) = 2aA + 2bE + 2cF - 2G$$
$$S'(b) = 2bB + 2aE + 2cH - 2I$$
$$S'(c) = 2cC + 2aF + 2bH - 2J$$

$$S'(a) = 0 \quad \wedge \quad S'(b) = 0 \quad \wedge \quad S'(c) = 0$$

$/ \cdot \frac{1}{2}$

$$aA + bE + cF = G$$
$$bB + aE + cH = I$$
$$cC + aF + bH = J$$

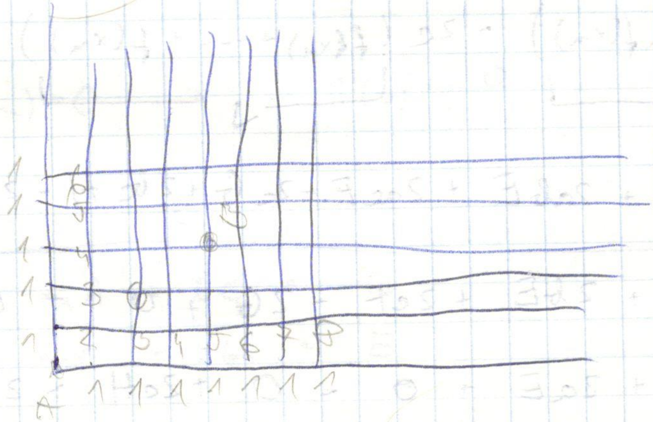
$$aA + bE + cF = G$$
$$aE + bB + cH = I$$
$$aF + bH + cC = J$$

$\Rightarrow$ Determinant

Riešenie sústav. o 3 nez.

A	E	F	G
E	B	H	I
F	H	C	J

$\boxed{\text{EXCEL}}$



→ prevrátený Pasc. Δ

0 1
1 1 1
2 1 2 1
3 1 3 3 1
4 1 4 6 4 1
⋮
n

$0 \le k \le n$

$$\binom{3}{1} + \binom{3}{2}$$

$$\binom{4}{2}$$

n . . . . $\boxed{}$ k $\boxed{}$ $k+1$

$n+1$ . . . $\boxed{}$ $k+1$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\binom{n-1}{k-1} \quad \binom{n-1}{k} \quad \binom{n}{k}$$

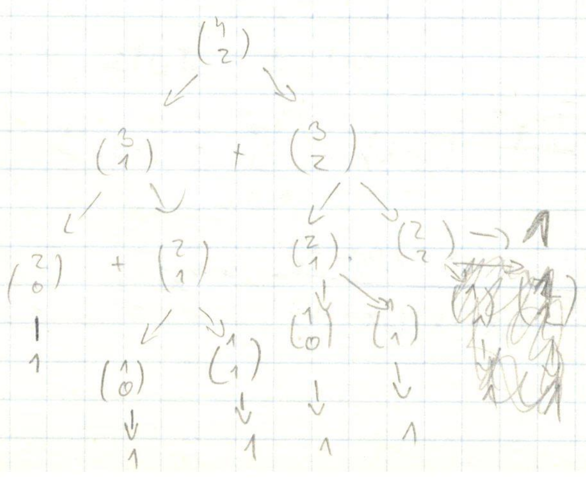
? $\binom{n}{k} = 1$

$k = 0 \lor k = n$

$(k=0) \lor (k=n) \xrightarrow{+} \binom{n}{k} = 1$

$\xrightarrow{-} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

```
function D-Kombin (N,K : LongInt) : LongInt;
if (n=k) or (k=0) then D-Kombin := 1
                  else D-Kombin := D-Kombin (N-1,K-1) + D-Kombin (N-1, K);
end;
```



Defl. fci ve VB, kt. zjistí cif. součet přir. čísla, která je uložena v urč. 6.

Pole ve VBA

	1	2	3	4
1				
2			$\boxed{\ }$	
3				
4				

CELLS(2,3).VALUE = 10

↓ OBJEKT

↓ METODA ? (DATA)

WORKSHEETS("SHEET1").

MIN = CELLS(2,3).VALUE

1) výběr maximálního/min prvku matice typu 10×5. Uložení max/min do buň. 12,1 -> A12

SHEETS("SHEET1").ACTIVE

Rnd (0,1)

```
sub PA()
const R = 10
const S = 5
dim max as Single
    I
    J
= True

Sheets("SHEET1").Activate
for I = 1 to R
 for J = 1 to S
  Cells(I,J).Value = Int(Rnd()*10)
  next J
next I
```

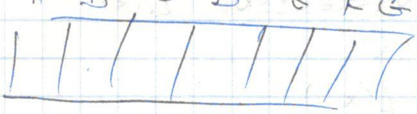
max = Cells(1,1).Value

2) 10×5

vybrat max. prvek v každém řádku matice

3) min v každým sloupci v 10×5

4) A B C D E F G



DIM A(7) as Single - pole

1) Co je to interpolace (extrapolace) - vysvětlit princip

Nalezení křivky spojující urč. počet známých bodů

$x_0 \quad f(x_0)$
$x_1 \quad f(x_1)$
$\vdots$
$x_n \quad f(x_n)$

$x' \in \langle x_0; x_n \rangle$

? $f(x')$

2) jaké interpolační metody znáte?

$L_n(x)$
$N_n(x)$
MNČ

3) Vysvětlete $L_n(x)$

$$L_n(x) = \sum_{x=0}^{n} f(x_i) \cdot l_i(x)$$

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

$L_n(x_i) = f(x_i)$

x_0, x_1

$$L_1(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} \cdot f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} \cdot f(x_1)$$

$L_1(x_0) = f(x_0)$

x_0, x_1 — $L_1(x)$
x_0, x_1, x_2 — $L_2(x)$
x_0, x_1, x_2, x_3 — $L_3(x)$
x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 — $L_4(x)$

1) VÝBĚR
2) NAKRESLENÍ $L_i(x)$
3) x'
4) $f(x')$

4) $N_n(x)$ – vysvětlete

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \\ + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

$N_1(x) = a_0 + a_1(x-x_0)$

$a_0 = f(x_0)$

$f(x_1) = a_0 + a_1(x-x_0)$

$f(x_2) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)$

JEN PRO a_1

$$\to a_1 = \frac{f(x_1) - a_0}{x-x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x-x_0}$$

Jak můžeme určit $a_0, \dots, a_n$?

1) GEM

2) POMĚRNÉ DIFERENCE

$$a_2 \; \frac{f(x_2) - f(x_0) - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$a_2 = \frac{1}{x_2-x_1}\left[\underbrace{\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}}_{f[x_0,x_2]} - \underbrace{\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}_{f[x_0,x_1]}\right]$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1}$$

$$f(x_0) = f[x_0]$$
$$f(x_1) = f[x_1]$$
$$\vdots$$
$$f(x_n) = f[x_n]$$

$$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$$

$$f[x_1,x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$$

$$\vdots$$

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & f(x_0) \rightarrow a_0 & & & & \\
x_1 & f(x_1) & f[x_0, x_1] \rightarrow a_1 & & & \\
x_2 & f(x_2) & \rightarrow f[x_1, x_2] & \rightarrow f[x_0, x_1, x_2] \rightarrow a_2 & & \\
 & & \vdots & & & \\
x_n & f(x_n) & \rightarrow f[x_{n-1}, x_n] & \rightarrow f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & \cdots & f[\\
\text{poč. dif. řádu} \rightarrow & 0. & 1. & 2. & &
\end{array}
$$

$$
f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}
$$

Lze přidávat body – libovolně zvyšovat stupeň $N_n(x)$

$$
N_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) +
$$
$$
+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots +
$$
$$
+ f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})
$$

$$
? \quad N_n(x) = a_0 + a_1\underline{(x - x_0)} + a_2\underline{(x - x_0)}(x - x_1) + a_3\underline{(x - x_0)}(x - x_1)(x -
$$
$$
= a_0 + (x - x_0)\Big[a_1 + a_2\underline{\underline{(x - x_1)}} + a_3\underline{\underline{(x - x_1)}}(x - x_2) +
$$
$$
= a_0 + (x - x_0)\Big[a_1 + (x - 1)\Big[a_2 + a_3(x - x_2) +
$$
$$
= a_0 + (x - x_0)\Big[a_1 + (x - 1)\Big[a_2 + (x - 2)\Big[a_3 + (x - 3
$$

a_{n-1}

$, x_1, \ldots, x_{n-1}]$

a_n

$1, x_2, \ldots, x_n] \rightarrow f[x_0, x_1 \ldots x_n]$

$$\boxed{\begin{array}{l} H = a_n \\ \text{PRO } I = n-1, n-2 \ldots 1, 0 \\ \quad H = H(x - x_I) + a_I \end{array}}$$

$) + \ldots + a_n \underline{(x - x_0)}(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$

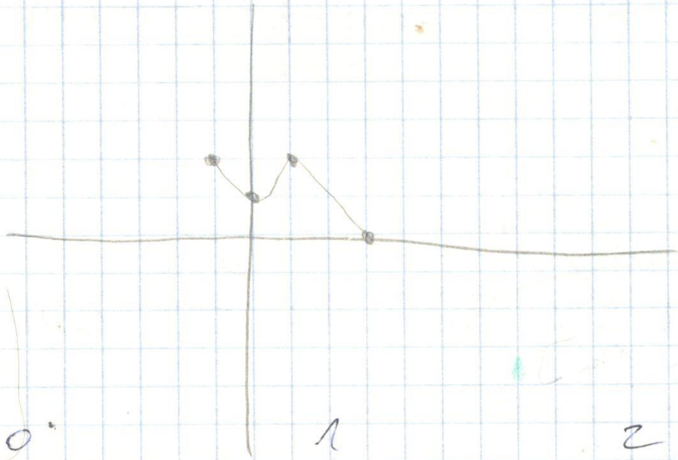
$+ a_n \underline{(x - x_1)} \ldots (x - x_{n-1})]$

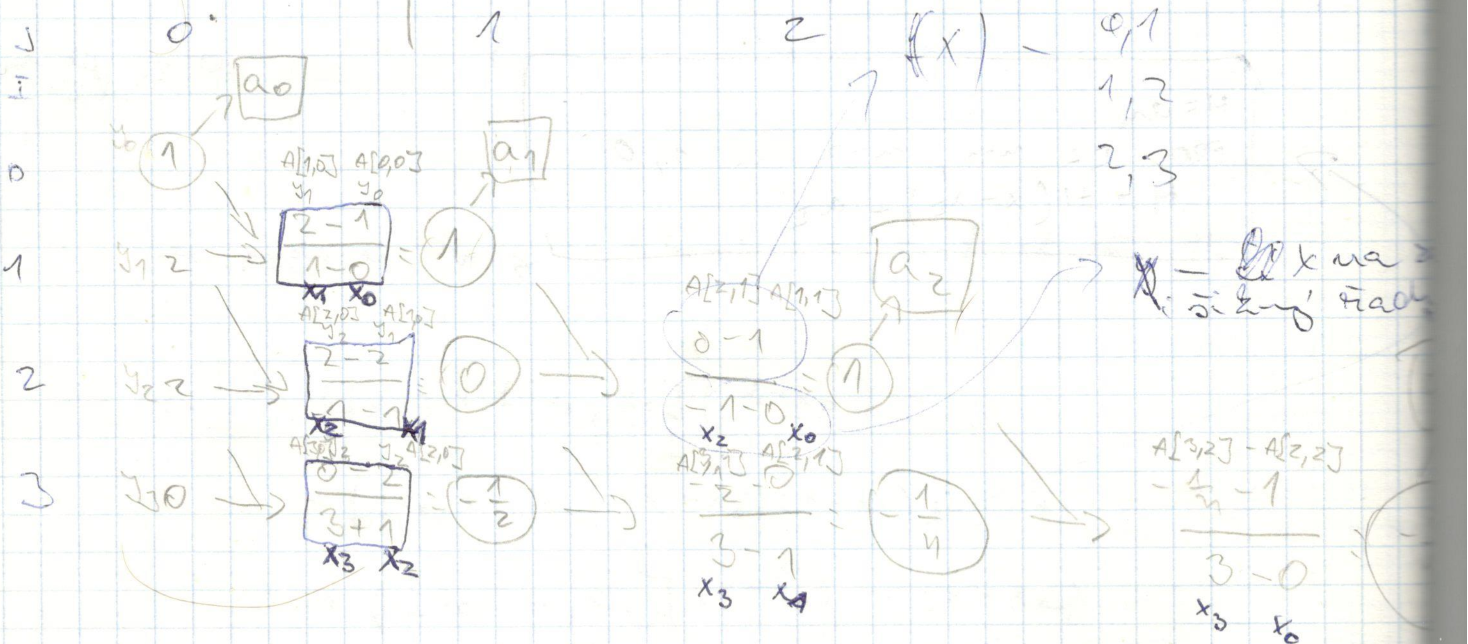
$+ a_n (x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})]]$

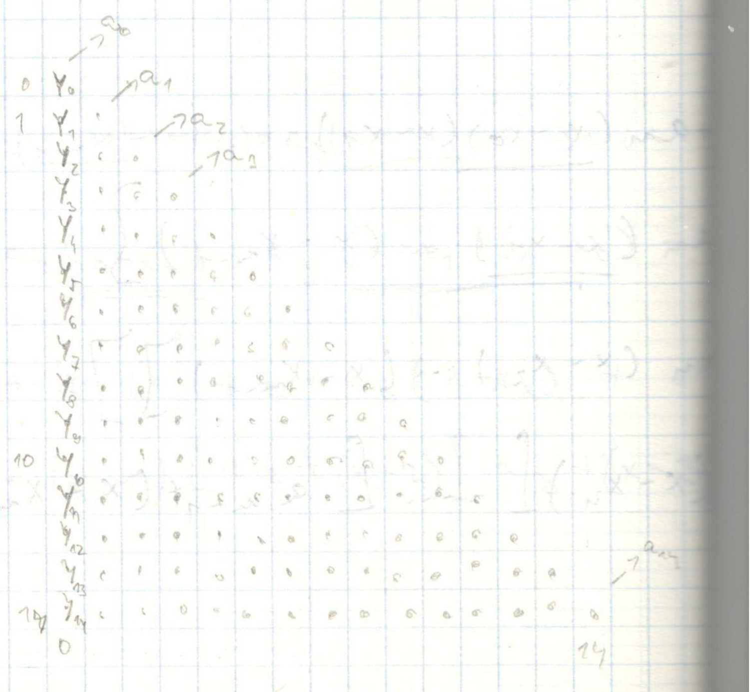
$a_n (x - x_n) [\ldots [a_{n-1} + (x - x_{n-1}) a_n] \ldots]$

H

i	x_i	$f(x_i) = f[x_i]$
0	0	1
1	1	2
2	-1	2
3	3	0

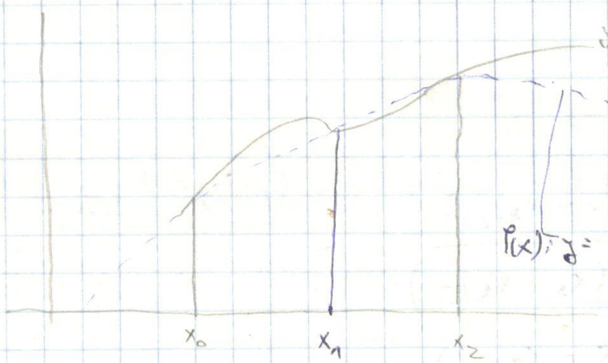






SIMPSONOVO PRAVIDLO pro přibližný výpočet určitého integrálu

ZÁKLADNÍ VZOREC



$$x_1 = \frac{x_0+x_2}{2}$$

v $\langle x_0, x_1\rangle$ fci $f(x)$ nahradíme

kvadratickou fcí

$\varphi(x): y = ax^2+bx+c$

$$y_0 = a x_0^2 + b x_0 + c$$
$$y_2 = a x_2^2 + b x_2 + c$$
$$y_1 = a\left(\frac{x_0+x_2}{2}\right)^2 + b\left(\frac{x_0+x_2}{2}\right) + c$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \doteq \int_{x_0}^{x_2} \varphi(x)\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_2} (ax^2+bx+c)\,dx = \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\right]_{x_0}^{x_2} =$$

$$= \frac{a}{3}x_2^3 - \frac{a}{3}x_0^3 + \frac{b}{2}x_2^2 - \frac{b}{2}x_0^2 + cx_2 - cx_0 =$$

$$= \frac{a}{3}\left(x_2^3 - x_0^3\right) + \frac{b}{2}\left(x_2^2 - x_0^2\right) + c\left(x_2 - x_0\right) =$$

$$= (x_2-x_0)\left[\frac{a}{3}\left(x_2^2 + x_0x_2 + x_0^2\right) + \frac{b}{2}(x_2+x_0) + c\right] =$$

$$= \frac{x_2-x_0}{6}\left[2a\left(x_2^2 + x_0x_2 + x_0^2\right) + 3b(x_2+x_0) + 6c\right] =$$

$$= \frac{x_2-x_0}{6}\left[2ax_2^2 + 2ax_0x_2 + 2ax_0^2 + 3bx_2 + 3bx_0 + 6c\right] =$$

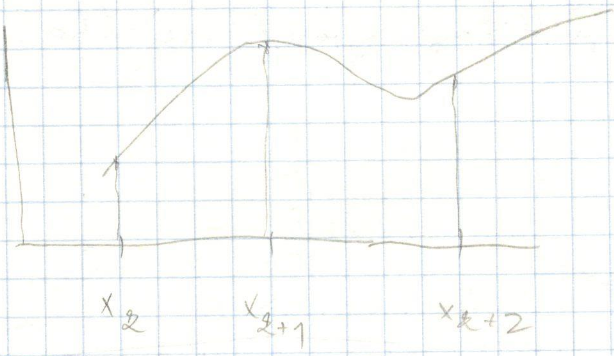
$$= \frac{x_2-x_0}{6}\left[\underbrace{\left(ax_2^2 + bx_2 + c\right)}_{y_2} + \underbrace{\left(ax_0^2 + bx_0 + c\right)}_{y_0} + ax_2^2 + 2ax_0x_2 + ax_0^2 + 2bx_2 + 2bx_0 + 4c\right]$$

$$= \frac{x_2-x_0}{6}\left[y_2 + y_0 + a\left(x_2^2 + 2x_0x_2 + x_0^2\right) + 2b(x_2+x_0) + 4c\right]$$

$$= \frac{x_2-x_0}{6}\left[y_2 + y_0 + 4a\left(\frac{x_2+x_0}{2}\right)^2 + 4b\,\frac{x_2+x_0}{2} + 4c\right]$$

$$= \frac{x_2-x_0}{6}\left[y_2 + y_0 + 4\underbrace{\left(a\left(\frac{x_2+x_0}{2}\right)^2 + b\left(\frac{x_2+x_0}{2}\right) + c\right)}_{y_1}\right] =$$

$$\boxed{= \frac{x_2-x_0}{6}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right]}$$



$$\varphi_i(x) = f(x_i)\,\frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})} + f(x_{i+1})\,\frac{(x-x_i)(x-x_{i+2})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})} + f(x_{i+2})\,\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,dx \doteq \int_{x_i}^{x_{i+2}} \varphi_i(x)\,dx = \frac{x_{i+2}-x_i}{6}\Big[f(x_i)+4f(x_{i+1})+f(x_{i+2}$$

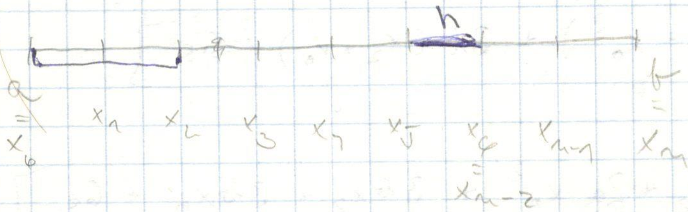
ZÁKL. VZOREC.

$i=0$
$i=2$ . . . .

ZOBECNĚNÍ S.P. na $\langle a,b\rangle$

$\langle a,b\rangle$ rozdělíme na n

$\boxed{!\ n \text{ sudé},\ \geq 2}$



x_0, x_1, x_2

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,dx = \frac{x_2-x_0}{6}\Big[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\Big] + \frac{x_4-x_2}{6}\Big[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\Big] + \frac{x_6-x_4}{6}\Big[f(x_4)+4f(x_5)+f(x_6)\Big] + \dots + \frac{x_n-x_{n-2}}{6}\Big[f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\Big]$$

$$\frac{x_{2+2} - x_2}{2} = h \qquad 2 = 0, 2, \dots$$

$$\frac{x_{2+2} - x_2}{6} = \frac{h}{3}$$

$$= \frac{h}{3}\Big[\underline{f(x_0) + 4f(x_1)} + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) +$$

$$+ 2f(x_6) \dots + \dots 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + \underline{f(x_n)}\Big]$$

ALGORYTMUS

VSTUP: $f(x)$, a, b, n - sudé

$S := f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_n)$

$x = a + 2h$ - začíná od x_2

pro $2 = 2, 4, 6, \dots, n-2$

$S := S + 2f(x) + 4f(x + h)$

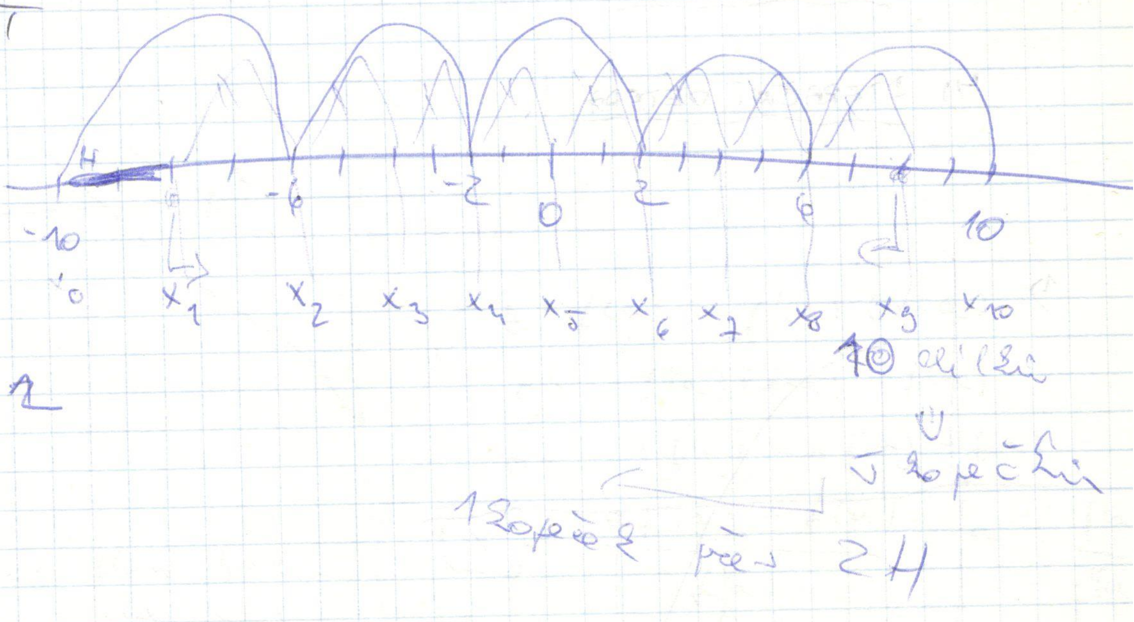
$x := x + 2h$

$S := S \times h/3$;

OUTPUT

2, 4, 6, 8, 10

1, 2, 3, 4, 5



H = 2

10 dílků

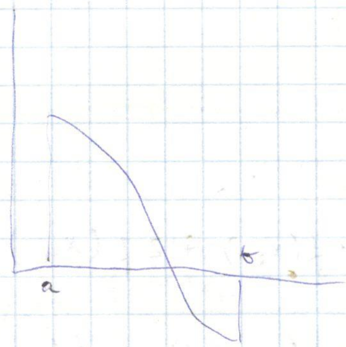
⇓

5 kopečků

1 kopeček přes 2H

METODY PŘIBLIŽNÉHO ŘEŠENÍ ROVNIC

1)



$f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists$ aspoň 1 $c \in (a,b)$; $f(c) = 0$

c je kořenem rce $f(x) = 0$

: 2, 3 ...

navíc $\forall x \in (a,b)$; $f'(x) > 0 \Rightarrow \exists! c \in (a,b)$; $f(c) =$

— " — ; $f'(x) < 0 \Rightarrow$ — " —

METODA PŮLENÍ INTERVALU

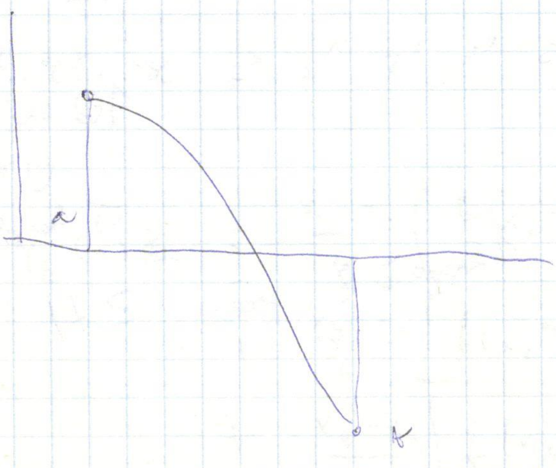
SEPARACE KOŘENŮ

2) METODA SEČEN - TĚTIV

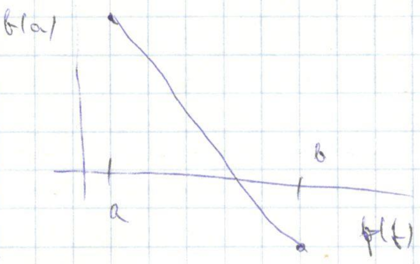
3) METODA TEČEN

4) ITERAČNÍ METODA

1)



2) TĚTIVY



$$y - f(a) = k(x-a)$$

$$y = k(x-a) + f(a)$$

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a) + f(a)$$

$$0 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a) + f(a)$$

$$0 = [f(b)-f(a)](x-a) + f(a)(b-a)$$

$$0 = xf(b) - xf(a) - af(b) + af(a) + f(a)(b-a)$$

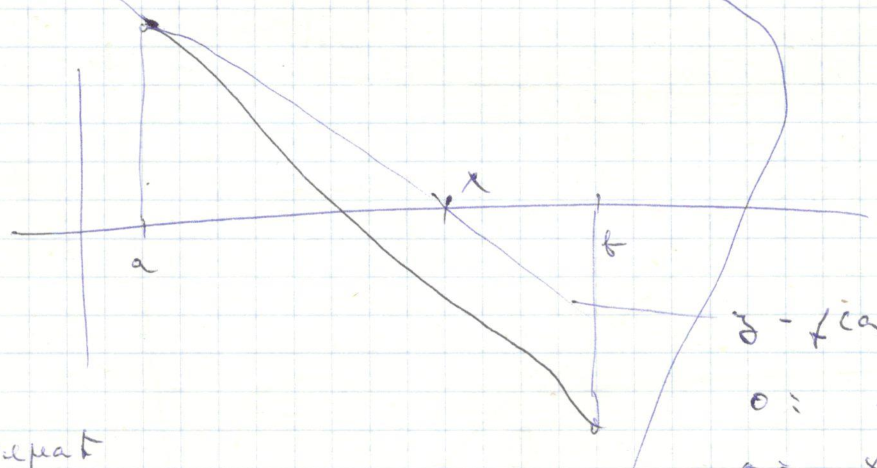
$$0 = xf(b) - xf(a) - af(b) + af(a) + bf(a) - af(a)$$

$$xf(a) - xf(b) = bf(a) - af(b)$$

odvození C $\Rightarrow$

$$x = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)}$$

3) TEČNY



$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

$$0 = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$0 = xf'(a) - af'(a) + f(a)$$

$$\boxed{x} = \frac{af'(a) - f(a)}{f'(a)} = \boxed{a - \frac{f(a)}{f'(a)}}$$

?

repeat

$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$

if $f(x) \cdot f(a) < 0$ then $b = x$

else $a = x$

$I = |a-b| < Eta$

until I;

neošetřeno

Boolean

$$\left[[A \Rightarrow B]' \right]' \Leftrightarrow [A \wedge B']'$$

$$[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [A' \vee B]$$

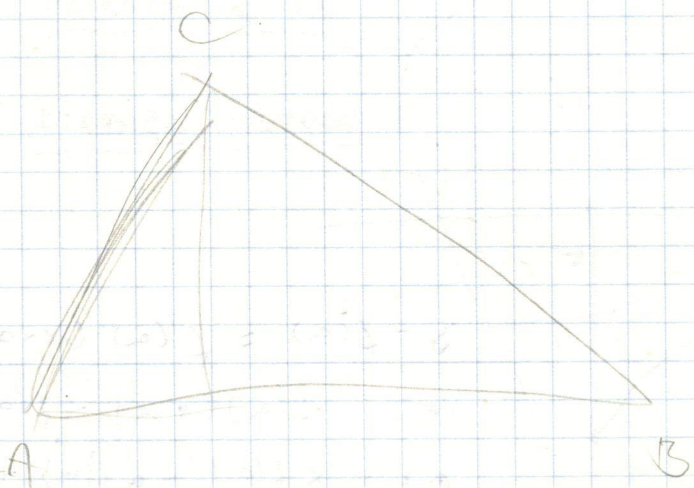
$$[A \Leftrightarrow B]'$$

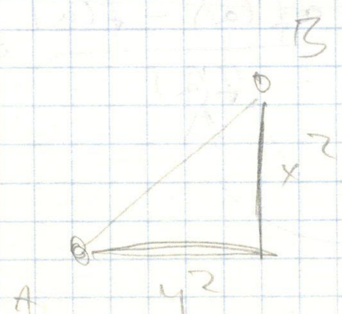
$$[A \Leftrightarrow B] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$$

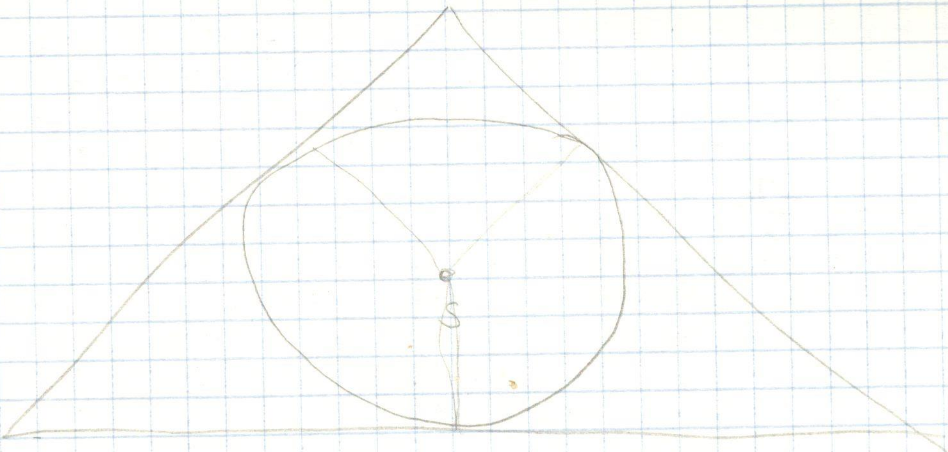
$$[A \Leftrightarrow B]' \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B)' \vee (B \Rightarrow A)']$$

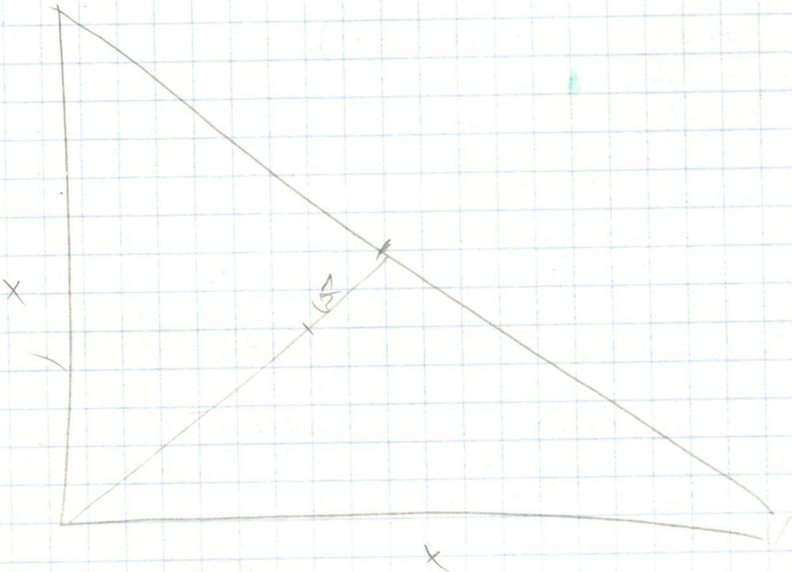
$$\Leftrightarrow [(A \wedge B') \vee (B \wedge A')]$$

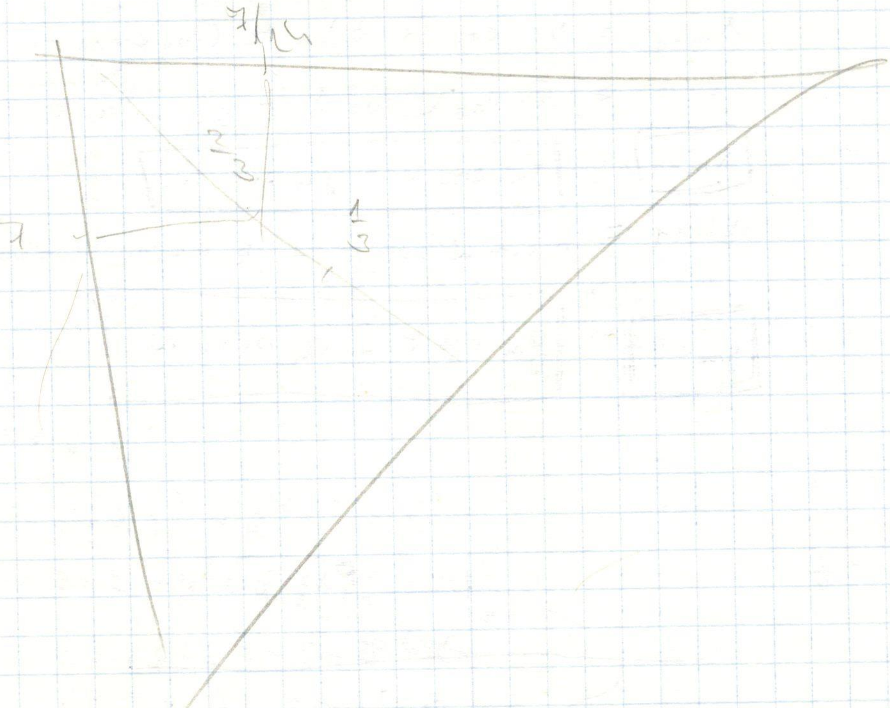
$$\boxed{[A \Leftrightarrow B] \Leftrightarrow [(A \wedge B') \vee (B \wedge A')]'}$$

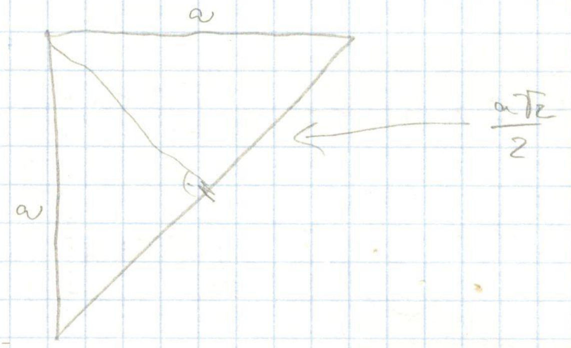






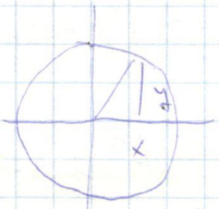






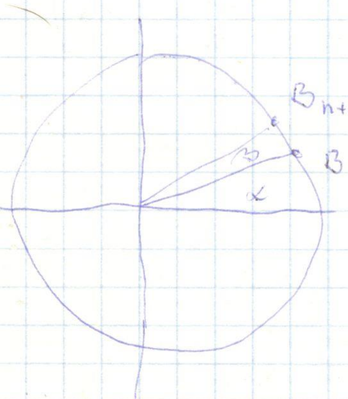
KRUŽNICE → GRAPH → CIRCLE(x, y, R)

1)



$x = r \cdot \cos\alpha \qquad \alpha \in \langle 0^\circ, 360^\circ)$
$y = r \cdot \sin\alpha$

2) RYCHLENÍ

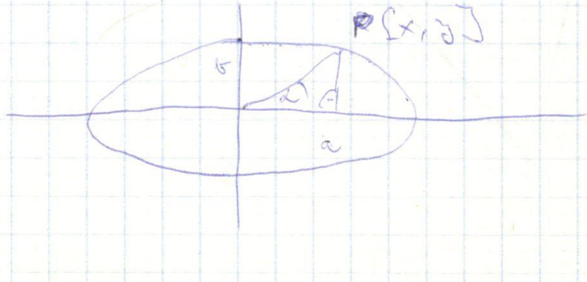


$$B_{n+1} = [\overbrace{r \cdot \cos(\alpha+\beta)}^{x_{n+1}}, \overbrace{r \cdot \sin(\alpha+\beta)}^{y_{n+1}}]$$
$$B_n = [r \cdot \cos\alpha, r \cdot \sin\alpha]$$

$$x_{n+1} = r \cdot \cos(\alpha+\beta) = r \cdot (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$
$$= r \cdot \cos\alpha\cos\beta - y_n \sin\beta$$
$$\boxed{x_{n+1}} = \boxed{x_n \cos\beta - y_n \sin\beta}$$
$$y_{n+1} = r \sin\alpha\cos\beta + r \cdot \sin\beta\cos\alpha$$
$$\boxed{y_{n+1}} = \boxed{y_n \cos\beta + x_n \sin\beta}$$

3) ELIPSA

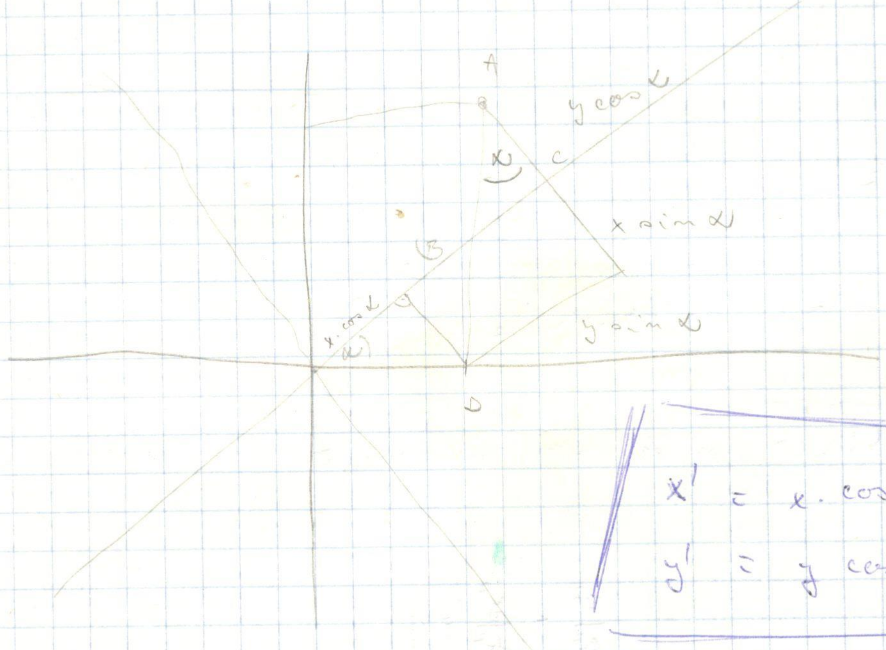
$x = a \cdot \cos\alpha$
$y = b \cdot \sin\alpha$



OTOČENÍ SOUSTAVY SOUŘADNÉ

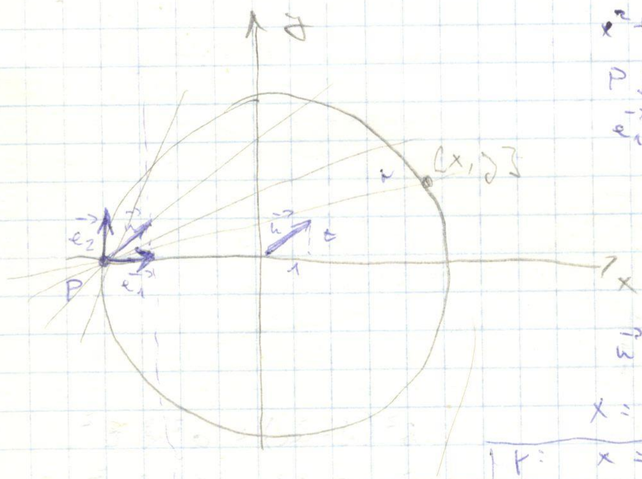
P_{xy} .... $A[x, y]$

$P_{x'y'}$ .... $A[x', y']$



$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cdot\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' &= y\cos\alpha - x\cdot\sin\alpha \end{aligned}}$$

PARAMETRIZACE KRUŽNICE RACIONÁLNÍMI FUNKCEMI



$x^2 + y^2 = r^2$

$P[-r, 0]$

$\vec{e_1}, \vec{e_2}$ ... jednotkové ortogonální vektory

$\vec{u} = 1\cdot\vec{e_1} + t\cdot\vec{e_2}$ - 1 parametr

$\vec{u} = (1, t)$

$X = P + s\vec{u}, \quad s \in \mathbb{R}$

$$\boxed{p: \begin{aligned} x &= -r + s \\ y &= 0 + st \end{aligned}}$$

$$\boxed{r\,\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$x^2 + y^2 = r^2$

$(-r+s)^2 + s^2t^2 = r^2$

$s^2 - 2rs + r^2 + s^2t^2 = r^2$

$s^2 + s^2t^2 - 2rs = 0$

$s(s + st^2 - 2r) = 0$

$\boxed{s = 0}$ par. t. P $\qquad \boxed{s = \frac{2r}{1+t^2}}$

$x = -r + \frac{2r}{1+t^2} = \frac{r - rt^2}{1+t^2}$

$y = \frac{2rt}{1+t^2} = \boxed{r\cdot\frac{2t}{1+t^2}}$

$t=0$: $x = r$, $y = 0$

$t = 1$: $x = 0$, $y = r$

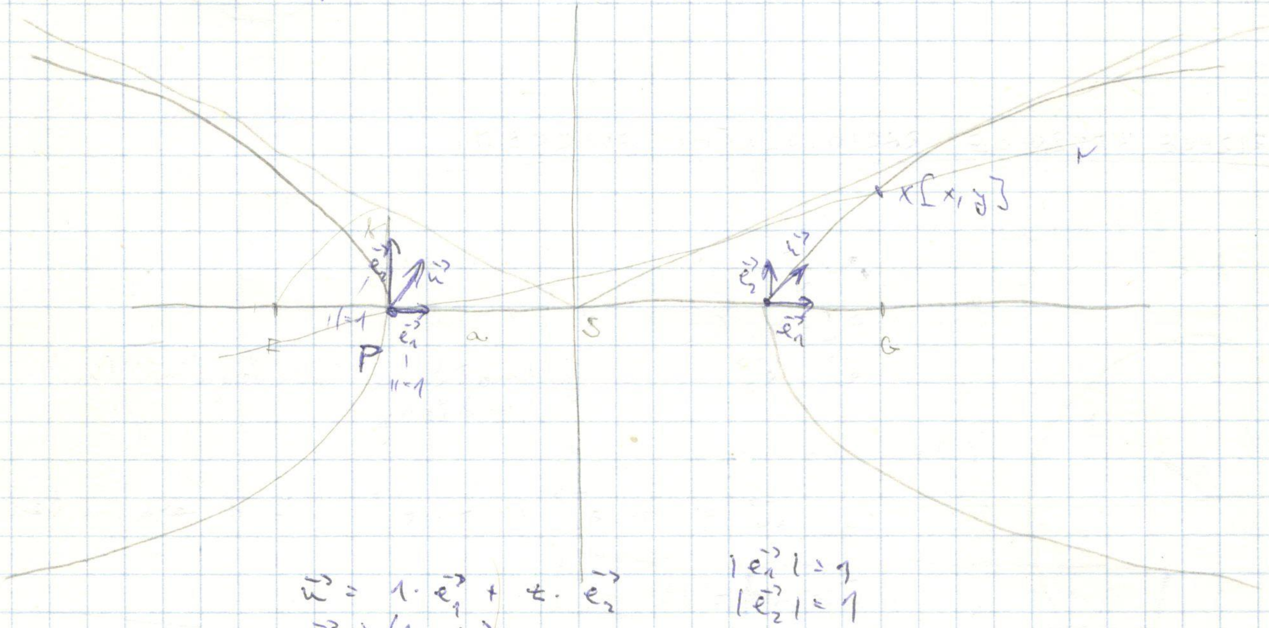
$t = -1$: $x = 0$, $y = -r$

$t \in \langle -1, 1 \rangle \Rightarrow$ půlkružnice)

obecná přímka – osová souměrnost

HYPERBOLA

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$\vec{u} = 1 \cdot \vec{e_1} + t \cdot \vec{e_2}$ $\qquad |\vec{e_1}| = 1$, $|\vec{e_2}| = 1$

$\vec{u} = (1, t)$

$P[-a, 0]$

$X = P + k \cdot \vec{u}$

$$\boxed{p: \begin{aligned} x &= -a + k \\ y &= 0 + kt \end{aligned}}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(-a+k)^2}{a^2} - \frac{k^2 t^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{k^2 - 2ak + a^2}{a^2} - \frac{k^2 t^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{k^2 - 2ak}{a^2} + \cancel{\frac{a^2}{a^2}} - \frac{k^2 t^2}{b^2} = \cancel{1}$$

$$\frac{k^2 - 2ak}{a^2} = \frac{k^2 t^2}{b^2}$$

$$\cancel{k} \cdot b^2 (k - 2a) = a^2 k^{\cancel{2}} t^2$$

$$b^2 (k - 2a) = a^2 k t^2$$

$$k b^2 - 2ab^2 = k a^2 t^2$$

$$k b^2 - k a^2 t^2 = 2ab^2$$

$$k(b^2 - a^2 t^2) = 2ab^2$$

$$\boxed{k = \frac{2ab^2}{b^2 - a^2 t^2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -a + \frac{2ab^2}{b^2 - a^2t^2} \\ y &= \frac{t \cdot 2ab^2}{b^2 - a^2t^2} \end{aligned}}$$

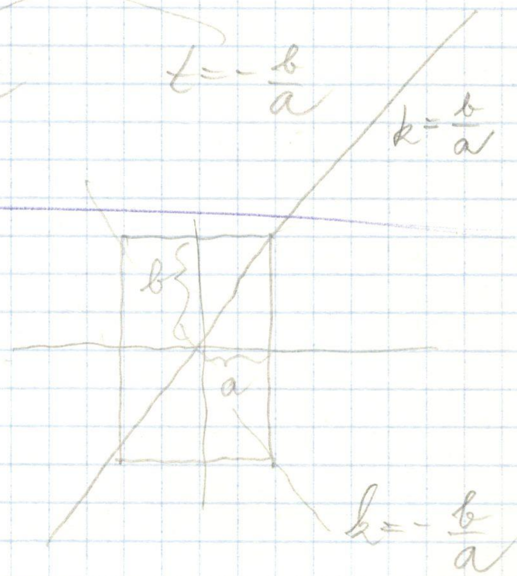
$b^2 - a^2t^2 = 0$

$b^2 = a^2t^2$

$|b| = |at|$

$|t| = \left|\frac{b}{a}\right|$

$t = \frac{b}{a}$ $\quad$ $t = -\frac{b}{a}$



$P[0,0]$

$X = P + \ell \cdot \vec{u}$

$r: \; x = \ell$

$y = \ell t$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{\ell^2}{a^2} - \frac{\ell^2 t^2}{b^2} = 1$$

$$b^2\ell^2 - a^2\ell^2t^2 = a^2b^2$$

$$\ell^2(b^2 - a^2t^2) = a^2b^2$$

$$\ell^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2t^2}$$

$P[a,0]$

$X = P + \ell\vec{u}$

$r: \; x = a + \ell$

$y = 0 + \ell t$

$$\frac{(a+\ell)^2}{a^2} - \frac{\ell^2t^2}{b^2} = 1$$

$$b^2(a^2 + 2a\ell + \ell^2) - a^2\ell^2t^2 = a^2b^2$$

$$\cancel{a^2b^2} + 2a\ell b^2 + \ell^2b^2 - a^2\ell^2t^2 = \cancel{a^2b^2}$$

$$\ell(2ab^2 + \ell b^2 - \ell a^2t^2) = 0$$

$\ell = 0$

$$2ab^2 + \underline{\ell b^2} - \underline{\ell a^2t^2} = 0$$

$$\ell(b^2 - a^2t^2) = 2ab^2$$