Turun yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lebesguen mitta ja integraali
10. harjoitus maanantaina 19.11.2018
Petteri Harjulehto

Tehtävä 1. Tutustu monisteen Lauseen 3.14 todistukseen. Peruste miksi konstruktiosta seuraa että $f_j \leq f_{j+1}$.

Tehtävä 2. (a) Olkoon $f : A \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen. Oletetaan, että $f > 0$ joukossa $E \subset A$ ja $m(E) > 0$. Osoita, että on olemassa reaaliluku $a > 0$, jolle $m(\{x \in A : f(x) > a\}) > 0$.
(b) Olkoon $f : A \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen ja $\displaystyle\int_A |f|\, dx = 0$. Osoita, että $f = 0$ melkein kaikkialla.

Tehtävä 3. Olkoot $f, g : A \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia ja $f = g$ melkein kaikkialla joukossa A.
(a) Osoita, että

$$\int_A |f - g|\, dx = 0.$$

(b) Osoita, että $\displaystyle\int_A |f|\, dx = \int_A |g|\, dx$ (tässä voi olla $\infty = \infty$).

Tehtävä 4. Tutustu monisteen Lauseen 3.19 todistukseen, jossa osoitetaan että Rieman integroituva funktio on (Lebesgue) integroituva ja

$$R\int_E f\, dx = \int_E f\, dx.$$

(a) Piirrä kuva tilanteesta ja merkitse siihen funktio φ.
(b) Miksi φ on yksinkertainen funktio? Onko todistuksessa annettu esitys $\sum_{i=1}^k g_i \chi_{I_i}$ sen normaaliesitys? Jos ei niin miten sen normaaliesitys saadaan?

Tehtävä 5. Olkoon $f : A \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen.
(a) Osoita, että kaikilla $a > 0$ funktio f toteuttaa Tchebyshevin[1] epätyhtälön

$$m\big(\{x \in A : |f(x)| > a\}\big) \leq \frac{1}{a}\int_A |f|\, dx.$$

(b) Oletetaan sitten, että $\int_A |f|\, dx < \infty$. Päättele Tchebyshevin epäyhtälöstä, että $m\big(\{x \in A : |f(x)| = \infty\}\big) = 0$.

---

[1] Epäyhtälö on nimetty ”Venäjän matematiikan isän” Pafnuti Tšebyšovin (1821–1894) mukaan. Translitterointi säännöt eri kielille ovat vähän erilaisia ja säännöt ovat lisäksi ajan saatossa muuttuneet. Tämän takia Tšebyšovin nimi esiintyy erilaisissa muodoissa kuten esimerkiksi Chebyshev, Chebychev, Chebysheff, Chebychov, Chebyshov, Tchebychev, Tschebyschev, Tschebyschef.

Turun yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lebesguen mitta ja integraali
10. harjoitus maanantaina 19.11.2018
Petteri Harjulehto

Tehtävä 1. Tutustu monisteen Lauseen 3.14 todistukseen. Peruste miksi konstruktiosta seuraa että $f_j \leq f_{j+1}$.

Tehtävä 2. (a) Olkoon $f : A \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen. Oletetaan, että $f > 0$ joukossa $E \subset A$ ja $m(E) > 0$. Osoita, että on olemassa reaaliluku $a > 0$, jolle $m(\{x \in A : f(x) > a\}) > 0$.
(b) Olkoon $f : A \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen ja $\displaystyle\int_A |f|\,dx = 0$. Osoita, että $f = 0$ melkein kaikkialla.

Tehtävä 3. Olkoot $f, g : A \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia ja $f = g$ melkein kaikkialla joukossa A.
(a) Osoita, että

$$\int_A |f - g|\,dx = 0.$$

(b) Osoita, että $\displaystyle\int_A |f|\,dx = \int_A |g|\,dx$ (tässä voi olla $\infty = \infty$).

Tehtävä 4. Tutustu monisteen Lauseen 3.19 todistukseen, jossa osoitetaan että Rieman integroituva funktio on (Lebesgue) integroituva ja

$$R\int_E f\,dx = \int_E f\,dx.$$

(a) Piirrä kuva tilanteesta ja merkitse siihen funktio φ.
(b) Miksi φ on yksinkertainen funktio? Onko todistuksessa annettu esitys $\sum_{i=1}^{k} g_i \chi_{I_i}$ sen normaaliesitys? Jos ei niin miten sen normaaliesitys saadaan?

Tehtävä 5. Olkoon $f : A \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen.
(a) Osoita, että kaikilla $a > 0$ funktio f toteuttaa Tchebyshevin[1] epätyhtälön

$$m\big(\{x \in A : |f(x)| > a\}\big) \leq \frac{1}{a}\int_A |f|\,dx.$$

(b) Oletetaan sitten, että $\int_A |f|\,dx < \infty$. Päättele Tchebyshevin epäyhtälöstä, että $m\big(\{x \in A : |f(x)| = \infty\}\big) = 0$.

[1] Epäyhtälö on nimetty ”Venäjän matematiikan isän” Pafnuti Tšebyšovin (1821–1894) mukaan. Translitterointi säännöt eri kielille ovat vähän erilaisia ja säännöt ovat lisäksi ajan saatossa muuttuneet. Tämän takia Tšebyšovin nimi esiintyy erilaisissa muodoissa kuten esimerkiksi Chebyshev, Chebychev, Chebysheff, Chebychov, Chebyshov, Tchebychev, Tschebyschev, Tschebyschef.