

5. Asumsikan  $X_i$  adalah lamanya waktu yang diperlukan antar kedatangan para nasabah dan  $X_j$  adalah lamanya waktu nasabah bertransaksi di ATM. Maka,  $X_i$  dan  $X_j$  memiliki distribusi eksponensial sebagai berikut.

$$f(x; \beta_i) = \frac{1}{\beta_i} e^{-\frac{x}{\beta_i}} \quad \text{dan} \quad f(x; \beta_j) = \frac{1}{\beta_j} e^{-\frac{x}{\beta_j}}$$

a. Jika dinotasikan  $\beta_i$  adalah rata-rata waktu antar kedatangannya para nasabah dan  $\beta_j$  adalah rata-rata waktu bertransaksi di ATM, maka  $\beta_i = 45$  detik/nasabah dan  $\beta_j = 90$  detik/nasabah atau,  $\beta_i = 0.75$  menit/nasabah dan  $\beta_j = 1.5$  menit/nasabah. Untuk distribusi eksponensial, nilai ekspektasinya adalah  $\mu = 1/\beta$ . Jadi,

$$\mu_i = \frac{1}{0.75} \quad \text{dan} \quad \mu_j = \frac{1}{1.5}$$

atau

$$\mu_i = 1.3 \quad \text{dan} \quad \mu_j = 0.6$$

Jika dinotasikan  $\lambda = \mu_i$  dan  $\mu = \mu_j$ , maka  $\lambda = 1.3/\text{menit}$  dan  $\mu = 0.6/\text{menit}$ .

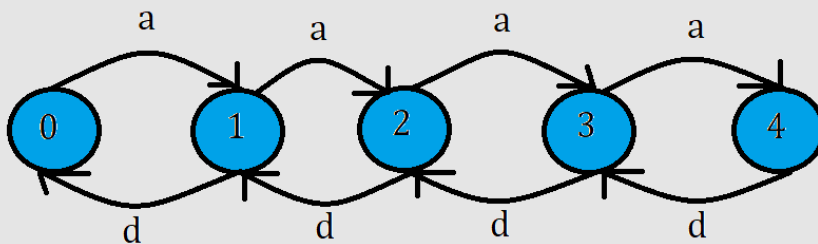
**Maka  $\lambda = 1.3/\text{menit}$  dan  $\mu = 0.6/\text{menit}$**

**b. Diagram transisi keadannya adalah**

Notasi:

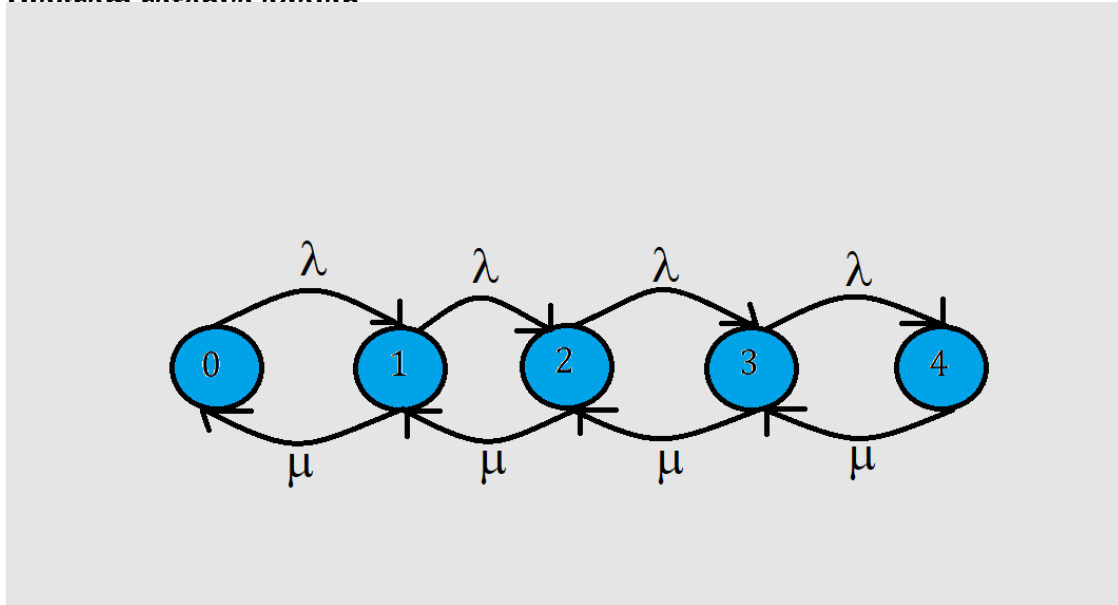
a : arrival

d : depart



c. Diagram rate adalah diagram yang dibuat dari diagram transisi dengan menggantikan simbol aktifitas dengan tingkat (kecepatan, atau yang memiliki besaran *something/time*) aktifitasnya.

Diagram ratenya adalah



d. Matrix rate adalah matrix  $R_{m \times n} = (r_{ij})$ . Berdasarkan diagram ratenya pada point (c), matrix rate  $R = (r_{ij})$  adalah

$$R_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \end{bmatrix}$$

e. Jika  $\alpha_i$  adalah total rate keluar dari setiap state, maka  $\alpha_i$  dapat dihitung dengan persamaan

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{m-1} r_{ij}$$

maka,

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= r_{0.0} + r_{0.1} + r_{0.2} + r_{0.3} + r_{0.4} \\ &= 0 + \lambda + 0 + 0 + 0 \\ \therefore \alpha_0 &= \lambda \end{aligned}$$

Berdasarkan diagram ratenya pada point (c), diperoleh

$$\alpha_i = \lambda + \mu \quad \text{for } i = 1, 2, 3$$

dan  $\alpha_4 = \mu$ .

Dengan demikian,  $\alpha_0 = 1.3$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1.9$ , dan  $\alpha_4 = 0.6$

f. Karena jumlah pada baris matrix peluang transisi state sama dengan 1, maka

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 - \Delta\lambda & \Delta\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \Delta\mu & 1 - \Delta(\mu + \lambda) & \Delta\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \Delta\mu & 1 - \Delta(\mu + \lambda) & \Delta\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \Delta\mu & 1 - \Delta(\mu + \lambda) & \Delta\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \Delta\mu & 1 - \Delta\mu \end{bmatrix}$$

Untuk nilai  $\lambda = 1.3$  dan  $\mu = 0.6$ , Maka

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 - \Delta 1.3 & \Delta 1.3 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta 0.6 & 1 - \Delta 1.9 & \Delta 1.3 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta 0.6 & 1 - \Delta 1.9 & \Delta 1.3 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta 0.6 & 1 - \Delta 1.9 & \Delta 1.3 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta 0.6 & 1 - \Delta 0.6 \end{bmatrix}$$

Untuk suatu interval kecil waktu  $\Delta = 0.025$ , maka

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 - 0.025 \times 1.3 & 0.025 \times 1.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.025 \times 0.6 & 1 - 0.025 \times 1.9 & 0.025 \times 1.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.025 \times 0.6 & 1 - 0.025 \times 1.9 & 0.025 \times 1.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.025 \times 0.6 & 1 - 0.025 \times 1.9 & 0.025 \times 1.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0.025 \times 0.6 & 1 - 0.025 \times 0.6 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, matrix peluang untuk suatu interval kecil waktu  $\Delta = 0.025$  adalah

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.9675 & 0.0325 & 0 & 0 & 0 \\ 0.015 & 0.9525 & 0.0325 & 0 & 0 \\ 0 & 0.015 & 0.9525 & 0.0325 & 0 \\ 0 & 0 & 0.015 & 0.9525 & 0.0325 \\ 0 & 0 & 0 & 0.015 & 0.985 \end{bmatrix}$$

## APPENDIX

### A.1. Nilai $f(x; \beta = 0.5)$

```
T_randvar <- seq(0, 3, 0.01)
define_exponential <- function(randvar, bta) {return((1 / bta) * exp(-randvar / bta))}
df_exponential <- data.frame("Time" = T_randvar, "t_exp" =
define_exponential(T_randvar, bta = 0.5))
print(df_exponential)
```

##	Time	t_exp
## 1	0.00	2.0000000000
## 2	0.01	1.960397347
## 3	0.02	1.921578878
## 4	0.03	1.883529067
## 5	0.04	1.846232693
## 6	0.05	1.809674836
## 7	0.06	1.773840873
## 8	0.07	1.738716471
## 9	0.08	1.704287578
## 10	0.09	1.670540423

## 11 0.10 1.637461506  
## 12 0.11 1.605037596  
## 13 0.12 1.573255722  
## 14 0.13 1.542103172  
## 15 0.14 1.511567483  
## 16 0.15 1.481636441  
## 17 0.16 1.452298074  
## 18 0.17 1.423540646  
## 19 0.18 1.395352652  
## 20 0.19 1.367722818  
## 21 0.20 1.340640092  
## 22 0.21 1.314093640  
## 23 0.22 1.288072842  
## 24 0.23 1.262567291  
## 25 0.24 1.237566784  
## 26 0.25 1.213061319  
## 27 0.26 1.189041096  
## 28 0.27 1.165496505  
## 29 0.28 1.142418128  
## 30 0.29 1.119796733  
## 31 0.30 1.097623272  
## 32 0.31 1.075888875  
## 33 0.32 1.054584848  
## 34 0.33 1.033702669  
## 35 0.34 1.013233985  
## 36 0.35 0.993170608  
## 37 0.36 0.973504512  
## 38 0.37 0.954227831  
## 39 0.38 0.935332854  
## 40 0.39 0.916812023  
## 41 0.40 0.898657928  
## 42 0.41 0.880863309  
## 43 0.42 0.863421047  
## 44 0.43 0.846324165  
## 45 0.44 0.829565823  
## 46 0.45 0.813139319  
## 47 0.46 0.797038082  
## 48 0.47 0.781255671  
## 49 0.48 0.765785772  
## 50 0.49 0.750622198  
## 51 0.50 0.735758882  
## 52 0.51 0.721189880  
## 53 0.52 0.706909364  
## 54 0.53 0.692911621  
## 55 0.54 0.679191051  
## 56 0.55 0.665742167  
## 57 0.56 0.652559589  
## 58 0.57 0.639638044  
## 59 0.58 0.626972362  
## 60 0.59 0.614557477

## 61 0.60 0.602388424  
## 62 0.61 0.590460334  
## 63 0.62 0.578768436  
## 64 0.63 0.567308053  
## 65 0.64 0.556074601  
## 66 0.65 0.545063586  
## 67 0.66 0.534270604  
## 68 0.67 0.523691337  
## 69 0.68 0.513321554  
## 70 0.69 0.503157106  
## 71 0.70 0.493193928  
## 72 0.71 0.483428034  
## 73 0.72 0.473855517  
## 74 0.73 0.464472549  
## 75 0.74 0.455275377  
## 76 0.75 0.446260320  
## 77 0.76 0.437423774  
## 78 0.77 0.428762203  
## 79 0.78 0.420272142  
## 80 0.79 0.411950196  
## 81 0.80 0.403793036  
## 82 0.81 0.395797398  
## 83 0.82 0.387960085  
## 84 0.83 0.380277960  
## 85 0.84 0.372747952  
## 86 0.85 0.365367048  
## 87 0.86 0.358132296  
## 88 0.87 0.351040801  
## 89 0.88 0.344089728  
## 90 0.89 0.337276295  
## 91 0.90 0.330597776  
## 92 0.91 0.324051502  
## 93 0.92 0.317634852  
## 94 0.93 0.311345261  
## 95 0.94 0.305180212  
## 96 0.95 0.299137238  
## 97 0.96 0.293213924  
## 98 0.97 0.287407900  
## 99 0.98 0.281716842  
## 100 0.99 0.276138475  
## 101 1.00 0.270670566  
## 102 1.01 0.265310930  
## 103 1.02 0.260057422  
## 104 1.03 0.254907940  
## 105 1.04 0.249860424  
## 106 1.05 0.244912857  
## 107 1.06 0.240063257  
## 108 1.07 0.235309686  
## 109 1.08 0.230650242  
## 110 1.09 0.226083061

## 111 1.10 0.221606317  
## 112 1.11 0.217218218  
## 113 1.12 0.212917009  
## 114 1.13 0.208700970  
## 115 1.14 0.204568413  
## 116 1.15 0.200517687  
## 117 1.16 0.196547171  
## 118 1.17 0.192655276  
## 119 1.18 0.188840446  
## 120 1.19 0.185101155  
## 121 1.20 0.181435907  
## 122 1.21 0.177843235  
## 123 1.22 0.174321703  
## 124 1.23 0.170869902  
## 125 1.24 0.167486451  
## 126 1.25 0.164169997  
## 127 1.26 0.160919213  
## 128 1.27 0.157732800  
## 129 1.28 0.154609481  
## 130 1.29 0.151548008  
## 131 1.30 0.148547156  
## 132 1.31 0.145605726  
## 133 1.32 0.142722539  
## 134 1.33 0.139896443  
## 135 1.34 0.137126308  
## 136 1.35 0.134411025  
## 137 1.36 0.131749509  
## 138 1.37 0.129140694  
## 139 1.38 0.126583537  
## 140 1.39 0.124077015  
## 141 1.40 0.121620125  
## 142 1.41 0.119211885  
## 143 1.42 0.116851332  
## 144 1.43 0.114537521  
## 145 1.44 0.112269526  
## 146 1.45 0.110046440  
## 147 1.46 0.107867375  
## 148 1.47 0.105731457  
## 149 1.48 0.103637834  
## 150 1.49 0.101585668  
## 151 1.50 0.099574137  
## 152 1.51 0.097602437  
## 153 1.52 0.095669779  
## 154 1.53 0.093775390  
## 155 1.54 0.091918513  
## 156 1.55 0.090098405  
## 157 1.56 0.088314337  
## 158 1.57 0.086565596  
## 159 1.58 0.084851482  
## 160 1.59 0.083171310

## 161 1.60 0.081524408  
## 162 1.61 0.079910117  
## 163 1.62 0.078327790  
## 164 1.63 0.076776796  
## 165 1.64 0.075256514  
## 166 1.65 0.073766335  
## 167 1.66 0.072305664  
## 168 1.67 0.070873915  
## 169 1.68 0.069470518  
## 170 1.69 0.068094909  
## 171 1.70 0.066746540  
## 172 1.71 0.065424870  
## 173 1.72 0.064129371  
## 174 1.73 0.062859524  
## 175 1.74 0.061614822  
## 176 1.75 0.060394767  
## 177 1.76 0.059198870  
## 178 1.77 0.058026654  
## 179 1.78 0.056877649  
## 180 1.79 0.055751397  
## 181 1.80 0.054647445  
## 182 1.81 0.053565353  
## 183 1.82 0.052504688  
## 184 1.83 0.051465025  
## 185 1.84 0.050445950  
## 186 1.85 0.049447053  
## 187 1.86 0.048467936  
## 188 1.87 0.047508206  
## 189 1.88 0.046567481  
## 190 1.89 0.045645383  
## 191 1.90 0.044741544  
## 192 1.91 0.043855602  
## 193 1.92 0.042987203  
## 194 1.93 0.042135999  
## 195 1.94 0.041301650  
## 196 1.95 0.040483823  
## 197 1.96 0.039682189  
## 198 1.97 0.038896429  
## 199 1.98 0.038126229  
## 200 1.99 0.037371279  
## 201 2.00 0.036631278  
## 202 2.01 0.035905930  
## 203 2.02 0.035194945  
## 204 2.03 0.034498038  
## 205 2.04 0.033814931  
## 206 2.05 0.033145351  
## 207 2.06 0.032489029  
## 208 2.07 0.031845703  
## 209 2.08 0.031215116  
## 210 2.09 0.030597015

## 211 2.10 0.029991154  
## 212 2.11 0.029397289  
## 213 2.12 0.028815184  
## 214 2.13 0.028244605  
## 215 2.14 0.027685324  
## 216 2.15 0.027137118  
## 217 2.16 0.026599767  
## 218 2.17 0.026073056  
## 219 2.18 0.025556775  
## 220 2.19 0.025050717  
## 221 2.20 0.024554680  
## 222 2.21 0.024068465  
## 223 2.22 0.023591877  
## 224 2.23 0.023124727  
## 225 2.24 0.022666826  
## 226 2.25 0.022217993  
## 227 2.26 0.021778047  
## 228 2.27 0.021346813  
## 229 2.28 0.020924118  
## 230 2.29 0.020509793  
## 231 2.30 0.020103671  
## 232 2.31 0.019705592  
## 233 2.32 0.019315395  
## 234 2.33 0.018932925  
## 235 2.34 0.018558028  
## 236 2.35 0.018190554  
## 237 2.36 0.017830357  
## 238 2.37 0.017477292  
## 239 2.38 0.017131219  
## 240 2.39 0.016791998  
## 241 2.40 0.016459494  
## 242 2.41 0.016133574  
## 243 2.42 0.015814108  
## 244 2.43 0.015500968  
## 245 2.44 0.015194028  
## 246 2.45 0.014893166  
## 247 2.46 0.014598262  
## 248 2.47 0.014309197  
## 249 2.48 0.014025856  
## 250 2.49 0.013748125  
## 251 2.50 0.013475894  
## 252 2.51 0.013209053  
## 253 2.52 0.012947497  
## 254 2.53 0.012691119  
## 255 2.54 0.012439818  
## 256 2.55 0.012193493  
## 257 2.56 0.011952046  
## 258 2.57 0.011715379  
## 259 2.58 0.011483399  
## 260 2.59 0.011256013



```
## 261 2.60 0.011033129
## 262 2.61 0.010814658
## 263 2.62 0.010600514
## 264 2.63 0.010390609
## 265 2.64 0.010184862
## 266 2.65 0.009983188
## 267 2.66 0.009785507
## 268 2.67 0.009591741
## 269 2.68 0.009401812
## 270 2.69 0.009215644
## 271 2.70 0.009033162
## 272 2.71 0.008854293
## 273 2.72 0.008678967
## 274 2.73 0.008507111
## 275 2.74 0.008338659
## 276 2.75 0.008173543
## 277 2.76 0.008011696
## 278 2.77 0.007853054
## 279 2.78 0.007697553
## 280 2.79 0.007545131
## 281 2.80 0.007395727
## 282 2.81 0.007249282
## 283 2.82 0.007105737
## 284 2.83 0.006965034
## 285 2.84 0.006827117
## 286 2.85 0.006691931
## 287 2.86 0.006559422
## 288 2.87 0.006429537
## 289 2.88 0.006302223
## 290 2.89 0.006177431
## 291 2.90 0.006055109
## 292 2.91 0.005935210
## 293 2.92 0.005817685
## 294 2.93 0.005702487
## 295 2.94 0.005589571
## 296 2.95 0.005478890
## 297 2.96 0.005370400
## 298 2.97 0.005264059
## 299 2.98 0.005159824
## 300 2.99 0.005057653
## 301 3.00 0.004957504
```

## A.2. Table distribusi poisson untuk $x = 0, 1, 2, \dots, 20$

```
#In this case, we let X = 0, 1, ... , 20
#We still being able to compute X > 20 by using define_poisson function
arrival <- seq(0, 20, 1)
define_poisson <- function(X, lambda) {return(exp(-lambda) * (lambda ** X) /
factorial(X))}
define_cmltv_poisson <- function(r, lambda) {return(sum(define_poisson(seq(0,
```

```

r, 1), lambda))})
cmltv_prob_arrival <- c(sum(define_poisson(0:0, lambda = 8)))
for (arrivals in 2:length(arrival)) {
  cmltv_prob_arrival[arrivals] = sum(define_poisson(0:(arrivals-1), lambda
= 8))
}
df_poisson <- data.frame("arrival" = arrival[0:21], "poisson_probability" =
define_poisson(arrival, lambda = 8), "poisson_probability_sums" =
cmltv_prob_arrival[0:21])
print(df_poisson)

```

##	arrival	poisson_probability	poisson_probability_sums
## 1	0	0.0003354626	0.0003354626
## 2	1	0.0026837010	0.0030191637
## 3	2	0.0107348041	0.0137539677
## 4	3	0.0286261442	0.0423801120
## 5	4	0.0572522885	0.0996324005
## 6	5	0.0916036616	0.1912360621
## 7	6	0.1221382155	0.3133742775
## 8	7	0.1395865320	0.4529608095
## 9	8	0.1395865320	0.5925473414
## 10	9	0.1240769173	0.7166242587
## 11	10	0.0992615338	0.8158857926
## 12	11	0.0721902064	0.8880759990
## 13	12	0.0481268043	0.9362028033
## 14	13	0.0296164949	0.9658192982
## 15	14	0.0169237114	0.9827430096
## 16	15	0.0090259794	0.9917689890
## 17	16	0.0045129897	0.9962819787
## 18	17	0.0021237599	0.9984057386
## 19	18	0.0009438933	0.9993496319
## 20	19	0.0003974287	0.9997470606
## 21	20	0.0001589715	0.9999060321