3. Asumsikan T adalah waktu yang dibutuhkan untuk memperbaiki sepeda motor di sebuah bengkel dan T adalah peubah acak kontinu (continuous random variable). Telah disebutkan bahwa T dimodelkan dengan distribusi eksponensial dengan waktu rata - rata $\beta = 0.5$ jam.

Definisi density function untuk distribusi eksponensial

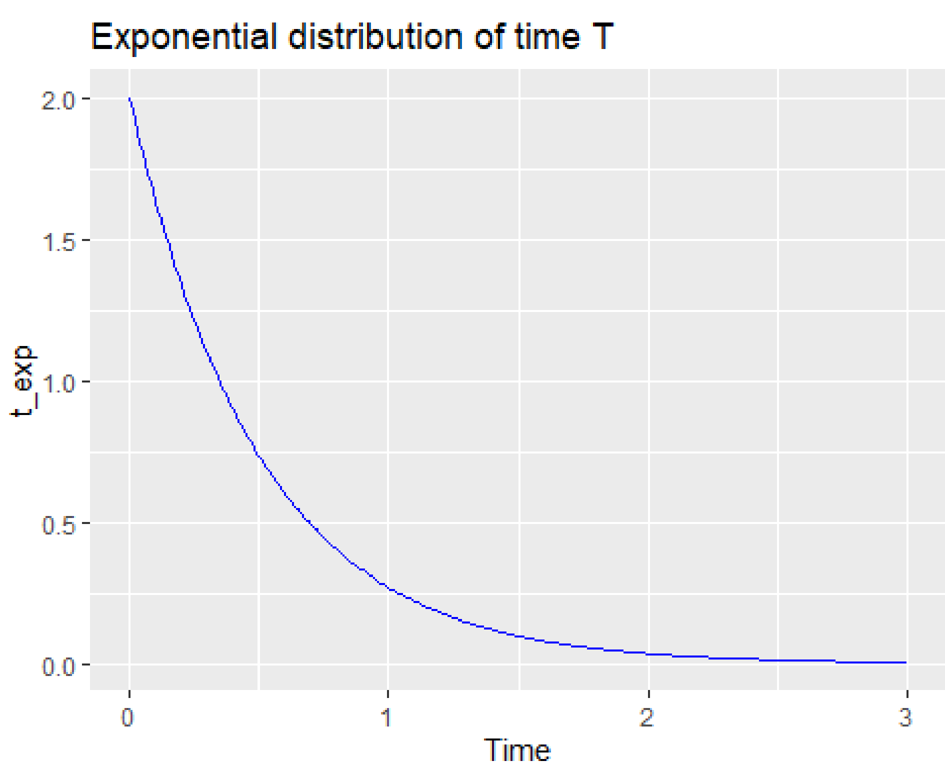
$$f(x;\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}, & \text{if} x > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

Dengan $e = 2.7182818 \ldots$ dan $\beta > 0$. Definisikan $T = x$ jam dan $f(x;\beta = 0.5)$

```
T_randvar <- seq(0, 3, 0.01)
define_exponential <- function(randvar, bta) {return((1 / bta) * exp(-randvar
/ bta))}
df_exponential <- data.frame("Time" = T_randvar, "t_exp" =
define_exponential(T_randvar, bta = 0.5))
#print(df_exponential) Look at appendix
```

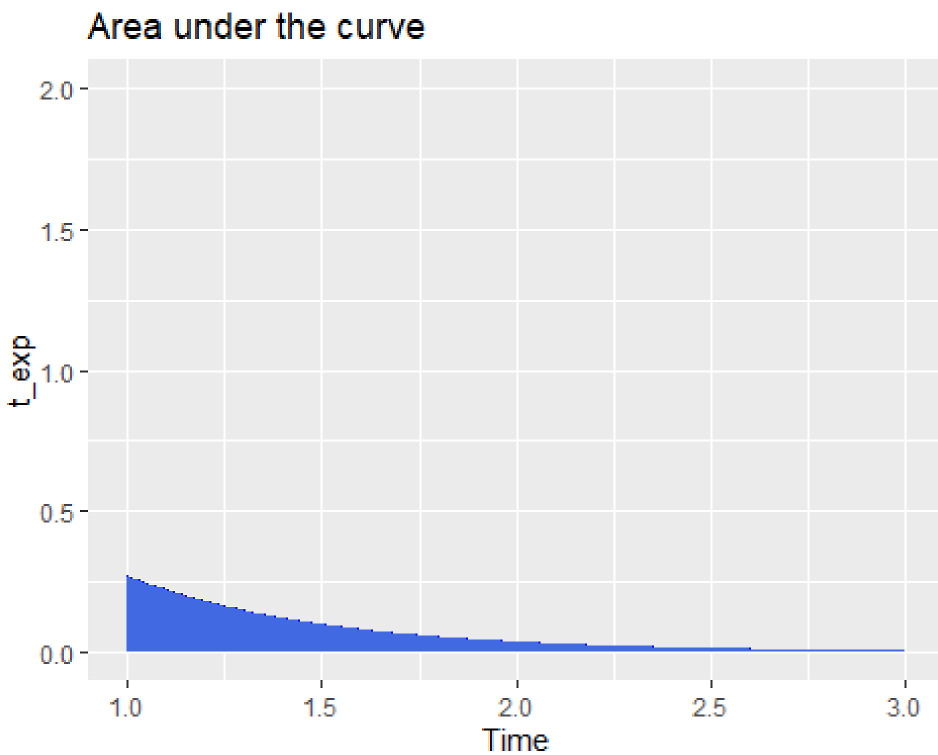
Plot untuk distribusi eksponensial $f(x;\beta = 0.5)$

```
library(ggplot2)
plt_exponential <- ggplot(data = df_exponential, mapping = aes(Time, t_exp))
+ geom_line(color = "blue") + ggtitle("Exponential distribution of time T")
plt_exponential
```



a. Peluang sebuah sepeda motor akan diperbaiki selama lebih dari 1 jam adalah luas area di bawah kurva $f(x; \beta = 0.5)$ untuk x > 1. Yaitu,

```
plt_area_under_the_curve <- plt_exponential + geom_area(fill = "royalblue") +
xlim(1, 3)
plt_area_under_the_curve + ggtitle("Area under the curve")
```



$$
\begin{aligned}
P(T > 1) &= \int_1^\infty f(x; \beta = 0.5) dx \\
&= \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \\
&= \frac{1}{\beta} \lim_{t \to \infty} \int_1^t e^{-\frac{x}{\beta}} dx
\end{aligned}
$$

Asumsikan $u = -x/\beta$, maka $du = -dx/\beta$. Maka, untuk $x = 1$, diperoleh $u = -1/\beta$, dan untuk $x = \infty$, $u = -\infty$. Jadi,

$$
\begin{aligned}
P(T > 1) &= \frac{1}{\beta} \lim_{t\to\infty} \int_1^t e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx \\
&= \frac{-\beta}{\beta} \lim_{t\to-\infty} \int_{-1/\beta}^{t} e^u\, du \\
&= -1 \lim_{t\to-\infty} e^u \Big|_{u=-1/\beta}^{u=t} \\
&= -1 \lim_{t\to-\infty} (e^t - e^{-\frac{1}{\beta}}) \\
&= -1(0 - e^{\frac{1}{\beta}}) \\
&= e^{-\frac{1}{\beta}}
\end{aligned}
$$

Karena $\beta = 0.5$**, maka** $P(T > 1) = e^{-\frac{1}{0.5}}$ **atau** $P(T > 1) \approx 0.1353$.

b. Perlu diingat bahwa pada distribusi eksponensial adalah sifatnya yang tanpa memori (memoryless or lack of memory). Misalkan, peluang sepeda motor akan diperbaiki selama lebih dari t_0 adalah $P(T \geq t_0)$, maka peluang lamanya sepeda motor akan diperbaiki selama lebih dari atau sama dengan $t_0 + t$ adalah,

$$P(T \geq t_0 + t | T \geq t_0) = P(T \geq t_0)$$

Dengan demikian, peluang sebuah sepeda motor akan diperbaiki selama 2 jam jika telah diperbaiki selama 1 jam, adalah sama dengan peluang sepeda motor akan diperbaiki selama lebih dari atau sama dengan 1 jam.

Yaitu,

$$
\begin{aligned}
P(T \geq t_0 + t | T \geq t_0) &= P(T \geq t_0) \\
P(T \geq 1 + 1 | T \geq 1) &= P(T \geq 1) \\
P(T \geq 2 | T \geq 1) &= P(T \geq 1) \\
\therefore P(T \geq 2 | T \geq 1) &= 0.1353
\end{aligned}
$$