

PEMBAHASAN QUIZ SIMULASI PEMODELAN OKT 2020

Muhammad Reza Fahlevi (NIM : 181401139)

QUIZ SIMULASI PEMODELAN OKT 2020

(KUMPULKAN DALAM FORMAT PDF, MAX SENIN 9 NOV 2020 PKL 20.00)

1. Berat tubuh dalam cm sejumlah mahasiswa dimodelkan sebagai besaran diskrit seperti pada tabel berikut:

Berat (kg)	Frekuensi
60	1
62	4
64	3
66	5
68	4
70	5
72	3
74	2
76	3

- Berapakah **berat rata-rata** para siswa pria tersebut?
- Berapakah **kumulatif peluang** untuk berat hingga
 - 66 kg?
 - 70 kg?
- Tunjukkanlah bahwa **sifat Probability Mass Function** terpenuhi dalam kasus ini!

2. Suatu kantor menggunakan **dua buah PC lama (yang bisa rusak sewaktu-waktu)** untuk mengetik surat dan berkas di kantor tersebut.

- Kalau **kedua PC dapat berjalan** pada pagi hari, maka sorenya ada **30% kemungkinan satu akan rusak dan 15% kemungkinan keduanya rusak**.
- Jika **hanya satu PC yang bisa berjalan** di awal hari, maka ada **35% kemungkinan PC itu akan rusak** di sore hari.
- Jika **semua PC sudah rusak** di pagi hari, kantor terpaksa mengirim semua pekerjaan ke jasa pengetikan di luar kantor.
- PC yang rusak dalam satu hari akan **diambil esok paginya, diperbaiki, dan dipulangkan pagi berikutnya**.
- Sistem diamati **setelah komputer yang diperbaiki dipulangkan dan sebelum ada kerusakan baru** lagi.

Berdasarkan suatu **Rantai Markov Waktu Diskrit**, tentukanlah:

- State** untuk menggambarkan keadaan di atas (**jelaskan arti masing-masing state tersebut!**)
- Diagram transisi** antar **state**
- Matriks peluang transisi**
- Jika hanya ada **seorang teknisi yang butuh 2 hari** untuk memperbaiki sebuah PC, maka tentukanlah **state, diagram transisi, dan matriks peluang** untuk situasi ini!

3. Waktu yang dibutuhkan untuk memperbaiki sepeda motor di sebuah bengkel **terdistribusi secara eksponensial** dengan waktu rata-rata 0.5 jam.

- Berapakah **peluang** sebuah sepeda motor akan diperbaiki selama **lebih dari 1 jam**?
- Berapakah **peluang** sebuah sepeda motor **akan diperbaiki selama 2 jam** jika telah diperbaiki selama 1 jam?

4. Jumlah nasabah yang hendak bertransaksi di *teller* sebuah bank memiliki **distribusi Poisson** dengan **tingkat kedatangan rata-rata yang konstan** $\lambda = 8$ orang/jam.

- Berapakah peluang akan **tepat ada 11 orang** yang mengantri di *teller* tersebut?
- Berapa pula peluang nasabah yang mengantri akan berjumlah **lebih dari 6 orang**?

5. Misalkan suatu **ruang ATM** dapat menampung hingga **maksimal 4 orang** nasabah yang **rata-rata waktu antar kedatangannya** adalah **45 detik/nasabah**, dan rata-rata waktu bertransaksi di ATM adalah **90 detik/nasabah**. Tentukanlah:

- λ dan μ dalam **jlh nasabah/menit**
- Diagram transisi keadaan
- Diagram rate
- Matriks rate
- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (**Total rate keluar** dari setiap state)
- Matriks peluang untuk suatu nilai kecil Δ (ambil suatu nilai Δ tertentu)

ANSWER

Import library untuk visualisasi data

```
library(ggplot2)
```

1. a. Asumsikan kita memiliki data berat tubuh mahasiswa sebagai berikut

```
berat = c(60, 62, 62, 62, 62, 64, 64, 64, 66, 66, 66, 66, 66, 68,
          68, 68, 68, 70, 70, 70, 70, 70, 72, 72, 72, 74, 74, 76,
          76, 76)
```

```
print(berat)
```

```
## [1] 60 62 62 62 62 64 64 64 66 66 66 66 66 68 68 68 68 70 70 70 70 70 72
72 72
```

```
## [26] 74 74 76 76 76
```

```
paste("Total datum: ", length(berat))
```

```
## [1] "Total datum: 30"
```

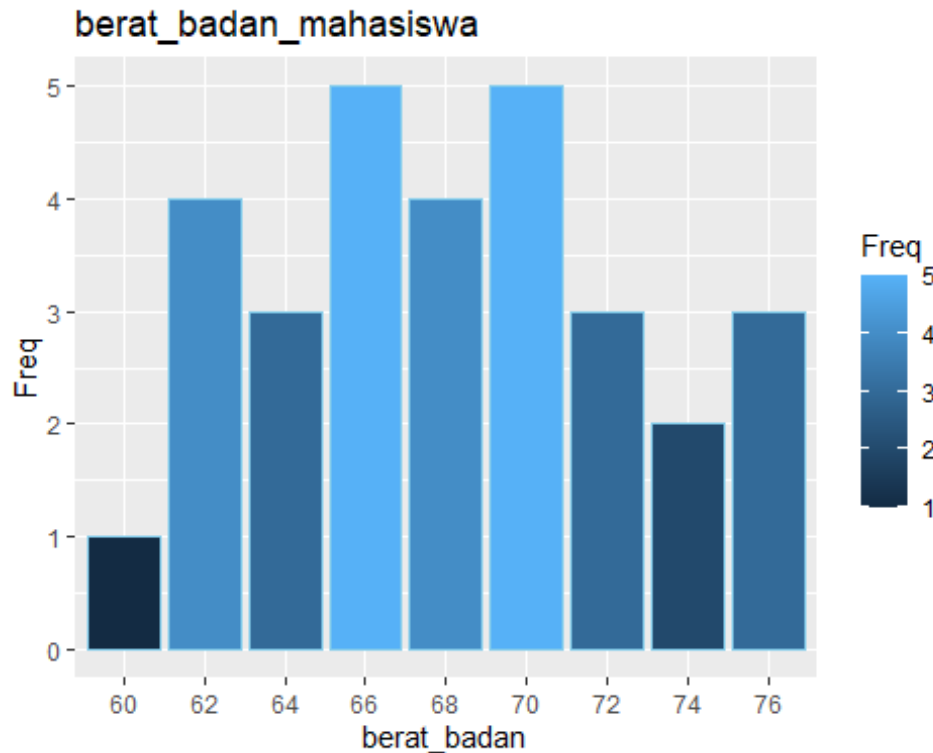
Susun data berat tubuh mahasiswa dalam bentuk table dengan kolom berat dan frekuensinya

```
berat_badan <- factor(berat)
table_berat <- table(berat_badan)
df_berat <- as.data.frame(table_berat)
df_berat
```

```
##   berat_badan Freq
## 1          60    1
## 2          62    4
## 3          64    3
## 4          66    5
## 5          68    4
## 6          70    5
## 7          72    3
## 8          74    2
## 9          76    3
```

Data ini dapat divisualisasikan sebagai berikut

```
plt_berat_badan <- ggplot(data = df_berat, mapping = aes(berat_badan, Freq))
+ geom_bar(stat = "identity", color = "skyblue", aes(fill = Freq)) +
ggtitle("berat_badan_mahasiswa")
plt_berat_badan
```



Berikut adalah deskripsi singkat dari data berat badan mahasiswa

```
summary(berat)
```

```
##      Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##  60.00   64.50   68.00   68.13   71.50   76.00
```

Karena data berat badan mahasiswa disusun dalam bentuk table dengan kolom berat dan frekuensinya, maka berat badan rata - rata mahasiswa dapat dicari dengan persamaan,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i x_i}{\sum_{i=1}^N f_i}$$

Terlihat bahwa berat badan rata - rata mahasiswa adalah $\bar{x} = 68.13$

- b. Asumsikan kita memiliki peubah acak X (X be a random variable) yang mana X adalah banyaknya mahasiswa dengan berat badan $X = x$.

Persamaan (formula) distribusi massa peluang untuk data berat_badan mahasiswa adalah

$$f(X = x) = \frac{f_x}{N}$$

Yang mana f_x adalah frekuensi dari $X = x$ dan N adalah banyaknya datum, yaitu $N = 30$. Karena X adalah peubah acak diskrit, maka persamaan untuk kumulatif peluangnya adalah

$$F(X = x) = \sum_{t \leq x} f(t)$$

Komputasi dari persamaan distribusi massa peluang dan kumulatif peluangnya sebagai berikut

```
#Compute the probability mass function
define_probability <- function(x) {return(df_berat$Freq /
sum(df_berat$Freq))}
df_prob_berat <- data.frame("X_berat" = as.numeric(levels(berat_badan)),
"Probability" = define_probability(as.numeric(levels(berat_badan))))

#Compute the cumulative probability mass function
cumulative_probability <- c()
for (iteration in 1:length(levels(berat_badan))) {
  cumulative_probability[iteration] <-
sum(df_prob_berat$Probability[1:iteration])
}
```

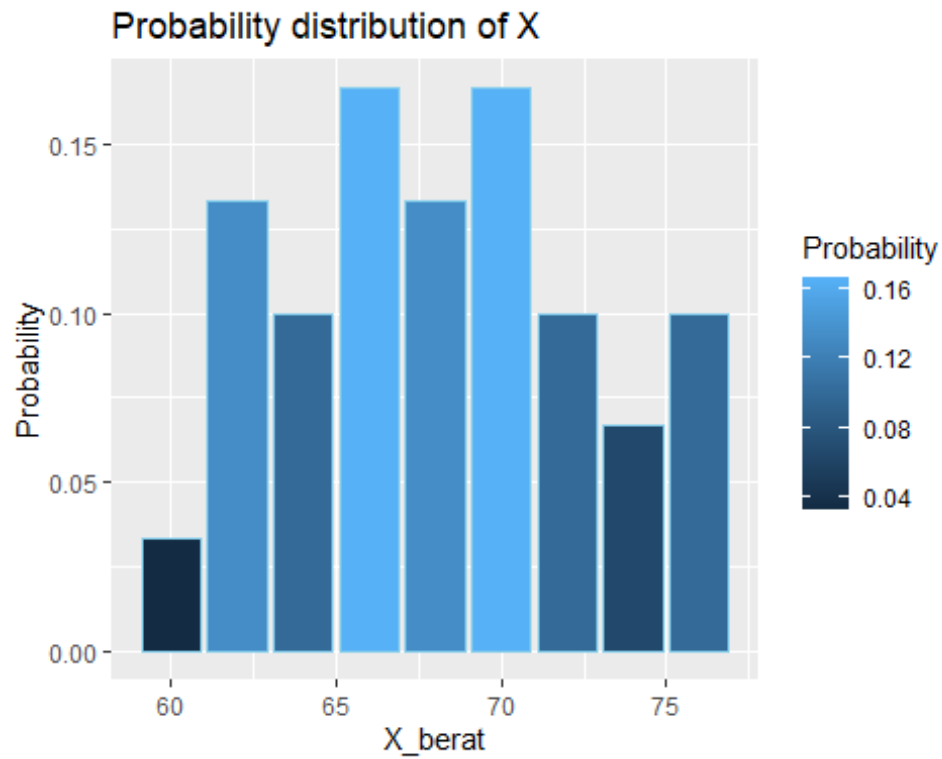
Maka, distribusi massa peluang beserta kumulatif peluang untuk peubah acak X adalah

```
#Create data frame that contain X, P(X), and F(X)
df_prob_berat["cumulative.probability"] <- cumulative_probability
df_prob_berat
```

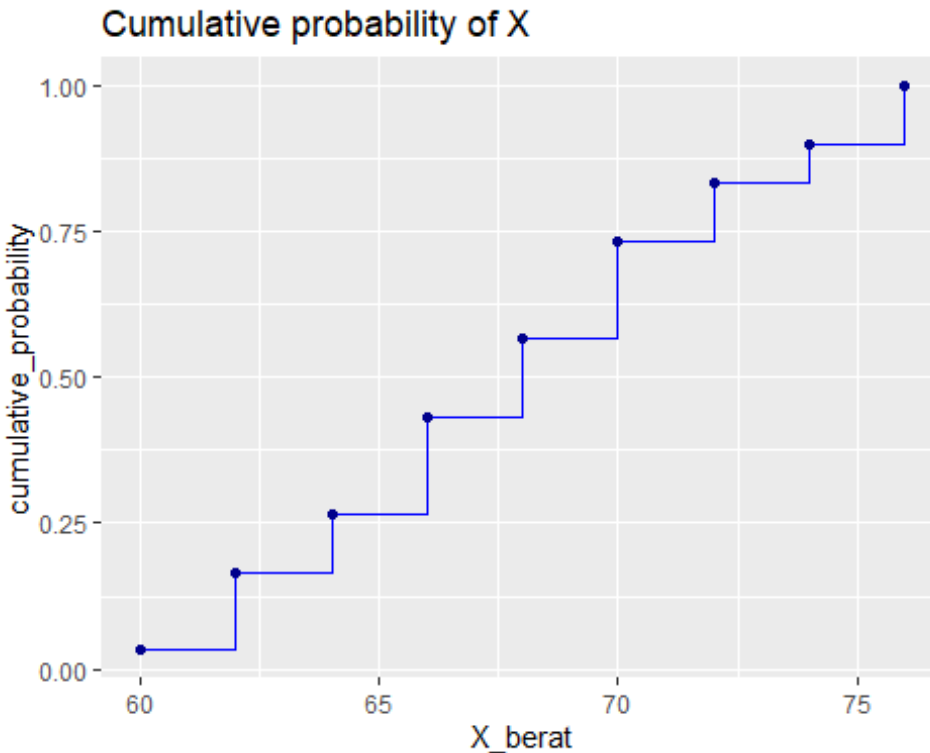
##	X_berat	Probability	cumulative.probability
## 1	60	0.03333333	0.03333333
## 2	62	0.13333333	0.16666667
## 3	64	0.10000000	0.26666667
## 4	66	0.16666667	0.43333333
## 5	68	0.13333333	0.56666667
## 6	70	0.16666667	0.73333333
## 7	72	0.10000000	0.83333333
## 8	74	0.06666667	0.90000000
## 9	76	0.10000000	1.00000000

Agar makna / informasi dari distribusi peluang ini mudah untuk dipahami, data frame ini dapat divisualisasikan sebagai berikut.

```
plt_prob_berat <- ggplot(data = df_prob_berat, mapping = aes(X_berat,
Probability)) + geom_bar(stat = "identity", color = "skyblue", aes(fill =
Probability)) + ggtitle("Probability distribution of X")
plt_prob_berat
```



```
plt_cmltv_prob_berat <- ggplot(data = df_prob_berat, mapping = aes(X_berat,
cumulative_probability)) + geom_step(color = "blue") + geom_point(color =
"darkblue") + ggtitle("Cumulative probability of X")
plt_cmltv_prob_berat
```



Terlihat bahwa kumulatif peluang untuk berat hingga 66 kg dan 70 kg adalah $F(X = 66) = 0.43$ dan $F(X = 70) = 0.73$

- c. Untuk membuktikan bahwa sifat **probability mass function** terpenuhi dalam kasus ini, maka untuk kasus ini, kita harus membuktikan bahwa kasus ini memenuhi syarat - syarat distribusi peluang.

Himpunan dari pasangan berurut $(x, f(x))$ adalah suatu fungsi peluang, fungsi massa peluang, atau distribusi peluang (probability function, probability mass function, or probability distribution) dari peubah acak X jika, untuk kemungkinan nilai x ,

1. $f(x) \geq 0$,
2. $\sum_x f(x) = 1$,
3. $P(X = x) = f(x)$.

Untuk kasus ini, kita memiliki bahwa untuk $f(X = x) = f_x/N$, nilai $f(x) \geq 0$. Artinya, untuk semua kemungkinan nilai x , maka nilai $f(x)$ tidak bernilai negatif. Dengan demikian, sifat pertama probability mass function terpenuhi untuk kasus ini.

Jumlah dari peluang untuk nilai x yang mungkin untuk kasus ini adalah,

$$\begin{aligned}
 \sum_{\forall x} f(x) &= f(60) + f(62) + f(64) + f(66) + f(68) + f(70) + f(72) + f(74) + f(76) \\
 &= \frac{1}{30} + \frac{4}{30} + \frac{3}{30} + \frac{5}{30} + \frac{4}{30} + \frac{5}{30} + \frac{3}{30} + \frac{2}{30} + \frac{3}{30} \\
 &= \frac{30}{30} \\
 \therefore \sum_{\forall x} f(x) &= 1
 \end{aligned}$$

Atau

```
sum(df_prob_berat$Probability)
## [1] 1
```

Karena jumlah $f(x)$ untuk semua kemungkinan nilai x adalah 1. Dengan demikian, kasus ini memenuhi sifat kedua probability mass function.

Persamaan atau formula untuk $P(X = x)$ untuk kasus ini didefinisikan sebagai,

$$f(x) = \frac{f_x}{N}$$

dengan f_x adalah frekuensi dari nilai x . Maka, $P(X = x)$ terdefinisi. Dengan demikian, kasus ini memenuhi sifat ketiga dari probability mass function.

Ketika telah ditunjukkan bahwa kasus ini memenuhi ketiga sifat dari probability mass function. Dengan demikian, telah terbukti bahwa probability mass function untuk kasus ini adalah sah (valid).