General Theory of Relativity

广义相对论

P.A.M. 狄拉克（P.A.M. Dirac）
著
S. Chow
译[1]

2022 年 9 月 14 日

[1]此为【云审稿版・试读稿】，仅供学习，禁止商用。如有错误或不足之处，请在知乎对应文章下的评论区留言：https://zhuanlan.zhihu.com/p/484433943。另：请以 PDF 版为准，知乎截图版略有滞后。PDF 版可在“世图科技云审稿 QQ 群”获取，群号：817245815。

作者序

我们在用爱因斯坦的广义相对论描述物理世界时，需要用到弯曲空间。如果读者希望对于物理关系的讨论不那么肤浅，那么我们就需要建立一些精确方程来处理弯曲空间。而现在正好有一种成熟但相当复杂的数学技术能够做到这一点。任何读者要想了解爱因斯坦的理论，都必须掌握这种数学技术。

本书基于我在佛罗里达州立大学物理系时所作的课程讲义编写而成，旨在以一种直接且简洁的形式为读者提供必不可少的阅读材料。除了狭义相对论的基本概念和场函数的微分处理，无需具备其他前置知识。本书可以让读者能够花费尽可能少的时间与精力来克服了解广义相对论时所遇到的主要障碍，从而使读者能够进一步深入研究他/她所感兴趣的任何专门领域。

P. A. M. 狄拉克

佛罗里达州　塔拉哈西市

1975 年 2 月

译者序

著名物理学家狄拉克所著的这本《广义相对论》堪称短小精悍的典范，仅用 69 页便将广义相对论的核心内容串连在一起。虽成书于 1975 年，但时至今日，仍闪烁着思想的光辉，理应让更多读者一睹理论物理大家的风采。

本书共 35 讲，提纲挈领地阐述了广义相对论中的基本内容。作者在前 14 讲以及第 20、21 讲中介绍了张量分析与黎曼几何中的基本概念，其余部分则讲述了广义相对论的基本原理及其应用。本书的特点是：内容选材考究，物理概念清晰，推导详略得当，适合物理、数学等方向的广相初学者以及非相关专业的广相爱好者研读。

科学出版社曾于 1979 年出版了朱培豫前辈的译本，鉴于年代久远，排版不尽如人意，个别术语的用法或翻译也已被淘汰，所以需要重排、校订之后才能再版。我作为世界图书出版公司的忠实拥趸，与世图的两位编辑私交甚好。他们知晓普林斯顿大学出版社不再授权此书影印后，希望我能够用 LaTeX 重排此书的中文版。但是我在重排的过程中发现，语言的演化速度比想象中的要快，与现在相比，四十多年前的汉语表述、术语翻译已不太一样，比如老译本中将“测地线（geodesic）”误译成“短程线（shortest line）”；英语也是如此，比如原书采用 suffix（朱译“附标”）一词来称呼现在惯用的 index，我这里直接按照现在的习惯，将其译作“指标”。因此，仅以老译本为底稿把文字校对一下、语言润色一下，并不能给读者带来良好的阅读体验，需要重新翻译才行。不当之处祈望读者校正。

时值狄拉克诞辰一百二十周年，谨以此书纪念伟大的先导。

S. Chow
中山大学 十友堂
2022 年 8 月 8 日

目录

Contents

General Theory of Relativity

广 义 相 对 论

1. 狭义相对论

为了刻画物理学中的时空，我们需要用到四个坐标：时间坐标 t 以及三个空间坐标 x, y, z。我们令

$$t = x^0, \quad x = x^1, \quad y = x^2, \quad z = x^3,$$

于是，这四个坐标可以写成 x^μ 的形式，这里的指标 μ 取 $0, 1, 2, 3$ 这四个值。指标写在右上方是为了使相对论中的所有一般方程的指标能够保持一种“均衡（balancing）”，读者稍后就会明白“均衡”的精确含义。

我们在某一点 x^μ 附近再取一点，并令其坐标为 $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$。构成位移的四个量 $\mathrm{d}x^\mu$ 可以看成是一个矢量的四个分量。狭义相对论中的定律允许我们对坐标进行线性非齐次变换，而这些变换则会导致 $\mathrm{d}x^\mu$ 的线性齐次变换。如果我们所选择的距离单位、时间单位能够使光速等于 1，那么 $\mathrm{d}x^\mu$ 的线性齐次变换

$$(\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^1)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2 \tag{1.1}$$

是一个不变量。

在坐标变换的同时，采取与 $\mathrm{d}x^\mu$ 形式相同的方式来对由四个量 A^μ 组成的任一集合进行变换，得到的矢量称为**逆变矢量**（contravariant vector，旧译**抗变矢量**，数译**反变向量**）。这个不变量

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 = (A, A) \tag{1.2}$$

或许可以称为*矢量长度的平方*（*squared length of the vector*）。若存在另一个逆变矢量 B^μ，则我们有*标积不变量*（*scalar product invariant*）：

$$A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3 = (A, B)\ 。 \tag{1.3}$$

为了方便书写这类不变量，我们引入了下标。定义

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3\ 。 \tag{1.4}$$

那么（1.2）左边的表达式可以写成 $A_\mu A^\mu$，这里应该理解为在对其进行求和时，需要取遍 μ 的四个值。我们可以采用相同的记号，把（1.3）写成 $A_\mu B^\mu$ 或 $A^\mu B_\mu$。

（1.4）引入的四个量 A_μ 同样可以看成是一个矢量的四个分量。由于正负号的差别，A_μ 在坐标变换下的变换规律与 A^μ 的稍有不同，这种矢量称为**协变矢量**（covariant vector，数译**共变向量**）。[1]

[1]译者注：逆变改变的是“点”或“矢量”，描述了同一（或多个）物体在同一坐标系下的真实物理位置变化，对应*主动变换*（active or alibi transformation）。协变改变的是“*基底*（*basis*）”，也可以说成是“坐标系（轴）”，描述了同一物体在两个不同坐标系之间的坐标变化，其真实物理位置实际上并没有发生改变，只是描述其位置的坐标系发生了改变，对应*被动变换*（passive or alias transformation）。相对论中一般选择坐标变换，以此来得到观测者在不同坐标系中的观测结果，所以协变要更为常见。

我们可以用两个逆变矢量 A^μ 和 B^μ 来构成十六个量 $A^\mu B^\nu$。与本书中出现的所有希腊字母指标一样，指标 ν 也取 $0,1,2,3$ 这四个值。这十六个量构成了一个二秩张量（*tensor of the second rank*）的十六个分量。有时我们会把矢量 A^μ 和 B^μ 的乘积叫做外积（*outer product*），以此来区别被称为内积（*inner product*）的标积（1.3）。

因为张量 $A^\mu B^\nu$ 的分量之间存在特殊的关系，所以它是一个较为特殊的张量。但是我们可以把用这种方法构成的几个张量加起来，以此来得到一个一般的二秩张量，比如

$$T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu + A'^\mu B'^\nu + A''^\mu B''^\nu + \cdots \text{。} \tag{1.5}$$

一般张量的主要性质是：在坐标变换下，其分量的变换方式与量 $A^\mu B^\nu$ 的变换方式相同。

我们可以通过对（1.5）右边各项进行降标处理来降低 $T^{\mu\nu}$ 中的某一个指标，这样我们就构成了 $T_\mu{}^\nu$ 或 $T^\mu{}_\nu$。我们还可以把两个指标一起降低来得到 $T_{\mu\nu}$。

我们可以在 $T_\mu{}^\nu$ 中令 $\nu = \mu$，从而得到 $T_\mu{}^\mu$。在对 μ 求和时，需要取遍 μ 的四个值。如果同一个指标在某项中出现两次，那么总是意味着要对该指标进行求和。因此 $T_\mu{}^\mu$ 是一个标量，并且它就等于 $T^\mu{}_\mu$。

我们不妨继续这样处理，也就是把两个以上的矢量放一起相乘，请注意：这些矢量的指标全都不同。采用这种方法，我们可以构成具有更高秩的张量。如果矢量全是逆变的，那么我们会得到一个指标全都是上标的张量。然后我们可以通过降低其中任何一个指标来得到一个具有任意数量上标和任意数量下标的一般张量。

我们可以令某个下标等于某个上标，然后必须对这个指标的所有值进行求和，于是这个指标就变成了一个傀标（*dummy index*，数译哑指标）。我们得到的张量比原来的张量就少了两个有效指标。这种方法就叫做**缩并**（contraction，或译**收缩**）。因此，如果我们要缩并一个四秩张量 $T^\mu{}_{\mu\rho}{}^\sigma$，那么其中一种办法就是令 $\sigma = \rho$，由此得到了一个只有十六个分量的二秩张量 $T^\mu{}_{\mu\rho}{}^\rho$，而这十六个分量就源于 μ 和 ν 的四个值。我们可以再一次缩并来得到仅有一个分量的标量 $T^\mu{}_{\mu\rho}{}^\rho$。

至此，大家应该能够领会到指标“均衡”的含义了。对于一个方程中出现的任何一个有效指标而言，它在该方程的每一项中都会出现一次且只会出现一次，不是在上标的位置，就是在下标的位置。一个指标在一项中出现两次的话，则为一个傀标，而且它必须在上标和下标中各出现一次。这个傀标可以替换为该项中未曾出现过的其他希腊字母，因此 $T^\mu{}_{\mu\rho}{}^\rho = T^\mu{}_{\mu\alpha}{}^\alpha$。一个指标在一项中绝不可以出现两次以上。

2. 斜交轴

在开始表述广义相对论之前，为了方便起见，先考虑一种介于两者之间的表述方式——采用斜交直线轴（*oblique rectilinear axis*）表述的狭义相对论。

如果我们变换到斜交轴，那么（1.1）中所提到的 $\mathrm{d}x^\mu$ 的每一个分量都会变成关于新 $\mathrm{d}x^\mu$ 的线性函数，而二次型（1.1）则变成了关于新 $\mathrm{d}x^\mu$ 的一般二次型。我们可以把它写成

$$g_{\mu\nu}\ \mathrm{d}x^\mu\ \mathrm{d}x^\nu\ , \tag{2.1}$$

默认上式中的求和同时取遍 μ 与 ν 的值。这里出现的系数 $g_{\mu\nu}$ 依赖于斜交轴系。当然，由于二次型（2.1）中并没有展现出 $g_{\mu\nu}$ 与 $g_{\nu\mu}$ 的差别，因此我们取 $g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}$。故存在十个独立的系数 $g_{\mu\nu}$。

一般的逆变矢量有四个分量 A^μ，它们在斜交轴下的任何变换都类似于 $\mathrm{d}x^\mu$ 在斜交轴下的变换。因此

$$g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu$$

是一个不变量，且为矢量 A^μ 的长度的平方。

设另有一个逆变矢量 B^μ，那么无论 λ 这个数取何值，$A^\mu+\lambda B^\mu$ 都仍是一个逆变矢量，且其长度的平方为

$$\begin{aligned}&g_{\mu\nu}(A^\mu+\lambda B^\mu)(A^\nu+\lambda B^\nu)\\&=g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu+\lambda(g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu+g_{\mu\nu}A^\nu B^\mu)+\lambda^2 g_{\mu\nu}B^\mu B^\nu\ 。\end{aligned}$$

无论 λ 取何值，上式都必为一个不变量。由此得出：与 λ 无关的一项，以及 λ、λ^2 的系数必定都是一个不变量。λ 的系数为

$$g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu+g_{\mu\nu}A^\nu B^\mu=2g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu\ ,$$

我们可以在上式左边第二项中交换 μ 和 ν，然后再利用 $g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}$，由此得到了等式的右边。于是，我们发现 $g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu$ 是一个不变量，其为 A^μ 和 B^μ 的标积。

令 g 为 $g_{\mu\nu}$ 的行列式，那么它必定不等于零，否则这四个轴无法在时空中提供四个独立的方向，并因此不适合作为坐标轴。就拿前一节的正交轴来说，$g_{\mu\nu}$ 的对角元为 $1,-1,-1,-1$，非对角元为零，于是 $g=-1$。因为斜交轴可通过对正交轴施以一种连续处理来得到，而这种处理会导致 g 连续变化，并且 g 在变化过程中不能经过零值，所以对于斜交轴而言，g 必须仍为负值。

我们将具有一个下标的协变矢量定义为

$$A_\mu=g_{\mu\nu}A^\nu\ 。\tag{2.2}$$

由于行列式 g 不等于零，因此我们可以利用 A_μ 来求解这些方程，从而得到关于 A^ν 的解。令其结果为

$$A^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu \ 。 \tag{2.3}$$

每个 $g^{\mu\nu}$ 就等于 $g_{\mu\nu}$ 行列式中对应元素 $g_{\mu\nu}$ 的代数余子式（*algebraic cofactor*）[2] 除以行列式本身。由此得出 $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$。

我们把（2.3）给出的 A^ν 值代入到（2.2）中。为了使同一项中不含有三个 μ，我们必须采用其他希腊字母（比方说 ρ）来代替（2.3）中的傀标 μ。于是，我们得到了

$$A_\mu = g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} A_\rho \ 。$$

由于这个方程必须对 A_μ 这四个量中的任何一个都成立，因此我们可以推知

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = g_\mu^\rho \ , \tag{2.4}$$

其中，（g_μ^ρ 包含了 ${g_\mu}^\rho$ 与 ${g^\rho}_\mu$ 这两种写法，本书统一写成 g_μ^ρ 这种形式）

$$g_\mu^\rho = \begin{cases} 1, & 当\ \mu = \rho\ 时, \\ 0, & 当\ \mu \neq \rho\ 时。 \end{cases} \tag{2.5}$$

公式（2.2）可以用来降低张量中出现的任一上标。同理，（2.3）则可以用来升高任一下标。如果一个指标被降低之后，又被重新升高，那么由（2.4）与（2.5）可知，其结果就等于原来那个张量。请注意：g_μ^ρ 所起的作用正是用 ρ 替换 μ，

$$g_\mu^\rho A^\mu = A^\rho \ ,$$

或是用 μ 替换 ρ

$$g_\mu^\rho A_\rho = A_\mu \ 。$$

当我们把升高指标的规则应用到 $g_{\mu\nu}$ 中的 μ 时，就得到了

$$g_\nu^\alpha = g^{\alpha\mu} g_{\mu\nu} \ 。$$

上式与（2.4）一致，若考虑到 $g_{\mu\nu}$ 的对称性，那我们就可以在 ${g^\alpha}_\nu$ 中写出两个指标，且其中一个在另一个之上。我们可以进一步用同一规则来升高指标 ν，得到

$$g^{\alpha\beta} = g^{\nu\beta} g_\nu^\alpha \ ,$$

此结果也可以直接由（2.5）得出。升降指标的规则适用于 $g_{\mu\nu}$、g_ν^μ、$g^{\mu\nu}$ 中的任何一个指标。

[2]译者注：原书错写为“余子式”。

3. 曲线坐标

我们现在开始讨论曲线坐标系（*system of curvilinear coordinates*）。我们不妨先处理那些位于空间中某一点处的量，这种量相对于该点处的轴可以有多个分量。可能存在这样一个量，它在所有空间点处都具有相同的本性（*nature*），那么这个量就会变成一个场量（*field quantity*）。

如果我们取一个这样的量 Q（若它有几个分量的话，也可以取其中一个分量），那么我们接下来可以从四个坐标中的任选一个，然后取 Q 关于这个坐标的微分。我们把结果写成下面这种形式：

$$\frac{\partial Q}{\partial x^\mu} = Q_{,\mu} \ 。$$

我们在下标前面加上一个逗号，以此来表示上面这样的导数，之后也将一直如此。我们把指标 μ 写在下面，是为了与左边分母中的上标相均衡。注意到，在从点 x^μ 移至邻点 $x^\mu + \delta x^\mu$ 时，Q 的变化量为

$$\delta Q = Q_{,\mu}\ \delta x^\mu \ 。 \tag{3.1}$$

由此可以看出，指标是均衡的。

接下来，我们将会遇到某一点处的矢量和张量，它们相对于该点处的轴具有多个分量。当我们变换坐标系时，取决于该点处坐标轴变换的各分量也将按照与上一节相同的规则进行变换。如前所述，我们将会用 $g_{\mu\nu}$ 与 $g^{\mu\nu}$ 来降低和升高指标。不过此时的它们不再是常量，而是从一点变化到另一点的场量。

我们现在来研究一种特殊的坐标系变换，看看它会导致什么结果。取一组新的曲线坐标 x'^μ，其为关于四个 x 的函数。为了更方便地书写，我们把 x'^μ 写成 $x^{\mu'}$；也就是说，撇号加在指标上，而不加在主要符号上。

我们对 x^μ 作一个微小变分，然后就会得到 δx^μ 这四个量，它们构成了一个逆变矢量的四个分量。对于新轴而言，该矢量的分量为:

$$\delta x^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu}\ \delta x^\nu = x^{\mu'}{}_{,\nu}\ \delta x^\nu \ ,$$

这里用到了（3.1）中的记号。上式给出了任一逆变矢量 A^ν 的变换法则，即

$$A^{\mu'} = x^{\mu'}{}_{,\nu} A^\nu \ 。 \tag{3.2}$$

互换两个坐标轴系，同时改变指标，于是我们得到了

$$A^\lambda = x^\lambda{}_{,\mu'} A^{\mu'} \ 。 \tag{3.3}$$

由偏微分规则可知

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu}=g_\nu^\lambda\ ,$$

这里用到了记号（2.5）。于是

$$x^\lambda{}_{,\mu'}x^{\mu'}{}_{,\nu}=g_\nu^\lambda\ 。\tag{3.4}$$

我们从中能够看出（3.2）和（3.3）这两个方程是一致的，因为如果把（3.2）代入到（3.3）的右边，就会得到

$$x^\lambda{}_{,\mu'}x^{\mu'}{}_{,\nu}A^\nu=g_\nu^\lambda A^\nu=A^\lambda\ 。$$

我们利用"$A^\mu B_\mu$ 为不变量"这个条件来看一看协变矢量 B_μ 是如何变换的。于是，借助（3.3），得到了

$$A^{\mu'}B_{\mu'}=A^\lambda B_\lambda=x^\lambda{}_{,\mu'}A^{\mu'}B_\lambda\ 。$$

这个结果必须对四个 $A^{\mu'}$ 的一切值都成立；因此，我们可以令 $A^{\mu'}$ 的系数相等，从而得到

$$B_{\mu'}=x^\lambda{}_{,\mu'}B_\lambda\ 。\tag{3.5}$$

至此，我们终于能够利用公式（3.2）和（3.5）来对带有任意个上标和下标的任一张量进行变换。我们只须对每个上标运用类如 $x^{\mu'}{}_{,\nu}$ 这样的系数，对每个下标运用类如 $x^\lambda{}_{,\nu'}$ 这样的系数，并且让所有指标保持均衡。例如

$$T^{\alpha'\beta'}{}_{\gamma'}=x^{\alpha'}{}_{,\lambda}x^{\beta'}{}_{,\mu}x^\nu{}_{,\gamma'}T^{\lambda\mu}{}_\nu\ 。\tag{3.6}$$

任何按照这条规则进行变换的量都是张量，或许可以把它当成是张量的定义。

我们应当注意到，一个张量对其两个指标（比如 λ 和 μ）是对称或反对称的[3]。这一点意义非凡，因为这条关于对称性的性质在坐标变换下保持不变。

公式（3.4）可以写成

$$x^\lambda{}_{,\alpha'}x^{\beta'}{}_{,\nu}g_{\beta'}^{\alpha'}=g_\mu^\lambda\ 。$$

这正好证明了 g_μ^λ 为一个张量。此外还有，对于任意两个矢量 A^μ 与 B^ν，

$$g_{\alpha'\beta'}A^{\alpha'}B^{\beta'}=g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu=g_{\mu\nu}x^\mu{}_{,\alpha'}x^\nu{}_{,\beta'}A^{\alpha'}B^{\beta'}\ 。$$

由于上式对 $A^{\alpha'}$ 与 $A^{\beta'}$ 的一切值都成立，因此我们可以推知

$$g_{\alpha'\beta'}=g_{\mu\nu}x^\mu{}_{,\alpha'}x^\nu{}_{,\beta'}\ 。\tag{3.7}$$

[3]译者注：以 $A_{\lambda\mu}$ 为例，对称张量的分量满足关系式 $A_{\lambda\mu}=A_{\mu\lambda}$，反对称张量的分量满足关系式 $A_{\lambda\mu}=-A_{\mu\lambda}$。

上式表明，$g_{\mu\nu}$ 是一个张量。同理，$g^{\mu\nu}$ 也是一个张量。这两者被称为基本张量（fundamental tensor）。

如果 S 为任一标量场量，那么我们可以把它看成是关于四个 x^μ 的函数，或是关于四个 $x^{\mu'}$ 的函数。由偏微分规则可知，

$$S_{,\mu'} = S_{,\lambda} x^\lambda{}_{,\mu'} \text{ 。}$$

由此可以看出：$S_{,\lambda}$ 的变换就类似于方程（3.5）中的 B_λ，于是得到这样一条结论：标量场的导数是一个协变矢量场。

4. 非张量

我们可能会遇到 $N^\mu{}_{\nu\rho\cdots}$ 这种具有各种上下标的量，但它并不是一个张量。如果它是张量，则其必须按照（3.6）例示的规则在坐标变换下进行变换。按照任何其他规则变换的量均为非张量（nontensor）。张量具有这样一条性质：如果它的所有分量在某个坐标系中等于零，则它们在每一个坐标系中都等于零。非张量未必具备这一性质。

对于非张量，我们可以采用与张量相同的规则来升降指标。例如，

$$g^{\alpha\nu} N^\mu{}_{\nu\rho} = N^{\mu\alpha}{}_\rho \text{ 。}$$

这些升降规则的一致性与不同坐标系之间的变换法则完全无关。同理，我们可以通过令某个上标与某个下标相等，以此来缩并非张量。

同一方程中可以同时出现张量和非张量。指标的均衡规则也同样适用于张量和非张量。

商定理（quotient theorem）

假设对于任一矢量 A^λ 而言，$P_{\lambda\mu\nu}$ 能够使得 $A^\lambda P_{\lambda\mu\nu}$ 是一个张量，那么 $P_{\lambda\mu\nu}$ 也是一个张量。

证明：为了证明这一定理，我们将其写成 $A^\lambda P_{\lambda\mu\nu} = Q_{\mu\nu}$。已知其为一个张量，故有

$$Q_{\beta\gamma} = Q_{\mu'\nu'} x^{\mu'}{}_{,\beta} x^{\nu'}{}_{,\gamma} \text{ 。}$$

于是，

$$A^\alpha P_{\alpha\beta\gamma} = A^{\lambda'} P_{\lambda'\mu'\nu'} x^{\mu'}{}_{,\beta} x^{\nu'}{}_{,\gamma} \text{ 。}$$

由于 A^λ 是一个矢量，因此由（3.2）可知

$$A^{\lambda'} = A^\alpha x^{\lambda'}{}_{,\alpha} \text{ 。}$$

所以，

$$A^\alpha P_{\alpha\beta\gamma} = A^\alpha x^{\lambda'}{}_{,\alpha} P_{\lambda'\mu'\nu'} x^{\mu'}{}_{,\beta} x^{\nu'}{}_{,\gamma} \ 。$$

此方程必须对 A^α 的一切值都成立，故而

$$P_{\alpha\beta\gamma} = P_{\lambda'\mu'\nu'} x^{\lambda'}{}_{,\alpha} x^{\mu'}{}_{,\beta} x^{\nu'}{}_{,\gamma} \ ,$$

这就证明了 $P_{\alpha\beta\gamma}$ 是一个张量。 ■

如果用具有任意个指标的量来替换这里的 $P_{\alpha\beta\gamma}$，本定理仍然成立；如果其中某些指标是上标，本定理也依然成立。

5. 弯曲空间

我们可以很容易地把一个二维弯曲空间（*curved space*）想象成三维欧几里得空间中的一个曲面，然后我们可以采取相同的方式来把四维弯曲空间浸入（*immerse*）到一个具有更高维数的平直空间（*flat space*，数译平坦空间）之中。这种弯曲空间就叫做**黎曼空间**（Riemann space）。黎曼空间中的微小区域是近似平直的。

Einstein 假设物理空间具有这种本性，并由此奠定了他的引力论基础。

我们无法通过引入直线坐标系来处理弯曲空间，而是必须采用第 3 节中讨论的曲线坐标系来处理。因为第 3 节中的所有方程都是不受曲率影响的局部方程，所以那一节中的全部公式都可以应用于弯曲空间。

点 x^μ 与其邻点 $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$ 之间的不变距离 $\mathrm{d}s$ 由类似于（2.1）的下式给出：

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu \ 。$$

对于类时间隔（*timelike interval*），$\mathrm{d}s$ 为非零实数；对于类光间隔（*lightlike interval* 或 *null interval*），$\mathrm{d}s$ 为零；对于类空间隔（*spacelike interval*），$\mathrm{d}s$ 为虚数。

$g_{\mu\nu}$ 作为坐标的函数，其具有一个曲线坐标网络（*network of curvilinear coordinates*），由于 $g_{\mu\nu}$ 固定了所有的距离元，因此也固定了度规（*metric*）。也就是说，$g_{\mu\nu}$ 同时确定了坐标系以及空间曲率。

6. 平行位移

假设点 P 处有一个矢量 A^μ。若以三维欧几里得空间中的二维弯曲空间为例来思考，则很容易理解接下来的内容：如果空间是弯曲的，那么我们无法给出另一点 Q 处的平行矢量的含义。然而，如果我们在接近于 P 的地方取一点 P'，那么 P' 处存在一个平行矢量，其中，我们把 P 到 P' 的距离当成是一阶量，把二阶小

量看成是平行矢量的不确定度。这样做之后，我们就能给出矢量 A^μ 在保持与其自身平行且长度不变的前提下，从 P 移动到 P' 的含义。

利用平行位移（*parallel displacement*）[4] 这种办法，我们就可以沿着某条路径把矢量连续地转移（*transfer*）。取一条从 P 到 Q 的路径，我们最终会在点 Q 处得到一个矢量，它相对于这条路径而言，平行于点 P 处的原矢量。但是不同的路径会给出不同的结果，所以点 Q 处的平行矢量没有绝对的含义。如果我们采用平行位移这种办法，绕一条闭合环路来移动（*transport*）点 P 处的矢量，那么我们最终在点 P 处得到的矢量所具有的方向通常不同于原矢量[5]。

假设我们已将四维物理空间浸入到一个具有更高维数（比方说 N 维）的平直空间中，之后我们便可以得到矢量的平行位移方程。我们在这个 N 维空间中引入直线坐标 z^n（$n=1,2,\cdots,N$），而这些坐标无需正交，直线即可。在两个相邻点之间有一个不变距离 $\mathrm{d}s$，其由下式给出：

$$\mathrm{d}s^2 = h_{nm}\,\mathrm{d}z^n\,\mathrm{d}z^m \ , \tag{6.1}$$

其中，上式需要对 $n,m=1,2,\cdots,N$ 进行求和。不同于张量 $g_{\mu\nu}$，这里的 h_{nm} 是常数。我们可以用 h_{nm} 来降低 N 维空间的指标，就像下面这样

$$\mathrm{d}z_n = h_{nm}\,\mathrm{d}z^m \ 。$$

物理空间在 N 维平直空间中构成了一个四维“曲面”，曲面内的每一点 x^μ 都决定了 N 维空间中的一个*确定点*（*definite point*）y^n，而每个坐标 y^n 都是关于四个 x 的函数，也就是说 $y^n(x)$。曲面方程将通过从 N 个 $y^n(x)$ 中消去 x 来得到，总共有 $N-4$ 个这样的方程。

通过取 $y^n(x)$ 关于参量 x^μ 的微分，得到了

$$\frac{\partial y^n(x)}{\partial x^\mu} = {y^n}_{,\mu} \ 。$$

对于曲面内相距 δx^μ 的两个邻点，我们有

$$\delta y^n = {y^n}_{,\mu}\,\delta x^\mu \ 。\tag{6.2}$$

由（6.1）可知，这两点距离的平方为

$$\delta s^2 = h_{nm}\,\delta y^n\,\delta y^m = h_{nm}{y^n}_{,\mu}{y^m}_{,\nu}\,\delta x^\mu\,\delta x^\nu \ 。$$

[4] 译者注：平行位移又称平行移动（*parallel transport* 或 *parallel translation*）、平行转移（*parallel transfer*）、平行移位（*parallel shift*），这四者均可以简称为平移。另：除了本节，其他章节均按照汉语句式将 shift/transport/transfer ... to ... by parallel displacement 翻译成“把……平移至”。

[5] 译者注：最典型的一个例子就是莫比乌斯带（*Möbius strip or band*）。

由于 h_{nm} 是常数，因此上式可以写成

$$\delta s^2 = y^n{}_{,\mu} y_{n,\nu}\ \delta x^\mu\ \delta x^\nu\ 。$$

此外，我们还有

$$\delta s^2 = g_{\mu\nu}\ \delta x^\mu\ \delta x^\nu\ 。$$

因此

$$g_{\mu\nu} = y^n{}_{,\mu} y_{n,\nu}\ 。\tag{6.3}$$

在物理空间中取一个逆变矢量 A^μ，其位于点 x 处，它的分量 A^μ 类似于（6.2）中的 δx^μ。我们利用 A^μ 来给出 N 维空间的一个逆变矢量 A^n，其与（6.2）中的 δy^n 类似。于是

$$A^n = y^n{}_{,\mu} A^\mu\ 。\tag{6.4}$$

当然，这里的矢量 A^n 是位于曲面内的。

现在，我们在保持与其自身平行的前提下（当然，这意味着保持其分量不变），把矢量 A^n 移位（*shift*）至曲面内的一个邻点 $x + \mathrm{d}x$ 处。由于曲面具有曲率，因此在新点处，该矢量不再位于曲面内，但是我们可以把它投影到曲面上，以此来得到一个位于曲面内的确定矢量。

投影处理分为两步。第一步，把矢量分解为切向与法向这两部分；第二步，丢掉法向部分。于是

$$A^n = A^n{}_{\text{tan}} + A^n{}_{\text{nor}}\ 。\tag{6.5}$$

现在以曲面内的 x 坐标系作为参照，如果 K^μ 表示 $A^n{}_{\text{tan}}$ 的分量，那么我们有

$$A^n{}_{\text{tan}} = K^\mu y^n{}_{,\mu}(x + \mathrm{d}x)\ ,\tag{6.6}$$

上式对应于（6.4），式中的系数 $y^n{}_{,\mu}$ 是在新点 $x + \mathrm{d}x$ 处取的。

我们定义 $A^n{}_{\text{nor}}$ 正交于点 $x + \mathrm{d}x$ 处的任何一个切[向]矢[量]（*tangential vector*，数译切向量），因而不管 K^μ 为何，$A^n{}_{\text{nor}}$ 都会正交于任一与（6.6）右边类似的矢量。因此

$$A^n{}_{\text{nor}} y_{n,\mu}(x + \mathrm{d}x) = 0\ 。$$

如果我们现在将（6.5）的两边同时乘以 $y_{n,\mu}(x + \mathrm{d}x)$，那么就去掉了 $A^n{}_{\text{nor}}$ 这一项，留下了

$$\begin{aligned} A^n y_{n,\nu}(x + \mathrm{d}x) &= K^\mu y^n{}_{,\mu}(x + \mathrm{d}x) y_{n,\nu}(x + \mathrm{d}x) \\ &= K^\mu g_{\mu\nu}(x + \mathrm{d}x) \\ &= K_\nu(x + \mathrm{d}x)\ , \end{aligned}$$

这里用到了（6.3）。于是，我们将上式左边展开至一阶量 dx，

$$\begin{aligned} K_\nu(x+\mathrm{d}x) &= A^n[y_{n,\nu}(x)+y_{n,\nu,\sigma}\ \mathrm{d}x^\sigma] \\ &= A^\mu {y^n}_{,\mu}[y_{n,\nu}+y_{n,\nu,\sigma}\ \mathrm{d}x^\sigma] \\ &= A_\nu + A^\mu {y^n}_{,\mu} y_{n,\nu,\sigma}\ \mathrm{d}x^\sigma\ 。\end{aligned}$$

这里的 K_ν 是 A_ν 平行位移到点 $x+\mathrm{d}x$ 的结果。我们可以令

$$K_\nu - A_\nu = \mathrm{d}A_\nu\ ,$$

所以 $\mathrm{d}A_\nu$ 就表示 A_ν 在平行位移下的变化量。于是我们有

$$\mathrm{d}A_\nu = A^\mu {y^n}_{,\mu} y_{n,\nu,\sigma}\ \mathrm{d}x^\sigma\ 。\tag{6.7}$$

7. 克里斯托费尔（Christoffel）符号

由于 h_{mn} 恒定，所以我们可以自由地升降指标 n，因此通过取（6.3）的微分，我们得到了（存在两次微分时，省略第二个逗号）

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu,\sigma} &= {y^n}_{,\mu\sigma} y_{n,\nu} + {y^n}_{,\mu} y_{n,\nu\sigma} \\ &= y_{n,\mu\sigma} {y^n}_{,\nu} + y_{n,\nu\sigma} {y^n}_{,\mu}\ 。\end{aligned}\tag{7.1}$$

互换（7.1）中的 μ 和 σ，我们得到了

$$g_{\sigma\nu,\mu} = y_{n,\sigma\mu} {y^n}_{,\nu} + y_{n,\nu\mu} {y^n}_{,\sigma}\ 。\tag{7.2}$$

互换（7.1）中的 ν 和 σ，得到了

$$g_{\mu\sigma,\nu} = y_{n,\mu\nu} {y^n}_{,\sigma} + y_{n,\sigma\nu} {y^n}_{,\mu}\ 。\tag{7.3}$$

现在，将（7.1）加上（7.3）再减去（7.2），最后除以 2。结果为

$$\tfrac{1}{2}\left(g_{\mu\nu,\sigma}+g_{\mu\sigma,\nu}-g_{\nu\sigma,\mu}\right) = y_{n,\nu\sigma} {y^n}_{,\mu}\ 。\tag{7.4}$$

令

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma} = \tfrac{1}{2}\left(g_{\mu\nu,\sigma}+g_{\mu\sigma,\nu}-g_{\nu\sigma,\mu}\right)\ 。\tag{7.5}$$

这里的 $\Gamma_{\mu\nu\sigma}$ 就叫做**第一类克里斯托费尔符号**（Christoffel symbol of the first kind，简称**第一类克氏符[号]**[6]），它对最后两个指标是对称的。注意：克氏符是“非张

[6]译者注：大陆的数学工作者一般把“克里斯托费尔符号”简称为“克氏符号”（台湾地区的物理工作者也使用“克氏符号”这一简称），物理工作者一般将其简称为“克氏符”。

量”，而非“张量”[7]。由（7.5）可以得到一个简单的结果：

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma} + \Gamma_{\nu\mu\sigma} = g_{\mu\nu,\sigma} 。 \tag{7.6}$$

我们现在看出，（6.7）可以写成

$$\mathrm{d}A_\nu = A^\mu \Gamma_{\mu\nu\sigma}\, \mathrm{d}x^\sigma 。 \tag{7.7}$$

因为克氏符只牵涉到物理空间的度规 $g_{\mu\nu}$，所以与 N 维空间有关的量现在全都不见了。

我们可以推断出，矢量长度在平行位移的过程中保持不变。我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu) &= g^{\mu\nu}A_\mu\, \mathrm{d}A_\nu + g^{\mu\nu}A_\nu\, \mathrm{d}A_\mu + A_\mu A_\nu g^{\mu\nu}{}_{,\sigma}\, \mathrm{d}x^\sigma \\ &= A^\nu\, \mathrm{d}A_\nu + A^\mu\, \mathrm{d}A_\mu + A_\alpha A_\beta g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma}\, \mathrm{d}x^\sigma \\ &= A^\nu A^\mu \Gamma_{\mu\nu\sigma}\, \mathrm{d}x^\sigma + A^\mu A^\nu \Gamma_{\nu\mu\sigma}\, \mathrm{d}x^\sigma + A_\alpha A_\beta g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma}\, \mathrm{d}x^\sigma \\ &= A^\nu A^\mu g_{\mu\nu,\sigma}\, \mathrm{d}x^\sigma + A_\alpha A_\beta g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma}\, \mathrm{d}x^\sigma 。 \end{aligned} \tag{7.8}$$

现在 $g^{\alpha\mu}{}_{,\sigma}g_{\mu\nu} + g^{\alpha\mu}g_{\mu\nu,\sigma} = (g^{\alpha\mu}g_{\mu\nu})_{,\sigma} = g^{\alpha}{}_{\nu,\sigma} = 0$。接着乘以 $g^{\beta\nu}$，我们得到了

$$g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma} = -g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}g_{\mu\nu,\sigma} 。 \tag{7.9}$$

该公式很有用，因为它用 $g_{\mu\nu}$ 的导数给出了 $g^{\alpha\beta}$ 的导数。我们由上式可推知

$$A_\alpha A_\beta g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma} = -A^\mu A^\nu g_{\mu\nu,\sigma} ，$$

因而表达式（7.8）等于零。这样就证明了矢量长度是不变的。特别地，空矢（*null vector*，即长度为零的矢量）在平行位移下仍为空矢。

我们也可以从几何论证的角度来推知矢量的长度不变性。当我们按照（6.5）把矢量 A^n 分解成切向部分和法向部分，法向部分为无穷小，并正交于切向部分。由此可见，在一阶近似下，整个矢量的长度等于其切向部分。

任一矢量的长度不变性要求任意两个矢量 A 与 B 的标积 $g^{\mu\nu}A_\mu B_\nu$ 也是不变的。这个要求可以从 $A + \lambda B$ 的长度不变性（参数 λ 取任意值）来推知。

升高克氏符的首个指标，得到了下面这种形式

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} = g^{\mu\lambda}\Gamma_{\lambda\nu\sigma} 。$$

[7]译者注：多数书都会强调克氏符不是张量，但在某些书（比如：梁灿彬《微分几何入门与广义相对论》（以下简称《微广》），Robert M. Wald《General Relativity》）中却说它是依赖于坐标系的张量。这两者并没有实质性的矛盾，只是克氏符的定义略有不同。这是因为不使用抽象指标的书（彭罗斯和芝加哥学派的书习惯用抽象指标）会把克氏符定义为“与坐标系有关的一堆数”，其在坐标变换下，不服从张量的变换法则，故不构成张量。具体讨论参见梁灿彬《微广（第二版上册）》3.1 节。

它常常是有用的，称为**第二类克里斯托费尔符号**（Christoffel symbol of the second kind，简称**第二类克氏符[号]**），它对其两个下标是对称的。正如第 4 节所述，即使是一个非张量，也完全允许这样升高指标。

公式（7.7）可以重新写成

$$\mathrm{d}A_\nu = \Gamma^\mu_{\nu\sigma} A_\mu \, \mathrm{d}x^\sigma \ , \tag{7.10}$$

这是关于协变分量的标准公式。当有另一矢量 B^ν 时，我们有

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}(A_\nu B^\nu) = 0 \\ &A_\nu \, \mathrm{d}B^\nu = -B^\nu \, \mathrm{d}A_\nu = -B^\nu \Gamma^\mu_{\nu\sigma} A_\mu \, \mathrm{d}x^\sigma = -B^\mu \Gamma^\nu_{\mu\sigma} A_\nu \, \mathrm{d}x^\sigma \ 。\end{aligned}$$

由于上式必须对任一 A_ν 都成立，因此我们得到了

$$\mathrm{d}B^\nu = -\Gamma^\nu_{\mu\sigma} B^\mu \, \mathrm{d}x^\sigma \ 。\tag{7.11}$$

这是关于逆变分量的平行位移标准公式。

8. 测地线

取坐标为 z^μ 的一点，并假设它沿着某一条路线（*track*）移动。然后我们把 z^μ 当成是某个参量 τ 的函数。设 $\mathrm{d}z^\mu/\mathrm{d}\tau = u^\mu$。

此路线每一点处都有一个矢量 u^μ。假设当我们沿此路线移动时，矢量 u^μ 通过平行位移的方式来移位。如果给定了初始点以及矢量 u^μ 的初值，那么整个路线就确定了。我们只须把初始点从 z^μ 移至 $z^\mu + u^\mu \, \mathrm{d}\tau$，接着将矢量 u^μ 平移至此新点，然后再把该点沿着新 u^μ 所决定的方向进行平移，并以此类推。这样做的话，不但路线可以确定，而且沿路线的参量 τ 也可以确定。按照这种方式产生的路线就叫做**测地线**（geodesic）[8]。

如果矢量 u^μ 最初是一个类光矢量（*lightlike vector* 或 *null vector*，$u^\mu u_\mu = 0$）[9]，那么它就永远是一个类光矢量，且其路线称为**类光测地线**（lightlike geodesic 或 null geodesic）。如果矢量 u^μ 最初是一个类时矢量（即 $u^\mu u_\mu > 0$），那么它就永

[8]译者注：需要注意的是，一些老的中文译本会把 geodesic 错译成"短程线（*shortest line*）"。然而测地线并不一定是最短路径，具体来说，"测地线等于短程线"仅在带边曲面（*boundary surface*）内是充要条件；对于闭合曲面而言，只是必要条件。例如闭合球面上的大圆就是球面的测地线，大圆上的任意两点有两条连接在一起的测地线，分别是优弧与劣弧，此时劣弧是短程线，但优弧就不是。

[9]译者注：由于闵可夫斯基空间中的类光矢量都是空矢，因此大量英语文献采用 null vector 一词来称呼"类光矢量"，本书也是。由于我们已经将矢量空间中的零元（*zero element*，即长度为零的矢量）称为空矢（*null vector*）或零矢（*zero vector*），若把这里的 null vector 也翻译成"空矢"或"零矢"的话，则会指代不明、造成误解。故按照梁灿彬《微广（第二版上册）》中的说法，当 null vector 不

远是一个类时矢量，并且我们得到了一条类时测地线（timelike geodesic）。同理，如果 u^μ 最初是一个类空矢量（即 $u^\mu u_\mu < 0$），那么它就永远是一个类空矢量，并且我们得到了一条类空测地线（spacelike geodesic）。[10]

我们令（7.11）中的 $B^\nu = u^\nu$，$\mathrm{d}x^\sigma = \mathrm{d}z^\sigma$，于是得到了测地线方程，

$$\frac{\mathrm{d}u^\nu}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^\nu_{\mu\sigma} u^\mu \frac{\mathrm{d}z^\sigma}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{8.1}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2 z^\nu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\nu_{\mu\sigma} \frac{\mathrm{d}z^\mu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}z^\sigma}{\mathrm{d}\tau} = 0\ 。 \tag{8.2}$$

对于类时测地线，我们可以将初始的 u^μ 乘以一个因子来使其长度为 1，而这只需要改变 τ 的尺度便可实现。矢量 u^μ 的长度现在就永远等于 1，那么它正好是速度矢量 $v^\mu = \mathrm{d}z^\mu/\mathrm{d}s$，注意参量 τ 已变成了固有时（*proper time*）s 。

于是，方程（8.1）变成了

$$\frac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}s} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} v^\nu v^\sigma = 0\ , \tag{8.3}$$

方程（8.2）变成了

$$\frac{\mathrm{d}^2 z^\mu}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{\mathrm{d}z^\nu}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}z^\sigma}{\mathrm{d}s} = 0\ 。 \tag{8.4}$$

我们作如下物理假设：对于不受引力以外的任何力作用的一个质点，它的世界线为一条类时测地线。这个假设取代了牛顿第一运动定律。式（8.4）既决定了加速度，同时也给出了运动方程。

我们还作了如下假设：一束光所走的路径即为一条类光测地线，其由关于沿路径的某个参量 τ 的方程（8.2）决定。因为 $\mathrm{d}s$ 等于零（参见第 5 节），所以现在不能使用固有时 s 来作为参量 τ 。

9. 测地线的稳定性

若一条测地线不是类光测地线，则拥有这样一条性质：沿端点为 P、Q 的一段路线作积分 $\int \mathrm{d}s$，如果在对该路线作出微小变动时，保持端点不动，那么 $\int \mathrm{d}s$ 是稳定的。

表示零元时，将其翻译成“类光矢量”。

另外需要注意的一点就是，不同于正定度规（*positive-definite metric*），在洛伦兹度规（*Lorentzian metric*，即只有一个对角元为 +1 或 −1 的不定度规）下，$u^\mu u_\mu = 0$ 未必会导致 $u = \overrightarrow{0}$（长度为零的空矢），也就是说，存在非零的四维类光矢量。这正是英语文献中逐渐改用 lightlike vector 的原因。

[10] 译者注：请注意，本书所采用的洛伦兹度规为 $(1, -1, -1, -1)$，其号差（*signature*）为 -2。此外，洛伦兹度规还有另一种习惯写法 $(-1, 1, 1, 1)$，其号差为 2。在号差为 2 的约定下，类时性与类空性的定义恰好与号差为 -2 的情形相反：类时矢量定义为 $u^\mu u_\mu < 0$，类空矢量定义为 $u^\mu u_\mu > 0$。但两者并无实质差别：某个矢量在其中一种号差下为类时矢量（类空矢量），那么它在另一种号差下也为类时矢量（类空矢量）。

我们假设此路线上坐标为 z^μ 的各点都发生了微小移位，并使其坐标变成了 $z^\mu+\delta z^\mu$。如果 $\mathrm{d}z^\mu$ 表示沿路线的一段线元，则有

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\ \mathrm{d}z^\mu\ \mathrm{d}z^\nu \ ,$$

于是

$$\begin{aligned}2\ \mathrm{d}s\ \delta(\mathrm{d}s) &= \mathrm{d}z^\mu\ \mathrm{d}z^\nu\ \delta g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\ \mathrm{d}z^\mu\ \delta\mathrm{d}z^\nu + g_{\mu\nu}\ \mathrm{d}z^\nu\ \delta\mathrm{d}z^\mu \\ &= \mathrm{d}z^\mu\ \mathrm{d}z^\nu\ g_{\mu\nu,\lambda}\ \delta z^\lambda + 2g_{\mu\lambda}\ \mathrm{d}z^\mu\ \delta\mathrm{d}z^\lambda \ 。\end{aligned}$$

现在

$$\delta\mathrm{d}z^\lambda = \mathrm{d}\delta z^\lambda \ ,$$

于是，借助 $\mathrm{d}z^\mu = v^\mu\ \mathrm{d}s$，得到了

$$\delta(\mathrm{d}s) = \left(\tfrac{1}{2}g_{\mu\nu,\lambda}v^\mu v^\nu\ \delta z^\lambda + g_{\mu\lambda}v^\mu\frac{\mathrm{d}\delta z^\lambda}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s \ 。$$

因此，

$$\delta\int\mathrm{d}s = \int\delta(\mathrm{d}s) = \int\left[\tfrac{1}{2}g_{\mu\nu,\lambda}v^\mu v^\nu\ \delta z^\lambda + g_{\mu\lambda}v^\mu\frac{\mathrm{d}\delta z^\lambda}{\mathrm{d}s}\right]\mathrm{d}s \ 。$$

通过分部积分，并利用“端点 P、Q 处 $\delta z^\lambda = 0$”这一条件，我们得到了

$$\delta\int\mathrm{d}s = \int\left[\tfrac{1}{2}g_{\mu\nu,\lambda}v^\mu v^\nu - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(g_{\mu\lambda}v^\mu)\right]\delta z^\lambda\ \mathrm{d}s \ 。\tag{9.1}$$

上式对于任意 δz^λ 都等于零的条件为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(g_{\mu\lambda}v^\mu) - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu,\lambda}v^\mu v^\nu = 0 \ 。\tag{9.2}$$

现在

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(g_{\mu\lambda}v^\mu) &= g_{\mu\lambda}\frac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}s} + g_{\mu\lambda,\nu}v^\mu v^\nu \\ &= g_{\mu\lambda}\frac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}s} + \tfrac{1}{2}(g_{\lambda\mu,\nu}+g_{\lambda\nu,\mu})v^\mu v^\nu \ ,\end{aligned}$$

于是，条件（9.2）变为

$$g_{\mu\lambda}\frac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}s} + \Gamma_{\lambda\mu\nu}v^\mu v^\nu = 0 \ 。$$

上式乘以 $g^{\lambda\sigma}$，就变成了

$$\frac{\mathrm{d}v^\sigma}{\mathrm{d}s} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 0 \ ,$$

这正是测地线的条件（8.3）。

上面的推导表明：对于测地线而言，（9.1）等于零，继而推出 $\int\mathrm{d}s$ 是稳定的。反之，如果我们假设 $\int\mathrm{d}s$ 是稳定的，那么我们可推知其路线为一条测地线。因此，除了类光测地线这种情形，我们还可以用稳定条件来作为测地线的定义。

10. 协变微分

令 S 为一个标量场。正如第 3 节中所见，它的导数 $S_{,\nu}$ 是一个协变矢量。现在令 A_μ 为一个矢量场，那么它的导数 $A_{\mu,\nu}$ 是一个张量吗？

我们必须考查一下 $A_{\mu,\nu}$ 是如何在坐标变换下进行变换的。运用第 3 节中的记号，则 A_μ 会像式（3.5）那样，变换成

$$A_{\mu'} = A_\rho x^\rho{}_{,\mu'} \text{ ,}$$

因而

$$\begin{aligned} A_{\mu',\nu'} &= (A_\rho x^\rho{}_{,\mu'})_{,\nu'} \\ &= A_{\rho,\sigma} x^\sigma{}_{,\nu'} x^\rho{}_{,\mu'} + A_\rho x^\rho{}_{,\mu'\nu'} \end{aligned}$$

如果我们要得到正确的张量变换法则，那么上式最后一项不应该出现在这里。由此可见，$A_{\mu,\nu}$ 是一个非张量。

但是我们可以改变微分的方式，以便得到一个张量。我们在点 x 处取矢量 A_μ，然后把它平移至 $x + \mathrm{d}x$，那么它仍为一个矢量。我们可以把它从点 $x + \mathrm{d}x$ 处的矢量 A_μ 中减去，其差仍将是一个矢量。在一阶近似下，其差为

$$A_\mu(x + \mathrm{d}x) - [A_\mu(x) + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A_\alpha \ \mathrm{d}x^\nu] = (A_{\mu,\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A_\alpha) \ \mathrm{d}x^\nu \text{ 。}$$

对于任何矢量 $\mathrm{d}x^\nu$ 而言，上面这个量均为矢量；因此，由第 4 节的商定理可知，系数

$$A_{\mu,\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A_\alpha$$

是一个张量。我们不难立刻验证：它在坐标变换下，的确是按照张量变换法则进行变换。

我们把它叫做 A_μ 的协变导数（covariant derivative），写作

$$A_{\mu:\nu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A_\alpha \text{ 。} \tag{10.1}$$

下标中的符号“:”将一直用来表示协变导数，正如用逗号表示普通导数（*ordinary derivative*）那样。

令 B_ν 为另一矢量。我们把外积（*outer product*）的协变导数定义为

$$(A_\mu B_\nu)_{:\sigma} = A_{\mu:\sigma} B_\nu + A_\mu B_{\nu:\sigma} \text{ 。} \tag{10.2}$$

显然，它是一个具有三个指标的张量。其值为：

$$(A_\mu B_\nu)_{:\sigma} = (A_{\mu,\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} A_\alpha) B_\nu + A_\mu (B_{\nu,\sigma} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} B_\alpha)$$

$$= (A_\mu B_\nu)_{,\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} A_\alpha B_\nu - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} A_\mu B_\alpha \text{ 。}$$

令 $T_{\mu\nu}$ 为一个具有两个指标的张量。它可以表示为像 $A_\mu B_\nu$ 这样的两项之和，则其协变导数为

$$T_{\mu\nu:\sigma} = T_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} T_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} T_{\mu\alpha} \text{ 。} \tag{10.3}$$

该规则可以推广到具有任意个下标的张量 $Y_{\mu\nu\cdots}$ 的协变导数：

$$Y_{\mu\nu\cdots:\sigma} = Y_{\mu\nu\cdots,\sigma} - \text{各指标所对应的 } \Gamma \text{ 项 。} \tag{10.4}$$

我们必须使这些 Γ 项的指标保持均衡，只要做到这一点，便足以让我们确定指标应放的位置。

标量情形就包含在一般公式（10.4）中，其中 Y 的指标个数为零：

$$Y_{:\sigma} = Y_{,\sigma} \text{ 。} \tag{10.5}$$

接下来，我们把（10.3）应用于基本张量 $g_{\mu\nu}$。由（7.6）可知，

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu:\sigma} &= g_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} g_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} g_{\mu\alpha} \\ &= g_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma_{\nu\mu\sigma} - \Gamma_{\mu\nu\sigma} \\ &= 0 \text{ 。} \end{aligned} \tag{10.6}$$

因此，$g_{\mu\nu}$ 在协变微分下可视为常数。

公式（10.2）是用来对乘积求微分的常用法则。我们假设这条常用法则对两个矢量的标积的协变导数也有效。于是，

$$(A^\mu B_\mu)_{:\sigma} = A^\mu{}_{:\sigma} B_\mu + A^\mu B_{\mu:\sigma} \text{ 。}$$

又根据（10.5）和（10.1），我们得到

$$(A^\mu B_\mu)_{,\sigma} = A^\mu{}_{:\sigma} B_\mu + A^\mu (B_{\mu,\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} B_\alpha) \text{ ，}$$

因而

$$A^\mu{}_{,\sigma} B_\mu = A^\mu{}_{:\sigma} B_\mu + A^\mu \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} B_\mu \text{ 。}$$

因为上式对任何 B_μ 都成立，我们得

$$A^\mu{}_{:\sigma} = A^\mu{}_{,\sigma} + \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} A^\alpha \text{ ，} \tag{10.7}$$

这就是逆变矢量的协变导数基本公式。式中出现的克氏符跟协变矢量基本公式（10.1）中的相同，但现在冠以“+”号。指标的排列则完全取决于指标均衡的要求。

我们可以把这些公式推广到具有任意个上下标的任一张量的协变导数。每个指标都会对应出现一个 Γ 项，并且如果是上标，则冠以“+”号；如果是下标，则冠以“−”号。假如我们把张量中的两个指标缩并，则对应的 Γ 项就互相抵消了。

乘积的协变导数公式

$$(XY)_{:\sigma} = X_{:\sigma}Y + XY_{:\sigma} \ , \tag{10.8}$$

普遍成立，其中 X、Y 为任何一类张量。因为 $g_{\mu\nu}$ 可视为常数，所以我们可以在协变微分前先把指标升高或降低，其结果跟我们在协变微分后再把指标升高或降低是一样的。

非张量的协变导数没有意义。

物理学定律必须在所有坐标系中都有效，因此它们必须可以表示为张量方程。每当张量方程包含场量的导数时，此导数必为协变导数。所以物理学中那些带有普通导数的场方程必须全部改写成协变导数的形式。例如，标量 V 的达朗贝尔方程 $\Box V = 0$（度规 $(1,-1,-1,-1)$ 下的达朗贝尔算符为 $\Box = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$）变为下面这种协变形式:

$$g^{\mu\nu}V_{:\mu:\nu} = 0 \ 。$$

由（10.1）和（10.5），上式给出

$$g^{\mu\nu}(V_{,\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}V_{,\alpha}) = 0 \ 。 \tag{10.9}$$

如果我们想要方程在所有坐标系中都成立，就必须用协变导数写出那些方程，即便我们处理的是平直空间（意味着忽略引力场），又或者使用的是曲线坐标系。

11. 曲率张量

由乘积定律（10.8）可知，协变微分非常类似于普通微分。但是普通微分有这样一条重要性质：如果我们连着微分两次，那么普通微分的次序无关紧要；然而协变微分通常不具备这一性质。

首先，我们考虑标量场 S。由公式（10.1）和（10.5），我们有

$$\begin{aligned} S_{:\mu:\nu} &= S_{:\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}S_{:\alpha} \\ &= S_{,\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}S_{,\alpha} \ 。 \end{aligned} \tag{11.1}$$

上式关于 μ、ν 对称，所以协变微分的次序在这种情形下无关紧要。

现在，我们取一个矢量 A_ν，并对它施行两次协变微分。由公式（10.3）可知，若把 $T_{\nu\rho}$ 替换为 $A_{\nu:\rho}$，则会得到

$$A_{\nu:\rho:\sigma} = A_{\nu:\rho,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}A_{\alpha:\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}A_{\nu:\alpha}$$

$$\begin{aligned}&=(A_{\nu,\rho}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}A_{\alpha})_{,\sigma}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}(A_{\alpha,\rho}-\Gamma^{\beta}_{\alpha\rho}A_{\beta})-\Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}(A_{\nu,\alpha}-\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}A_{\beta})\\&=A_{\nu,\rho,\sigma}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}A_{\alpha,\sigma}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}A_{\alpha,\rho}-\Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}A_{\nu,\alpha}-A_{\beta}(\Gamma^{\beta}_{\nu\rho,\sigma}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\beta}_{\alpha\rho}-\Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha})\text{ 。}\end{aligned}$$

互换这里的 ρ 与 σ，再用上式减去互换后的表达式，结果为

$$A_{\nu:\rho:\sigma}-A_{\nu:\sigma:\rho}=A_{\beta}R^{\beta}_{\nu\rho\sigma}\text{ ，}\tag{11.2}$$

其中

$$R^{\beta}_{\nu\rho\sigma}=\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma,\rho}-\Gamma^{\beta}_{\nu\rho,\sigma}+\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\beta}_{\alpha\rho}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma}\text{ 。}\tag{11.3}$$

（11.2）的左边是一个张量，因而（11.2）的右边也是一个张量。这句话对任一矢量 A_β 都成立；因此，根据第 4 节中的商定理，$R^{\beta}_{\nu\rho\sigma}$ 是一个张量，我们将其称为**黎曼-克里斯托费尔张量**（Riemann-Christoffel tensor）或**曲率张量**（curvature tensor）。

显然，该张量具有下面这条性质：

$$R^{\beta}_{\nu\rho\sigma}=-R^{\beta}_{\nu\sigma\rho}\text{ 。}\tag{11.4}$$

又由（11.3），我们不难看出

$$R^{\beta}_{\nu\rho\sigma}+R^{\beta}_{\rho\sigma\nu}+R^{\beta}_{\sigma\nu\rho}=0\text{ 。}\tag{11.5}$$

我们降低指标 β，并把它当作第一指标。得

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}=g_{\mu\beta}R^{\beta}_{\nu\rho\sigma}=g_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma,\rho}+\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma_{\mu\alpha\rho}-\langle\rho\sigma\rangle\text{ ，}$$

式中的符号 $\langle\rho\sigma\rangle$ 用来表示把前几项中的 ρ 与 σ 互换之后得到的那些项。于是，

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu\rho\sigma}&=\Gamma_{\mu\nu\sigma,\rho}-g_{\mu\beta,\rho}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}+\Gamma_{\mu\beta\rho}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}-\langle\rho\sigma\rangle\\&=\Gamma_{\mu\nu\sigma,\rho}-\Gamma_{\beta\mu\rho}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}-\langle\rho\sigma\rangle\text{ ，}\end{aligned}$$

其中第二步用到了（7.6）。又由（7.5）可得，

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}=\tfrac{1}{2}(g_{\mu\sigma,\nu\rho}-g_{\nu\sigma,\mu\rho}-g_{\mu\rho,\nu\sigma}+g_{\nu\rho,\mu\sigma})+\Gamma_{\beta\mu\sigma}\Gamma^{\beta}_{\nu\rho}-\Gamma_{\beta\mu\rho}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}\text{ 。}\tag{11.6}$$

现在，有更多的对称性显现了出来，即

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}=-R_{\nu\mu\rho\sigma}\tag{11.7}$$

以及

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}=R_{\rho\sigma\nu\mu}=R_{\sigma\rho\nu\mu}\text{ 。}\tag{11.8}$$

从所有的这些对称性出发，可以得出以下结果：$R_{\mu\nu\rho\sigma}$ 的 256 个分量中，只有 20 个是独立的。

12. 空间平直的条件

如果空间是平直的，那么我们可以选取一个直线坐标系，从而 $g_{\mu\nu}$ 为常数，继而张量 $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ 等于零。

反之，如果 $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ 等于零，那么我们也能够证明空间是平直的。我们取一个位于点 x 处的矢量 A_μ，把它平移至点 $x+\mathrm{d}x$，之后再把它平移至点 $x+\mathrm{d}x+\delta x$。若 $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ 为零，则其结果必定等同于先把它从 x 平移至 $x+\delta x$，然后再平移至 $x+\delta x+\mathrm{d}x$。我们这样做就能把该矢量移位至某一远距点（*distant point*），且所得结果与到达此远距点的路径无关。因此，如果我们把 x 处的原矢量 A_μ 平移至所有的点，那么就会得到一个矢量场，其满足 $A_{\mu:\nu}=0$ 或

$$A_{\mu,\nu}=\Gamma^\sigma_{\mu\nu}A_\sigma \text{ 。} \tag{12.1}$$

这样的矢量场能否为某个标量场的梯度呢？我们在（12.1）中令 $A_\mu=S_{,\mu}$，得

$$S_{,\mu\nu}=\Gamma^\sigma_{\mu\nu}S_{,\sigma} \text{ 。} \tag{12.2}$$

考虑到 $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ 两个下标之间的对称性，因此 $S_{,\mu\nu}$ 与 $S_{,\nu\mu}$ 的值相同，且方程（12.2）可积。

接下来，我们取四个满足（12.2）的独立标量，且令其为新坐标系的四个坐标 $x^{\alpha'}$。于是

$$x^{\alpha'}{}_{,\mu\nu}=\Gamma^\sigma_{\mu\nu}x^{\alpha'}{}_{,\sigma} \text{ 。}$$

根据变换法则（3.7），可得

$$g_{\mu\lambda}=g_{\alpha'\beta'}x^{\alpha'}{}_{,\mu}x^{\beta'}{}_{,\lambda} \text{ 。}$$

将上述方程作关于 x^ν 的微分，得

$$\begin{aligned}
g_{\mu\lambda,\nu}-g_{\alpha'\beta',\nu}x^{\alpha'}{}_{,\mu}x^{\beta'}{}_{,\lambda} &= g_{\alpha'\beta'}(x^{\alpha'}{}_{,\mu\nu}x^{\beta'}{}_{,\lambda}+x^{\alpha'}{}_{,\mu}x^{\beta'}{}_{,\lambda\nu}) \\
&= g_{\alpha'\beta'}(\Gamma^\sigma_{\mu\nu}x^{\alpha'}{}_{,\sigma}x^{\beta'}{}_{,\lambda}+x^{\alpha'}{}_{,\mu}\Gamma^\sigma_{\lambda\nu}x^{\beta'}{}_{,\sigma}) \\
&= g_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}+g_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda\nu} \\
&= \Gamma_{\lambda\mu\nu}+\Gamma_{\mu\lambda\nu} \\
&= g_{\mu\lambda,\nu} \text{ ，}
\end{aligned}$$

最后一步用到了（7.6）。因而

$$g_{\alpha'\beta',\nu}x^{\alpha'}{}_{,\mu}x^{\beta'}{}_{,\lambda}=0 \text{ 。}$$

由此可见，$g_{\alpha'\beta',\nu}=0$。也就是说，对于新坐标系而言，基本张量是一个常数。这样，我们就在直线坐标系下证明了空间是平直的。

13. 毕安基（Bianchi）关系式

为了处理张量的二阶协变导数，我们先考虑“张量为二矢量外积 $A_\mu B_\tau$”这种情形。我们有

$$
\begin{aligned}
(A_\mu B_\tau)_{:\rho:\sigma} &= (A_{\mu:\rho}B_\tau + A_\mu B_{\tau:\rho})_{:\sigma} \\
&= A_{\mu:\rho:\sigma}B_\tau + A_{\mu:\rho}B_{\tau:\sigma} + A_{\mu:\sigma}B_{\tau:\rho} + A_\mu B_{\tau:\rho:\sigma} \text{ 。}
\end{aligned}
$$

现在互换 ρ 和 σ，然后将两式相减。由（11.2）可得

$$
(A_\mu B_\tau)_{:\rho:\sigma} - (A_\mu B_\tau)_{:\sigma:\rho} = A_\alpha R^\alpha_{\mu\rho\sigma}B_\tau + A_\mu R^\alpha_{\tau\rho\sigma}B_\alpha \text{ 。}
$$

一个一般张量 $T_{\mu\tau}$ 可表示为诸如 $A_\mu B_\tau$ 这种项之和，故 $T_{\mu\tau}$ 必定满足

$$
T_{\mu\tau:\rho:\sigma} - T_{\mu\tau:\sigma:\rho} = T_{\alpha\tau}R^\alpha_{\mu\rho\sigma} + T_{\mu\alpha}R^\alpha_{\tau\rho\sigma} \text{ 。} \tag{13.1}
$$

现在，令 $T_{\mu\tau}$ 为某个矢量的协变导数 $A_{\mu:\tau}$，由此可得

$$
A_{\mu:\tau:\rho:\sigma} - A_{\mu:\tau:\sigma:\rho} = A_{\alpha:\tau}R^\alpha_{\mu\rho\sigma} + A_{\mu:\alpha}R^\alpha_{\tau\rho\sigma} \text{ 。}
$$

对上式中的 τ、ρ、σ 作循环置换（*cyclic permutation*），并把所得的三个方程相加。于是，左边给出

$$
\begin{aligned}
A_{\mu:\rho:\sigma:\tau} - A_{\mu:\sigma:\rho:\tau} + \text{循环置换} &= (A_\alpha R^\alpha_{\mu\rho\sigma})_{:\tau} + \text{循环置换} \\
&= A_{\alpha:\tau}R^\alpha_{\mu\rho\sigma} + A_\alpha R^\alpha_{\mu\rho\sigma:\tau} + \text{循环置换} \text{ 。}
\end{aligned} \tag{13.2}
$$

右边则利用（11.5）消去一些项之后，剩下

$$
A_{\alpha:\tau}R^\alpha_{\mu\rho\sigma} + \text{循环置换} \text{ 。} \tag{13.3}
$$

（13.2）第一项跟（13.3）相消，剩下

$$
A_\alpha R^\alpha_{\mu\rho\sigma:\tau} + \text{循环置换} = 0 \text{ 。}
$$

因子 A_α 出现在该方程的各项中，不妨把它消去。最终，我们只剩下

$$
R^\alpha_{\mu\rho\sigma:\tau} + R^\alpha_{\mu\sigma\tau:\rho} + R^\alpha_{\mu\tau\rho:\sigma} = 0 \text{ 。} \tag{13.4}
$$

曲率张量满足这些微分方程，同时也满足第 11 节中的所有对称性关系，它们被称为毕安基关系式（Bianchi relation）或毕安基恒等式（Bianchi identity）。

14. 里奇（Ricci）张量

我们现在来缩并 $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ 中的某两个指标。如果该张量关于我们取的某两个指标是反对称的，那么所得结果当然为零。如果我们取另外两个指标，那么基于对称性（11.4)、（11.7）和（11.8)，除了正负号之外，所得结果相同。我们取第一个和最后一个指标，且令

$$R^{\mu}_{\nu\rho\mu} = R_{\nu\rho} \ ,$$

它被称为里奇张量（Ricci tensor）。

将（11.8）乘以 $g^{\mu\sigma}$，得到

$$R_{\nu\rho} = R_{\rho\nu} \ 。 \tag{14.1}$$

所以，里奇张量是对称的。

我们可以再一次缩并，例如缩并成

$$g^{\nu\rho}R_{\nu\rho} = R^{\nu}_{\nu} = R \ ,$$

这里的 R 是个标量，叫做标量曲率（scalar curvature）或全曲率（total curvature）。它定义的方式如下：对于三维中的球面，其为正值。我们通过直接计算便能核实这一点。

毕安基关系式（13.4）包含五个指标。我们可以把（13.4）缩并两次，以此来得到只含有一个非傀标的关系式。令 $\tau = \alpha$，并乘以 $g^{\mu\rho}$，结果为

$$g^{\mu\rho}(R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma:\alpha} + R^{\alpha}_{\mu\sigma\alpha:\rho} + R^{\alpha}_{\mu\alpha\rho:\sigma}) = 0$$

或

$$(g^{\mu\rho}R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma})_{:\alpha} + (g^{\mu\rho}R^{\alpha}_{\mu\sigma\alpha})_{:\rho} + (g^{\mu\rho}R^{\alpha}_{\mu\alpha\rho})_{:\sigma} = 0 \ 。 \tag{14.2}$$

现在，

$$g^{\mu\rho}R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma} = g^{\mu\rho}g^{\alpha\beta}R_{\beta\mu\rho\sigma} = g^{\mu\rho}g^{\alpha\beta}R_{\mu\beta\sigma\rho} = g^{\alpha\beta}R_{\beta\sigma} = R^{\alpha}_{\sigma} \ 。$$

由于 $R_{\alpha\sigma}$ 是对称的，因此我们可以把其中一个指标放在另一个指标的上方，写成 R^{α}_{σ}。于是，（14.2）现在变成了

$$R^{\alpha}_{\sigma:\alpha} + (g^{\mu\rho}R_{\mu\sigma})_{:\rho} - R_{:\sigma} = 0$$

或

$$2R^{\alpha}_{\sigma:\alpha} - R_{:\sigma} = 0 \ ,$$

上式即为里奇张量的毕安基关系式。若升高指标 σ，则得到

$$(R^{\sigma\alpha} - \tfrac{1}{2}g^{\sigma\alpha}R)_{:\alpha} = 0 \ 。 \tag{14.3}$$

由（11.3）可得，里奇张量的显式为

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\ 。 \tag{14.4}$$

这里的第一项并没有表现出其对 μ 和 ν 是对称的，尽管其他三项显然如此。我们需要稍加计算，以此来证实第一项实际上也是对称的。

为了对行列式 g 求微分，我们必须对 g 的每个元素 $g_{\lambda\mu}$ 作微分，并乘以它的代数余子式 $gg^{\lambda\mu}$。于是

$$g_{,\nu} = gg^{\lambda\mu}g_{\lambda\mu,\nu}\ 。 \tag{14.5}$$

因此

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mu}_{\nu\mu} &= g^{\lambda\mu}\Gamma_{\lambda\nu\mu} = \tfrac{1}{2}g^{\lambda\mu}(g_{\lambda\nu,\mu} + g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda}) \\ &= \tfrac{1}{2}g^{\lambda\mu}g_{\lambda\mu,\nu} = \tfrac{1}{2}g^{-1}g_{,\nu} \\ &= \tfrac{1}{2}(\log g)_{,\nu}\ 。\end{aligned} \tag{14.6}$$

由上式明显可以看出，（14.4）中的第一项是对称的。

15. 爱因斯坦（Einstein）引力定律

到目前为止，我们的工作全部都是纯数学的（只有一个物理假设，即质点的运动路线是测地线）。这些工作大部分在上世纪已经完成，并已应用到具有任意维数的弯曲空间。在这些数学形式中，唯一出现“维数”的地方是下面这个方程：

$$g^{\mu}_{\mu} = 维数\ 。$$

爱因斯坦作了如下的假设：在虚空（*empty space*）[11]中，

$$R_{\mu\nu} = 0\ 。 \tag{15.1}$$

这就构成了爱因斯坦引力定律。“虚空”在这里意味着除了引力场之外，没有物质存在，也没有物理场存在。引力场不会扰动虚空，但其他场会扰动虚空。对于太阳系内的行星际空间而言，虚空的这些条件在良好近似下完全成立，且方程（15.1）在那里也适用。

平直空间显然满足（15.1）。这时测地线是直线，所以质点沿直线运动。在空间不平的地方，爱因斯坦引力定律会对曲率加以限制。将爱因斯坦引力定律与行星沿测地线运动这一假设结合起来，就能得到有关行星运动的一些信息。

[11]译者注：“虚空”与“真空（*vaccum*）”的词源与侧重点略有差异，但在物理中所指大体相同。鉴于本书中同时出现了这两者，为了区分，就不统一译作汉语中惯用的“真空”了。

乍看之下，爱因斯坦引力定律与牛顿引力定律毫无相似之处。为了看出两者之间的相似性，我们必须把 $g_{\mu\nu}$ 看作是描述引力场的势（*potential*）。只不过这些势有十个，而不像牛顿理论那样只有一个势。它们不仅描述了引力场，还描述了坐标系。在爱因斯坦理论中，引力场和坐标系密不可分地联系在一起，所以我们无法只描述其一而不描述另一。

把 $g_{\mu\nu}$ 看成势之后，我们发现，（15.1）就是场方程。因为克氏符包含了一阶导数，所以（14.4）中出现了二阶导数，因此（15.1）其实就像物理学中通常的场方程那样，也是二阶的。然而（15.1）是非线性的，所以它又不像通常的场方程；不但如此，非线性也意味着这些方程很复杂，难以得到精确的解。

16. 牛顿（Newton）近似

我们以静态坐标系作为参照，来考虑静态引力场（*static gravitational field*）。此时的 $g_{\mu\nu}$ 不随时间变化，即 $g_{\mu\nu,0}=0$。此外，我们必须有

$$g_{m0}=0 \quad (m=1,2,3) \quad 。$$

由上式可以导出

$$g^{m0}=0 \ , \qquad g^{00}=(g_{00})^{-1} \ ,$$

以及“g^{mn} 是 g_{mn} 的逆矩阵”。诸如 m、n 这样的罗马指标总是取值为 $1,2,3$。我们发现 $\Gamma_{m0n}=0$，因此 $\Gamma^m_{0n}=0$。

我们取一个正在缓慢运动的质点，其速度远小于光速。此时，v^m 是一阶小量。忽略二阶小量，

$$g_{00}{v^0}^2=1 \ 。 \tag{16.1}$$

该质点将沿着一条测地线运动。忽略二级小量，方程（8.3）给出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v^m}{\mathrm{d}s} &= -\Gamma^m_{00}{v^0}^2 = -g^{mn}\Gamma_{n00}{v^0}^2 \\ &= \tfrac{1}{2}g^{mn}g_{00,n}{v^0}^2 \ 。\end{aligned}$$

现在，在一阶近似下，

$$\frac{\mathrm{d}v^m}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}v^m}{\mathrm{d}x^\mu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}v^m}{\mathrm{d}x^0}v^0 \ 。$$

于是，借助于（16.1），得到了

$$\frac{\mathrm{d}v^m}{\mathrm{d}x^0}=\tfrac{1}{2}g^{mn}g_{00,n}v^0=g^{mn}({g_{00}}^{1/2})_{,n} \ 。 \tag{16.2}$$

由于 $g_{\mu\nu}$ 与 x_0 无关，因此我们可以降低上式中的指标 m，从而得到

$$\frac{\mathrm{d}v_m}{\mathrm{d}x^0} = ({g_{00}}^{1/2})_{,m} \text{ 。} \tag{16.3}$$

我们看到，该质点仿佛是在引力势 ${g_{00}}^{1/2}$ 的影响下运动的。我们目前还没有用爱因斯坦引力定律来得到此结果。我们接下来将采用爱因斯坦引力定律来求出引力势的条件，以便将其与牛顿引力定律相比较。

我们现在假设引力场是一个*弱场*（*weak field*），以致于空间曲率很小。那么我们可以选取能够使得坐标线（每条坐标线都有三个关于 x 的常数）曲率很小的坐标系。在这些条件下，$g_{\mu\nu}$ 近似为常数，并且 $g_{\mu\nu,\sigma}$ 以及所有克氏符都是小值。如果我们把它们看成一阶量，并忽略二阶小量，由（14.4）可知，爱因斯坦引力定律（15.1）变成了

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} = 0 \text{ 。}$$

通过先互换（11.6）中的 ρ 与 μ，再进行缩并，并略去二阶项，我们可以最便捷地求解出上式。结果如下：

$$g^{\rho\sigma}(g_{\rho\sigma,\mu\nu} - g_{\nu\sigma,\mu\rho} - g_{\mu\rho,\nu\sigma} + g_{\mu\nu,\rho\sigma}) = 0 \text{ 。} \tag{16.4}$$

现取 $\mu = \nu = 0$，并利用“$g_{\mu\nu}$ 与 x^0 无关”这一条件，我们得到了

$$g^{mn}g_{00,mn} = 0 \text{ 。} \tag{16.5}$$

达朗贝尔方程（10.9）在弱场近似下变为

$$g^{\mu\nu}V_{,\mu\nu} = 0 \text{ 。}$$

在静态情形下，上式简化为*拉普拉斯方程*（*Laplace's equation*）

$$g^{mn}V_{,mn} = 0 \text{ 。}$$

式（16.5）告诉我们，g_{00} 满足拉普拉斯方程。

我们可以选择合适的时间单位来使得 g_{00} 近似为 1。于是我们可以令

$$g_{00} = 1 + 2V \text{ ，} \tag{16.6}$$

其中 V 是小值。我们得到了 ${g_{00}}^{1/2} = 1 + V$，且 V 为引力势。它满足拉普拉斯方程，所以可认为它等同于牛顿引力势，并且对于位于原点、质量为 m 的物体来说，其等于 $-m/r$。为了核实这一负号，我们看到，由于 g^{mn} 的对角元近似等于 -1，因此可以从（16.2）导出

$$\text{加速度} = -\mathrm{grad}\ V \text{ 。}$$

由此可见，当引力场为弱场或静态场时，爱因斯坦引力定律就过渡到牛顿引力定律。因此，爱因斯坦理论保留了牛顿理论在解释行星运动方面的成功之处。因为行星速度较之光速都很小，所以静态近似可以近似得很好。又因为空间非常接近于平直空间，所以弱场近似也可以近似得很好。我们现在来考虑某些量的数量级。

我们知道，地球表面处的 $2V$ 值的数量级为 10^{-9}，因而（16.6）给出的 g_{00} 非常接近于 1。即便如此，它与 1 的差值还是大得足以产生我们在地球上就能看到的显著引力效应。取地球半径的数量级为 10^9 cm，我们求出 $g_{00,m}$ 的数量级为 10^{-18} cm^{-1}，因而偏离平直的程度是极小的。但是必须把这个值乘以光速平方，即 9×10^{20} (cm/sec)^2，才能给出地球表面重力产生的加速度。即使偏离平直的程度特别小，以致于无法直接观测到，但是这个加速度仍相当可观，约为 10^3 cm/sec^2。

17. 引力红移

我们再次讨论静态引力场，并考虑一个发出单色辐射的静止原子。光的波长对应于一个确定的 Δs。由于原子处于静止，因此对于诸如第 16 节所采用的静态坐标系而言，我们有

$$\Delta s^2 = g_{00}\Delta {x^0}^2 \ ,$$

其中 Δx^0 为周期，也就是在以我们这个静态坐标系为参照下的两个相继波峰之间的时间。

即使光传播到另一地点，Δx^0 也仍将保持不变。注意，该 Δx^0 不等于本地原子所发射的同一谱线的周期，它的周期仍为 Δs。因此，周期依赖于光发射地点的引力势 g_{00}：[12]

$$\Delta x^0 :: {g_{00}}^{-1/2} \ 。$$

谱线的偏移量为上式中的因子 ${g_{00}}^{-1/2}$。

若我们采用牛顿近似（16.6），则有

$$\Delta x^0 :: 1 - V \ 。$$

在引力场强的地方，比如太阳表面，V 为负值，故相比于地球上发射的对应光，在那里发射的光将发生红移（*red shift*）。这一效应可以用太阳光观测到，但往往会被其他物理效应所掩盖，例如由发射原子的运动所引起的多普勒效应。引力红移效应可以在白矮星发射的光中较为明显地观测到，白矮星的物质密度很高，使其表面产生了远强于太阳的引力势。

[12]译者注：双冒号（double colon）“::”在数学中表示“平均值为”。

18. 史瓦西（Schwarzchild）解

虚空的爱因斯坦方程是非线性的，因而非常复杂，难以求出它们的精确解。然而有一种特殊情形可以不太麻烦地求出它们的解，即静止球对称物体所产生的静态球对称场。

静态条件意味着采用静态坐标系时，$g_{\mu\nu}$ 与时间 x^0 或 t 无关，并且同样有 $g_{0m}=0$。空间坐标可以取球极坐标 $x^1=r$，$x^2=\theta$，$x^3=\phi$。$\mathrm{d}s^2$ 在球对称下的最一般形式为

$$\mathrm{d}s^2 = U\ \mathrm{d}t^2 - V\ \mathrm{d}r^2 - Wr^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\ \mathrm{d}\phi^2)\ ,$$

式中的 U、V、W 仅为 r 的函数。我们可以用任何一个 r 的函数来代替 r 而不影响球对称性。因此可以利用这一点来使问题尽可能地简化，而最方便的处理方式是令 $W=1$。那么，表达式可写为

$$\mathrm{d}s^2 = e^{2\nu}\ \mathrm{d}t^2 - e^{2\lambda}\ \mathrm{d}r^2 - r^2\ \mathrm{d}\theta^2 - r^2\sin^2\theta\ \mathrm{d}\phi^2\ , \tag{18.1}$$

式中的 ν、λ 仅为 r 的函数，且这两个函数必须选得满足爱因斯坦方程。

我们可以直接从（18.1）看出 $g_{\mu\nu}$ 的值，即

$$g_{00}=e^{2\nu}\ ,\qquad g_{11}=-e^{2\lambda}\ ,\qquad g_{22}=-r^2\ ,\qquad g_{33}=-r^2\ \sin^2\theta\ ,$$

以及

$$\text{当 } \mu\neq\nu \text{ 时，} g_{\mu\nu}=0\ 。$$

我们继而求得

$$g^{00}=e^{-2\nu}\ ,\qquad g^{11}=-e^{-2\lambda}\ ,\qquad g^{22}=-r^{-2}\ ,\qquad g^{33}=-r^{-2}\ \sin^{-2}\theta\ ,$$

以及

$$\text{当 } \mu\neq\nu \text{ 时，} g^{\mu\nu}=0\ 。$$

现在，我们必须计算出所有的克氏符 $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$。其中许多分量都等于零。我们用撇号表示对 r 的微分，那些不等于零的克氏符如下：

$$\Gamma^1_{00}=\nu'\ e^{2\nu-2\lambda}\ , \qquad \Gamma^0_{10}=\nu'\ ,$$
$$\Gamma^1_{11}=\lambda'\ , \qquad \Gamma^2_{12}=\Gamma^3_{13}=r^{-1}\ ,$$
$$\Gamma^1_{22}=-re^{-2\lambda}\ , \qquad \Gamma^3_{23}=\cot\theta\ ,$$
$$\Gamma^1_{33}=-r\sin^2\theta\ e^{-2\lambda}\ , \qquad \Gamma^2_{33}=-\sin\theta\ \cos\theta\ 。$$

把这些表达式代入（14.4）。结果为

$$R_{00} = \left(-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r} \right) e^{2\nu - 2\lambda} \ , \tag{18.2}$$

$$R_{11} = \nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r} \ , \tag{18.3}$$

$$R_{22} = (1 + r\nu' - r\lambda')e^{-2\lambda} - 1 \ , \tag{18.4}$$

$$R_{33} = R_{22} \ \sin^2\theta \ ,$$

而 $R_{\mu\nu}$ 的其他分量都等于零。

爱因斯坦引力定律要求上面这些表达式等于零。“（18.2）和（18.3）等于零”可以导出

$$\lambda' + \nu' = 0 \ 。$$

当 r 值很大时，空间必定近似平直，故当 $r \to \infty$ 时，λ 和 ν 都趋于零，由此可得

$$\lambda + \nu = 0 \ 。$$

“（18.4）等于零”给出

$$(1 + 2r\nu')e^{2\nu} = 1$$

或

$$(re^{2\nu})' = 1 \ 。$$

于是

$$re^{2\nu} = r - 2m \ ,$$

其中 m 为积分常数。上式同样使得（18.2）和（18.3）等于零。现在，我们得

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r} \ 。 \tag{18.5}$$

当 r 值很大时，牛顿近似必定成立。将（18.5）与（16.6）相比较，我们看出，（18.5）中出现的积分常数 m 正好是产生引力场的中心物体的质量。

完备解（*complete solution*）为

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \ \mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \ \mathrm{d}r^2 - r^2 \ \mathrm{d}\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \ \mathrm{d}\phi^2 \ 。 \tag{18.6}$$

这就是**史瓦西解**（Schwarzschild solution）。它在产生场的物体的表面外成立，而表面外是没有物质的。因而史瓦西解在星球表面外成立，且相当精确。

解（18.6）可以导出牛顿理论中关于行星绕太阳运动的微小修正，但是这些修正只在水星（最接近太阳的行星）这一情形下才明显，并且这些修正解释了这颗行星的运动在牛顿理论下的偏差。因此，这些修正为爱因斯坦理论提供了惊人的验证。

19. 黑洞

因为在 $r=2m$ 处，$g_{00}=0$ 且 $g_{11}=-\infty$，所以此时的史瓦西解（18.6）变为奇异解。似乎 $r=2m$ 给出了质量为 m 的物体的最小半径，然而进一步的研究表明，事实并非如此。

考虑一个正在降落到中心物体的质点，且令其速度矢量为 $v^\mu = \mathrm{d}z^\mu/\mathrm{d}s$。设该质点沿径向降落，则 $v^2=v^3=0$。质点的运动由测地线方程（8.3）确定：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v^0}{\mathrm{d}s} &= -\Gamma^0_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = -g^{00}\Gamma_{0\mu\nu}v^\mu v^\nu \\ &= -g^{00}g_{00,1}v^0v^1 = -g^{00}\frac{\mathrm{d}g_{00}}{\mathrm{d}s}v^0 \ 。\end{aligned}$$

现有 $g^{00}=1/g_{00}$，故得

$$g_{00}\frac{\mathrm{d}v^0}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}g_{00}}{\mathrm{d}s}v^0 = 0 \ 。$$

对上式作积分后，可得

$$g_{00}v^0 = k \ ，$$

其中 k 是常数，其为质点开始降落之处的 g_{00} 值。

另一方面，我们有

$$1 = g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = g_{00}{v^0}^2 + g_{11}{v^1}^2 \ 。$$

将此方程乘以 g_{00}，并利用上节所得的 $g_{00}g_{11}=-1$，我们发现

$$k^2 - {v^1}^2 = g_{00} = 1-\frac{2m}{r} \ 。$$

对于落体而言，$v^1<0$，因此有

$$v^1 = -\left(k^2-1+\frac{2m}{r}\right)^{1/2} \ 。$$

现在，

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = \frac{v^0}{v^1} = -k\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(k^2-1+\frac{2m}{r}\right)^{-1/2} \ 。$$

我们假设质点与中心物体的距离接近于临界半径，于是 $r=2m+\varepsilon$，其中 ε 是小量，并且我们忽略掉 ε^2，那么

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = -\frac{2m}{\varepsilon} = -\frac{2m}{r-2m} \ 。$$

对上式作积分后，得到

$$t = -2m\log(r-2m) + \text{常数} \ 。$$

于是，当 $r \to 2m$ 时，$t \to \infty$。也就是说，质点到达临界半径 $r = 2m$ 所花费的时间为无穷大。

我们假设质点正在发射某种谱线的光，且被位于 r 值很大处的某人观测到。这道光的谱线红移了一个因子 ${g_{00}}^{-1/2} = (1-2m/r)^{-1/2}$。当质点趋于临界半径时，这个因子会变成无穷大。也就是说，当质点趋于 $r = 2m$ 时，将观测到质点上所发生的一切物理过程正变得越来越慢。

现在来考虑观测者随质点一起行进的情形。观测者的时标用 $\mathrm{d}s$ 来度量。现在，

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{v^1} = -\left(k^2 - 1 + \frac{2m}{r}\right)^{-1/2} \ ,$$

可见当 r 趋于 $2m$ 时，$\mathrm{d}s/\mathrm{d}r$ 趋于 $-k^{-1}$。所以说，对于观测者而言，质点经过有限长的固有时之后，到达 $r = 2m$。当行进中的观测者到达 $r = 2m$ 时，只花费了有限长的时间。此后他会发生些什么呢？他可以在虚空中继续航行，并进入到 r 值更小的地方。

为了考察史瓦西解延拓到 $r < 2m$ 时的情况，我们有必要采用非静态坐标系，如此一来，$g_{\mu\nu}$ 会随着时间坐标而变化。我们保持坐标 θ 和 ϕ 不变，并且我们不使用 t 和 r，而是使用 τ 和 ρ，其定义如下：

$$\tau = t + f(r) \ , \qquad \rho = t + g(r) \ , \tag{19.1}$$

其中，函数 f 和 g 由我们任取。

仍用撇号表示对 r 的导数，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tau^2 - \frac{2m}{r}\mathrm{d}\rho^2 &= (\mathrm{d}t + f'\ \mathrm{d}r)^2 - \frac{2m}{r}(\mathrm{d}t + g'\ \mathrm{d}r)^2 \\ &= \left(1-\frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + 2\left(f' - \frac{2m}{r}g'\right)\mathrm{d}t\ \mathrm{d}r + \left({f'}^2 - \frac{2m}{r}{g'}^2\right)\mathrm{d}r^2 \\ &= \left(1-\frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 \ ,\end{aligned} \tag{19.2}$$

上式成立的前提是我们所选择的函数 f 和 g 能满足

$$f' = \frac{2m}{r}g' \tag{19.3}$$

以及

$$\frac{2m}{r}{g'}^2 - {f'}^2 = \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} \ 。 \tag{19.4}$$

从这些方程中消去 f，给出

$$g' = \left(\frac{r}{2m}\right)^{1/2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} 。\tag{19.5}$$

为了对这个方程作积分，令 $r=y^2$ 以及 $2m=a^2$。当 $r>2m$ 时，我们有 $y>a$。现在我们有

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} = 2y\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r} = \frac{2y^4}{a}\frac{1}{y^2-a^2} ,$$

上式给出

$$g = \frac{2}{3a}y^3 + 2ay - a^2\log\frac{y+a}{y-a} 。\tag{19.6}$$

最后，由（19.3）和（19.5）可得

$$g'-f' = \left(1-\frac{2m}{r}\right)g' = \left(\frac{r}{2m}\right)^{1/2} ,$$

对上式作积分后，得到

$$\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{2m}}r^{3/2} = g-f = \rho-\tau 。\tag{19.7}$$

于是

$$r = \mu(\rho-\tau)^{2/3} ,\tag{19.8}$$

其中

$$\mu = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2m}\right)^{2/3} 。$$

由此我们看出，因为我们能够满足条件（19.3）和（19.4），所以我们可以使用（19.2）。代入到史瓦西解（18.6），得

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 - \frac{2m}{\mu(\rho-\tau)^{2/3}}\mathrm{d}\rho^2 - \mu^2(\rho-\tau)^{4/3}(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2) 。\tag{19.9}$$

由（19.7）可知，临界值 $r=2m$ 就对应于 $\rho-\tau=4m/3$。这时，度规（19.9）在此处没有奇异性。

我们知道，因为我们可以仅通过坐标变换就将度规（19.9）变换成史瓦西解，所以（19.9）在区域 $r>2m$ 内满足虚空的爱因斯坦方程。由此可以推断，因为（19.9）在 $r=2m$ 处不存在任何奇异性，所以由解析延拓可得，当 $r\leqslant 2m$ 时，（19.9）也满足爱因斯坦方程。度规（19.9）的这种性质可以一直保持到 $r=0$ 或 $\rho-\tau=0$。

奇异性出现在新坐标与原坐标的关系式（19.1）之中。不过我们一旦建立起新坐标系，就可以不用管原坐标系如何，并且奇异性也不再出现。

我们看到，虚空的史瓦西解可以延拓到区域 $r<2m$。但是这个区域无法同 $r>2m$ 的空间相通。我们不难核实，任何信号（即使是光信号）越过边界 $r=2m$

都需要花费无限长的时间。所以，我们不可能通过观测来直接知晓 $r < 2m$ 的区域。由于物体可以掉入其内（根据我们的钟，这样做要花费无限长的时间），但却无一物能从中出来，因此以我们将这样的区域称为**黑洞**（black hole）。

由此产生了一个问题：这样的区域能否真实存在？我们能够明确表明的就只有爱因斯坦方程允许这样的区域存在。一个大质量恒星体可以坍缩成半径很小的星体，届时引力将变得非常强，以至于没有什么已知的物理力能够抵抗它的引力并阻止其进一步坍缩。看来它必定会坍缩成一个黑洞。按照我们的钟，这一过程需要花费无限长的时间；然而相对于坍缩物质本身，它只需花费有限长的时间。

20. 张量密度

在坐标变换下，四维体积元按照以下法则进行变换:

$$\mathrm{d}x^{0'}\ \mathrm{d}x^{1'}\ \mathrm{d}x^{2'}\ \mathrm{d}x^{3'} = \mathrm{d}x^0\ \mathrm{d}x^1\ \mathrm{d}x^2\ \mathrm{d}x^3\ J\ , \tag{20.1}$$

其中，J 为雅克比式（*Jacobian*）：

$$J = \frac{\partial(x^{0'}x^{1'}x^{2'}x^{3'})}{\partial(x^0x^1x^2x^3)} = x^{\mu'}{}_{,\alpha}\ \text{的行列式}\ 。$$

简单起见，我们不妨把（20.1）写成

$$\mathrm{d}^4x' = J\ \mathrm{d}^4x\ 。\tag{20.2}$$

现在，

$$g_{\alpha\beta} = x^{\mu'}{}_{,\alpha}\ g_{\mu'\nu'}\ x^{\nu'}{}_{,\beta}\ 。$$

我们可以把右边看成是三个矩阵的乘积，第一个矩阵的行由 α 指定、列由 μ' 指定，第二个矩阵的行由 μ' 指定、列由 ν' 指定，第三个矩阵的行由 ν' 指定、列由 β 指定。这三者的乘积就等于左边的 $g_{\alpha\beta}$。这些行列式之间必定有对应的方程成立，因此

$$g = Jg'J$$

或

$$g = J^2g'\ 。$$

现在，g 是一个负量，所以我们可以构造 $\sqrt{-g}$，也就是取 $-g$ 的正平方根值。于是

$$\sqrt{-g} = J\sqrt{-g'}\ 。\tag{20.3}$$

假设 S 是一个标量场量，$S = S'$。若 x' 的积分区域对应于 x 的积分区域，则

$$\int S\sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x = \int S\sqrt{-g'}\ J\ \mathrm{d}^4x = \int S'\sqrt{-g'}\ \mathrm{d}^4x' \ ,$$

于是

$$\int S\sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x = \text{不变量} \ 。 \tag{20.4}$$

我们把 $S\sqrt{-g}$ 称作**标量密度**（scalar density），意即这个量的积分为一个不变量。

同理，对于任一张量场 $T^{\mu\nu\cdots}$，我们可以把 $T^{\mu\nu\cdots}\sqrt{-g}$ 称作**张量密度**（tensor density）。若积分域很小，则积分

$$\int T^{\mu\nu}\sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x$$

是一个张量。若积分域不小，则该积分不是一个张量，这是因为该积分此时由位于不同点的张量之和组成，因而它在坐标变换下不按照任何简单方式进行变换。

$\sqrt{-g}$ 这个量在以后会非常有用。为了简短起见，我们不妨把它简写为 $\surd$。我们有

$$g^{-1}g_{,\nu} = 2\surd^{-1}\surd_{,\nu} \ 。$$

于是，公式（14.5）给出

$$\surd_{,\nu} = \tfrac{1}{2}\surd\ g^{\lambda\mu}\ g_{\lambda\mu,\nu} \ , \tag{20.5}$$

而公式（14.6）则可以写为

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\mu}\surd = \surd_{,\nu} \ 。 \tag{20.6}$$

21. 高斯（Gauss）定理、斯托克斯（Stokes）定理

矢量 A^μ 的协变散度 $A^\mu{}_{:\mu}$ 是一个标量。我们有

$$A^\mu{}_{:\mu} = A^\mu{}_{,\mu} + \Gamma^\mu_{\nu\mu}A^\nu = A^\mu{}_{,\mu} + \surd^{-1}\surd_{,\nu}A^\nu \ 。$$

于是

$$A^\mu{}_{:\mu}\surd = (A^\mu\surd)_{,\mu} \ 。 \tag{21.1}$$

我们可以令 $A^\mu{}_{:\mu}$ 为（20.4）中的 S，继而得到了不变量

$$\int A^\mu{}_{:\mu}\surd\ \mathrm{d}^4x = \int (A^\mu\surd)_{,\mu}\ \mathrm{d}^4x \ 。$$

如果积分遍及一个有限（四维）体积，那么由高斯定理（*Gauss's theorem*）可知，上式右边可以转换成遍及该体积的（三维）带边曲面的积分。

若 $A^{\mu}{}_{:\mu}=0$，则有

$$(A^{\mu}\surd)_{,\mu}=0\ , \tag{21.2}$$

这给出了一个守恒定律，也就是说，其密度为 $A^0\surd$、其流（*flow*）由三维矢量 $A^m\surd$（$m=1,2,3$）给定的流体是守恒的。我们可以在某个确定时间 x^0 作（21.2）遍及三维体积 V 的积分，结果为

$$\begin{aligned}\left(\int A^0\surd\ \mathrm{d}^3x\right)_{,0} &= -\int(A^m\surd)_{,m}\ \mathrm{d}^3x\\ &= \text{遍及 } V \text{ 的界面的面积分}\ 。\end{aligned}$$

若没有流通过 V 的界面，则 $\int A^0\surd\ \mathrm{d}^3x$ 为常数。

一般来说，矢量 A^{μ} 的这些结果不能用到指标超过一个以上的张量。以二指标张量 $Y^{\mu\nu}$ 为例。在平直空间中，我们可以用高斯定理把 $\int Y^{\mu\nu}{}_{,\nu}\ \mathrm{d}^4x$ 表示成一个面积分，但是在弯曲空间中，我们一般不能把 $\int Y^{\mu\nu}{}_{:\nu}\surd\ \mathrm{d}^4x$ 表示成一个面积分。不过对于反对称张量 $F^{\mu\nu}=-F^{\nu\mu}$ 而言，会有例外发生。

在反对称情形下，我们有

$$F^{\mu\nu}{}_{:\sigma}=F^{\mu\nu}{}_{,\sigma}+\Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}F^{\rho\nu}+\Gamma^{\nu}_{\sigma\rho}F^{\mu\rho}\ ,$$

所以由（20.6）可得

$$\begin{aligned}F^{\mu\nu}{}_{:\nu} &= F^{\mu\nu}{}_{,\nu}+\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}F^{\rho\nu}+\Gamma^{\nu}_{\nu\rho}F^{\mu\rho}\\ &= F^{\mu\nu}{}_{,\nu}+\surd^{-1}\surd_{,\rho}F^{\mu\rho}\ 。\end{aligned}$$

于是

$$F^{\mu\nu}{}_{:\nu}\surd=(F^{\mu\nu}\surd)_{,\nu}\ 。\tag{21.3}$$

因此，$\int F^{\mu\nu}{}_{:\nu}\surd\ \mathrm{d}^4x=$ 一个面积分，并且若 $F^{\mu\nu}{}_{:\nu}=0$，则我们有这一守恒定律。

在对称情形 $Y^{\mu\nu}=Y^{\nu\mu}$ 下，倘若我们把其中一个指标降低，也就是 $Y_{\mu}{}^{\nu}{}_{:\nu}$，那么我们处理它的时候，也会得到一个对应的方程，但是该方程额外多了一项。我们有

$$Y_{\mu}{}^{\nu}{}_{:\sigma}=Y_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\sigma}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}Y_{\alpha}{}^{\nu}+\Gamma^{\nu}_{\sigma\alpha}Y_{\mu}{}^{\alpha}\ 。$$

令 $\sigma=\nu$，并利用（20.6），得

$$Y_{\mu}{}^{\nu}{}_{:\nu}=Y_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu}+\surd^{-1}\surd_{,\alpha}Y_{\mu}{}^{\alpha}-\Gamma_{\alpha\mu\nu}Y^{\alpha\nu}\ 。$$

由于 $Y^{\alpha\nu}$ 是对称的，因此由（7.6）可知，最后一项中的 $\Gamma_{\alpha\mu\nu}$ 可用下式来代替:

$$\tfrac{1}{2}(\Gamma_{\alpha\nu\mu}+\Gamma_{\nu\alpha\mu})=\tfrac{1}{2}g_{\alpha\nu,\mu}\ 。$$

于是，我们得到了

$$Y_\mu{}^\nu{}_{:\nu}\sqrt{} = (Y_\mu{}^\nu\sqrt{})_{,\nu} - \tfrac{1}{2}g_{\alpha\beta,\mu}Y^{\alpha\beta}\sqrt{}\ 。\tag{21.4}$$

对于协变矢量 A_μ，我们有

$$\begin{aligned}A_{\mu:\nu} - A_{\nu:\mu} &= A_{\mu,\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}A_\rho - (A_{\nu,\mu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu}A_\rho) \\ &= A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}\ 。\end{aligned}\tag{21.5}$$

这个结果可以表述成：协变旋度等于普通旋度。上式只对协变矢量成立。对于逆变矢量而言，由于指标不均衡，因此不能构成旋度。

我们取 $\mu = 1$，$\nu = 2$，由此可得

$$A_{1:2} - A_{2:1} = A_{1,2} - A_{2,1}\ 。$$

在对该方程求积分时，需遍及曲面“x^0 = 常数，x^3 = 常数”。由斯托克斯定理（*Stokes' theorem*）可得

$$\begin{aligned}\iint (A_{1:2} - A_{2:1})\ \mathrm{d}x^1\ \mathrm{d}x^2 &= \iint (A_{1,2} - A_{2,1})\ \mathrm{d}x^1\ \mathrm{d}x^2 \\ &= \int (A_1\ \mathrm{d}x^1 + A_2\ \mathrm{d}x^2)\ ,\end{aligned}\tag{21.6}$$

也就是转换成了对环绕曲面的周界（*perimeter*）作积分。于是我们得到环绕周界的积分等于以此周界为边的曲面所流过的通量（*flux*）。此结果对一切坐标系普遍成立，而不是仅对曲面方程为“x^0 = 常数，x^3 = 常数”的那些坐标系成立。

为了用不变量形式写出此结果，我们引入二维曲面元的一般公式。如果我们取两个微小的逆变矢量 ξ^μ 和 ζ^μ，它们所对向（*subtend*）的曲面面积元由反对称二指标张量

$$\mathrm{d}S^{\mu\nu} = \xi^\mu\zeta^\nu - \xi^\nu\zeta^\mu$$

决定。于是，若 ξ^μ 的分量为 $0, \mathrm{d}x^1, 0, 0$，以及 ζ^μ 的分量为 $0, 0, \mathrm{d}x^2, 0$，则 $\mathrm{d}S^{\mu\nu}$ 的分量为

$$\mathrm{d}S^{12} = \mathrm{d}x^1\ \mathrm{d}x^2\ , \qquad \mathrm{d}S^{21} = -\mathrm{d}x^1\ \mathrm{d}x^2\ ,$$

且其他分量都等于零。因此，（21.6）的左边变成了

$$\iint A_{\mu:\nu}\ \mathrm{d}S^{\mu\nu}\ ,$$

而右边显然是 $\int A_\mu\ \mathrm{d}x^\mu$，于是公式（21.6）变为

$$\frac{1}{2}\iint_{\text{曲面}} (A_{\mu:\nu} - A_{\nu:\mu})\ \mathrm{d}S^{\mu\nu} = \int_{\text{周界}} A_\mu\ \mathrm{d}x^\mu\ 。\tag{21.7}$$

22. 谐和坐标

标量 V 的达朗贝尔方程为 $\Box V=0$，其协变形式由（10.9）给出

$$g^{\mu\nu}(V_{,\mu\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}V_{,\alpha})=0\ 。\tag{22.1}$$

如果我们采用平直空间中的直线轴，那么四个坐标 x^λ 中的每一个都满足 $\Box x^\lambda=0$。我们或许可以用 x^λ 替换（22.1）中的 V。当然，x^λ 不是 V 那样的标量，因而所得结果并不是一个张量方程，所以这种替换只在某些坐标系中成立。这就给坐标施加了一个限制。

如果我们用 x^λ 替换 V，那么就必须用 $x^\lambda{}_{,\alpha}=g^\lambda_\alpha$ 替换 $V_{,\alpha}$。方程（22.1）变为

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=0\ 。\tag{22.2}$$

满足这一条件的坐标就叫做谐和坐标（harmonic coordinate）。谐和坐标提供给我们一种最接近直线坐标且可以在弯曲空间中使用的近似。只要我们愿意，就可以在任何问题中使用谐和坐标，但实际上一般坐标的张量形式更为方便，采用谐和坐标常常反倒不值。不过在讨论引力波时，谐和坐标还是非常有用的。

由（7.9）和（7.6）可知，在一般坐标中有

$$\begin{aligned}g^{\mu\nu}{}_{,\sigma}&=-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}(\Gamma_{\alpha\beta\sigma}+\Gamma_{\beta\alpha\sigma})\\&=-g^{\nu\beta}\Gamma^{\mu}_{\beta\sigma}-g^{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}_{\alpha\sigma}\ 。\end{aligned}\tag{22.3}$$

于是，借助（20.6），我们得到

$$(g^{\mu\nu}\surd)_{,\sigma}=(-g^{\nu\beta}\Gamma^{\mu}_{\beta\sigma}-g^{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}_{\alpha\sigma}+g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\sigma\beta})\surd\ 。\tag{22.4}$$

通过令 $\sigma=\nu$ 来缩并上式，由此可得

$$(g^{\mu\nu}\surd)_{,\nu}=-g^{\nu\beta}\Gamma^{\mu}_{\beta\nu}\surd\ 。\tag{22.5}$$

现在我们看到，谐和条件的另一形式为

$$(g^{\mu\nu}\surd)_{,\nu}=0\ 。\tag{22.6}$$

23. 电磁场

麦克斯韦方程组（*Maxwell's equations*）通常写成

$$E=-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}-\mathrm{grad}\ \phi\ ,\tag{23.1}$$

$$H = \text{curl } A \text{ ，} \tag{23.2}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = -\text{curl } E \text{ ，} \tag{23.3}$$

$$\text{div } H = 0 \text{ ，} \tag{23.4}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \text{curl } H - 4\pi j \text{ ，} \tag{23.5}$$

$$\text{div } E = 4\pi\rho \text{ 。} \tag{23.6}$$

对于狭义相对论，我们必须把这些方程写成四维形式。势 A 和 ϕ 按照以下方式构成四维矢量 κ^μ：

$$\kappa^0 = \phi \text{ ，} \qquad \kappa^m = A^m \quad \text{（其中 } m = 1, 2, 3\text{）。}$$

定义

$$F_{\mu\nu} = \kappa_{\mu,\nu} - \kappa_{\nu,\mu} \text{ 。} \tag{23.7}$$

然后，由（23.1）可得

$$E^1 = -\frac{\partial \kappa^1}{\partial x^0} - \frac{\partial \kappa^0}{\partial x^1} = \frac{\partial \kappa_1}{\partial x^0} - \frac{\partial \kappa_0}{\partial x^1} = F_{10} = -F^{10} \text{ ；}$$

另由（23.2）可得

$$H^1 = \frac{\partial \kappa^3}{\partial x^2} - \frac{\partial \kappa^2}{\partial x^3} = -\frac{\partial \kappa_3}{\partial x^2} + \frac{\partial \kappa_2}{\partial x^3} = F_{23} = F^{23} \text{ 。}$$

于是，反对称张量 $F_{\mu\nu}$ 的六个分量决定了场量 E 和 H。

由定义（23.7）可得

$$F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\nu\sigma,\mu} + F_{\sigma\mu,\nu} = 0 \text{ 。} \tag{23.8}$$

上式给出了麦克斯韦方程（23.3）和（23.4）。由（23.6），我们有

$$F^{0\nu}{}_{,\nu} = F^{0m}{}_{,m} = -F^{m0}{}_{,m} = \text{div } E = 4\pi\rho \text{ 。} \tag{23.9}$$

再由（23.5）可得

$$F^{1\nu}{}_{,\nu} = F^{10}{}_{,0} + F^{12}{}_{,2} + F^{13}{}_{,3} = -\frac{\partial E^1}{\partial x^0} + \frac{\partial H^3}{\partial x^2} - \frac{\partial H^2}{\partial x^3} = 4\pi j^1 \text{ 。} \tag{23.10}$$

电荷密度 ρ 和电流 j^m 按照以下方式构成四维矢量 J^μ：

$$J^0 = \rho \text{ ，} \qquad J^m = j^m \text{ 。}$$

于是，（23.9）和（23.10）合并成

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 4\pi J^\mu \text{ 。} \tag{23.11}$$

按照这种方法，可以把麦克斯韦方程写成狭义相对论所要求的四维形式。

为了过渡到广义相对论，我们必须把这些方程写成协变形式。基于（21.5），我们可以把（23.7）直接写成

$$F_{\mu\nu} = \kappa_{\mu:\nu} - \kappa_{\nu:\mu} \text{ 。}$$

上式给出了场量 $\Gamma_{\mu\nu}$ 的协变定义。我们进一步有

$$F_{\mu\nu:\sigma} = F_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} F_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma} F_{\mu\alpha} \text{ 。}$$

对 μ、ν、σ 进行循环置换，并把这样得到的三个方程相加，由（23.8）可得

$$F_{\mu\nu:\sigma} + F_{\nu\sigma:\mu} + F_{\sigma\mu:\nu} = F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\nu\sigma,\mu} + F_{\sigma\mu,\nu} = 0 \text{ 。} \tag{23.12}$$

所以，这个麦克斯韦方程直接过渡到了协变形式。

最后，我们必须处理一下方程（23.11）。该方程在广义相对论中无效，必须代之以协变方程：

$$F^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 4\pi J^{\mu} \text{ 。} \tag{23.13}$$

由适用于任何反对称二指标张量的（21.3）可知，我们有

$$(F^{\mu\nu}\surd)_{,\nu} = 4\pi J^{\mu}\surd \text{ 。}$$

紧接着从上式导出

$$(J^{\mu}\surd)_{,\mu} = (4\pi)^{-1}(F^{\mu\nu}\surd)_{,\mu\nu} = 0 \text{ 。}$$

我们由此得到了一个类似于（21.2）的方程，它给出了电荷守恒定律。电荷守恒定律精确成立，不受空间弯曲的影响。

24. 有物质存在时，如何修改爱因斯坦方程？

没有物质存在时，爱因斯坦方程为

$$R^{\mu\nu} = 0 \text{ 。} \tag{24.1}$$

由此导出

$$R = 0 \text{ ，}$$

因而

$$R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 0 \text{ 。} \tag{24.2}$$

假如我们从方程（24.2）出发，通过缩并，可得

$$R - 2R = 0 \text{ ，}$$

所以我们又可以反过来得到（24.1）。我们既可以用（24.1），也可以用（24.2）作为真空的基本方程。

有物质存在时，我们必须修改这些方程。假设（24.1）会变成

$$R^{\mu\nu} = X^{\mu\nu} \text{ ，} \tag{24.3}$$

以及（24.2）会变成

$$R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}R = Y^{\mu\nu} \text{ 。} \tag{24.4}$$

这里的 $X^{\mu\nu}$ 和 $Y^{\mu\nu}$ 是有物质存在时的对称二指标张量。

现在我们可以看出，（24.4）这种形式处理起来会更加方便，这是因为我们有毕安基关系式（14.3），它告诉我们

$$(R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}R)_{:\nu} = 0 \text{ 。}$$

因此，（24.4）要求

$$Y^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 0 \text{ 。} \tag{24.5}$$

任何由物质产生的张量 $Y^{\mu\nu}$ 都必须满足这个条件，否则方程（24.4）将不再适用。

为了方便起见，引入系数 -8π，并把方程（24.4）改写为

$$R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -8\pi Y^{\mu\nu} \text{ 。} \tag{24.6}$$

我们会发现，含有此系数的张量 $Y^{\mu\nu}$ 应解释为（非引力的）能量和动量的密度与通量。其中，$Y^{\mu 0}$ 是密度，$Y^{\mu r}$ 是通量。

在平直空间中，方程（24.5）变成了

$$Y^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \text{ ，}$$

由此给出了能量-动量守恒。在弯曲空间中，能量-动量守恒只是一种近似。而这一误差得归因于引力场存在物质，以及引力场本身就具有一些能量和动量。

25. 物质能动张量

假设我们有一物质分布（*distribution of matter*），其速度从一点连续地变化到某一邻点。如果 z^μ 表示物质元的坐标，那么我们就可以引入速度矢量 $v^\mu = \mathrm{d}z^\mu/\mathrm{d}s$，它与场函数一样，是关于 x 的连续函数。速度矢量 v^μ 具有下面这两条性质：

$$g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 1 \text{ ，} \tag{25.1}$$

$$0 = (g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu)_{:\sigma} = g_{\mu\nu}(v^\mu v^\nu{}_{:\sigma} + v^\mu{}_{:\sigma}v^\nu) = 2g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu{}_{:\sigma} \text{ 。}$$

于是，

$$v_\nu v^\nu{}_{:\sigma} = 0 \text{ 。} \tag{25.2}$$

我们不妨引入一个标量场 ρ，如此一来，矢量场 ρv^μ 便决定了物质密度和物质流，就像 J^μ 决定了电荷密度和电流一样；也就是说，$\rho v^0\surd$ 是物质密度，$\rho v^m\surd$ 是物质流。物质守恒的条件为

$$(\rho v^\mu \surd)_{,\mu} = 0$$

或

$$(\rho v^\mu)_{:\mu} = 0 \text{ 。} \tag{25.3}$$

我们所考虑的物质具有能量密度 $\rho v^0 v^0\surd$ 和能量通量 $\rho v^0 v^m\surd$，它同样还具有动量密度 $\rho v^n v^0\surd$ 和动量通量 $\rho v^n v^m\surd$。令

$$T^{\mu\nu} = \rho v^\mu v^\nu \text{ ，} \tag{25.4}$$

那么 $T^{\mu\nu}\surd$ 给出了能量和动量的密度与通量，其中 $T^{\mu\nu}$ 叫做**物质能量-动量张量**（material energy-momentum tensor，简称**物质能动张量**）[13]。当然，它是对称的。

我们能否将 $T^{\mu\nu}$ 用于爱因斯坦方程（24.6）右边的物质项呢？为此，我们要求 $T^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 0$。由定义（25.4），我们有

$$T^{\mu\nu}{}_{:\nu} = (\rho v^\mu v^\nu)_{:\nu} = v^\mu(\rho v^\nu)_{:\nu} + \rho v^\nu v^\mu{}_{:\nu} \text{ 。}$$

由质量守恒的条件（25.3）可知，右边第一项等于零。若物质沿测地线运动，则第二项等于零，这是因为如果 v^μ 不是只在某一条世界线上有意义，而是定义为一个连续的场函数，那么我们有

$$\frac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}s} = v^\mu{}_{,\nu}v^\nu \text{ 。}$$

这样，（8.3）变为

$$(v^\mu{}_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma}v^\sigma)v^\nu = 0$$

或

$$v^\mu{}_{:\nu}v^\nu = 0 \text{ 。} \tag{25.5}$$

[13]译者注：*应力-能量-动量张量*（*stress-energy-momentum tensor*）一般简称为*应力-能量张量*或*能量-动量张量*。对于电磁场而言，我们更习惯使用前者，称为*电磁应力-能量张量*（*electromagnetic stress-energy tensor*），第 28 节将会有所涉及。对于物质而言，我们更习惯使用后者，称为*物质能量-动量张量*（*material energy-momentum tensor*）；原书使用的是 material energy tensor，这不是一个规范的称呼。

现在我们看出，只要引入一个合适的数值系数 k 就能把物质能动张量（25.4）代入到爱因斯坦方程（24.4）之中。我们得到

$$R^{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}R=k\rho v^{\mu}v^{\nu}\ 。\tag{25.6}$$

现在我们来确定系数 k 的值。我们参照第 16 节中的方法，将其过渡到牛顿近似。首先，我们注意到，缩并（25.6）会得到

$$-R=k\rho\ ,$$

所以（25.6）可以写成

$$R^{\mu\nu}=k\rho(v^{\mu}v^{\nu}-\tfrac{1}{2}g^{\mu\nu})\ 。$$

在弱场近似下，我们对照（16.4）得到了

$$\tfrac{1}{2}g^{\rho\sigma}(g_{\rho\sigma,\mu\nu}-g_{\nu\sigma,\mu\rho}-g_{\mu\rho,\nu\sigma}+g_{\mu\nu,\rho\sigma})=k\rho(v_{\mu}v_{\nu}-\tfrac{1}{2}g_{\mu\nu})\ 。$$

我们现在来讨论静态场以及物质静态分布（*static distribution of matter*），由于是静态的，因此 $v_0=1$，$v_m=0$。令 $\mu=\nu=0$，并忽略二阶小量，我们得

$$-\tfrac{1}{2}\nabla^2 g_{00}=\tfrac{1}{2}k\rho\ ,$$

或由（16.6）可得

$$\nabla^2 V=-\tfrac{1}{2}k\rho\ 。$$

为了与泊松方程一致，我们必须取 $k=-8\pi$。

于是，当存在具有速度场的物质分布时，爱因斯坦方程写成

$$R^{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}R=-8\pi\rho v^{\mu}v^{\nu}\ 。\tag{25.7}$$

因此，（25.4）所给出的 $T^{\mu\nu}$ 恰好是方程（24.6）中的 $Y^{\mu\nu}$。

质量守恒的条件（25.3）给出

$$\rho_{:\mu}v^{\mu}+\rho v^{\mu}{}_{:\mu}=0\ ,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}=\frac{\partial\rho}{\partial x^{\mu}}v^{\mu}=-\rho v^{\mu}{}_{:\mu}\ 。\tag{25.8}$$

上式是确定 ρ 沿物质元的世界线如何变化的条件。它允许 ρ 从某一物质元的世界线任意地变化到相邻物质元的世界线，因而我们可以将时空中一束管状世界线以外的 ρ 取为零。这样的一束世界线组成一个有限尺寸的物质质点。在质点外，我们有 $\rho=0$，于是虚空的爱因斯坦方程成立。

应该注意到，如果我们假设了一般场方程（25.7），就能由此推出两件事：(a) 质量是守恒的；(b) 质量沿测地线运动。为此，我们注意到，根据毕安基关系式，[（25.7）的左边]$_{:\nu}=0$，所以方程（25.7）给出

$$(\rho v^\mu v^\nu)_{:\nu}=0$$

或

$$v^\mu(\rho v^\nu)_{:\nu}+\rho v^\nu v^\mu{}_{:\nu}=0\ 。\tag{25.9}$$

然后将此方程乘以 v_μ。由（25.2）可知，第二项等于零，于是剩下了 $(\rho v^\nu)_{:\nu}=0$，而这正是守恒方程（25.3）。方程（25.9）现在约化为 $v^\nu v^\mu{}_{:\nu}=0$，其为测地线方程。所以没有必要把质点沿测地线运动作为一条独立假设。对于一个小质点而言，通过将虚空的爱因斯坦方程应用到质点周围的空间，可知其运动约束在一条测地线上。

26. 引力作用量原理

引入标量

$$I=\int R\surd\ \mathrm{d}^4x\ ,\tag{26.1}$$

该积分遍及某个四维体积。作 $g_{\mu\nu}$ 的变分 $\delta g_{\mu\nu}$，并让 $g_{\mu\nu}$ 及其一阶导数在界面上保持不变。之后我们会发现，对于任意的 $\delta g_{\mu\nu}$ 值而言，只要令 $\delta I=0$，就可以给出爱因斯坦真空方程。

由（14.4），我们有

$$R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}=R^*-L\ ,$$

其中，

$$R^*=g^{\mu\nu}(\Gamma^\sigma_{\mu\sigma,\nu}-\Gamma^\sigma_{\mu\nu,\sigma})\ ,\tag{26.2}$$

$$L=g^{\mu\nu}(\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\rho}-\Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho})\ 。\tag{26.3}$$

由于 R^* 中出现了 $g_{\mu\nu}$ 的二阶导数，因此 I 也包含了 $g_{\mu\nu}$ 的二阶导数。但它们只以线性形式出现，所以我们可以通过分部积分消去。我们有

$$R^*\surd=(g^{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\sigma}\surd)_{,\nu}-(g^{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\surd)_{,\sigma}-(g^{\mu\nu}\surd)_{,\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\sigma}+(g^{\mu\nu}\surd)_{,\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\ 。\tag{26.4}$$

前两项是全微分，所以它们对 I 没有贡献。因此，我们只需保留（26.4）中的后两项。借助（22.5）和（22.4），这两项变为

$$g^{\nu\beta}\Gamma^\mu_{\beta\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\sigma}\surd+(-2g^{\nu\beta}\Gamma^\mu_{\beta\sigma}+g^{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\sigma\beta})\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\surd\ 。$$

由（26.3）可知，上式正好等于 $2L\sqrt{}$。所以，（26.1）变成了

$$I=\int L\sqrt{}\ \mathrm{d}^4x\ ,$$

上式只包含了 $g_{\mu\nu}$ 及其一阶导数，并且这些一阶导数是二次齐次的。

我们令 $\mathscr{L}=L\sqrt{}$，并把它（其中有一个待定的适用数值系数）看成是引力场的作用量密度。它虽然不是标量密度，但因其不包含 $g_{\mu\nu}$ 的二阶导数，故而比标量密度 $R\sqrt{}$ 更为方便使用。

按照普通的动力学概念，作用量是拉格朗日量对时间的积分。我们有

$$I=\int \mathscr{L}\ \mathrm{d}^4x=\int \mathrm{d}x_0\int \mathscr{L}\ \mathrm{d}x^1\ \mathrm{d}x^2\ \mathrm{d}x^3\ ,$$

所以，拉格朗日量显然为

$$\int \mathscr{L}\ \mathrm{d}x^1\ \mathrm{d}x^2\ \mathrm{d}x^3\ 。$$

如此一来，我们既可以把 $\mathscr{L}$ 看成是（三维空间中的）拉格朗日密度，也可以把 $\mathscr{L}$ 看成是（四维空间中的）作用量密度。我们不妨把 $g_{\mu\nu}$ 看成是动力学坐标，把它对时间的导数看成是速度。于是我们看出，正如普通动力学中所常见到的那样，拉格朗日量是速度的二次（非齐次）式。

我们现在必须对 $\mathscr{L}$ 取变分。利用（20.6），并借助（22.5），我们有

$$\begin{aligned}\delta(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\sqrt{})&=\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\ \delta(\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\sqrt{})+\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\sqrt{}\ \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\\&=\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\ \delta(g^{\mu\nu}\sqrt{}_{,\alpha})+\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\ \delta(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{})-\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\ \delta(g^{\mu\nu}\sqrt{})\\&=\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\ \delta(g^{\mu\nu}\sqrt{}_{,\alpha})-\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\ \delta(g^{\alpha\nu}\sqrt{})_{,\nu}-\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\ \delta(g^{\mu\nu}\sqrt{})\ 。\end{aligned}\tag{26.5}$$

借助（22.3），继而

$$\begin{aligned}\delta(\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}g^{\mu\nu}\sqrt{})&=2(\delta\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha})\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}g^{\mu\nu}\sqrt{}+\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\ \delta(g^{\mu\nu}\sqrt{})\\&=2\delta(\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}g^{\mu\nu}\sqrt{})\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}-\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\ \delta(g^{\mu\nu}\sqrt{})\\&=-\delta(g^{\nu\beta}{}_{,\alpha}\sqrt{})\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}-\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\ \delta(g^{\mu\nu}\sqrt{})\ 。\end{aligned}\tag{26.6}$$

（26.5）减去（26.6），得到

$$\delta\mathscr{L}=\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\ \delta(g^{\mu\nu}\sqrt{})_{,\alpha}-\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\ \delta(g^{\alpha\nu}\sqrt{})_{,\nu}+(\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}-\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu})\ \delta(g^{\mu\nu}\sqrt{})\ 。\tag{26.7}$$

上式前两项与

$$-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha}\ \delta(g^{\mu\nu}\sqrt{})+\Gamma^{\beta}_{\mu\beta,\nu}\ \delta(g^{\mu\nu}\sqrt{})$$

相差一个全微分。于是，我们得到了

$$\delta I=\delta\int \mathscr{L}\ \mathrm{d}^4x=\int R_{\mu\nu}\ \delta(g^{\mu\nu}\sqrt{})\ \mathrm{d}^4x\ ,\tag{26.8}$$

其中 $R_{\mu\nu}$ 由（14.4）给出。因为 $g^{\mu\nu}$ 是任意的，所以 $\delta(g^{\mu\nu}\surd)$ 也是独立且任意的，故而“（26.8）等于零”这个条件导出了（24.1）这种形式的爱因斯坦定律。

采用与（7.9）相同的方法，我们可以推出

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\ \delta g_{\alpha\beta}\ 。\tag{26.9}$$

同样，对应于（20.5），我们可以推出

$$\delta\surd = \tfrac{1}{2}\surd g^{\alpha\beta}\ \delta g_{\alpha\beta}\ 。\tag{26.10}$$

于是，

$$\delta(g^{\mu\nu}\surd) = -(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - \tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta})\surd\ \delta g_{\alpha\beta}\ 。$$

这样我们就可以把（26.8）写成另一种形式

$$\begin{aligned}\delta I &= -\int R_{\mu\nu}(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - \tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta})\surd\ \delta g_{\alpha\beta}\ \mathrm{d}^4x\\ &= -\int (R^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}R)\surd\ \delta g_{\alpha\beta}\ \mathrm{d}^4x\ 。\end{aligned}\tag{26.11}$$

要求（26.11）等于零，由此给出了（24.2）这种形式的爱因斯坦定律。

27. 物质连续分布的作用量

我们现在来考虑物质连续分布（*continuous distribution of matter*），正如我们在第 25 节中所做的那样，它的速度同样是从一点连续地变化到某一邻点。对于这种与引力场发生相互作用的物质，我们不妨建立如下形式的作用量原理：

$$\delta(I_g + I_m) = 0\ ，\tag{27.1}$$

其中，作用量的引力部分 I_g 就是上节中的 I 乘以某个数值系数 κ，而作用量的物质部分 I_m 现在待定。条件（27.1）必定可以导出有物质时的引力场方程（25.7），以及物质运动的测地线方程。

我们现在需要对物质元的位置作任意变分，以便看出它是如何影响 I_m 的。要是我们首先纯粹从运动学的角度来考虑变分，且完全不管度规 $g_{\mu\nu}$ 的话，就能使讨论更加清楚。注意，协变矢量与逆变矢量在这个时候是有实质差异的，我们无法将其中一个变换成另一个。速度由逆变矢量 u^μ 的分量比描述，所以不引入度规就无法将速度归一化。

对于物质连续流（*continuous flow of matter*）而言，其每一点上都有一个速度矢量 u^μ（以及一个未知的乘法因子）。我们可以建立一个与 u^μ 同向的逆变矢量

密度 p^μ，并且根据下面这些公式，它决定了流量（*quantity of flow*）及其速度：

$$p^0 \ \mathrm{d}x^1 \ \mathrm{d}x^2 \ \mathrm{d}x^3$$

是某一时刻体积元 $\mathrm{d}x^1 \ \mathrm{d}x^2 \ \mathrm{d}x^3$ 内的物量（*amount of matter*）[14]，而

$$p^1 \ \mathrm{d}x^0 \ \mathrm{d}x^2 \ \mathrm{d}x^3$$

则是时间间隔 $\mathrm{d}x^0$ 内流过面元 $\mathrm{d}x^2 \ \mathrm{d}x^3$ 的物量。我们不妨假设物质是守恒的，所以

$$p^\mu{}_{,\mu} = 0 \ 。 \tag{27.2}$$

假设各物质元是从 z^μ 位移至 $z^\mu + b^\mu$，其中 b^μ 是小量。接下来，我们必须确定某一给定点 x 处的 p^μ 的最终变化量。

首先考虑 $b^0 = 0$ 这种情形。某个三维体积 V 内的物量变化量就等于穿过 V 的界面的流出量取负：

$$\delta \int_V p^0 \ \mathrm{d}x^1 \ \mathrm{d}x^2 \ \mathrm{d}x^3 = -\int p^0 b^r \ \mathrm{d}S_r \qquad （其中\ r = 1, 2, 3），$$

其中 $\mathrm{d}S_r$ 表示 V 的界面元。我们可以利用高斯定理，把右边变换成体积分，于是我们发现

$$\delta p^0 = -(p^0 b^r)_{,r} \ 。 \tag{27.3}$$

我们须将此结果推广到 $b^0 \neq 0$ 这种情形。我们可以利用“如果 b^μ 正比于 p^μ，那么各物质元沿其世界线位移，从而 p^μ 不变”这一条件。显然，（27.3）可以推广为

$$\delta p^0 = (p^r b^0 - p^0 b^r)_{,r} \ 。$$

之所以可以这样推广，是因为当 $b^0 = 0$ 时，上式与（27.3）相符；当 b^μ 正比于 p^μ 时，上式会给出 $\delta p^0 = 0$。对于 p^μ 的其他分量而言，也都有与之对应的公式，故一般结果为

$$\delta p^\mu = (p^\nu b^\mu - p^\mu b^\nu)_{,\nu} \ 。 \tag{27.4}$$

---

[14] 译者注：“物质的量（amount of substance）”一词有时也简称为“物量”，被用来特指“物质的摩尔量”。不过由于历史遗留的翻译问题，matter 与 substance 均被译作“物质”。根据 substance 的定义：a substance is simply a pure form of matter，换言之，a substance is matter that contains only one type of atom or molecule，可以看出其与 matter 的含义与应用场景略有差别：matter 可以指占据一定体积且具有一定质量的任意物质，而 substance 一般多指具有特定组分的化学物质。鉴于 nature of matter 译作“物性”、phase of matter 译作“物相”、state of matter 译作“物态”等，故将 amount of matter 译作“物量”。

当描写物质连续流时，量 p^μ 是作用量函数中用到的基本变量。由于 p^μ 必定会按照公式（27.4）进行变化，故而在适当的分部积分之后，我们须令每个 b^μ 前的系数等于零。这就给出了物质的运动方程。

质量为 m 的孤立质点的作用量为

$$-m\int \mathrm{d}s\ 。\tag{27.5}$$

通过考虑狭义相对论这一情形，我们看出了系数 $-m$ 的必要性，原因在于拉格朗日量此时是（27.5）对时间的导数，即

$$L=-m\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x^0}=-m\left(1-\frac{\mathrm{d}x^r}{\mathrm{d}x^0}\frac{\mathrm{d}x^r}{\mathrm{d}x^0}\right)^{1/2}\ ,$$

其对 $r=1,2,3$ 进行求和。这给出了动量

$$\frac{\partial L}{\partial(\mathrm{d}x^r/\mathrm{d}x^0)}=m\frac{\mathrm{d}x^r}{\mathrm{d}x^0}\left(1-\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x^0}\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x^0}\right)^{-1/2}=m\frac{\mathrm{d}x^r}{\mathrm{d}s}\ ,$$

而得到这样的结果也是理所当然。

由（27.5）可知，用 $p^0\ \mathrm{d}x^1\ \mathrm{d}x^2\ \mathrm{d}x^3$ 替换 m，然后积分，便得到了物质连续分布的作用量

$$I_m=-\int p^0\ \mathrm{d}x^1\ \mathrm{d}x^2\ \mathrm{d}x^3\ \mathrm{d}s\ 。\tag{27.6}$$

为了得到一种更易理解的作用量形式，我们使用度规，并令

$$p^\mu=\rho v^\mu\surd\ ,\tag{27.7}$$

其中，ρ 是决定密度的一个标量；v^μ 是上述矢量 u^μ 的归一化矢量，其长度为 1。由于 $v^0\ \mathrm{d}s=\mathrm{d}x^0$，因此我们得到了

$$\begin{aligned}I_m&=-\int\rho\surd v^0\ \mathrm{d}x^1\ \mathrm{d}x^2\ \mathrm{d}x^3\ \mathrm{d}s\\&=-\int\rho\surd\ \mathrm{d}^4x\ 。\end{aligned}\tag{27.8}$$

因为 ρ 与 v^μ 不是独立变量，所以这种形式的作用量不适合取变分。我们必须用 p^μ 来消去它们，然后再按照（27.4）对其取变分。由（27.7）可得

$$(p^\mu p_\mu)^{1/2}=\rho\surd\ 。$$

于是，（27.8）变成了

$$I_m=-\int(p^\mu p_\mu)^{1/2}\ \mathrm{d}^4x\ 。\tag{27.9}$$

为了对这个表达式取变分，我们用到了

$$\begin{aligned}\delta(p^\mu p_\mu)^{1/2} &= \tfrac{1}{2}(p^\lambda p_\lambda)^{-1/2}(p^\mu p^\nu\ \delta g_{\mu\nu} + 2p_\mu\ \delta p^\mu) \\ &= \tfrac{1}{2}\rho v^\mu v^\nu \surd\ \delta g_{\mu\nu} + v_\mu\ \delta p^\mu\ 。\end{aligned}$$

借助（26.11），并将其乘以系数 κ，继而作用量原理（27.1）给出了

$$\delta(I_g + I_m) = -\int \left[\kappa(R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}R) + \tfrac{1}{2}\rho v^\mu v^\nu\right] \surd\ \delta g_{\mu\nu}\ \mathrm{d}^4x - \int v_\mu\ \delta p^\mu\ \mathrm{d}^4x\ 。\tag{27.10}$$

令 $\delta g_{\mu\nu}$ 的系数等于零，于是我们只要取 $\kappa = (16\pi)^{-1}$，就能得到爱因斯坦方程（25.7）。利用（27.4），最后一项给出了

$$\begin{aligned}-\int v_\mu(p^\nu b^\mu - p^\mu b^\nu)_{,\nu}\ \mathrm{d}^4x &= \int v_{\mu,\nu}(p^\nu b^\mu - p^\mu b^\nu)\ \mathrm{d}^4x \\ &= \int (v_{\mu,\nu} - v_{\nu,\mu})p^\nu b^\mu\ \mathrm{d}^4x \\ &= \int (v_{\mu:\nu} - v_{\nu:\mu})\rho v^\nu b^\mu \surd\ \mathrm{d}^4x \\ &= \int v_{\mu:\nu}\rho v^\nu b^\mu \surd\ \mathrm{d}^4x\ ,\end{aligned}\tag{27.11}$$

最后一步推导用到了（25.2）。我们在这里令 b^μ 的系数等于零，就会得到测地线方程（25.5）。

28. 电磁场的作用量

电磁场的作用量密度的常用表达式为

$$(8\pi)^{-1}(E^2 - H^2)\ 。$$

如果我们用第 23 节中给出的狭义相对论四维记号来写出上式，那么会变成

$$-(16\pi)^{-1}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\ 。$$

这就导出了广义相对论中的不变作用量表达式：

$$I_{em} = -(16\pi)^{-1}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\surd\ \mathrm{d}^4x\ 。\tag{28.1}$$

这里我们必须考虑到 $F_{\mu\nu} = \kappa_{\mu,\nu} - \kappa_{\nu,\mu}$，所以 I_{em} 是 $g_{\mu\nu}$ 和电磁势导数的函数。

我们首先保持 κ_σ 不变，然后对 $g_{\mu\nu}$ 取变分，因此 $F_{\mu\nu}$ 是常数，而 $F^{\mu\nu}$ 不是常数。借助（26.10）和（26.9），我们有

$$\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\surd) = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\ \delta\surd + F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\surd\ \delta(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta})$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \sqrt{\ }\ \delta g_{\rho\sigma} - 2 F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \sqrt{\ } g^{\mu\rho} g^{\alpha\sigma} g^{\nu\beta}\ \delta g_{\rho\sigma} \\
&= (\tfrac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 2 F^{\rho}{}_{\nu} F^{\sigma\nu}) \sqrt{\ }\ \delta g_{\rho\sigma} \\
&= 8\pi E^{\rho\sigma} \sqrt{\ }\ \delta g_{\rho\sigma}\ , \qquad (28.2)
\end{aligned}
$$

其中，$E^{\rho\sigma}$ 是电磁场的应力-能量张量（*stress-energy tensor*），它是由下式定义的对称张量：

$$
4\pi E^{\rho\sigma} = -F^{\rho}{}_{\nu} F^{\sigma\nu} + \tfrac{1}{4} g^{\rho\sigma} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\ 。 \qquad (28.3)
$$

注意，在狭义相对论中，因为

$$
\begin{aligned}
4\pi E^{00} &= E^2 - \tfrac{1}{2}(E^2 - H^2) \\
&= \tfrac{1}{2}(E^2 + H^2)\ ,
\end{aligned}
$$

所以 E^{00} 是能量密度；又因

$$
\begin{aligned}
4\pi E^{01} &= -F^{0}{}_{2} F^{12} - F^{0}{}_{3} F^{13} \\
&= E^2 H^3 - E^3 H^2\ ,
\end{aligned}
$$

所以 E^{0n} 是给出能流变化率的坡印亭矢量（*Poynting vector*）。

又如果我们保持 $g_{\alpha\beta}$ 不变，然后对 κ_μ 取变分，借助（21.3），得到

$$
\begin{aligned}
\delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{\ }) &= 2 F^{\mu\nu} \sqrt{\ }\ \delta F_{\mu\nu} \\
&= 4 F^{\mu\nu} \sqrt{\ }\ \delta\kappa_{\mu,\nu} \\
&= 4 (F^{\mu\nu} \sqrt{\ }\ \delta\kappa_\mu)_{,\nu} - 4 (F^{\mu\nu} \sqrt{\ })_{,\nu}\ \delta\kappa_\mu \\
&= 4 (F^{\mu\nu} \sqrt{\ }\ \delta\kappa_\mu)_{,\nu} - 4 F^{\mu\nu}{}_{:\nu} \sqrt{\ }\ \delta\kappa_\mu\ 。 \qquad (28.4)
\end{aligned}
$$

最后，将（28.2）与（28.4）相加，再除以 -16π，于是我们得到了全变分

$$
\delta I_{em} = \int \left[-\tfrac{1}{2} E^{\mu\nu}\ \delta g_{\mu\nu} + (4\pi)^{-1} F^{\mu\nu}{}_{:\nu}\ \delta\kappa_\mu \right] \sqrt{\ }\ \mathrm{d}^4 x\ 。 \qquad (28.5)
$$

29.　带电物质的作用量

上一节我们考虑了没有电荷存在时的电磁场。如果有电荷存在，那么还需要再往作用量中添加一项。对于电荷为 e 的单粒子而言，额外的作用量为

$$
-e \int \kappa_\mu\ \mathrm{d}x^\mu = -e \int \kappa_\mu v^\mu\ \mathrm{d}s\ , \qquad (29.1)
$$

上式沿世界线作积分。

因为载有电荷的点粒子会在电场中产生一个奇点，所以我们在处理它时会遇到一些困难。于是我们转而讨论带电物质连续分布（*continuous distribution of charged matter*），以此来回避这些困难。我们将用第 27 节的技术来处理这种物质，并假设各物质元均带有电荷。

我们已在运动学讨论中用逆变矢量密度 p^μ 确定了物质密度与物质流，所以现在我们必须要引入逆变矢量密度 $\mathscr{J}^\mu$ 来确定电荷密度与电流。这两个矢量限制在同一方向。当我们作一位移时，对应于（27.4），我们有

$$\delta\mathscr{J}^\mu = (\mathscr{J}^\nu b^\mu - \mathscr{J}^\mu b^\nu)_{,\nu} \ , \tag{29.2}$$

这里的 b^μ 与（27.4）中的相同。

现在，对于带电物质连续分布而言，带电粒子的作用量表达式（29.1）变成了

$$I_q = -\int \mathscr{J}^0 \kappa_\mu v^\mu \ \mathrm{d}x^1 \ \mathrm{d}x^2 \ \mathrm{d}x^3 \ \mathrm{d}s \ ,$$

其对应于（27.6）。

当我们引入度规时，对应于（27.7），我们令

$$\mathscr{J}^\mu = \sigma v^\mu \surd \ , \tag{29.3}$$

其中，σ 是决定电荷密度的标量。对应于（27.8），作用量现在变成了

$$\begin{aligned} I_q &= -\int \sigma\kappa_\mu v^\mu \surd \ \mathrm{d}^4x \\ &= -\int \kappa_\mu \mathscr{J}^\mu \ \mathrm{d}^4x \ 。\end{aligned} \tag{29.4}$$

于是，

$$\begin{aligned} \delta I_q &= -\int \left[\mathscr{J}^\mu \ \delta\kappa_\mu + \kappa_\mu(\mathscr{J}^\nu b^\mu - \mathscr{J}^\mu b^\nu)_{,\nu}\right] \ \mathrm{d}^4x \\ &= \int \left[-\sigma v^\mu \surd \ \delta\kappa_\mu + \kappa_{\mu,\nu}(\mathscr{J}^\nu b^\mu - \mathscr{J}^\mu b^\nu)\right] \ \mathrm{d}^4x \\ &= \int \sigma(-v^\mu \ \delta\kappa_\mu + F_{\mu\nu}v^\nu b^\mu)\surd \ \mathrm{d}^4x \ 。\end{aligned} \tag{29.5}$$

我们可以从一般的作用量原理

$$\delta(I_g + I_m + I_{em} + I_q) = 0 \tag{29.6}$$

得到带电物质同时与引力场和电磁场发生相互作用的方程。于是，我们将（29.5）与（28.5）以及最后一项替换成（27.11）的（27.10）这三个表达式相加，并令变分 $\delta g_{\mu\nu}$、$\delta\kappa_\mu$、b^μ 前的各系数等于零。

$\sqrt{\ }\delta g_{\mu\nu}$ 的系数乘以 -16π 后，给出

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + 8\pi\rho v^\mu v^\nu + 8\pi E^{\mu\nu} = 0 \ 。 \tag{29.7}$$

这便是爱因斯坦方程（24.6），其由两部分组成：一部分是来自物质的能量-动量张量，另一部分则是来自电磁场的应力-能量张量。

$\sqrt{\ }\delta\kappa_\mu$ 的系数给出

$$-\sigma v^\mu + (4\pi)^{-1}F^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 0 \ 。$$

由（29.3）可以看出，σv^μ 是电荷电流矢量 J^μ，故得

$$F^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 4\pi J^\mu \ 。 \tag{29.8}$$

这便是有电荷存在时的麦克斯韦方程（23.13）。

最后，$\sqrt{\ }b^\mu$ 的系数给出

$$\rho v_{\mu:\nu}v^\nu + \sigma F_{\mu\nu}v^\nu = 0$$

或

$$\rho v_{\mu:\nu}v^\nu + F_{\mu\nu}J^\nu = 0 \ 。 \tag{29.9}$$

这里的第二项给出了洛伦兹力，正是它使得物质元的轨线（*trajectory*）偏离了测地线。

方程（29.9）可由（29.7）与（29.8）推导而来。取（29.7）的协变散度，并利用毕安基关系式，我们得到了

$$(\rho v^\mu v^\nu + E^{\mu\nu})_{:\nu} = 0 \ 。 \tag{29.10}$$

现在，由（28.3）可得

$$\begin{aligned} 4\pi E^{\mu\nu}{}_{:\nu} &= -F^{\mu\alpha}F^\nu{}_{\alpha:\nu} - F^{\mu\alpha}{}_{:\nu}F^\nu{}_\alpha + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta:\nu} \\ &= -F^{\mu\alpha}F^\nu{}_{\alpha:\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\rho}F^{\nu\sigma}(F_{\rho\sigma:\nu} - F_{\rho\nu:\sigma} - F_{\nu\sigma:\rho}) \\ &= 4\pi F^{\mu\alpha}J_\alpha \ , \end{aligned}$$

上面的推导用到了（23.12）和（29.8）。因此，（29.10）变成了

$$v^\mu(\rho v^\nu)_{:\nu} + \rho v^\nu v^\mu{}_{:\nu} + F^{\mu\alpha}J_\alpha = 0 \ 。 \tag{29.11}$$

乘以 v_μ，并利用（25.2），如果再使用条件 $J_\alpha = \sigma v_\alpha$（寓示着 J_α 与 v_α 限制在同一方向），就会得到

$$(\rho v^\nu)_{:\nu} = -F^{\mu\alpha}v_\mu J_\alpha = 0 \ 。$$

因此，（29.11）的第一项等于零，而剩下的便是（29.9）。

上述推导意味着，由作用量原理（29.6）得到的几个方程不是全部独立的。出现这种情况有它的一般原因，我们将在第 30 节中予以说明。

30. 综合作用量原理

我们可以推广第 29 节中的方法，使其适用于与任何其他场（这些其他场之间也有相互作用）发生相互作用的引力场。存在一个综合作用量原理（*comprehensive action principle*）：

$$\delta(I_g + I') = 0 \ , \tag{30.1}$$

其中，I_g 是先前提到过的引力作用量；而 I' 则是所有其他场的作用量项之和，且每种场各贡献一项。使用作用量原理的最大优点是很容易就能得到任何存在相互作用的场的正确方程。我们只须求出各有关场的作用量，并把它们加在一起，然后代入到（30.1）中即可。

我们有

$$I_g = \int \mathscr{L} \ \mathrm{d}^4 x \ ,$$

这里的 $\mathscr{L}$ 等于第 26 节中的 $\mathscr{L}$ 乘以 $(16\pi)^{-1}$。于是，得

$$\begin{aligned}\delta I_g &= \int \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} \delta g_{\alpha\beta,\nu} \right) \ \mathrm{d}^4 x \\ &= \int \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta}} - \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} \right)_{,\nu} \right] \ \delta g_{\alpha\beta} \ \mathrm{d}^4 x \ 。\end{aligned}$$

第 26 节中关于（26.11）的推导表明

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta}} - \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} \right)_{,\nu} = -(16\pi)^{-1} (R^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta} R) \surd \ 。 \tag{30.2}$$

令 ϕ_n（$n = 1, 2, 3, \cdots$）表示其他场量。假定其中的每一个量都是张量的一个分量，不过我们在这里就不去具体说明其精确的张量特征了。I' 的形式为标量密度的积分

$$I' = \int \mathscr{L}' \ \mathrm{d}^4 x \ ,$$

这里的 $\mathscr{L}'$ 是 ϕ_n 及其一阶导数 $\phi_{n,\mu}$ 的函数，也可能还是更高阶导数的函数。

现在，由于任何包含 δ（场量的导数）的项都可以通过分部积分变换成下式所包含的项，因而作用量的变分导出了具有下面这种形式的结果：

$$\delta(I_g + I') = \int (p^{\mu\nu} \ \delta g_{\mu\nu} + \sum_n \chi^n \ \delta\phi_n) \surd \ \mathrm{d}^4 x \ , \tag{30.3}$$

其中 $p^{\mu\nu} = p^{\nu\mu}$。于是，变分原理（30.1）导出了场方程

$$p^{\mu\nu} = 0 \ , \tag{30.4}$$

$$\chi^n = 0 \text{ 。} \tag{30.5}$$

$p^{\mu\nu}$ 将由来自 I_g 的项（30.2）以及来自 $\mathscr{L}'$ 的项（比方说 $N^{\mu\nu}$）组成。当然，我们还有 $N^{\mu\nu} = N^{\nu\mu}$。$\mathscr{L}'$ 通常不包含 $g_{\mu\nu}$ 的导数，因而

$$N^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial g_{\mu\nu}} \text{ 。} \tag{30.6}$$

现在，方程（30.4）变成了

$$R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} R - 16\pi N^{\mu\nu} = 0 \text{ 。}$$

这正是爱因斯坦方程（24.6），其中

$$Y^{\mu\nu} = -2N^{\mu\nu} \text{ 。} \tag{30.7}$$

这里我们看到，每种场是如何各贡献一项到爱因斯坦方程右边的。根据（30.6），这些项取决于各对应场的作用量包含 $g_{\mu\nu}$ 的方式。

为了一致起见，我们必须要求 $N^{\mu\nu}$ 具有这样一条性质：$N^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 0$。这条性质可以相当一般地从下述条件得出：在保持界面不变的坐标变换下，I' 是不变量。我们令坐标作一个微小变化，例如 $x^{\mu'} = x^\mu + b^\mu$，这里的 b^μ 很小且为 x 的函数，并计算到 b^μ 的一阶量。$g_{\mu\nu}$ 的变换法则遵循（3.7），并且我们用带有撇号的指标来表明是新张量，

$$g_{\mu\nu}(x) = x^{\alpha'}{}_{,\mu}\, x^{\beta'}{}_{,\nu}\, g_{\alpha'\beta'}(x') \text{ 。} \tag{30.8}$$

令 $\delta g_{\alpha\beta}$ 表示 $g_{\alpha\beta}$ 的一阶变化量，注意，它并不表示 $g_{\alpha\beta}$ 在某个特定场点处的一阶变化量，而是关于 $g_{\alpha\beta}$ 所在参考坐标系的若干确定值。所以

$$\begin{aligned} g_{\alpha'\beta'}(x') &= g_{\alpha\beta}(x') + \delta g_{\alpha\beta} \\ &= g_{\alpha\beta}(x) + g_{\alpha\beta,\sigma} b^\sigma + \delta g_{\alpha\beta} \text{ 。} \end{aligned}$$

我们有

$$x^{\alpha'}{}_{,\mu} = (x^\alpha + b^\alpha)_{,\mu} = g^\alpha{}_\mu + b^\alpha{}_{,\mu} \text{ 。}$$

于是，（30.8）给出

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &= (g^\alpha{}_\mu + b^\alpha{}_{,\mu})(g^\beta{}_\nu + b^\beta{}_{,\nu})[g_{\alpha\beta}(x) + g_{\alpha\beta,\sigma} b^\sigma + \delta g_{\alpha\beta}] \\ &= g_{\mu\nu}(x) + g_{\mu\nu,\sigma} b^\sigma + \delta g_{\mu\nu} + g_{\mu\beta} b^\beta{}_{,\nu} + g_{\alpha\nu} b^\alpha{}_{,\mu} \text{ ，} \end{aligned}$$

所以

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha} b^\alpha{}_{,\nu} - g_{\nu\alpha} b^\alpha{}_{,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma} b^\sigma \text{ 。}$$

现在我们来确定一下 I' 的变分，假设此时 $g_{\mu\nu}$ 按照这种方式改变，且其他场变量在坐标为 $x^{\mu'}$ 的点处的值与它原先在 x^{μ} 处的值相同。如果我们采用的是（30.6），那么由（21.4）表示的定理可知，I' 的变分为

$$\begin{aligned}
\delta I' &= \int N^{\mu\nu}\ \delta g_{\mu\nu}\surd\ \mathrm{d}^4x \\
&= \int N^{\mu\nu}(-g_{\mu\alpha}b^{\alpha}{}_{,\nu} - g_{\nu\alpha}b^{\alpha}{}_{,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}b^{\sigma})\surd\ \mathrm{d}^4x \\
&= \int \left[2(N_{\alpha}{}^{\nu}\surd)_{,\nu} - g_{\mu\nu,\alpha}N^{\mu\nu}\surd\right] b^{\alpha}\ \mathrm{d}^4x \\
&= 2\int N_{\alpha}{}^{\nu}{}_{:\nu}b^{\alpha}\surd\ \mathrm{d}^4x\ ,
\end{aligned}$$

上式对任何二指标对称张量都成立。I' 的不变性要求它在这种变分下对所有的 b^{α} 都保持不变。因此，$N_{\alpha}{}^{\nu}{}_{:\nu} = 0$。

由这一关系可知，场方程（30.4）、（30.5）并非是独立的。

31.　引力场的赝能动张量

量 $t_{\mu}{}^{\nu}$ 定义为

$$t_{\mu}{}^{\nu}\surd = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} g_{\alpha\beta,\mu} - g_{\mu}{}^{\nu}\mathscr{L}\ , \tag{31.1}$$

那么我们有

$$(t_{\mu}{}^{\nu}\surd)_{,\nu} = \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}}\right)_{,\nu} g_{\alpha\beta,\mu} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} g_{\alpha\beta,\mu\nu} - \mathscr{L}_{,\mu}\ 。$$

现在

$$\mathscr{L}_{,\mu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta}} g_{\alpha\beta,\mu} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} g_{\alpha\beta,\nu\mu}\ ,$$

所以，由（30.2）可得，

$$\begin{aligned}
(t_{\mu}{}^{\nu}\surd)_{,\nu} &= \left[\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}}\right)_{,\nu} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta}}\right] g_{\alpha\beta,\mu} \\
&= (16\pi)^{-1}(R^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}R)g_{\alpha\beta,\mu}\surd\ 。
\end{aligned}$$

借助场方程（24.6），我们现在得到

$$(t_{\mu}{}^{\nu}\surd)_{,\nu} = -\tfrac{1}{2}Y^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\mu}\surd\ ,$$

所以，由（21.4）以及 $Y_{\mu}{}^{\nu}{}_{:\nu} = 0$，我们得到了

$$\left[(t_{\mu}{}^{\nu} + Y_{\mu}{}^{\nu})\surd\right]_{,\nu} = 0\ 。 \tag{31.2}$$

将这里的守恒密度 $({t_\mu}^\nu + {Y_\mu}^\nu)\sqrt{}$ 当作能量和动量的密度是一件很自然的事，我们由此得到了一条守恒定律。因为我们已将 ${Y_\mu}^\nu$ 当成是引力场以外的其他场的能量和动量，所以 ${t_\mu}^\nu$ 显然是引力场的能量和动量。但是请注意，${t_\mu}^\nu$ 不是一个张量。${t_\mu}^\nu$ 的定义式（31.1）可以写成

$$
{t_\mu}^\nu = \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} g_{\alpha\beta,\mu} - {g_\mu}^\nu L \ , \tag{31.3}
$$

然而 L 并不是一个标量，这是因为我们必须将标量 R（最初用它得到引力作用量）进行变换，以便消去其中的二阶导数。因此，${t_\mu}^\nu$ 不可能是一个张量。我们把 ${t_\mu}^\nu$ 称为**赝张量**（pseudo-tensor，数译**伪张量**）。

我们不可能得到同时满足下列两个条件的引力场能量表达式：(i) 当我们把引力场能量与其他形式的能量相加时，总能量守恒；(ii) 某一时刻、某一确定（三维）区域内的能量与坐标系无关。因此，一般来说，引力能不可能是局域的。我们只好利用满足条件 (i) 但不满足条件 (ii) 的赝张量。这个赝张量给出了有关引力能的近似信息，这些信息在某些特殊情形下会比较准确。

我们可以构造积分

$$
\int ({t_\mu}^0 + {Y_\mu}^0)\sqrt{}\ \mathrm{d}x^1\ \mathrm{d}x^2\ \mathrm{d}x^3 \ , \tag{31.4}
$$

积分区域遍及一个大的三维体积，且该体积包含了某个处于某一时刻的物理系统。当体积趋于无穷大时，只要 (a) 上述积分收敛，(b) 流过大体积表面的通量趋于零，我们就可以假定此积分会给出总能量和总动量。其次，方程（31.2）表明，某一时刻 $x^0 = a$ 时的积分（31.4）的值就等于另一时刻 $x^0 = b$ 时的值。此外，因为我们即使不改变 $x^0 = a$ 时刻的坐标，也能改变 $x^0 = b$ 时刻的坐标，所以该积分必定与坐标系无关。于是，我们得到了总能量和总动量的显式，并且这两者都是守恒的。

总能量和总动量守恒所需要的两个条件 (a) 和 (b) 往往不适用于实际情形。如果空间在某一确定的四维管状区域以外是静态的，那么这两个条件可以适用。这种情形是有可能的：假如我们有某些质量从某一时刻开始运动，那么此运动会产生一个以光速向外传播的扰动。但是就通常的行星系统而言，其运动从无限遥远的过去开始，并将一直进行下去，因此这两个条件不再适用。在讨论引力波的能量时，必须采取一种特殊的处理方法，我们将在第 33 节中给出。

32. 赝张量的显式

${t_\mu}^\nu$ 的定义式（31.1）可以写成下面这种形式：

$$
{t_\mu}^\nu \sqrt{} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_{n,\nu}} q_{n,\mu} - {g_\mu}^\nu \mathscr{L} \ , \tag{32.1}
$$

其中 q_n（$n = 1, 2, \cdots, 10$）为十个 $g_{\mu\nu}$，这意味着需要对所有的 n 进行求和。我们同样可以把它写成

$$t_\mu{}^\nu\sqrt{} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial Q_{m,\nu}} Q_{m,\mu} - g_\mu{}^\nu \mathscr{L} \ , \tag{32.2}$$

其中 Q_m 是 q_n 的任意十个独立函数。接下来证明上式，我们注意到

$$Q_{m,\sigma} = \frac{\partial Q_m}{\partial q_n} q_{n,\sigma} \ ,$$

因此

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_{n,\nu}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial Q_{m,\sigma}} \frac{\partial Q_{m,\sigma}}{\partial q_{n,\nu}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial Q_{m,\sigma}} \frac{\partial Q_m}{\partial q_n} g_\sigma^\nu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial Q_{m,\nu}} \frac{\partial Q_m}{\partial q_n} \ ,$$

于是

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_{n,\nu}} q_{n,\mu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial Q_{m,\nu}} \frac{\partial Q_m}{\partial q_n} q_{n,\mu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial Q_{m,\nu}} Q_{m,\mu} \ 。$$

从而证明了（32.1）与（32.2）相等。

为了推导出 $t_\mu{}^\nu$ 的显式，我们选用（32.2），并将 Q_m 取为量 $g^{\mu\nu}\sqrt{}$，因为这样处理起来会比较方便。我们现在可以使用公式（26.7），它给出了（引入系数 16π）

$$16\pi \ \delta\mathscr{L} = (\Gamma^\nu_{\alpha\beta} - g_\beta{}^\nu \Gamma^\sigma_{\alpha\sigma}) \ \delta(g^{\alpha\beta}\sqrt{})_{,\nu} + (\text{若干系数}) \ \delta(g^{\mu\nu}\sqrt{}) \ ,$$

因此，

$$16\pi t_\mu{}^\nu\sqrt{} = (\Gamma^\nu_{\alpha\beta} - g_\beta{}^\nu \Gamma^\sigma_{\alpha\sigma})(g^{\alpha\beta}\sqrt{})_{,\mu} - g_\mu{}^\nu \mathscr{L} \ 。 \tag{32.3}$$

33. 引力波

我们考虑一个弱引力场所在的虚空区域，$g_{\mu\nu}$ 在此处近似为常数。这时，我们有方程（16.4）或

$$g^{\mu\nu}(g_{\mu\nu,\rho\sigma} - g_{\mu\rho,\nu\sigma} - g_{\mu\sigma,\nu\rho} + g_{\rho\sigma,\mu\nu}) = 0 \ 。 \tag{33.1}$$

我们采用谐和坐标。将条件（22.2）中的指标 λ 降低后，得到

$$g^{\mu\nu}(g_{\rho\mu,\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu,\rho}) = 0 \ 。 \tag{33.2}$$

将此方程对 x^σ 作微分，并忽略二阶项，结果为

$$g^{\mu\nu}(g_{\mu\rho,\nu\sigma} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu,\rho\sigma}) = 0 \ 。 \tag{33.3}$$

互换 ρ 和 σ，得

$$g^{\mu\nu}(g_{\mu\sigma,\nu\rho} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu,\rho\sigma}) = 0 \ 。 \tag{33.4}$$

把（33.1）、（33.3）、（33.4）相加，我们得

$$g^{\mu\nu}g_{\rho\sigma,\mu\nu}=0\ 。$$

因而每个 $g_{\rho\sigma}$ 都满足达朗贝尔方程，其解则为以光速传播的引力波（gravitational wave）。

我们来探讨一下这些波的能量。由于赝张量不是真正的张量，因而我们一般得不到与坐标系无关的明确结果。但是我们能在某种特殊情形下得到明确结果，即这些波沿同一方向运动。

如果引力波沿 x^3 方向运动，那么我们所选取的坐标系要能够使 $g_{\mu\nu}$ 仅为变量 x^0-x^3 的函数。我们来考虑更一般的情形：$g_{\mu\nu}$ 此时全都是单变量 $l_\sigma x^\sigma$ 的函数，这里的 l_σ 是满足 $g^{\rho\sigma}l_\rho l_\sigma=0$ 的常数（其中已略去 $g^{\rho\sigma}$ 的变量部分）。继而我们有

$$g_{\mu\nu,\sigma}=u_{\mu\nu}l_\sigma\ ，\tag{33.5}$$

这里的 $u_{\mu\nu}$ 是函数 $g_{\mu\nu}$ 对 $l_\sigma x^\sigma$ 的导数。当然，谐和条件（33.2）给出

$$g^{\mu\nu}u_{\mu\rho}l_\nu=\tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}u_{\mu\nu}l_\rho=\tfrac{1}{2}ul_\rho\ ，$$

其中 $u=u^\mu_\mu$。我们可以把上式写成

$$u^\nu_\rho l_\nu=\tfrac{1}{2}ul_\rho\ ，\tag{33.6}$$

或是写成

$$(u^{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}u)l_\nu=0\ 。\tag{33.7}$$

利用（33.5），我们有

$$\Gamma^\rho_{\mu\sigma}=\tfrac{1}{2}(u^\rho_\mu l_\sigma+u^\rho_\sigma l_\mu-u_{\mu\sigma}l^\rho)\ 。$$

谐和坐标下的 L 表达式（26.3）约化为

$$\begin{aligned}L&=-g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho}\\&=-\tfrac{1}{4}g^{\mu\nu}(u^\rho_\mu l_\sigma+u^\rho_\sigma l_\mu-u_{\mu\sigma}l^\rho)(u^\sigma_\nu l_\rho+u^\sigma_\rho l_\nu-u_{\nu\rho}l^\sigma)\ 。\end{aligned}$$

上式右边在相乘之后会给出九项，但我们不难看出，由（33.6）以及 $l_\sigma l^\sigma=0$ 可知，这九项中的每一项都等于零。于是，作用量密度等于零。电磁场有一个对应的结果：当波只沿一个方向运动时，作用量密度也等于零。

我们现在必须求出赝张量（32.3）。我们有

$$g^{\alpha\beta}{}_{,\mu}=-g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}g_{\rho\sigma,\mu}=-u^{\alpha\beta}l_\mu\ ，$$

$$\sqrt{\ }_{,\mu} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\ } g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\ } u l_\mu \ , \tag{33.8}$$

故而

$$(g^{\alpha\beta}\sqrt{\ })_{,\mu} = -(u^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta} u)\sqrt{\ } l_\mu \ 。$$

因此，由（33.8）和（33.7）可知，

$$\Gamma^\sigma_{\alpha\sigma}(g^{\alpha\beta}\sqrt{\ })_{,\mu} = \sqrt{\ }_{,\alpha}(-u^{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta} u) l_\mu = 0 \ ,$$

于是，剩下了

$$\begin{aligned} 16\pi t_\mu{}^\nu &= -\Gamma^\nu_{\alpha\beta}(u^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta} u) l_\mu \\ &= -\tfrac{1}{2}(u^\nu_\alpha l_\beta + u^\nu_\beta l_\alpha - u_{\alpha\beta} l^\nu)(u^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta} u) l_\mu \\ &= \tfrac{1}{2}(u_{\alpha\beta} u^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} u^2) l_\mu l^\nu \ 。 \end{aligned} \tag{33.9}$$

我们终于得到了 $t_\mu{}^\nu$ 的结果，它看上去像一个张量。这表明 $t_\mu{}^\nu$ 像张量一样变换，前提是：只要这些变换保持“场仅由沿 l_σ 方向运动的波组成”这一特征，而这会使得 $g_{\mu\nu}$ 仍为单变量 $l_\sigma x^\sigma$ 的函数。这些变换在于必须引入沿 l_σ 方向运动的坐标波，而这些变换的形式为

$$x^{\mu'} = x^\mu + b^\mu \ ,$$

其中，b^μ 仅为 $l_\sigma x^\sigma$ 的函数。在“波仅沿一个方向运动”这一限制下，引力能可以是局域的。

34. 引力波的偏振

为了理解（33.9）的物理意义，我们回过头来考虑“波沿 x^3 方向运动”这一情形（故而 $l_0 = 1$，$l_1 = l_2 = 0$，$l_3 = -1$），并且采用近似于狭义相对论的坐标。谐和条件（33.6）此时给出了

$$\begin{aligned} u_{00} + u_{03} &= \tfrac{1}{2} u \ , \\ u_{10} + u_{13} &= 0 \ , \\ u_{20} + u_{23} &= 0 \ , \\ u_{30} + u_{33} &= -\tfrac{1}{2} u \ 。 \end{aligned}$$

于是

$$u_{00} - u_{33} = u = u_{00} - u_{11} - u_{22} - u_{33} \ ,$$

故有

$$u_{11} + u_{22} = 0 \text{ 。} \tag{34.1}$$

此外，还有

$$2u_{03} = -(u_{00} + u_{33}) \text{ 。}$$

我们现在得到

$$\begin{aligned} u_{\alpha\beta}u^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}u^2 &= {u_{00}}^2 + {u_{11}}^2 + {u_{22}}^2 + {u_{33}}^2 - 2{u_{01}}^2 - 2{u_{02}}^2 - 2{u_{03}}^2 \\ &\quad + 2{u_{12}}^2 + 2{u_{23}}^2 + 2{u_{31}}^2 - \tfrac{1}{2}(u_{00} - u_{33})^2 \\ &= {u_{11}}^2 + {u_{22}}^2 + 2{u_{12}}^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(u_{11} - u_{22})^2 + 2{u_{12}}^2 \text{ ，} \end{aligned}$$

上面推导用到了（34.1）。于是，我们得到

$$16\pi {t_0}^0 = \tfrac{1}{4}(u_{11} - u_{22})^2 + {u_{12}}^2 \tag{34.2}$$

以及

$${t_0}^3 = {t_0}^0 \text{ 。}$$

我们看到，能量密度是正定的，能量以光速沿 x^3 方向流动。

为了讨论引力波的偏振，我们引入平面 x^1x^2 内的无穷小转动算符 R。将其作用于任意矢量 A_1 和 A_2 上，它的效果为

$$RA_1 = A_2 \text{ ，} \qquad RA_2 = -A_1 \text{ 。}$$

于是，

$$R^2A_1 = -A_1 \text{ ，}$$

因此，当把 iR 作用于一个矢量时，其具有本征值 ± 1。

把 R 作用于 $u_{\alpha\beta}$ 的话，就会得到下列结果：

$$\begin{aligned} Ru_{11} &= u_{21} + u_{12} = 2u_{12} \text{ ，} \\ Ru_{12} &= u_{22} - u_{11} \text{ ，} \\ Ru_{22} &= -u_{12} - u_{21} = -2u_{12} \text{ 。} \end{aligned}$$

故而

$$\begin{aligned} R(u_{11} + u_{22}) &= 0 \text{ ；} \\ R(u_{11} - u_{22}) &= 4u_{12} \text{ ，} \\ R^2(u_{11} - u_{22}) &= -4(u_{11} - u_{22}) \text{ 。} \end{aligned}$$

因此，$u_{11} + u_{22}$ 是一个不变量，而当 iR 作用于 $u_{11} - u_{22}$ 或 u_{12} 时，其本征值为 ± 2。所以，$u_{\alpha\beta}$ 中对能量（34.2）有贡献的分量对应于自旋 2。

35. 宇宙项

Einstein 曾考虑过把虚空的场方程推广为

$$R_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu} \ , \tag{35.1}$$

其中 λ 为常数。这是一个张量方程，所以允许把它当作自然界中的一条规律。

没有这一项时，我们得到的爱因斯坦场方程与太阳系的观测结果非常一致；因此，如果我们引入这一项的话，就必须使 λ 非常小，小到不足以扰乱上述一致性。由于 $R_{\mu\nu}$ 包含 $g_{\mu\nu}$ 的二阶导数，因此 λ 必定具有量纲 (距离)$^{-2}$。为了使 λ 很小，那么就必须让距离非常大。它是一个宇宙学距离，数量级为宇宙半径。

就宇宙学理论而言，这个附加项很重要，但是对于近距离物体的物理学来说，它的作用可以忽略不计。假如要在场论中考虑这一项，那么我们只须额外添加下面这一项到拉格朗日量中即可：

$$I_c = c \int \sqrt{\ } \ \mathrm{d}^4 x \ ,$$

其中，c 为一个适当的常数。

由（26.10），我们有

$$\delta I_c = c \int \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} \ \delta g_{\mu\nu} \sqrt{\ } \ \mathrm{d}^4 x \ 。$$

于是，作用量原理

$$\delta(I_g + I_c) = 0$$

给出

$$16\pi(R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} R) + \tfrac{1}{2} c g^{\mu\nu} = 0 \ 。 \tag{35.2}$$

方程（35.1）给出

$$R = 4\lambda \ , \tag{35.3}$$

因此[15]

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\lambda g_{\mu\nu} \ 。$$

只要我们令

$$c = 32\pi\lambda \ ,$$

上式即与（35.2) 一致。

当引力场与其他场发生相互作用时，我们只须添加一项 I_c 到作用量中，就会得到修正后的、包含爱因斯坦宇宙项的场方程。

[15]译者注：原文误为 $R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\lambda g_{\mu\nu}$。

索引

（因为中文索引宏包不好用，所以将在纸质版中手动加入页码，网络版暂略）

H

J

K

L

M

N

P

R

S

T

W

X