Arquitetura e organização de computadores.

1 - Aritmética binária

1.1 - Exercícios resolvidos:

1) a) $72_{10} = 64 + 8 = 2^6 + 2^3 = 1001000_2$

$72_{10} = \underbrace{0100}_{4}\underbrace{1000}_{8} = 48_H$

b) $259_{10} = 256 + 2 + 1 = 2^8 + 2^1 + 2^0 = 100000011_2$

$259_{10} = \underbrace{0001}_{1}\underbrace{0000}_{0}\underbrace{0011}_{3} = 103_H$

c) $1110_2 = 2^3 + 2^2 + 2^1 = 8 + 4 + 2 = 14_{10}$

$1110_2 = \underbrace{1110}_{E} = E_H$

d) $100000,11_2 = 2^5 + 2^{-1} + 2^{-2} = 32,75_{10}$

$100000,11_2 = \underbrace{0010}_{2}\underbrace{0000}_{0},\underbrace{1100}_{12} = 20,C_H$

e) $1BEEF_{16} = \underbrace{0001}_{1}\underbrace{1011}_{B}\underbrace{1110}_{E}\underbrace{1110}_{E}\underbrace{1111}_{F} = 11011111011101111_2$

2) a)

$$\begin{array}{r} 101110 \\ +\ 100101 \\ \hline 1010011 \end{array}$$

$101110 + 100101 = 1010011$

b)

$$\begin{array}{r} 1110010 \\ -\ 1101101 \\ \hline 0000101 \end{array}$$

$1110010 - 1101101 = 101$

c)

$$\begin{array}{r} 1001011 \\ \times\ 11001 \\ \hline 1001011 \\ 1001011\cdot\cdot\cdot \\ +\ 1001011\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \hline 11101010011 \end{array}$$

$1001011 \times 11001 = 11101010011$

d)

$$\begin{array}{l|l} 1101000 & 100 \\ \cline{2-2} -100 & 11010 \\ \hline \ \ 101 & \\ \ -100 & \\ \hline \ \ \ \ 100 & \\ \ \ -100 & \\ \hline \ \ \ \ \ \ 00 & \end{array}$$

$1101000 : 100 = 11010$

3) a) $12 = 8+4 = 1100_2$ • Em SG, $12 = 001100_2$

• Em complemento para 2, a representação de um número positivo é a mesma do número sem sinal, logo $12 = 001100_2$

b) A grandeza de -12 é $12 = 1100_2$

• Em SG, $-12 = 101100_2$

• Em complemento para 2, $-12 = 110100_2$

c) A grandeza de -1 é 1.

• Em SG, $-1 = 100001_2$

• Em complemento para 2, $-1 = 111111_2$

d) A grandeza de $+32$ é $32 = 2^5 = 100000_2$

• Em SG, o valor 32 não é representável no formato pretendido (6 bits).

• Em complemento para 2, o valor 32 também não é representável no formato pretendido. Com 6 bits, o maior número representável é $2^{6-1} - 1 = 31$.

4) a) $C1_{16} = \underbrace{1100}_{C}\underbrace{0001}_{1} = 11000001_2$ $A7_{16} = \underbrace{1010}_{A}\underbrace{0111}_{7} = 10100111_2$

i) $C1_{16} = 11000001_2 = 2^7 + 2^6 + 2^0 = 128 + 64 + 1 = 193_{10}$

$A7_{16} = 10100111_2 = 2^7 + 2^5 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 128 + 32 + 4 + 2 + 1 = 167_{10}$

ii) $C1_{16} = \underline{1}1000001_2 = -(2^6 + 2^0) = -(64+1) = -65_{10}$

$A7_{16} = \underline{1}0100111_2 = -(2^5 + 2^2 + 2^1 + 2^0) = -(32+4+2+1) = -39_{10}$

iii) $C1_{16} = 11000001_2 \xrightarrow{\text{compl. 2}} \underline{1}0111111_2 = -(2^5+2^4+2^3+2^2+2^1+2^0) = -63_{10}$

$A7_{16} = 10100111_2 \xrightarrow{\text{compl. 2}} \underline{1}1011001_2 = -(2^6+2^4+2^3+2^0) = -89_{10}$

b) Com 8 bits conseguem-se escrever $2^8 = 256$ números, sendo que uma metade são números negativos e a outra metade são números positivos, incluindo o 0, daí a gama de valores representáveis [-128 ; +127].

c) $C1_{16} + A7_{16} = 11000001 + 10100111$

$$\begin{array}{r} 11000001 \\ +\,10100111 \\ \hline \cancel{1}01101000 \end{array}$$

O resultado encontrado está incorrecto, pois a adição de dois números negativos não pode resultar num número positivo. Então, ocorre overflow. Assim, a soma não é representável com 8 bits.

5)
$$\begin{array}{r} 11001 \\ +11101 \\ \hline \cancel{1}10110 \end{array}$$

$A+B=10110_2$

Como se trata de uma adição em complemento para 2, o "carry" que ocorreu ao somar os 2 bits mais significativos deve ser ignorado, logo $A+B=10110$, e não há "overflow", pelo que o resultado é válido pois da adição de dois números negativos resulta um número negativo.

6) a) $M=101100_2=\underbrace{0010}_{2}\underbrace{1100}_{C}=2C_H$

$N=110010_2 \xrightarrow{compl.2} 101110_{SG}=-(2^3+2^2+2^1)=-14_{10}$

b) $|M|=01100=2^3+2^2=8+4=12_{10}$

$|N|=01110=2^3+2^2+2=8+4+2=14_{10}$

R: N possui maior grandeza.

c) $M=101100_{SG} \xrightarrow{compl.2} 110100_2$ $\quad N=110010_2$

$$\begin{array}{r} 110100 \\ +110010 \\ \hline \cancel{1}100110 \end{array}$$

Não há overflow, porque os operandos são negativos e o resultado também é negativo.

7) a) $X=\underbrace{1}_{S}\underbrace{0111100}_{G}$ $\quad Y=\underbrace{1}_{S}\underbrace{0100110}_{G}$

sinais iguais e ambos negativos → resultado final negativo

$$\begin{array}{r} 0111100 \\ +0100110 \\ \hline 1100010 \end{array}$$

$X+Y=\underbrace{1}_{S}\underbrace{1100010}_{G}$ R: X+Y é representável em 8 bits.

b)
$$\begin{array}{r} 10111100 \\ +10100110 \\ \hline \cancel{1}01100010 \end{array}$$

A soma de dois números negativos resulta num número positivo, quando em 8 bits, isto é, ocorre "overflow". Assim, o número mínimo de bits a considerar deverá ser 9.

8) a) X e Y são negativos. $\quad -X=001110_2=2+2^2+2^3=14$

R: $X=-14$ e $Y=-21$ $\quad -Y=010101_2=2^2+2^4+1=21$

b) X − Y pode ser calculado pela adição do simétrico

$X-Y=X+(-Y)=000111$

$$\begin{array}{r} 110010 \\ +010101 \\ \hline \cancel{1}000111 \end{array}$$

Não há "overflow" porque os operandos têm sinais opostos.

$$\begin{array}{r} 110010 \\ +101011 \\ \hline \cancel{1}011101 \end{array}$$

Ocorre "overflow", porque os operandos têm o mesmo sinal e o resultado tem sinal oposto.

~~não é representado com 6 bits.~~

1.2 - Exercícios propostos:

9)

a) $256_{10} = 2^8 = \underbrace{1}_{1}\,\underbrace{0000}_{0}\,\underbrace{0000}_{0} = 100_H$

b) $2047_{10} = \underbrace{0111}_{7}\,\underbrace{1111}_{F}\,\underbrace{1111}_{F}{}_2 = 7FF_H$

c) $24,25_{10} = \underbrace{1}_{1}\,\underbrace{1000}_{8},\underbrace{01}_{4}{}_2 = 18,4_H$

d) $4,2_{10} = \underbrace{100}_{4},\underbrace{(0011)}_{3}{}_2 = 4,(3)_H$

e) $\underbrace{1}_{1}\,\underbrace{0000}_{0}{}_2 = 2^4 = 16_{10} = 10_H$

f) $100,001_2 = 2^2 + 2^{-3} = 4 + \frac{1}{8} = 4,125_{10} = 4,2_H$

g) $1E_{16} = 11110_2 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 14 + 16 = 30_{10}$

h) $ABCD_{16} = 10101011\,11001101_2 = 1 + 2^2 + 2^3 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{11} + 2^{13} + 2^{15} = 43\,981_{10}$

i) $AB,C_{16} = 10101011,1100_2 = 1 + 2^1 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^{-1} + 2^{-2} = 171,75_{10}$

j) $1110_{10} = \underbrace{100}_{4}\,\underbrace{0101}_{5}\,\underbrace{0110}_{6}{}_2 = 456_H$

0,25	0,5	0
0,5	1	1

0,2	0,4	0
0,4	0,8	0
0,8	1,6	1
0,6	1,2	1
0,2	0,4	0
0,4	0,8	0
		1
		1
		...

1110	0
555	1
277	1
138	0
69	1
34	0
17	1
8	0
4	0
2	0
1	

10)

a)
$$\begin{array}{r} 110101 \\ +\ 11001 \\ \hline 1001110 \end{array}$$
R: 1001110_2

b)
$$\begin{array}{r} 101,010 \\ +\ 100,111 \\ \hline 1010,001 \end{array}$$
R: $1010,001_2$

c)
$$\begin{array}{r} 101110 \\ -\ 100101 \\ \hline 001001 \end{array}$$
R: 1001_2

d)
$$\begin{array}{r} 1000010 \\ -\ 101101 \\ \hline 0010101 \end{array}$$
R: 10101_2

e)
$$\begin{array}{r} 11011101 \\ -\ 1100011 \\ \hline 01111010 \end{array}$$
R: 1111010_2

f)
$$\begin{array}{r} 11011101,00 \\ -\ 11000,11 \\ \hline 11000100,01 \end{array}$$
R: $11000100,01_2$

g)
$$\begin{array}{r} 1011 \\ \times\ 100 \\ \hline 1011\,.\,. \\ \hline 101100 \end{array}$$
R: 101100_2

11) a) $+3 = 0011_2$ $+2 = 0010_2$ $-3 = 1011_2$

b) $3+2 = 0011 + 0010 = 0101_{SG}$

$$\begin{array}{r} 011 \\ +010 \\ \hline 101 \end{array}$$

$|-3|>|2|$ $2+(-3) = 0010 + 1011 = 1001_{SG}$

$$\begin{array}{r} 010 \\ -011 \\ \hline 001 \end{array}$$

c) $14 = 01110$ ← não representável em 4 bits.
Logo, não é possível calcular esta operação em 4 bits SG.

12) Em sinal e grandeza → $[-(2^{n-1}-1), 2^{n-1}-1] = [-7, 7]$
Em complemento para 2 → $[-2^{n-1}, 2^{n-1}-1] = [-8, 7]$

13) a) Em 8 bits: $SG = [-127, 127]$ $cpl2 = [-128, 127]$

$18_{10} = 10010_2 = 00010010_{SG} = 00010010_{cpl2}$

18	2	0
9	2	1
4	2	0
2	2	0
1	2	1

b) $49_{10} = 110001_2 = 00110001_{SG} = 00110001_{cpl2}$

49	2	1
24	2	0
12	2	0
6	2	0
3	2	1
1	2	1

c) $-49_{10} = 10110001_{SG} = 11001111_{cpl2}$

d) $-3_{10} = 10000011_{SG} = 11111101_{cpl2}$

e) $-100_{10} = 1100100_2 = 11100100_{SG} = 10011100_{cpl2}$

100	2	0
50	2	0
25	2	1
12	2	0
6	2	0
3	2	1
1	2	1

f) $115_{10} = 1110011_2 = 01110011_{SG} = 01110011_{cpl2}$

115	2	1
57	2	1
28	2	0
14	2	0
7	2	1
3	2	1
1	2	1

g) $-127_{10} = 1111111_2 = 11111111_{SG} = 10000001_{cpl2}$

127	2	1
63	2	1
31	2	1
15	2	1
7	2	1
3	2	1
1	2	1

h) -128_{10} → não representável em 8 bits em SG (fora do intervalo)
$-128_{10} = 10000000_2 = 10000000_{cpl2}$

14) a) $M = 33_{16} = \overbrace{0011}^{3}\,\overbrace{0011_2}^{3} = 110011_2$ $N = 33_{10} = 100001_2$

$$\begin{array}{r} 110011 \\ +100001 \\ \hline 1010100 \end{array}$$

$M+N = 1010100_2$

33	2	1
16	2	0
8	2	0
4	2	0
2	2	0
1	2	1

b) $N - M = 110011_{cpl2} - 100001_{cpl2} =$
$= 10010_{cpl2}$

$$\begin{array}{r} 10011 \\ -00001 \\ \hline 10010 \end{array}$$

Não ocorre overflow: a diferença de números com o mesmo sinal é sempre representável.

(15) a) $P = DE_H = \overbrace{1101}^{D}\,\overbrace{1110}^{E}{}_{CPL2}$ $\quad Q = A3_H = \overbrace{1010}^{A}\,\overbrace{0011}^{3}{}_{CPL2}$

$P+Q = 10000001_{CPL2}$ → resultado correto
(não ocorre overflow)

$$
\begin{array}{r}
*\,1101\,1110 \\
+\,1010\,0011 \\
\hline
*\,1\,0000\,0001
\end{array}
$$

b) $P = 8C_H = \overbrace{1000}^{8}\,\overbrace{1100}^{C}{}_{CPL2}$ $\quad Q = D3_H = \overbrace{1101}^{D}\,\overbrace{0011}^{3}{}_{CPL2}$

$P+Q = 01011111$ → resultado errado
(Ocorre overflow (resultado c/ sinal ≠ dos operandos))

$$
\begin{array}{r}
*\,10001100 \\
+\,11010011 \\
\hline
*\,01011111
\end{array}
$$

c) $P = 8C_H = \overbrace{1000}^{8}\,\overbrace{1100}^{C}{}_{CPL2}$ $\quad Q = 74_H = \overbrace{0111}^{7}\,\overbrace{0100}^{4}{}_{CPL2}$

$P+Q = 00000000_2$ → resultado correto
(não ocorre overflow)

$$
\begin{array}{r}
*\,10001100 \\
+\,01110100 \\
\hline
*\,00000000
\end{array}
$$

(16) a) - Representação sem sinal:

$X = 11100011 = 2^0+2^1+2^5+2^6+2^7 = 1+2+32+64+128 = 227_{10}$

$Y = 01001000 = 2^3+2^6 = 8+64 = 72_{10}$

- Representação em complemento para 2:

$X = 11100011_{CPL2} = 10011101_{SG} = -(2^2+2^3+2^4+2^0) = -(4+8+16+1) = -29_{10}$

$Y = 01001000_{CPL2} = 01001000_{SG} = 2^3+2^6 = 72_{10}$

b) - Representação sem sinal:

$X+Y = 100101011$ (ocorre overflow).
← não representável em 8 bits

$$
\begin{array}{r}
11100011 \\
+\,01001000 \\
\hline
100101011
\end{array}
$$

- Representação em complemento para 2:

$X+Y = 00101011$ (não ocorre overflow)

$$
\begin{array}{r}
*\,11100011 \\
+\,01001000 \\
\hline
*\,00101011
\end{array}
$$

(17) a) $P = 1111010_2 = \overbrace{0111}^{7}\,\overbrace{1010}^{A}{}_2 = 7A_H$ $\quad Q = 0100010_2 = 2+2^5 = 34_{10}$

(não representável em 7 bits)

b) i) $P+Q = 10011100$ ← resultado errado

$$
\begin{array}{r}
1111010 \\
+\,0100010 \\
\hline
10011100
\end{array}
$$

ii) $P+Q = 0011100$ ← resultado (correto)
(não ocorre overflow).

$$
\begin{array}{r}
*\,1111010 \\
+\,0100010 \\
\hline
*\,0011100
\end{array}
$$

18 a) $A+B = 1000100_2 =$
$= 2^2 + 2^6 = 4 + 64 = 68_{10}$

$$\begin{array}{r} 0011010 \\ +\ 0101010 \\ \hline 1000100 \end{array}$$

b) $|A| = 1010_2$ $|B| = 101010_2$ Como $|B| > |A|$, A+B tem o sinal de B.

$A+B = 0100000_{SG} = 2^5 = 32_{10}$

$$\begin{array}{r} 101010 \\ -\ 001010 \\ \hline 100000 \end{array}$$

c) $A+B = 0100100_{CPL2} =$
$= 2^2 + 2^5 = 32 + 4 = 36_{10}$

$$\begin{array}{r} *1111010 \\ +\ 0101010 \\ \hline *0100100 \end{array}$$

19 a) $M = 4A_H = \overbrace{0100}^{4}\overbrace{1010}^{A}{}_2$

b) $N = A4_H = \overbrace{1010}^{A}\overbrace{0100}^{4}{}_2 = 11011100_{SG} = -(2^2+2^3+2^4+2^6) = -92_{10}$

c) $-N = 01011100_2$ $M - N = M + (-N)$

$M - N = 10100110_2$ → resultado errado (ocorre overflow)

$$\begin{array}{r} 01001010 \\ +\ 01011100 \\ \hline 10100110 \end{array}$$

$-M = 10110110_2$ $N - M = N + (-M)$

$N - M = 01011010_2$ → resultado errado (ocorre overflow)

$$\begin{array}{r} *10100100 \\ +\ 10110110 \\ \hline *01011010 \end{array}$$

20 a) Como $T > 0 \Rightarrow T = 00010001_{SG} = 1 + 2^4 = 1 + 16 = 17_{10}$

$S < 0$ $S = 11001000_{CPL2} = 10111000_{SG} = -(2^3+2^4+2^5) = -56_{10}$

b) $T = 00010001_{SG}$ $S = 10111000_{SG}$

c) Sinais diferentes, $|T| = 0010001$ $|S| = 0111000$ $|S| > |T|$ resultado tem sinal de S.

$S+T = 10100111_{SG}$ → resultado correto (não há overflow).

$$\begin{array}{r} 0111000 \\ -\ 0010001 \\ \hline 0100111 \end{array}$$

21 a) $Y = 73_{10} = \overbrace{100}^{4}\overbrace{1001}^{9}{}_2 = 49_H$ $Z = 9E_H = \overbrace{1001}^{9}\overbrace{1110}^{E}{}_2$

b) $X+Z = 01011010$ → resultado errado (ocorre overflow).

$$\begin{array}{r} *10111100 \\ +\ 10011110 \\ \hline *01011010 \end{array}$$

c) 01000011_2

$0 \rightarrow 10111100$

(22) a) $[0, 2^5-1] = [0,31]$ R: $x \in [0,31]$

b) O maior valor positivo do y dá-se quando $x=31$

$y = 31^2 - 30 \times 31 + 161 = 192$

c) $x^2 - 30x + 161 = 0 \Leftrightarrow x = 23 \vee x = 7$ $\frac{23+7}{2} = 15$

O valor mais negativo do y dá-se quando $x = 15$

$y = 15^2 - 30 \times 15 + 161 = -64$

d)

?

e) $192_{10} = 011000000_{CPL2}$ $-64 = 11000000_{CPL2}$