PROYECTO 2

INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS MATEMÁTICOS DE GESTIÓN FINANCIERA

NICOLÁS ROBAYO PARDO – 201617123

Punto 1: Considere un activo cuyo precio sigue un camino aleatorio dado por: $dS = \mu S dt + \sigma S dX$ donde dX es una variable normal con media nula y varianza dt (proceso de Wiener). Utilice un entorno computacional para simular este camino aleatorio con diferentes valores de la tendencia μ y de la desviación estándar σ, a partir de un precio inicial P_0. Usted debe realizar un programa que le permita al usuario cambiar estos parámetros y ejecutar la simulación para obtener otros posibles resultados.

Para programar la simulación del proceso de caminata aleatoria del activo usaremos Python junto con las librería Pandas, matplotlib y Numpy. Para tener a nuestra disposición estas librerías usamos los comandos:

```
#Paquetes necesarios
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import pandas as pd
rng = np.random.default_rng()   #Crea el generador de números aleatorios
```

La función que describe el camino aleatorio de un activo es

$$S(t): Comportamiento\ del\ precio\ del\ activo\ en\ t$$

$$\begin{cases} dS(t) = \mu \cdot S(t) \cdot dt + \sigma \cdot S(t) \cdot dX \\ S(0) = P_0 \end{cases}$$

$$dX: Variable\ aleatoria\ \sim N(0, dt): conocido$$

$$\sigma: La\ volatilidad, \mu: Tendencia\ (drift)$$

Con una temporalidad diaria durante un periodo de tiempo de 2 años y asumiendo que el precio de la acción se revisa cada día llegamos a la siguiente formula para calcular el valor del activo en cada periodo de tiempo:

$$dS(t) = \mu \cdot S(t) \cdot dt + \sigma \cdot S(t) \cdot dX$$

Elevamos al cuadrado

$$\left(dS(t)\right)^2 = \mu^2 \cdot S^2(t) \cdot dt^2 + 2\mu\sigma S^2 dt dW + \sigma^2 \cdot S(t)^2 \cdot (dX)^2$$

$$dW \sim N(0, dt) \rightarrow dW = \sqrt{dt} Z$$

$$(dW)^2 = dt(Z^2)$$

Y es una variable aleatoria Chi cuadrado con 1 grado de libertad.

$$Z^2 = Y \sim \mathcal{X}_1^2 \rightarrow E[X_1^2] = 1;\ Var[X_1^2] = 2 * 1 = 2$$

$$E[(dW)^2] = dtE[Y] = dt$$

$$Var[(dW)^2] = (dt)^2 Var(Y) = 2(dt)^2$$

Dado que en el limite cuando $dt \rightarrow 0$ tenemos que $dXdt \ll dt$ porque su varianza es nula con relación a dt y su cuadrado se va a 0 mucho más rápido podemos ignorar los dos primeros términos de la ecuación. El orden de magnitud del último termino es mayor a los otros dos para pequeños dt y resultamos con y domina la ecuación

$$\left(dS(t)\right)^2 = \sigma^2 \cdot S(t)^2 \cdot (dX)^2$$

Ahora sustituimos en la expansión de Taylor del lema de Ito y factorizamos en una parte aleatoria y otra determinística:

$$df \cong \frac{df}{dS}\sigma S dX + \left(\mu S \frac{df}{dS} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2} + \frac{df}{dt}\right) dt$$

Podemos resolver esta función al definir $f(t) = \ln\left(S(t)\right)$ y usando el Lema de Itô.

$$\frac{df}{dS} = \frac{1}{S}; \frac{d^2 f}{dS^2} = -\frac{1}{S^2}$$

$$df(t) = \frac{1}{S(t)} dS(t) - \frac{1}{2\left(S(t)\right)^2}\left(dS(t)\right)^2$$

$$= \frac{1}{S(t)}\left(\mu \cdot S(t)dt + \sigma \cdot S(t) dW(t)\right) - \frac{1}{2\left(S(t)\right)^2}\sigma^2 S(t)^2 dt$$

$$= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma \cdot dW(t)$$

$$f(0) = \ln(P_o)$$

La integración resulta en:

$$f(t_2) - f(t_1) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \int_{t_1}^{t_2} dW$$

$$X \sim N(0, t_2 - t_1)$$

$$f(s) = f(P_o) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\, Z$$

$$S(t) = e^Y = e^{f(P_o) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\, Z}$$

$$S \sim lognormal\left(f(P_o) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta \mathrm{t}}\right)$$

$$S(t) = P_0 e^{\sigma W_t + t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)}$$

Ahora crearemos una función que cree el camino aleatorio siguiente los siguientes pasos:

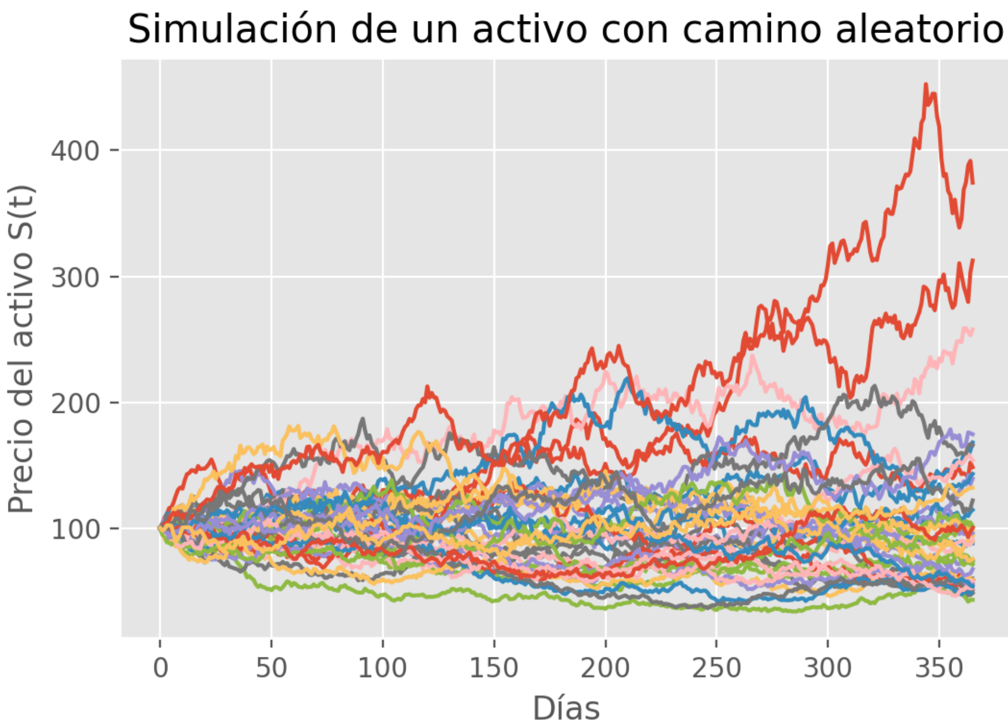
```
def simulacion(T = 1, N = 365*2, mu = 0.1, sigma = 0.01, P_inicial = 20): #Introducción parámetros del problema
    dt = float(T)/N  #Definir longitud de paso
    t = np.linspace(0, T, N)  #Crear días
    W = rng.standard_normal(size = N)    #Creación números aleatorios
    W = np.cumsum(W)*np.sqrt(dt) #Creación proceso aleatorio Wiener por pasos
    X = (mu-0.5*sigma**2)*t + sigma*W   #Formula del proceso de Valor
    S =  P_inicial*np.exp(X)
    S = np.insert(S, 0,P_inicial)
    return S  #Retornar la serie con la simulación del proceso de Valor
```

Por último creamos 15 caminos aleatorios del mismo activo.

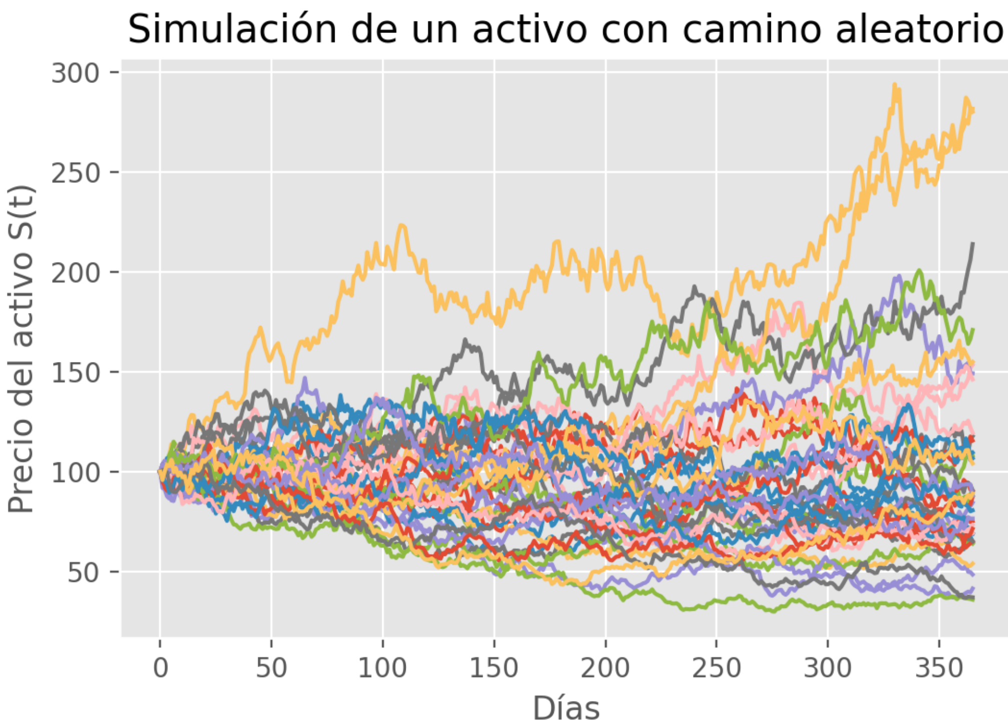
```
for camino in range(15):    #Simulamos 15 caminos con la rutina definida arriba
```

```
    y = pd.Series(
        simulacion(dt, T, mu, sigma, P_inicial)).rename("Camino" +str(camino ))
        y.plot(title = "Simulación de un activo con camino aleatorio", xlabel= "Días",
      ylabel="Precio del activo S(t)")
plt.show()  #Mostrar gráfica
```

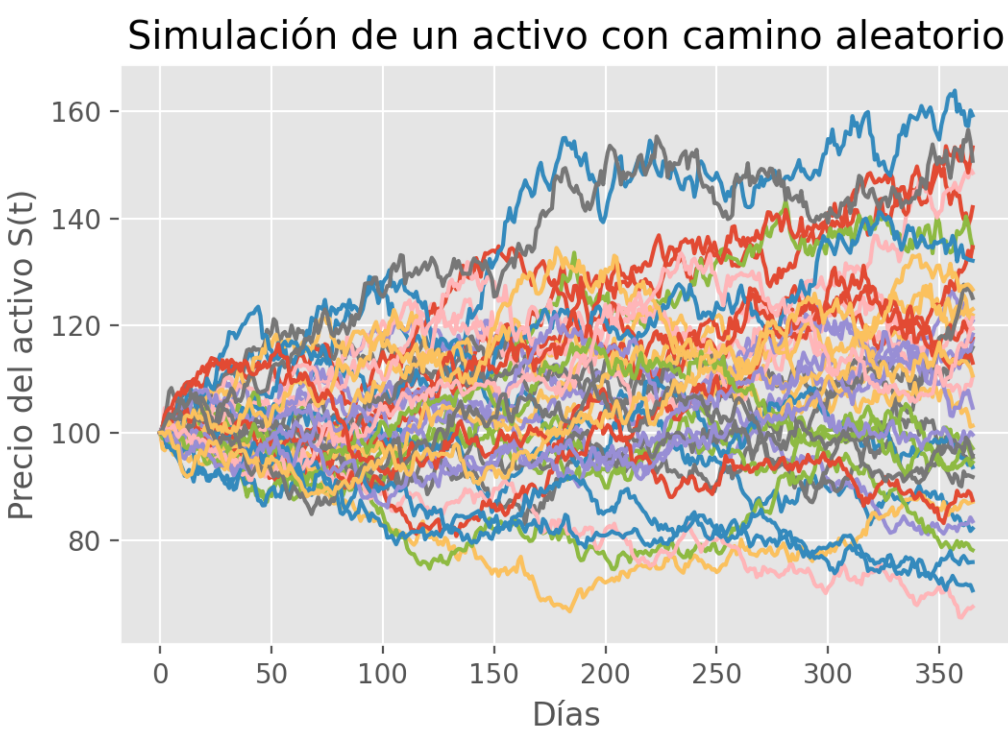
Para un precio inicial de $P_o = 100, \sigma = 0.5, \mu = 2\%$



Para un precio inicial de $P_o = 100, \sigma = 0.5, \mu = .1\%$



Para un precio inicial de $P_o = 100, \sigma = 0.2, \mu = 8\%$



Punto 2: En un mercado bursátil se acuerda crear una opción llamada "call ventana", la cual funciona como una opción call europea que se puede ejercer solamente cuando el precio del activo S está en un rango de valores: $E_1 \leq S(t) \leq E_2$ al momento de la madurez (vencimiento) T, con un precio strike E, incluido en este intervalo. El precio S del activo subyacente se comporta como en el modelo de camino aleatorio dado en el ejercicio 1). Usted debe encontrar la fórmula de valoración $C = C(S,t)$ para valorar una opción ventana con parámetros T, E, E1 y E2. Para ello siga los siguientes pasos:

A) Plantee la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes que rige el precio C. Esto hágalo paso a paso y en detalle riguroso, en términos de cálculo estocástico.

Tenemos una opción con valor $C(S,t)$ que depende del activo S del punto 1 y de t. Del lema de Itô expuesto en el punto anterior escribimos el camino aleatorio que sigue C:

$$dC = \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} dX + \left(\mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} \right) dt$$

Se plantea un portafolio llamado π que este compuesto por un número $-\Delta$ del activo S y una opción tipo ventana. Este portafolio se define como:

$$\pi = C - \Delta S$$

Un cambio en π sigue la siguiente ecuación:

$$d\pi = dC - \Delta \mathrm{d}S$$

Aplicando el Lema de Ito para $d\pi$, manteniendo un valor de Δ fijo durante el cambio y teniendo en cuenta la definición de dS

$$d\pi = \sigma S dX \frac{d\pi}{dS} + \left(\mu S \frac{\partial \pi}{\partial S} + \frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt - \Delta(\mu S dt + \sigma S dX)$$

Reorganizando los términos

$$d\pi = \sigma S \left(\frac{\partial \pi}{\partial S} - \Delta \right) dX + \left(\mu S \frac{\partial \pi}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2} + \frac{\partial \pi}{\partial t} - \mu \Delta S \right) dt$$

Para eliminar la aleatoriedad de la ecuación dada por la variable dX usamos el hecho de construir una tercera variable g cuya derivada df es completamente determinista durante un periodo dt. Δ es un número conocido a priori mantenido constante durante el paso dt.

$$g = f - \Delta S$$

$$dg = df - \Delta \mathrm{ds}$$

$$= \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dX + \left(\mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial S} \right) dt - \Delta(\sigma S dX + \mu S dt)$$

$$= \sigma S \left(\frac{\partial f}{\partial S} - \Delta \right) dX + \left(\mu S \left(\frac{\partial f}{\partial S} - \Delta \right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right)$$

Si escogemos $\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$ evaluado antes de los pasos en el tiempo t podemos hacer que los oceficientes de dX desaparezcan dejandpo un valor para dg que es conocido. El truco es que dos caminatas aleatorias para S y f están correlacionadas y no son independientes. Al coger una combinación lineal de f y S se pueden eliminar completamente.

Se reemplaza $\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$ en $d\pi$ para eliminar la aleatoriedad. Esta es la tasa de cambio del valor de nuestra opción con respecto a S. Es una medida de la correlación entre los movimientos de la opción y del activo.

$$d\pi = \left(\frac{d\pi}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d^2\pi}{dS^2}\sigma^2 S^2\right)dt$$

De esta manera se elimina la aleatoriedad ya que todos los términos son determinísticos. Con este resultado se puede reescribir en π como

$$\pi = C - \frac{\partial C}{\partial S}S$$

Además, el comportamiento de π debe seguir el comportamiento de una inversión libre de riesgo. No puede haber arbitraje, es decir:

$$d\pi = r\pi dt$$

Reemplazando en esta ecuación el valor de π

$$d\pi = r\left(C - \frac{\partial C}{\partial S}S\right)dt$$

Si se igualan las dos ecuaciones que se tienen para $d\pi$ se llega a la ecuación parcial diferencial de Black-Scholes.

$$r\left(C - \frac{\partial C}{\partial S}S\right)dt = \left(\frac{1}{2}\frac{d^2C}{dS^2}\sigma^2 S^2 + \frac{dC}{dt}\right)dt$$

$$rC - rS\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{1}{2}\frac{d^2C}{dS^2}\sigma^2 S^2 + \frac{dC}{dt}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

Esta ecuación no contiene el valor de crecimiento μ, el único valor importante es la volatilidad σ por lo que dos actores pueden acordar el mismo precio si concuerdan sobre la volatilidad del subyacente.

B) Proponga las condiciones de frontera para C.

Para encontrar una única solución a la ecuación encontrada se deben establecer las condiciones de frontera. Sabemos que, debido a que es una opción europea solo puede ser ejecutada en el vencimiento T. La condición final aplicada en $t = T$ es la ganancia que puede ser obtenida dado que el activo subyacente está por encima del valor E_1 por el que la opción tendría valor. Esto solo pasa cuando el precio del activo subyacente se encuentra entre $E_1 \leq S \leq E_2$. De lo contrario, la opción no se puede ejercer y su valor es 0.

Con este entendimiento se puede formular la condición de frontera para el vencimiento $t = T$:

$$C(S,T) = \begin{cases} 0 & E_1 \geq S \\ S - E_1 & E_1 \leq S \leq E_2 \\ 0 & E_2 \leq S \end{cases}$$

Ahora, si el activo alcanza valores por encima de E_2 la opción no tendrá valor. Por ejemplo, en el infinito tenemos que:

$$\lim_{S\to\infty} C(S,t) = 0$$

Y si el activo se desvaloriza por completo tenemos que

$$C(0,t) = 0\,, cuando\ S = 0$$

C) Proponga las condiciones de frontera para la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes para C en una ecuación de difusión y resuélvala analíticamente si es posible. Utilice la función de distribución de probabilidad acumulada de una variable aleatoria normal estándar.

Partimos de la ecuación parcial diferencia de Black-Scholes obtenida anteriormente para llegar a la ecuación de difusión.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

Para simplificar esta ecuación y llevarla a la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Usaremos los siguientes cambios de variable que son reversibles, esto nos ayudará a deshacernos de los terminos S, S^2 y volver la ecuación adimensional.

Sustitución 1: $C = E_1 v(x,\tau)$

$$\frac{dC}{dt} = E_1\frac{dv}{d\tau}$$

$$\frac{\partial C}{\partial S} = E_1\frac{dv}{dS}$$

$$\frac{d^2C}{dS^2} = E_1\frac{d^2v}{dS^2} = E_1\frac{d}{dS}\left(\frac{dv}{dS}\right)$$

Sustitución 2: $t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}$

Aplicando regla de la cadena a $\frac{dC}{dt} = E_1\frac{dv}{d\tau}$ y haciendo la sustitución

$$E_1\frac{dv}{dt} = E_1\frac{dv}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}$$

$$\tau = (T-t)\frac{1}{2}\sigma^2$$

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{1}{2}\sigma^2$$

$$\frac{dC}{dt} = E_1\frac{dv}{d\tau}\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\right)$$

Sustitución 3: $S = E_1 e^x$

Aplicando regla de la cadena a $\frac{\partial C}{\partial S} = E_1\frac{dv}{dS}$ y haciendo la sustitución

$$E_1\frac{dv}{dS} = E_1\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dS}$$

$$\frac{dx}{dS}=\frac{E_1}{S}\frac{1}{E_1}=\frac{1}{S}$$
$$\frac{\partial C}{\partial S}=\frac{E_1}{S}\frac{dv}{dx}$$
Aplicando regla de la cadena a $\frac{d^2C}{dS^2}=E_1\frac{d^2v}{dS^2}=E_1\frac{d}{dS}\left(\frac{dv}{dS}\right)$ y haciendo la sustitución

$$E_1\frac{d}{dS}\left(\frac{dv}{dS}\right)=E_1\frac{d}{dS}\left(\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dS}\right)=E_1\frac{d}{dS}\left(\frac{dv}{dx}\frac{1}{S}\right)=E_1\left(-\frac{1}{S^2}\frac{dv}{dx}+\frac{1}{S}\frac{d}{dS}\left(\frac{dv}{dx}\right)\right)$$
Solucionando y reemplazando
$$\frac{d}{dS}\left(\frac{dv}{dx}\right)=\frac{d^2v}{dx^2}\left(\frac{dx}{dS}\right)=\frac{d^2v}{dx^2}\frac{1}{S}$$
$$E_1\left(-\frac{1}{S^2}\frac{dv}{dx}+\frac{1}{S}\frac{d}{dS}\left(\frac{dv}{dx}\right)\right)=\frac{E_1}{S^2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}-\frac{dv}{dx}\right)$$

$$\frac{d^2C}{dS^2}=\frac{E_1}{S^2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}-\frac{dv}{dx}\right)$$
Reemplazando en $\frac{\partial C}{\partial S}=E_1\frac{dv}{dS}$
$$\frac{1}{2}\frac{d^2C}{dS^2}\sigma^2S^2+\frac{dC}{dt}-rC+rS\frac{\partial C}{\partial S}=0$$
$$\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{E_1}{S^2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}-\frac{dv}{dx}\right)+E_1\frac{dv}{d\tau}\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\right)-rE_1v+rS\frac{E_1}{S}\frac{dv}{dx}\ =0$$
$$\frac{1}{2}\sigma^2E_1\left(\frac{d^2v}{dx^2}-\frac{dv}{dx}\right)+E_1\frac{dv}{d\tau}\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\right)-rE_1v+rE_1\frac{dv}{dx}\ =0$$
Factorizando E y reorganizando
$$\frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{d^2v}{dx^2}-\frac{dv}{dx}\right)-\frac{1}{2}\sigma^2\frac{dv}{d\tau}-rv+r\frac{dv}{dx}\ =0$$
$$\frac{1}{2}\sigma^2\frac{d^2v}{dx^2}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{dv}{dx}-rv\ =\frac{1}{2}\sigma^2\frac{dv}{d\tau}$$
Multiplicando por $\frac{1}{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)}$
$$\frac{d^2v}{dx^2}+\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)\frac{dv}{dx}-rv\frac{2}{\sigma^2}\ =\frac{dv}{d\tau}$$
Sustitución 4: $k=\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$
$$\frac{dv}{d\tau}=\frac{d^2v}{dx^2}+(k-1)\frac{dv}{dx}-kv$$
Sustitución 5: $v=u(x,\tau)e^{\alpha x+\beta\tau}$
$$\frac{dv}{d\tau}=\frac{d}{d\tau}u(x,\tau)e^{\alpha x+\beta\tau}=\beta e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)+e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{du}{d\tau}=e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\beta u(x,\tau)+\frac{du}{d\tau}\right)$$
$$\frac{dv}{dx}=\frac{d}{dx}u(x,\tau)e^{\alpha x+\beta\tau}=\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)+e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{du}{dx}=e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\alpha u(x,\tau)+\frac{du}{dx}\right)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}u(x,\tau)e^{\alpha x+\beta\tau} = \frac{d}{dx}\left(\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau) + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{du}{dx}\right)$$
$$= \alpha^2 e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau) + \alpha e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{du}{dx} + \alpha e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{du}{dx} + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{d^2u}{dx^2}$$
$$= e^{\alpha x+\beta\tau}(\alpha^2\, u(x,\tau) + 2\alpha\frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2})$$

Reemplazando las derivadas en términos de $u(x,\tau)$ en $\frac{dv}{d\tau} = \frac{d^2v}{dx^2} + (k-1)\frac{dv}{dx} - kv$

$$e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\beta u(x,\tau) + \frac{du}{d\tau}\right)$$
$$= e^{\alpha x+\beta\tau}(\alpha^2\, u(x,\tau) + 2\alpha\frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2}) + (k-1)e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\alpha u(x,\tau) + \frac{du}{dx}\right)$$
$$- ku(x,\tau)e^{\alpha x+\beta\tau}$$

Dividiendo por $e^{\alpha x+\beta\tau}$

$$\beta u(x,\tau) + \frac{du}{d\tau} = \alpha^2\, u(x,\tau) + 2\alpha\frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} + (k-1)\left(\alpha u(x,\tau) + \frac{du}{dx}\right) - ku(x,\tau)$$

Despejando $\frac{du}{d\tau}$

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{d^2u}{dx^2} + \big(2\alpha + (k-1)\big)\frac{du}{dx} + (\alpha^2 + (k-1)\alpha - k - \beta)u(x,\tau)$$

Para que se cumpla la ecuación$\frac{\partial u}{\partial\tau} = \frac{\partial^2u}{\partial x^2}$ se debe cumplir que

$$2\alpha + (k-1) = 0; \qquad \alpha^2 + (k-1)\alpha - k - \beta = 0$$

Resolviendo se obtiene que

$$\alpha = \frac{1-k}{2}; \qquad \alpha^2 + (k-1)\alpha - k - \beta = -\frac{(1+k)^2}{4} \to$$
$$\beta = -\frac{1}{4}(1+k)^2$$

Con estos valores se cumple la ecuación de difusión

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{d^2u}{dx^2}$$

Donde r es la tasa libre de riesgo y σ es la volatilidad asociada con la ecuación diferencial estocástica que rige la evolución del valor del activo subyacente S(t) como un proceso estocástico

Para continuar se deben cambiar las ecuaciones de frontera para que concuerden con la ecuación de difusión teniendo en cuenta las sustituciones hechas.

$$u(x,0) = ve^{-\alpha x} = e^{-\alpha x}\frac{C(S,T)}{E_1} = \frac{e^{-\alpha x}}{E_1}\begin{cases} S - E_1 & E_1 \le S \le E_2 \\ 0 & dlc \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha x}}{E_1}(E_1e^x - E_1) & E_1 \le E_1e^x \le E_2 \\ 0 & dlc \end{cases}$$
$$= \begin{cases} e^{-\alpha x}(e^x - 1) & 1 \le e^x \le \dfrac{E_2}{E_1} \\ 0 & dlc \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{-\alpha x}(e^x - 1) & 0 \leq x \leq \ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right) \\ 0 & dlc \end{cases}$$

Ahora se debe encontrar una solución general a la ecuación de difusión. Una familia de ecuaciones que es solución a la ecuación de difusión es la función del núcleo del calor. Esta ecuación es lineal y bajo una condición inicial $g(x)$ se comporta como un sistema lineal invariante frente a translaciones.

$$\tilde{u}(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}} \qquad : Núcleo\ del\ calor$$

Cuya solución teniendo en cuenta la distribución de Delta de Dirac $\delta_{(x)}$ es la siguiente

$$u(x,\tau) = \begin{cases} E_{N(x,\sqrt{2\tau})}\,(g)\ \tau > 0 \\ E_{\delta(\cdot - x)}(g) \quad \tau = 0 \end{cases}$$

$$u(x,\tau) = E_{N(x,\sqrt{2\tau})} = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \frac{1}{\sqrt{2\tau}} f_Z\left(\frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}\right) ds$$

Ahora podemos reemplazar la condición inicial $g(s)$ en la ecuación $u(x,\tau)$

Ya que las condiciones de frontera son a trozos la integral se debe resolver teniendo en cuenta estos límites.

$$u(x,\tau) = \int_{-\infty}^{0} 0\text{ds} + \int_{0}^{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)} \left(e^{-(\alpha-1)x} - e^{-\alpha x}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(s-x)^2}{4\tau}}\, ds + \int_{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)}^{\infty} 0\text{ds}$$

$$= \int_{0}^{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)} (e^{-(\alpha-1)x} \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(s-x)^2}{4\tau}}\, ds - \int_{0}^{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)} e^{-\alpha x} \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(s-x)^2}{4\tau}}\, ds$$

Hacemos la transformación $y = \frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}$

$$= \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{-(\alpha-1)\left(x+\sqrt{2\tau}y\right)}\, f_z(y)dy - \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\alpha\left(x+\sqrt{2\tau}y\right)} f_z(y)\, dy$$

$$= e^{-(\alpha-1)x} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{-(\alpha-1)\left(\sqrt{2\tau}y\right)}\, f_z(y)dy - e^{-\alpha x} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\alpha\left(\sqrt{2\tau}y\right)} f_z(y)\, dy$$

Como se puede ver estas dos integrales son muy similares y solo se diferencian en un término, por lo tanto, para facilitar cálculos se resolverá la siguiente integral

$$I(\phi) = \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\alpha\left(\sqrt{2\tau}y\right)} \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\, e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Y de esta manera la integral que se quiere solucionar es

$$u(x,\tau) = I(\alpha - 1) - I(\alpha)$$

Solucionando $I(\phi)$

Se deben sumar los exponentes de las dos exponenciales completando el cuadrado:

$$-\frac{y^2}{2}-\alpha\left(\sqrt{2\tau}y\right)=-\frac{1}{2}\left(y+\alpha\sqrt{2\tau}\right)^2+\alpha^2\tau$$

Con estos exponentes la integral queda de la siguiente manera

$$e^{-\alpha x}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\alpha\left(\sqrt{2\tau}y\right)}\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy=e^{-\alpha x+\alpha^2\tau}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}}\frac{e^{-\frac{\left(y+\alpha\sqrt{2\tau}\right)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dy$$

Se puede observar que esta integral muestra una distribución estándar, se realiza el siguiente cambio de variable

$$\frac{e^{-\frac{\left(y+\alpha\sqrt{2\tau}\right)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\sim Normal\left(-\alpha\sqrt{2\tau},1\right)$$

$$w=y+\alpha\sqrt{2\tau}$$

$$I(\alpha)=e^{-\alpha x+\tau\alpha^2}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}}^{\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}}\frac{e^{-\frac{w^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dw=\ e^{-\alpha x+\tau\alpha^2}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}}^{\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}} f_Z(w)dw$$

Esta función puede simplificarse usando la función de istribución de probabilidad acumulada de una distrivución de probabilidad normal estnadar llamada F_z en la forma:

$$I(\alpha)=e^{-\alpha x+\alpha^2\tau}P\left(-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\leq Z\leq\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\right)$$

$$=e^{-\alpha x+\alpha^2\tau}\left(F_z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\right)-F_z\left(-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\right)\right)$$

Por último volvemos a la ecuación del calor del problema:

$$u(x,\tau)=I(\alpha-1)-I(\alpha)$$

$$=e^{-(\alpha-1)x+(\alpha-1)^2\tau}\left(F_z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\right)-F_z\left(-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\right)\right)$$

$$-\,e^{-\alpha x+\alpha^2\tau}\left(F_z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\right)-F_z\left(-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\right)\right)$$

Ahora, tenemos que devolver los cambios de variable:

$$C(S,t)=E_1v\big(x(S),\tau(t)\big)=E_1e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)$$

$$= E_1 e^{\alpha x+\beta\tau}\left[e^{-(\alpha-1)x+(\alpha-1)^2\tau}\left(F_z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\right)-F_z\left(-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\right)\right)\right.$$

$$\left.-e^{-\alpha x+\alpha^2\tau}\left(F_z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\right)-F_z\left(-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\right)\right)\right]$$

$$= E_1 e^{x+((\alpha-1)^2+\beta)\tau}\left(F_z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\right)-F_z\left(-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\right)\right)$$

$$-E_1 e^{(\alpha^2+\beta)\tau}\left(F_z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\right)-F_z\left(-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\right)\right)$$

Ahora, seguimos con las sustituciones de las variables α y β las cuales están en terminos de k. Usamos las relaciones impuestas en la definición de α y β:

$$\beta+(\alpha-1)^2=0; \beta+\alpha^2=-k$$

Convirtiendo la ecuación en:

$$= E_1 e^{x}\left(F_z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\right)-F_z\left(-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\right)\right)$$

$$-E_1 e^{(-k)\tau}\left(F_z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\right)-F_z\left(-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\right)\right)$$

Y retornamos finalmente a la variables originales:

$$x=\ln\left(\frac{S}{E_1}\right), \tau=\sigma^2(\mathrm{T}-t), \sqrt{2\tau}=\sigma\sqrt{T-t}, \alpha=\frac{1-k}{2}, \alpha-1=-\left(\frac{k+1}{2}\right)$$

Transformamos la ecuación a:

$$= S\left(F_z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{S}\right)+(\alpha-1)\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)-F_z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_1}{S}\right)+(\alpha-1)\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right)$$

$$-E_1 e^{-k\tau}\left(F_z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{S}\right)+\alpha\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)-F_z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_1}{S}\right)+\alpha\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right)$$

Llegando finalmente al resultado utilizando las igualdades:

$$(\alpha-1)\sigma^2=-\left(\frac{k+1}{2}\right)\sigma^2=-\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right), \alpha\sigma^2=\left(\frac{1-k}{2}\right)=\left(\frac{\sigma^2}{2}-r\right)$$

$$
= S\left(F_z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{S}\right) - \left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - F_z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_1}{S}\right) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right)
$$

$$
- E_1 e^{-r(T-t)}\left(F_z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{S}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right.
$$

$$
\left. - F_z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_1}{S}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right)
$$

D) Dibuje claramente la superficie de la función $C = C(S, t)$ para diferentes valores de la tasa libre de riesgo y la volatilidad (sigma).

Para dibujar la función utilizaremos los siguientes comandos en Python:

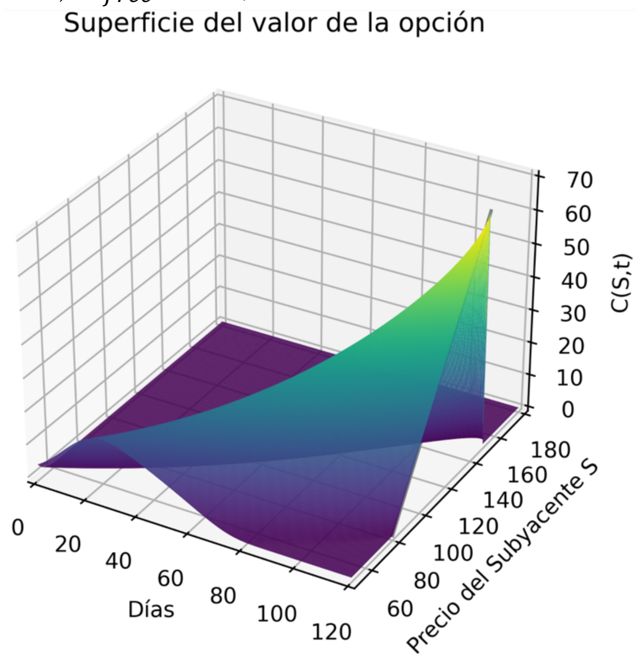
```
from mpl_toolkits import mplot3d
import scipy.stats as stats
cdf = stats.norm.cdf
#Función para hallar la opción
def f(S, t, E1, E2, T, sigma, r):
    denominador = sigma * np.sqrt(T-t)  #Usar la formula encontrada
    d1 = (np.log(E2/S) - (r+(sigma**2)/2)*(T-t) )/denominador
    d2 = (np.log(E1/S) - (r+(sigma**2)/2)*(T-t))/denominador
    d3 = (np.log(E2/S) + ((sigma**2)/2-r)*(T-t))/denominador
    d4 = (np.log(E1/S) + ((sigma**2)/2-r)*(T-t))/denominador
    C = S*(cdf(d1) - cdf(d2)) - E1*np.exp(-r*(T-t))*(cdf(d3)-cdf(d4))

    return C  #Retornar la serie del valor de la opción

#Definir valores de las simulaciones del portafolio
T=365
E1= 80
E2 = 150
finura = T*5
S = np.linspace(E1-30, E2+30, (E2-E1)*4)
t = np.linspace(0, T-0.000000000001,T*4, endpoint = True)
S,t = np.meshgrid(S,t)
#Uso de la función de la opción
Z = f(S, t, E1, E2, T, sigma=0.001, r=0.002)


#Crear parámetros gráfica
ax = plt.axes(projection='3d', xlim = (0,T), ylim= (E1-30,E2+30))
ax.plot_surface(t, S, Z, rstride=1, cstride=1,
                cmap='viridis', edgecolor='none')
ax.set_zlabel("C(S,t)")
ax.set_title('Superficie del valor de la opción')
ax.set_xlabel("Días"); ax.set_ylabel("Precio del Subyacente S")
```

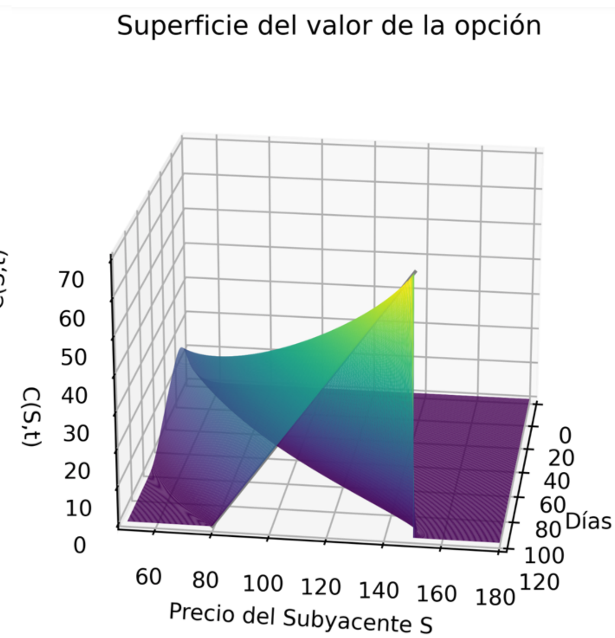
```
finura = (E2-E1)*1
#Frontera en t=T
s =np.linspace(E1, E2, (E2-E1))
#Definición de activo libre de riesgo
xline = np.full(shape = ((E2-E1),), fill_value= T)
zline = np.where( (s<E1) | (s>E2),0, s-E1)

ax.plot3D(xline, s, zline, 'gray')
```

Usaremos los siguientes valores para todas las gráficas:

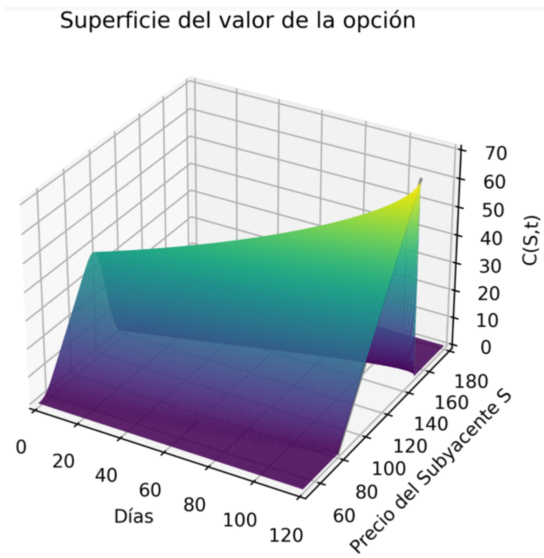
$$E_1 = 80, E_2 = 150, T = 120\ días$$

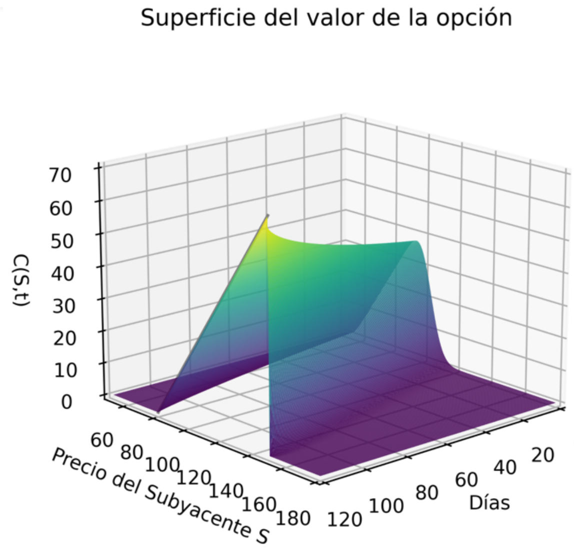
a) $r_{free} = 1\%, \sigma = 1\%$



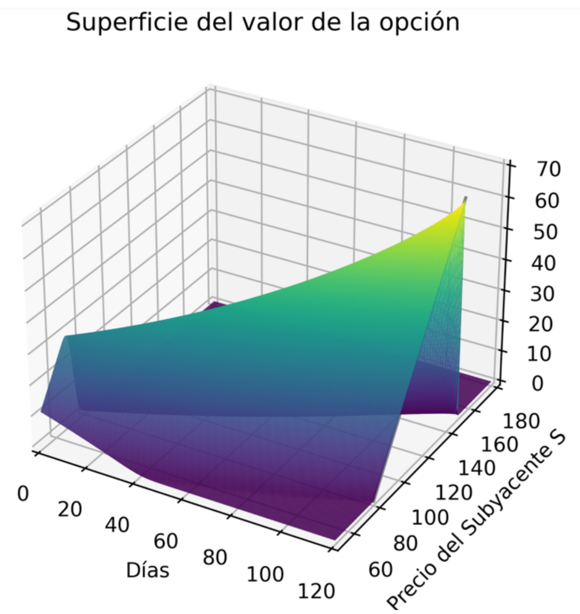


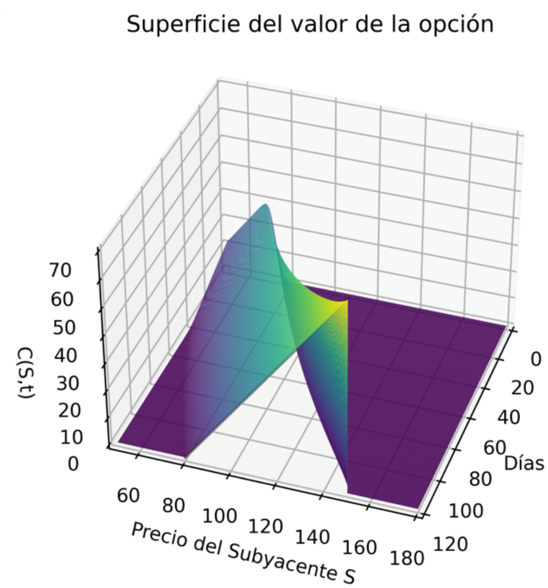
b) $r_{free} = 0.3\%, \sigma = 0.5\%$





c) $r_{free} = 0.6\%, \sigma = 0.3\%$





Punto 3: Utilizando la función de valoración $C = C(S,t)$ para opciones ventana sobre el subyacente S que usted calculó, componga un portafolio que incluya activos sin riesgo (a la tasa libre de riesgo), inversiones en el activo S e inversiones en la opción ventana sobre el subyacente representado por S. Para la composición de su portafolio, simule la evolución del valor de éste, empleando el módulo de simulación para S del problema 1) y la fórmula de valoración de la opción ventana. Considere diferentes valores para los parámetros de tasa libre de riesgo y volatilidad. Demuestre que esto hace el portafolio más seguro en general con varias simulaciones.

Crearemos un portafolio π conformado por el activo sin riesgo $R(t)$, el activo S, y la opción C el cual invertirá $100 dolares en total:

$$\pi = f_x S + g_x C + h_x R$$

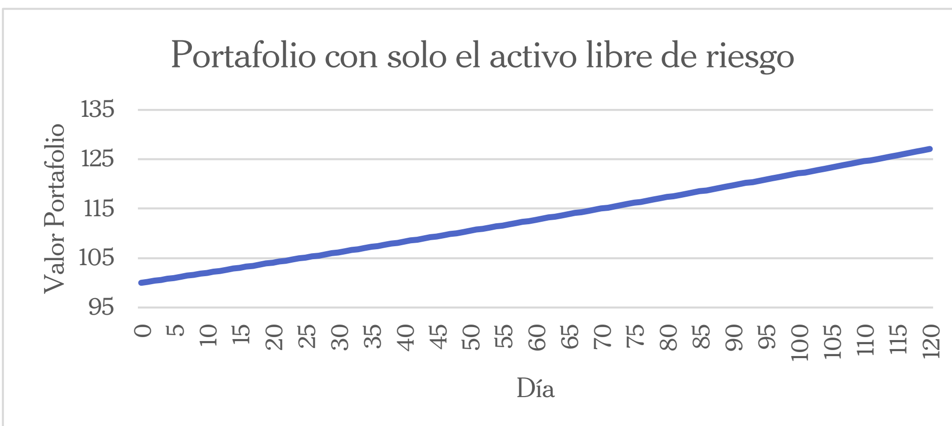
Con la condición:

$$f + g + h = 1$$
$$f, g, h \geq 0$$

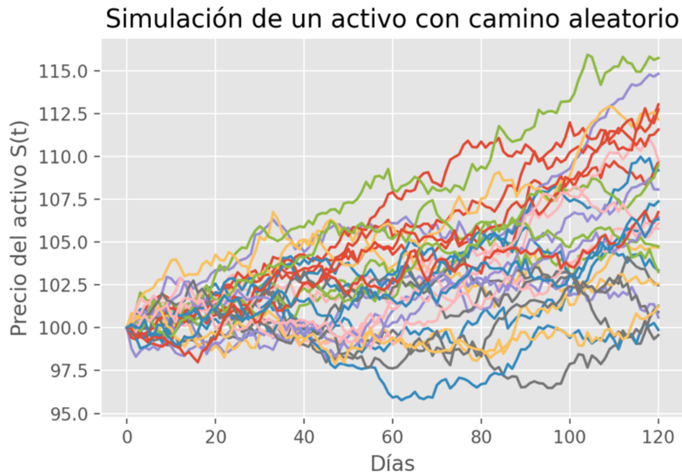
Recordemos las condiciones de *ejemplo* del problema:

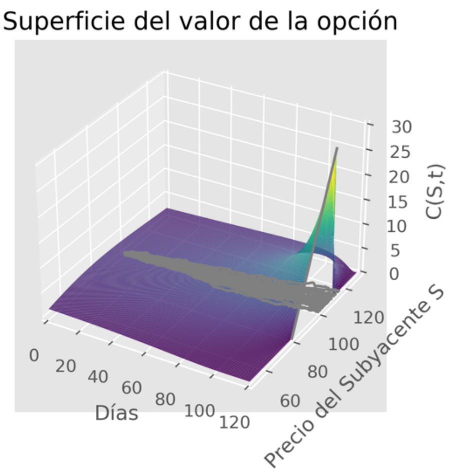
- Activo libre de riesgo
$$P_o = 100, r_{risk-free} = 0.2\%$$
- Activo Subyacente S
$$P_0 = 100, \sigma = 4\%, \mu = 6\%$$
- Opción ventana C(S,t)
$$E_1 = 80, E_2 = 110, T\ (vencimiento) = 120\ días$$

Un portafolio con posiciones solamente en el activo sin riesgo se verá de la siguiente forma, en cualquier simulación. ($h_x = 100\%$)



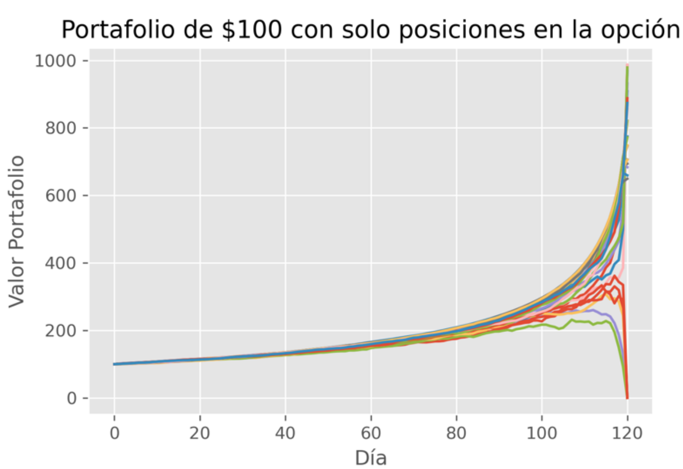
Un portafolio con solo posiciones en el activo subyacente riesgoso S se vería de la siguiente forma. Se realizaron 30 simulaciones para capturar el comportamiento aleatorio: ($f_x = 100\%$)



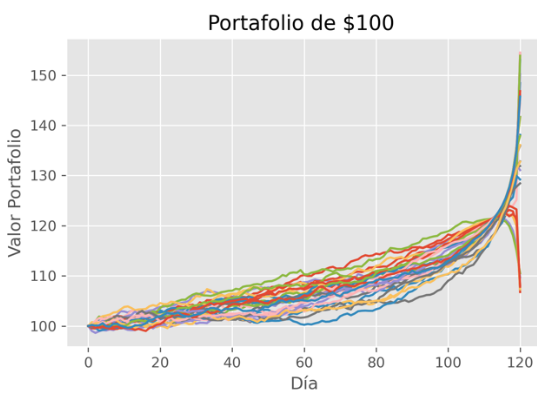
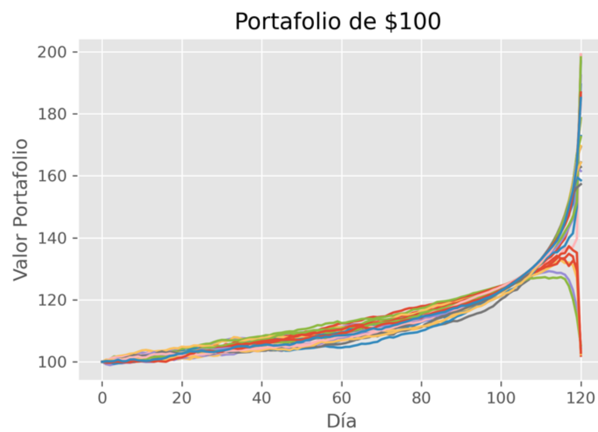
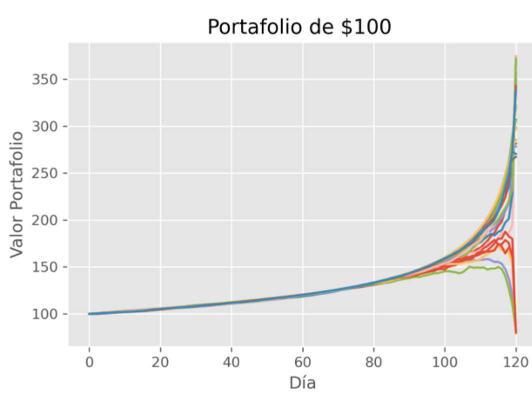
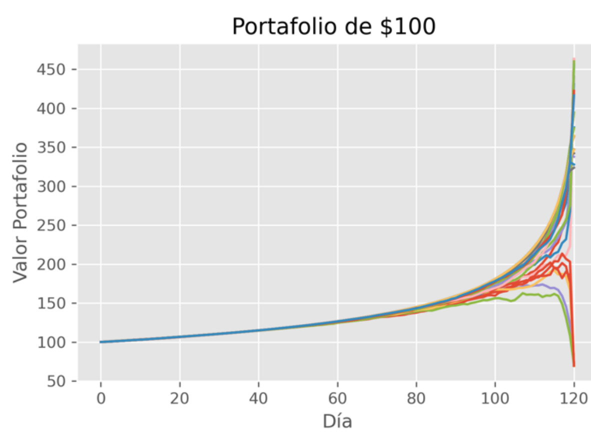


Un portafolio con solo posiciones en la opción C ($g_x = 100\%$) basado en el precio del activo simulado anteriormente se vería de la siguiente forma:

```
Valor inicial de la opción: 3.0142518357227246
Opciones compradas = 30.142
```



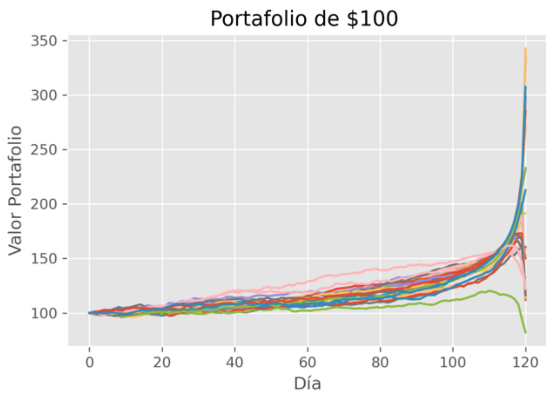
Ahora probamos con distintos pesos. Observamos que al incrementar el porcentaje de participación de la opción la variación en el valor del portafolio decrece sustancialmente. Ahora, al aumentar esta participación se eleva la varianza en los últimos periodos de tiempo dado que en algunas simulaciones la opción vale cero dado que el activo se sale de la ventana en algunas simulaciones. Sin embargo, la opción es muy efectiva para reducir el riesgo o volatilidad del portafolio.

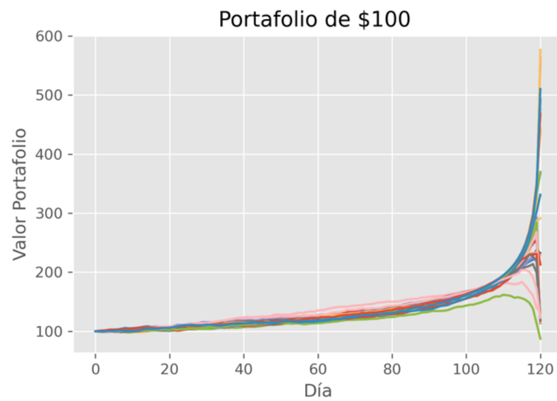
$f_x = 90\%, h_x = 5\%, g_x = 5\%$ $\pi = f_x S + g_x C + h_x R$  	$f_x = 80\%, h_x = 10\%, g_x = 10\%$ $\pi = f_x S + g_x C + h_x R$ 
$f_x = 60\%, h_x = 10\%, g_x = 30\%$ $\pi = f_x S + g_x C + h_x R$  	$f_x = 45\%, h_x = 15\%, g_x = 40\%$ $\pi = f_x S + g_x C + h_x R$ 

Ahora cambiaremos los valores de la tasa libre de riesgo y volatildad :

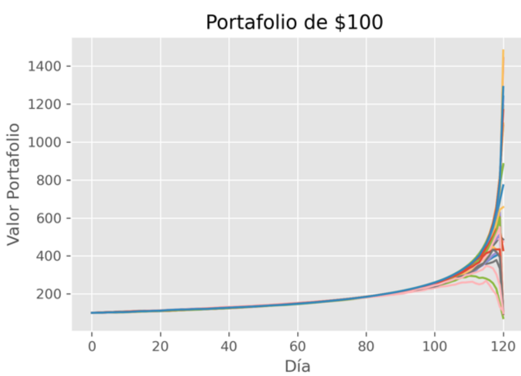
$$r_{risk\_free} = 0.8\%, \sigma = 9\%$$

$f_x = 90\%, h_x = 5\%, g_x = 5\%$ $\pi = f_x S + g_x C + h_x R$	$f_x = 80\%, h_x = 10\%, g_x = 10\%$ $\pi = f_x S + g_x C + h_x R$

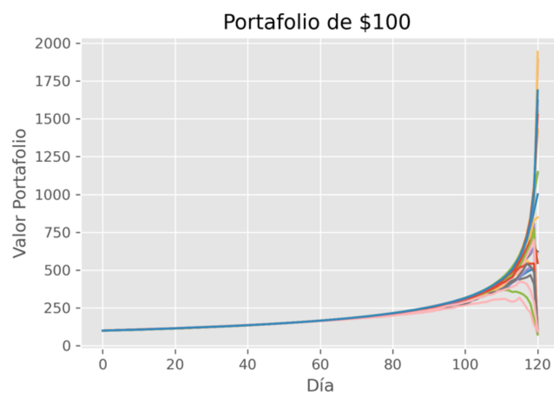




$$f_x = 60\%, h_x = 10\%, g_x = 30\%$$
$$\pi = f_x S + g_x C + h_x R$$



$$f_x = 45\%, h_x = 15\%, g_x = 40\%$$
$$\pi = f_x S + g_x C + h_x R$$

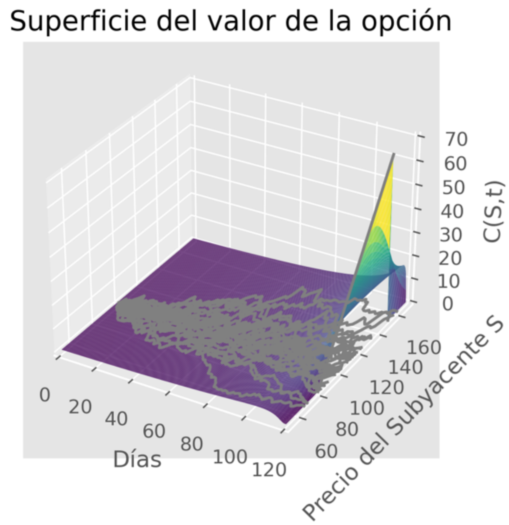


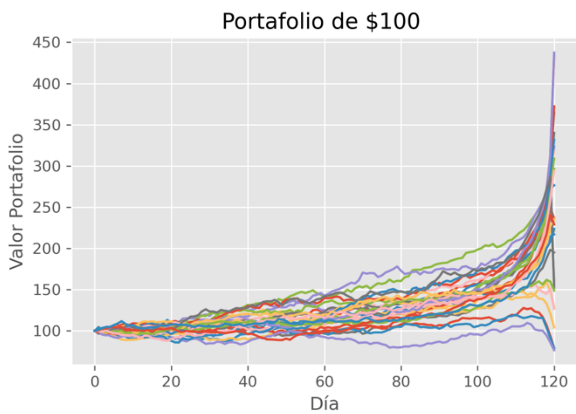
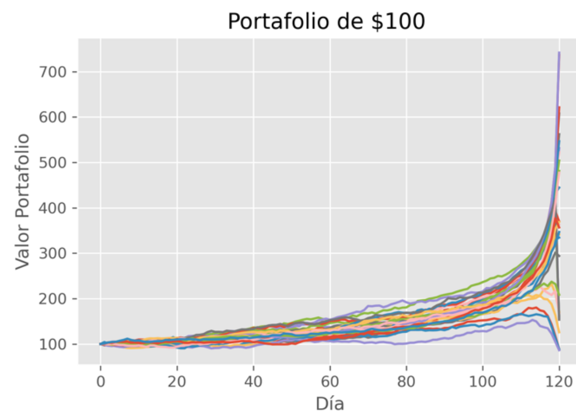
Ahora cambiaremos los valores de la tasa libre de riesgo y volatildad :

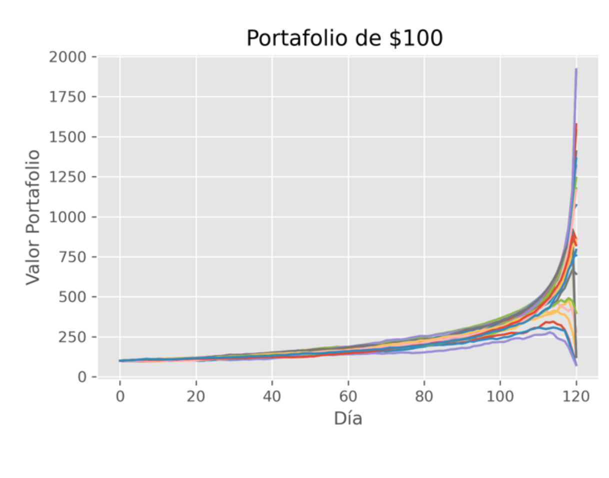
$$r_{risk\_free} = 1\%, \sigma = 20\%$$

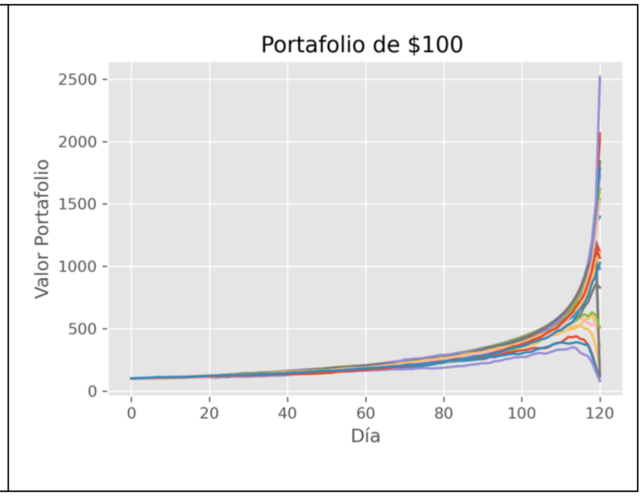
También cambiamos los limites de la opción ventana

$$E_2 = 150$$



$f_x = 90\%, h_x = 5\%, g_x = 5\%$ $\pi = f_x S + g_x C + h_x R$  	$f_x = 80\%, h_x = 10\%, g_x = 10\%$ $\pi = f_x S + g_x C + h_x R$ 
$f_x = 60\%, h_x = 10\%, g_x = 30\%$ $\pi = f_x S + g_x C + h_x R$	$f_x = 45\%, h_x = 15\%, g_x = 40\%$ $\pi = f_x S + g_x C + h_x R$





En conclusión, podemos apreciar que al diversificar el portafolio introduciendo opciones tipo call ventana europeas se logra reducir la volatilidad o riesgo del valor del portafolio. Se realizaron 30 simulaciones con distintos valores para la tasa libre de riesgo y la volatilidad del activo y en todos los casos al aumentar la participación de la opción la volatilidad disminuía para casi todo el periodo de análisis. Ahora, dadas las condiciones de frontera de la opción, en periodos cercanos a $t = T$ el valor del portafolio varia considerablemente teniendo en cuenta el cierre próximo de la opción.

Punto 4: Enuncie y demuestre rigurosamente la fórmula de paridad call-put acorde a las lecturas.

La ecuación de Black Scholes es

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0$$

Añadiendo la condición inicial $V(S,T)$, se encuentra una solución única. Esta ecuación es lineal, así que la combinación lineal de cualquier par de soluciones también es línea. Sabemos que dos soluciones a esta ecuación es S y $Ke^{-r(T-t)}$ por lo que $S - Ke^{-r(T-t)}$ es una solución. En el tiempo de la expiración T, la solución tiene un valor de $S - Ke^{-r(T-t)}$. Recordemos que el valor K entregado al inicio de la ventana se debe llevar a valor futuro al periodo T con la tasa libre de riesgo r. Este es un supuesto, de lo contrario habría arbitraje.

Ahora, si $C(S,t)$ es el valor de una opción call con $t < T$ entonces $C(S,t)$ cumple la ecuación de Black Scholes y tiene el valor terminal de $\max(S-K,0)$. Si $P(S,t)$ es el valor de una opción tipo Put con valor del activo S y tiempo $t < T$, entonces $P(S,t)$ también cumple la ecuación de Black Scholes y tiene valor terminal $\max(K-S,0)$.

Teniendo esto en cuenta, por la linealidad de la ecuación $C(S,t) - P(S,t)$ es una solución y tiene valor terminal $C(S,T) - P(S,T) = S - Ke^{-r(T-t)}$. Debido a que la solución debe ser única entonces las soluciones deben ser las mismas por lo que :

$$C - P = S - Ke^{-r(T-t)}$$

Esta relación es conocida como el principio de paridad put-call entre el precio C de una opción tipo call europea y el precio P de una opción europea put, cada una con precio strike K y el activo subyacente S.