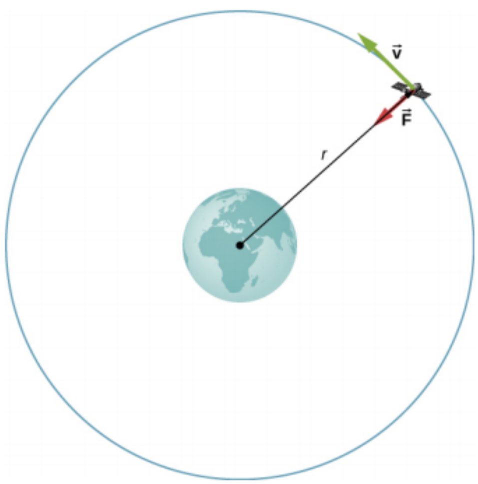
PRÁCTICA 4: SEGUIMIENTO DE UNA ÓRBITA GEOSTACIONARIA MEDIANTE FILTRO EXTENDIDO DE KALMAN CONTINUO-DISCRETO

1. Introducción

Las órbitas geostacionarias pueden conseguirse solo a 35786 km de la superficie terrestre (sobre el ecuador) con una velocidad orbital de 11068 km/h. Por ello, el seguimiento de satélites en estas órbitas es crucial.

La órbita de un satélite de masa m se rige por la siguiente ecuación dinámica (ley de gravitación universal) para la fuerza que actúa sobre el mismo:



TODO EN KM y HORAS

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -G\frac{mM}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}$$

donde:

$\mathbf{r} = (x, y, z)^t$ Vector de posición del satélite
$G = 6{,}6742 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ Cte gravitación universal
$M = 5{,}9736 \cdot 10^{24} Kg$ Masa de la tierra ().

La expresión anterior puede escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{GM}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

donde se ha añadido un vector $(w_x, w_y, w_z)^\top$ de fluctuaciones en la aceleración debidas a perturbaciones desconocidas del campo gravitacional y a la presión solar.

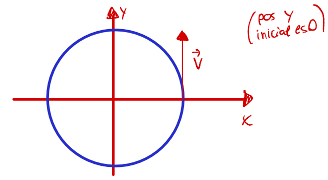
2. Realización práctica

Se implementará un filtro extendido de Kalman continuo-discreto que realice una predicción/seguimiento de un satélite en órbita geostacionaria a partir del modelo dinámico anterior y una serie de medidas proporcionadas.

Cuestiones a resolver e implementación:

1. Obtener la ecuación dinámica no lineal del sistema de la forma $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + \mathbf{w}$ con vector de estado $\mathbf{x}$ y vector de perturbaciones $\mathbf{w}$. Para simplificar, y sin pérdida de generalidad, consideraremos una órbita planar en el plano XY y un vector de estado $\mathbf{x} = (x\ y\ \dot{x}\ \dot{y}\ )^t$.

2. Se realizará un seguimiento de la órbita del satélite en un periodo de 24 horas mediante un filtro extendido de Kalman continuo-discreto con las siguientes características:



a) En el instante inicial consideramos que el satélite está sobre el eje X, a $42164\ km$ del centro de la Tierra (35786 órbita más 6378 radio Tierra ecuatorial), con una velocidad de $11068\ km/h$, y unas varianzas de error de $50\ km^2$ para las coordenadas de posición y de $1\ km^2/h^2$ para las de velocidad. La matriz de error inicial P_0 se toma diagonal (suposición de independencia estadística).

b) Las componentes del vector de perturbaciones de la aceleración se consideran estadísticamente independientes entre sí y blancas de media nula y con una densidad de potencia espectral $\sigma_w^2 = 0{,}01\ km^2/h^4/Hz$.

c) Se proporcionará una predicción cada $T_{pred} = 0{,}1$ h. → 1 medida cada 30 intervalos de predicción.

d) Las medidas están disponibles en intervalos de $T_{med} = 3\ h$. Las medidas corresponden a la distancia del satélite al centro de la tierra y responden al siguiente modelo:

$$z_k = r_k = \|\mathbf{r}(t_k)\| = \sqrt{x^2(t_k) + y^2(t_k)} + v_k \qquad (k = 1, \ldots, 8)$$

El error de medida v_k es blanco de media nula y varianza $R = 0{,}1\ km^2$. La secuencia de medidas observadas se proporciona en el fichero `Variables_Orbita.mat`.

e) Fichero `Variables_Orbita.mat`: archivo para la implementación y evaluación del eKF. Variables que contiene: el periodo entre predicciones (T_{pred}), el periodo entre medidas (T_{med}), b) la lista de instantes de predicción `tt` (cada T_{pred}), un array con la secuencia de coordenadas XY de la órbita verdadera `Cxy_true` en cada ionstante de predicción (se proporciona únicamente para poder evaluar la órbita estimada), d) un array con la secuencia de medidas `zmed` a emplear por el eKF, e) las varianzas de perturbación σ_w^2 y del ruido de medida σ_v^2, y d) constante GM en unidades de kg, km y h.

3.

4. Cuestiones a resolver:

a) El filtro KF debe proporcionar una estima en cada instante de medida $t_k = kT_{pred}$. Dibujar la órbita descrita (estimada) en el plano XY y compararla con la verdadera.

b) Dibujar la evolución temporal del radio estimado de la órbita, es decir, la distancia estimada

$$\hat{r}_k = \sqrt{\hat{x}^2(t_k) + \hat{y}^2(t_k)}$$

al centro de la Tierra, y compararla con las de los radios de órbita medido y verdadero. Comparar la desviación estándar del ruido de medida con la desviación estándar del error entre r_k y $\hat{r}_k$, y comentar el resultado.

c) Calcular y dibujar la secuencia de error cometido en la posición, definido como la distancia entre la órbita estimada y la verdadera en cada instante de tiempo,

$$e(t_k) = \sqrt{(x(t_k) - \hat{x}(t_k))^2 + (y(t_k) - \hat{y}(t_k))^2},$$

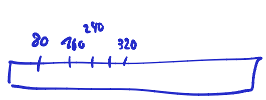
y compararlo con el error cometido estimado, definido como,

$$\hat{e}(t_k) = \sqrt{\sigma_x^2(t_k) + \sigma_y^2(t_k)}$$

donde $\sigma_x^2(t_k) = E[(x(t_k) - \hat{x}(t_k))^2] = P_k(0,0)$, $\sigma_y^2(t_k) = E[(y(t_k) - \hat{y}(t_k))^2] = P_k(1,1)$.

NOTA: para la resolución de ecuaciones diferenciales se hará uso de la función `ode45` de MatLab.

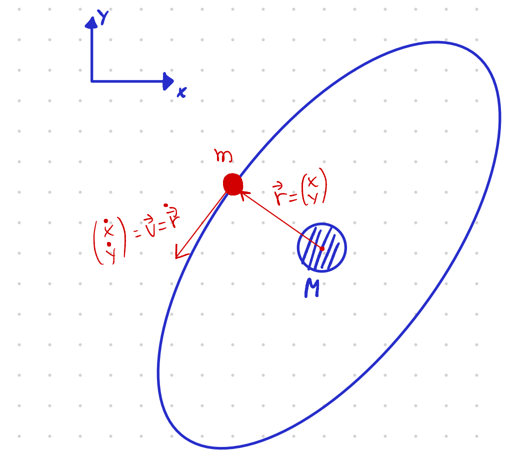
r_estimada
r_original
hold on
añadir los puntos de las medidas (múltiplos de 3 horas)



El vector de variables de estado:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

Podemos calcular el error real con las medidas reales.



Origen de coord centro de la tierra

El sistema:

$$\vec{F} = m\vec{a} = -G\frac{\overset{\text{desprecias}}{\cancel{m}}\, M}{\underset{\text{forma vectorial}}{\|r\|^3}}\vec{r} \xrightarrow{\text{derivamos}} \frac{\partial^2}{\partial t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{GM}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \overset{\text{perturbaciones}}{\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}}$$

Cada coordenada:

$$\dot{\vec{x}} = \underbrace{g(\vec{x}(t))}_{g(\vec{x})} + \vec{w}$$

→ jacobiano de la perturbación es la matriz identidad (las perturbaciones son aditivas)

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \frac{GM}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix}}_{\text{derivamos esto}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_x \\ w_y \end{pmatrix}}_{\text{pert. sólo afectan a la velocidad}}$$

Necesitamos la matriz de transición F (es el jacobiano):

$$F(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ GM\frac{3x^2-r^2}{r^5} & GM\frac{3xy}{r^5} & 0 & 0 \\ GM\frac{3xy}{r^5} & \left(\cancel{GM\frac{3x^2-r^2}{r^5}}\right) \; GM\frac{3y^2-r^2}{r^5} & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{con } r=\sqrt{x^2+y^2}}$$

Sólo cogemos la sol del OD45 cada 0,1 h (creo)

El modelo de medida: (sólo se evalua para cada k)

$$\vec{z}_k = h(\vec{x}_k) + \vec{V}_k$$

$$\vec{h}(\vec{x}) = r = \sqrt{x^2+y^2}$$

El jacobiano:

$$H = \frac{\partial \vec{H}}{\partial \vec{x}}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = x/r \rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2} \quad \Big| \quad \frac{\partial h}{\partial y} = y/r \quad \Big| \quad \frac{\partial h}{\partial \dot{x}} = 0 = \frac{\partial h}{\partial \dot{y}} \quad \Rightarrow H = \begin{pmatrix} \frac{x}{r}, & \frac{y}{r} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto tiene que ser 4x4?

Para ode 45

$[t_p, x_p] = \text{ode}45(@\text{difeq}, [t_{ini}, t_{fin}], xp)$

vector de 20 componentes

xp son las medidas iniciales con las que se comienza

@difeq tiene las ecuaciones diferenciales (es una función)

Especificas t_{ini} y t_{fin} ($t_{fin} - t_{ini} = t_{pred}$)

queremos los datos de x_p en t_{fin}

xp(end,:)

tiene las 4 variables de estado que necesitamos, pero están las 20 de las 20 ecuaciones.

$$xp = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ P(0,0) \\ P(0,1) \\ \vdots \\ P(3,3) \end{pmatrix}$$

→ usa reshape para ponerlo en modo fila

Incorporación de medidas:

- Como en teoría, con la ganancia de Kalman primero

Para la función de ecuaciones diferenciales:

$\partial xp = \text{difeq}(t, xp)$ → OJO $x = xp(1:4)$ → xp es una variable que tiene 20 elementos.

↳ $xp(5:20) \to P$

OJO

$f(\vec{x})$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ -\frac{GM}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cancel{0} \\ \cancel{w_x} \\ \cancel{w_y} \end{pmatrix} \right)$$

→ Esto tal cual en la función

(se anula)

$\partial x(1) = x(3)$ → la derivada de x es la tercera variable de entrada

$\partial x(2) = x(4)$

$\partial x(3) = -\frac{GM}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$

$\partial x(4) = -\frac{GM}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$

} 4 ecuaciones

$r = \text{sqrt}(x(1)^2 + x(2)^2)$

$\partial P = FP + PF^H + Q$ → Q es una variable global (sale de las otras 16 ecuaciones que sacas)

} 16 ecuaciones

} Hay que ponerlo de forma ordenada en ∂xp (en forma de vector con las 20 soluciones)

↳ $\partial xp = \begin{matrix} \partial x(1) \\ \partial x(2) \\ \vdots \\ \partial x(4) \\ \partial P(0,0) \\ \partial P(0,1) \\ \vdots \\ \partial P(3,3) \end{matrix}$

Notas Propias:

- La etapa de predicción ya se hace con el ode45, te resuelve las ecuaciones diferenciales que necesitas.
- Después de eso, sólo tienes que hacer la incorporación de medidas.
- No sé si la matriz de errores P v

Para la incorporación de medidas:

$P = 4x4$

$H = 1x4$

$$\underset{1x\cancel{4}}{H} * \underset{\cancel{4}x4}{P} * \underset{4x1}{H'} + R \quad \hookrightarrow 2x2$$

$$1x\cancel{4} \quad \cancel{4}x1$$

$$\underbrace{4x\cancel{4} \quad \cancel{4}x1}_{4x1}$$

K_gain es 4x1