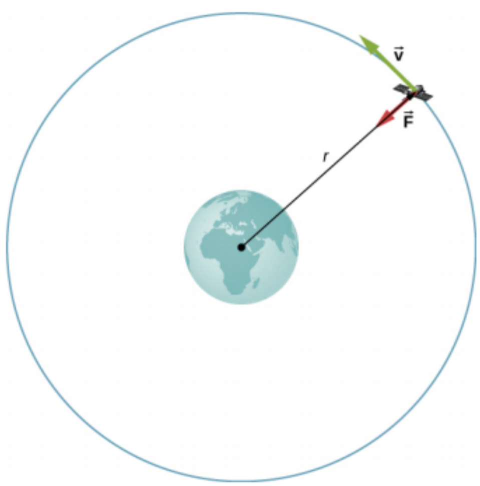
PRÁCTICA 4: SEGUIMIENTO DE UNA ÓRBITA GEOSTACIONARIA MEDIANTE FILTRO EXTENDIDO DE KALMAN CONTINUO-DISCRETO

1. Introducción

Las órbitas geostacionarias pueden conseguirse solo a 35786 km de la superficie terrestre (sobre el ecuador) con una velocidad orbital de 11068 km/h. Por ello, el seguimiento de satélites en estas órbitas es crucial.

La órbita de un satélite de masa m se rige por la siguiente ecuación dinámica (ley de gravitación universal) para la fuerza que actúa sobre el mismo:



$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -G\frac{mM}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}$$

donde:

$\mathbf{r} = (x, y, z)^t$ Vector de posición del satélite
$G = 6{,}6742 \times 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ Cte gravitación universal
$M = 5{,}9736 \cdot 10^{24}\,Kg$ Masa de la tierra ().

La expresión anterior puede escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\overset{\text{aceleración}}{\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = -\frac{GM}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \overset{\text{perturbaciones}}{\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}}$$

donde se ha añadido un vector $(w_x, w_y, w_z)^\top$ de fluctuaciones en la aceleración debidas a perturbaciones desconocidas del campo gravitacional y a la presión solar.

2. Realización práctica

Se implementará un filtro extendido de Kalman continuo-discreto que realice una predicción/seguimiento de un satélite en órbita geostacionaria a partir del modelo dinámico anterior y una serie de medidas proporcionadas.

Cuestiones a resolver e implementación:

1. Obtener la ecuación dinámica no lineal del sistema de la forma $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + \mathbf{w}$ con vector de estado $\mathbf{x}$ y vector de perturbaciones $\mathbf{w}$. Para simplificar, y sin pérdida de generalidad, consideraremos una órbita planar en el plano XY y un vector de estado $\mathbf{x} = (x\, y\, \dot{x}\, \dot{y}\,)^t$.

2. Se realizará un seguimiento de la órbita del satélite en un periodo de 24 horas mediante un filtro extendido de Kalman continuo-discreto con las siguientes características:

a) En el instante inicial consideramos que el satélite está sobre el eje X, a $42164\,km$ del centro de la Tierra (35786 órbita más 6378 radio Tierra ecuatorial), con una velocidad de $11068\,km/h$, y unas varianzas de error de $50\,km^2$ para las coordenadas de posición y de $1\,km^2/h^2$ para las de velocidad. La matriz de error inicial P_0 se toma diagonal (suposición de independencia estadística).

b) Las componentes del vector de perturbaciones de la aceleración se consideran estadísticamente independientes entre sí y blancas de media nula y con una densidad de potencia espectral $\sigma_w^2 = 0{,}01\,km^2/h^4/Hz$.

c) Se proporcionará una predicción cada $T_{pred} = 0{,}1$ h.

d) Las medidas están disponibles en intervalos de $T_{med} = 3\,h$. Las medidas corresponden a la distancia del satélite al centro de la tierra y responden al siguiente modelo:

$$z_k = r_k = \|\mathbf{r}(t_k)\| = \sqrt{x^2(t_k) + y^2(t_k)} + v_k \qquad (k = 1, \ldots, 8)$$

El error de medida v_k es blanco de media nula y varianza $R = 0{,}1\,km^2$. La secuencia de medidas observadas se proporciona en el fichero `Variables_Orbita.mat`.

e) Fichero `Variables_Orbita.mat`: archivo para la implementación y evaluación del eKF. Variables que contiene: el periodo entre predicciones (T_{pred}), el periodo entre medidas (T_{med}), b) la lista de instantes de predicción `tt` (cada T_{pred}), un array con la secuencia de coordenadas XY de la órbita verdadera `Cxy_true` en cada ionstante de predicción (se proporciona únicamente para poder evaluar la órbita estimada), d) un array con la secuencia de medidas `zmed` a emplear por el eKF, e) las varianzas de perturbación σ_w^2 y del ruido de medida σ_v^2, y d) constante GM en unidades de kg, km y h.

3.

4. Cuestiones a resolver:

a) El filtro KF debe proporcionar una estima en cada instante de medida $t_k = kT_{pred}$. Dibujar la órbita descrita (estimada) en el plano XY y compararla con la verdadera.

b) Dibujar la evolución temporal del radio estimado de la órbita, es decir, la distancia estimada

$$\hat{r}_k = \sqrt{\hat{x}^2(t_k) + \hat{y}^2(t_k)}$$

al centro de la Tierra, y compararla con las de los radios de órbita medido y verdadero. Comparar la desviación estándar del ruido de medida con la desviación estándar del error entre r_k y $\hat{r}_k$, y comentar el resultado.

c) Calcular y dibujar la secuencia de error cometido en la posición, definido como la distancia entre la órbita estimada y la verdadera en cada instante de tiempo,

$$e(t_k) = \sqrt{(x(t_k) - \hat{x}(t_k))^2 + (y(t_k) - \hat{y}(t_k))^2},$$

y compararlo con el error cometido estimado, definido como,

$$\hat{e}(t_k) = \sqrt{\sigma_x^2(t_k) + \sigma_y^2(t_k)}$$

donde $\sigma_x^2(t_k) = E[(x(t_k) - \hat{x}(t_k))^2] = P_k(0,0)$, $\sigma_y^2(t_k) = E[(y(t_k) - \hat{y}(t_k))^2] = P_k(1,1)$.

NOTA: para la resolución de ecuaciones diferenciales se hará uso de la función `ode45` de MatLab.