

# Methoden der Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. F. Puente León

INSTITUT FÜR INDUSTRIELLE INFORMATIONSTECHNIK



# Organisatorisches

## Termine

- Mi. 11:30-13:00 EAS\* (Vorlesung, **wöchentlich**)
- Do. 11:30-13:00 HS II, 30.41 (Übung, 8 Termine; Beginn: 18.10.18)

\*) am 21.11.18 keine VL wg. „Uni für Einsteiger“

## Modulunterlagen

- [PJ15]: Puente León, Jäkel: **Signale und Systeme**, 6. Aufl., De Gruyter, Berlin, 2015 (Kapitel 7–9); E-Book im KIT-Intranet kostenlos verfügbar
- [KSW08]: Kiencke, Schwarz, Weickert: **Signalverarbeitung** (Kapitel 4–9), Oldenbourg, München, 2008
- **Vorlesungsfolien** im ILIAS-System (Passwort: **wavelet09**)
- **Übungsblätter** sowie **Zusammenfassung** des Vorlesungsstoffes
- Weitere Informationen unter [www.iiit.kit.edu/msv.php](http://www.iiit.kit.edu/msv.php) erhältlich



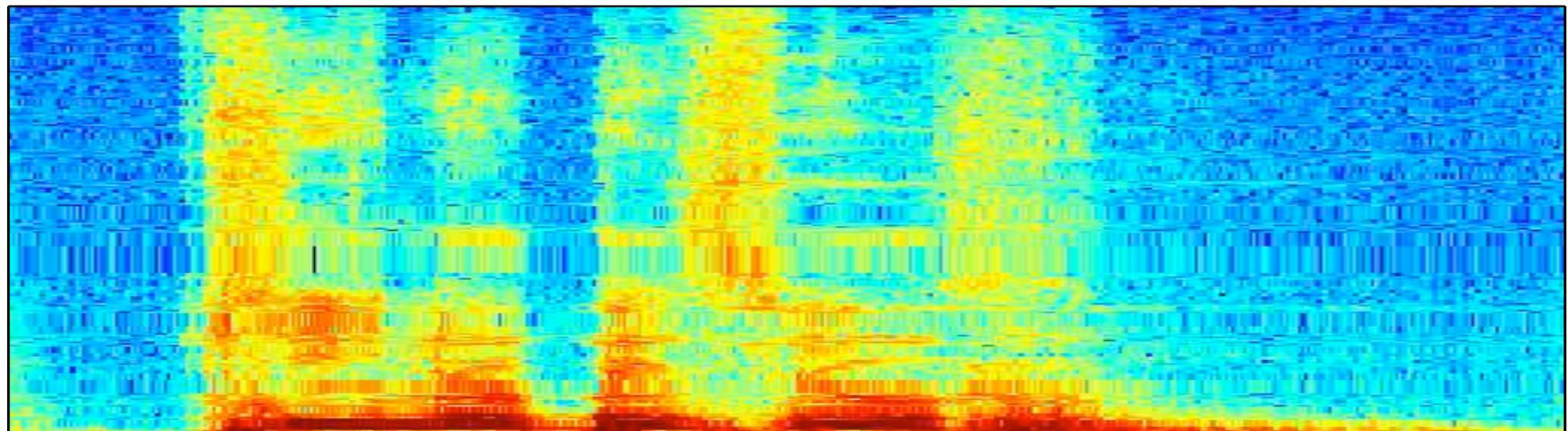
## Feedback, Fragen

- während oder nach der Vorlesung
- Übungsleiter: M.Sc. W. Krippner ([wolfgang.krippner@kit.edu](mailto:wolfgang.krippner@kit.edu))

- Bisher **Fourier-Transformation** zur Signalanalyse [Vorlesung „Signale und Systeme“]
- Nachteil: keine Information, zu welchen Zeitpunkten bestimmte Spektralanteile auftauchen → Probleme bei instationären Signalen
- Wunsch: gleichzeitige Darstellung eines Signals in Zeit und Frequenz

**Beispiel: Kurzzeit-Fourier-Transformation eines instationären Signals**

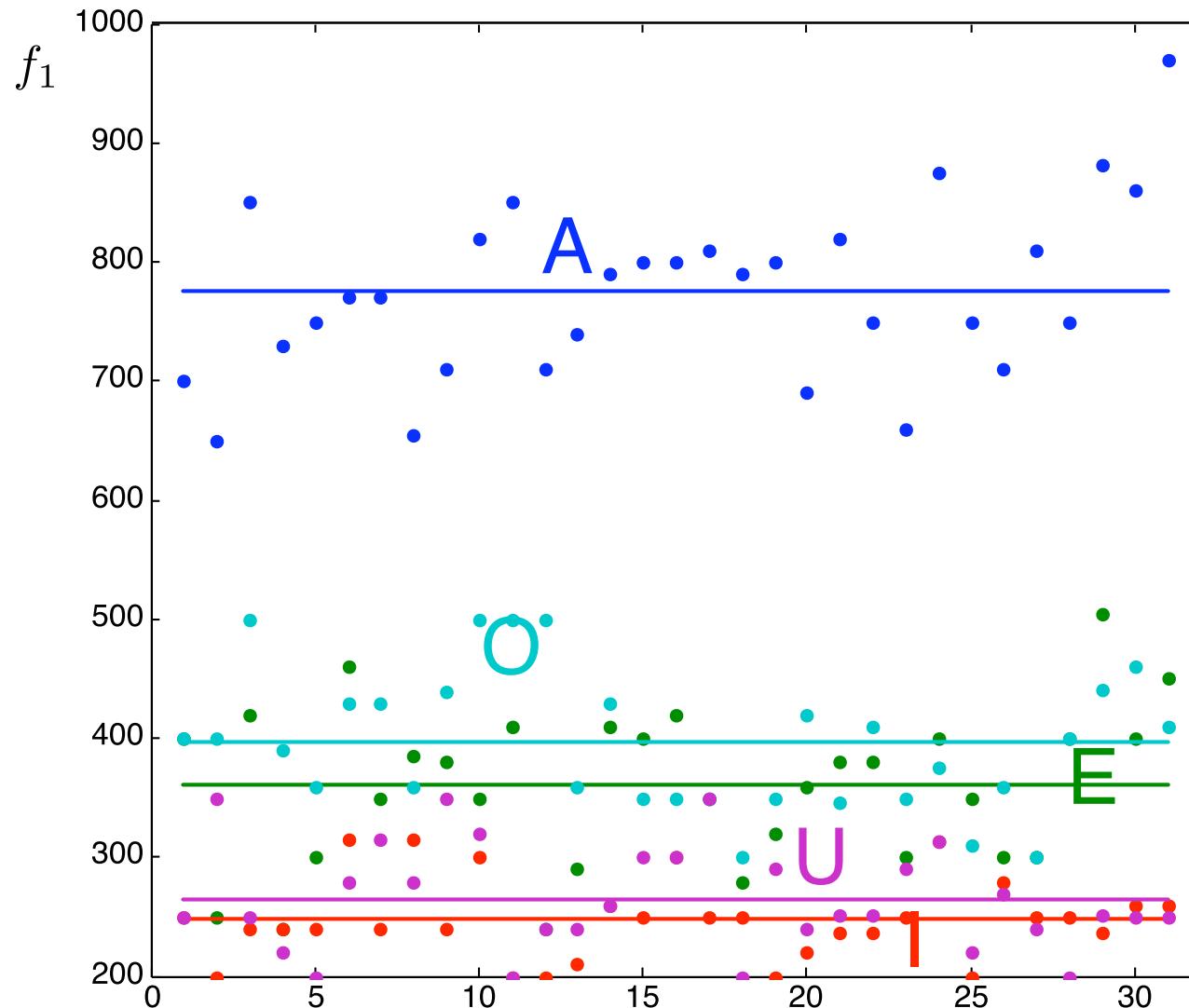
↑  
Frequenz



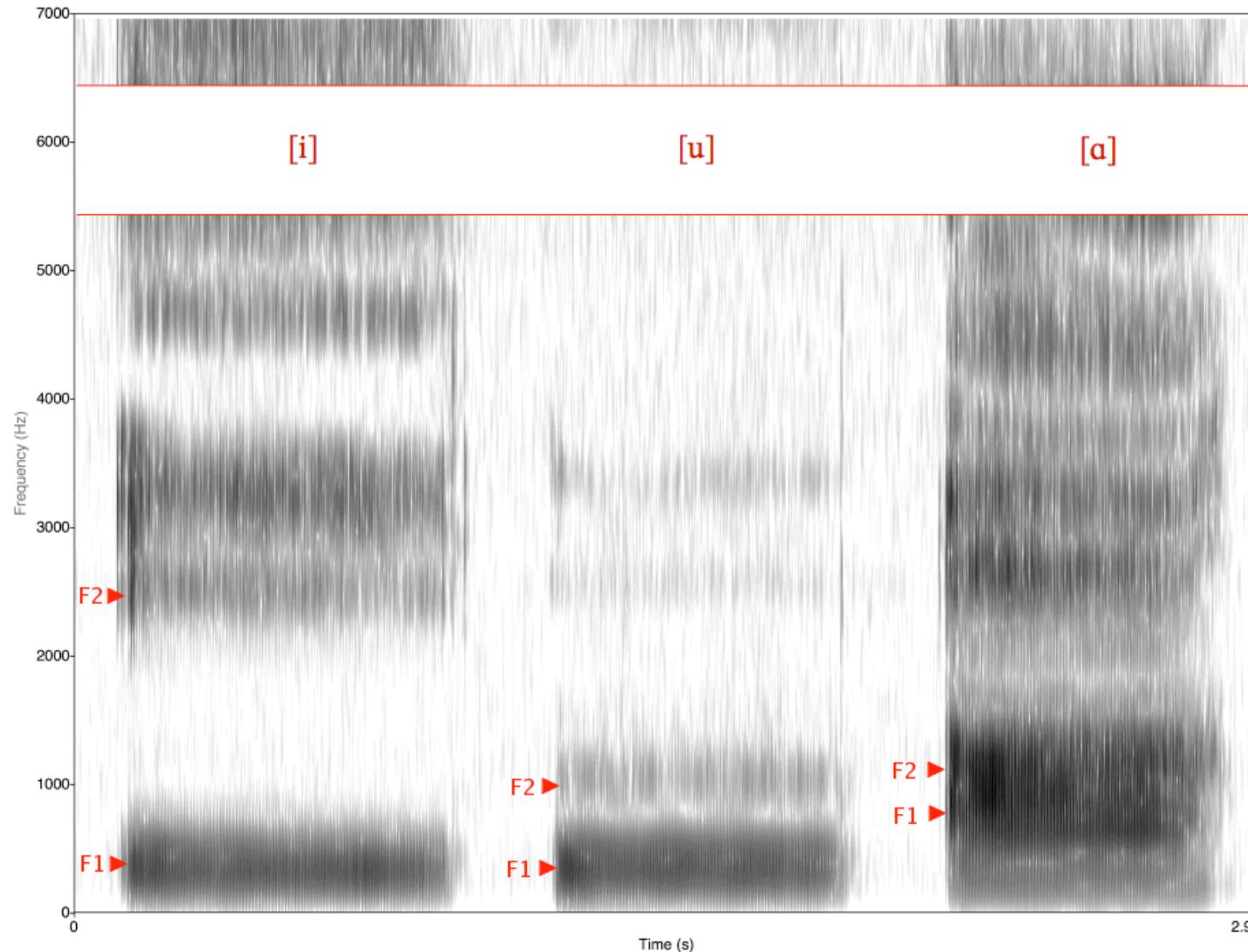
Zeit

# Motivation

**Beispiel:** Klassifikation von Vokalen anhand des ersten **Formanten**

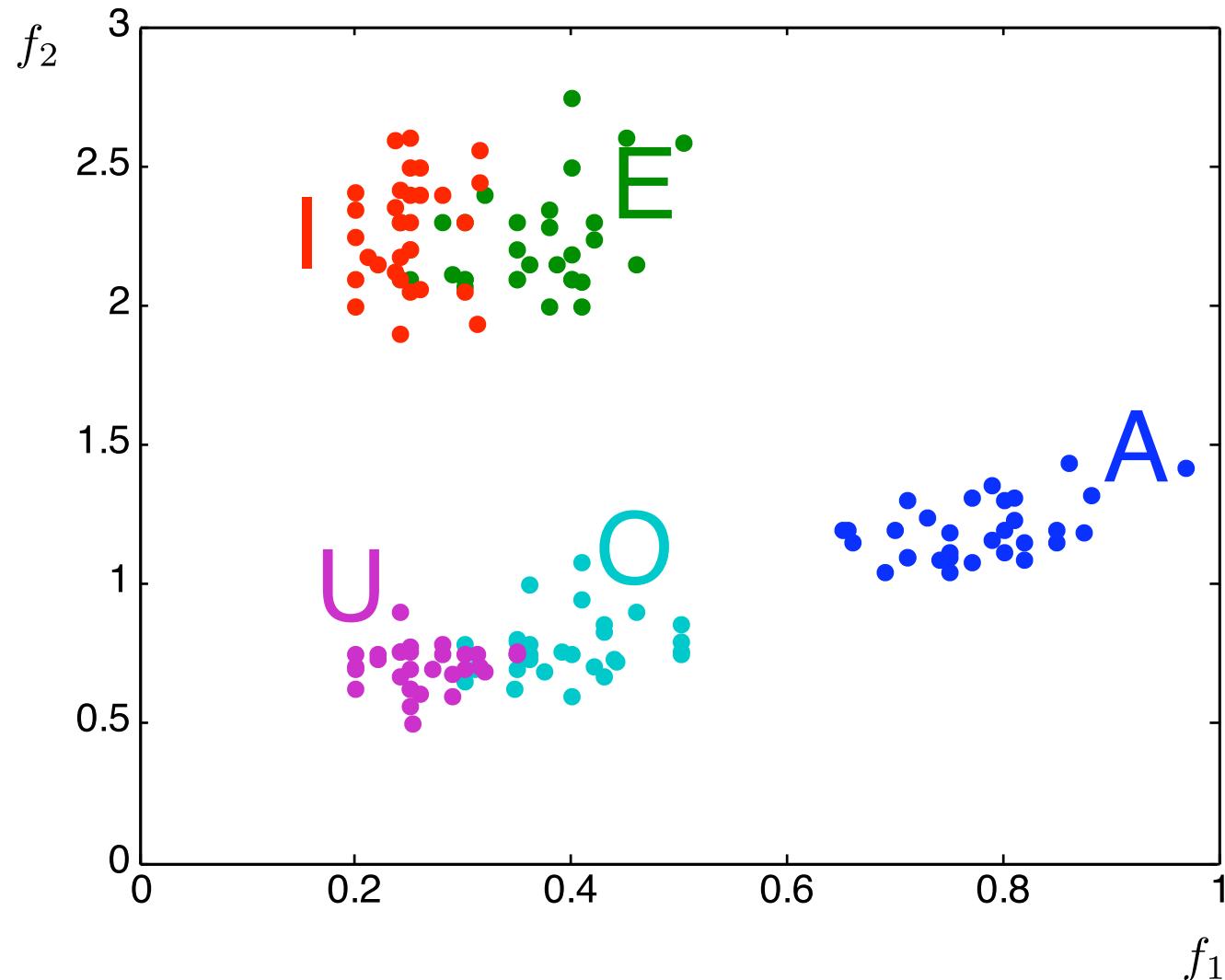


## Spektrogramm englischer Vokale mit Frequenzen der ersten 2 Formanten



Quelle:  
Wikipedia

## Beispiel: Klassifikation von Vokalen anhand der ersten beiden Formanten



## 1. Teil: Zeit-Frequenz-Analyse und Eigenwertverfahren

- **Kurzzeit-Fourier-Transformation** (Kap. 2)
- **Wavelet-Transformation** und **Wavelet-Reihen** (Kap. 3 und 4)
- **Wigner-Ville-Verteilung** (Kap. 5)
- **Karhunen-Loève- und Cosinus-Transformation** (Kap. 6)
- Anwendungen: Gesichtserkennung, Bildkompression (JPEG), Sprachverarbeitung, Ultraschallmessung, EKG-Signalanalyse etc.

## 2. Teil: Schätzverfahren

- Schätzung von Parametern eines Signals oder Systems (Kap. 7 und 8)
- Zustandsschätzung: modellgestützte Schätzung veränderlicher Systemzustände (**Kalman-Filter**) (Kap. 9)
- Anwendungen: Signalschätzung aus verrauschten Messungen, Systemidentifikation, Schätzung der Kraftfahrzeug-Dynamik (ESP, Fahrerassistenzsysteme), Navigationssysteme für die Luft- und Raumfahrt

# 1. Signaldarstellung mit Frames

# 7. Signaldarstellung mit Frames

## Wiederholung

- Signale können mathematisch als Funktionen (meist der Zeit) dargestellt werden
- Mehrere Funktionen spannen einen Vektorraum auf

## Beispiel

- Die Funktionen  $x_1(t) = t$  und  $x_2(t) = t^2$  spannen den Raum aller Funktionen  $x(t)$  auf, die sich durch  $x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$  darstellen lassen
  - Die Funktionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  werden Basisfunktionen genannt
  - In dieser Basis wird das Signal  $x(t)$  durch die Koeffizienten  $a_i$  dargestellt
- 
- Transformation zwischen verschiedenen Signaldarstellungen (Basisfunktionensystemen) erfolgt über das **Innenprodukt**
  - Dabei ist eine Unterscheidung zweier Signalklassen nötig

## 3.1.1 Signalklassen

### Definition: Energiesignale

- Energiesignale haben über einem unendlich großen Definitionsintervall  $t \in [-\infty, \infty]$  eine endliche Signalenergie:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

- Norm und Innenprodukt:  $E_x = \|x(t)\|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle_t$

- Energiesignale müssen notwendigerweise abklingen:

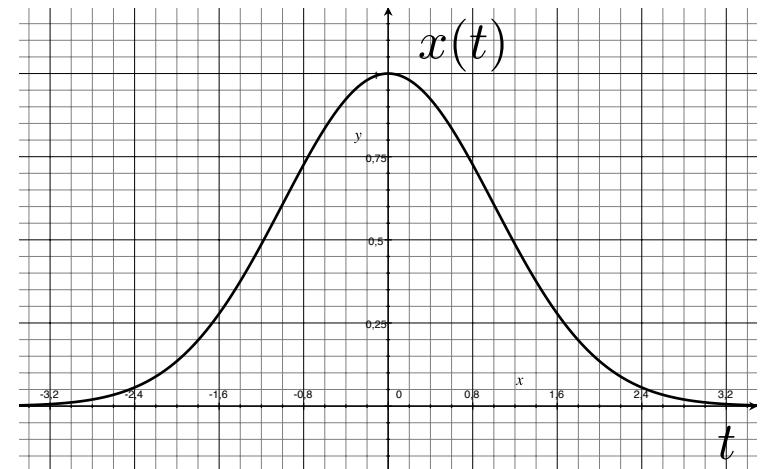
$$x(t) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \pm\infty$$

### Beispiel:

- Impulsantwort eines stabilen LTI-Systems:

$$x(t) = e^{-t^2/2}$$

$$E_x = \sqrt{\pi}$$



## Definition: Leistungssignale

- Leistungssignale haben eine endlich große Signalleistung über dem Definitionsintervall  $t \in [-\infty, \infty]$ . Die Signalenergie ist unendlich groß.

- Signalleistung: 
$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt < \infty$$

- Norm und Innenprodukt: 
$$P_x = \|x(t)\|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle_t$$

- Leistungssignale klingen nicht oder nicht schnell genug ab, um eine endliche Signalenergie zu besitzen
- **Beispiel:** periodische Funktionen:

$$x(t) = \sin(t)$$

$$E_x \rightarrow \infty$$

$$P_x = 1/2$$

# 7. Signaldarstellung mit Frames

## 3.8.1 Zeitdauer und Bandbreite von Energiesignalen

- Interpretation der auf die Energie  $\|x(t)\|^2$  normierten Energiedichte  $\frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2}$  als verallgemeinerte Wahrscheinlichkeitsdichte
- „Mittelwerte“ und „Varianzen“ im Zeit- und Frequenzbereich bedeutungsvoll

### Definition: Mittlere Zeit, mittlere Frequenz, Zeitdauer und Bandbreite

- Die **mittlere Zeit**  $t_x$  und die **mittlere Frequenz**  $f_x$  sind die ersten Momente (Mittelwerte) der normierten Energiedichten:

$$t_x = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2} dt \quad f_x = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot \frac{|X(f)|^2}{\|X(f)\|^2} df$$

- Entsprechend sind die **Zeitdauer**  $\Delta_t$  und die **Bandbreite**  $\Delta_f$  über die zweiten zentralen Momente (Varianzen) der normierten Energiedichten definiert:

$$\Delta_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_x)^2 \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2} dt \quad \Delta_f^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (f - f_x)^2 \frac{|X(f)|^2}{\|X(f)\|^2} df$$

## Definition: Fensterfunktion

- Eine **Fensterfunktion**  $w(t)$  ist ein reelles, symmetrisches, nichtnegatives Energiesignal, dessen Signalenergie überwiegend im Bereich der mittleren Zeit und der mittleren Frequenz lokalisiert ist. Man sagt: Das Fenster ist ein **kompaktes** Signal.
- Üblich: Normierung der Signalenergie auf  $\|w(t)\|^2 = 1$ .

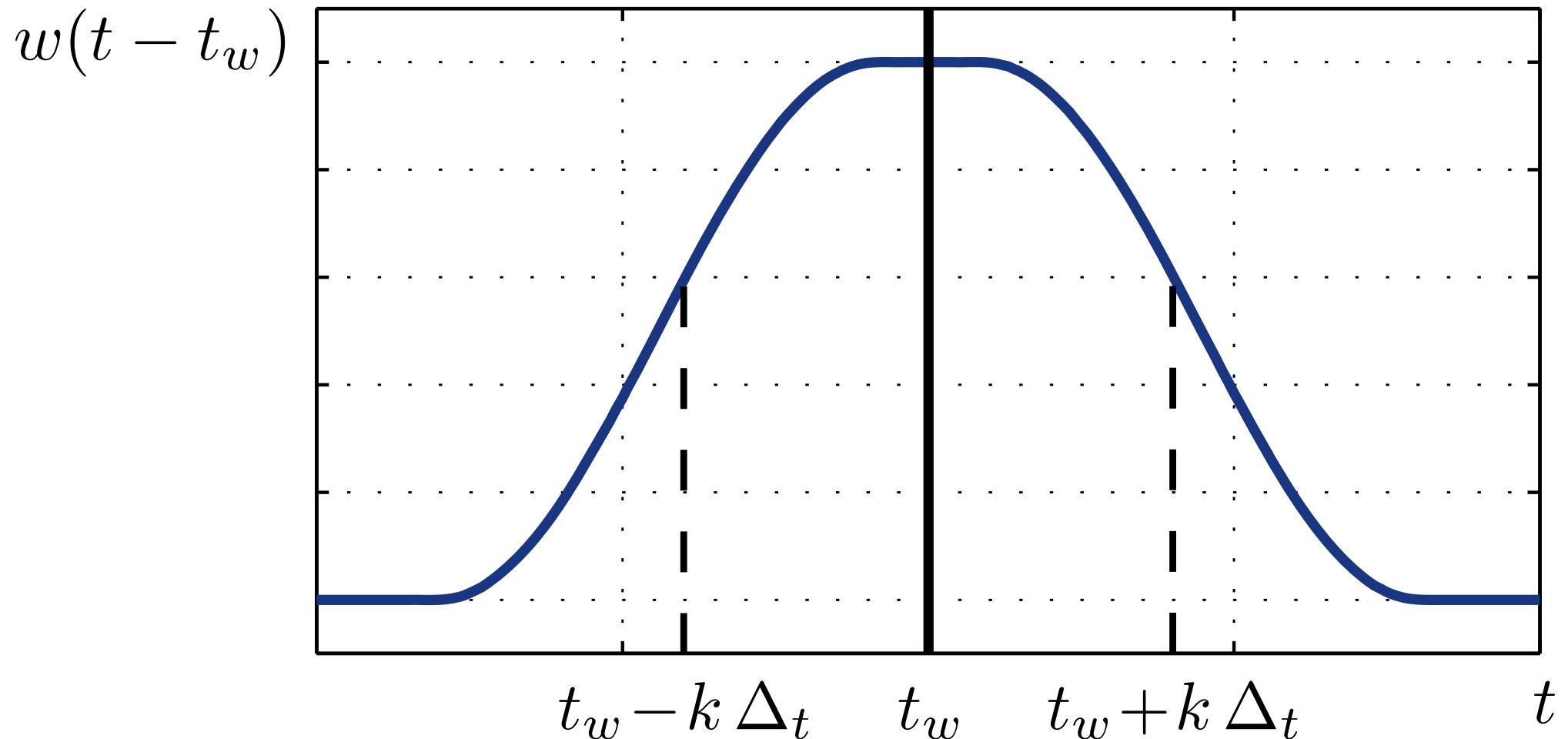
### 7.1.1 Verschiebungsinvarianz

- Definitionsgemäß besitzt eine (nichtverschobene) Fensterfunktion  $w(t)$  die mittlere Zeit und die mittlere Frequenz null.
- Zur Zeit-Frequenz-Analyse wird das Fenster  $w(t)$  um die Zeit  $t_w$  und die Frequenz  $f_w$  verschoben. Dadurch erhält man:

$$w(t - t_w) \exp(j2\pi f_w t) \circlearrowright W(f - f_w) \exp(-j2\pi(f - f_w)t_w)$$

- Die Zeitdauer  $\Delta_t$  und Bandbreite  $\Delta_f$  des Fensters sind unabhängig von den Verschiebungen  $t_w$  und  $f_w$  (**Verschiebungsinvarianz**).

## Zeitlich verschobene Fensterfunktion



## Leckeffekt

- Entsteht bei Fensterung des Signals  $x(t)$ :

$$x_w(t) = x(t) \cdot w(t - t_w) \exp(j2\pi f_w t)$$

- Ursprüngliches Spektrum  $X(f)$  wird durch Fensterung verfälscht:

$$X_w(f) = X(f) * W(f - f_w) \exp(-j2\pi(f - f_w)t_w)$$

## Diskussion

- Durch Fensterung des Signals  $x(t)$  **wird die Zeitdauer i. d. R. kleiner**. Das Signal wird zeitlich kompakter („schärfer“).
- Durch den Leckeffekt wird das Spektrum „verschmiert“; die **Bandbreite wird größer**. Das Signal wird durch die Filterung bzgl. der Frequenz unschärfer.

## Aufgabenstellung

- gleichzeitige Betrachtung eines Signals  $x(t)$  in Zeit und Frequenz
- Mögliche Vorgehensweise: Fensterung des Signals mit einer in Zeit und Frequenz kompakten Funktion
- Annahme:  $t_w$  und  $f_w$  gleich null (Zeitdauer und Bandbreite unabhängig davon)
- Berechnung von  $\Delta_t^2 \cdot \Delta_f^2$  signalabhängig
- Abschätzung mittels der Schwarz'schen Ungleichung liefert die:

## Unschärferelation

- Es gilt:
$$\Delta_t \cdot \Delta_f \geq \frac{1}{4\pi}$$
- Zeitdauer und Bandbreite können **nicht gleichzeitig** beliebig klein gewählt werden

**Aussage:** Eine schmale Fensterfunktion (feine Zeitauflösung) besitzt ein breites Spektrum (grobe Frequenzauflösung). Das Umgekehrte gilt für ein breites Fenster.

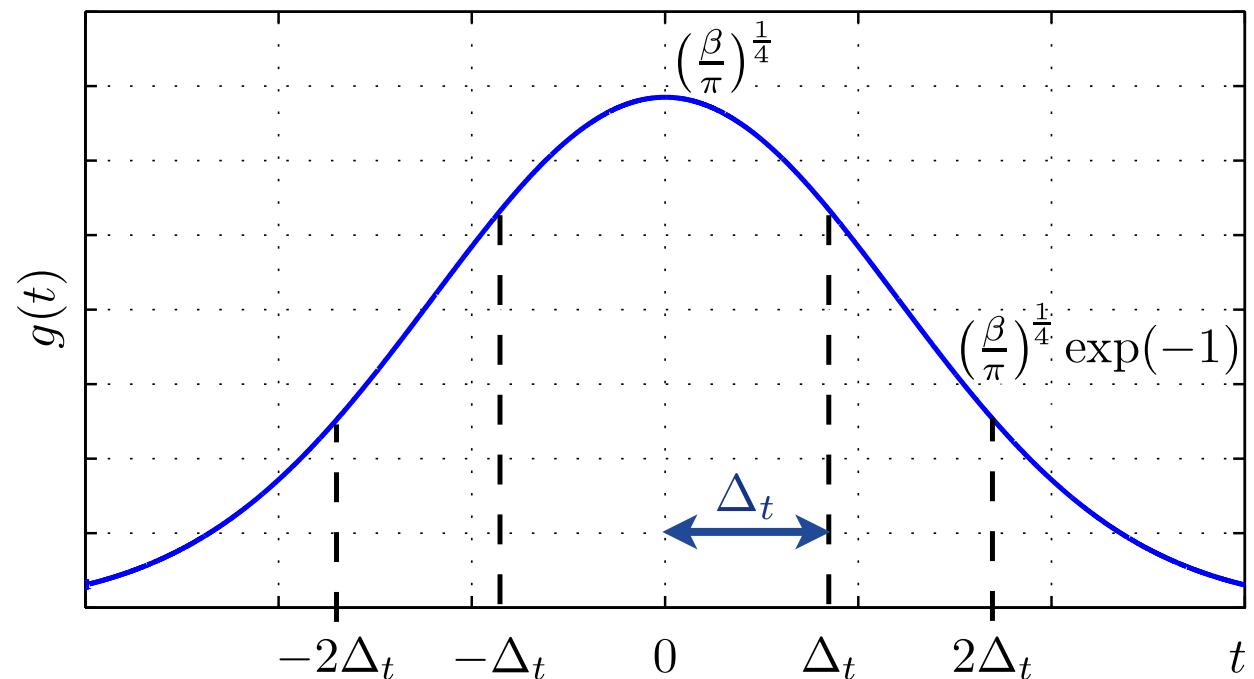
- **Frage:** Welche Funktion besitzt das kleinstmögliche Zeitdauer-Bandbreite-Produkt?
- Man kann zeigen, dass es sich um den **Gauß-Impuls** handelt:

$$g(t) = (\beta/\pi)^{1/4} \exp\left(-\frac{\beta}{2} t^2\right)$$

In der Unschärferelation gilt dann das Gleichheitszeichen.

- Dessen Zeitdauer-Bandbreite-Produkt ist demnach:

$$\Delta_t \cdot \Delta_f = \frac{1}{4\pi}$$



## 7.1.2 Effektive Zeitdauer und effektive Bandbreite

- Die Zeitdauer eines Signals (als 2. Zentralmoment) ist klein gegenüber dem Zeitintervall, in dem das Signal nennenswerte Amplituden aufweist
- **Alternativ:** Definition der **effektiven Zeitdauer**
- Fläche unter dem Betrag des Signals wird in flächengleiches Rechteck (bei gleicher maximaler Amplitude  $x_{\max}$ ) umgeformt:

$$T_{\text{eff}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x(t)|}{x_{\max}} dt$$

- Abschätzung, wann ein Signal **nennenswerte Energieanteile** aufweist
- Gute Wahl für die Zeitverschiebung von Fensterfunktionen zur Zeit-Frequenz-Analyse (z. B. Gabor-Reihe, siehe Kapitel 2)
- Analog: **effektive Bandbreite**:

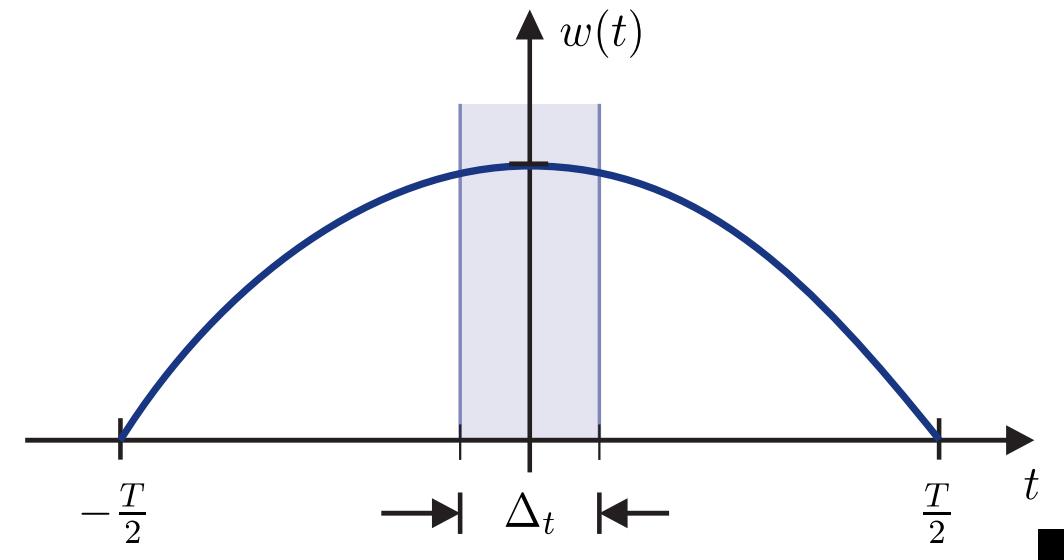
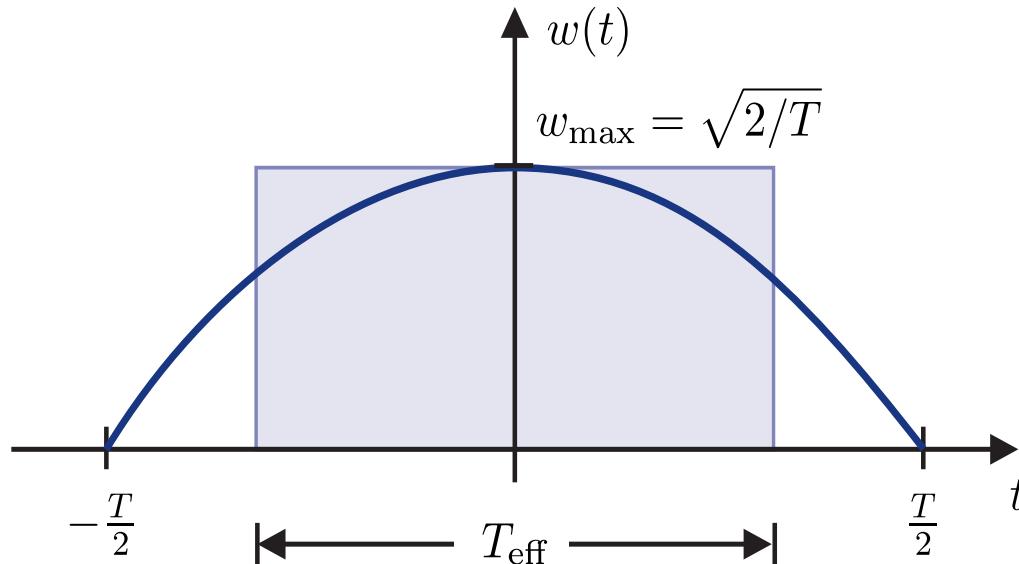
$$F_{\text{eff}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(f)|}{X_{\max}} df$$

## 7.1.2 Effektive Zeitdauer und effektive Bandbreite

**Beispiel:** Cosinus-Halbwelle (Vorfaktor bewirkt Normierung auf Energie 1)

$$x(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) r_T(t) \quad r_T(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$T_{\text{eff}} = \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) dt = \frac{2T}{\pi} \approx 0,637 \cdot T \quad \Delta_t \approx 0,181 \cdot T$$



## 7.2 Skalierung

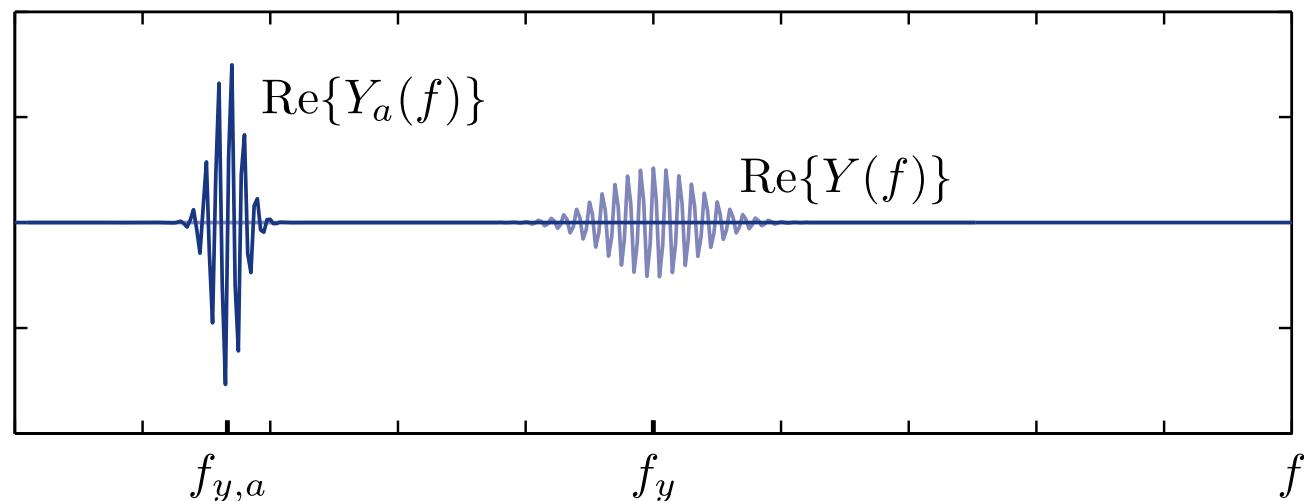
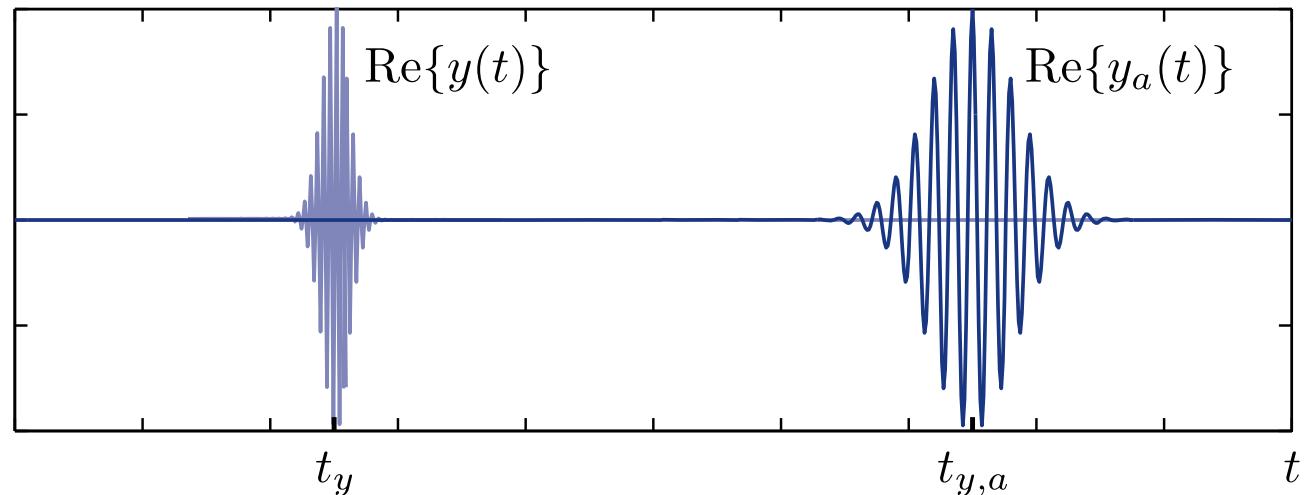
**Wavelet-Transformation** (Kap. 3) basiert auf der Skalierung sog. „Mutter-Wavelets“.

Wie ändern sich die Signaleigenschaften durch Skalierung?

- Skaliertes Signal:  $y_a(t) = y\left(\frac{t}{a}\right), \quad a > 0$
- Fourier-Transformierte:  $Y_a(f) = a Y(af)$
- Energieänderung:  $E_{y,a} = a \cdot E_y$
- Skaliertes Signal mit gleichbleibender Energie:  $y_a(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} y\left(\frac{t}{a}\right)$
- Mittlere Zeit:  $t_{y,a} = a \cdot t_y$
- Zeitdauer:  $\Delta_{t,a} = a \Delta_t$
- Mittlere Frequenz:  $f_{y,a} = \frac{1}{a} \cdot f_y$
- Bandbreite:  $\Delta_{f,a} = \frac{1}{a} \Delta_f$

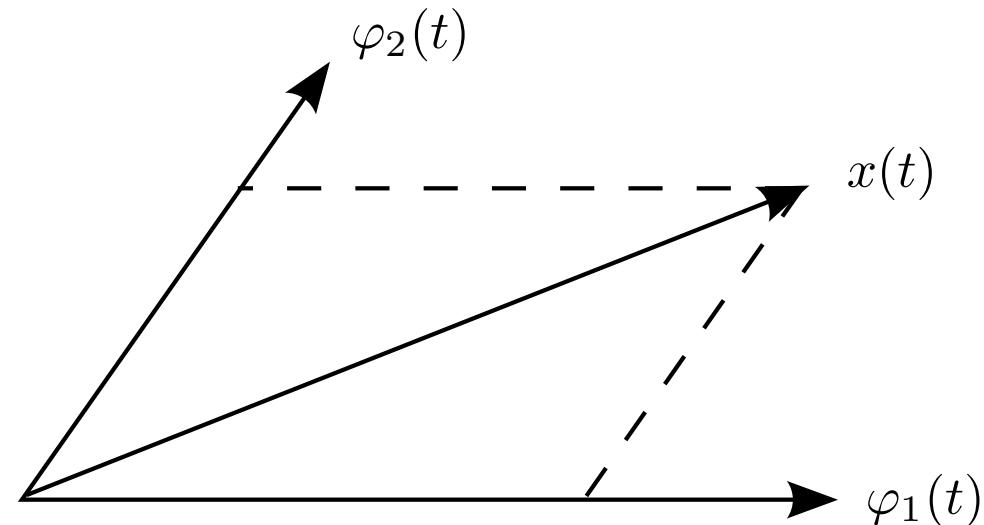
## 7.2 Skalierung

- Streckung in Zeit: Vergrößerung der mittleren Zeit und Zeitdauer, Verkleinerung der mittleren Frequenz und Bandbreite (Bsp.:  $a = 3$ )



## 7.3.1 Basisfunktionen

- Signale können als Funktionen oder Vektoren behandelt werden, die einen Funktionen- bzw. Vektorraum aufspannen
- Ein Element  $x(t)$  dieses Vektorraums lässt sich als Linearkombination der **Basisfunktionen**  $\varphi_i(t)$  darstellen:  $x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \varphi_i(t)$



- **Hilbert-Raum:** Vollständiger Vektorraum mit definiertem **Innenprodukt** und **Norm** gemäß:

$$\|x(t)\| = \sqrt{\langle x(t), x(t) \rangle}$$

- Zur Berechnung der Koeffizienten  $a_i$  wird das Signal  $x(t)$  auf die Basisfunktionen  $\varphi_i(t), i = 1, \dots, n$  projiziert:

$$\langle x(t), \varphi_1(t) \rangle = a_1 \langle \varphi_1(t), \varphi_1(t) \rangle + a_2 \langle \varphi_2(t), \varphi_1(t) \rangle + \cdots + a_n \langle \varphi_n(t), \varphi_1(t) \rangle$$

$$\langle x(t), \varphi_2(t) \rangle = a_1 \langle \varphi_1(t), \varphi_2(t) \rangle + a_2 \langle \varphi_2(t), \varphi_2(t) \rangle + \cdots + a_n \langle \varphi_n(t), \varphi_2(t) \rangle$$

⋮

$$\langle x(t), \varphi_n(t) \rangle = a_1 \langle \varphi_1(t), \varphi_n(t) \rangle + a_2 \langle \varphi_2(t), \varphi_n(t) \rangle + \cdots + a_n \langle \varphi_n(t), \varphi_n(t) \rangle$$

- In Matrix-Notation:

$$\begin{bmatrix} \langle x(t), \varphi_1(t) \rangle \\ \langle x(t), \varphi_2(t) \rangle \\ \vdots \\ \langle x(t), \varphi_n(t) \rangle \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \langle \varphi_1(t), \varphi_1(t) \rangle & \langle \varphi_2(t), \varphi_1(t) \rangle & \dots & \langle \varphi_n(t), \varphi_1(t) \rangle \\ \langle \varphi_1(t), \varphi_2(t) \rangle & \langle \varphi_2(t), \varphi_2(t) \rangle & \dots & \langle \varphi_n(t), \varphi_2(t) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_1(t), \varphi_n(t) \rangle & \langle \varphi_2(t), \varphi_n(t) \rangle & \dots & \langle \varphi_n(t), \varphi_n(t) \rangle \end{bmatrix}}_{\mathbf{G} \text{ (Gram'sche Matrix)}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}}$$

## 7.3.1 Basisfunktionen

- Daraus folgt für die Koeffizienten:

$$\mathbf{a} = \mathbf{G}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \langle x(t), \varphi_1(t) \rangle \\ \langle x(t), \varphi_2(t) \rangle \\ \vdots \\ \langle x(t), \varphi_n(t) \rangle \end{bmatrix}$$

### Diskussion

- Koeffizienten  $a_i$  eindeutig, wenn Gram'sche Matrix regulär
- Basis**  $\Leftrightarrow$  Basisfunktionen sind **linear unabhängig**
  - Keine Basisfunktion „zu viel“, keine Redundanz
  - Falls Gram'sche Matrix invertierbar  $\Rightarrow$  Koeffizienten  $a_i$  eindeutig bestimmbar
- Alternativ können Signale mittels **Frames** dargestellt werden

### Beispiel 7.11: Zeitverschobene Gauß-Impulse als Basisfunktionen

$$\varphi_m(t) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\beta}{2}(t - mT)^2\right)$$

- Impulse mit verschiedenen Verschiebungen  $m$  **nicht** orthogonal [PJ15]:

$$\langle \varphi_m(t), \varphi_{m+\Delta m}(t) \rangle \neq 0$$

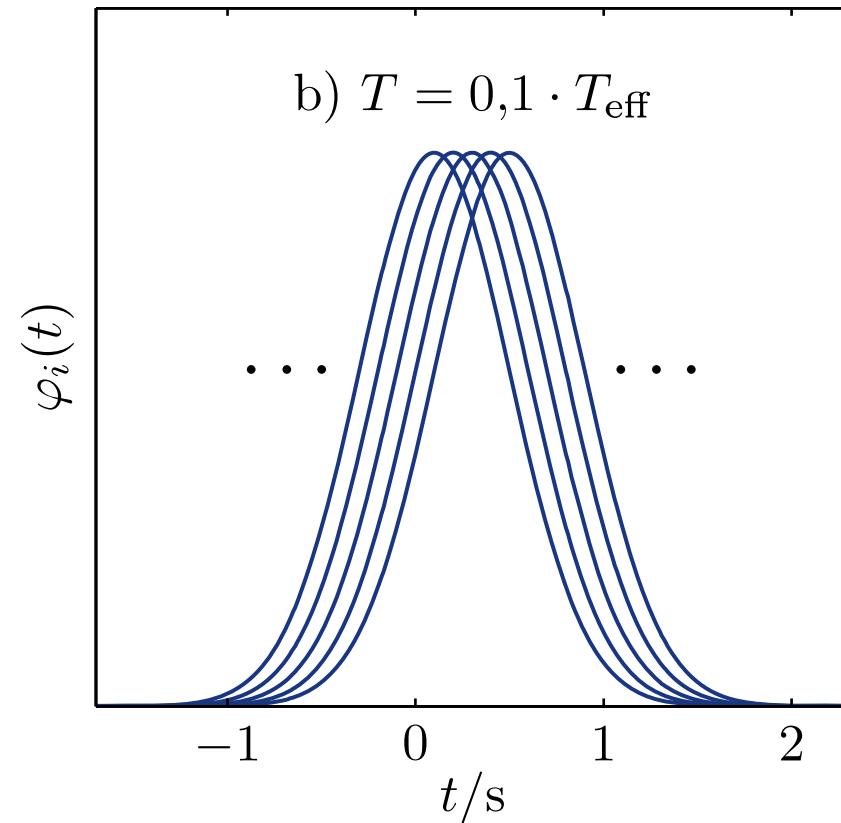
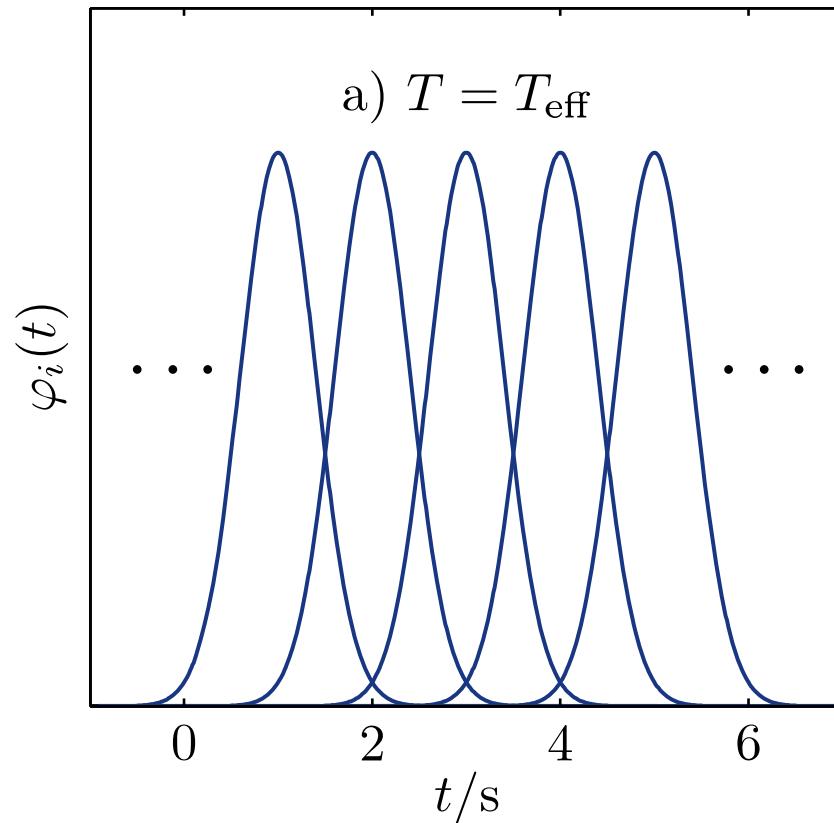
- Zeitverschobene Gauß-Impulse bilden eine **Basis**, da ein bestimmter Impuls nicht durch Linearkombination der übrigen Impulse darstellbar ist (**Redundanzfreiheit**) [PJ15]:

$$\hat{\varphi}_m(t) = \sum_{\substack{\Delta m=-\infty \\ \Delta m \neq 0}}^{\infty} c_{\Delta m} \cdot \varphi_{m+\Delta m}(t) \neq \varphi_m(t)$$

- Im Folgenden Annäherung von  $\varphi_0(t)$  durch Linearkombination verschobener Gauß-Impulse (dabei Begrenzung auf 10 Basisfunktionen, um die Gram'sche Matrix darstellen zu können)

## 7.3.1 Basisfunktionen

Gauß-Impulse als Basisfunktionen für verschiedene Zeitverschiebungen  $T$



## 7.3.1 Basisfunktionen

a) Gram'sche Matrix für  $T = T_{\text{eff}}$ :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0,21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,21 & 1 & 0,21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,21 & 1 & 0,21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,21 & 1 & 0,21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,21 & 1 & 0,21 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,21 & 1 & 0,21 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,21 & 1 & 0,21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,21 & 1 & 0,21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,21 & 1 & 0,21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,21 & 1 \end{bmatrix}$$

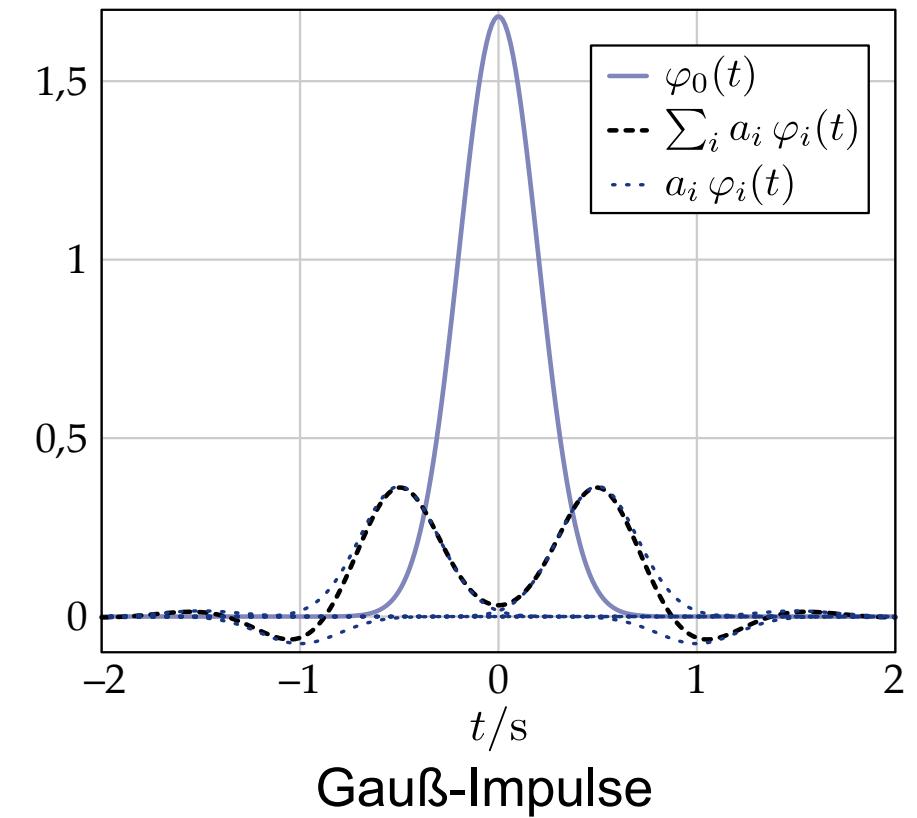
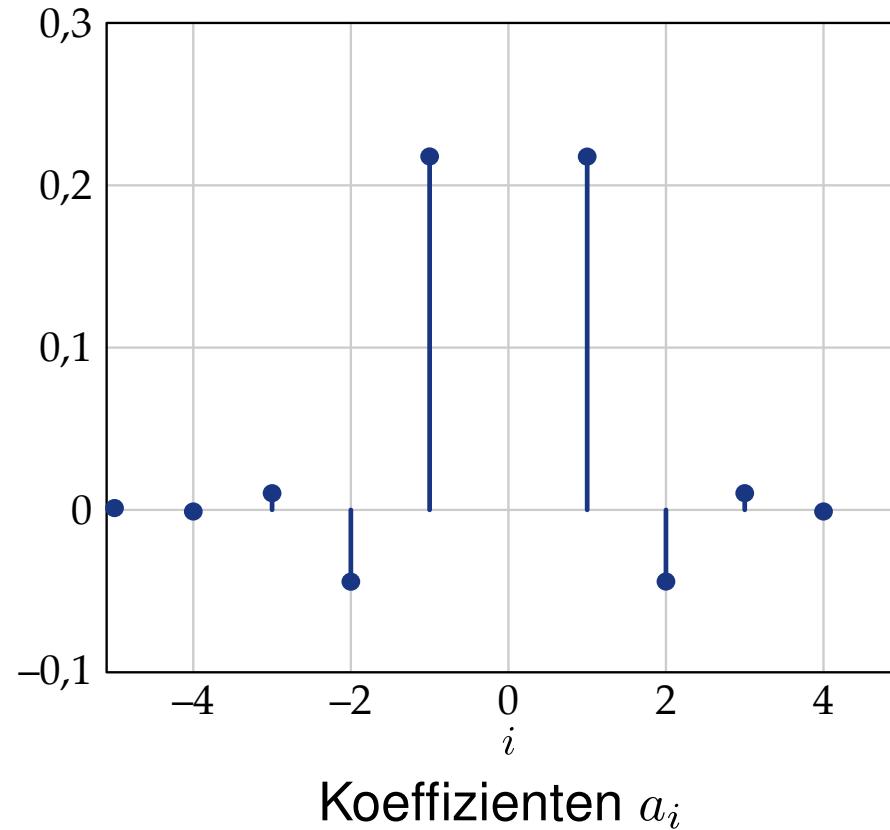
b) Gram'sche Matrix für  $T = 0,1 \cdot T_{\text{eff}}$  schlechter konditioniert:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0,98 & 0,94 & 0,87 & 0,78 & 0,57 & 0,46 & 0,37 & 0,28 & 0,21 \\ 0,98 & 1 & 0,98 & 0,94 & 0,87 & 0,78 & 0,57 & 0,46 & 0,37 & 0,28 \\ 0,94 & 0,98 & 1 & 0,98 & 0,94 & 0,87 & 0,78 & 0,57 & 0,46 & 0,37 \\ 0,87 & 0,94 & 0,98 & 1 & 0,98 & 0,94 & 0,87 & 0,78 & 0,57 & 0,46 \\ 0,78 & 0,87 & 0,94 & 0,98 & 1 & 0,98 & 0,94 & 0,87 & 0,78 & 0,57 \\ 0,57 & 0,78 & 0,87 & 0,94 & 0,98 & 1 & 0,98 & 0,94 & 0,87 & 0,78 \\ 0,46 & 0,57 & 0,78 & 0,87 & 0,94 & 0,98 & 1 & 0,98 & 0,94 & 0,87 \\ 0,37 & 0,46 & 0,57 & 0,78 & 0,87 & 0,94 & 0,98 & 1 & 0,98 & 0,94 \\ 0,28 & 0,37 & 0,46 & 0,57 & 0,78 & 0,87 & 0,94 & 0,98 & 1 & 0,98 \\ 0,21 & 0,28 & 0,37 & 0,46 & 0,57 & 0,78 & 0,87 & 0,94 & 0,98 & 1 \end{bmatrix}$$

## 7.3.1 Basisfunktionen

- Berechnung der Koeffizienten  $a_i$  durch Invertierung der Gram'schen Matrix

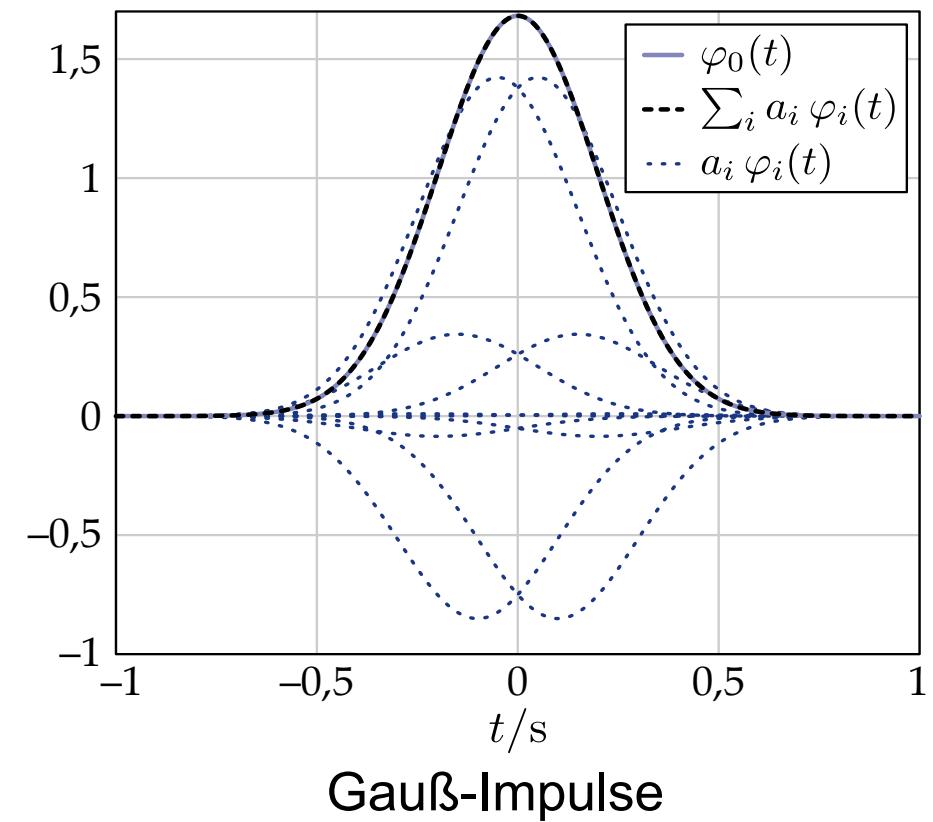
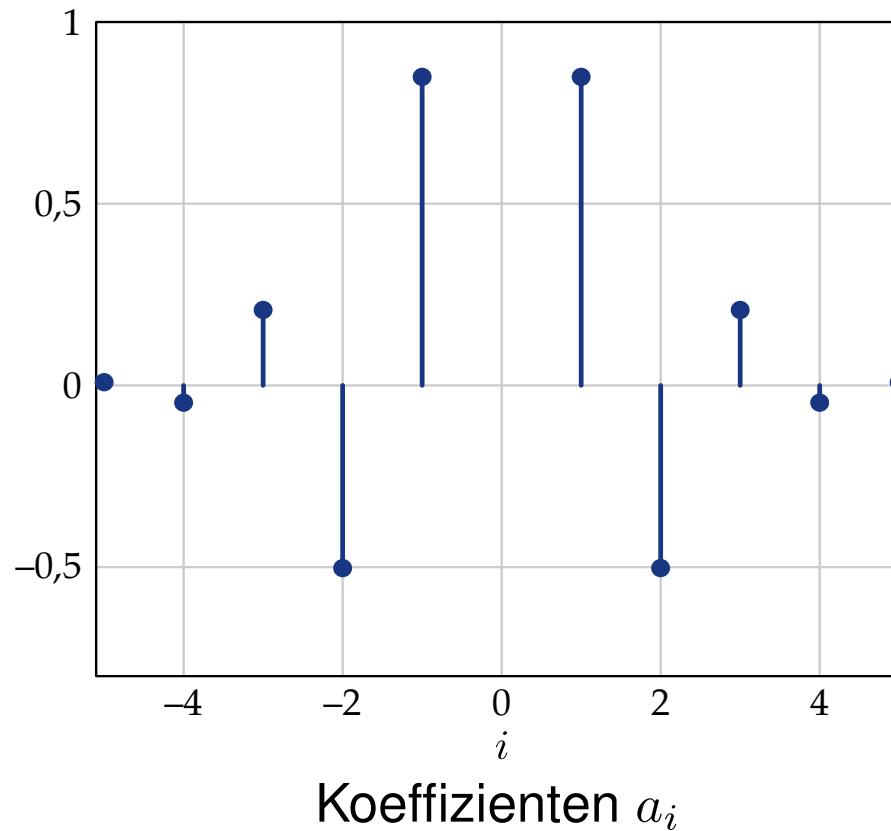
**1. Fall:** Annäherung von  $\varphi_0(t)$  durch  $\sum_i a_i \varphi_i(t)$  mit  $\frac{T}{T_{\text{eff}}} = 1$ : Approximation gelingt nicht



## 7.3.1 Basisfunktionen

### Verminderung der Schrittweite

**2. Fall:** Annäherung von  $\varphi_0(t)$  durch  $\sum_i a_i \varphi_i(t)$  mit  $\frac{T}{T_{\text{eff}}} = 0, 1$ : Funktion  $\varphi_0(t)$  und ihre Approximation sind in der Darstellung nicht mehr unterscheidbar



## 7.3.1 Basisfunktionen

### Diskussion

- Um den Gauß-Impuls  $\varphi_0(t)$  besser anzunähern, wurde die Zeitverschiebung  $T$  der Gauß-Impulse  $\varphi_i(t)$  stark verkleinert.
- Bei sehr kleinen Zeitverschiebungen  $T \leq 0,1 T_{\text{eff}}$  überlappen sich die Basisfunktionen stark. Damit ist das System der Basisfunktionen stärker überbestimmt.
- Mit kleiner werdendem  $T$  gehen allerdings die Elemente der Gram'schen Matrix gegen 1, so dass diese zunehmend schlechter konditioniert ist und nicht mehr invertiert werden kann.
- Will man deshalb den Funktionenraum mit einem stark überbestimmten Funktionensystem aufspannen, so wählt man anstelle von Basen **Frames**, bei denen die Koeffizienten durch Projektion ohne Invertierung der Gram'schen Matrix berechnet werden (vgl. Abschnitt 7.3.4).

## 7.3.1 Basisfunktionen

### Beispiel 7.12: Annäherung der Funktion $x(t) = t^2$ durch ein Basissystem zeitverschobener Gauß-Impulse

- Approximation auf endlichem Intervall, da  $x(t)$  kein Energiesignal
- Verwendung von  $2N + 1$  Gauß-Impulsen, um  $a_i$  zu berechnen:

$$\varphi_i(t) = \left( \frac{2}{T_{\text{eff}}^2} \right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\pi}{T_{\text{eff}}^2} (t - iT)^2\right), \quad T_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}$$

$$x(t) \approx \sum_{i=-N}^N a_i \varphi_i(t)$$

- Gram'sche Matrix:  $\mathbf{G} = [\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle]_{i,j} = \left[ \exp\left(-\frac{\pi}{2} \frac{T^2}{T_{\text{eff}}^2} (i-j)^2\right) \right]_{i,j}$
- Projektionen:

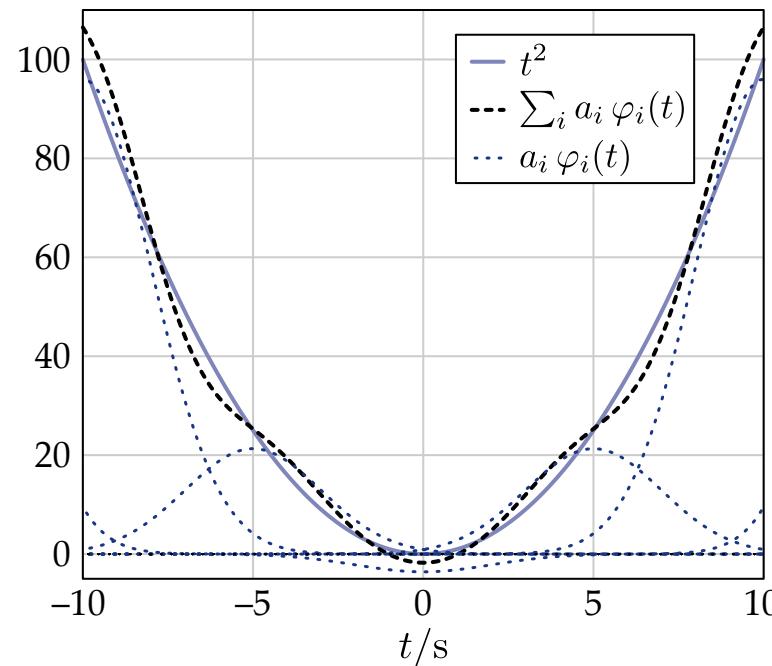
$$\begin{aligned} \langle x(t), \varphi_i(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{2}{T_{\text{eff}}^2} \right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\pi}{T_{\text{eff}}^2} (t - iT)^2\right) \cdot t^2 dt \\ &= \dots = 2^{-\frac{3}{4}} \cdot T_{\text{eff}}^{\frac{5}{2}} \cdot \pi^{-1} + (iT)^2 \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot T_{\text{eff}}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

## 7.3.1 Basisfunktionen

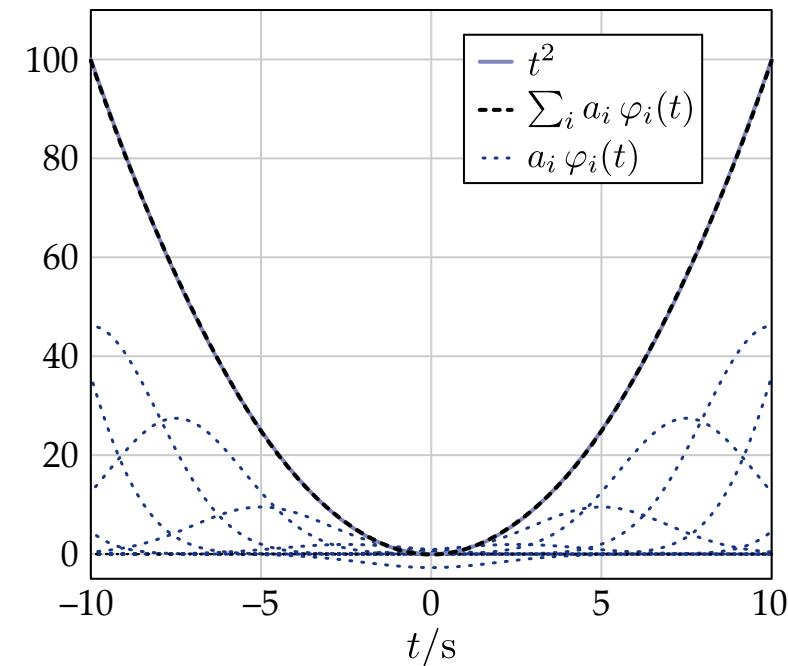
■ Koeffizienten:

$$\mathbf{a} = \mathbf{G}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \langle x(t), \varphi_1(t) \rangle \\ \langle x(t), \varphi_2(t) \rangle \\ \vdots \\ \langle x(t), \varphi_N(t) \rangle \end{bmatrix}$$

Annäherung von  $t^2$  durch  $\sum_i a_i \varphi_i$



$$T/T_{\text{eff}} = 1$$



$$T/T_{\text{eff}} = 0,5$$

### Diskussion

- Auch hier wird die Annäherung der Funktion durch die Gauß-Impulse mit kleinerer Zeitverschiebung  $T$  besser
- Der Quotient  $T/T_{\text{eff}}$  lässt sich jedoch nicht beliebig verkleinern:
  - Für  $T/T_{\text{eff}} \rightarrow 0$  gehen die Elemente der Gram'schen Matrix gegen 1 (vgl. Bsp. 7.11)
  - Die Matrix ist dann schlecht konditioniert, d. h. ihre Determinante liegt nahe bei null, was zu numerischen Problemen führt
- Gauß-Impulse sind daher als Basisfunktionen zur Darstellung des Signals  $t^2$  nicht in jedem Fall geeignet

### Definition: Orthonormale Basis

- Eine orthonormale Basis  $\{\varphi_i(t), i = 1, \dots, n\}$  erfüllt die Bedingung

$$\langle \varphi_i(t), \varphi_j(t) \rangle = \delta_{ij}$$

- Die Gram'sche Matrix wird bei orthonormalen Basen zur Einheitsmatrix
- Die Koeffizienten erhält man einfach durch Projektion des Signals auf die Basisfunktionen:

$$a_i = \langle x(t), \varphi_i(t) \rangle, \quad i = 1, \dots, n$$

- In **orthonormalen** Basissystemen gilt **Energieerhaltung** (Signalenergie = Koeffizientenenergie; vgl. Sätze von Parseval & Plancherel):

$$\|x(t)\|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i|^2$$

Bei nur **orthogonalen** Basen gilt diese Eigenschaft nicht

### Definition: Biorthonormalität

- Zwei Funktionensysteme  $\{\varphi_i(t), i = 1, \dots, n\}$  und  $\{\tilde{\varphi}_i(t), i = 1, \dots, n\}$  heißen **biorthonormal**, wenn sie die folgende Bedingung erfüllen:

$$\langle \varphi_i(t), \tilde{\varphi}_j(t) \rangle = \delta_{ij}$$

- Die Koeffizienten der Reihenentwicklung von  $x(t)$  in das Funktionensystem  $\{\varphi_i(t)\}$  folgen durch Multiplikation der **Synthesegleichung**

$$x(t) = a_1 \varphi_1(t) + \dots + a_N \varphi_N(t)$$

von rechts mit  $\tilde{\varphi}_i(t)$  zu

$$a_i = \langle x(t), \tilde{\varphi}_i(t) \rangle.$$

- Die einzelnen Funktionensysteme  $\{\varphi_i(t)\}$  und  $\{\tilde{\varphi}_i(t)\}$  müssen für sich alleine weder orthogonal noch Basissysteme sein.

## 7.3.3 Biorthonormalität

### Beispiel

- Die Basis  $\{\varphi_1, \varphi_2\}$  mit

$$\varphi_1 = (1, 0)^T \quad \text{und} \quad \varphi_2 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)^T$$

ist offensichtlich nicht orthonormal. Gemeinsam mit der dazu **biorthonormalen** Basis  $\{\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2\}$  mit

$$\tilde{\varphi}_1 = (1, -1)^T \quad \text{und} \quad \tilde{\varphi}_2 = (0, \sqrt{2})^T$$

kann dennoch ein Vektor  $x$  aus dessen Projektionen

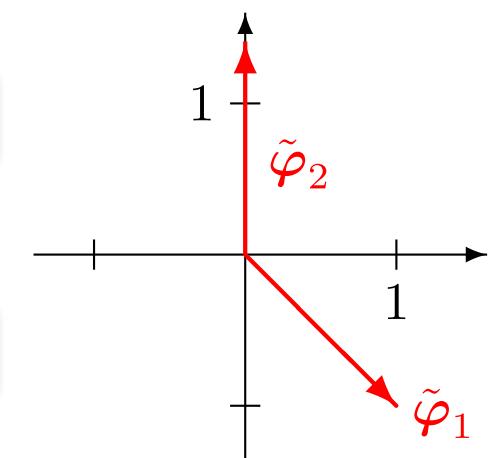
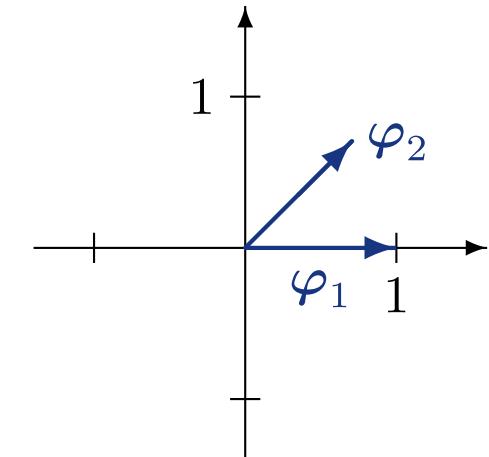
$$a_1 = \langle x, \tilde{\varphi}_1 \rangle \quad \text{sowie} \quad a_2 = \langle x, \tilde{\varphi}_2 \rangle$$

wie folgt rekonstruiert werden:

$$x = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2$$

Analyse

Synthese



- Beide Funktionensysteme sind **vertauschbar**.

- **Erinnerung:** Funktionensystem einer Basis enthält keine Redundanz. Die Darstellung eines Signals in einer Basis ist eindeutig.
- Bei stark redundanten Basen verschlechtert sich die Kondition von G.
- Alternativ kann man Funktionenräume mit einem **Frame** aufspannen.

### Definition: Frame

- Ein **Frame** ist ein Funktionensystem  $\{\varphi_i(t)\}$ , welches einen Hilbert-Raum aufspannt. Die Frame-Koeffizienten  $a_i$  werden durch Projektion berechnet:

$$a_i = \langle x(t), \varphi_i(t) \rangle$$

- Die Projektion eines beliebigen Signals  $x(t)$  mit endlicher, von null verschiedener Signalenergie auf die Frame-Funktionen ergibt Koeffizienten mit endlicher, von null verschiedener **Energie**:

$$0 < A \cdot \|x(t)\|^2 \leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i|^2 \leq B \cdot \|x(t)\|^2 < \infty$$

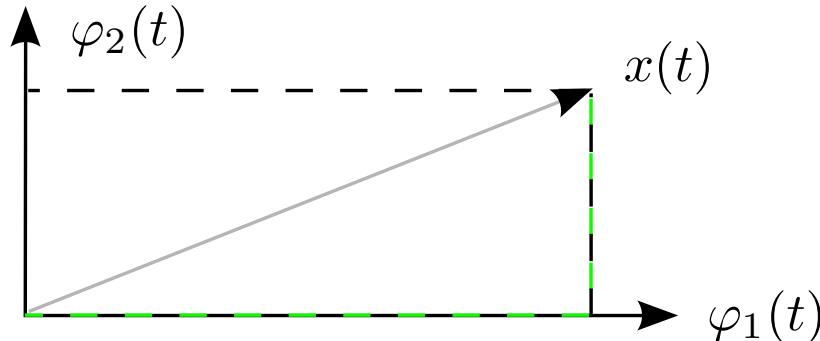
$A$  und  $B$  werden **Frame-Grenzen** der Koeffizientenenergie genannt.

## 7.3.4 Frames

### Diskussion

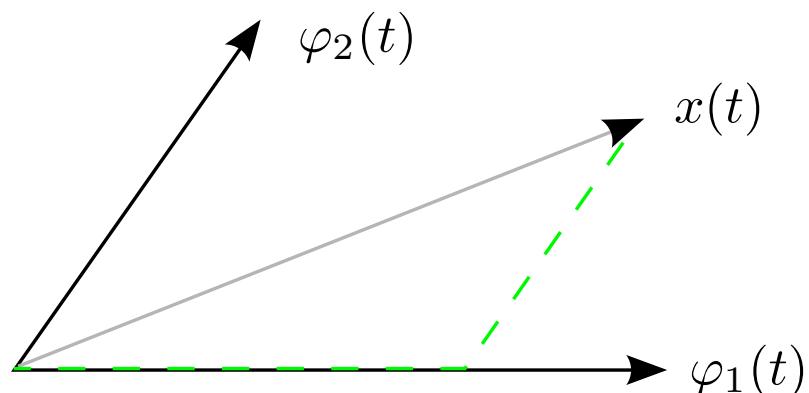
- Eine Basis ist ein Spezialfall eines Frames. Ein Frame kann dagegen als eine „überganzvolle Basis“ aufgefasst werden.
- Die Frame-Funktionen können im Allgemeinen linear abhängig sein, also Redundanz enthalten.  
Die Koeffizienten  $a_i$  sind dann allerdings **weder optimal noch eindeutig**.
- Für eine sinnvolle Analyse des Signals  $x(t)$  ist deshalb zumindest eine Beschränkung der Koeffizientenenergie des Frames erforderlich.
- Für die Frame-Grenzen  $A$  und  $B$  gilt:
$$0 < A \leq B < \infty$$
- Je näher die Frame-Grenzen  $A$  und  $B$  zusammenliegen, desto besser repräsentieren die Koeffizienten  $a_i$  die anteilige Energie des Signals  $x(t)$  bezüglich der Funktionen  $\varphi_i(t)$ .

## 7.3.4 Frames



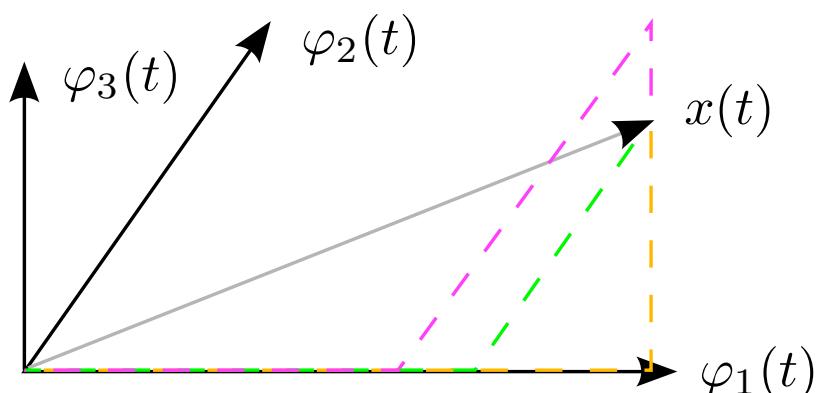
### Orthogonale Basis

- Koeffizienten durch Projektion
- Eindeutige Rekonstruktion



### Nicht-orthogonale Basis

- Invertierung der Gram'schen Matrix
- Eindeutige Rekonstruktion



### Redundanter Frame

- Koeffizienten durch Projektion
- Rekonstruktion nicht eindeutig

### Definition: Duale Frames

- Die beiden Folgen von Funktionen  $\{\varphi_i(t)\}$  und  $\{\tilde{\varphi}_i(t)\}$  bilden jeweils für sich einen Frame. Ferner seien sie über die Biorthonormalitätsbedingung

$$\langle \varphi_i(t), \tilde{\varphi}_j(t) \rangle = \delta_{ij}$$

miteinander verbunden.

- Wenn die Koeffizienten der Reihenentwicklung eines Signals  $x(t)$  in die Funktionen  $\varphi_i(t)$  und  $\tilde{\varphi}_i(t)$  gemäß

$$a_i = \langle x(t), \tilde{\varphi}_i(t) \rangle \quad \text{bzw.} \quad \tilde{a}_i = \langle x(t), \varphi_i(t) \rangle$$

bestimmt werden, dann heißen die beiden Funktionensysteme  $\varphi_i(t)$  und  $\tilde{\varphi}_i(t)$  **duale Frames**.

- Anwendung: Signalanalyse mit Frame  $\varphi_i(t)$ , Rekonstruktion mit dualem Frame  $\tilde{\varphi}_i(t)$

### Definition: Straffer Frame (*Tight Frame*)

- Sind beide Frame-Grenzen identisch,

$$A = B ,$$

so bilden die Frame-Funktionen  $\varphi_i(t)$  einen **straffen Frame**. Die Koeffizientenenergie ist proportional zur Signalenergie:

$$\|x(t)\|^2 = \frac{1}{A} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underbrace{|\langle x(t), \varphi_i(t) \rangle|^2}_{|a_i|^2} .$$

- Frames sind die überbestimmte Variante einer Basis, straffe Frames die überbestimmte Variante einer orthogonalen Basis (nicht orthogonal!):
  - Für  $A = 1$  geht der straffe Frame in eine **orthonormale Basis** über.
  - Für  $A \neq 1$  sind die Frame-Funktionen **nicht orthogonal**.
- Reihenentwicklung** von  $x(t)$  in einen straffen Frame [PJ15]:

$$x(t) = \frac{1}{A} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underbrace{\langle x(t), \varphi_i(t) \rangle}_{a_i} \varphi_i(t)$$

## 7.3.5 Straffe Frames

### Beispiel 7.30: Sinc-Funktionen als straffer Frame bei Überabtastung

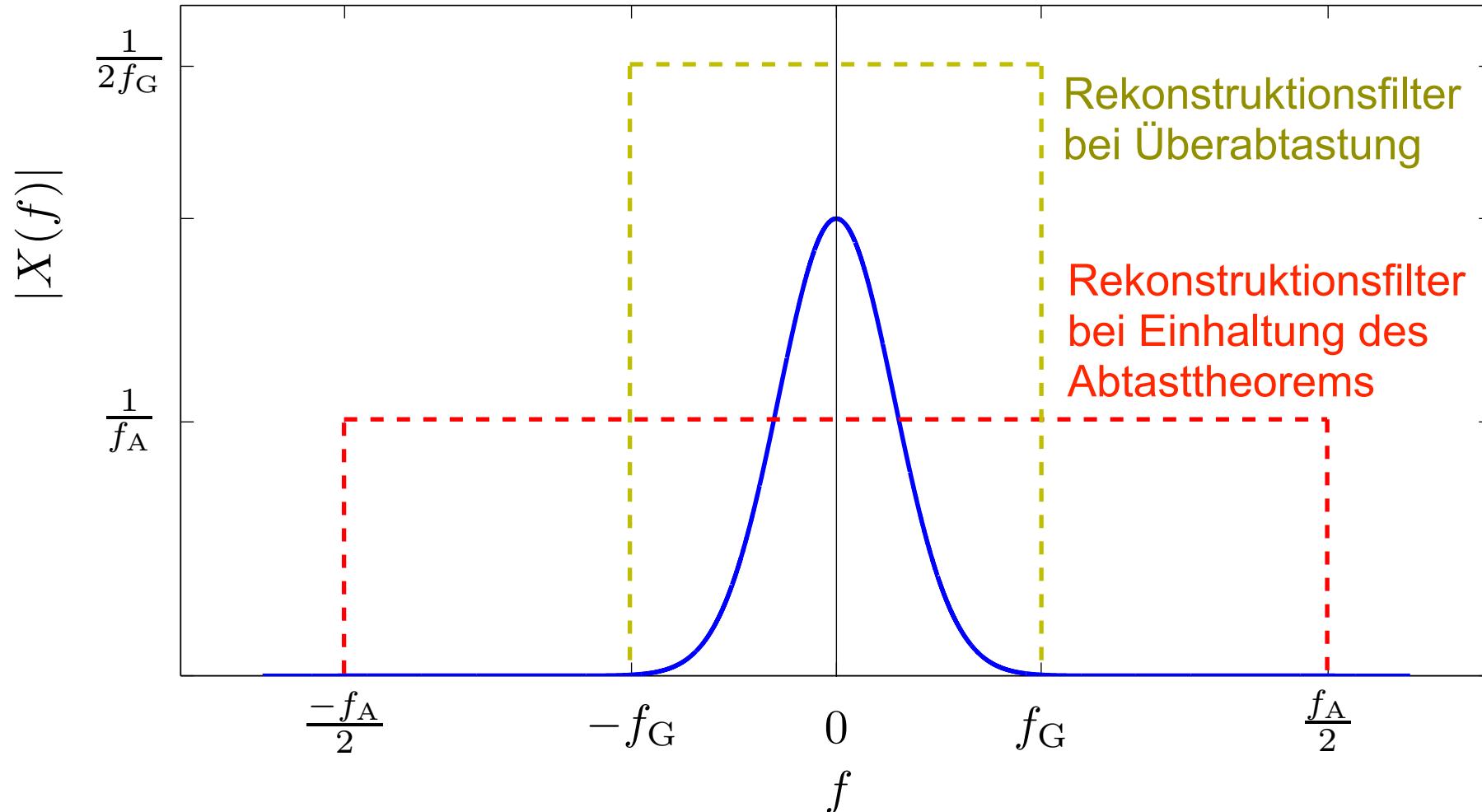
- Ein bandbegrenztes Signal  $x(t)$  (Grenzfrequenz  $f_G$ ) wird mit der Frequenz  $f_A$  überabgetastet. Die zur Rekonstruktion verwendeten Sinc-Funktionen bilden **bei Überabtastung** keine orthogonale Basis, wie bei exakter Einhaltung des Abtasttheorems, sondern einen **straffen Frame**.
- Rekonstruktionsfilter bei exakter Einhaltung des Abtasttheorems:

$$\varphi_m(t) = \text{sinc}(\pi f_A(t - mt_A)) \quad \circ \bullet \quad \Phi_m(f) = \frac{1}{f_A} R_{f_A}(f) e^{-j2\pi f m t_A}$$

- Rekonstruktion bei Überabtastung  $\rightarrow$  schmales Filter der Breite  $2f_G$ :
$$\varphi_m(t) = \text{sinc}(2\pi f_G(t - mt_A)) \quad \circ \bullet \quad \Phi_m(f) = \frac{1}{2f_G} R_{2f_G}(f) e^{-j2\pi f m t_A}$$
- Die Koeffizienten  $a_i$  der Reihenentwicklung werden als Projektion des zu rekonstruierenden Signals  $x(t)$  auf die Sinc-Funktionen berechnet, ohne Invertierung der Gram'schen Matrix.
- Die Bedingung  $A = B$  für den straffen Frame ist erfüllt [PJ15].

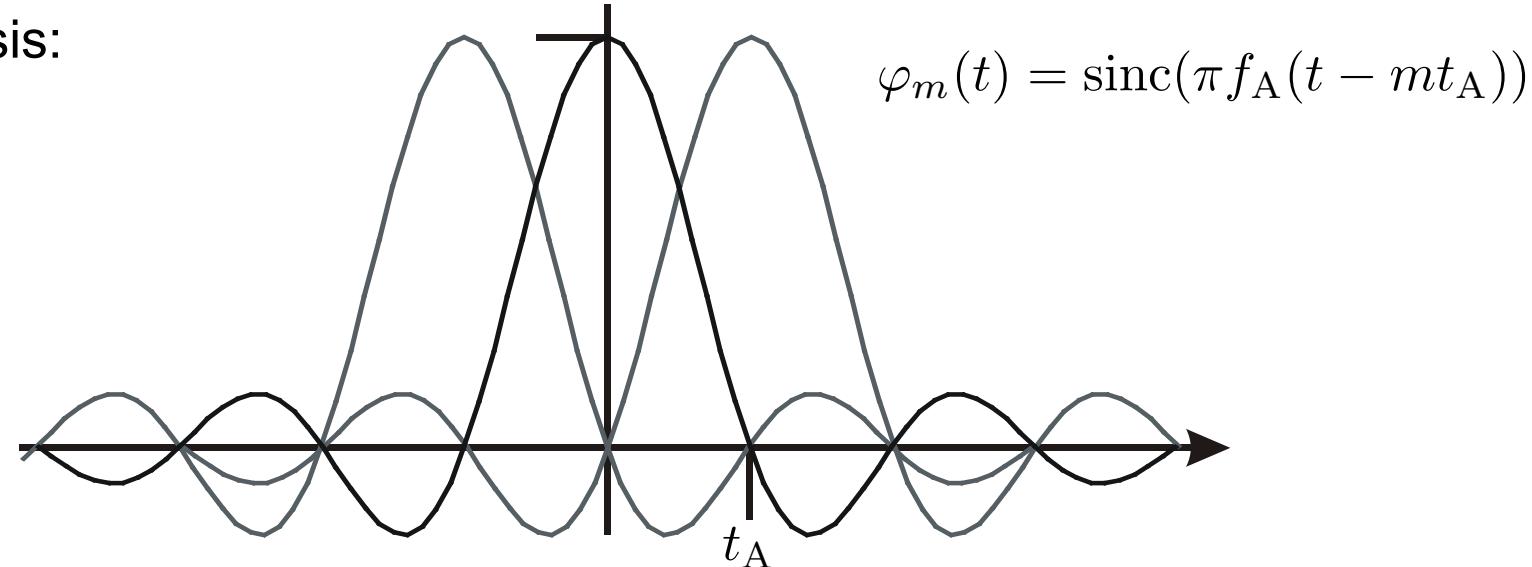
## 7.3.5 Straffe Frames

Rekonstruktion eines Signals im Frequenzbereich durch Multiplikation der Fourier-Transformierten mit einem Rechteckfilter der Fläche 1

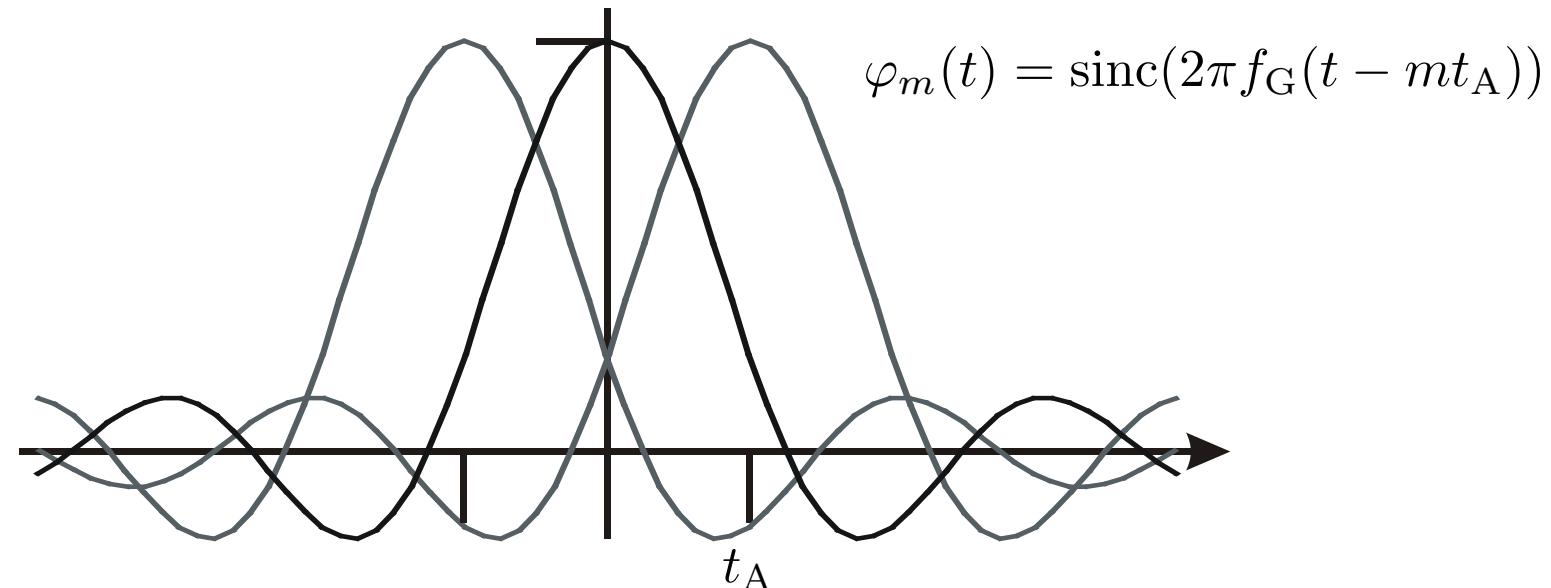


## 7.3.5 Straffe Frames

- Orthogonale Basis:  
(Abtasttheorem)



- Straffer Frame:  
(Überabtastung)



## 7.3.6 Frames mit verschobenen Fensterfunktionen

- Ein Frame werde durch zeit- und frequenzverschobene Fenster gebildet:

$$w_{mk}(t) = w(t - mT) \exp(j2\pi kF t)$$

- Die Energie des Fensters  $w_{mk}(t)$  sei um die Zeit  $mT$  und um die Frequenz  $kF$  konzentriert.
- Die Koeffizienten  $a_{mk}$  werden als Projektion von  $x(t)$  auf die verschobenen Fenster  $w_{mk}(t)$  berechnet:

$$a_{mk} = \langle x(t), w_{mk}(t) \rangle$$

- Die Reihenentwicklung des Signals  $x(t)$  lautet damit:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{mk} w_{mk}(t)$$

- Die Koeffizienten  $a_{mk}$  geben näherungsweise die anteilige Energie des zu analysierenden Signals im Bereich der mittleren Zeit  $mT$  und der mittleren Frequenz  $kF$  wieder.

## 7.3.6 Frames mit verschobenen Fensterfunktionen

- Dazu muss die Energie der Fensterfunktion um die mittlere Zeit und die mittlere Frequenz lokalisiert sein, d. h. die Fensterfunktion muss **kompakt** sein.
- Die Variablen Zeit und Frequenz spannen eine zweidimensionale Ebene auf: „**Zeit-Frequenz-Ebene**“.
- Die **Verschiebungen**  $T$  und  $F$  müssen **klein genug** sein, um „Löcher“ in der Zeit-Frequenz-Ebene zu vermeiden. Ein guter Ansatz ist:

$$T \leq T_{\text{eff}}, \quad F \leq F_{\text{eff}}$$

- Der Gauß-Impuls hat das kleinste Zeitdauer-Bandbreite-Produkt:

$$T_{\text{eff}} \cdot F_{\text{eff}} = 1$$

- Daher wird allgemein gefordert: 
$$T \cdot F \leq T_{\text{krit}} \cdot F_{\text{krit}} = 1$$
- Der Kehrwert davon ist die **Überabtastrate** ( $\alpha = 1$ : „Kritische Abtastung“):

$$\alpha = \frac{1}{T \cdot F} \geq \frac{1}{T_{\text{krit}} \cdot F_{\text{krit}}} = 1$$

- Kompakte Fensterfunktionen wurden bereits in Abschnitt 7.1 behandelt.
- Folgende Definition präzisiert den Begriff der **Kompaktheit für Frames**:

### Definition: Kompakte Frame-Funktionen

- Ein Frame werde aus zeit- und frequenzverschobenen Fensterfunktionen  $w(t)$  erzeugt. Dabei seien die Zeit- und Frequenzverschiebungen größer oder gleich den kritischen Verschiebungen

$$T \geq T_{\text{krit}}, \quad F \geq F_{\text{krit}}.$$

- Das Fenster  $w(t)$  ist kompakt, wenn die Summe der Innenproduktbeträge

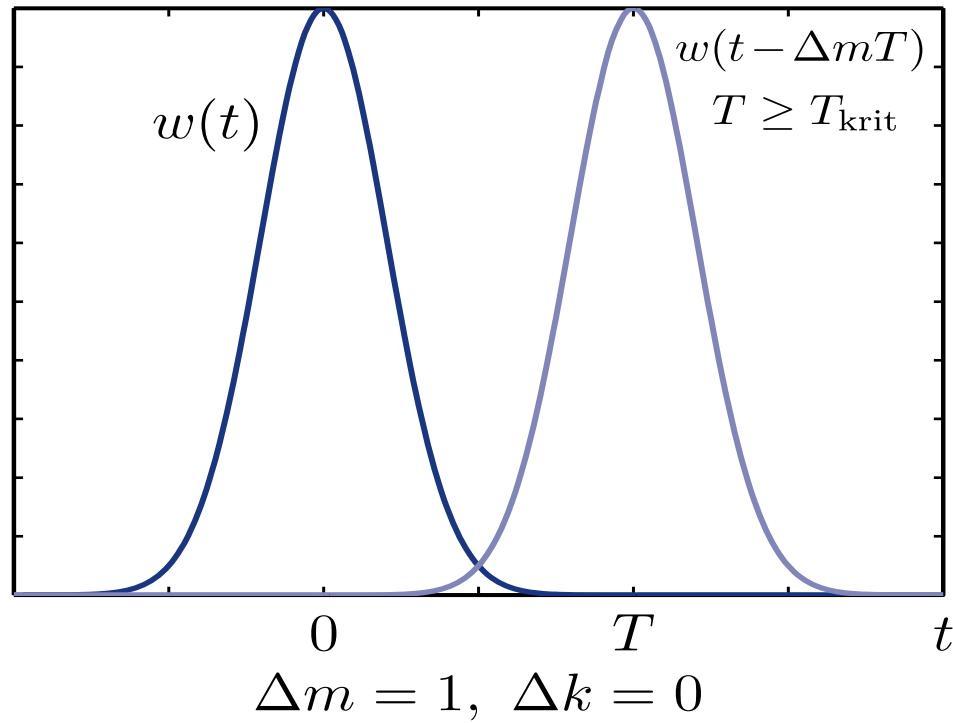
$$\sum_{\Delta m=-\infty}^{\infty} \sum_{\Delta k=-\infty}^{\infty} \left| \langle w(t), w(t - \Delta m T) e^{j 2 \pi \Delta k F t} \rangle \right| \leq S(w(t)) < \infty$$

bei orthonormalen Basen  $\rightarrow \delta_{\Delta m} \delta_{\Delta k}$

kleiner als eine obere Schranke  $S(w(t))$  ist. Diese hängt von der Kurvenform des Fensters ab.

### Überlappungsgebiete bei verschiedenen Zeit- und Frequenzverschiebungen

**Überlappungsgebiete  
zeitverschobener Fenster:  
Innenprodukt ungleich null**



**Innenprodukt für die  
Verschiebung null:  
Innenprodukt gleich eins**

