

Taller 1

Nombre: Estefany Carolina Cely Rodriguez

C.C.: 1013659975

Electrodinamica I

Lista de ejercicios

Griffiths: An Introduction to Electrodynamics

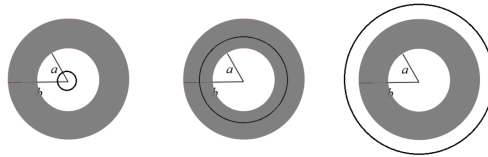
2.15

Se tiene Un cascarón esférico con densidad de carga

$$\rho = \frac{k}{r^2} \quad (a \leq r \leq b) \quad (1)$$

Encontrar el campo electrico en las tres regiones:(i) $r < a$, (ii) $a < r < b$, (iii) $r > b$.

Grafique $|\mathbf{E}|$ en funcion de r .



Sol:

La ley de Gauss para el campo electrico en el vacio:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Al ser simetria esferica, el termino de divergencia es suficiente. De este modo al integrar ambos lados sobre el volumen de una superficie gaussiana de radio R dividimos el problema en 3 casos:

$$\begin{aligned} \iiint_{x_0^2+y_0^2+z_0^2 \leq r^2} \nabla \cdot \mathbf{E} dV_0 &= \iiint_{x_0^2+y_0^2+z_0^2 \leq r^2} \int \frac{\rho}{\epsilon_0} dV_0 \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{x_0^2+y_0^2+z_0^2 \leq r^2} \rho dV_0 \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^r (0) (r_0^2 \sin \theta_0 dr_0 d\phi_0 d\theta_0) & \text{if } r < a \\ \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_a^r \frac{k}{r_0^2} (r_0^2 \sin \theta_0 dr_0 d\phi_0 d\theta_0) & \text{if } a < r < b \\ \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{k}{r_0^2} (r_0^2 \sin \theta_0 dr_0 d\phi_0 d\theta_0) & \text{if } r > b \end{cases} \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de la divergencia y evaluando:

$$\oiint_{x_0^2+y_0^2+z_0^2=r^2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_0 = \begin{cases} 0 & \text{if } r < a \\ \frac{k}{\epsilon_0} \left(\int_0^\pi \sin \theta_0 d\theta_0 \right) \left(\int_0^{2\pi} d\phi_0 \right) \left(\int_a^r dr_0 \right) & \text{if } a < r < b \\ \frac{k}{\epsilon_0} \left(\int_0^\pi \sin \theta_0 d\theta_0 \right) \left(\int_0^{2\pi} d\phi_0 \right) \left(\int_a^b dr_0 \right) & \text{if } r > b \end{cases}$$

Es un sistema con simetría esférica, por lo que el campo eléctrico debe ser totalmente radial, de la forma $\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}}$, y se orienta respecto al vector unitario $d\mathbf{S}$ que sale de la superficie gaussiana:

$$\oiint_{r_0^2=r^2} [E(r_0)\hat{\mathbf{r}}_0] \cdot (\hat{\mathbf{r}}_0 dS_0) = \begin{cases} 0 & \text{if } r < a \\ \frac{k}{\epsilon_0} (2)(2\pi)(r-a) & \text{if } a < r < b \\ \frac{k}{\epsilon_0} (2)(2\pi)(b-a) & \text{if } r > b \end{cases}$$

$$\oiint_{r_0^2=r^2} [E(r_0)\hat{\mathbf{r}}_0] \cdot (\hat{\mathbf{r}}_0 dS_0) = \begin{cases} 0 & \text{if } r < a \\ \frac{k}{\epsilon_0} (2)(2\pi)(r-a) & \text{if } a < r < b \\ \frac{k}{\epsilon_0} (2)(2\pi)(b-a) & \text{if } r > b \end{cases}$$

$E(r)$ es una cantidad constante sobre la superficie por lo que,

$$E(r) \oiint_{r_0=r} dS_0 = \begin{cases} 0 & \text{if } r < a \\ \frac{4\pi k}{\epsilon_0} (r-a) & \text{if } a < r < b \\ \frac{4\pi k}{\epsilon_0} (b-a) & \text{if } r > b \end{cases}$$

Que al evaluar resulta en:

$$E(r) (4\pi r^2) = \begin{cases} 0 & \text{if } r < a \\ \frac{4\pi k}{\epsilon_0} (r-a) & \text{if } a < r < b \\ \frac{4\pi k}{\epsilon_0} (b-a) & \text{if } r > b \end{cases}$$

2.16



A long coaxial cable (Fig. 2.26) carries a uniform volume charge density ρ on the inner cylinder (radius a), and a uniform surface charge density on the outer cylindrical shell (radius b). This surface charge is negative and of just the right magnitude so that the cable as a whole is electrically neutral. Find the electric field in each of the three regions: (i) inside the inner cylinder ($s < a$), (ii) between the cylinders ($a < s < b$), (iii) outside the cable ($s > b$). Plot $|\mathbf{E}|$ as a function of s .

Sabiendo que el campo eléctrico producido por el cilindro en su interior es radial, entonces usaremos la ley de Gauss, usando un volumen cilíndrico, de radio $s < a$ y longitud l , cómo se ilustra en la Figura 2, se integrará en el volumen.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d^3x = \int \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} d^3x$$

Por el teorema de la divergencia se tiene que:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} d^3x$$

Ahora teniendo en cuenta que el campo eléctrico es radial, solo tiene flujo en la superficie lateral del cilindro y no en las tapas, además, es constante para un mismo radio y diferente ángulo φ , por lo que:

$$|\vec{E}| \int da = \int \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_o} d^3x$$

Recordando que $\rho(\vec{r}) = \rho$, y que el área de la primera integral es la superficie lateral del cilindro, entonces:

$$|\vec{E}| \int da = |\vec{E}| 2\pi l s$$

$$\int \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_o} d^3x = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^s \frac{\rho}{\epsilon_o} r dr d\varphi dz = \frac{\rho}{\epsilon_o} 2\pi l \frac{s^2}{2}$$

Por lo que:

$$|\vec{E}| 2\pi l s = \rho 2\pi l \frac{s^2}{2\epsilon_o}$$

$$|\vec{E}| = \frac{\rho s}{2\epsilon_o}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho s}{2\epsilon_o} \hat{r}$$

(iii) ($a < s < b$)

Al igual que en el caso anterior, integraremos en un volumen cilíndrico, que esta vez tendrá un radio de $a < s < b$ (Figura 3), esto implica que la integral de volumen de la densidad de carga no irá hasta s , sino que irá hasta a , pues es donde termina. de modo que se tendrá:

$$|\vec{E}| \int da = |\vec{E}| 2\pi l s$$

$$\int \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_o} d^3x = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho}{\epsilon_o} r dr d\varphi dz = \frac{\rho}{\epsilon_o} 2\pi l \frac{a^2}{2}$$

Con lo que el campo eléctrico tendrá la forma:

$$|\vec{E}| 2\pi l s = \rho 2\pi l \frac{a^2}{2\epsilon_o}$$

$$|\vec{E}| = \frac{\rho a^2}{2s\epsilon_o}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho a^2}{2s\epsilon_o} \hat{r}$$

($s > b$)

Ahora la superficie en la que se integrará es la que se muestra en la Figura 4, con lo cual se tendrá ahora en cuenta el tubo esférico que recubre el cable coaxial; es de recordar que el enunciado dice que la carga de este último es negativa y de tal magnitud que el cable en conjunto es eléctricamente neutro, es decir, que si:

$$\int_V \rho d^3x = Q_{enc}$$

Entonces:

$$\int_V \sigma da = -Q_{enc}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned}\int \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} d^3x &= \frac{1}{\epsilon_0} \left[\int_V \rho d^3x + \int_V \sigma da \right] \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} [Q_{enc} - Q_{enc}] = 0\end{aligned}$$

Por lo que el campo eléctrico es nulo:

$$\vec{E} = 0$$

Con esto se tiene que el campo eléctrico del cable coaxial es:

$$\vec{E}(s) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon_0} \rho s \hat{r} & s < a \\ \frac{\rho a^2}{2s\epsilon_0} \hat{r} & a < s < b \\ 0 & b < s \end{cases}$$

Al graficar La magnitud del campo eléctrico $|\vec{E}|$ en función de s , se tiene lo ilustrado en la Figura 5.

2.17



An infinite plane slab, of thickness $2d$, carries a uniform volume charge density ρ (Fig. 2.27). Find the electric field, as a function of y , where $y = 0$ at the center. Plot E versus y , calling E positive when it points in the $+y$ direction and negative when it points in the $-y$ direction.

Una de las ecuaciones que gobiernan el campo electrico en el vacio es la ley de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Usando la simetria del plano xz solo necesitamos informacion de la divergencia, ademas tenemos unicamente la componente y del campo electrico $\mathbf{E} = E(y)\hat{y}$. Decimos que hay igual cantidad de carga hacia los extremos derecho e izquierdo que define el plano, de modo que el campo electrico en $y = 0$ es nulo.

Integrando ambos lados sobre el volumen de una superficie gaussiana de largo L ancho y y altura H se consideran los siguientes casos:

1. $0 < y < d$
2. $y > d$

La carga encerrada es producto de la densidad de carga y el volumen de modo que:

$$\int_0^H \int_0^y \int_0^L \nabla \cdot \mathbf{E} (dx_0 dy_0 dz_0) = \begin{cases} \int_0^H \int_0^y \int_0^L \frac{\rho}{\epsilon_0} (dx_0 dy_0 dz_0) & \text{if } 0 < y < d \\ \int_0^H \int_0^d \int_0^L \frac{\rho}{\epsilon_0} (dx_0 dy_0 dz_0) & \text{if } y > d \end{cases}$$

Ahora aplicando el teorema de la divergencia a la expresion del lado izquierdo:

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_0 = \begin{cases} \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(\int_0^H dz_0 \right) \left(\int_0^y dy_0 \right) \left(\int_0^L dx_0 \right) & \text{if } 0 < y < d \\ \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(\int_0^H dz_0 \right) \left(\int_0^d dy_0 \right) \left(\int_0^L dx_0 \right) & \text{if } y > d \end{cases}$$

Debido a que el campo electrico tiene solo componente y la integral de superficie puede ser calculada en dos caras de la caja:

$$\int_0^H \int_0^L [E(y_0) \hat{y}_0 \cdot (\hat{y}_0 dx_0 dz_0)] \Big|_{y_0=0} + \int_0^H \int_0^L [E(y_0) \hat{y}_0 \cdot (\hat{y}_0 dx_0 dz_0)] \Big|_{y_0=y} = \begin{cases} \frac{\rho}{\epsilon_0} (HLy) & \text{if } 0 < y < d \\ \frac{\rho}{\epsilon_0} (HLd) & \text{if } y > d \end{cases}$$

Al evaluar los productos punto obtenemos:

$$\int_0^H \int_0^L E(0) dx_0 dz_0 + \int_0^H \int_0^L E(y) dx_0 dz_0 = \begin{cases} \frac{\rho}{\epsilon_0} (HLy) & \text{if } 0 < y < d \\ \frac{\rho}{\epsilon_0} (HLd) & \text{if } y > d \end{cases}$$

El campo eléctrico es cero en la cara $y = 0$ y constante en $y_0 = y$

$$\int_0^H \int_0^L (0) dx_0 dz_0 + E(y) \int_0^H \int_0^L dx_0 dz_0 = \begin{cases} \frac{\rho}{\epsilon_0} (HLy) & \text{if } 0 < y < d \\ \frac{\rho}{\epsilon_0} (HLd) & \text{if } y > d \end{cases}$$

Evalutando las integrales:

$$E(y)(HL) = \begin{cases} \frac{\rho}{\epsilon_0} (HLy) & \text{if } 0 < y < d \\ \frac{\rho}{\epsilon_0} (HLd) & \text{if } y > d \end{cases}$$

Luego, al dividir ambos lados por HL para resolver $E(y)$:

$$E(y) = \begin{cases} \frac{\rho}{\epsilon_0} y & \text{if } 0 < y < d \\ \frac{\rho}{\epsilon_0} d & \text{if } y > d \end{cases}$$

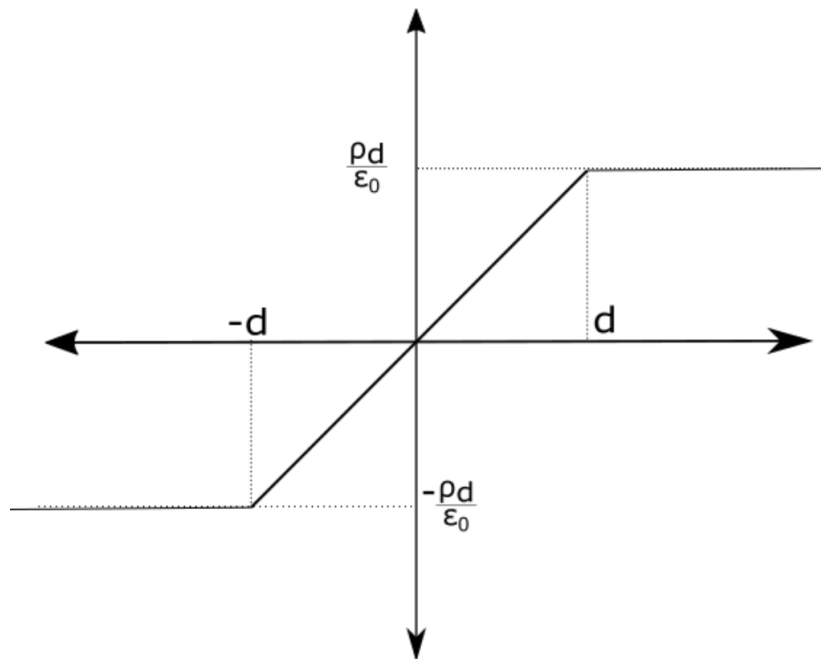
Debido a la simetria sobre el plano $y = 0$ y el campo es negativo para valores $y < 0$, obtenemos el campo electrico para $-\infty < y < \infty$ con los terminos impares de $E(y)$

$$E(y) = \begin{cases} -\frac{\rho}{\epsilon_0} d & \text{if } y < -d \\ \frac{\rho}{\epsilon_0} y & \text{if } -d < y < d \\ \frac{\rho}{\epsilon_0} d & \text{if } y > d \end{cases}$$

De modo que,

$$\mathbf{E}(y) = \begin{cases} -\frac{\rho}{\epsilon_0} d \hat{\mathbf{y}} & \text{if } y < -d \\ \frac{\rho}{\epsilon_0} y \hat{\mathbf{y}} & \text{if } -d < y < d. \\ \frac{\rho}{\epsilon_0} d \hat{\mathbf{y}} & \text{if } y > d \end{cases}$$

Esta es la grafica de $E(y)$ vs y .



2.21



Find the potential inside and outside a uniformly charged solid sphere whose radius is R and whose total charge is q . Use infinity as your reference point. Compute the gradient of V in each region, and check that it yields the correct field. Sketch $V(r)$.

Por definición:

$$V(\vec{r}) = \oint_s E(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

Mediante la ley de Gauss vamos a determinar el campo eléctrico en un punto dentro y fuera de la esfera.

- Para $r \leq R$

Como la carga encerrada es:

$$\oint_s E(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_o}$$

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{r^2}$$

Donde

$$q = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Q}{R^3} r^3$$

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q}{R^3} r$$

- Para $R \leq r$

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q}{r^2}$$

- Calculamos el potencial para $R \leq r \leq R$

$$V_o = - \int_{\infty}^r \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q}{r^2} \right) dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q}{r}$$

- Para $r \leq R$

$$V_i = - \int_{\infty}^R \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q}{r^2} \right) dr - \int_R^r \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q}{R^3} r \right) dr$$

$$V_i = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{R} \right) - \left(\frac{Q}{8\pi\epsilon_o R^3} (r^2 - R^2) \right)$$

$$V_i = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \cdot \frac{1}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right)$$

- si $R \leq r$:

$$E = -\nabla V$$

$$E = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

- si $r \leq R$:

$$E = -\nabla V$$

$$E = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{2R} \frac{2r}{R^2} \hat{r}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q}{R^3} r \hat{r}$$

2.23



For the charge configuration of Prob. 2.15, find the potential at the center, using infinity as your reference point.

Sol:

Del problema 2.15 de Griffiths se obtiene el campo para las siguientes regiones, donde se a utilizado la ley de Gauss debido a la simétria esférica que posee el problema.

- Región $r < a$, el campo en la región 1 es:

$$\vec{E}_1 = 0 \hat{r}$$

- Región $a < r < b$, el campo en la región 2 es:

$$\vec{E}_2 = \frac{k(r-a)}{\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

- Región $r > b$, el campo en la región 3 es:

$$\vec{E}_3 = \frac{k(b-a)}{\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

- A partir de estos valores de campo en cada una de las regiones, se puede calcular el valor del potencial desde el infinito hasta el centro de la concha esférica, utilizando la siguiente relación entre el campo eléctrico y el potencial, así:

$$\begin{aligned} V(r) &= - \int_{\infty}^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ -V(0) &= \int_{\infty}^b \vec{E}_3 \cdot d\vec{l} + \int_b^a \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \int_a^0 \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} \\ -V(0) &= \int_{\infty}^b \frac{k(b-a)}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} + \int_b^a \frac{k(r-a)}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} + \int_a^0 0 \hat{r} \cdot d\vec{r} \\ -V(0) &= \int_{\infty}^b \frac{k(b-a)}{\epsilon_0 r^2} dr + \int_b^a \frac{k(r-a)}{\epsilon_0 r^2} dr + \int_a^0 0 dr \\ -V(0) &= \left. \frac{k(a-b)}{\epsilon_0 r} \right|_{\infty}^b - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{k(a-b)}{\epsilon_0 r} + \left. \frac{k}{\epsilon_0} \ln(r) \right|_b^a + \left. \frac{ka}{\epsilon_0 r} \right|_b^a + cte|_0^a - cte|_a \\ -V(0) &= \frac{k}{\epsilon_0} \left[\frac{a}{b} - 1 + \ln \frac{a}{b} + 1 - \frac{a}{b} \right] \\ -V(0) &= \frac{k}{\epsilon_0} \ln \frac{a}{b} \\ V(0) &= \frac{k}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Este resultado implica que el potencial dentro del cascarón es constante, resultado esperado ya que el campo eléctrico en esta región es 0 , también mediante la relación $\vec{E} = -\nabla V$ se llegó a que el potencial es constante.

2.24



For the configuration of Prob. 2.16, find the potential difference between a point on the axis and a point on the outer cylinder. Note that it is not necessary to commit yourself to a particular reference point if you use Eq. 2.22.

Estos campos fueron:

$$\mathbf{E}_{\text{dentro}} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \hat{r}$$

$$\mathbf{E}_{\text{entre}} = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r} \hat{r}$$

$$\mathbf{E}_{\text{fuera}} = 0$$

Donde r es la distancia a la cual se encuentra en punto en el que se quiere conocer el campo. Tomando en cuenta que la componente que importa en el campo eléctrico es la componente radial, los vectores a y b solo contribuirán con la distancia al eje de los cilindros. Llamaremos d al radio del punto fuera del eje, y el punto en el eje tendrá distancia cero. Por tanto la Eq. 1 queda como:

$$V(d) - V(0) = - \int_0^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_0^d \mathbf{E}_{\text{dentro}} \cdot d\mathbf{l} - \int_a^b \mathbf{E}_{\text{entre}} \cdot d\mathbf{l} - \int_0^d \mathbf{E}_{\text{fuera}} \cdot d\mathbf{l}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones y que tanto el campo E como el $d\mathbf{l}$ son radiales:

$$\begin{aligned} V(d) - V(0) &= - \int_0^a \frac{\rho r}{\Sigma_0} dr - \int_a^b \frac{\rho a^2}{2r_0} dr \\ &= - \frac{\rho}{2r_0} \frac{a^2}{2} - \frac{\rho a^2}{2r_0} \ln \frac{b}{a} \\ &= - \frac{\mu^2}{4\epsilon_0} \left[1 + 2 \ln \frac{b}{a} \right] \end{aligned}$$

Que corresponde a la diferencia de potencial entre los dos puntos.

2.36

Problem 2.36 Two spherical cavities, of radii a and b , are hollowed out from the interior of a (neutral) conducting sphere of radius R (Fig. 2.49). At the center of each cavity a point charge is placed—call these charges q_a and q_b .

- Find the surface charges σ_a , σ_b , and σ_R .
- What is the field outside the conductor?
- What is the field within each cavity?
- What is the force on q_a and q_b ?
- Which of these answers would change if a third charge, q_c , were brought near the conductor?

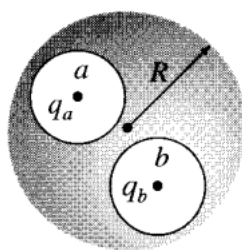


Figure 2.49

a) $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_R$:

Tomando como superficie gaussiana a la esfera de radio a , justo integrando en el conductor (donde el campo es cero) se tiene:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\epsilon_0} = 0 \longrightarrow q_a + q_{\text{ina}} = 0$$

Siendo q_{ina} la carga inducida en la superficie del hueco esférico; por la geometría de la superficie, la carga q_{ina} se distribuye de manera

homogénea en el área superficial así:

$$\sigma_a = \frac{-q_a}{4\pi a^2}$$

Siguiendo el mismo análisis para el hueco esférico de radio b y carga interna q_b se tiene:

$$\sigma_b = \frac{-q_b}{4\pi b^2}$$

Tomando en cuenta que la carga total en el conductor es nula y que de haber cargas parciales, deben estar distribuidas en las superficies, tenemos:

$$0 = q_{\text{inu}} + q_{\text{inb}} + q_R \longrightarrow -q_a - q_b + 4\pi R^2 \sigma_R$$

Donde q_{inb} es la carga inducida en la superficie de la esfera de radio b ; por lo tanto al despejar se tiene:

$$\sigma_R = \frac{q_a + q_b}{4\pi R^2}$$

b) \vec{E}_r con $r > R$:

Sea la superficie gaussiana la esfera de radio $R + r$, se hace la integral justo fuera del conductor con $Q_{\text{encerrada}} = (q_a + q_b)$ así:

$$\oint \vec{E}_r \cdot d\vec{S} = \frac{q_a + q_b}{\epsilon_0} = |E|4\pi(R + r)^2 \hat{r}$$

Despejando tenemos:

$$\vec{E}_r = \frac{q_a + q_b}{4\pi(R + r)^2 \epsilon_0} \hat{r}$$

c) \vec{E}_a, \vec{E}_b :

Al tomar la superficie gaussiana esférica de radio a , justo antes del conductor, tenemos:

$$\oint \vec{E}_a \cdot d\vec{S} = \frac{q_a}{\epsilon_0} \longrightarrow \vec{E}_a = \frac{q_a}{4\pi r^2 \epsilon_0} \hat{r}$$

Siguiendo el mismo proceso para la superficie gaussiana esférica de radio b tenemos:

$$\vec{E}_b = \frac{q_b}{4\pi r^2 \epsilon_0} \hat{r}$$

d) \vec{F}_a, \vec{F}_b :

Como $\vec{F} = q\vec{E}$, entonces estudiamos el campo eléctrico en la esfera de radio a . Sabemos que dentro de un cascarón conductor el campo eléctrico es solamente el debido a la carga interna a la superficie.

Luego $\vec{F}_{ab} = \vec{F}_{ba} = 0$; como en ausencia de la carga q_a el campo dentro de la esfera es nulo, tenemos:

$$\vec{F}_a = \vec{F}_b = 0$$

e) Si se acerca una carga q_c a la superficie externa del conductor, ocurre lo siguiente:

- (a) Cambia σ_R .
- (b) \vec{E}_r cambia por la distribución no homogénea de cargas en la superficie externa.
- (c) \vec{E}_a y \vec{E}_b se mantienen constantes.
- (d) \vec{F}_a, \vec{F}_b permanecen constantes.

2.35

Problem 2.45 A sphere of radius R carries a charge density $\rho(r) = kr$ (where k is a constant). Find the energy of the configuration. Check your answer by calculating it in at least two different ways. [Answer: $\pi k^2 R^7 / 7\epsilon_0$]

Una esfera de radio R con una densidad de carga $\rho(r) = kr$. encuentre la energía de esta configuración, Hallelo de dos formas distintas.

Solución:

Sabiendo que la ley de gauss es

$$\oint E \cdot da = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(r) dV$$

Suponiendo una superficie gaussiana donde el campo eléctrico y el diferencial de área sean paralelos y reemplazando obtenemos que

$$\oint E \cdot da = 4\pi r^2 E$$

y por el otro lado

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(r) dV &= \frac{1}{\epsilon_0} \int (kr) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int r^2 dr = \begin{cases} \frac{\pi}{\epsilon_0} kr^4 & (r < R) \\ \frac{\pi}{\epsilon_0} kR^4 & (r > R) \end{cases} \end{aligned}$$

Igualando ambas partes y despejando el campo eléctrico llegamos a

$$E(r) = \begin{cases} \frac{kr^2}{4\epsilon_0} \hat{r} & (r < R) \\ \frac{kR^2}{4\epsilon_0 r^2} \hat{r} & (r > R) \end{cases}$$

a) Metodo 1

Partiendo de la definición de la energía a partir del campo electrico

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$

Reemplazando tenemos

$$\begin{aligned} W &= \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^R \left(\frac{kr^2}{4\epsilon_0} \right)^2 4\pi r^2 d\tau + \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty \left(\frac{kR^4}{4\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 d\tau \\ &= 4\pi \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{k}{4\epsilon_0} \right)^2 \left\{ \int_0^R r^6 d\tau + R^8 \int_R^\infty \frac{1}{r^2} d\tau \right\} = \frac{\pi k^2}{8\epsilon_0} \left(\frac{R^7}{7} + R^7 \right) \\ &= \frac{\pi k^2 R^7}{7\epsilon_0} \end{aligned}$$

b) Metodo 2

Sabemos que la energía también se puede hallar a partir del potencial de la siguiente forma

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V d\tau$$

Primero hallamos el potencial de esta configuración para ($r < R$)

$$\begin{aligned} V(r) &= - \int_\infty^r E dl = - \int_\infty^R \left(\frac{kR^4}{4\epsilon_0 r^2} \right) dr - \int_R^r \left(\frac{kr^2}{4\epsilon_0} \right) dr \\ &= - \frac{k}{4\epsilon_0} \left\{ R^4 \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_\infty^R + \frac{r^3}{3} \Big|_R^r \right\} = \frac{k}{3\epsilon_0} \left(R^3 - \frac{r^3}{4} \right) \end{aligned}$$

Reemplazando tenemos

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int \rho V d\tau = \frac{1}{2} \int_0^R (kr) \left[\frac{k}{3\epsilon_0} \left(R^3 - \frac{r^3}{4} \right) \right] 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi k^2}{3\epsilon_0} \int_0^R \left(R^3 r^3 - \frac{r^6}{4} \right) dr \\ &= \frac{2\pi k^2}{3\epsilon_0} \left\{ R^3 \frac{R^4}{4} - \frac{1}{4} \frac{R^7}{7} \right\} = \frac{\pi k^2 R^7}{2 \cdot 3\epsilon_0} \left(\frac{6}{7} \right) = \frac{\pi k^2 R^7}{7\epsilon_0} \end{aligned}$$

Arfken

Ejercicio 3.10.4

3.10.4 With $\hat{\mathbf{e}}_1$ a unit vector in the direction of increasing q_1 , show that

$$(a) \quad \nabla \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(h_2 h_3)}{\partial q_1}$$

$$(b) \quad \nabla \times \hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{h_1} \left[\hat{\mathbf{e}}_2 \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} - \hat{\mathbf{e}}_3 \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \right].$$

Note that even though $\hat{\mathbf{e}}_1$ is a unit vector, its divergence and curl **do not necessarily vanish**.

Dado que

$$\nabla \cdot \mathbf{V}(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_3 h_1 h_2) \right] \quad (2)$$

Entonces si $\mathbf{V} = \hat{\mathbf{e}}_1$:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V}(q_1, q_2, q_3) &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_3 h_1 h_2) \right] \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (|\hat{\mathbf{e}}_1| h_2 h_3) \right] \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3) \end{aligned}$$

De igual forma como:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 h_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 h_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 B_1 & h_2 B_2 & h_3 B_3 \end{vmatrix} \quad (3)$$

Entonces si $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{e}}_1$:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 h_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 h_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{h_1} \left[\hat{\mathbf{e}}_2 \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} - \hat{\mathbf{e}}_3 \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \right] \end{aligned}$$

Ejercicio 3.10.4

3.10.8 From the results of [Exercise 3.10.6](#), show that

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\rho}{\partial \varphi} = \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial \varphi} = -\hat{\mathbf{e}}_\rho$$

and that all other first derivatives of the circular cylindrical unit vectors with respect to the circular cylindrical coordinates vanish.

De las ecuaciones:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial q_j} = \hat{\mathbf{e}}_j \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial q_i}, \quad i \neq j \quad (4)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial q_i} = - \sum_{j \neq i} \hat{\mathbf{e}}_j \frac{1}{h_j} \frac{\partial h_j}{\partial q_i} \quad (5)$$

Obtenemos que

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\rho}{\partial \varphi} = \hat{\mathbf{e}}_\varphi \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial h_\varphi}{\partial \rho} = \hat{\mathbf{e}}_\varphi \frac{\partial \rho}{\partial \rho} = \hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

pues $h_\rho = 1$, $h_\varphi = \rho$, $h_z = 1$, además

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial \varphi} &= -\hat{\mathbf{e}}_\rho \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial h_\varphi}{\partial \rho} - \hat{\mathbf{e}}_z \frac{1}{h_z} \frac{\partial h_\varphi}{\partial z} \\ &= -\hat{\mathbf{e}}_\rho \frac{\partial \rho}{\partial \rho} - \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\hat{\mathbf{e}}_\rho \end{aligned}$$

Ejercicio 3.10.4

3.10.10 (a) Show that $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{e}}_\rho \rho + \hat{\mathbf{e}}_z z$.

(b) Working entirely in circular cylindrical coordinates, show that

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3 \quad \text{and} \quad \nabla \times \mathbf{r} = 0.$$

(a) Como $x = \rho \cos(\varphi)$ y $y = \rho \sin(\varphi)$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_\rho \rho + \hat{\mathbf{e}}_z z &= \rho \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} + z \hat{\mathbf{e}}_z \\ &= \rho \frac{\partial [\rho \cos(\varphi) \hat{\mathbf{e}}_x + \rho \sin(\varphi) \hat{\mathbf{e}}_y]}{\partial \rho} + z \hat{\mathbf{e}}_z \\ &= \rho \cos(\varphi) \hat{\mathbf{e}}_x + \rho \sin(\varphi) \hat{\mathbf{e}}_y + z \hat{\mathbf{e}}_z \\ &= x \hat{\mathbf{e}}_x + y \hat{\mathbf{e}}_y + z \hat{\mathbf{e}}_z = \mathbf{r} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{r} &= \left(\hat{\mathbf{e}}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\mathbf{e}}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_\rho \rho + \hat{\mathbf{e}}_z z) \\ &= \hat{\mathbf{e}}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_\rho \rho + \hat{\mathbf{e}}_z z) + \hat{\mathbf{e}}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_\rho \rho + \hat{\mathbf{e}}_z z) + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_\rho \rho + \hat{\mathbf{e}}_z z) \\ &= \hat{\mathbf{e}}_\rho \cdot \hat{\mathbf{e}}_\rho + \hat{\mathbf{e}}_\varphi \cdot \frac{1}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\varphi \rho + \hat{\mathbf{e}}_z \cdot \hat{\mathbf{e}}_z = 3 \end{aligned}$$

$$\nabla \times \mathbf{r} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_\rho & \rho \hat{\mathbf{e}}_\varphi & \hat{\mathbf{e}}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \rho & 0 & z \end{vmatrix} = 0$$

Ejercicio 3.10.12

3.10.12 A rigid body is rotating about a fixed axis with a constant angular velocity ω . Take ω to lie along the z -axis. Express the position vector \mathbf{r} in circular cylindrical coordinates and using circular cylindrical coordinates,

- (a) calculate $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$,
- (b) calculate $\nabla \times \mathbf{v}$.

(a) Dado que $\vec{\omega} = \omega \hat{\mathbf{e}}_z$ y $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{e}}_\rho \rho + \hat{\mathbf{e}}_z z$ entonces:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \vec{\omega} \times \mathbf{r} \\ &= \omega \hat{\mathbf{e}}_z \times (\hat{\mathbf{e}}_\rho \rho + \hat{\mathbf{e}}_z z) \\ &= \omega \hat{\mathbf{e}}_z \times \hat{\mathbf{e}}_\rho \rho \\ &= \rho \omega \hat{\mathbf{e}}_\varphi\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_\rho & \rho \hat{\mathbf{e}}_\varphi & \hat{\mathbf{e}}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho^2 \omega & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2\rho \omega \hat{\mathbf{e}}_z = 2\rho \vec{\omega}\end{aligned}$$

Ejercicio 3.10.13

3.10.13 Find the circular cylindrical components of the velocity and acceleration of a moving particle,

$$\begin{aligned}v_\rho &= \dot{\rho}, & a_\rho &= \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2, \\ v_\varphi &= \rho \dot{\varphi}, & a_\varphi &= \rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}, \\ v_z &= \dot{z}, & a_z &= \ddot{z}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Hint. } \mathbf{r}(t) &= \hat{\mathbf{e}}_\rho(t) \rho(t) + \hat{\mathbf{e}}_z z(t) \\ &= [\hat{\mathbf{e}}_x \cos \varphi(t) + \hat{\mathbf{e}}_y \sin \varphi(t)] \rho(t) + \hat{\mathbf{e}}_z z(t).\end{aligned}$$

Note. $\dot{\rho} = d\rho/dt$, $\ddot{\rho} = d^2\rho/dt^2$, and so on.

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} [\hat{\mathbf{e}}_\rho \rho + \hat{\mathbf{e}}_z z] \\ &= \frac{d}{dt} ([\hat{\mathbf{e}}_x \cos \varphi(t) + \hat{\mathbf{e}}_y \sin \varphi(t)] \rho(t) + \hat{\mathbf{e}}_z z(t)) \\ &= \left(\left[-\hat{\mathbf{e}}_x \frac{d\varphi(t)}{dt} \sin \varphi(t) + \frac{d\varphi(t)}{dt} \hat{\mathbf{e}}_y \cos \varphi(t) \right] \rho(t) + \frac{d\rho(t)}{dt} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{dz(t)}{dt} \right) \\ &= \rho \dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \dot{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \dot{z} \hat{\mathbf{e}}_z\end{aligned}$$

Y ademas:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\
&= \frac{d}{dt} [\rho\dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \dot{\rho}\hat{\mathbf{e}}_\rho + \dot{z}\hat{\mathbf{e}}_z] \\
&= \dot{\rho}\dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\hat{\mathbf{e}}_\rho + \ddot{\rho}\hat{\mathbf{e}}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \ddot{z}\hat{\mathbf{e}}_z \\
&= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{\mathbf{e}}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \ddot{z}\hat{\mathbf{e}}_z
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.10.15

3.10.15 A conducting wire along the z -axis carries a current I . The resulting magnetic vector potential is given by

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\mu I}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Show that the magnetic induction \mathbf{B} is given by

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{e}}_\varphi \frac{\mu I}{2\pi\rho}.$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_\rho & \rho\hat{\mathbf{e}}_\varphi & \hat{\mathbf{e}}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\mu I}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) \end{vmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\frac{\mu I}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) \right) \hat{\mathbf{e}}_\varphi \\
&= \frac{\mu I}{2\pi} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\ln\left(\frac{1}{\rho}\right) \right) \hat{\mathbf{e}}_\varphi \\
&= \frac{\mu I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\varphi
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.10.21

3.10.21 Find the transformation matrix that converts the components of a vector in spherical polar coordinates into its components in circular cylindrical coordinates. Then find the matrix of the inverse transformation.

Dado que la transformacion de coordenadas cartesianas a cilindricas es:

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi_c) & \sin(\varphi_c) & 0 \\ -\sin(\varphi_c) & \cos(\varphi_c) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y de coordenadas esfericas a cartes:

$$\begin{pmatrix} \sin(\theta_e)\cos(\varphi_e) & \cos(\theta_e)\cos(\varphi_e) & -\sin(\varphi_e) \\ \sin(\theta_e)\sin(\varphi_e) & \cos(\theta_e)\sin(\varphi_e) & \sin(\varphi_e) \\ \cos(\theta_e) & -\sin(\theta_e) & 0 \end{pmatrix}$$

Luego :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{r}}_e \\ \hat{\theta}_e \\ \hat{\phi}_e \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_c) & \sin(\varphi_c) & 0 \\ -\sin(\varphi_c) & \cos(\varphi_c) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\theta_e)\cos(\varphi_e) & \cos(\theta_e)\cos(\varphi_e) & -\sin(\varphi_e) \\ \sin(\theta_e)\sin(\varphi_e) & \cos(\theta_e)\sin(\varphi_e) & \sin(\varphi_e) \\ \cos(\theta_e) & -\sin(\theta_e) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\rho}_c \\ \hat{\theta}_c \\ \hat{k}_c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin(\theta_e)\cos(\varphi_e)\cos(\varphi_c) + \sin(\theta_e)\sin(\varphi_e)\sin(\varphi_c) & \cos(\theta_e)\cos(\varphi_e)\cos(\varphi_c) + \cos(\theta_e)\sin(\varphi_e)\sin(\varphi_c) \\ -\sin(\theta_e)\cos(\varphi_e)\sin(\varphi_c) + \sin(\theta_e)\sin(\varphi_e)\cos(\varphi_c) & -\cos(\theta_e)\cos(\varphi_e)\sin(\varphi_c) + \cos(\theta_e)\sin(\varphi_e)\cos(\varphi_c) \\ \cos(\theta_e) & \sin(\theta_e) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin(\theta_e)\cos(\varphi)\cos(\varphi) + \sin(\theta_e)\sin(\varphi)\sin(\varphi) & \cos(\theta_e)\cos(\varphi)\cos(\varphi) + \cos(\theta_e)\sin(\varphi)\sin(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ -\sin(\theta_e)\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \sin(\theta_e)\sin(\varphi)\cos(\varphi) & -\cos(\theta_e)\cos(\varphi)\sin(\varphi)\sin(\varphi) + \cos(\varphi)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta_e) & \sin(\theta_e) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donde $\hat{\mathbf{r}}_e, \hat{\theta}_e, \hat{\phi}_e$ son los vectores unitarios asociados a coordenadas esferica y $\hat{\rho}_c, \hat{\theta}_c, \hat{k}_c$ son los vectores unitarios las coordenadas cilindricas. Ademas como el productos de matrices ortogonales es una matriz ortogonal entonces la matriz inversa sera la traspuesta de esta matriz.

Ejercicio 3.10.35

3.10.35 A certain force field is given in spherical polar coordinates by

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{2P \cos \theta}{r^3} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{P}{r^3} \sin \theta, \quad r \geq P/2.$$

- Examine $\nabla \times \mathbf{F}$ to see if a potential exists.
- Calculate $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ for a unit circle in the plane $\theta = \pi/2$. What does this indicate about the force being conservative or nonconservative?
- If you believe that \mathbf{F} may be described by $\mathbf{F} = -\nabla\psi$, find ψ . Otherwise simply state that no acceptable potential exists.

(a) De la ecuacion (2) tenemos que:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{h_r h_\varphi h_\theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_r h_r & \hat{\mathbf{e}}_\varphi h_\varphi & \hat{\mathbf{e}}_\theta h_\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ h_r F_r & h_\varphi F_\varphi & h_\theta F_\theta \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_r & \hat{\mathbf{e}}_\varphi r \sin(\theta) & \hat{\mathbf{e}}_\theta r \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{2P \cos \theta}{r^3} & 0 & r \frac{P}{r^3} \sin \theta \end{vmatrix} \\
&= -\hat{\mathbf{e}}_\varphi r \sin(\theta) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{P}{r^2} \sin \theta \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{2P \cos \theta}{r^3} \right) \right] \\
&= -\hat{\mathbf{e}}_\varphi r \sin(\theta) \left[-\frac{2P}{r^3} \sin \theta - \left(-\frac{2P \sin \theta}{r^3} \right) \right] \\
&= -\hat{\mathbf{e}}_\varphi r \sin(\theta) \left[-\frac{2P}{r^3} \sin \theta + \frac{2P \sin \theta}{r^3} \right] = 0
\end{aligned}$$

Por lo cual existe una función escalar ϕ tal que $\mathbf{F} = \nabla\phi$

- Dado que que el trabajo se calcula para para un circulo de $r = 1$ en plano $\theta = \frac{\pi}{2}$, teniendo la siguiente parametrizacion $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{c}(\phi) = \mathbf{r}(1, \pi/2, \phi)$

$$\begin{aligned}
\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{c}(\phi)) \cdot \frac{d\mathbf{c}(\phi)}{d\phi} d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\left(1, \frac{\pi}{2}, \varphi\right) \cdot \frac{d\mathbf{r}(1, \pi/2, \phi)}{d\phi} d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\hat{\mathbf{e}}_r \frac{2P \cos \frac{\pi}{2}}{1^3} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{P}{1^3} \sin \frac{\pi}{2} \right) \cdot \frac{d}{d\phi} \left(\hat{\mathbf{e}}_x \sin \frac{\pi}{2} \cos \varphi + \hat{\mathbf{e}}_y \sin \frac{\pi}{2} \sin \varphi + \hat{\mathbf{e}}_z \cos \frac{\pi}{2} \right) d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} (P \hat{\mathbf{e}}_\theta) \cdot (-\hat{\mathbf{e}}_x \sin \varphi + \hat{\mathbf{e}}_y \cos \varphi) d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} P \hat{\mathbf{e}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{e}}_\varphi d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} 0 d\phi = 0
\end{aligned}$$

De los anterior no se puede determinar si es una fuerza conservativa o no conservativa.

(c) Como el rotacional de la fuerza es cero entonces la fuerza es una fuerza conservativa, lo cual implica que el trabajo realizado por la fuerza sera la misma por cualquier trayectoria entre dos puntos, en particular en una trayectoria en linea recta a lo largo de la direccion radial $\hat{\mathbf{e}}_r$ y tomando el potencial como cero en el infinito entonces:

$$\begin{aligned}
\phi_r &= - \int_{\infty}^{r_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
&= - \int_{\infty}^{r_0} \mathbf{F}(\mathbf{r}(r)) \cdot \hat{\mathbf{e}}_r dr \\
&= - \int_{\infty}^{r_0} \left(\hat{\mathbf{e}}_r \frac{2P \cos \theta}{r^3} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{P}{r^3} \sin \theta \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_r dr \\
&= - \int_{\infty}^{r_0} \frac{2P \cos \theta}{r^3} dr \\
&= - \left(-\frac{2P \cos \theta}{r^2} \right) \Big|_{\infty}^{r_0} \\
&= \left(\frac{2P \cos \theta}{r_0^2} \right)
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.10.37

3.10.37 An electric dipole of moment \mathbf{p} is located at the origin. The dipole creates an electric potential at \mathbf{r} given by

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi \epsilon_0 r^3}.$$

Find the electric field, $\mathbf{E} = -\nabla \psi$ at \mathbf{r} .

Sea θ el ángulo talque $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = pr \cos(\theta)$ luego:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) \\
&= \nabla \left(\frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \\
&= \left(\hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \\
&= \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) + \hat{\mathbf{e}}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \\
&= -\hat{\mathbf{e}}_r \left(\frac{p \cos(\theta)}{2\pi\epsilon_0 r^3} \right) - \hat{\mathbf{e}}_\theta \left(\frac{p \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right)
\end{aligned}$$

Machado Volumen 1

▼ Ejercicio 6.2

6.2 Considere uma caixa retangular submetida às condições de contorno

$$\begin{cases} \mathbb{V}(0, y, z) = 0 & \mathbb{V}(a, y, z) = V_0 \\ \mathbb{V}(x, 0, z) = 0 & \mathbb{V}(x, b, z) = V_0 \sin x \\ \mathbb{V}(x, y, 0) = 0 & \mathbb{V}(x, y, c) = V_0 \cos y \end{cases}$$

Encontre o potencial elétrico dentro da caixa, utilizando as superposições convenientes.

Aplicando separación de variables a la ecuación $\nabla^2 \mathbb{V} = \frac{\partial^2 \mathbb{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbb{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbb{V}}{\partial z^2} = 0$ se llega a la solución general:

$$\mathbb{V}(x, y, z) = \mathbb{V}_{0,0} + \mathbb{V}_{k,0} + \mathbb{V}_{0,\ell} + \mathbb{V}_{k,k} + \mathbb{V}_{k,\ell} \quad (6)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_{0,0} &= [a_{0,0} + b_{0,0}x] [c_{0,0} + d_{0,0}y] [f_{0,0} + g_{0,0}z] \\
\mathbb{V}_{k,0} &= [a_{k,0} + b_{k,0}x] [c_{k,0} \cos ky + d_{k,0} \sin ky] [f_{k,0} e^{kz} + g_{k,0} e^{-kz}] \\
\mathbb{V}_{0,\ell} &= [a_{0,\ell} \cos \ell x + b_{0,\ell} \sin \ell x] [c_{0,\ell} e^{\ell y} + d_{0,\ell} e^{-\ell y}] [f_{0,\ell} + g_{0,\ell}z] \\
\mathbb{V}_{k,k} &= [a_{k,k} \cos kx + b_{k,k} \sin kx] [c_{k,k} + d_{k,k}y] [f_{k,k} e^{kz} + g_{k,k} e^{-kz}] \\
\mathbb{V}_{k,\ell} &= [a_{k,\ell} \cos \ell x + b_{k,\ell} \sin \ell x] [c_{k,\ell} \cos \lambda y + d_{k,\ell} \sin \lambda y] [f_{k,\ell} e^{kz} + g_{k,\ell} e^{-kz}]
\end{aligned}$$

Y aplicando las condiciones de frontera entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(0, y, z) &= \mathbb{V}_{0,0}(0, y, z) + \mathbb{V}_{k,0}(0, y, z) + \mathbb{V}_{0,\ell}(0, y, z) \\
&\quad + \mathbb{V}_{k,k}(0, y, z) + \mathbb{V}_{k,\ell}(0, y, z) = 0 \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(0, y, z) &= [a_{0,0} + b_{0,0} \cdot 0] [c_{0,0} + d_{0,0}y] [f_{0,0} + g_{0,0}z] \\
&\quad + [a_{k,0} + b_{k,0} \cdot 0] [c_{k,0} \cos ky + d_{k,0} \sin ky] [f_{k,0} e^{kz} + g_{k,0} e^{-kz}] \\
&\quad + [a_{0,\ell} \cos 0 + b_{0,\ell} \sin 0] [c_{0,\ell} e^{\ell y} + d_{0,\ell} e^{-\ell y}] [f_{0,\ell} + g_{0,\ell}z] \quad \Rightarrow \\
&\quad + [a_{k,k} \cos 0 + b_{k,k} \sin 0] [c_{k,k} + d_{k,k}y] [f_{k,k} e^{kz} + g_{k,k} e^{-kz}] \\
&\quad + [a_{k,\ell} \cos 0 + b_{k,\ell} \sin 0] [c_{k,\ell} \cos \lambda y + d_{k,\ell} \sin \lambda y] [f_{k,\ell} e^{kz} + g_{k,\ell} e^{-kz}] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(0, y, z) &= a_{0,0} [c_{0,0} + d_{0,0}y] [f_{0,0} + g_{0,0}z] \\
&+ a_{k,0} [c_{k,0} \cos ky + d_{k,0} \operatorname{sen} ky] [f_{k,0} e^{kz} + g_{k,0} e^{-kz}] \\
&+ a_{0,\ell} [c_{0,\ell} e^{\ell y} + d_{0,\ell} e^{-\ell y}] [f_{0,\ell} + g_{0,\ell}z] \\
&+ a_{k,k} [c_{k,k} + d_{k,k}y] [f_{k,k} e^{kz} + g_{k,k} e^{-kz}] \\
&+ a_{k,\ell} [c_{k,\ell} \cos \lambda y + d_{k,\ell} \operatorname{sen} \lambda y] [f_{k,\ell} e^{kz} + g_{k,\ell} e^{-kz}] = 0
\end{aligned}$$

Lo cual implica que $a_{\ell,k} = 0$ para todo ℓ, k , luego:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_{0,0} &= b_{0,0}x [c_{0,0} + d_{0,0}y] [f_{0,0} + g_{0,0}z] \\
\mathbb{V}_{k,0} &= b_{k,0}x [c_{k,0} \cos ky + d_{k,0} \operatorname{sen} ky] [f_{k,0} e^{kz} + g_{k,0} e^{-kz}] \\
\mathbb{V}_{0,\ell} &= b_{0,\ell} \operatorname{sen} \ell x [c_{0,\ell} e^{\ell y} + d_{0,\ell} e^{-\ell y}] [f_{0,\ell} + g_{0,\ell}z] \\
\mathbb{V}_{k,k} &= b_{k,k} \operatorname{sen} kx [c_{k,k} + d_{k,k}y] [f_{k,k} e^{kz} + g_{k,k} e^{-kz}] \\
\mathbb{V}_{k,\ell} &= b_{k,\ell} \operatorname{sen} \ell x [c_{k,\ell} \cos \lambda y + d_{k,\ell} \operatorname{sen} \lambda y] [f_{k,\ell} e^{kz} + g_{k,\ell} e^{-kz}]
\end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(x, 0, z) &= b_{0,0}x [c_{0,0} + d_{0,0} \cdot 0] [f_{0,0} + g_{0,0}z] \\
&+ b_{k,0}x [c_{k,0} \cos 0 + d_{k,0} \operatorname{sen} 0] [f_{k,0} e^{kz} + g_{k,0} e^{-kz}] \\
&+ b_{0,\ell} \operatorname{sen} \ell x [c_{0,\ell} e^0 + d_{0,\ell} e^0] [f_{0,\ell} + g_{0,\ell}z] \\
&+ b_{k,k} \operatorname{sen} kx [c_{k,k} + d_{k,k} \cdot 0] [f_{k,k} e^{kz} + g_{k,k} e^{-kz}] \\
&+ b_{k,\ell} \operatorname{sen} \ell x [c_{k,\ell} \cos 0 + d_{k,\ell} \operatorname{sen} 0] [f_{k,\ell} e^{kz} + g_{k,\ell} e^{-kz}] = 0
\end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(x, 0, z) &= b_{0,0}x [c_{0,0}] [f_{0,0} + g_{0,0}z] \\
&+ b_{k,0}x c_{k,0} [f_{k,0} e^{kz} + g_{k,0} e^{-kz}] \\
&+ b_{0,\ell} \operatorname{sen} \ell x [c_{0,\ell} + d_{0,\ell}] [f_{0,\ell} + g_{0,\ell}z] \\
&+ b_{k,k} \operatorname{sen} kx [c_{k,k}] [f_{k,k} e^{kz} + g_{k,k} e^{-kz}] \\
&+ b_{k,\ell} \operatorname{sen} \ell x [c_{k,\ell}] [f_{k,\ell} e^{kz} + g_{k,\ell} e^{-kz}] = 0
\end{aligned} \Rightarrow$$

lo cual implica que $c_{0,0} = c_{k,0} = c_{k,k} = c_{k,\ell} = 0$ y $c_{0,\ell} = -d_{0,\ell}$, luego

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_{0,0} &= b_{0,0}x d_{0,0}y [f_{0,0} + g_{0,0}z] \\
\mathbb{V}_{k,0} &= b_{k,0}x d_{k,0} \operatorname{sen} ky [f_{k,0} e^{kz} + g_{k,0} e^{-kz}] \\
\mathbb{V}_{0,\ell} &= b_{0,\ell} \operatorname{sen} \ell x c_{0,\ell} 2 \operatorname{senh} \ell y [f_{0,\ell} + g_{0,\ell}z] \\
\mathbb{V}_{k,k} &= b_{k,k} \operatorname{sen} kx d_{k,k}y [f_{k,k} e^{kz} + g_{k,k} e^{-kz}] \\
\mathbb{V}_{k,\ell} &= b_{k,\ell} \operatorname{sen} \ell x d_{k,\ell} \operatorname{sen} \lambda y [f_{k,\ell} e^{kz} + g_{k,\ell} e^{-kz}]
\end{aligned}$$

Y:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(x, y, 0) &= b_{0,0}x d_{0,0}y f_{0,0} \\
&+ b_{k,0}x d_{k,0} \operatorname{sen} ky [f_{k,0} + g_{k,0}] \\
&+ b_{0,\ell} \operatorname{sen} \ell x c_{0,\ell} 2 \operatorname{senh} \ell y [f_{0,\ell}] \\
&+ b_{k,k} \operatorname{sen} kx d_{k,k}y [f_{k,k} + g_{k,k}] \\
&+ b_{k,\ell} \operatorname{sen} \ell x d_{k,\ell} \operatorname{sen} \lambda y [f_{k,\ell} + g_{k,\ell}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{0,0} &= b_{0,0} x d_{0,0} y g_{0,0} z \\
V_{k,0} &= -b_{k,0} x d_{k,0} \operatorname{sen} k y g_{k,0} \operatorname{sen} k z \\
V_{0,\ell} &= -b_{0,\ell} \operatorname{sen} \ell x d_{0,\ell} 2 \operatorname{senh} \ell y g_{0,\ell} z \\
V_{k,k} &= -b_{k,k} \operatorname{sen} k x d_{k,k} y g_{k,k} \operatorname{senh} k z \\
V_{k,\ell} &= -b_{k,\ell} \operatorname{sen} \ell x d_{k,\ell} \operatorname{sen} \lambda y g_{k,\ell} \operatorname{senh} k z
\end{aligned}$$

Ahora haciendo uso del principio de \

superposición, la solución general al problema es:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

Donde V_1 es la solución de

$$\begin{cases} V(0, y, z) = 0 & V(a, y, z) = V_0 \\ V(x, 0, z) = 0 & V(x, b, z) = 0 \\ V(x, y, 0) = 0 & V(x, y, c) = 0 \end{cases}$$

Donde V_2 es la solución de

$$\begin{cases} V(0, y, z) = 0 & V(a, y, z) = 0 \\ V(x, 0, z) = 0 & V(x, b, z) = V_0 \sin x \\ V(x, y, 0) = 0 & V(x, y, c) = 0 \end{cases}$$

Donde V_3 es la solución de

$$\begin{cases} V(0, y, z) = 0 & V(a, y, z) = 0 \\ V(x, 0, z) = 0 & V(x, b, z) = 0 \\ V(x, y, 0) = 0 & V(x, y, c) = V_0 \cos x \end{cases}$$

Además como el potencial entre las tapas no metálicas debe ser continuo entonces tenemos las siguientes condiciones adicionales:

$$\begin{aligned}
V_1(x, b, z) &= b_{0,0} x b z \\
&+ b_{k,0} x \operatorname{sen} k b \operatorname{sen} k z \\
&+ b_{0,\ell} \operatorname{sen} \ell x \operatorname{senh} \ell b z \\
&+ b_{k,k} \operatorname{sen} k x b \operatorname{senh} k z \\
&+ b_{k,\ell} \operatorname{sen} \ell x \operatorname{sen} \lambda b \operatorname{senh} k z = 0
\end{aligned}$$

Luego $b_{0,0} = b_{0,\ell} = b_{k,\ell} = b_{k,k} = 0$ y $k_n = \frac{n\pi}{b}$ por lo que

$$V_1(x, y, z) = b_{k,0} x \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}$$

Y también:

$$\begin{aligned}
V_1(a, y, z) &= b_{k,0} a \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} = V_0 \Rightarrow \\
a &= V_0 \left[b_{k,0} \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \right]^{-1} \Rightarrow
\end{aligned}$$

Por lo que $k = 0$ y

$$\mathbb{V}_1(x, y, z) = V_0$$

Ahora para \mathbb{V}_2

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_2(a, y, z) &= b_{0,0}ayz \\ &+ b_{k,0}a \operatorname{sen} ky \operatorname{sen} kz \\ &+ b_{0,\ell}z \operatorname{sen} \ell a \operatorname{senh} \ell y \\ &+ b_{k,k}y \operatorname{sen} ka \operatorname{senh} kz \\ &+ b_{k,\ell} \operatorname{sen} \ell a \operatorname{sen} \lambda y \operatorname{senh} kz = 0\end{aligned}$$

Luego $b_{0,0} = b_{k,0} = b_{k,k} = 0$ y $\ell_n = \frac{n\pi}{a}$ por lo que

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_2(x, y, c) &= \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} [b_{0,\ell} \operatorname{sen} \ell y + b_{k,\ell} \operatorname{sen} \lambda y \operatorname{senh} kc] = 0 \quad \Rightarrow \\ b_{0,\ell} \operatorname{sen} \ell y + b_{k,\ell} \operatorname{sen} \lambda y \operatorname{senh} kc &= 0 \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_2(x, y, c) &= b_{0,0}xyc \\ &+ b_{k,0}x \operatorname{sen} ky \operatorname{sen} kc \\ &+ b_{0,\ell}c \operatorname{sen} \ell x \operatorname{senh} \ell y \\ &+ b_{k,k}y \operatorname{sen} kx \operatorname{senh} kc \\ &+ b_{k,\ell} \operatorname{sen} \ell x \operatorname{sen} \lambda y \operatorname{senh} kc = 0\end{aligned}$$

Luego $b_{0,0} = b_{k,0} = b_{k,k} = 0$ y $k_n = \frac{n\pi}{a}$ por lo que

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_2(a, y, z) &= b_{k,0}a \operatorname{sen} ky \operatorname{sen} kz = 0 \quad \Rightarrow \\ b_{0,\ell} \operatorname{sen} \ell y + b_{k,\ell} \operatorname{sen} \lambda y \operatorname{senh} kc &= 0 \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

Y también:

Entonces:

$$\mathbb{V}_1(x, y, \gamma) = b_{k,\ell} \operatorname{sen} \ell x \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{\beta} \operatorname{senh} k\gamma = 0$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_1(a, y, z) &= b_{0,0}ad_{0,0}yg_{0,0}z \\ &- b_{k,0}ad_{k,0} \operatorname{sen} kyg_{k,0} \operatorname{sen} kz \\ &- b_{0,\ell} \operatorname{sen} \ell ad_{0,\ell} 2 \operatorname{senh} \ell yg_{0,\ell} z \\ &- b_{k,k} \operatorname{sen} kad_{k,k} yg_{k,k} \operatorname{senh} kz \\ &- b_{k,\ell} \operatorname{sen} \ell ad_{k,\ell} \operatorname{sen} \lambda yg_{k,\ell} \operatorname{sen} kz = V_0\end{aligned}$$

6.3 Obtenha o campo elétrico e a densidade de carga sobre a superfície da esfera do exemplo 6.6.

6.6 Um cilindro infinito de raio R está submetido ao potencial

$$\mathbb{V}(R, \theta) = V_0 \cos^3 \theta \sin \theta$$

sobre a sua superfície. Ache o potencial em todo o espaço.

6.2 Considere uma caixa retangular submetida às condições de contorno

$$\begin{cases} \mathbb{V}(0, y, z) = 0 & \mathbb{V}(a, y, z) = V_0 \\ \mathbb{V}(x, 0, z) = 0 & \mathbb{V}(x, b, z) = V_0 \sin x \\ \mathbb{V}(x, y, 0) = 0 & \mathbb{V}(x, y, c) = V_0 \cos y \end{cases}$$

Encontre o potencial elétrico dentro da caixa, utilizando as superposições convenientes.

6.3 Obtenha o campo elétrico e a densidade de carga sobre a superfície da esfera do exemplo 6.6.

o