

Министерство образования и науки РФ

Федеральное агентство по образованию

НГТУ

Кафедра общей физики

Проектная работа на тему

Моделирование движения метеорита в атмосфере Земли

Факультет: ПМИ

Преподаватель: Баранов А.В

Группа: ПМ-15

Студенты: Шахрай Вадим

Зуев Андрей

Новосибирск 2022

Содержание

Введение.....	3
Теоретическая часть.....	4
Программная часть	8
Интерфейс.....	9
Тестирование.....	14
Список использованной литературы.....	15

Введение

В проекте исследуется явление движения метеорита в атмосфере планеты Земля. Проведены расчеты изменения угла падения, скорости метеорита и расстояния до поверхности планеты. Была написана программа, моделирующая процесса движения, содержащая в своем интерфейсе графики изменения основных параметров движения. На основе реальных данных проведено моделирование движения известных метеоритов.

Главной целью проекта является моделирование движения метеорита в атмосфере планеты Земля. Особое внимание уделено качеству программы.

Задачи, решаемые проектом:

- Описание движения метеорита дифференциальными уравнениями;
- Создание программы, моделирующей процесс движения метеорита.

Теоретическая часть

Для расчета траектории движения метеорита в атмосфере Земли необходимо знать исходные данные: размеры D , массу m , скорость V и угол входа Θ в атмосферу.

Вид дифференциальных уравнений падения метеорита зависит от выбранной системы координат и от принимаемых во внимание сил, действующих на метеорит. В нашем случае рассмотрим запись движения центра масс метеорита в проекциях на оси скоростной барицентрической системы координат¹ A_{xyz} с началом в центре масс метеорита.

Считается, что на метеорит, движущийся в атмосфере планеты действуют:

- Сила тяжести \vec{G} ;
- Аэродинамическая сила \vec{R}_a ;
- Суммарная сила притяжения Солнца, Луны и других планет \vec{F}_Σ ;

При расчетах траектории падения \vec{F}_Σ не учитывается в следствии малости.

В результате получим

$$\vec{F} = \vec{R}_a + \vec{G}$$

Для проведения исследования с целью выявления основных закономерностей целесообразно пользоваться системой уравнений, записанной при некоторых допущениях:

- Падение метеорита происходит под действием силы тяжести и аэродинамической силы;
- Земля – шар радиуса $R_{пл}$;
- Метеорит – шар радиуса r ;
- Поле тяготения центральное;
- Движение метеорита вокруг центра масс не рассматривается;
- Рассматривается плоское движение.

Если считать, что все силы, действующие на метеорит приложены к центру масс, то уравнение движения относительно планеты будет:

$$\vec{W}m = \vec{G} + \vec{R}_a;$$

Ускорение в скоростной системе координат представляется в виде

$$\vec{W} = \left(\frac{dV}{dt} \vec{i} + V \frac{d\theta^*}{dt} \vec{j} + V \frac{d\varepsilon^*}{dt} \vec{k} \right),$$

где i, j, k – единичные векторы по скоростным осям.

Так же справедливо соотношение $\Delta\theta^* = \Delta\theta + \Delta\psi$,

где $\Delta\psi = \frac{\Delta S \cos \theta}{R} = \frac{V \cos \theta}{R} dt$ (Рисунок 1)

¹ Основы теории полета космических аппаратов. Под ред. Г.С.Нариманова и М.К.Тихонравова. 1972. 608 стр.

В результате проецирования на оси скоростной системы координат получим:

$$\begin{cases} m \frac{dV}{dt} = -X - G_x \\ mV \frac{d\theta}{dt} = Y - G_y \end{cases},$$

где X – аэродинамическая лобовое сопротивление, Y – аэродинамическая подъемная сила.

Проекция силы притяжения:

$$G_x = G \sin \theta; \quad G_y = G \cos \theta$$

Тогда, окончательно получим общее уравнение движения метеорита в скоростной системе координат:

$$\begin{cases} m \frac{dV}{dt} = -c_x S \frac{\rho V^2}{2} - m g_0 \frac{R_{пл}^2 \sin \theta}{R^2}, \\ mV \frac{d\theta}{dt} = c_y S \frac{\rho V^2}{2} - m g_0 \frac{R_{пл}^2 \cos \theta}{R^2} + \frac{m V^2 \cos \theta}{R}. \end{cases} \quad (1)$$

Дополнительно к системе (1) можно запишем еще два кинематических соотношения, позволяющих определить положение центра масс метеорита:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= V \sin \theta, \\ \frac{dL}{dt} &= V \frac{R_{пл} \cos \theta}{R}. \end{aligned}$$

Итак, при сделанных упрощающих предположениях система уравнений записывается в виде:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = -\sigma_x g_0 \frac{\rho V^2}{2} - g \sin \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} = \sigma_x K g_0 \frac{\rho V}{2} + \left(\frac{V}{R} - \frac{g}{V} \right) \cos \theta, \\ \frac{dH}{dt} = V \sin \theta, \\ \frac{dL}{dt} = V \frac{R_{пл} \cos \theta}{R}, \\ \sigma_x = \frac{c_x S}{mg}, \quad g = g_0 \frac{R_{пл}^2}{R^2}, \quad K = \frac{c_y}{c_x}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь V – скорость центра масс метеорита; θ – угол между вектором скорости и местным горизонтом; H – высота полета метеорита над поверхностью планеты; L – дальность полета отсчитываемая вдоль образующей поверхности планеты от точки входа; $g_0 = 9,8 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения у поверхности планеты; g – ускорение свободного падения на высоте; σ_x – баллистический параметр; c_x, c_y – коэффициенты аэродинамических сил лобового сопротивления и подъемной силы; S – площадь миделевого сечения метеорита; K – аэродинамическое качество; m – масса метеорита; $R_{пл}$ – радиус планеты; $R = R_{пл} + H$ – расстояние от центра планеты до центра метеорита; S – площадь миделевого сечения; ρ – плотность атмосферы.

Коэффициенты сил лобового сопротивления и подъемной силы усредняются и принимаются постоянными величинами по траектории движения метеорита в атмосфере. Определяющими параметрами являются угол наклона вектора скорости к линии местного горизонта θ и коэффициент лобового сопротивления c_x . Коэффициент подъемной силы c_y можно принять равным нулю.

В систему уравнений (2) входит величина ρ – плотность атмосферы, которая на больших высотах во много раз меньше, чем на поверхности Земли. Заглянем в справочник: на высоте 5,5 км плотность вдвое меньше, на высоте 11 км – вчетверо и т.д. Математически плотность атмосферы от высоты хорошо передается формулой²:

$$\rho = \rho_0 e^{-bH},$$

где $b = 1,29 \cdot 10^{-4}$, ρ_0 – плотность атмосферы у поверхности планеты.

Решение системы уравнений (2) выполним на основе численного метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности. Обозначим:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = f_1(t, V, \theta, H), \\ \frac{d\theta}{dt} = f_2(t, V, \theta, H), \\ \frac{dH}{dt} = f_3(t, V, \theta), \\ \frac{dL}{dt} = f_4(t, V, \theta). \end{cases}$$

с начальными условиями:

$$V(t_0) = V_0 \quad \theta(t_0) = \theta_0 \quad H(t_0) = H_0 \quad L(t_0) = L_0.$$

Формулы Рунге-Кутты для данной системы примут вид:

$$\begin{aligned} V_{i+1} &= V_i + \frac{1}{6}(k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i}), \\ \theta_{i+1} &= \theta_i + \frac{1}{6}(m_{1i} + 2m_{2i} + 2m_{3i} + m_{4i}), \\ H_{i+1} &= H_i + \frac{1}{6}(l_{1i} + 2l_{2i} + 2l_{3i} + l_{4i}), \\ L_{i+1} &= L_i + \frac{1}{6}(n_{1i} + 2n_{2i} + 2n_{3i} + n_{4i}), i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (3)$$

где

² Практикум по компьютерному математическому моделированию. Часть II: Компьютерное моделирование физических процессов: учебно-методическое пособие / О. А. Широкова – Казань: КФУ, 2015. – 85с.

$$k_{1i} = hf_1(t_i, V_i, \theta_i, H_i) = h \left(-\frac{c_x S(R_{пл} + H)^2}{mg_o R_{пл}^2} \frac{\rho_o e^{(-bH)} V^2}{2} - g_o \frac{R_{пл}^2 \sin \theta}{(R_{пл} + H)^2} \right)$$

$$m_{1i} = hf_2(t_i, V_i, \theta_i, H_i) = h \left(\frac{V}{R_{пл} + H} - \frac{g_o R_{пл}^2}{V(R_{пл} + H)^2} \right) \cos \theta$$

$$l_{1i} = hf_3(t_i, V_i, \theta_i) = hV \sin \theta$$

$$n_{1i} = hf_2(t_i, V_i, \theta_i) = V \frac{R_{пл}^2 \cos \theta}{(R_{пл} + H)}$$

$$k_{2i} = hf_1(t_i + 0.5h, V_i + 0.5k1, \theta_i + 0.5m1, H_i + 0.5l1) = h \left(-\frac{c_x S(R_{пл} + H + 0.5l1)^2}{mg_o R_{пл}^2} \frac{\rho_o e^{(-b(H+0.5l1))} (V + 0.5k1)^2}{2} - g_o \frac{R_{пл}^2 \sin(\theta + 0.5m1)}{(R_{пл} + H + 0.5l1)^2} \right)$$

$$m_{2i} = hf_2(t_i + 0.5h, V_i + 0.5k1, \theta_i + 0.5m1, H_i + 0.5l1) = h \left(\frac{V + 0.5k1}{R_{пл} + H + 0.5l1} - \frac{g_o R_{пл}^2}{(V + 0.5k1)(R_{пл} + H + 0.5l1)^2} \right) \cos(\theta + 0.5m1)$$

$$l_{2i} = hf_3(t_i + 0.5h, V_i + 0.5k1, \theta_i + 0.5m1) = h(V + 0.5k1) \sin(\theta + 0.5m1)$$

$$n_{2i} = hf_3(t_i + 0.5h, V_i + 0.5k1, \theta_i + 0.5m1) = (V + 0.5k1) \frac{R_{пл}^2 \cos(\theta + 0.5m1)}{(R_{пл} + H + 0.5l1)}$$

$$k_{3i} = hf_1(t_i + 0.5h, V_i + 0.5k2, \theta_i + 0.5m2, H_i + 0.5l2) = h \left(-\frac{c_x S(R_{пл} + H + 0.5l2)^2}{mg_o R_{пл}^2} \frac{\rho_o e^{(-b(H+0.5l2))} (V + 0.5k2)^2}{2} - g_o \frac{R_{пл}^2 \sin(\theta + 0.5m2)}{(R_{пл} + H + 0.5l2)^2} \right)$$

$$m_{3i} = hf_2(t_i + 0.5h, V_i + 0.5k2, \theta_i + 0.5m2, H_i + 0.5l2) = h \left(\frac{V + 0.5k2}{R_{пл} + H + 0.5l2} - \frac{g_o R_{пл}^2}{(V + 0.5k2)(R_{пл} + H + 0.5l2)^2} \right) \cos(\theta + 0.5m2)$$

$$l_{3i} = hf_3(t_i + 0.5h, V_i + 0.5k2, \theta_i + 0.5m2) = h(V + 0.5k2) \sin(\theta + 0.5m2)$$

$$n_{3i} = hf_3(t_i + 0.5h, V_i + 0.5k2, \theta_i + 0.5m2) = (V + 0.5k2) \frac{R_{пл}^2 \cos(\theta + 0.5m2)}{(R_{пл} + H + 0.5l2)}$$

$$k_{3i} = hf_1(t_i + 0.5h, V_i + k3, \theta_i + m3, H_i + l3) = h \left(-\frac{c_x S(R_{пл} + H + l3)^2}{mg_o R_{пл}^2} \frac{\rho_o e^{(-b(H+l3))} (V + k3)^2}{2} - g_o \frac{R_{пл}^2 \sin(\theta + m3)}{(R_{пл} + H + l3)^2} \right)$$

$$m_{3i} = hf_2(t_i + h, V_i + k3, \theta_i + m3, H_i + l3) = h \left(\frac{V + k3}{R_{пл} + H + l3} - \frac{g_o R_{пл}^2}{(V + k3)(R_{пл} + H + l3)^2} \right) \cos(\theta + m3)$$

$$l_{3i} = hf_3(t_i + h, V_i + k3, \theta_i + m3) = h(V + k3) \sin(\theta + m3)$$

$$n_{3i} = hf_3(t_i + h, V_i + k3, \theta_i + m3) = (V + k3) \frac{R_{пл}^2 \cos(\theta + m3)}{(R_{пл} + H + l3)}$$

К выводу уравнения движения:

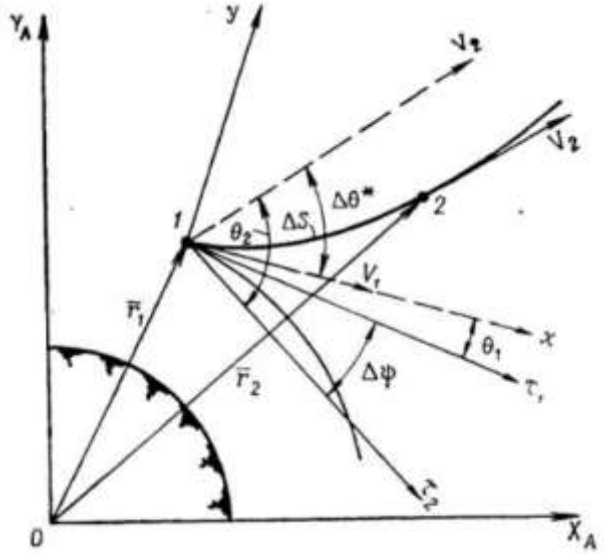


Рисунок 1

0 – центр планеты; 1 – начальное положение тела;
2 – положение тела через некоторый промежуток времени Δt ; t_1, t_2 – линии местного горизонта в точках 1 и 2 соответственно, $\Delta\theta^*$ и $\Delta\epsilon^*$ – изменение углов наклона вектора скорости к плоскости местного горизонта в продольной и перпендикулярной плоскостях движения, которые отсчитываются от некоторой точки.

Программная часть

Проект представляет из себя web-страницу, которая написана на языке [TypeScript](#), с использованием фреймворка [React](#) (интерфейс) и библиотеки [Redux Toolkit](#) (менеджер состояния). Для отрисовки 3D-объектов была использована библиотека [React Three Fiber](#) - React-обертка над библиотекой [Three.js](#), которая взаимодействует с 3D-движком браузера [WebGL](#).

Проект использует хостинг [Git Hub Pages](#) для размещения в сети Интернет.

Список дополнительных технологий, используемых в проекте:

- [Material UI](#) - библиотека готовых React-компонентов пользовательского интерфейса в стиле [MaterialDesign 2](#) от Google;
- [React Three Drei](#) - библиотека вспомогательных функций для работы с [React Three Fiber](#);
- [camera-controls](#) - библиотека вспомогательных функций для работы с 3D-камерой;
- [Redux Persist](#) - библиотека-обертка над [Redux Toolkit](#) для сохранения состояния проекта;
- [Recharts](#) - React-библиотека для работы с графиками;
- [Yup](#) - библиотека для валидации данных;
- [gh-pages](#) - пакет для публикации приложения на [Git Hub Pages](#).

Весь код проекта находится в открытом доступе и размещен на [GitHub](#) по адресу <https://github.com/vadimshahray/meteorite-movement-in-earth-atmosphere>.

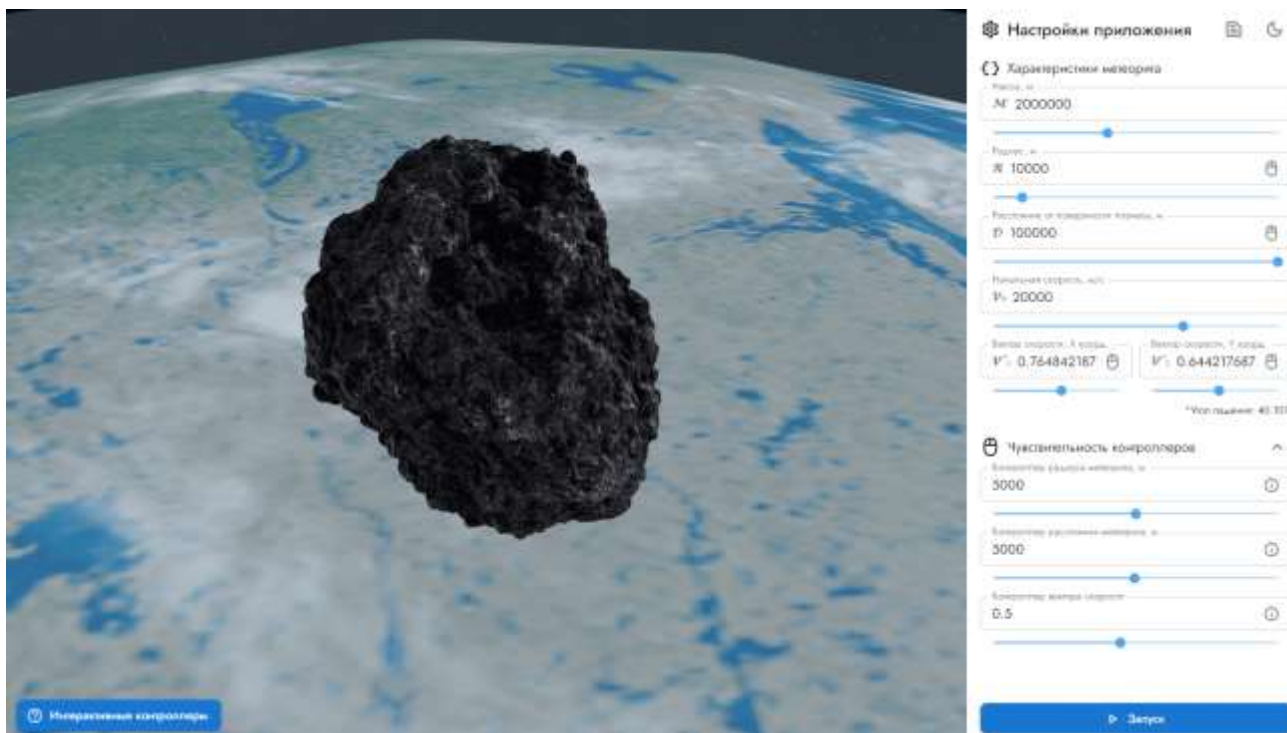
Программная модель метеорита

В программе метеорит - это объект со следующими свойствами:

- масса, кг;
- радиус, м;
- расстояние от поверхности Земли, м;
- пройденное расстояние, м;
- скорость падения, м/с;
- вектор скорости;
- точка координат в пространстве.

Интерфейс

Как только программа завершит загрузку моделей Земли и метеорита, появится сама программа:



Изображение 1. Интерфейс программы

Интерфейс программы “поделен” на 2 блока: *блок настроек* и *блок моделирования*.

Настройка приложения

Блок настроек

Здесь находятся настройки приложения: цветовая тема, файл отчета, настройки метеорита, кнопка запуска моделирования и прочее.

Поле ввода параметров составляет 2 компонента: стандартное текстовое поле ввода и в качестве альтернативы ему - слайдер. Их значения связаны между собой - если изменить значение через текстовое поле, то же значение примет слайдер.



Изображение 2. Интерфейс ввода данных

Интерактивные контроллеры

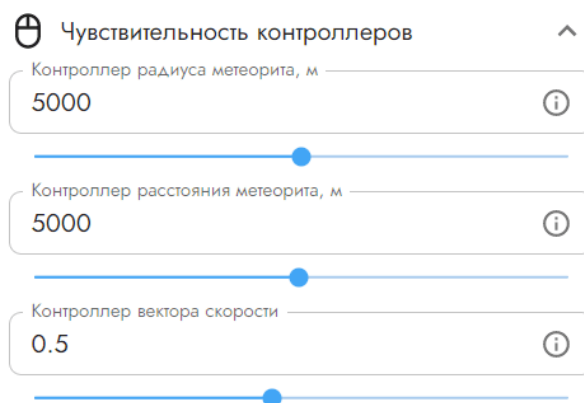
Некоторые параметры поддерживают 3 способ ввода данных - *интерактивные контроллеры*. Поля ввода таких параметров помечены специальной иконкой (см. изображение 3).



Изображение 3. Параметр, поддерживающий интерактивные контроллеры

Интерактивные контроллеры - это способ задать настройки приложения, используя вместо полей ввода данных клавиатуру или мышь/тачпад. Чтобы узнать, как воспользоваться интерактивным контроллером, достаточно навести курсор мыши специальную иконку в поле ввода, и вам покажется необходимая инструкция.

Интерактивные контроллеры тоже можно настраивать (см. изображение 4). Таким образом вы сможете регулировать чувствительность контроллеров - значение, на которое они будут менять определенный параметр приложения.



Изображение 4. Настройка интерактивных контроллеров

Инструкция по интерактивным контроллерам находится в левом нижнем углу блока моделирования (см. изображение 5).



Изображение 5. Кнопка, показывающая инструкцию по интерактивным контроллерам

Блок моделирования

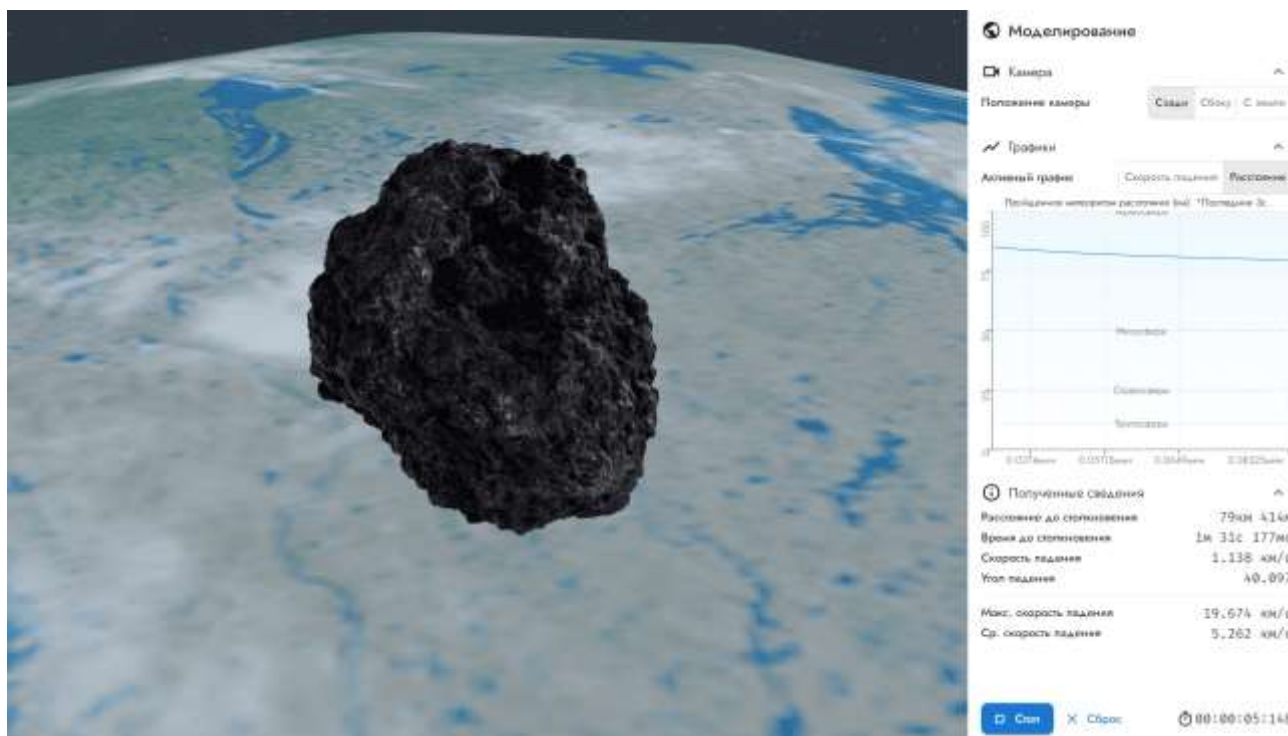
В этом блоке будет происходить визуальная работа программы - движение метеорита в сторону Земли. До начала моделирования данный блок позволяет пользоваться интерактивными контроллерами.

Начало моделирования

Как только вы введете все необходимые данные, можно начать моделирование, нажав на кнопку «Запуск» внизу. Если какие-то из введенных вами данных будут содержать ошибки, запустить моделирование не получится - вместо этого программа сообщит вам о том, что ошибки нужно исправить.

Моделирование

После успешного запуска моделирования, интерфейс программы поменяет *блок настроек* на *блок информации о моделировании*:



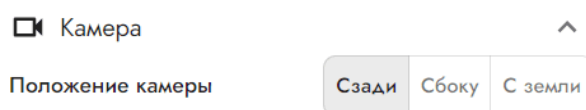
Изображение 6. Интерфейс программы во время моделирования

Блок информации о моделировании

Данный блок поделен на 4 секции: камера, графики, сведения и управление моделированием и таймер.

Камера

Вы можете выбрать, с какой стороны вы хотите наблюдать за движением метеорита: сзади него, сбоку или с поверхности Земли.

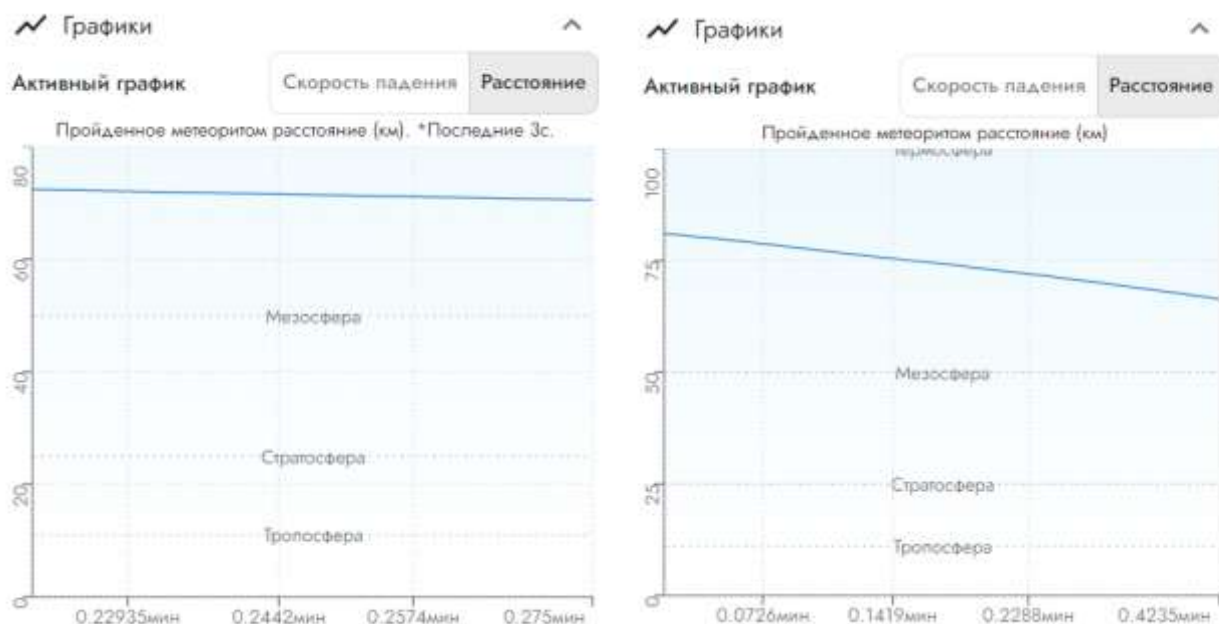


Изображение 7. Настройки положения камеры

Графики

Программа собирает данные о скорости движения метеорита и расстоянии между ним и поверхностью Земли.

У графиков 2 режима отображения данных: данные за последние 3 секунды и данные за все время (см. изображение 8).



Изображение 8. Режимы работы графика «Расстояние»

Первый режим работает, если моделирование в процессе. Чтобы включить 2-ой режим нужно либо остановить моделирование, нажав на кнопочку «Стоп» внизу, либо дождаться, пока оно не завершиться само.

Также можно узнать точные данные графика, наведя курсор мыши на него:



Изображение 9. Подробные данные графика

Сведения

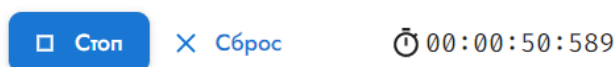
Здесь выводится информация о метеорите в данный момент времени: его скорость, расстояние до падения на Землю, угол падения, средняя и максимальная скорости метеорита.

ⓘ Полученные сведения ^	
Расстояние до столкновения	83км 239м
Время до столкновения	34с 650мс
Скорость падения	3.140 км/с
Угол падения	40.107
Макс. скорость падения	19.674 км/с
Ср. скорость падения	9.255 км/с

Изображение 10. Сведения

Управление моделированием

В самом низу блока находятся кнопки управления моделированием «Стоп» и «Сброс».



Изображение 11. Кнопки управления моделированием и таймер

Нажав на кнопку «Стоп», вы остановите моделирование. Все расчеты прекратятся, графики перейдут в другой режим отображения данных, но прогресс никуда не пропадет - когда захотите возобновить моделирование, нажмите на появившуюся кнопку «Запуск». Кнопка «Сброс» удалит эту сессию моделирования, очистит все ее данные и вернет вас на блок настроек приложения.

Тестирование

Для тестирования работы программы были выбраны данные известных метеоритов, упавших на Землю. Отсутствие данных о метеоритах, необходимых программе, компенсированы предположениями о значениях тех или иных величин. Также программа была протестирована на случайных данных.

Набор тестов

№	Название	M, кг	R, м	H, м	V _о , км/с	α, °	V _{ср} , км/с	t _п , с
1	Гоба	6,6 * 10 ³	2	10 ⁵	10	80	10,848	53,229
2	Альенде	5 * 10 ³	2.5	10 ⁵	16	70	7,75	41,382
3	Сихотэ-Аминь	10 ⁵	5	10 ⁵	18	41	18.1	7,392
4	Челябинский	5 * 10 ⁶	8,5	10 ⁵	18	80	18,589	32,901
5	Метеорит 5	2 * 10 ³	10	3*10 ⁴	2	40	0,358	109,626
6	Метеорит 6	11 * 10 ³	15	7*10 ⁴	7	27	1,338	58,806
7	Метеорит 7	80	1	2 * 10 ³	0,1	0	0,320	6,270

Здесь, M – масса метеорита, R – радиус метеорита, α – угол падения, V_о – начальная скорость метеорита, H – высота от поверхности Земли, V_{ср} – средняя скорость метеорита; t_п – время падения метеорита.

Список использованной литературы

1. ГОСТ 20058-80 «Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения».
2. Голомазов М. М. Моделирование движения астероида в атмосфере Земли / М. М. Голомазов // Компьютерное моделирование и исследования. — 2013. — № 6. — С. 917-926.
3. Горелов Ю.Н. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (метод Рунге – Кутты): учеб. пособие / Ю.Н. Горелов; Федер. агентство по образованию. – Самара: Изд-во «Самарский университет», 2006. – 48 с.
4. Маликов Р.Ф. Практикум по компьютерному моделированию физических явлений и объектов: Учеб.пособие. – Уфа: Изд-во БашГПУ, 2005. -291с.
5. Основы теории полета космических аппаратов. Под ред. д-ра физ.-мат. наук Г.С. Нариманова и д-ра техн.наук М.К. Тихонравова. М., «Машиностроение», 1972 стр. 608.
6. О. Б. Арушанян, С. Ф. Залеткин Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений методами Рунге–Кутты / О. Б. Арушанян, С. Ф. Залеткин — Москва: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2014 — 58 с.
7. Практикум по компьютерному математическому моделированию. Часть II: Компьютерное моделирование физических процессов: учебнометодическое пособие / О. А. Широкова – Казань: КФУ, 2015. – 85с.
8. Шалыминов П.Н. Численные методы: методические указания к практическим лабораторным работам по теме «Решение обыкновенных дифференциальных уравнений методами Эйлера и Рунге-Кутты»/П.Н, Шалыминов – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 43 с.
9. TypeScript is JavaScript with syntax for types. / [Электронный ресурс] // TypeScript : [сайт]. — URL: <https://www.typescriptlang.org/>
10. React A JavaScript library for building user interfaces / [Электронный ресурс] // React : [сайт]. — URL: <https://reactjs.org/>
11. Redux Toolkit The official, opinionated, batteries-included toolset for efficient Redux development / Электронный ресурс] // Redux Toolkit : [сайт]. — URL: <https://redux-toolkit.js.org/>
12. Introduction / [Электронный ресурс] // Pmdrc.Dosc : [сайт]. — URL: <https://docs.pmnd.rs/react-three-fiber/getting-started/introduction>
13. rt2zz Redux Persist / rt2zz [Электронный ресурс] // GitHub : [сайт]. — URL: <https://github.com/rt2zz/redux-persist#readme>
14. oliviertassinari Material-ui / oliviertassinari [Электронный ресурс] // GitHub : [сайт]. — URL: <https://github.com/mui/material-ui#readme>
15. drcmda Drei / drcmda [Электронный ресурс] // GitHub : [сайт]. — URL: <https://github.com/pmndrs/drei#readm>
16. dsafa Camera-controls / dsafa [Электронный ресурс] // GitHub : [сайт]. — URL: <https://github.com/yomotsu/camera-controls#readme>
17. iamhosseindhv Notictack / iamhosseindhv [Электронный ресурс] // GitHub:[сайт]. — URL: <https://github.com/iamhosseindhv/notistack#readme>
18. marcalexie Recharts / marcalexie [Электронный ресурс] // GitHub : [сайт]. — URL: <https://github.com/recharts/recharts#readme>
19. skalika Redux Persist / skalika [Электронный ресурс] // GitHub : [сайт]. — URL: <https://github.com/rt2zz/redux-persist#readme>
20. renovate[bot] Yup / renovate[bot] [Электронный ресурс] // GitHub : [сайт]. — URL: <https://github.com/jquense/yup#readme>
21. Creating a GitHub Pages site / [Электронный ресурс] // GitHub Docs : [сайт]. — URL: <https://docs.github.com/ru/pages/getting-started-with-github-pages/creating-a-github-pages-site>