

Министерство образования и науки РФ

Федеральное агентство по образованию

НГТУ

Кафедра общей физики

Проектная работа на тему

Модерирование движения метеорита в атмосфере Земли

Факультет: ПМИ

Преподаватель: Баранов А.В

Группа: ПМ-15

Студенты: Шахрай Вадим

Зуев Андрей

Новосибирск 2022

Содержание

Введение	3
Теоретическая часть	4
Программная часть	8
Интерфейс	9
Тестирование	14
Список использованной литературы	15

Введение

Теоретическая часть

Задача: Метеорит массой m и скоростью v падает с высоты H . Угол между вектором v местным горизонтом равен θ . Определите зависимость скорости от времени падения. Через какое время метеорит упадет на землю? Какими дифференциальными уравнениями будет описываться данное движение?

Решение.

Вид дифференциальных уравнений падения метеорита зависит от выбранной системы координат и от принимаемых во внимание сил, действующих на метеорит. Для данной задачи мы рассмотрим запись движения центра масс метеорита в проекциях на оси скоростной барицентрической системы координат¹ $Axuz$ с началом в центре масс метеорита.

Считается, что на метеорит, движущийся в атмосфере планеты действуют:

- Сила тяжести \vec{G}
- Аэродинамическая сила \vec{R}_a ;
- Суммарная сила притяжения Солнца, Луны и других планет \vec{F}_Σ ;

При расчетах траектории падения \vec{F}_Σ не учитывается в следствии малости.

В результате получим

$$\vec{F} = \vec{R}_a + \vec{G}$$

Для проведения исследования с целью выявления основных закономерностей целесообразно пользоваться системой уравнений, записанных при некоторых допущениях:

- Падение метеорита происходит под действием силы тяжести и аэродинамической силы;
- Земля – шар радиуса $R_{пл}$;
- Поле тяготения центральное;
- Движение метеорита вокруг центра масс не рассматривается;
- Рассматривается плоское движение.

Если считать, что все силы, действующие на метеорит приложены к центру масс, то уравнение движения относительно планеты будет:

$$\vec{W}m = \vec{G} + \vec{R}_a;$$

Ускорение в скоростной системе координат представляется в виде

$$\vec{W} = \left(\frac{dV}{dt} \vec{i} + V \frac{d\theta^*}{dt} \vec{j} + V \frac{d\varepsilon^*}{dt} \vec{k} \right),$$

где i, j, k – единичные векторы по скоростным осям.

¹ Основы теории полета космических аппаратов. Под ред. Г.С.Нариманова и М.К.Тихонравова. 1972. 608 стр.

Так же справедливо соотношение $\Delta\theta^* = \Delta\theta + \Delta\psi$,

где $\Delta\psi = \frac{V \cos \theta}{R} dt$.

В результате проецирования на оси скоростной системы координат получим:

$$\begin{cases} m \frac{dV}{dt} = -X - G_x \\ mV \frac{d\theta}{dt} = Y - G_y \end{cases},$$

где X – аэродинамическая лобовое сопротивление, Y – аэродинамическая подъемная сила.

Проекция силы притяжения:

$$G_x = G \sin \theta; \quad G_y = G \cos \theta$$

Тогда, окончательно получи общее уравнение движения метеорита в скоростной системе координат:

$$\begin{cases} m \frac{dV}{dt} = -c_x S \frac{\rho V^2}{2} - mg_0 \frac{R_{пл}^2 \sin \theta}{R^2}, \\ mV \frac{d\theta}{dt} = c_y S \frac{\rho V^2}{2} - mg_0 \frac{R_{пл}^2 \cos \theta}{R^2} + \frac{mV^2 \cos \theta}{R}. \end{cases} \quad (1)$$

Дополнительно к системе (1) можно записать еще два кинематических соотношения, позволяющих определить положение центра масс метеорита:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= V \sin \theta, \\ \frac{dL}{dt} &= V \frac{R_{пл} \cos \theta}{R}. \end{aligned}$$

Итак, при сделанных упрощающих предположениях система уравнений записывается в виде:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = -\sigma_x g_0 \frac{\rho V^2}{2} - g \sin \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} = \sigma_x K g_0 \frac{\rho V^2}{2} + \left(\frac{V}{R} - \frac{g}{V} \right) \cos \theta, \\ \frac{dH}{dt} = V \sin \theta, \\ \frac{dL}{dt} = V \frac{R_{пл} \cos \theta}{R}, \\ \sigma_x = \frac{c_x S}{mg}, \quad g = g_0 \frac{R_{пл}^2}{R^2}, \quad K = \frac{c_y}{c_x}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь V – скорость центра масс метеорита; θ – угол между вектором скорости и местным горизонтом; H – высота полета метеорита над поверхностью планеты; L – дальность полета отсчитываемая вдоль образующей поверхности планеты от точки входа; $g_0 = 9,8$ м/с² – ускорение свободного падения у поверхности планеты; g – ускорение свободного падения на высоте; σ_x – баллистический параметр; c_x, c_y – коэффициенты аэродинамических сил лобового сопротивления и подъемной силы; S – площадь миделевого сечения метеорита; K – аэродинамическое

качество; m – масса метеорита; $R_{пл}$ - радиус планеты; $R = R_{пл} + H$ – расстояние от центра планеты до центра метеорита; S – площадь миделевого сечения; ρ – плотность атмосферы.

Коэффициенты сил лобового сопротивления и усредняются и принимаются постоянными величинами по траектории движения в атмосфере. Определяющими параметрами являются угол наклона вектора скорости к линии местного горизонта θ и коэффициент лобового сопротивления c_x , коэффициент подъемной силы c_y можно принять равным нулю.

В систему уравнений (2) входит величина ρ – плотность атмосферы, которая на больших высотах во много раз меньше чем на поверхности Земли. Заглянем в справочник: на высоте 5,5 км плотность вдвое меньше, на высоте 11 км - вчетверо и т.д. Математически плотность атмосферы от высоты хорошо передается формулой²:

$$\rho = \rho_o e^{-bH},$$

где $b = 1,29 \cdot 10^{-4}$, ρ_o – плотность атмосферы у поверхности планеты.

Решение системы уравнений (2) выполним на основе численного метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности. Обозначим:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = f_1(t, V, \theta, H), \\ \frac{d\theta}{dt} = f_2(t, V, \theta, H), \\ \frac{dH}{dt} = f_3(t, V, \theta), \\ \frac{dL}{dt} = f_4(t, V, \theta). \end{cases}$$

с начальными условиями:

$$V(t_o) = V_o \quad \theta(t_o) = \theta_o \quad H(t_o) = H_o \quad L(t_o) = L_o.$$

Формулы Рунге-Кутты для данной системы примут вид:

$$\begin{aligned} V_{i+1} &= V_i + \frac{1}{6}(k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i}), \\ \theta_{i+1} &= \theta_i + \frac{1}{6}(m_{1i} + 2m_{2i} + 2m_{3i} + m_{4i}), \\ H_{i+1} &= \theta_i + \frac{1}{6}(l_{1i} + 2l_{2i} + 2l_{3i} + l_{4i}), \\ L_{i+1} &= L_i + \frac{1}{6}(n_{1i} + 2n_{2i} + 2n_{3i} + n_{4i}), i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (3)$$

где

² Практикум по компьютерному математическому моделированию. Часть II: Компьютерное моделирование физических процессов: учебно-методическое пособие / О. А. Широкова – Казань: КФУ, 2015. – 85с.

$$k_{1i} = hf_1(t_i, V_i, \theta_i, H_i) = h \left(-\frac{c_x S(R_{nl} + H)^2}{mg_o R_{nl}^2} \frac{\rho_o e^{(-bH)} V^2}{2} - g_o \frac{R_{nl}^2 \sin \theta}{(R_{nl} + H)^2} \right)$$

$$m_{1i} = hf_2(t_i, V_i, \theta_i, H_i) = h \left(\frac{V}{R_{nl} + H} - \frac{g_o R_{nl}^2}{V(R_{nl} + H)^2} \right) \cos \theta$$

$$l_{1i} = hf_3(t_i, V_i, \theta_i) = hV \sin \theta$$

$$n_{1i} = hf_2(t_i, V_i, \theta_i) = V \frac{R_{nl}^2 \cos \theta}{(R_{nl} + H)}$$

$$k_{2i} = hf_1(t_i + 0.5h, V_i + 0.5k1, \theta_i + 0.5m1, H_i + 0.5l1) = h \left(-\frac{c_x S(R_{nl} + H + 0.5l1)^2}{mg_o R_{nl}^2} \frac{\rho_o e^{(-b(H+0.5l1))} (V + 0.5k1)^2}{2} - g_o \frac{R_{nl}^2 \sin(\theta + 0.5m1)}{(R_{nl} + H + 0.5l1)^2} \right)$$

$$m_{2i} = hf_2(t_i + 0.5h, V_i + 0.5k1, \theta_i + 0.5m1, H_i + 0.5l1) = h \left(\frac{V + 0.5k1}{R_{nl} + H + 0.5l1} - \frac{g_o R_{nl}^2}{(V + 0.5k1)(R_{nl} + H + 0.5l1)^2} \right) \cos(\theta + 0.5m1)$$

$$l_{2i} = hf_3(t_i + 0.5h, V_i + 0.5k1, \theta_i + 0.5m1) = h(V + 0.5k1) \sin(\theta + 0.5m1)$$

$$n_{2i} = hf_3(t_i + 0.5h, V_i + 0.5k1, \theta_i + 0.5m1) = (V + 0.5k1) \frac{R_{nl}^2 \cos(\theta + 0.5m1)}{(R_{nl} + H + 0.5l1)}$$

$$k_{3i} = hf_1(t_i + 0.5h, V_i + 0.5k2, \theta_i + 0.5m2, H_i + 0.5l2) = h \left(-\frac{c_x S(R_{nl} + H + 0.5l2)^2}{mg_o R_{nl}^2} \frac{\rho_o e^{(-b(H+0.5l2))} (V + 0.5k2)^2}{2} - g_o \frac{R_{nl}^2 \sin(\theta + 0.5m2)}{(R_{nl} + H + 0.5l2)^2} \right)$$

$$m_{3i} = hf_2(t_i + 0.5h, V_i + 0.5k2, \theta_i + 0.5m2, H_i + 0.5l2) = h \left(\frac{V + 0.5k2}{R_{nl} + H + 0.5l2} - \frac{g_o R_{nl}^2}{(V + 0.5k2)(R_{nl} + H + 0.5l2)^2} \right) \cos(\theta + 0.5m2)$$

$$l_{3i} = hf_3(t_i + 0.5h, V_i + 0.5k2, \theta_i + 0.5m2) = h(V + 0.5k2) \sin(\theta + 0.5m2)$$

$$n_{3i} = hf_3(t_i + 0.5h, V_i + 0.5k2, \theta_i + 0.5m2) = (V + 0.5k2) \frac{R_{nl}^2 \cos(\theta + 0.5m2)}{(R_{nl} + H + 0.5l2)}$$

$$k_{3i} = hf_1(t_i + 0.5h, V_i + k3, \theta_i + m3, H_i + l3) = h \left(-\frac{c_x S(R_{nl} + H + l3)^2}{mg_o R_{nl}^2} \frac{\rho_o e^{(-b(H+l3))} (V + k3)^2}{2} - g_o \frac{R_{nl}^2 \sin(\theta + m3)}{(R_{nl} + H + l3)^2} \right)$$

$$m_{3i} = hf_2(t_i + h, V_i + k3, \theta_i + m3, H_i + l3) = h \left(\frac{V + k3}{R_{nl} + H + l3} - \frac{g_o R_{nl}^2}{(V + k3)(R_{nl} + H + l3)^2} \right) \cos(\theta + m3)$$

$$l_{3i} = hf_3(t_i + h, V_i + k3, \theta_i + m3) = h(V + k3) \sin(\theta + m3)$$

$$n_{3i} = hf_3(t_i + h, V_i + k3, \theta_i + m3) = (V + k3) \frac{R_{nl}^2 \cos(\theta + m3)}{(R_{nl} + H + l3)}$$

Программная часть

Программная составляющая проекта

Проект представляет из себя web-страницу, которая написана на языке [TypeScript](#), с использованием фреймворка [React](#) (интерфейс) и библиотеки [Redux Toolkit](#) (менеджер состояния). Для отрисовки 3D-объектов была использована библиотека [React Three Fiber](#) - React-обертка над библиотекой [Three.js](#), которая взаимодействует с 3D-движком браузера [WebGL](#).

Проект использует хостинг [Git Hub Pages](#) для размещения в сети Интернет.

Список дополнительных технологий, используемых в проекте:

[Material UI](#) - библиотека готовых React-компонентов пользовательского интерфейса в стиле [MaterialDesign 2](#) от Google;

[React Three Drei](#) - библиотека вспомогательных функций для работы с [React Three Fiber](#);

[camera-controls](#) - библиотека вспомогательных функций для работы с 3D-камерой;

[Redux Persist](#) - библиотека-обертка над [Redux Toolkit](#) для сохранения состояния проекта;

[Recharts](#) - React-библиотека для работы с графиками;

[Yup](#) - библиотека для валидации данных;

[gh-pages](#) - пакет для публикации приложения на [Git Hub Pages](#).

Весь код проекта находится в открытом доступе и размещен на [GitHub](#) по адресу <https://github.com/vadimshahray/meteorite-movement-in-earth-atmosphere>.

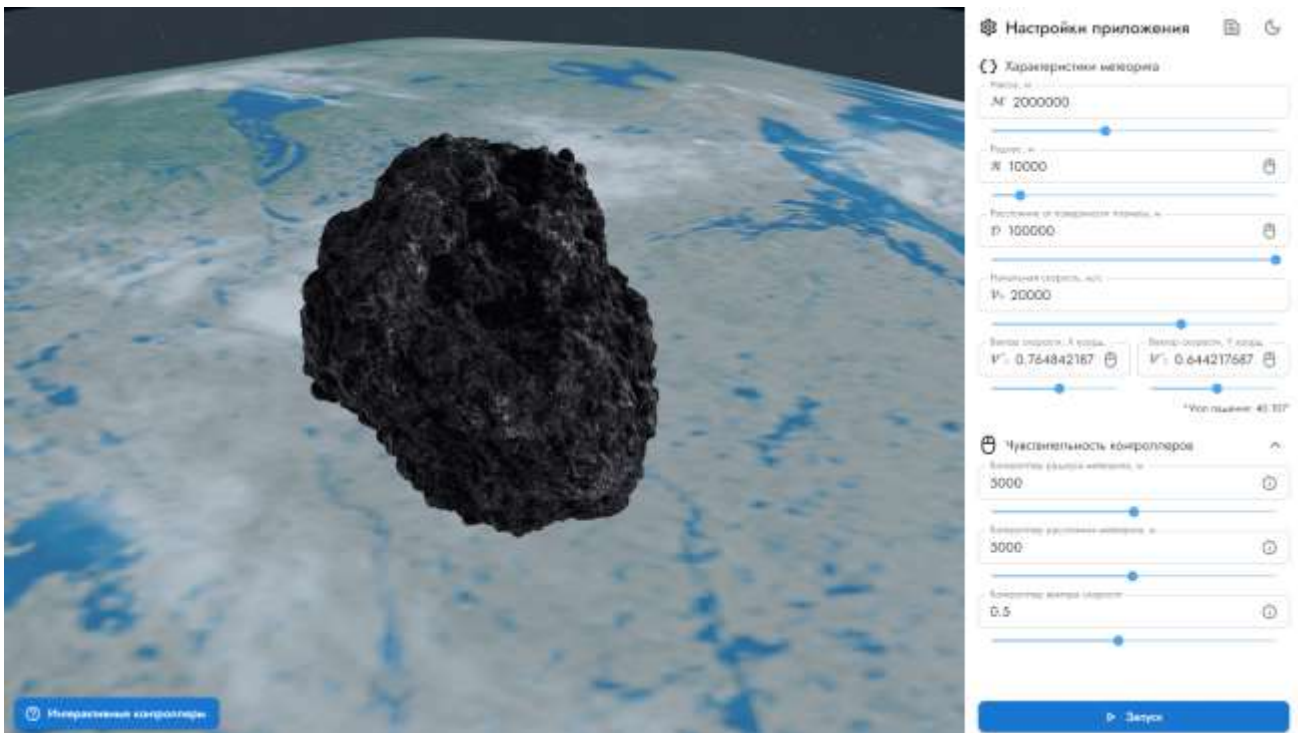
Программная модель метеорита.

В программе метеорит - это объект со следующими свойствами:

- масса, кг;
- радиус, м;
- расстояние от поверхности Земли, м;
- пройденное расстояние, м;
- скорость падения, м/с;
- вектор скорости;
- точка координат в пространстве.

Интерфейс

Как только программа завершит загрузку моделей Земли и метеорита, появится сама программа:



Изображение 1. Интерфейс программы

Интерфейс программы “поделен” на 2 блока: *блок настроек* и *блок моделирования*.

Настройка приложения

Блок настроек

Здесь находятся настройки приложения: цветовая тема, файл отчета, настройки метеорита, кнопка запуска моделирования и прочее.

Поле ввода параметров составляет 2 компонента: стандартное текстовое поле ввода и в качестве альтернативы ему - слайдер. Их значения связаны между собой - если изменить значение через текстовое поле, то же значение примет слайдер.



Изображение 2. Интерфейс ввода данных

Интерактивные контроллеры

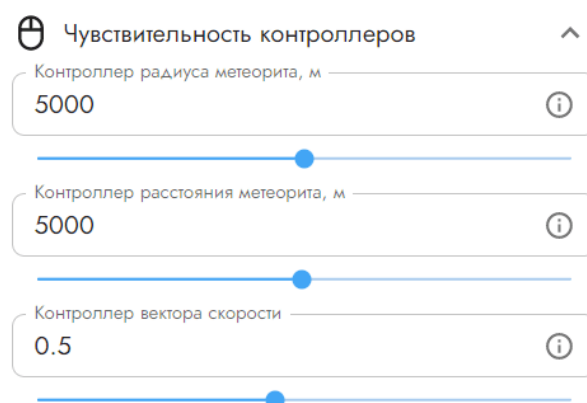
Некоторые параметры поддерживают 3 способ ввода данных - *интерактивные контроллеры*. Поля ввода таких параметров помечены специальной иконкой (см. изображение 3).



Изображение 3. Параметр, поддерживающий интерактивные контроллеры

Интерактивные контроллеры - это способ задать настройки приложения, используя вместо полей ввода данных клавиатуру или мышь/тачпад. Чтобы узнать, как воспользоваться интерактивным контроллером, достаточно навести курсор мыши на специальную иконку в поле ввода, и вам покажется необходимая инструкция.

Интерактивные контроллеры тоже можно настраивать (см. изображение 4). Таким образом вы сможете регулировать чувствительность контроллеров - значение, на которое они будут менять определенный параметр приложения.



Изображение 4. Настройка интерактивных контроллеров

Инструкция по интерактивным контроллерам находится в левом нижнем углу блока моделирования (см. изображение 5).



Изображение 5. Кнопка, показывающая инструкцию по интерактивным контроллерам

Блок моделирования

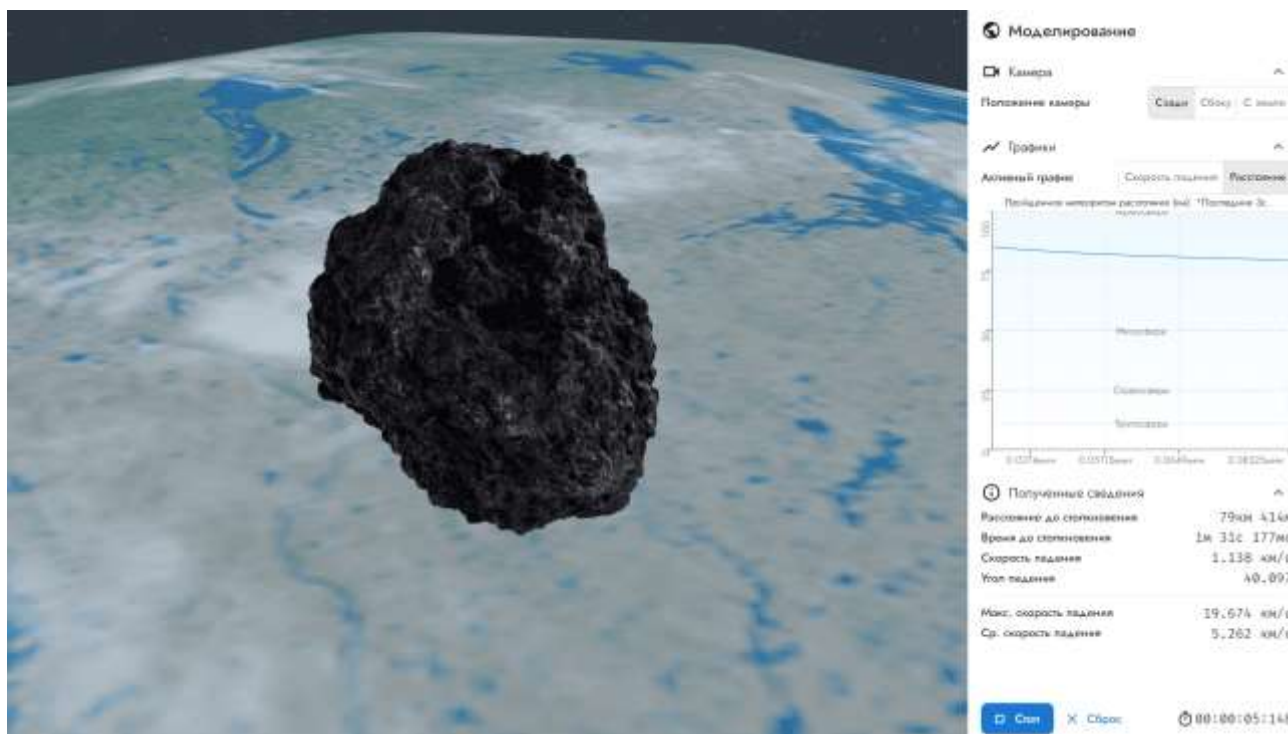
В этом блоке будет происходить визуальная работа программы - движение метеорита в сторону Земли. До начала моделирования данный блок позволяет пользоваться интерактивными контроллерами.

Начало моделирования

Как только вы введете все необходимые данные, можно начать моделирование, нажав на кнопку «Запуск» внизу. Если какие-то из введенных вами данных будут содержать ошибки, запустить моделирование не получится - вместо этого программа сообщит вам о том, что ошибки нужно исправить.

Моделирование

После успешного запуска моделирования, интерфейс программы поменяет *блок настроек* на *блок информации о моделировании*:



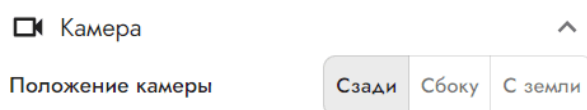
Изображение 6. Интерфейс программы во время моделирования

Блок информации о моделировании

Данный блок поделен на 4 секции: камера, графики, сведения и управление моделированием и таймер.

Камера

Вы можете выбрать, с какой стороны вы хотите наблюдать за движением метеорита: сзади него, сбоку или с поверхности Земли.

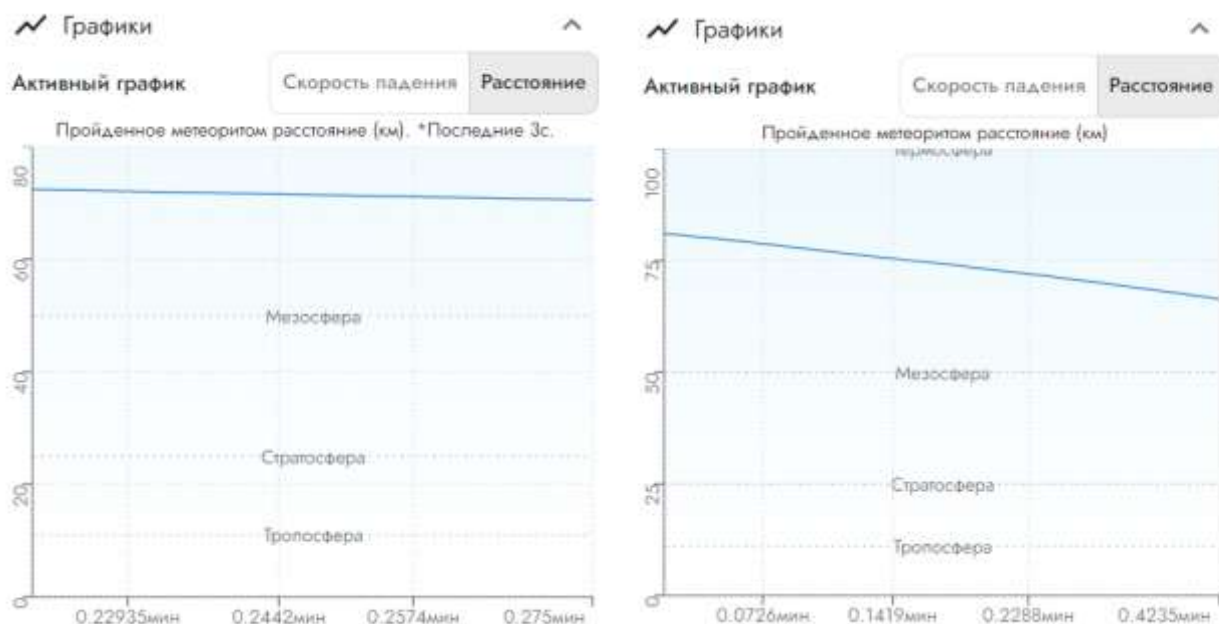


Изображение 7. Настройки положения камеры

Графики

Программа собирает данные о скорости движения метеорита и расстоянии между ним и поверхностью Земли.

У графиков 2 режима отображения данных: данные за последние 3 секунды и данные за все время (см. изображение 8).



Изображение 8. Режимы работы графика «Расстояние»

Первый режим работает, если моделирование в процессе. Чтобы включить 2-ой режим нужно либо остановить моделирование, нажав на кнопочку «Стоп» внизу, либо дождаться, пока оно не завершиться само.

Также можно узнать точные данные графика, наведя курсор мыши на него:



Изображение 9. Подробные данные графика

Сведения

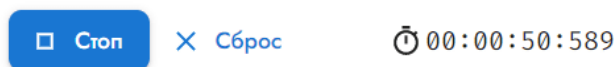
Здесь выводится информация о метеорите в данный момент времени: его скорость, расстояние до падения на Землю, угол падения, средняя и максимальная скорости метеорита.

ⓘ Полученные сведения ^	
Расстояние до столкновения	83км 239м
Время до столкновения	34с 650мс
Скорость падения	3.140 км/с
Угол падения	40.107
Макс. скорость падения	19.674 км/с
Ср. скорость падения	9.255 км/с

Изображение 10. Сведения

Управление моделированием

В самом низу блока находятся кнопки управления моделированием «Стоп» и «Сброс».



Изображение 11. Кнопки управления моделированием и таймер

Нажав на кнопку «Стоп», вы остановите моделирование. Все расчеты прекратятся, графики перейдут в другой режим отображения данных, но прогресс никуда не пропадет - когда захотите возобновить моделирование, нажмите на появившуюся кнопку «Запуск». Кнопка «Сброс» удалит эту сессию моделирования, очистит все ее данные и вернет вас на блок настроек приложения.

Тестирование

Для тестирования работы программы были выбраны данные известных метеоритов, упавших на Землю. Отсутствие данных о метеоритах, необходимых программе, компенсированы предположениями о значениях тех или иных величин. Также программа была протестирована на случайных данных.

Набор тестов

№	Название	М, кг	R, м	H, м	V_o , км/с	α , °	V_{cp} , км/с	t_n , с
1	Гоба	$6,6 * 10^3$	2	10^5	10	80	10,848	53,229
2	Альенде	$5 * 10^3$	2.5	10^5	16	70	7,75	41,382
3	Сихотэ-Аминь	10^5	5	10^5	18	41	18.1	7,392
4	Челябинский	$5 * 10^6$	8,5	10^5	18	80	18,589	32,901
5	Метеорит 5	$2 * 10^3$	10	$3*10^4$	2	40	0,358	109,626
6	Метеорит 6	$11 * 10^3$	15	$7*10^4$	7	27	1,338	58,806
7	Метеорит 7	80	1	$2 * 10^3$	0,1	0	0,320	6,270

Здесь, М – масса метеорита, R – радиус метеорита, α – угол падения, V_o – начальная скорость метеорита, H – высота от поверхности Земли, V_{cp} – средняя скорость метеорита; t_n – время падения метеорита.

Список использованной литературы

1. ГОСТ 20058-80 «Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения».
2. Голомазов М. М. Моделирование движения астероида в атмосфере Земли / М. М. Голомазов // Компьютерное моделирование и исследования. — 2013. — № 6. — С. 917-926.
3. Горелов Ю.Н. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (метод Рунге – Кутта): учеб. пособие / Ю.Н. Горелов; Федер. агентство по образованию. – Самара: Изд-во «Самарский университет», 2006. – 48 с.
4. Маликов Р.Ф. Практикум по компьютерному моделированию физических явлений и объектов: Учеб.пособие. – Уфа: Изд-во БашГПУ, 2005. -291с.
5. Основы теории полета космических аппаратов. Под ред. д-ра физ.-мат. наук Г.С. Нариманова и д-ра техн.наук М.К. Тихонравова. М., «Машиностроение», 1972 стр. 608.
6. О. Б. Арушанян, С. Ф. Залеткин Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений методами Рунге–Кутта / О. Б. Арушанян, С. Ф. Залеткин — Москва: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2014 — 58 с.
7. Практикум по компьютерному математическому моделированию. Часть II: Компьютерное моделирование физических процессов: учебнометодическое пособие / О. А. Широкова – Казань: КФУ, 2015. – 85с.
8. Шалыминов П.Н. Численные методы: методические указания к практическим лабораторным работам по теме «Решение обыкновенных дифференциальных уравнений методами Эйлера и Рунге-Кутта»/П.Н, Шалыминов – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 43 с.
9. TypeScript is JavaScript with syntax for types. / [Электронный ресурс] // TypeScript : [сайт]. — URL: <https://www.typescriptlang.org/>
10. React A JavaScript library for building user interfaces / [Электронный ресурс] // React : [сайт]. — URL: <https://reactjs.org/>
11. Redux Toolkit The official, opinionated, batteries-included toolset for efficient Redux development / [Электронный ресурс] // Redux Toolkit : [сайт]. — URL: <https://redux-toolkit.js.org/>
12. Introduction / [Электронный ресурс] // Pmdrc.Dosc : [сайт]. — URL: <https://docs.pmnd.rs/react-three-fiber/getting-started/introduction>
13. rt2zz Redux Persist / rt2zz [Электронный ресурс] // GitHub : [сайт]. — URL: <https://github.com/rt2zz/redux-persist#readme>
14. oliviertassinari Material-ui / oliviertassinari [Электронный ресурс] // GitHub : [сайт]. — URL: <https://github.com/mui/material-ui#readme>
15. drcmda Drei / drcmda [Электронный ресурс] // GitHub : [сайт]. — URL: <https://github.com/pmndrs/drei#readm>

16. dsafa Camera-controls / dsafa [Электронный ресурс] // GitHub : [сайт]. — URL: <https://github.com/yomotsu/camera-controls#readme>
17. iamhosseindhv Notictack / iamhosseindhv [Электронный ресурс] // GitHub:[сайт]. — URL: <https://github.com/iamhosseindhv/notistack#readme>
18. marcalexiei Recharts / marcalexiei [Электронный ресурс] // GitHub : [сайт]. — URL: <https://github.com/recharts/recharts#readme>
19. skalika Redux Persist / skalika [Электронный ресурс] // GitHub : [сайт]. — URL: <https://github.com/rt2zz/redux-persist#readme>
20. renovate[bot] Yup / renovate[bot] [Электронный ресурс] // GitHub : [сайт]. — URL: <https://github.com/jquense/yup#readme>
21. Creating a GitHub Pages site / [Электронный ресурс] // GitHub Docs : [сайт]. — URL: <https://docs.github.com/ru/pages/getting-started-with-github-pages/creating-a-github-pages-site>