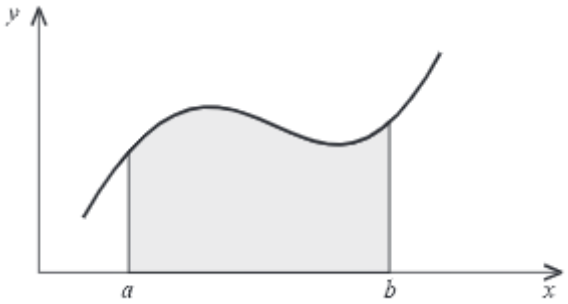
İNTEGRAL - SİMPSON VE TRAPEZ FORMÜLLERİ

Bir f(x) fonksiyonunun, tanımlı olduğu bir [a,b] aralığındaki belirli integrali,

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

ifadesiyle gösteririz. Geometrik yoruma göre bu integral, [a,b] aralığında f(x) eğrisi ile x-ekseni arasında kalan yüzeyin alanı olur.



[a,b] aralığında eşit aralıklarla sıralanmış N sayıda nokta belirleyelim. Buna göre, h adım uzunluğu,

$$h = \frac{(b-a)}{N}$$

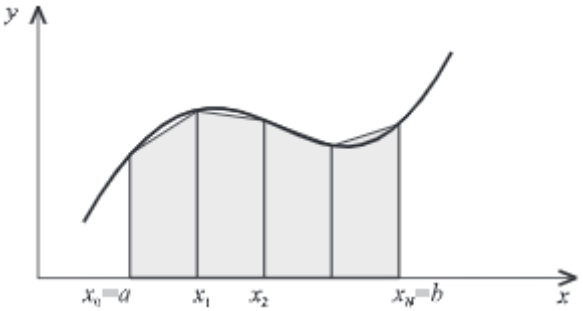
olup, uç noktaları da katarak bu noktaları şöyle adlandırabiliriz:

$$x_0 = a\,, \qquad x_i = a + ih \qquad x_N = b \qquad (i = 1, 2, \ldots N-1)$$

İntegralin herbir [xi,xi+1] alt aralıklarındaki integral değerlerinin toplamı olacaktır:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)\,dx$$

$$S = s_1 + s_2 + \cdots + s_N$$



Eğer h adımı çok küçükse, en basit yanlışlıkta, herbir aralıkta fonksiyonu bir doğru parçası olarak alırız. Bu durumda [xi,xi+1] aralığında oluşan yamuğun alanı hesaplanabilir:

$$s_i = \frac{(\text{sol kenar}+\text{sağ kenar})}{2} \times \text{genişlik} = \frac{(f_i + f_{i+1})}{2} h$$

O halde, N sayıda yamuk alanı toplanırsa, sayısal integral için trapez formülünü bulmuş oluruz:

$$S = \frac{(f_0 + f_1)}{2} h + \frac{(f_1 + f_2)}{2} h + \cdots + \frac{(f_{N-1} + f_N)}{2} h$$

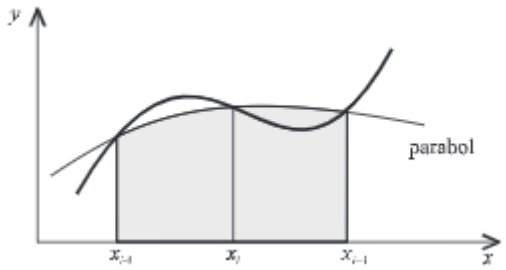
veya,

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left[\tfrac{1}{2} f_0 + f_1 + \cdots + f_{N-1} + \tfrac{1}{2} f_N\right] + O(h^2) \quad \text{(Trapez formülü)}$$

Trapez formülünde iki nokta arasını bir doğruyla birleştirmekten kaynaklanan hata payının O(h²) olduğunu gösterebiliriz.

Daha iyi bir yaklaşıklık bulabilir miyiz? Evet. Bu amaçla, N sayısı çift alınır ve ardışık iki alt aralık birlikte ele alınırsa,

$$S = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{N-2}}^{x_N} f(x)\,dx$$
$$S = s_1 + s_3 + \cdots + s_{N-1}$$



Herbir si integrali xi noktası etrafındaki [xi-1,xi+1] çift aralığının katkısını verir. Bu si aralığını oluşturan üç noktayı, doğru parçalarıyla birleştirmek yerine, bir parabolle temsil edersek, yaptığımız hata daha az olacaktır

$$f(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} f_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} f_i + \\ + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} f_{i+1}$$

Bu ifade yerine konur ve si integrali analitik olarak alınırsa,

$$s_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}\right]$$

bulunur. Bu si ifadeleri S integralinde yerine konur ve düzenleme yapılırsa, Simpson formülüni buluruz:

$$S = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + f_2\right] + \frac{h}{3}\left[f_2 + 4f_3 + f_4\right] + \cdots + \frac{h}{3}\left[f_{N-2} + 4f_{N-1} + f_N\right]$$

veya,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 4f_{N-1} + f_N\right] + O(h^4)$$

Simpson formülünde üç noktayı birleştirmekten kaynaklanan hata payının O(h⁴) olduğunu gösterebiliriz.

Trapezin alanı hesaplayan denklemi ihtiyaç duyduğumuzda kullanabilmek için fonksiyon olarak yazalım. a,b ve N parametrelerini alacak ve S değişkenini döndürecek şekilde yazmak şuan için doğru olacaktır.

In [2]:

```
def trapez(a,b,n):

    if n<1 or a>b:
        print("Hatalı veri")

    else:
        h=(b-a)/n
        s=0.5*(f(a)+f(b))

        for i in range(1,n):
            x=a+(i*h)
            s=s+f(x)

        return h*s
```

Fonksiyon çağırıldığında n=1 olduğu durumda herhangi bir işlem gerçekleşmez bu istediğimiz bir durum değildir. Yada b<a olduğu durumlarda h

Benzer şekilde, Simpson formülüyle integral hesaplayan fonksiyonu yazacak olursak

In [3]:

```
def simpson(a,b,n):

    if n<1 or a>b:
        print("Hatalı veri")

    elif n%2==1:
        print("n çift değil")

    else:
        h=(b-a)/n
        s=f(a)+f(b)

        for i in range(1,n):
            katsayi=2*(i%2+1)
            x=a+(i*h)
            s=s+katsayi*f(x)

    return h*s/3.0
```

Formüllerin Karşılaştırılması

Yukarıda tanımladığımız fonksiyonları kullanarak Simpson ve Trapez formüllerini karşılaştıralım. Bunun için sonucunu bildiğimiz bir integrali kullanmak doğru olacaktır.

$[0,1]$ $S= \int e^x dx = e-1 = 1.71828183$

In [10]:

```
from numpy import *


def trapez(a,b,n):

    if n<1 or a>b:
        print("Hatalı veri")

    else:
        h=(b-a)/n
        s=0.5*(f(a)+f(b))

        for i in range(1,n):
            x=a+(i*h)
            s=s+f(x)

        return h*s

def simpson(a,b,n):

    if n<1 or a>b:
        print("Hatalı veri")

    elif n%2==1:
        print("n çift değil")

    else:
        h=(b-a)/n
        s=f(a)+f(b)

        for i in range(1,n):
            katsayi=2*(i%2+1)
            x=a+(i*h)
            s=s+katsayi*f(x)

    return h*s/3.0


# e sayısını döndüren fonksiyonu yazalım
def f(x):
    return exp(x)

a=0.0
b=1.0
stam= f(1)-f(0)
n=4

print("N", "Trapez Hatası", "Simpson Hatası")

for i in range(6):
    print(n, "%.8f" %float(trapez(a,b,n)-stam),"%.8f" %float(simpson(a,b,n)-stam))
    n=n+4
```

```
N Trapez Hatası Simpson Hatası
4 0.00894008 0.00003701
8 0.00223676 0.00000233
12 0.00099426 0.00000046
16 0.00055930 0.00000015
20 0.00035796 0.00000006
24 0.00024859 0.00000003
```

Yazdığımız program N=4,8,...,24 sayıda nokta kullanarak trapez ve Simpson formüllerini hesapladı ve sonrasında gerçek değerden farkını bulup ekrana yazdırdı. Buradan şu sonuçları çıkarabiliriz:

- Sonuçta okulda bize öğretildiği gibi hesaba katılan nokta sayısı sonsuza yaklaştıkça gerçek değere yaklaşmış oluyoruz.
- Simpson formülü trapez formülüne göre daha doğru sonuç verir.

Peki, N sayısını nasıl seçeçeğiz? Bu sorunun cevabı $O(h^2)$ ve $O(h^4)$ hata terimlerinde saklı. $h = (b-a)/N$ olduğundan, N arttıkça hata payının çok hızlı değiştiği gözlenir. Çok artırıldığında ise yuvarlama hatasıyla karşılaşabiliriz.

N sayısını belirlemenin en iyi yolu deneme-yanılma yöntemidir. N sayısını her seferinde 2 katına çıkararak integral sonucunun belirli bir değere yaklaşmasını inceleriz. Değerden ıraksamaya başladığında dururuz.