理解 PLONK（一）：Plonkish Arithmetization

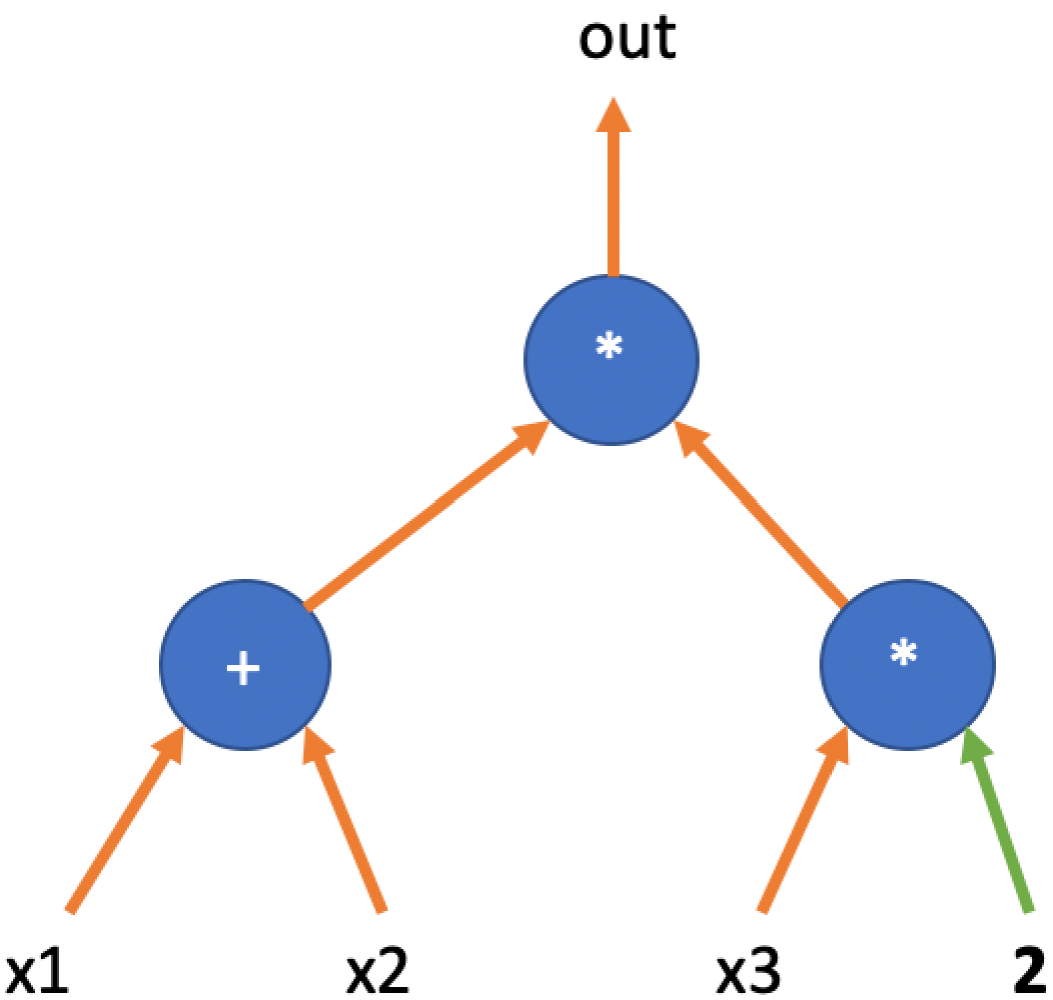
算术化是指把计算转换成数学对象，然后进行零知识证明。 Plonkish 算术化是 Plonk 证明系统特有的算术化方法，在 Plonkish 出现之前，主流的电路表达形式为 R1CS，被 Pinocchio，Groth16，Bulletproofs 等广泛采用。2019 年 Plonk 方案提出了一种看似复古的电路编码方式，但由于 Plonk 方案将多项式的编码应用到了极致，它不再局限于算术电路中的「加法门」和「乘法门」，而是可以支持更灵活的「自定义门」与「查表门」。

我们先回顾一下 R1CS 的电路编码，也是相关介绍最多的算术化方案。然后我们对比引入 Plonkish 编码。

算术电路与 R1CS 算术化

一个算术电路包含若干个乘法门与加法门。每一个门都有「两个输入」引脚和一个「输出」引脚，任何一个输出引脚可以被接驳到多个门的输入引脚上。

先看一个非常简单的算术电路:

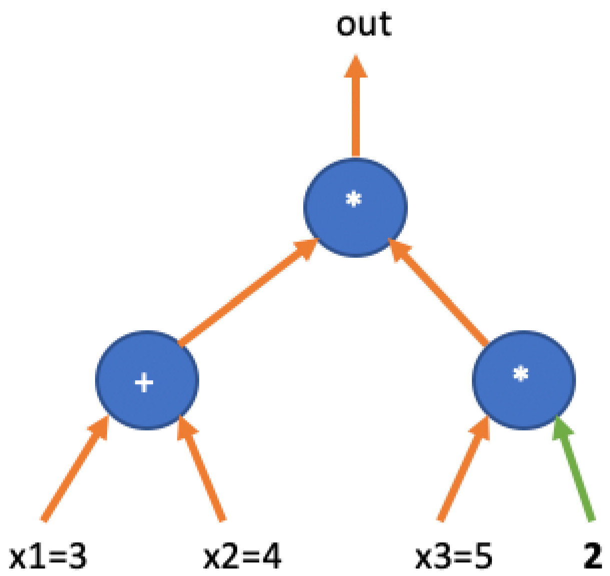


这个电路表示了这样的一个计算：

$$(x_1 + x_2) \cdot (2 \cdot x_3) = out$$

电路中有4个变量，其中三个变量为输入变量 (x_1, x_2, x_3)，一个输出变量 out，其中还有一个输入为常数，其值为 2。

一个电路有两种状态：「空白态」和「运算态」。当输入变量没有具体值的时候，电路处于「空白态」，这时我们只能描述电路引线之间的关系，即电路的结构拓扑。



接下来的问题是，我们要先编码电路的「空白态」，即编码各个门的位置，和他们之间引线连接关系。

R1CS 是通过图中的乘法门为中心，用三个「选择子」矩阵来「选择」乘法门的「左输入」、「右输入」、「输出」都分别连接了那些变量。

我们先看看图中最上面的乘法门的左输入，可以用下面的表格来描述：

1	x_1	x_2	x_3	out
0	1	1	0	0

这个表格只有一行，因此我们可以用一个向量 $U=(0,1,1,0,0)$ 来代替，表示乘法门的左输入连接了两个变量， x_1 和 x_2。记住，所有的加法门都会被展开成多个变量的相加（或线性组合）。

再看看其右输入，连接了一个变量 x_3 和一个常数值，等价于连接了 x_3 的两倍，那么右输入的选择子矩阵可以记为

1	x_1	x_2	x_3	out
0	0	0	2	0

这里同样可以用一个行向量 $V=(0,0,0,2,0)$ 来表示，其中的 2 即为上图中电路的常数引线。

最后乘法门的输出按照上面的方法可以描述为 $W=(0,0,0,0,1)$，即输出变量为 out ：

1	x_1	x_2	x_3	out
0	0	0	0	1

有了三个向量 (U,V,W)，我们可以通过一个「内积」等式来约束电路的运算：

$$(U\cdot(1,x_1,x_2,x_3,out))\cdot(V\cdot(1,x_1,x_2,x_3,out))=(W\cdot(1,x_1,x_2,x_3,out))$$

这个等式化简之后正好可以得到：

$$(x_1+x2)\cdot(2\cdot x_3)=out$$

如果我们把这几个变量换成赋值向量 $(1,x_1,x_2,x_3,out)=(1,3,4,5,70)$，那么电路的运算可以通过「内积」等式来验证：

$$(U\cdot(1,3,4,5,70))\cdot(U\cdot(1,3,4,5,70))=W\cdot(1,3,4,5,70)$$

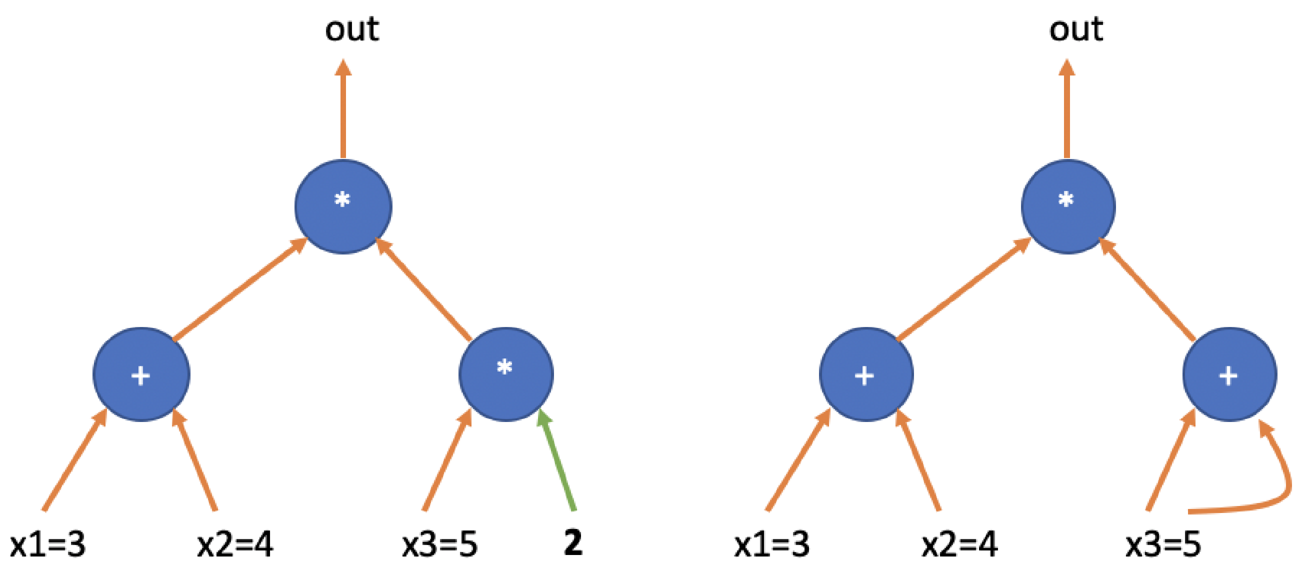
而一个错误的赋值向量，比如 $(1,3,4,\boxed{0},70)$ ，则不满足「内积等式」：

$$(U\cdot(1,3,4,\boxed{0},70))\cdot(U\cdot(1,3,4,\boxed{0},70))\neq W\cdot(1,3,4,\boxed{0},70)$$

左边运算结果为 0，右边运算结果为 70。当然，我们可以验证 $(1,3,4,0,0)$ 也是一组合法（满足电路约束）的赋值。

并不是任何一个电路都存在赋值向量。凡是存在合法的赋值向量的电路，被称为可被满足的电路。判断一个电路是否可被满足，是一个 NP-Complete 问题，也是一个 NP 困难问题。

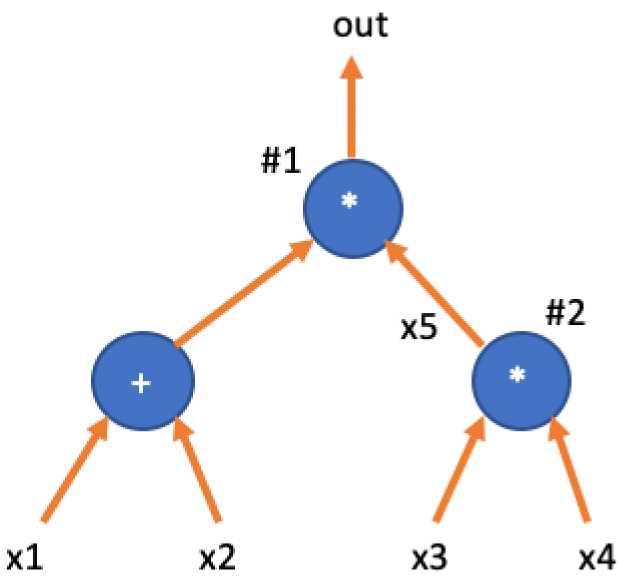
这里例子中的两个乘法门并不相同，上面的乘法门是左右输入中都含有变量，而下面的乘法门只有一边的输入为变量，另一边为常数。对于后者这类「常数乘法门」，后续我们也把他们看作为特殊的「加法门」，如下图所示，左边电路右下的乘法门等价于右边电路的右下加法门。



那么如果一个电路含有两个以上的乘法门，我们就不能用 U, V, W 三个向量之间的内积关系来表示运算，而需要构造「三个矩阵」的运算关系。

多个乘法门

比如下图所示电路，有两个乘法门，他们的左右输入都涉及到变量。



这个电路表示了这样的一个计算：

$$(x_1 + x2) \cdot (x3 \cdot x4) = out$$

我们以**乘法门**为基准，对电路进行编码。第一步将电路中的乘法门依次编号（无所谓编码顺序，只要前后保持一致）。图中的两个乘法门编码为 `#1` 与 `#2` 。

然后我们需要为每一个乘法门的中间值引线也给出变量名：比如四个输入变量被记为 x_1, x_2, x_3, x_4，其中 x_5 为第二个乘法门的输出，同时作为第一个乘法门的右输入。而 out 为第一个乘法门的输出。于是我们可以得到一个关于变量名的向量：

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, out)$$

该电路的「空白态」可以用下面的三个矩阵来编码：

$$U, V, W \in \mathbb{F}^{n \times m}$$

其中 n 为乘法门的数量，而 m 大致为引线的数量。每一个矩阵的第 i 行「选择」了第 i 个乘法门的输入输出变量。比如我们定义电路的左输入矩阵 U ：

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	out	i
1	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	2

其中第一个乘法门的左输入为 $(x_1 + x_2)$， 第二个乘法门的左输入为 x_3。右输入矩阵 V 定义为：

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	out	i
0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	2

其中1号门的右输入为 x_5，第二个乘法门的右输入为 x_4。最后定义输出矩阵 W：

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	out	i
0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	2

我们把所有的引线赋值看作为一个向量： $\vec{a}$ （这里用字母 a，取自 Assignments 首字母）

在上面的例子中，「赋值向量」为

$$\vec{a} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, out)$$

于是我们可以轻易地检验下面的等式

$$(U \cdot \vec{a}) \circ (V \cdot \vec{a}) = (W \cdot \vec{a})$$

其中符号 $\circ$ 为 Hadamard Product，表示「按位乘法」。展开上面的按位乘法等式，我们可以得到这个电路的运算过程：

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_5 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} out \\ x_5 \end{bmatrix}$$

请注意，通常「赋值向量」中需要一个固定赋值为 1 的变量，这是为了处理加法门中的常量输入。

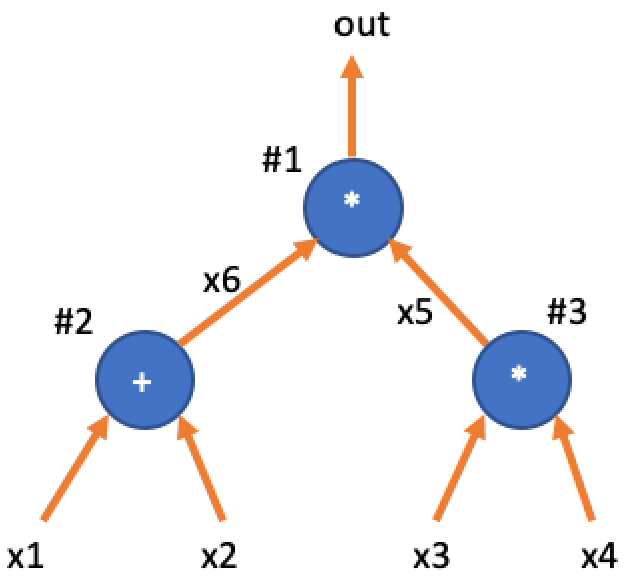
优缺点

由于 R1CS 编码以乘法门为中心，于是电路中的加法门并不会增加 U, V, W 矩阵的行数，因而对 Prover 的性能影响不大。R1CS 电路的编码清晰简单，利于在其上构造各种 SNARK 方案。

在 2019 年 Plonk 论文中的编码方案同时需要编码加法门与乘法门，看起来因此会增加约束的数量，降低 Proving 性能。但 Plonk 团队随后陆续引入了除乘法与加法外的运算门，比如实现范围检查的门，实现异或运算的门等等。不仅如此，Plonk 支持任何其输入输出满足多项式关系的门，即 Custom Gate，还有适用于实现 RAM 的状态转换门等，随着查表门的提出，Plonk 方案逐步成为许多应用的首选方案，其编码方式也有了一个专门的名词：Plonkish。

Plonkish 算术门

回看下例子电路，我们把三个门全都编号， $1, 2, 3$，同时把加法门的输出值也标记为变量 x_6。



显然，上面的电路满足三个约束：

- $x_1 + x_2 = x_6$
- $x_3 \cdot x_4 = x_5$
- $x_6 \cdot x_5 = out$

我们定义一个矩阵 $W \in \mathbb{F}^{n\times 3}$ 来表示约束（ n 为算术门的数量）：

i	w_a	w_b	w_c
1	x_6	x_5	out
2	x_1	x_2	x_6
3	x_3	x_4	x_5

为了区分加法和乘法，我们再定一个向量 $Q \in \mathbb{F}^{n\times 5}$ 来表示运算符

i	q_L	q_R	q_M	q_C	q_O
1	0	0	1	0	1
2	1	1	0	0	1
3	0	0	1	0	1

于是我们可以通过下面的等式来表示三个约束:

$$q_L \circ w_a + q_R \circ w_b + q_M \circ (w_a \cdot w_b) + q_C - q_O \circ w_c = 0$$

如果把上面的等式代入并展开，我们可以得到下面的约束等式:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_6 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_6 \cdot x_5 \\ x_1 \cdot x_2 \\ x_3 \cdot x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \circ \Bigg[$$

化简后得:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_6 \cdot x_5 \\ 0 \\ x_3 \cdot x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} out \\ x_6 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

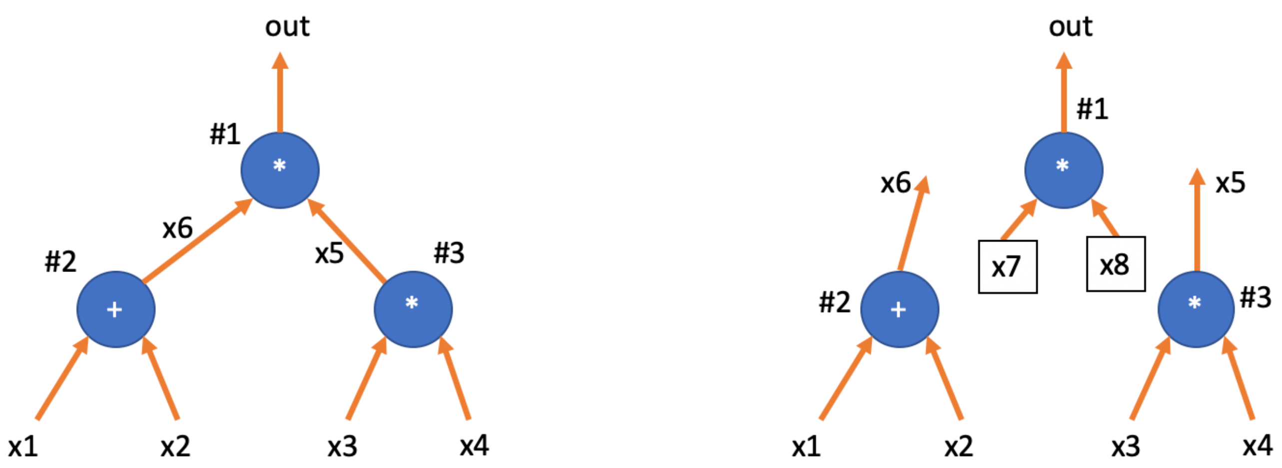
这正好是三个算术门的计算约束。

总结下，Plonkish 需要一个矩阵 Q 来描述电路空白态，而所有的赋值则写入了 W 矩阵。对于 Prover 和 Verifier 的交换协议， W 是 Prover 的 witness，属于秘密知识，对 Verifier 保密， Q 矩阵代表了一个实现双方约定共识的电路描述。

不过仅仅有 Q 矩阵是不足以精确描述上面的例子电路。

复制约束

比较下面两个电路，它们的 Q 矩阵完全相同，但它们却完全不同。



两个电路的区别在于 x_5, x_6 是否被接入了 #1 号门。如果让 Prover 直接把电路赋值填入 W 表格，一个「诚实的」Prover 会在 $w_{a,1}$ 和 $w_{c,2}$ 两个位置填上相同的值；而一个「恶意的」Prover 完全可以填上不同的值。如果恶意 Prover 在 $w_{b,1}$ 和 $w_{c,3}$ 也填入不同的值，那么实际上 Prover 证明的是上图右边的电路，而非是和 Verifier 共识过的电路（左边)。

i	w_a	w_b	w_c
1	$\boxed{x_6}$	$\underline{x_5}$	out
2	x_1	x_2	$\boxed{x_6}$
3	x_3	x_4	$\underline{x_5}$

我们需要增加新的约束，强制要求右边电路图中 $x_6 = x_7$ 和 $x_5 = x_8$。这等价于我们要求 Prover 把同一个变量填入表格多个位置时，**必须填入相等的值。**

这就需要一类新的约束——「拷贝约束」，即 Copy Constraint。Plonk 采用「置换证明」保证 W 表格中多个位置上的值满足拷贝关系。我们继续用上面这个电路图的案例来说明其基本思路：

设想我们把 W 表格中的所有位置索引排成一个向量：

$$\sigma_0 = (\boxed{w_{a,1}}, w_{a,2}, w_{a,3}, \underline{w_{b,1}}, w_{b,2}, w_{b,3}, w_{c,1}, \boxed{w_{c,2}}, \underline{w_{c,3}})$$

然后把应该相等的两个位置互换，比如上图中要求 $w_{a,1} = w_{c,2}$ 和 $w_{b,1} = w_{c,3}$ 。于是我们得到了下面的位置向量：

$$\sigma = (\boxed{w_{c,2}}, w_{a,2}, w_{a,3}, \underline{w_{c,3}}, w_{b,2}, w_{b,3}, w_{c,1}, \boxed{w_{a,1}}, \underline{w_{b,1}})$$

然后我们要求 Prover 证明：W **表格按照上面的置换之后，仍然等于自身。**置换前后的相等性可以保证 Prover 无法作弊。

再来一个例子，当约束一个向量中有三个（或多个）位置上的值必须相同时，只需要把这三个（或多个）位置的值进行循环移位（左移位或者右移位），然后证明移位后的向量与原向量相等即可。比如：

$$A = (b_1, b_2, \underline{a_1}, b_3, \underline{a_2}, b_4, \underline{a_3})$$

如果要证明 $a_1 = a_2 = a_3$，那么只需要证明：

$$A' = (b_1, b_2, \underline{a_3}, b_3, \underline{a_1}, b_2, \underline{a_2}) \stackrel{?}{=} A$$

在经过置换的向量 A' 中， a_1, a_2, a_3 依次右移交换，即 a_1 放到了原来 a_2 的位置，而 a_2 放到了 a_3 的位置， a_3 则放到了 a_1 的位置。

如果 $A' = A$ ，那么 A' 和 A 所有对应位置上的值都应该相等，可得： $a_1 = a_3$，$a_2 = a_1$， $a_3 = a_2$，即 $a_1 = a_2 = a_3$。这个方法可以适用于任意数量的等价关系。（后续证明两个向量相等的方法请见下章）

那么如何描述电路赋值表格中的交换呢？我们只需要记录 σ 向量即可，当然 σ 向量也可以写成表格的形式：

i	σ_a	σ_b	σ_c
1	$\boxed{w_{c,2}}$	$\underline{w_{c,3}}$	$w_{c,1}$
2	$w_{a,2}$	$w_{b,2}$	$\boxed{w_{a,1}}$
3	$w_{a,3}$	$w_{b,3}$	$\underline{w_{b,1}}$

加上 σ ，空白电路可以描述为 (Q, σ) ，电路的赋值为 W

$$\mathsf{Plonkish}_0 \triangleq (Q, \sigma; W)$$

再比较

R1CS 的 (U, V, W) 表格的宽度与引线的数量有关，行数跟乘法门数量有关。这个构造相当于把算术电路看成是仅有乘法门构成，但每个门有多个输入引脚（最多为所有引线的数量）。而 Plonkish 则是同等对待加法门与乘法门，并且因为输入引脚只有两个， 所以 W 表格的宽度固定，仅有三列（如果要支持高级的计算门，表格可以扩展到更多列）。这一特性是 Plonk 可以利用 Permutation Argument 实现拷贝约束的前提。

> ..., and thus our linear contraints are just wiring constraints that can be reduced to a permutation check.

按照 Plonk 论文的统计，一般情况下，算术电路中加法门的数量是乘法门的两倍。如果这样看来， W 表格的长度会三倍于 R1CS 的矩阵。但这个让步会带来更多的算术化灵活度。

电路验证协议框架

有了电路空白结构的描述和赋值，我们可以大致描述下 Plonk 的协议框架。

首先 Prover 和 Verifier 会对一个共同的电路进行共识， (Q, σ) 。 假设电路的公开输出为 $out = 99$，而 (x_1, x_2, x_3, x_4) 为秘密输入。

Prover 填写 W 矩阵（Verifier 不可见）：

i	w_a	w_b	w_c
1	$\boxed{x_6}$	$\underline{x_5}$	$[out]$
2	x_1	x_2	$\boxed{x_6}$
3	x_3	x_4	$\underline{x_5}$
4	0	0	$[out]$

其中增加的第四行是为了增加一个额外的算术约束： $out = 99$ ，把 out 值显示地表示在 Q 矩阵中。

相应的那么 Prover 和 Verifier 共识的 Q 矩阵为

i	q_L	q_R	q_M	q_C	q_O
1	0	0	1	0	1
2	1	1	0	0	1
3	0	0	1	0	1
4	0	0	0	99	1

其中第四行约束，保证 $out = 99$，可以把 $(q_L = 0, q_R = 0, q_M = 0, q_C = 99, q_O = 1)$ 代入下面的算术约束，可得 $99 - w_c = 0$ ，即 $w_{c,4} = 99$ 。

$$q_L \circ w_a + q_R \circ w_b + q_M \circ (w_a \cdot w_b) + q_C - q_O \circ w_c = 0$$

为了保证第一行的 w_c 也必须为 99，这就需要在 σ 矩阵中添加额外的一条拷贝约束：让 out 变量的位置 $(w_{c,1})$ 与 第四行的输出 $w_{c,4}$ 交换对调：

i	σ_a	σ_b	σ_c
1	$\boxed{w_{c,2}}$	$\underline{w_{c,3}}$	$[w_{c,4}]$
2	$w_{a,2}$	$w_{b,2}$	$\boxed{w_{a,1}}$
3	$w_{a,3}$	$w_{b,3}$	$\underline{w_{b,1}}$
4	$w_{a,4}$	$w_{b,4}$	$[w_{c,1}]$

如果 Prover 是诚实的，那么对于 $i \in (1,2,3,4)$，下面的算术约束等式成立：

$$q_{L,i} \circ w_{a,i} + q_{R,i} \circ w_{b,i} + q_{M,i} \circ (w_{a,i} \cdot w_{b,i}) + q_{C,i} - q_{O,i} \circ w_{c,i} = 0$$

验证协议的大概思路如下：

协议开始：Prover 如实填写 W 表格，然后把 W 表格的每一列进行编码，并进行多项式编码，并把编码后的结果发送给 Verifier

协议验证阶段：Verifier 与 Prover 通过进一步的交互，验证下面的等式是否成立：

$$q_L(X) \cdot w_a(X) + q_R(X) \cdot w_b(X) + q_M(X) \cdot (w_a(X) \cdot w_b(X)) + q_C(X) - q_O$$

当然这个验证还不够，还要验证 $(\sigma_a(X), \sigma_b(X), \sigma_c(X))$ 与 $(w_a(X), w_b(X), w_c(X))$ 之间的关系。还有，Verifier 如何通过多项式来验证电路的运算，请看后续章节。

参考文献

- [BG12] Bayer, Stephanie, and Jens Groth. "Efficient zero-knowledge argument for correctness of a shuffle." *Annual International Conference on the Theory and Applications of Cryptographic Techniques*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2012.
- [GWC19] Ariel Gabizon, Zachary J. Williamson, and Oana Ciobotaru. "Plonk: Permutations over lagrange-bases for oecumenical noninteractive arguments of knowledge." *Cryptology ePrint Archive* (2019).