Ein DSGE-Modell über die Eurozone von Smets und Wouters

Hausarbeit
für die Veranstaltung „DSGE-Modelle“
verfasst von

Ulrich Hartleif
Matrikelnumer: 393370

Institut für Ökonometrie und Wirtschaftsstatistik
an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
Sommersemester 2012

Dozenten: Dr. Andrea Beccarini und Willi Mutschler, M.Sc.

Vorwort

In dieser Hausarbeit möchten wir das DSGE-Modell (dynamic stochastic general equilibrium) von Smets und Wouters vorstellen, mit dem wir uns in der Vorlesung „DSGE-Modelle“ beschäftigt haben. Wir werden die Gleichungen des Modells ausführlich herleiten und erklären, wieso das Modell aufgebaut ist, wie es aufgebaut ist. Danach wollen wir eine Möglichkeit vorstellen, wie man die gewonnen nichtlinearen Gleichungen linearisieren kann. Im zweiten Teil soll es um ein paar anwendungsbetonte Dinge gehen. Wir werden Möglichkeiten vorstellen, die Parameter des Modells zu bestimmen, und am Ende das Verhalten des Modells in zwei speziellen Fällen untersuchen.

Inhaltsverzeichnis

1 DSGE-Modell von Smets und Wouters

Ein makroökonomisches Modell muss heutzutage Eigenschaften besitzen, um bestimmte Fakten abzubilden, die man bei Untersuchungen von realen ökonomischen Daten findet. Preise und Löhne sind nicht völlig flexibel, es gibt unfreiwillige Arbeitslosigkeit, Produktion und Beschäftigung sind nicht immer in ihren Gleichgewichtszuständen. Die Akteure der Wirtschaft sind rational denkende Wesen und haben somit rationale Erwartungen über die Zukunft. Desweiteren möchte jeder Akteuer seinen Nutzen in der Wirtschaft maximieren, so dass eine mikroökonomische Optimierungsgrundlage das Fundament eines solchen Modells darstellen sollte. Solche und andere Dinge wollen wir nun in einem mathematischen Wirtschaftsmodell darstellen. Dazu werden wir das DSGE-Modell von Smets und Wouters [7] vorstellen, welches von der Europäischen Zentralbank benutzt wird. Wir halten uns in Notation und Aufbau an dieses Paper.

1.1 Haushalte

Wir beginnen mit den Haushalten der Wirtschaft und möchten sie erst einmal allgemein vorstellen und dann in drei Gebieten Gleichungen für das Modell herleiten. Dazu betrachten wir ein Kontinuum, also eine Unendlichkeit, an Haushalten, welche wir mit $\tau \in (0,1)$ indexieren werden. Jeder Haushalt maximiert eine Nutzenfunktion über einen unendlichen Zeithorizont, wobei zukünftiger Nutzen mit einem Faktor $0 < \beta < 1$ diskontiert wird:

$$E_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U_t^\tau \right] \tag{1}$$

Der Operator E_t ist der Erwartungsoperator. Er besagt, dass wir von allen Variablen bis zur Periode t die genauen Werte kennen und von allen Variablen ab Periode $t+1$ nur den Erwartungswert annehmen können.[1] Der Nutzen U_t^τ hängt von Konsum C_t^τ, Arbeit l_t^τ bzw. Freizeit und realer Geldhaltung M_t^τ / P_t ab. Die Nutzenfunktion ist in diese drei Argumente additiv aufteilbar und besitzt folgende Form:

$$U_t^\tau = \epsilon_t^B \left[\frac{1}{1-\sigma_c}(C_t^\tau - H_t)^{1-\sigma_c} - \frac{\epsilon_t^L}{1+\sigma_l}(l_t^\tau)^{1+\sigma_l} + \frac{\epsilon_t^M}{1-\sigma_m}\left(\frac{M_t^\tau}{P_t}\right)^{1-\sigma_m} \right].$$

Wir sehen sofort, dass der Nutzen positiv vom Konsum abzüglich eines Habits H_t, negativ vom Level der Arbeit und positiv von der realen Geldhaltung abhängt. Der Habit ergibt sich proportional aus dem Konsum der vorherigen Periode. Es ist also $H_t = h \cdot C_{t-1}$. Wir sehen, dass der Nutzen aus dem Konsum negativ wird, wenn der Haushalt weniger als den Habit konsumieren. Dies sorgt dafür, dass sich der Konsum von einer Periode zur nächsten nicht drastisch ändert. Dieses Persistenz des Konsums ist in Wirtschaftsdaten belegt und durch diesen Habit wird dies auf unser Modell abgebildet. Die drei Einzelkomponenten sind mathematisch so modelliert, dass zwar der Nutzen mit höherem Niveau

[1] Aus satztechnischen Gründen lassen wir die Klammer des Erwartungsoperators häufig weg.

steigt, jedoch sinkt der Nutzengewinn pro zusätzlicher Einheit bei steigendem Niveau ab. Die Parameter σ_c, σ_l und σ_m kommen aus verschiedenen theoretischen Überlegungen. Die mathematische Form der Konsumkomponente beschreibt eine Nutzenfunktion mit konstanter relativer Risikoaversion. Der erste Parameter beschreibt den Wert der relativen Risikoaversion. Er ist das konstante Ergebnis der Formel $-c \cdot U'^{i}(c)/U' = \sigma$. Der zweite Parameter ist die Inverse der Arbeitselastizität in Abhängigkeit des Reallohns. Der dritte Parameter beschreibt die Inverse der Geldhaltungselastizität in Abhängigkeit des Realzinses. Um eine Dynamik im Modell zu erreichen, werden drei Schocks in die Formel eingeführt: ein genereller Präferenzschock, welcher Einfluss auf die intertemporale Substitution des Nutzens hat, ein Arbeitsangebotschock und ein Schock der Geldnachfrage. Alle folgen einem autoregressiven Prozess erster Ordnung.[2] Es gilt

$$\epsilon_t^B = \rho_B \epsilon_{t-1}^B + \eta_t^B, \quad \epsilon_t^L = \rho_L \epsilon_{t-1}^L + \eta_t^L, \quad \epsilon_t^M = \rho_M \epsilon_{t-1}^M + \eta_t^M.$$

Dabei sind die η_t^j standardnormalverteilt und die ρ_j sind feste Parameter.
Das Einkommen der Haushalte setzt sich aus mehreren Bestandteilen zusammen: reales Lohneinkommen aus Arbeit, Nettogewinn aus Staatsanleihen, Rendite vom Kapitalstock minus der Kosten bei Änderung der Utilisationsrate und den Dividenden aus dem monopolistischen Markt der Zwischengüter.

$$Y_t^\tau = \frac{W_t^\tau}{p_t} l_t^\tau + A_t^\tau + (r_t^k z_t - \Psi(z_t)) K_{t-1}^\tau + Div_t^\tau$$

Diesem Einkommen stehen zusammen mit dem aktuellen Vermögen Ausgaben gegenüber, so dass folgende Budgetgleichung erfüllt ist:

$$\begin{aligned} &\underbrace{\overbrace{C_t^\tau}^{\text{Konsum}} + \overbrace{I_t^\tau}^{\text{Investitionen}} + \overbrace{\frac{M_t^\tau}{P_t}}^{\text{reale Geldhaltung in } t} + b_t \overbrace{\frac{B_t^\tau}{P_t}}^{\text{Bonds in } t}}_{\text{Ausgaben}} \\ = {} & \underbrace{Y_t^\tau}_{\text{Einkommen}} + \underbrace{\overbrace{\frac{M_{t-1}^\tau}{P_t}}^{\text{reale Geldhaltung in } t-1} + \overbrace{\frac{B_{t-1}^\tau}{P_t}}^{\text{Bonds in } t-1}}_{\text{Vermögen}} \end{aligned} \tag{2}$$

Bonds sind einperiodische verzinste Anlagen mit Preis b_t. Somit ergibt sich für den Bondpreis und den nominalen Zinsatz folgender Zusammenhang:

$$1 + i_t = \frac{1}{b_t} = R_t. \tag{3}$$

[2] Wir werden sie fortan als AR(1)-Prozess bezeichnen. Sei z_t ein AR(1)-Prozess, dann gilt: $z_{t+1} = a + bz_t + \epsilon_{t+1}$, wobei a und b Konstanten sind und ϵ unabhängig und identisch verteilt (im Englischen i.i.d.). In unserem Fall sind alle Schocks $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ normalverteilt.

Nachdem wir die grundlegenden Eigenschaften der Haushalte herausgearbeitet haben, wollen wir nun die die Gleichungen für das Modell herleiten, welche das Verhalten der Haushalte in der Wirtschaft beschreiben.

1.1.1 Konsum

Zur Herleitung der optimalen Konsumentscheidung wollen wir den Nutzen (1) eines jeden Haushaltes in Abhängigkeit seiner Budgetbedingung (2) maximieren. Wir zur Lösung der Optimierungsaufgaben immer eine Lagrangefunktion mit einem oder mehreren Lagrangemultiplikatoren aufstellen und ihre partiellen Ableitungen gemäß der Bedingung für ein Extremum Null setzen und die Gleichung lösen. Als Lagrangemultiplikator führen wir hier $\beta^t \lambda_t$ ein:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_C = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \epsilon_t^B & \left(\frac{1}{1-\sigma_c} (C_t^\tau - H_t)^{1-\sigma_c} - \frac{\epsilon_t^L}{1+\sigma_l} (l_t^\tau)^{1+\sigma_l} + \frac{\epsilon_t^M}{1-\sigma_m} \left(\frac{M_t^\tau}{P_t} \right)^{1-\sigma_m} \right) \\ & - \beta^t \lambda_t \left(C_t^\tau + I_t^\tau + \frac{M_t^\tau}{P_t} + b_t \frac{B_t^\tau}{P_t} - Y_t^\tau - \frac{M_{t-1}^\tau}{P_t} - \frac{B_{t-1}^\tau}{P_t} \right)\end{aligned}$$

Wir möchten die optimalen Bedingungen für Konsum, Geld- und Bondhaltung berechnen.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{L}_C}{\partial C_t^\tau} &= E_t \left[\beta^t \epsilon_t^B (C_t^\tau - H_t)^{-\sigma_c} - \beta^t \lambda_t \right] \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_t &= \epsilon_t^B (C_t^\tau - H_t)^{-\sigma_c} = \frac{\partial U_t^\tau}{\partial C_t^\tau} = U_t^C \qquad (4)\end{aligned}$$

Der nichtdiskontierte Lagrangemultiplikator λ_t entspricht dem Grenznutzen des Konsums U_t^C. Da alle Haushalte in ihren Konsumentscheidungen homogen sind, können wir die Indexierung weglassen und erhalten, dass U_t^C für alle Haushalte identisch ist.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{L}_C}{\partial B_t^\tau} &= -E_t \left[\beta^t \lambda_t \frac{b_t}{P_t} \right] - E_t \left[\beta^{t+1} \lambda_{t+1} \frac{-1}{P_{t+1}} \right] \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow E_t &\left[\beta \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \frac{1}{b_t} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right] = 1 \qquad (5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{L}_C}{\partial M_t^\tau} &= E_t \left[\beta^t \left(\frac{\epsilon_t^B \epsilon_t^M}{P_t} \left(\frac{M_t^\tau}{P_t} \right)^{-\sigma_m} - \frac{\lambda_t}{P_t} \right) \right] + E_t \left[\frac{\beta^{t+1} \lambda_{t+1}}{P_{t+1}} \right] \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \epsilon_t^B \epsilon_t^M & \left(\frac{M_t^\tau}{P_t} \right)^{-\sigma_m} \frac{1}{\lambda_t} + E_t \left[\beta \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right] = 1 \qquad (6)\end{aligned}$$

Mit den Gleichungen (4), (5) und (6) haben wir die intertemporalen Optimatlitätsbedingungen erhalten. Aus Gleichung (5) und (4) folgt durch Einsetzen die Euler-Gleichung des Konsum, welche uns einen Zusammenhang zwischen dem Konsum in der aktuellen Periode und dem zukünftigen Konsum liefert:

$$1 = E_t\left[\beta\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}\frac{1}{b_t}\frac{P_t}{P_{t+1}}\right] = E_t\left[\beta\frac{U^c_{t+1}}{U^c_t}(1+i_t)\frac{P_t}{P_{t+1}}\right].$$

Mit (3) können wir dies umformen zu

$$\beta(1+i_t)E_t\left[\frac{U^c_{t+1}}{P_{t+1}}\right] = \frac{U^c_t}{P_t} \tag{7}$$

Wenn wir die Gleichungen (4) und (5) in (6) einsetzen, erhalten wir eine Darstellung der optimalen Geldnachfrage in Abhängigkeit des nominalen Zinssatzes:

$$\epsilon^M_t\left(\frac{M^\tau_t}{P_t}\right)^{-\sigma_m} = (C^\tau_t - H_t)^{-\sigma_c}\cdot(1-b_t) = (C^\tau_t - H_t)^{-\sigma_c}\cdot\frac{i_t}{1+i_t}$$

Dieser nominale Zinssatz ist der Ansatzhebel der Geldpolitik in unserem Modell.

1.1.2 Arbeit und Lohn

Als nächstes möchten wir die Gleichungen des Arbeitsmarktes bestimmen. Arbeit ist in diesem Modell ein differenziertes Gut, welches von den Haushalten angeboten wird. Daher verüfgt jeder Haushalt über ein Monopol seines speziellen Arbeitsangebots. Für die Firmen ist Arbeit somit ein nichtperfektes Substitut. Diese Eigenschaft des Models hat ihre Legitimation mit der Macht von Gewerkschaften in der europäischen Wirtschaft. Sie können einen höheren Lohn durchsetzen, was hier widergespiegelt werden soll. Die aggregierte Arbeitsnachfrage stellen wir mit Hilfe eines Integrales dar, aus dem ersichtlich wird, dass eine Firma bei Substituiton einer Arbeit eines Haushaltes mehr Arbeit von anderen Haushalten in Anspruch nehmen muss, was die Firma dann mehr Gekd kosten würde:

$$L_t = \left[\int_0^1 (l^\tau_t)^{\frac{1}{1+\lambda_{w,t}}} d\tau\right]^{1+\lambda_{w,t}}, \quad \text{mit } \lambda_{w,t} > 0. \tag{8}$$

Der Parameter $\lambda_{w,t}$ beschreibt die Substutierbarkeit der Arbeitsangebote. Er wird in jeder Periode von einem normalverteilten Schock η^w_t beeinflusst.[3] Wir sehen sofort, dass für den ausgeschlossenen Spezialfall $\lambda_{w,t} = 0$ das Arbeitsangebot perfekt substituierbar ist. Firmen wollen ihre Kosten unter der Bedingung der aggregierten Arbeitsnachfrage minimieren:

$$\mathscr{L}_l = \int_0^1 W^\tau_t l^\tau_t d\tau + W_t\left(L_t - \left[\int_0^1 (l^\tau_t)^{\frac{1}{1+\lambda_{w,t}}} d\tau\right]^{1+\lambda_{w,t}}\right).$$

Die Optimalitätsbedingung ergibt sich durch

[3] Es gilt $\lambda_{w,t} = \lambda_w + \eta^w_t$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}_l}{\partial l_t^\tau} &= W_t^\tau - W_t \left((1+\lambda_{w,t}) \left[\int_0^1 (l_t^\tau)^{\frac{1}{1+\lambda_{w,t}}} d\tau \right]^{\lambda_{w,t}} \frac{1}{1+\lambda_{w,t}} (l_t^\tau)^{\frac{-\lambda_{w,t}}{1+\lambda_{w,t}}} \right) \overset{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow W_t^\tau &= w_t L_t^{\frac{\lambda_{w,t}}{1+\lambda_{w,t}}} (l_t^\tau)^{\frac{-\lambda_{w,t}}{1+\lambda_{w,t}}} \\
\Leftrightarrow l_t^\tau &= L_t \left(\frac{W_t^\tau}{W_t} \right)^{\frac{-(1+\lambda_{w,t})}{\lambda_{w,t}}} .
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Die optimale Arbeitsnachfrage hängt also vom Lohn und vom Substitutionsparameter ab. Wenn wir dieses Ergebnis in die Formel für die aggregierte Arbeitsnachfrage (8) einsetzen erhalten wir folgenden Zusammenhang:

$$
L_t = \left[\int_0^1 \left(\frac{W_t^\tau}{W_t} \right)^{\frac{-1}{\lambda_{w,t}}} L_t^{\frac{1}{1+\lambda_{w,t}}} d\tau \right]^{1+\lambda_{w,t}} \Leftrightarrow W_t = \left[\int_0^1 (W_t^\tau)^{\frac{-1}{\lambda_{w,t}}} d\tau \right]^{-\lambda_{w,t}} \tag{10}
$$

Der Lagrangemultiplikator W_t kann als ein Preis für eine Stunde Arbeit interpretiert werden. Er stellt einen Lohnindex dar.

Die Lohnsetzung folgt einer Calvo-Regel. Dabei hat in einer Periode t jeder Haushalt mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \xi_w$ die Möglichkeit seinen nominalen Lohn neu zu setzen. Aufgrund der Definition der Haushalte als Kontinuum zwischen 0 und 1 folgt, dass demnach in jeder Periode der Anteil $1 - \xi_w$ der Haushalte seinen Lohn neu bestimmen kann. Diesen in Periode t neu gesetzten Lohn wollen wir mit $\widetilde{W}_t$ bezeichnen. Es ist klar, dass in jeder Periode die Wahrscheinlichkeit, seinen Lohn nicht anpassen zu können, bei ξ_w liegt und somit die Wahrscheinlichkeit i Perioden lang seinen Lohn nicht anpassen zu dürfen bei ξ_w^i. Sie erhalten einen anteiligen Inflationsausgleich und es folgt iterativ die Darstellung des Lohnes in Periode $t+i$:

$$
W_{t+i}^\tau = \left(\frac{P_{t+i-1}}{P_{t-1}} \right)^{\gamma_w} \widetilde{W}_t. \tag{11}
$$

Es ist sofort ersichtlich, dass bei $\gamma_w = 0$ kein und bei $\gamma_w = 1$ ein voller Inflationsausgleich erfolgt. Die Inflation zwischen Periode $t-1$ und t werden wir mit $\Pi_t := P_t / P_{t-1}$ bezeichnen. Wenn wir beide Lohnsetzungsmöglichkeiten samt zugehöriger Wahrscheinlichkeit in die Formel für den Lohnindex W_t einsetzen, erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
(W_t)^{\frac{-1}{\lambda_{w,t}}} &= \xi_w \cdot \int_0^1 \left(W_{t-1} \left(\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \right)^{\gamma_w} \right)^{\frac{-1}{\lambda_{w,t}}} d\tau + (1-\xi_w) \cdot \int_0^1 \widetilde{W}_t^{\frac{-1}{\lambda_{w,t}}} d\tau \\
&= \xi_w \left[\left(\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \right)^{\gamma_w} W_{t-1} \right]^{\frac{-1}{\lambda_{w,t}}} + (1-\xi_w) \widetilde{W}_t^{\frac{-1}{\lambda_{w,t}}}
\end{aligned}
$$

Die Haushalte, die ihren Lohn neu setzen können, tun dies unter Berücksichtigung ihrer Budgetbechränkung, der Arbeitsnachfrage und der Wahrscheinlichkeit, ihren Lohn i

Perioden nicht neu bestimmen zu können. Wenn wir für die Arbeitsnachfrage (9) und dann (11) einsetzen, maximieren wir

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_W = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \xi_w^i \beta^i U &\left(C_{t+i}^{\tau}, L_{t+i} \left(\frac{\left(\frac{P_{t+i-1}}{P_{t-1}}\right)^{\gamma_w} \widetilde{W}_t}{W_{t+i}} \right)^{\frac{-(1+\lambda_{w,t+i})}{\lambda_{w,t+i}}}, M_{t+i}^{\tau} \right) \\
&- \xi_w^i \beta^i \lambda_{t+i} \left(Y_{t+i}^{\tau} - \left(\frac{P_{t+i-1}}{P_{t-1}}\right)^{\gamma_w} \frac{\widetilde{W}_t}{P_{t+i}} L_{t+i} \left(\frac{\left(\frac{P_{t+i-1}}{P_{t-1}}\right)^{\gamma_w} \widetilde{W}_t}{W_{t+i}} \right)^{\frac{-(1+\lambda_{w,t+i})}{\lambda_{w,t+i}}} \right) \\
&- \xi_w^i \beta^i \lambda_{t+i} \left(A_{t+i}^{\tau} - (r_{t+i}^k z_{t+i} - \Psi(z_{t+i})) K_{t+i-1}^{\tau} - Div_{t+i}^{\tau} \right) \\
&- \xi_w^i \beta^i \mu_{t+i} \left(l_{t+i}^{\tau} - L_{t+i} \left(\frac{W_{t+i}^{\tau}}{W_{t+i}} \right)^{\frac{-(1+\lambda_{w,t+i})}{\lambda_{w,t+i}}} \right)
\end{aligned}
$$

und erhalten als Optimalitätsbedingung für den Lohn $\widetilde{W}_t$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}_W}{\partial \widetilde{W}_t} = E_t \sum_{i=0}^{\infty} &\gamma_w^i \beta^i U_{t+i}^L \frac{-(1+\lambda_{w,t+i})}{\lambda_{w,t+i}} \frac{l_{t+i}^{\tau}}{\widetilde{W}_t} \\
&+ \gamma_w^i \beta^i \lambda_{t+i} \left(\frac{-1}{\lambda_{w,t+i}} \left(\frac{P_{t+i-1}}{P_{t-1}}\right)^{\gamma_w} \frac{1}{P_{t+i}} l_{t+i}^{\tau} \right) \stackrel{!}{=} 0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Den Grenznutzen der Arbeit bezeichnen wir analog zum Grenznutzen des Konsums mit U_{t+i}^L. Wenn wir nun (12) mit P_t/P_t und $-\lambda_{w,t+i}/(1+\lambda_{w,t+i})$ multiplizieren und (4) berücksichtigen, erhalten wir

$$
\frac{\widetilde{W}_t}{P_t} E_t \left[\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_W^i \beta^i \left(\frac{P_{t+i-1}}{P_{t-1}}\right)^{\gamma_w} \frac{P_t}{P_{t+i}} \left(\frac{l_{t+i}^{\tau} U_{t+i}^C}{1+\lambda_{w,t+i}} \right) \right] = E_t \left[\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_W^i \beta^i l_{t+i}^{\tau} U_{t+i}^L \right]. \tag{13}
$$

Der neu gesetzte Reallohn hängt vom erwarteten diskontierten Produkt von Grenznutzen der Arbeit und Arbeitsnachfrage und erwarteten diskontierten Produkt von Inflationsausgleich, inverser Inflation, Arbeitsnachfrage und Grenznutzen des Konsums ab. Für den Fall $\gamma_w = 0$, bei völlig flexiblen Löhnen, erhalten wir durch neues Aufstellen der Lagrangefunktion und Ableiten den Zusammenhang

$$
\frac{\widetilde{W}_t}{P_t} = (1+\lambda_{w,t}) \frac{U_t^L}{U_t^C}, \tag{14}
$$

der bei keinerlei Macht der Haushalte zur bekannten Formel für den perfekten Wettbewerbsmarkt wird.

1.1.3 Kapitalstock

Kommen wir nun im letzten Abschnitt der Haushalte zu den Investitionen und der Kapitalakkumulation. Die Haushalte sind die Eigentümer des Kapitalstocks und verleihen diesen zum Zinssatz r_t^K an die Firmen des Zwischengütermarktes. Gleichzeitig wählen sie die Utilisation z_t des Kapitals, also welcher Anteil des Kapitals effektiv nutzbar ist, in jeder Periode neu. Die Investitionen erhöhen den Kapitalstock in der darauffolgenden Periode, so dass sich folgende Gleichung ergibt:

$$K_t = K_{t-1}(1-\delta) + I_t \left(1 - S\left(\frac{\epsilon_t^I I_t}{I_{t-1}}\right)\right). \tag{15}$$

Der neue Kaptialstock ist der alte abzüglich eines festen Abschreibungsanteil δ plus die neuen Investitionen. Die Funktion S sorgt für Anpassungskosten, wenn sich der Grad der Investitionen verändert. Ansonsten würde es im Modell zu starke Oszillationen beim Kapitalstock geben. Anders als in anderen Modellen hängen die Anpassungskosten hier nicht vom Grad der Investitionen ab sondern von der Veränderung des Grades. Bei konstanten Investitionen, wie z.B. im steady-state, gilt $S(1) = 0$. Wir nehmen an, dass in einer Umbegung des steady-states die Ableitung von S verschwindet und somit die Kosten nur von der zweiten Ableitung von S abhängen. Die Kosten werden von einem AR(1)-Schock ϵ_t^I beeinflusst.

Mit dem Lagrangemultiplikator $\beta^t \lambda_t Q_t$ berechnen wir nun die Optimalitätsbedingungen für K_t, I_t und z_t.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_K = {} & E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t^T, l_t^T, M_t^T) \\
& - \beta^t \lambda_t (I_t + (\Psi(z_t) - r_t^k z_t) K_{t-1} - Div_t - A_t - \frac{W_t}{P_t} l_t + C_t + \frac{M_t}{P_t} - \frac{M_{t-1}}{P_t} \\
& + b_t \frac{B_t}{P_t} - \frac{B_{t-1}}{P_t}) - \beta^t \lambda_t Q_t \left(K_t - K_{t-1}(1-\delta) - I_t + I_t S\left(\frac{\epsilon_t^I I_t}{I_{t-1}}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}_K}{\partial z_t} = E_t \left[-\beta^t \lambda_t (\Psi'(z_t) - r_t^k) K_{t-1}\right] \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow r_t^k = \Psi'(z_t) \tag{16}$$

Die Kapitalutilisation muss also so gewählt werden, dass die Ableitung der Anpassungskostenfunktion für die Utilisation dem Verleihszins r_t^k entspricht.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}_K}{\partial K_t} &= E_t \beta^{t+1} \lambda_{t+1} (r_{t+1}^k z_{t+1} - \Psi(z_{t+1})) - \beta^t \lambda_t Q_t + \beta^{t+1} \lambda_{t+1} Q_{t+1} (1-\delta) \stackrel{!}{=} 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda_t Q_t = E_t \beta \lambda_{t+1} \left(Q_{t+1}(1-\delta) + z_{t+1} r_{t+1}^k - \Psi(z_{t+1})\right)
\end{aligned} \tag{17}$$

Da ein Lagrangemultiplikator allgemein als Wert, der bei einer marginalen Änderung der zugehörigen Nebenbedingung entsteht, gedeutet werden kann, können wir hier $\lambda_t Q_t$ als marginalen Wert des Kapitals interpretieren. Dieser marginale Wert in Periode t muss gleich der Summe vom erwarteten marginalen Wert des Kapitals der nächsten Periode multipliziert mit dem nicht abgeschriebenen Anteil und den erwarteten Einkünften aus der Kapitalverleihung abzüglich der Kosten für die Utilisation des Kapitals sein. Alle zukünftigen Werte sind dabei mit β diskontiert.

Da wir wissen, dass λ_t der Grenznutzen des Konsums ist, können wir $Q_t = \frac{\lambda_t Q_t}{\lambda_t}$ als Verhältnis zwischen Grenznutzen Konsum und marginalen Wert des Kapitals interpretieren. Diese Definition bezeichnet man als Tobin-Q. Im steady-state gilt $Q = 1$.[4] Falls $Q > 1$ ist, gibt es Anreize den Kapitalsstock durch Investitionen zu erhöhen, und bei $Q < 1$ vice versa.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{L}_K}{\partial I_t} &= E_t\left(-\beta^t \lambda_t\right) - \beta^t \lambda_t Q_t \left(-1 + S\left(\frac{\epsilon_t^I I_t}{I_{t-1}}\right) + I_t S'\left(\frac{\epsilon_t^I I_t}{I_{t-1}}\right)\frac{\epsilon_t^I}{I_{t-1}}\right)\\ &\quad - \beta_{t+1}\lambda_{t+1}Q_{t+1}\left(I_{t+1}S'\left(\frac{\epsilon_{t+1}^I I_{t+1}}{I_t}\right)\frac{-\epsilon_{t+1}^I I_{t+1}}{i_t^2}\right) \overset{!}{=} 0\end{aligned} \tag{18}$$

Für eine Interpretation dieser ein wenig unübersichtlichen Gleichung verweisen wir auf den Abschnitt 1.3.1.

1.2 Firmen

Nach den Haushalten betrachten wir nun die Firmen. In unserer Wirtschaft wird nur ein einziges Endprodukt, jedoch ein Kontinuum an Zwischenprodukten, welche für die Herstellung des Endproduktes benutzt werden, produziert. Dabei haben die Firmen der Zwischenprodukte ein Monopol über ihr Zwischenprodukt, wohingegen sich die Firmen des Endproduktmarktes in vollkommener Konkurrenz befinden.

1.2.1 Endproduktmarkt

Wir beginnen mit den Firmen des Marktes des Endproduktes. Sie erzeugen das Endprodukt nach folgender Formel:

$$Y_t = \left[\int_0^1 \left(y_t^j\right)^{\frac{1}{1+\lambda_{p,t}}} dj\right]^{1+\lambda_{p,t}}. \tag{19}$$

Die Firmen, die die Zwischenprodukte y^j produzieren, besitzen also analog zu den Haushalten eine Marktmacht, welche durch den Paramter $\lambda_{p,t} = \lambda_p + \eta_t^p$ mit normalverteiltem Schock η_t^p durchgesetzt wird.

[4]Siehe dazu 1.3.1.

Sei nun p_t^j der Preis des Zwischengutes y^j in Periode t. Dann versuchen die Firmen die Produktionskosten $\int_0^1 p_t^j y_t^j dj$ in Anbetracht ihrer Produktionsfunktion zu minimieren. Sei P_t der nichtdiskontierte Lagrangemultiplikator. Die Berechnung der Optimalitätsbedingung verläuft analog zur Berechnung der Lohnsetzung der Haushalte.

$$\mathscr{L}_y = \int_0^1 p_t^j y_t^j dj + P_t \left(Y_t - \left[\int_0^1 \left(y_t^j\right)^{\frac{1}{1+\lambda_{p,t}}} dj \right]^{1+\lambda_{p,t}} \right)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}_y}{\partial y_t^j} = p_t^j - P_t \left((1+\lambda_{p,t}) \left[\int_0^1 \left(y_t^j\right)^{\frac{1}{1+\lambda_{p,t}}} dj \right]^{\lambda_{p,t}} \frac{1}{1+\lambda_{p,t}} \left(y_t^j\right)^{\frac{-\lambda_{p,t}}{1+\lambda_{p,t}}} \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow p_t^j = P_t Y_t^{\frac{\lambda_{p,t}}{1+\lambda_{p,t}}} \left(y_t^j\right)^{\frac{-\lambda_{p,t}}{1+\lambda_{p,t}}} \Leftrightarrow y_t^j = Y_t \left(\frac{p_t^j}{P_t} \right)^{\frac{-(1+\lambda_{p,t})}{\lambda_{p,t}}} \tag{20}$$

Dies ist die optimale Nachfrage nach Gut y_t^j bei gegebener Produktion Y_t und Preis p_t^j. Eingesetzt in (19) ergibt sich für P_t

$$Y_t = \left[\int_0^1 \left(\frac{p_t^j}{P_t} \right)^{\frac{-1}{\lambda_{p,t}}} Y_t^{\frac{1}{1+\lambda_{p,t}}} dj \right]^{1+\lambda_{p,t}} \Leftrightarrow P_t = \left[\int_0^1 \left(p_t^j\right)^{\frac{-1}{\lambda_{p,t}}} dj \right]^{-\lambda_{p,t}} \tag{21}$$

Auch hier entspricht P_t einem Index. In disem Fall einem Preisindex.

1.2.2 Zwischengütermarkt

Jede Firma des Zwischengütermaktes minimiert ihre Kaptial- und Arbeitskosten unter Berücksichtigung ihrer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion:

$$y_t^j = \epsilon_t^a \widetilde{K}_{j,t}^{\alpha} L_{j,t}^{1-\alpha} - \Phi. \tag{22}$$

Hierbei sind Φ Fixkosten, ϵ_t^a ein AR(1)-Produktivitäts- bzw. Technologieschock, $L_{j,t}$ die benutzte aggregierte Arbeitskraft und $\widetilde{K}_{j,t} = z_t K_{j,t-1}$ der durch Utilisation effektiv nutzbare Kaptialstock. Um die optimale Produktionsmenge zu bestimmen, wollen wir zuerst zeigen, dass die Grenzkosten konstant sind. Dazu stellen wir eine Beziehung zwischen Lohn- und Kapitalkosten her. Dazu Minimieren wir die Kosten $W_t L_{j,t} + r_t^k \widetilde{K}_{j,t}$ unter Berücksichtigung von (22) und erhalten nach Gleichsetzen der Lagrangemultiplikatoren:

$$\frac{W_T}{r_t^k} = \frac{(1-\alpha)\epsilon_t^a \widetilde{K}_{j,t}^{\alpha} L_{j,t}^{-\alpha}}{\alpha \epsilon_t^a \widetilde{K}_{j,t}^{\alpha-1} L_{j,t}^{1-\alpha}} \Leftrightarrow \frac{W_t L_{j,t}}{r_t^k \widetilde{K}_{j,t}} = \frac{1-\alpha}{\alpha}. \tag{23}$$

Durch Umstellen berechnen wir Darstellungen für $L_{j,t}$ und $\widetilde{K}_{j,t}$:

$$L_{j,t} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{r_t^k}{W_t} \widetilde{K}_{j,t} \qquad \text{und } \widetilde{K}_{j,t} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{r_t^K}{W_t}.$$

Eingesetzt in (22) bekommen wir

$$\widetilde{K}_{j,t} = \left(y_t^j + \Phi\right) \frac{1}{\epsilon_t^a} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{W_t}{r_t^k}\right)^{1-\alpha} \tag{24}$$

und

$$L_{j,t} = \left(y_t^j + \Phi\right) \frac{1}{\epsilon_t^a} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{W_t}{r_t^k}\right)^{-\alpha}. \tag{25}$$

Sei c_t die Kosten der Firma. Wir setzen (24) und (25) ein:

$$c_t = W_t L_{j,t} + r_t^k \widetilde{K}_{j,t} = \left(y_t^j + \Phi\right) \frac{1}{\epsilon_t^a} W_t^{1-\alpha} \left(r_t^k\right)^{\alpha} \left(\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{-(1-\alpha)}\right).$$

Die Grenzkosten mc_t erhalten wir durch partielles Ableiten nach der Produktionsmenge:

$$mc_t = \frac{\partial c_t}{\partial y_t^j} = \frac{1}{\epsilon_t^a} W_t^{1-\alpha} \left(r_t^k\right)^{\alpha} \left(\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{-(1-\alpha)}\right).$$

Wir sehen, dass die Grenzkosten nur von in der Periode t konstanten Werten abhängt und auch nicht vom Produktionsgut. Mit der Darstellung der Grenzkosten können wir die Berechnung des Profits π_t der Firma j folgendermaßen aufschreiben:

$$\pi_t^j = p_t^j y_t^j - mc_t \left(y_t^j + \Phi\right) = \left(p_t^j - mc_t\right) \underbrace{\left(\frac{p_t^j}{P_t}\right)^{\frac{-(1+\lambda_{p,t})}{\lambda_{p,t}}} Y_t}_{=y_t^j} - mc_t \Phi. \tag{26}$$

Diesen Profit wollen die Firmen durch optimale Preissetzung maximieren. Die Preissetzung folgt den gleichen Regeln und Notationen wie die Lohnsetzung der Haushalte.[5]

$$p_t^j = (\Pi_{t-1})^{\gamma_p} p_{t-1}^j$$

$$p_{t+i}^j = \left(\frac{P_{t+i-1}}{P_{t-1}}\right)^{\gamma_p} \widetilde{p}_t$$

$$(P_t)^{\frac{-1}{\lambda_{p,t}}} = \xi_p \left[\left(\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}\right)^{\gamma_p} P_{t-1}\right]^{\frac{-1}{\lambda_{p,t}}} + (1-\xi_p)\widetilde{p}_t^{\frac{-1}{\lambda_{p,t}}}$$

Für die Profitmaximierung benutzen die Firmen einen Faktor ρ_t, der aus dem Fakt kommt, dass die Haushalte die Anteilseigner der Firmen sind. Aus der Eulergleichung des Konsums folgt für den Faktor

$$\beta^k \rho_{t+k} = \beta^k \frac{\lambda_{t+k}}{\lambda_t P_{t+k}}. \tag{27}$$

[5]Siehe 1.1.2 .

Damit erfolgt die Optimierung von

$$\mathscr{L}_p = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \xi_p^i \beta^i \rho_{t+i} \left(\left[\left(\frac{P_{t+i-1}}{P_{t-1}} \right)^{\gamma_p} \widetilde{p}_t - mc_{t+i} \right] Y_{t+i} \left(\frac{\left(\frac{P_{t+i-1}}{P_{t-1}} \right)^{\gamma_p} \widetilde{p}_t}{P_{t+i}} \right)^{\frac{-(1+\lambda_{p,t+i})}{\lambda_{p,t+i}}} \right)$$
$$- \xi_p^i \beta^i \rho_{t+i} \Phi \cdot mc_{t+i}$$

und als notwendige Bedingung erhalten wir

$$E_t \left[\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \gamma_p^i \frac{\lambda_{t+i}}{\lambda_t} y_{t+i}^j \left[\frac{\widetilde{p}_t}{P_t} \left(\frac{(P_{t+i-1}/P_{t-1})^{\gamma_p}}{P_{t+i}/P_t} \right) - (1+\lambda_{p,t+i}) \frac{mc_{t+i}}{P_{t+i}} \right] \right] \stackrel{!}{=} 0. \tag{28}$$

Wiederum können wir die bekannten Formeln für eine Wirtschaft mit flexiblen Preisen und mit oder ohne Marktmacht der Firmen durch Einsetzen von $\xi_p = 0$ und neues Ableiten der Optimalitätsbedingung herleiten und errechnen

$$\widetilde{p}_t = (1 + \lambda_{p,t}) \cdot mc_t. \tag{29}$$

1.3 Log-Linearisierung

Die hergeleiteten Gleichungen sind nichtlinear. Wir möchten nun diese Gleichungen für die empirische Nutzung linearisieren, um zum Beispiel Algorithmen zur Lösung linearer Gleichungen zu nutzen. Dazu ein paar Notationen: Mit den reinen Variablennamen $(C, K, \ldots)$ bezeichnen wir die nicht stochastischen steady-state Werte, wohingegen Variablen mit Index t den Wert in Periode t bezeichnet. Wir definieren nun $\hat{x}_t := \log(x_t) - \log(x)$ und erhalten mit einer linearen Taylorapproximation

$$\log(x_t) - \log(x) = \hat{x}_t \approx \frac{x_t - x}{x}. \tag{30}$$

Wir sehen, dass $\hat{x}_t$ dem relativen Fehler von x_t zum steady-state x entspricht, eine prozentuale Abweichung. Bei den Berechnungen werden wir oft durch den steady-state Wert einer Variablen dividieren, um die Form (30) zu erhalten, und der steady-state Wert der Variablen Eins ist.

1.3.1 Investitionsgleichung

Wir möchten nun als Erstes die Investitionsgleichung (18) linearisieren. Dazu formen wir sie folgendermaßen um:

$$\begin{aligned}(18) \Leftrightarrow S' \left(\frac{\epsilon_t^I I_t}{I_{t-1}} \right) \frac{\epsilon_t^I I_t}{I_{t-1}} - \beta E_t \left[\frac{Q_{t+1}}{Q_t} \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} S' \left(\frac{\epsilon_{t+1}^I I_{t+1}}{I_t} \right) \frac{\epsilon_{t+1}^I I_{t+1}}{I_t} \frac{I_{t+1}}{I_t} \right] + \frac{1}{Q_t} \\ = \left(1 - S \left(\frac{\epsilon_t^I I_t}{I_{t-1}} \right) \right).\end{aligned} \tag{31}$$

Im steady-state wird (31) zu

$$QS'\left(\frac{\epsilon^I I}{I}\right)\frac{\epsilon^I I}{I} - \beta\left[Q\frac{\lambda}{\lambda}S'\left(\frac{\epsilon^I I}{I}\right)\frac{\epsilon^I I}{I}\frac{I}{I}\right] + 1 = Q\left(1 - S\left(\frac{\epsilon^I I}{I}\right)\right).$$

Da im steady state $\epsilon^I = 1$ und $S(1) = S'(1) = 0$ gelten, folgt sofort $Q = 1$. Wir wollen nun die Terme in (31) jeweils einzeln mit einer Taylorapproximation erster Ordnung linearisieren und dabei den Zusammenhang zum relativen Fehler nutzen. Da $S'(1) = 0$ gilt, müssen wir nur die Variablen in S' beachten, da nur diese die nicht in 1 verschwindende zweite Ableitung von S produzieren.

$$\begin{aligned}
S'\left(\frac{\epsilon_t^I I_t}{I_{t-1}}\right)\frac{\epsilon_t^I I_t}{I_{t-1}} &\approx S'(1)\epsilon^I + \left[S''(1)\epsilon^I + S'(1)\right](\epsilon_t^I - \epsilon^I) \\
&+ \left[S''(1)\frac{\epsilon^I\epsilon^I}{I} + S'(1)\frac{\epsilon^I}{I}\right](I_t - I) + \left[S''\frac{-\epsilon^I\epsilon^I}{I} + S'(1)\frac{-\epsilon^I}{I}\right](I_{t-1} - I) \\
&= S''(1)(\hat{\epsilon}_t + \hat{I}_t - \hat{I}_{t-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\beta E_t\frac{Q_{t+1}\lambda_{t+1}}{Q_t\lambda_t}\left[S'\left(\frac{\epsilon_{t+1}^I I_{t+1}}{I_t}\right)\frac{\epsilon_{t+1}^I I_{t+1}^2}{I_t^2}\right] \approx \beta S'(1)\epsilon^I \\
&+ \beta\left(S''(1)\frac{\epsilon^I}{I}\epsilon^I + 2S'(1)\frac{\epsilon^I}{I}\right)(E_t I_{t+1} - I) + \beta\left(S''(1)\frac{-\epsilon^I}{I}\epsilon^I - 2S'(1)\frac{\epsilon^I}{I^2}\right)(I_t - I) \\
&+ \beta\left(S''(1)\epsilon^I + S'(1)\right)(E_t\epsilon_{t+1}^I - \epsilon^I) = \beta S''(1)\left(E_t\hat{I}_{t+1} - \hat{I}_t + E_t\epsilon_{t+1}^I\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{Q_t} \approx \frac{1}{Q} - \frac{1}{Q^2}(Q_t - Q) = 1 - \frac{Q_t - Q}{Q} \approx 1 - \hat{Q}_t$$

Ersetzen der Summanden in (31) liefert

$$\begin{aligned}
&S''(1)(\hat{\epsilon}_t + \hat{I}_t - \hat{I}_{t-1} - \beta S''(1)\left(E_t\hat{I}_{t+1} - \hat{I}_t + E_t\hat{\epsilon}_{t+1}^I\right) \approx \hat{Q}_t \\
&\Leftrightarrow S''(1)\hat{I}_t + \beta S''(1)\hat{I}_t \approx S''(1)\hat{I}_{t-1} + \beta S''(1)\hat{I}_{t+1}\hat{Q}_t + \beta S''(1)E_t\hat{\epsilon}_{t+1}^I - S''(1)\hat{\epsilon}_t^I \\
&\Leftrightarrow \hat{I}_t \approx \frac{1}{1+\beta}\hat{I}_{t-1} + \frac{\beta}{1+\beta}E_t\hat{I}_{t+1} + \frac{1}{S''(1)(1+\beta)}\hat{Q}_t + \frac{\beta}{1+\beta}(E_t\hat{\epsilon}_{t+1}^I - \hat{\epsilon}_t^I).
\end{aligned}$$

Die Veränderung der Investitionen hängt also von den Investitionen der vorhergegangenen Periode, den erwarteten Investitionen der nächsten Periode, dem Wert der $\hat{Q}_t$-Gleichung und der Differenz von aktuellem zu erwartetem Investitonskostenschock ab.

1.3.2 Arbeitsnachfragekurve

Gleichung (23) zeigt, dass der Quotient aus Arbeitskosten und Kapitalkosten konstant ist, natürlich dann auch im steady-state. Durch Gleichsetzen und Logarithmieren erhalten wir mit (30)

$$
\begin{aligned}
\frac{W_tL_t}{WL} &= \frac{r_t^k z_t k_{t-1}}{r^k z K} \\
&\Leftrightarrow \log(W_t) - \log(W) + \log(L_t) - \log(L) \\
&= \log(r_t^k) - \log(r^k) + \log(z_t) - \log(z) + \log(k_{t-1}) - \log(k) \\
&\Leftrightarrow \hat{L}_t = \hat{r}_t^k - \hat{W}_t + \hat{z}_t + \hat{K}_{t-1}. \qquad (32)
\end{aligned}
$$

Mit (16) können wir $\Psi'(z_t)$ approxamtiv umschreiben in

$$
\begin{aligned}
\Psi'(z_t) = r_t^k = r^k + (r_t^k - r^k) \approx r^k + \hat{r}_t^k r^k \\
\Leftrightarrow \hat{r}_t^k r^k \approx \Psi'(z_t) - \Psi'(z), \qquad (33)
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
\Psi'(z_t) \approx \Psi'(z) + \Psi''(z)(z_t - z) \\
\Leftrightarrow \Psi''(z)\hat{z}_t z \approx \Psi'(z_t) - \Psi'(z). \qquad (34)
\end{aligned}
$$

Im steady-state gilt $z = 1$ und so folgt aus (33) und (34)

$$
\hat{r}_t^k \Psi'(1) = \hat{r}_t^k r^k \approx \Psi''(1)\hat{z}_t \Leftrightarrow \hat{z}_t \approx \hat{r}_t^k \frac{\Psi'(1)}{\Psi''(1)}.
$$

Dies setzen wir in (32) ein und erhalten die linearisierte Arbeitsnachfragekurve

$$
\hat{L}_t = -\hat{W}_t + \left(1 + \frac{\Psi'(1)}{\Psi''(1)}\right)\hat{r}_t^k + \hat{K}_{t-1}. \qquad (35)
$$

Die Veränderung der Arbeitsnachfrage hängt also negativ von der Lohnentwicklung, positiv von der Kapitalstockentwicklung und positiv vom Kapitalverleihzins ab.

1.3.3 Restliche Gleichungen

Analog kann man alle weiteren Gleichungen behandeln und erhält von allen Gleichungen die log-linearisierte Form, die hier kurz aufgeführt werden:

$$
\hat{C}_t = \frac{h}{1+h}\hat{C}_{t-1} + \frac{1}{1+h}E_t\hat{C}_{t+1} - \frac{1-h}{(1+h)\sigma_c}\left(\hat{R}_t - E_t\hat{\Pi}_{t+1}\right) + \frac{1-h}{(1+h)\sigma_c}\left(\hat{\epsilon}_t^B - E_t\hat{\epsilon}_{t+1}^B\right) \qquad (36)
$$

Wegen des Habits hängt die Veränderung des Konsum nicht nur vom erwarteten Konsum, sondern auch vom vorherigen Konsum ab. Die Gleichung schaut also sowohl in die Zukunft als auch in die Vergangenheit. Ein großer Wert für h, bei gleichzeitigem Festhalten von σ_c, reduziert die Auswirkungen auf den Konsum bei Änderungen des Zinses und/oder des Präferenzenschocks.

$$\hat{Q}_t = -\left(\hat{R}_t - \hat{\Pi}_{t+1}\right) + \beta(1-\delta)E_t\hat{Q}_{t+1} + \beta r^k E_t \hat{r}_t^k + \eta_t^Q \tag{37}$$

Aus (17) folgt im steady-state, dass $\beta = 1/(1 - \delta + r^k)$ ist. In (37) wird ein zusätzlicher normalverteilter Schock η_t^Q eingeführt.

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_t &= \frac{\beta}{1+\beta\gamma_p}E_t\hat{\Pi}_{t+1} + \frac{\gamma_p}{1+\beta\gamma_p}\hat{\Pi}_{t-1} \\ &+ \frac{(1-\beta\xi_p)(1-\xi_p)}{(1+\beta\gamma_p)\xi_p}\left(\alpha\hat{r}_t^k + (1-\alpha)\hat{W}_t - \hat{\epsilon}_t^a + \eta_t^p\right)\end{aligned} \tag{38}$$

Wie (36) ist auch diese Gleichung, die die Phillips-Kurve darstellt, in beide Zeitrichtungen gerichtet. Für $\gamma_p = 0$ erhalten wir eine nur vorwärtsgerichtete Phillips-Kurve. Sie wird vom Produktivitätsschock und vom Preisaufschlagsschock η_t^p getrieben.

$$\begin{aligned}\hat{W}_t &= \frac{\beta}{1+\beta}E_t\hat{W}_{t+1} + \frac{1}{1+\beta}\hat{W}_{t-1} + \frac{\beta}{1+\beta}E_t\hat{\Pi}_{t+1} - \frac{1+\beta\gamma_w}{1+\beta}\hat{\Pi}_t \\ &+ \frac{\gamma_w}{1+\beta}\hat{\Pi}_{t-1} - \frac{(1-\beta\xi_w)(1-\xi_w)}{(1+\beta)\left(1+\frac{(1+\lambda_w)\sigma_l}{\lambda_w}\right)\xi_w} \cdot \\ &\cdot \left(\hat{W}_t - \sigma_l\hat{L}_t - \frac{\sigma_c}{1-h}\left(\hat{C}_t - h\hat{C}_{t-1}\right) - \hat{\epsilon}_t^L - \eta_t^w\right)\end{aligned} \tag{39}$$

Der Lohn wird durch den früheren Lohn und erwarteten Lohn, die Inflation von gestern, heute und morgen, sowie die Macht der Gewerkschaften verändert.

$$\hat{Y}_t = (1 - \delta k_y - g_y)\hat{C} + \delta k_y \hat{I}_t + g_y \epsilon_t^G \tag{40}$$

Der Output hängt von den Investitionen und dem Konsum ab und wird durch einen Schock der Staatsausgaben ϵ_t^G beeinflusst.

$$\begin{aligned}\hat{R}_t &= \rho\hat{R}_{t-1} + (1-\rho)[\bar{\Pi}_t + r_\Pi(\hat{\Pi}_{t-1} - \bar{\Pi}_t) + r_Y\hat{Y}_t \\ &+ r_{\Delta_\pi}(\hat{\Pi}_t - \hat{\Pi}_{t-1} + r_{\Delta_Y}(\hat{Y}_t - \hat{Y}_{t-1}) + \eta_t^R\end{aligned} \tag{41}$$

Die Geldpolitik folgt einer allgemeinen Taylor-Regel und wird durch zwei Schocks beeinflusst: η_t^R und einem Schock der Zielinflationsrate $\bar{P}i_t = \rho_\Pi\bar{\Pi}_{t-1} + \eta_t^\Pi$.

2 Anwendungen

Im ersten Teil dieser Arbeit haben wir ein Modell hergeleitet, welches aus einem System nichtlinearer Optimalitätsbedingungen mit rationalen Erwartungen und stochastischen Prozessen besteht. Es hängt dabei von einem Vektor stationärer Variablen x_t, welcher sich in Kontroll- und Zustandsvariablen unterteilen lässt, einem Vektor struktureller Schocks ν_t, einem Vektor von Modellparametern μ und einem Vektor von Erwartungsfehlern $\eta_{t+1} = E_t[x_{t+1}] - x_{t+1}$, der aufgrund der stochastischen Prozesse auftritt, ab. Dieses System gilt es zu lösen. Das heißt, dass wir Funktionen suchen, die das das Modell beschreibende System exakt oder approximativ lösen.

2.1 Lineare Lösungsverfahren

Wir beginnen mit linearen Lösungsverfahren. Sie haben den großen Vorteil, dass sie einfach und schnell auf einem Computer zu implementieren und zu berechnen sind. Außerdem kann ein lineares System mit Hilfe des Kalmanfilters[6] analysisert werden. Jedoch ist zu beachten, dass bei einer Linearisierung immer Informationen verlorenen gehen und das Ergebnis bei Nutzung der nichtlinearen Gleichungen womöglich ein komplett anderes ist, da die verlorengegangen Momente höherer Ordnung ebenfalls eine große Rolle spielen können. Bereits eine Approximation zweiter Ordnung kann ein anderes Ergebnis hervorbringen. Die Vorarbeit der Linearisierung haben wir in Abschnitt 1.3 gesetzt. Mit diesen linearen Gleichungen können wir nun folgendes Modell aufstellen:

$$Ax_{t+1} = Bx_{t+1} + C\nu_{t+1} + D\eta_{t+1} + E$$

Dabei stellen A, B, C, und D lineare Abbildungen in Form von Matrizen dar, die vom Modellparametervektor μ abhängen, und E ist ein konstanter Vektor. Die Lösung eines solchen linearen Modells bestitzt eine VAR(1)-Form:

$$x_{t+1} = F(\mu)x_t + G(\mu)\nu_{t+1} + H \tag{42}$$

In (42) werden die sowohl Auswirkungen des vorherigen Zustands als auch die stochastischen Einwirkungen auf den neuen Zustand beschrieben, zuzüglich eines konstanten Anteils H. Als ein Beispiel für ein lineares Lösungsverfahren sei auf den Algorithmus von Sims ([6]) hingewiesen, den wir hier nicht näher beleuchten wollen.

2.2 Schätzverfahren

Nachdem wir gerade eine Möglichkeit gesehen haben, das System zu lösen, gilt es nun mit Hilfe von Schätzverfahren, die Parameter des Modells so zu bestimmen, dass die Ergebnisse des Modells mit den beobachteten empirischen Daten möglichst gut übereinstimmen. Dafür werden wir drei verschiedene Ansätze kennenlernen. Die beiden ersten Methoden sind die Kalibrierung und die Klasse der Verfahren begrenzter Information. Danach wollen wir uns der Klasse der vollständigen Informationsschätzung zuwenden.

[6]Siehe Abschnitt 2.2.3.

2.2.1 Kalibrierung

Für eine Kalibrierung der Parameter betrachtet man steady-state Eigenschaften des Models, z.B. langfristige Durchschnitte wie Lohneinkommen, Arbeitszeit, Zinsen, Staatsausgaben, und ändert die Parameter so lange ab, bis ein möglichst exakter Einklang mit den beobachteten Daten herrscht. Dabei kann man manche Parameter aus Erfahrung auf einen bestimmten Wert setzen[7], doch bei den meisten ist ein Ausprobieren nötig, bis man zufriedenstellende Ergebnisse hat.

Diskussion: Die Kalibrierung ist ein guter Ansatz zum Lernen und Analysieren, wie das Modell auf die Änderungen einzelner Parameter reagiert. Man kann gut quantitative Fragen des strukturellen Modells klären, wie z.B.: Wie reagiert die Wirtschaft, wenn die Zentralbank ihre Ausrichtung der Geldpolitik ändert? Was passiert, wenn die Firmen eine größere Marktmacht besitzen? Eine gute Kalibrierung lässt ein genaues Abbilden der Daten zu, wenn man es schafft, die perfekten Parameterwerte zu finden. Doch die Kalibrierung braucht sehr viel Zeit, insbesondere wenn viele Parameter zu bestimmen sind oder man überhaupt keine Ansatzpunkte hat, in welchem Bereich der Parameter liegen könnte. Viele Parameter lassen einen Spielraum und können unterschiedlich kalibriert werden, so dass unterschiedliche Interpretationen möglich sind. Da sie somit auf Probieren und subjektivem Gefühl beruht und damit die Ergebnisse für Dritte unter Umständen nicht nachvollziehbar sind, wollen wir jetzt auch Möglchkeiten nennen, die ein objektives statistisches Vorgehen ermöglichen.

2.2.2 Verfahren begrenzter Information

Nach der Kalibrierung wollen wir nun die Klasse der Verfahren begrenzter Information vorstellen, welche zu den statistischen Schätzern gehört. Wir möchten die Daten nutzen, um den Wert der Parameter statistisch zu ermitteln. Wenn man einen Parameter eines DSGE-Modells schätzen möchte, muss man ein paar Dinge beachten. Und zwar sollte man die Nichtlinearität des Modells, die rationalen Erwatungen, die stochastischen Prozesse, usw. in die Schätzung einfließen lassen, um ein möglichst gutes Ergebnis zu erhalten. Die Verfahren heißen von begrenzter Information, da nur einige ausgewählte Momente, die dann möglichst gut an die Daten angepasst werden, betrachtet werden.

General Method of Moments (GMM): Beim *GMM-Verfahren* ([2]) wird unser DSGE-Modell in Form von Orthogonalitätsbedingungen in Abhängigkeit unseres wahren zu schätzenden Parametervektors μ aufgestellt und besitzt die Form

$$m(\mu) := E\left[g(\mu, Z_t)\right] = 0,$$

wobei g eine vektorwertige Funktion sei, die in den r-dimensionalen Raum abbildet und Z_t[8]$= (w_t^*, u_t^*)^*$ aus zwei Matrizen bestehe, w_t sei eine Matrix von erklärenden

[7] Der mark-up λ_p wird z.B. oft als 1.15 angenommen.

[8] Der hochgestellte Stern bedeutet bei uns, dass der Vektor oder die Matrix transponiert und komplex konjugiert worden ist. Im rellen Fall ist dies gleichbedeutend damit, dass man nur transponiert hat.

Variablen, u_t sei eine Matrix von Instrumentenvariablen. Den Erwartungswert ersetzen wir nun durch das empirische Mittel $\hat{E}$ und erhalten somit $\hat{m}(\mu) := \hat{E}[g(\mu, Z_t)] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} g(\mu, Z_t)$. Aus dem Gesetz der großen Zahlen folgt, dass wir für große T annehmen können, dass $\hat{m}(\mu) \approx m(\mu) = 0$ gilt. Unsere Aufgabe ist es $\hat{m}(\mu)$ Null oder möglichst nahe Null werden zu lassen. Dazu definieren wir einen Norm und versuchen die Norm zu minimieren. Sie hat mit einer Gewichtungsmatrix W die Form

$$\|\hat{m}(\mu)\|_W^2 = \hat{m}(\mu)^* \cdot W \cdot \hat{m}(\mu).$$

Daraus folgt die Minimierungsaufgabe

$$\mu_{GMM} = \min_{\mu} \left[\frac{1}{T} \left(\sum_{t=0}^{T} g(y_t, \mu) \right)^* \cdot W \cdot \left(\sum_{t=0}^{T} g(y_t, \mu) \right) \right]$$

Die Anzahl der Orthogonalitätsbedinungen r muss für eine eindeutige Lösung exakt der Anzahl der Parameter entsprechen. Sollte r kleiner sein, gibt es keine Lösung und man muss mehr Bedingungen schaffen. Bei einem größeren r erhält man unendlich viele Lösungen und man kann durch einen J-Test überpüfen, ob der die Lösung für das Modell abgelehnt werden sollte.

Indirekte Inferenz: Die *indirekte Inferenz* ([1], [8]) ist eine Methode, die die Schätzung der Parameter auf Basis einer Simulation der Daten durchführt. Es wird ein Hilfsmodell eingeführt, welches entweder möglichst nahe am Originalmodell liegt oder aber einzelne Aspekte des Hauptmodells, die man näher untersuchen möchte, betont. Bei unserem DSGE-Modell ist es natürlich für das Hilfsmodell ein VAR(1)-Modell zu nutzen. Dieses besitzt natürlich ebenfalls einen Parametervektor θ. Die Anzahl der Parameter sollte mindestens so groß sein wie beim Hauptmodell. Sie können nun mittels Likelihood für die beobachteten Daten geschätzt werden, da das Hilfsmodell so gewählt worden ist, dass es analytisch für Likelihood brauchbar ist. Zusätzlich simuliert man mit dem Hauptmodell iterativ Daten bezüglich eines Parametervektors μ. Mit diesen Daten wird nun nochmals im Hilfsmodell der Parameteretkor θ_μ geschätzt. Ziel ist es nun, μ so zu wählen, dass θ möglichst nahe mit θ_μ übereinstimmt. Dazu wird eine Metrik mit einer Gewichtungsmatrix V definiert, die minimiert wird:

$$\mu_{II} = \min_{\mu} [(\theta - \theta(\mu))^* \cdot V \cdot (\theta - \theta(\mu))]$$

Eine zweite Möglichkeit ist es, Impuls-Antwort-Funktionen zu benutzen. Die Metrik ändert sich dadurch nicht, es werden nur die Impuls-Antwort-Funktion des VAR-Modells mit den wahren Daten und die Antworten des VAR-Modells mit den simulierten Daten eingesetzt. Beim Fall von unendlich vielen Lösungen kann wieder ein J-Test die Lösung für das Modell annehmen doer ablehnen.

Diskussion: Diese Verfahren eignen sich sehr gut für Modelle, für die die Likelihood nur sehr schwer oder gar nicht berechen- oder auswertbar ist. Man benötigt nur wenige

Annahmen, da sich auf wenige Momente beschränkt wird. Man braucht also keine Verteilung zu kennen. Beim GMM-Verfahren ist es zusätzlich nützlich, dass man die explizite Lösung des Modells, im Gegensatz zur indirekten Inferenz, nicht benötigt, jedoch ist die Wahl der Orthogonalitätsbedingungen und die Erstellung der Gewichtungsmatrix für die Norm komplex und ein Forschungszweig für sich. Sowohl für indirekte Inferenz als auch GMM-Verfahren lassen sich asymptotische Eigenschaften beweisen. Bei Simulationen hat sich jedoch gezeigt, dass diese Eigenschaften erst für sehr große Zeitreihen von mindestens 300 Zeitpunkten einstellen. Eine solche Datenmenge ist für unsere Neuzeit allerdings nicht verfügbar.

2.2.3 Vollständige Informationsschätzung

Wir möchten uns nun nicht mehr auf wenige Momente beschränken, sondern wollen alle uns zur Verfügung stehenden Informationen der Daten verwerten und für die Schätzung nutzen. Dazu betrachten wir das Modell in einer Gleichung, die den neuen Zustand mit dem alten und stochastischen Einwirkungen in Verbindung bringt.

$$x_t = F(\mu)x_{t-1} + G(\mu)\nu_t.$$

Desweiteren betrachten wir eine Gleichung für unsere Datenmessung mit Messfehlern:

$$X_t = H(\mu)^* x_t + e_t.$$

Wenn wir nun Annahmen über die Verteilung von ν_t und e_t treffen, können wir die *Log-Likelihood* $\log \mathcal{L}(X|\mu)$ herleiten. Im nichtlinearen Fall, oder wenn die Zufallsvariablen nicht normalverteilt sind, können wir dazu einen *Partikel-Filter* benutzen. Bei Linearität und Normalverteilung kommt der Kalman-Filter zum Einsatz.

Kalman-Filter Der *Kalman-Filter* ist eine Sammlung von Gleichungen, mit deren Hilfe man unter oben stehenden Voraussetzungen die Log-Likelihood berechnen kann. Die Gleichungen stellen einen Algorithmus dar, mit denen man Matrizen Ω_t für alle $t \in [1, T]$ berechnet. Mit diesen Matrizen und der Annahme der Normalverteilung der Prognosefehler u_t lässt sich die Log-Likelihood aufstellen:

$$\begin{aligned}
\log \mathcal{L}(X|\mu) &= \sum_{t=1}^{T} \log \mathcal{L}(X_t|\mu) \\
&= -\frac{nT}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\log(|\Omega_t|) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} u_t^* \Omega^{-1} u_t.
\end{aligned}$$

Auf eine Herleitung möchten wir hier verzichten und verweisen auf [4].

Maximum-Likelihood Wir nehmen an, dass der Prameterverktor μ fest ist und der Datenvektor sei einer unter vielen Realisationen von Datenvektoren. Wir ermitteln die Likelihood und maximieren diese für μ.

$$\mu_{ML} = \max_{\mu}\left[\sum_{t=1}^{T} \log \mathcal{L}(X_t|\mu)\right] \tag{43}$$

Unter besimmten Voraussetzungen kann gezeigt werden, dass der Schätzer asympotisch normalverteilt, effizient sowie konsistent ist. Jede Realisation der Daten führt auf einen anderen Parametervektor, der die Likelihood maximiert. Die Dimension von X_t muss mindesnens so groß sein wie die Dimension der strukturellen Schocks ν_t.

Bayesianische Schätzung Es kann sehr schwer sein, die Likelihood zu maximieren, da oftmals Daten nicht genug Informationen enthalten und dann die Likehood sehr flach ist und nur schwer das Maximum zu finden ist. Wir betrachten nun den Parametervektor als eine Zufallsvariable und die Daten sind fest. Grundgedanke ist es, zu den bekannten Daten noch Annahmen über die Verteilung der Parameter hinzuzufügen, sogenannte Priors, und somit Aussagen über die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Parameter zu ermöglichen. So kann man den Bereich verstärken, in dem man den Parameter vermutet. Somit bildet die Bayesianische Schätzung eine Brücke zwischen Kalibrierung und Maximum-Likelihood. Die Likelihood wird dabei als die auf die Parameter bedingte Dichte der Daten, die man beobachtet hat, angesehen: $\mathcal{L}(X|\mu) = \rho(X|\mu)$. Wenn $\rho(\mu)$ die bekannte Priori-Verteilung der Parameter ist, so folgt aus dem Satz von Bayes

$$\rho(\mu|X) = \frac{\mathcal{L}(X|\mu)\rho(\mu)}{\rho(X)} = \frac{\mathcal{L}(X|\mu)\rho(\mu)}{\int \rho(\mu)\mathcal{L}(X|\mu)d\mu} \propto \mathcal{L}(X|\mu)\rho(\mu).$$

Die Proportionalität ergibt sich, da das Integal im Nenner nur eine Konstante ist, die dafür sorgt, dass sich die Dichte zu Eins integriert und somit die Defintion einer Wahrscheinlichkeitsdichte erfüllt. Man bezeichnet $\rho(X)$ als *marginale Likelihood*. Die ohne diese Konsante nicht normalisierte Dichte $L(X|\mu)\rho(\mu)$ heißt *Posterior-Kernel*. Als Schätzer nimmt man den Modus:

$$\mu_B = \max_{\mu}[\log \rho(\mu|X)] = \max_{\mu}[\log \mathcal{L}(X|\mu) + \log \rho(\mu)]$$

Das konkrete Vorgehen wollen wir hier nicht ausführen. Es sei so viel gesagt, dass die Likelohood mittels Kalman- oder Partikelfilter hergeleitet und der Posterior-Kernel mit Monte-Carlo-Methoden simuliert wird. Dazu findet oftmals der *Metropolis-Hastings-Algorithmus* ([3], [5]) Verwendung. In die Wahl der Priori-Verteilungen fließen Überlegungen wie Grenzen ein. Das Ergebnis kann stark von dieser Vorwahl abhängen, so dass man zur Festigung der Ergebnisse oftmals allgemeinere Priori-Dichten verwendet und überprüft, ob das gleiche Ergebnis erreicht wird. Die Methode verlangt ausdrücklich, dass die Zahl der Parameter mit der Zahl der stochastischen Schocks übereinstimmen muss.

Die Bayesianische Schätzung verknüpft somit alle Informationen der Daten und Überlegungen und bestizt den Vorteil, dass die in jedem Beobachtungszeitraum funktioniert. Jedoch hat auch sie asymptotische Eigenschaften, welche erst mit größerer Datenlage eintreten. Mit der gewonnen Posteriori-Verteilung können wir nun weitere statistische Dinge machen. Wir können Bayesianische Konfidenzintervalle aufstellen, Prognosen und Modellvergleiche durchführen.

Diskussion: Im Gegensatz zu den Verfahren begrenzter Information müssen engere Annahmen, z.B. über die Verteilung der Schocks, getroffen werden. Die Vorteile der Maximum-Likelihood-Methode sind die komplette Spezifikation des Vorgangs, der die Daten hervorbringt und somit in einer genaueren, effizienteren und konsistenteren Schätzung der Parameter. Jedoch kann man absurde Parameter erhalten, wenn man falsche Verteilungsannahmen trifft oder nicht seperierbar Parameter hat. Dann muss man einen kalibrieren, um ein Ergebnis zu erhalten. Bei einer flachen Likelihood kann man nicht viel machen, um die Suche nch dem Maximum zu erleichtern. Die Nachteile versucht die Bayesianische Schätzung zu verhindern, indem sie Priors berücksichtigt. Durch die Priors lassen sich offensichtlich falsche Parameter ausschließen. Es bleibt allerdings ein Nachteil, dass für zwei unterschiedliche Parametervektoren μ_1 und μ_2 gelten kann, dass $\mathcal{L}(X|\mu_1) = \mathcal{L}(X|\mu_2)$ ist und somit nicht sofort ersichtlich ist, welcher Parametervektor die Daten generiert hat.

2.3 Modellanalyse

In diesem letzten Abschnitt wollen wir uns für zwei ausgewählte Schocks die Impuls-Antworten ansehen, welche man erhält, nachdem man alle Parameter geschätzt hat und den jeweiligen Schock als Impuls setzt. Wir wollen einen positiven Arbeitsangebotsschock sowie einen negativen Invesitionskostenschock betrachten. Und zwar einmal im hergeleiteten Modell mit Preis- und Lohnrigiditäten und einmal im gleichen Modell mit völlig flexiblen Preisen und Löhnen, um etwaige Unterschiede festzustellen. Wir betrachten dabei die Änderungen vom Gleichgewicht.

Positiver Arbeitsangebotsschock: In Abbildung 1 werden die Auswirkungen eines positiven Arbeitsangebotsschocks im DSGE-Modell dargestellt. Natürlich steigt das Arbeitsangebot an und auch die Beschäftigung entwickelt sich simultan mit. Der Output nimmt zu und sowohl Konsum als auch die Investitionen steigen an, wobei bei den Investitionen der Anstieg erst langsam und dann schneller verläuft. Der Verleihzins für das Kapital erfährt nur ein leichtes Absinken. Der Lohn und die Preise fallen deutlich und damit sinkt auch die Inflation ab. Der Lohn hat Auswirkungen auf die Kosten der Produktion, so dass die Grenzkosten sinken. Der reale Zins fällt zuerst drastisch ab, später aber nicht mehr so stark. Die Utilisationsrate des Kapitals sinkt leicht ab.

Positiver Arbeitsangebotsschock bei flexiblen Preisen und Löhnen: Im Fall völlig flexibler Löhne und Preise sieht das Bild ähnlich aus, aber ein paar wenige Unterschiede sind in Abbildung 2 zu erkennen. Zuerst sei angemerkt, dass die Geldpolitik in diesem

Fall neutral ist und es wird angenommen, dass sie die Preise und die Inflation stabilisiert und konstant hält. Es ist zu erkennen, dass die meisten Auswirkungen vom Vorzeichen her identisch wie in Abbildung 1 sind, jedoch fällt auf, dass sich die Effekte in anderen Größenordnungen abspielen und im Zeitraum sehr viel schneller sind. Sowohl Arbeitsangebot, Beschägtigung, Konsum, Investitionen als auch Output steigen sehr viel stärker an und sprunghaft sofort nach dem Schock. Die Grenzkosten dagegen sinken in einem Größenbereich, der vernachlässigbar ist. Die größten Unterschiede sind bei der Lohn- und Verleihzinsentwicklung zu sehen. Die Löhne sinken sehr viel weniger stark und der Verleihzins steigt nun zuerst an, ehe er später wieder sinkt. Beim realen Zins ist der negative Schock sehr viel ausgeprägter, aber er fängt sich auch wieder sehr viel schneller.

Negativer Investitionskostenschock: Bei einem negativen Schock der Anpassungskosten der Investitionen ergeben sich die Daten aus Abbildung 3. Man erkennt, dass die Investitionen auf Kosten des Konsum steigen. Es ändert sich also die Aufteilung bei den Ausgaben der Haushalte. Die Ausgaben werden umverteilt. Der Output wird stimuliert wie auch das Arbeitsangebot und die Beschäftigung, allerdings bei weitem nicht so stark wie das der positive Arbeitsangebotsschock konnte. Grenzkosten, Preise und Inflation bleiben ungefähr konstant. Der Realzins steigt an und die Utilisation des Kapitals sinkt. Der Verleihzins steigt zuerst minimal an, fällt dann aber deutlich ab, wohingegen der Lohn zuerst sinkt, aber den Abwärtstrend am Ende des Beobachtungszeitraums gestoppt hat.

Negativer Investitionskostenschock bei flexiblen Preisen und Löhnen: Als letztes wollen wir den gleichen Schock im Alternativmodell betrachten. Auch hier findet eine Umverteilung der Ausgaben statt, indem die Investitionen ansteigen und der Konsum abfällt. Der Abfall des Konsums fällt aber nicht so stark aus, wohingegen die Investitionen sehr viel stärker ansteigen. Beim Realzins ist zu beobachten, dass er zunächst rapide absinkt, doch schnell wieder in die Wachstumszone findet. Das Arbeitsangebot steigt etwas mehr an als die Beschäftigung. Lohn und Verleihzins führen die gleichen Bewegungen wie eben aus, allerdings sind die Veränderungen des Lohnes sehr viel geringer und die Ausschläge des Verleihzinses sehr viel größer. Die Kapitalutilisation sinkt etwas stärker ab als im Modell mit Rigiditäten.

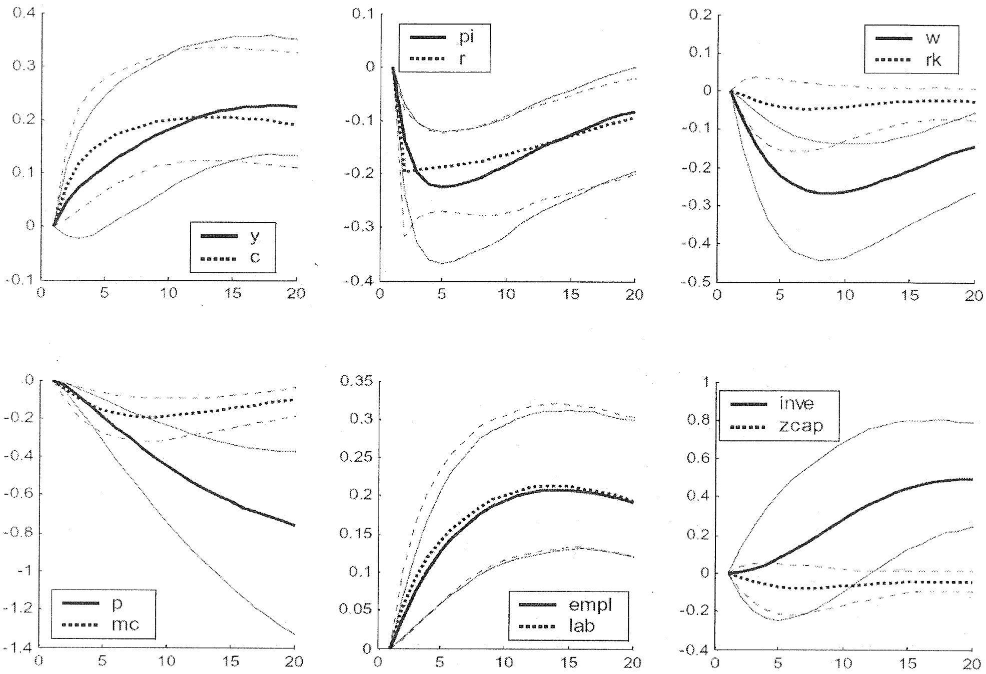

Abbildung 1: Positiver Arbeitsangebotsschock

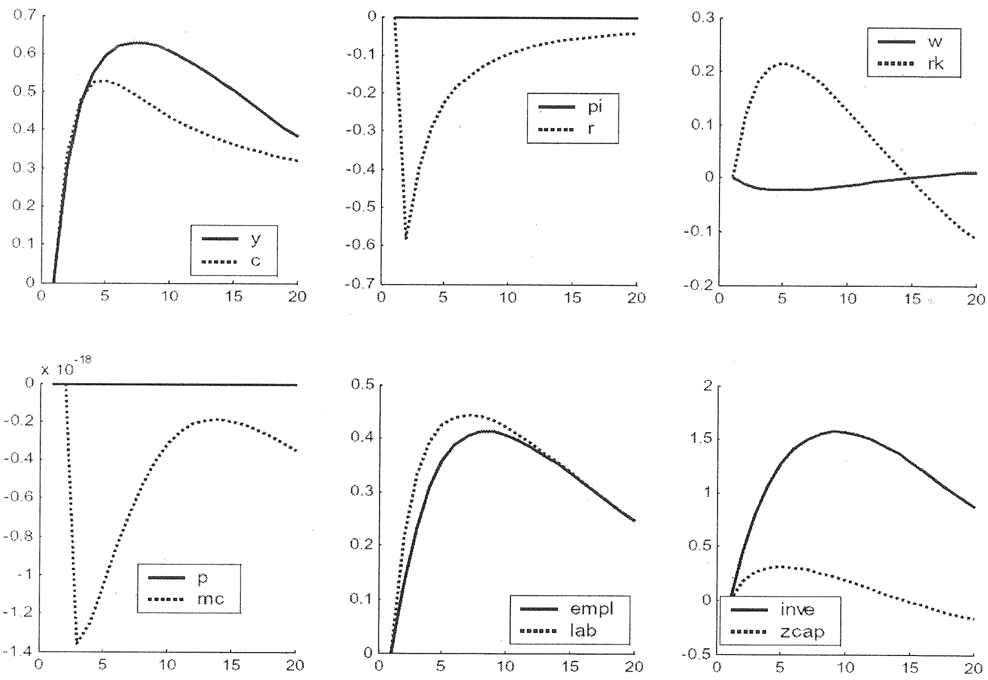

Abbildung 2: Positiver Arbeitsangebotsschock bei flexiblen Preisen und Löhnen

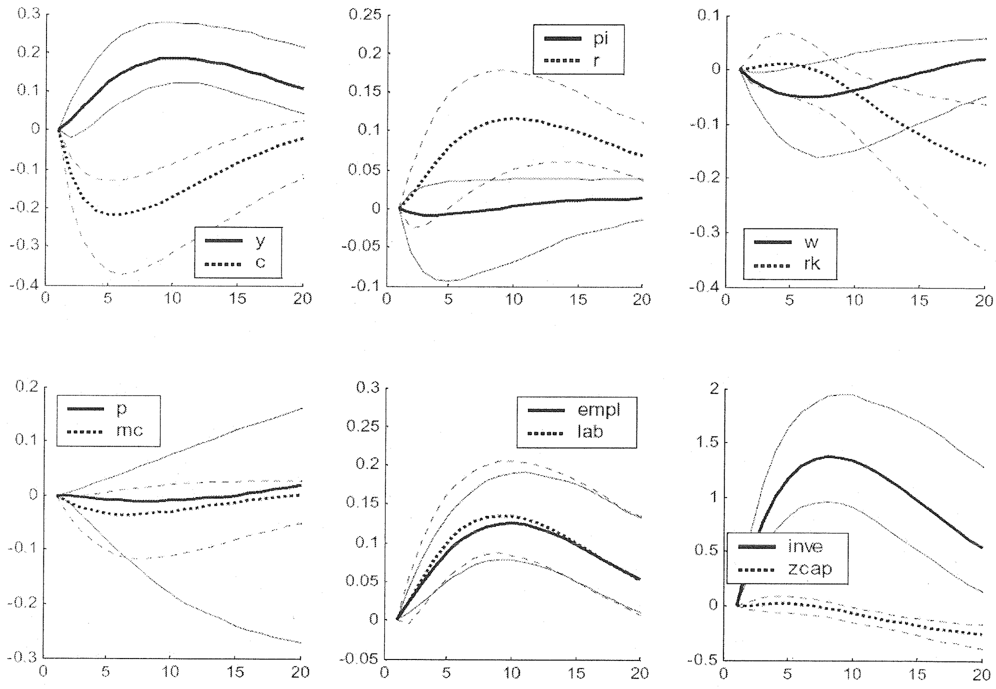

Abbildung 3: Negativer Investitionskostenschock

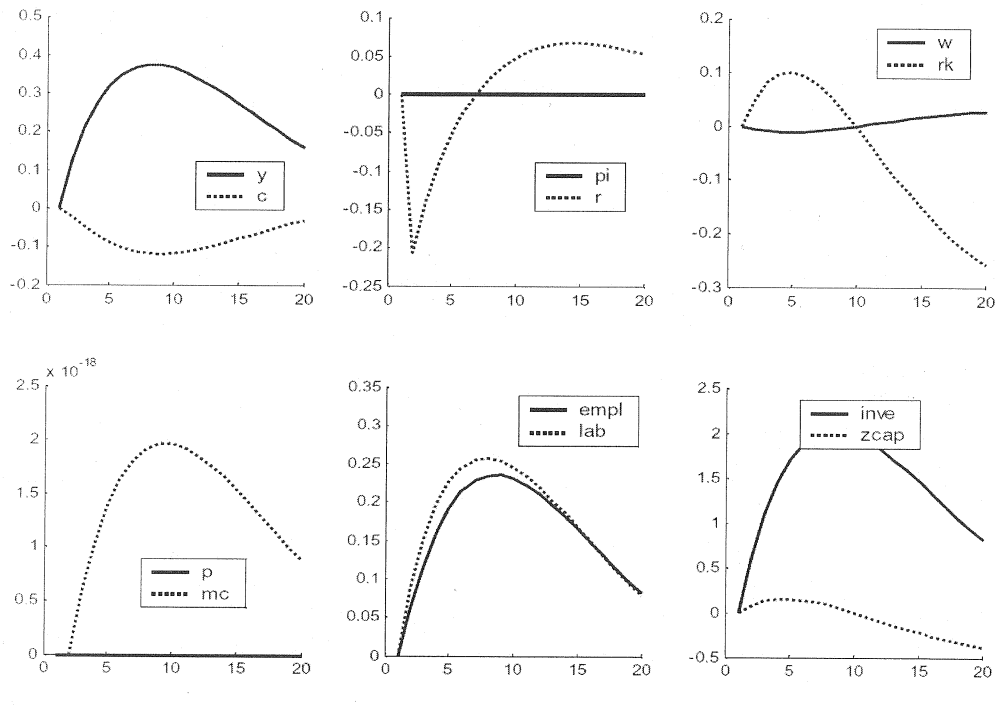

Abbildung 4: Negativer Investitionskostenschock bei flexiblen Preisen und Löhnen

Literatur

[1] Gouriéroux, C., Monfort, A. und Renault, E.: „Indirect Inference.“
Journal of Applied Econometrics ***8*** *(S1): S85–S118., 1993.*

[2] Hansen, L. P.: „Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators.“
Econometrica ***50*** *(4): 1029-1054, 1982.*

[3] Hastings, W. K.: „Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and Their Applications.“
Biometrika ***57*** *(1): 97–109, 1970.*

[4] Kálmán, R. E.: „A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems.“
Transaction of the ASME, Journal of Basic Engineering ***82*** *(D): 35-45, 1960.*
Abgerufen von: http://www.cs.unc.edu/ welch/kalman/media/pdf/Kalman1960.pdf.

[5] Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H und Teller, E.: „Equations of State Calculations by Fast Computing Machines.“
Journal of Chemical Physics ***21*** *(6): 1087–1092, 1953.*

[6] Sims, C. A.: „Solving Linear Rational Expectations Models.“
Department of Economics, Yale University, 2000.
Abgerufen von: http://sims.princeton.edu/yftp/gensys/LINRE3A.pdf.

[7] Smets, F. und Wouters, R.: „An Estimated Stochastic Dynamic General Equilibrium Model of The Euro Area.“
European Central Bank Working Paper Series ***171****: August 2002.*
Published in: Journal of European Economic Association ***1*** *(5), 1123-1175, 2003.*

[8] Smith, Jr., A. A.: „Estimating Nonlinear Time–series Models Using Simulated Vector Autoregressions.“
Journal of Applied Econometrics ***8*** *(S1): S63–S84, 1993.*

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versiche ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Hilfe anderer als der angegebenen Quellen angefertigt habe.

Ulrich Hartleif

Münster, am 31. August 2012