中国科学院大学·人工智能学院·本科生专业课

博弈论

上课时间：每周一晚上18:10-19:50

上课地点：玉泉路校区 教学楼阶一1

授课团队：兴军亮（教师）、徐航（助教）

上一讲内容回顾：完全信息动态博弈

- **博弈树、动态特性**
- **博弈表示及转换**
- **均衡的“精练”**
- **子博弈精练纳什均衡**

知识点

能力线

- **问题的相互转换能力**：问题的表示及求解
- **“数学家”思维方式**：尝试将未知问题转为能够解决的问题

- **完全信息动态博弈**：如何临机决断？

① 往前看到所有可能

② 考虑对手选择策略

价值面

第四讲：不完全信息静态博弈

兴军亮

授课时间：2024年3月18日

联系方式：jlxing@nlpr.ia.ac.cn

第四讲 不完全信息静态博弈

内容提纲

1. 贝叶斯博弈类型引入
2. 博弈类型定义及表示
3. 博弈均衡分析与求解
4. 贝叶斯博弈示例讲解

第四讲 不完全信息静态博弈

内容提纲

回顾：常见的博弈类型

信息 \ 行动次序	静态	动态
完全信息	完全信息静态博弈 纳什均衡	完全信息动态博弈 子博弈精练纳什均衡
不完全信息	不完全信息静态博弈 贝叶斯均衡	不完全信息动态博弈 精炼贝叶斯均衡

⇩

重复博弈
Repeated Games

⇨

随机博弈
Stochastic Game

回顾：完全信息静态博弈的纳什均衡

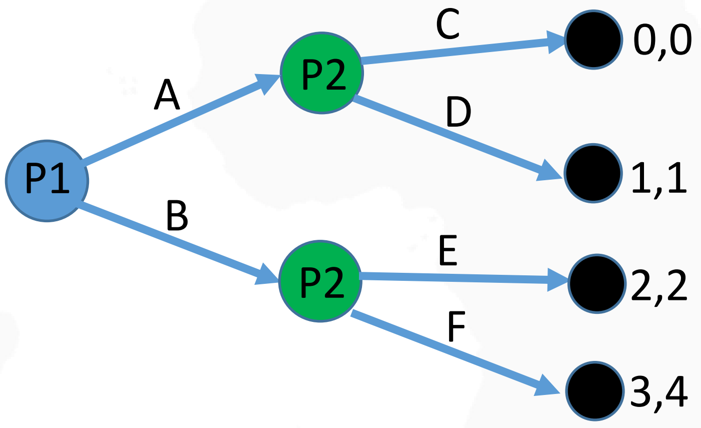
- 固定一方的策略，求取另一方的最优反应，最优反应的交集就是纯策略纳什均衡

囚徒B 囚徒A	坦白	抵赖
坦白	2,2	0,3
抵赖	3,0	1,1

0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	-1,1	-1,1
0,0	1,-1	0,0	-1,1
0,0	1,-1	1,-1	0,0

回顾：完全信息动态博弈的纳什均衡

- 完全信息动态博弈一般用扩展式表示
  - 扩展式表示可以转化为矩阵式表示
  - 然后用前面的方法求纳什均衡



扩展式表示

S_1 ={A,B}

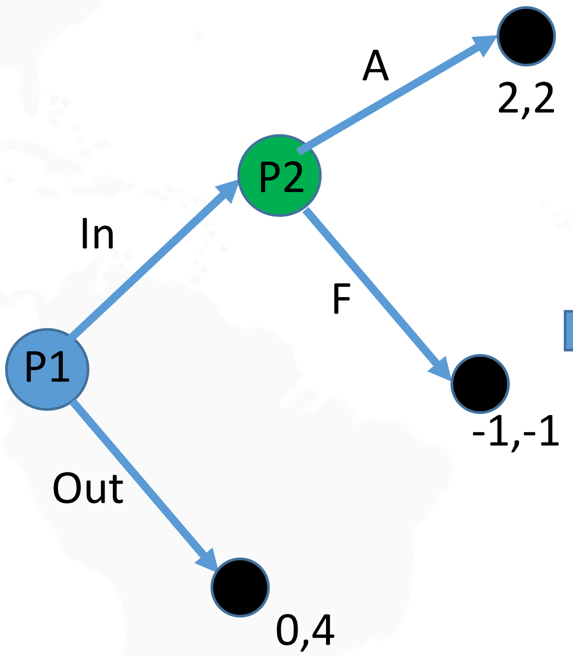
S_2 ={CE, CF, DE, DF}

	CE	CF	DE	DF
A	0,0	0,0	1,1	1,1
B	2,2	3,4	2,2	3,4

矩阵式表示

回顾：完全信息动态博弈的纳什均衡

- 需要剔除不合理的解



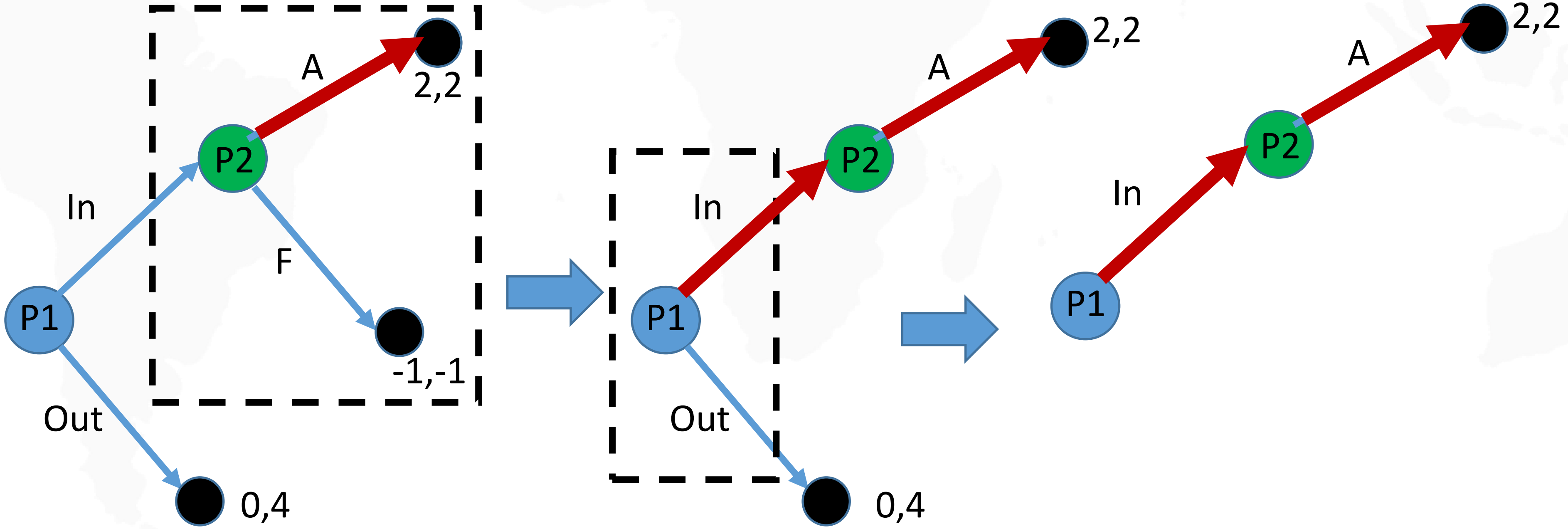
	A	F
In	2,2	-1,-1
Out	0,4	0,4

这两个纳什均衡都合理吗？

Out/F不合理

回顾：完全信息动态博弈的纳什均衡

- 子博弈精炼纳什均衡（ Subgame Perfect Equilibrium ）
  - 子博弈可以粗略看作是博弈树的一棵子树
  - 每个子博弈都要满足纳什均衡条件
- 用逆向归纳法（Backward Induction）求解
  - 反方向不断求取各玩家的最优策略



不完全信息博弈的引入

- 现实世界中很多实际问题中博弈参与人存在私有信息，这种信息不完全对于博弈的均衡分析带来极大挑战。
- 不完全信息博弈：对于一个博弈，至少有一个参与人有关于该博弈支付/偏好方面的私有信息（private information），而其他人没有该信息，私有信息也可以看做是参与人的类型（type）。
- 一些常见博弈中的私有信息示例如：

和陌生人接触对方的喜好
购买商品商家的心理底价
进入市场已有企业的成本

- 这种私有信息的存在使得关于博弈的**损益函数**并不是所有参与人的共同知识（common knowledge）。

不完全信息静态博弈举例

- 当静态博弈中存在不完全信息，就是我们这一讲要讲的不完全信息博弈。实际中的例子包括：二手车市场的交易博弈、大国间的单轮贸易谈判博弈、旅游景点的商品买卖博弈等。

不完全信息博弈的引入

- 不完全信息下市场进入阻挠博弈
  - 占有者有两种类型：低成本和高成本，动作：默许、斗争。
    - 占有者自己知道自己的类型
  - 进入者不知道占有者的类型，动作：进入、不进入
    - 进入者只有一个类型
  - 两种情况对应的不同策略组合的支付矩阵如下所示：

占有者 / 进入者	高成本情况		低成本情况	
	默许	斗争	默许	斗争
进入	40, 50	-10, 0	30, 80	-10, 100
不进入	0, 300	0, 300	0, 400	0, 400

不完全信息博弈的引入

- 因为进入者不知道在位者究竟是高成本还是低沉本
  - 进入者的最优选择依赖它在多大程度上认为在位者是高成本或低成本的。
- 假定进入者认为占有者是高成本的概率为p，低成本的概率为$1-p$，那么进入者选择进入的期望利润是 $40p+(1-p)(-10)$，选择不进入的期望收益是0，令$40p+(1-p)(-10)=0$，得到$p=0.2$。
- 结果：$p>=0.2$，进入；$p<0.2$，不进入；

占有者 \ 进入者	高成本情况		低成本情况	
	默许	斗争	默许	斗争
进入	40, 50	-10, 0	30, 80	-10, 100
不进入	0, 300	0, 300	0, 400	0, 400

完全信息和完美信息之间的比较

- 完全信息：对所有局中人的损益函数（payoffs）都完全了解；
- 完美信息：对所有局中人已有行动（actions）完全把握。
- 再次举例进行说明：
  - 完全并且完美信息博弈：
  - 完全但不完美信息博弈：
  - 不完全但完美信息博弈：
  - 不完全不完美信息博弈：

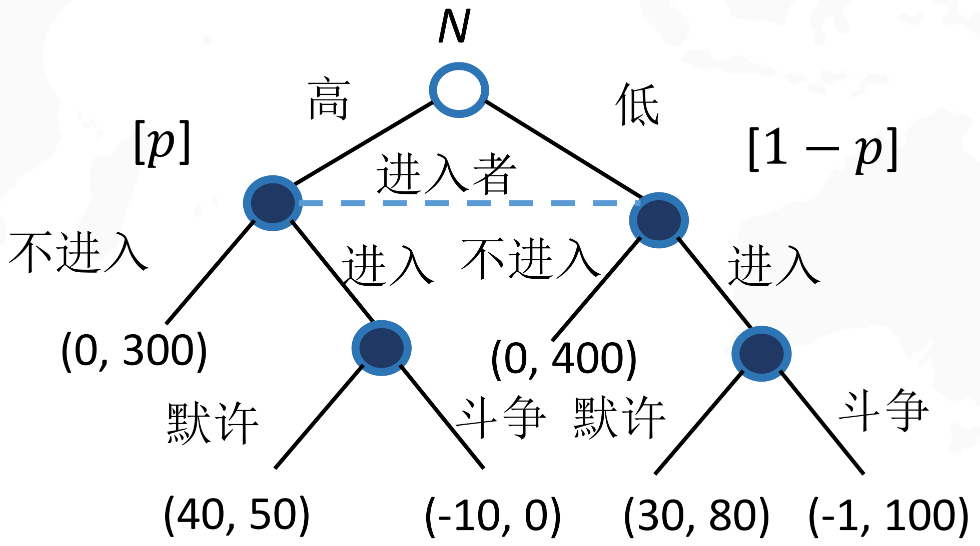
- 任何不完全信息博弈均可以从术语上转换成一个完全不完美信息博弈，只需要简单地将“自然”引入作为一个局中人且支付函数受制于自然的未知发展（即自然的选择不可观察）。

完全信息和完美信息之间的比较

- 海萨尼（Harsanyi）转换：将不完全信息博弈转换为完全不完美信息博弈
  - 方法：通过引入一个虚拟的参与人——“自然”（Nature），来对博弈中的相关局中人的不确定性因素进行“行动”，得到其确定性结果（特征，type），然后告知相关局中人，使得博弈继续分析下去。
- 不完全信息下市场进入阻挠博弈进行海萨尼转换：将不完全信息博弈转化为完全信息不完美博弈
- 海萨尼转换的条件：海萨尼公理

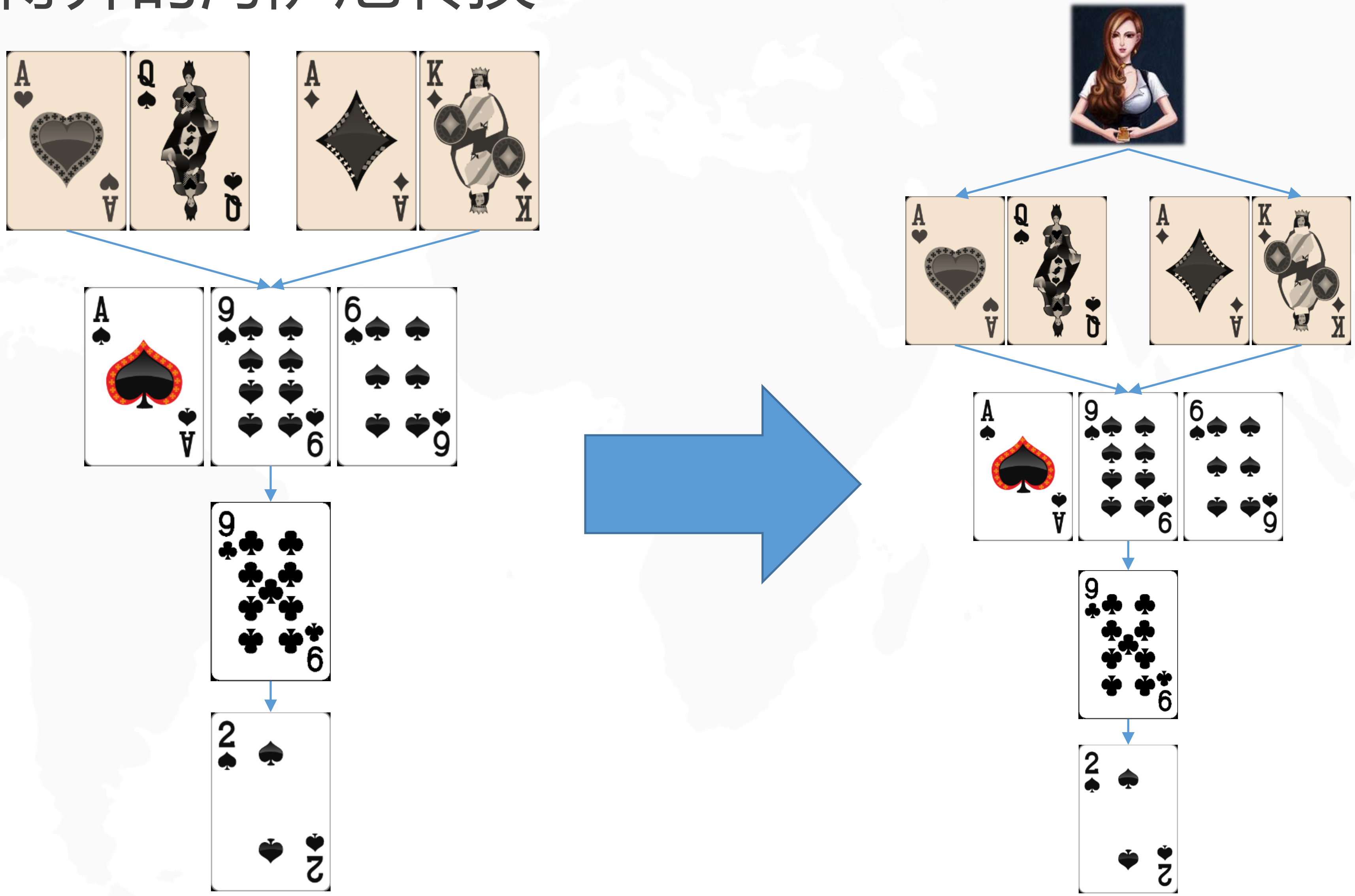
海萨尼公理

关于博弈参与人的类型分布函数$p(\theta_1,\cdots,\theta_n)$是所有参与人的共同知识。



完全信息和完美信息之间的比较

- 德州扑克博弈的海萨尼转换



第四讲 不完全信息静态博弈

内容提纲

不完全信息静态博弈形式化定义

- 不完全信息博弈的分类和特点

不完全信息静态博弈

- 别名：静态贝叶斯博弈
- 定义与表示：同时、策略式、类型
- 示例与分析：竞争、拍卖等
- 均衡与求解：贝叶斯纳什均衡

不完全信息动态博弈

- 别名：动态贝叶斯博弈
- 定义与表示：顺序、展开式、类型
- 示例与分析：扑克、多轮谈判等
- 均衡与求解：精炼贝叶斯均衡

不完全信息静态博弈形式化定义

不完全信息静态博弈

不完全信息静态博弈的策略型表示是一个多元组

$\Gamma =< N,(\Theta_i),(S_i(\theta_i)),(p_i),(u_i) >$，其中：

- $N = \{1,2,\ldots,n\}$是参与人集合。
- Θ_i是参与人i 的类型集，$\theta_i \in \Theta_i$为一个具体的类型。
- $S_i(\theta_i)$是参与人i的纯策略集（或称为行动集）
  - 参与人i的动作集是和类型有关的，$s_i(\theta_i)$表示一个特定动作
- 信念函数（belief function）p_i是一个从Θ_i映入$\Delta(\Theta_{-i})$的映射，其中$\Delta(\Theta_{-i})$是Θ_{-i}上的概率分布集。也就是说对任何可能的类型$\theta_i \in \Theta_i$，信念函数p_i都在集合Θ_{-i}上为其指定了一个概率分布$p_i(\cdot|\theta_i)$，其中$p_i(\cdot|\theta_i)$是指当参与人i 的自身类型为θ_i时它对其他参与人类型的信念。
- 收益u_i: $\Theta_1 \times \cdots \times \Theta_n \times S_1(\theta_1) \times \cdots \times S_n(\theta_n) \to \mathbb{R}$，对参与人的每个类型组与每个纯策略组指定了参与人$i$能得到的收益。

不完全信息静态博弈形式化定义

- 静态贝叶斯博弈的等价执行时间顺序

1. **自然赋予博弈各方类型向量** $\boldsymbol{\Theta} = \{\boldsymbol{\theta}_1,\ldots,\boldsymbol{\theta}_n\}$

2. **自然告知每一个参与者i应知的相关类型：i 只确定自己的类型** $\boldsymbol{\theta}_i$**，同时知道** $p_i(\theta_{-i}|\theta_i)$

3. **参与者同时选择动作** $s_i(\boldsymbol{\theta}_i) \in S_i(\boldsymbol{\theta}_i)$

4. **每一个参与者 i 得到收益** $u_i = \{s_1, \ldots s_i, \ldots, s_n | \theta_1, \ldots \theta_i, \ldots \theta_n\}$

不完全信息静态博弈形式化定义

- 上述定义和表示的一些特例分析
  - 参与人i可能预先知道具有某些参与人类型信息，比如知道参与人j类型信息θ_j, 这种情况下，参与人对于剩下的参与人的类型信息估计变为：$p_i\left(\theta_{-\{ij\}}\middle|\theta_i,\theta_j\right)$。
  - 如果所有参与人的类型空间只包含一个元素，那么不完全信息静态博弈就退化为完全信息静态博弈。
  - 如果所有参与人的类型是完全相关的，即当参与人i观测到自己的类型也就知道了其他参与人的类型，博弈也退化为完全信息静态博弈了。

研究不完全信息静态博弈的前提假设

每个参与人i知道如上定义的整个博弈结构。

每个参与人i知道他自己的类型$\theta_i \in \Theta_i$。

上面的事实对于每个参与人都是共同知识。

参与人i的真实类型不为其他参与人所知，尽管他们知道参与人i为各个类型的概率有多大。即p_i也是共同知识。

不完全信息静态博弈的贝叶斯表示

- 海萨尼：使用贝叶斯博弈来描述不完全信息博弈

信念一致性

对于参与人的信念$(p_i)_{i\in N}$，如果参与人的类型组（type profiles）集合Θ上存在着某个共同先验分布，使得每个参与人（在给定他自己类型的前提下）关于其他参与人类型的信念正好能从上述先验分布计算出的条件概率分布，那么我们说信念$(p_i)_{i\in N}$是一致的（consistent）。

- 判断方法：对于有限博弈若存在某个概率分布$\mathbb{P}\in\Delta(\Theta)$，使得：

$$p_i(\theta_{-i}|\theta_i)=\frac{\mathbb{P}(\theta_i,\theta_{-i})}{\sum_{t_{-i}\in\Theta_{-i}}\mathbb{P}(\theta_i,t_{-i})}\quad \forall\theta_i\in\Theta_i;\ \forall\theta_{-i}\in\Theta_{-i};\ \forall i\in N$$

那么信念就是一致的。

- 对于给定的博弈，若信念的一致性条件得以满足，我们就把它称为**贝叶斯博弈**。

不完全信息静态博弈的贝叶斯表示

- 贝叶斯博弈表示中的信息推理过程
  - 如何推断$p_i(\theta_{-i}|\theta_i)$: 贝叶斯法则

$$p_i(\theta_{-i}|\theta_i) = \frac{p_i(\theta_{-i},\theta_i)}{p(\theta_i)} = \frac{p_i(\theta_{-i},\theta_i)}{\sum_{\theta_{-i}\in\Theta_{-i}} p(\theta_{-i},\theta_i)}$$

当类型的分布是独立的：$p_i(\theta_{-i}|\theta_i)=p_i(\theta_{-i})$

  - 每个参与人自己的优化目标：给定参与人i只知道自己的类型θ_i, 而不知道其他人的类型θ_i，参与人i将选择策略$s_i(\theta_i)$来最大化自己的期望效用。

期望效用函数

给定参与人i只知道自己的类型θ_i而不知道其他参与人的类型θ_{-i}，参与人i将选择$s_i(\theta_i)$最大化自己的期望效用。参与人i 的**期望效用函数**v_i定义如下：

$$v_i = \sum_{\theta_{-i}} p_i(\theta_{-i}|\theta_i) u_i(s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i}); \theta_i, \theta_{-i})$$

贝叶斯博弈表示举例：两人议价博弈

- 博弈问题描述
  - 有两参与人，卖者是参与人1，买者是参与人2。某件商品不可分割。二者都知道自己对该商品的评价，而认为对方对商品的评价可能是1到100之间的任意整数，概率都为1/100。卖者的类型为销售意愿，买者的类型为支付意愿。假设，必须同时报价，报价为0~100之间的任意整数。买者的报价大于卖者的报价，则按照两个人报价的平均数成交；如果买者的报价小于卖者的报价，交易失败。
- 贝叶斯博弈表示
  - $N=\{1,2\}$
  - $\Theta_1=\Theta_2=\{1,2,\dots,100\}$
  - $S_1=S_2=\{0,1,2,\dots,100\}$
  - $p_1(\theta_2|\theta_1)=1/100$ 已知$\theta_1, \forall\theta_2\in\Theta_2$
  - $p_2(\theta_1|\theta_2)=1/100$ 已知$\theta_2, \forall\theta_1\in\Theta_1$
  - $\mu_1(\theta_1,\theta_2,s_1,s_2)=\begin{cases}(s_1+s_2)/2-\theta_1 & 若s_2\ge s_1,\\ 0 & 若s_2<s_1\end{cases}$
  - $\mu_2(\theta_1,\theta_2,s_1,s_2)=\begin{cases}\theta_2-(s_1+s_2)/2 & 若s_2\ge s_1,\\ 0 & 若s_2<s_1\end{cases}$

信念一致性：

$$\mathbb{P}(\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{10000}\quad \forall\theta_1\in\Theta_1;\ \forall\theta_2\in\Theta_2$$

其中 $\Theta_1\times\Theta_2=\{1,\cdots,100\}\times\{1,\cdots,100\}$

贝叶斯博弈表示举例：第一价格密封拍卖

- 博弈问题描述
  - 拍卖一件不可分割的商品。有参与人1与参与人2两个竞标人。
  - 每个买者都知道自己对该拍卖物的评价，这些评价被认为是买者的类型。两个参与人递交的报价分别为b_1和b_2。
  - 中标规则：谁报价高谁就中标。
  - 若报价相同，则参与人1中标。
  - 假设每个买者的评价集为实区间[0,1] 。
  - 假设每个买者的策略集为实区间[0,1]。
  - 假设每个参与人相信另外一个参与人的评价是根据独立均匀分布而选定

中标者确定函数：

$$f_1(b_1,b_2)=\begin{cases}1, & b_1 \geq b_2,\\ 0, & b_1 < b_2.\end{cases}$$

$$f_2(b_1,b_2)=\begin{cases}1, & b_2 > b_1,\\ 0, & b_2 \leq b_1.\end{cases}$$

- 博弈的表示:
  - $N=\{1,2\}$； $\Theta_1=\Theta_2=[0,1]$； $S_1=S_2=[0,1]$
  - $p_1([x,y]|\theta_1)=y-x \quad \forall\theta_1\in\Theta_1;\ \forall 0\leq x\leq y\leq 1$ （θ_2是在[0,1]任意一个子区间上的均匀分布）
  - $p_2([x,y]|\theta_2)=y-x \quad \forall\theta_2\in\Theta_2;\ \forall 0\leq x\leq y\leq 1$ （θ_1是在[0,1]任意一个子区间上的均匀分布）
  - $\mu_i(\theta_1,\theta_2,s_1,s_2)=f_i(b_1,b_2)(\theta_i-b_i); i=1,2$

类型代理表示法与泽尔腾博弈

- 给定一个贝叶斯博弈：$\Gamma =< N,(\Theta_i),(S_i),(p_i),(u_i) >$，

其等价的类型代理表示法为：$\Gamma^S =< N^S,(S_{\theta_i})_{\substack{\theta_i\in\Theta_i\\ i\in N}},(U_{\theta_i})_{\substack{\theta_i\in\Theta_i\\ i\in N}} >$

其中，

- $N^S = \bigcup_{i\in N} \Theta_i$，即将原来参与人$i$的每个类型都视为一个代理人
- $S_{\theta_i} = S_i$，即参与人i的每个代理人选择的行动就是原来博弈中参与人i自己选择的行动
- U_{θ_i}是原来博弈中参与人i以类型θ_i为条件的条件期望效用
- 这种把不完全信息博弈中每个不同类型的参与人视为一个代理人的博弈表示方法也叫作泽尔腾博弈。

类型代理表示法与泽尔腾博弈

- 贝叶斯定价博弈的泽尔腾表示：
  - 贝叶斯博弈描述：两个参与人，分别是企业1和企业2，企业1生产产品x_1，企业2生产产品x_2或y_2。企业1生产产品x_1是共识，企业2生产哪个产品是他自己的私有信息。所以，$N=\{1,2\}$，$\Theta_1=\{x_1\},\Theta_2=\{x_2,y_2\}$。同时，假设$p_1(x_2|x_1)=0.6$，$p_1(y_2|x_1)=0.4$；$p_2(x_1|x_2)=1, p_2(x_1|y_2)=1$。
  - 企业的决策是为产品定价，企业1可以选择低价a_1，也可以选择高价b_1；企业2可以选择低价a_2，也可以选择高价b_2。$S_1=\{a_1,b_1\},S_2=\{a_2,b_2\}$。效益函数如下表：

企业1 \ 企业2	a_2	b_2
a_1	1, 2	0, 1
b_1	0, 4	1, 3

$\theta_1=x_1,\theta_2=x_2$

企业1 \ 企业2	a_2	b_2
a_1	1, 3	0, 4
b_1	0, 1	1, 2

$\theta_1=x_1,\theta_2=y_2$

类型代理表示法与泽尔腾博弈

- 贝叶斯定价博弈的泽尔腾表示：
  - $N^S = \Theta_1 \cup \Theta_2 = \{x_1, x_2, y_2\}$
  - $S_{x_1} = S_1 = \{a_1, b_1\}$
  - $S_{x_2} = S_{y_2} = S_2 = \{a_2, b_2\}$
  - $U_{\theta_i}: S_1 \times S_2 \times S_2 \to \mathbb{R}\ \forall \theta_i \in \Theta_i\ \forall i \in N$

其中$S_1 \times S_2 \times S_2$有八种情况，我们可以分别讨论他们对应三个代理人的期望收益，即，上一页两个表中对应项目的加权求和，如：

$$U_{x_1}(a_1, a_2, b_2) = p_1(x_2|x_1)u_1(x_1, x_2, a_1, a_2) + p_1(y_2|x_1)u_1(x_1, y_2, a_1, b_2)$$
$$= 0.6 \times 1 + 0.4 \times 0 = 0.6$$

类似地，$U_{x_1}(b_1, a_2, b_2) = 0.4$，$U_{x_2}(a_1, a_2, b_2) = 2$，$U_{x_2}(a_1, b_2, b_2) = 1$，$U_{x_1}(a_1, a_2, b_2) = 4$，$U_{x_1}(a_1, a_2, a_2) = 3$

- 期望效用函数的表示：

$$\mu_i\left((s_i, s_{-i})|\theta_i\right) = \mathbb{E}_{\theta_{-i}}\left[u_i\left(\theta_i, \theta_{-i}, s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i})\right)\right] = \sum_{t \in \Theta_{-i}} p_i(t_{-i}|\theta_i)u_i\left(\theta_i, t_{-i}, s_i(\theta_i), s_{-i}(t_{-i})\right)$$

第四讲 不完全信息静态博弈

内容提纲

贝叶斯博弈的纳什均衡

纯策略贝叶斯纳什均衡

给定贝叶斯博弈 $\Gamma = < N, (\Theta_i), (S_i), (p_i), (\mu_i) >$及其一个策略组$(s_1^*, \cdots, s_n^*)$，
若$\forall i \in N$； $\forall s_i: \Theta_i \to S_i; \forall \theta_i \in \Theta_i$,

$$\mu_i((s_i^*, s_{-i}^*)|\theta_i) \geq \mu_i((s_i, s_{-i}^*)|\theta_i)$$

即，若$\forall\ i \in N$; $\forall\ s_i \in S_i$; $\forall\ \theta_i \in \Theta_i$;

$$\mathbb{E}_{\theta_{-i}}[\mu_i(\theta_i, \theta_{-i}, s_i^*(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i}))] \geq \mathbb{E}_{\theta_{-i}}[\mu_i(\theta_i, \theta_{-i}, s_i(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i}))]$$

则$(s_1^*, \cdots, s_n^*)$称为Γ的一个纯策略贝叶斯纳什均衡。

- 注意这里取支付函数的期望值来评价纯策略的好坏
- 贝叶斯纳什均衡本质上也是一个一致性预测：每个参与人i都能正确地预测具有类型θ_j 的参与人j将选择 $s_j^*(\theta_j)$，因此对参与人 i 来说，唯一重要的是自己的信念p_i和其它参与人的依存策略 $s_{-i}(\theta_{-i})$。

静态贝叶斯纳什均衡的存在性

- 静态贝叶斯纳什均衡的存在性定理是纳什均衡存在性定理的一个直接推广。

静态贝叶斯纳什均衡的存在性定理

一个有限的静态贝叶斯博弈（即博弈中n是有限的，并且$(\theta_1, \ldots, \theta_n)$，$\big(S_1(\theta_1), \cdots, S_n(\theta_n)\big)$都是有限集）存在贝叶斯纳什均衡，其中的纳什均衡也可以包含混合策略。

- 证明过程同完全信息下有限博弈混合策略纳什均衡存在性证明基本一致。

贝叶斯均衡示例：贝叶斯定价博弈

- 博弈问题描述
  - 两个参与人，分别是企业1和企业2，企业1生产产品x_1，企业2生产产品x_2或y_2。企业2生产哪个产品是他自己的私有信息，$p_1(x_2|x_1)=0.6$，$p_1(y_2|x_1)=0.4$。企业1生产啥是共识，$p_2(x_1|x_2)=1, p_2(x_1|y_2)=1$。企业的决策是为产品定价，企业1可以选择低价$a_1$，也可以选择高价$b_1$；企业2可以选择低价$a_2$，也可以选择高价$b_2$。
  - 效用函数如下表

企业1 \ 企业2	a_2	b_2
a_1	1, 2	0, 1
b_1	0, 4	1, 3

$$\theta_1 = x_1, \theta_2 = x_2$$

企业1 \ 企业2	a_2	b_2
a_1	1, 3	0, 4
b_1	0, 1	1, 2

$$\theta_1 = x_1, \theta_2 = y_2$$

贝叶斯均衡示例：贝叶斯定价博弈

- 博弈问题求解
  - 当$\theta_2 = x_2$时，b_2强劣于a_2；
  - 当$\theta_2 = y_2$时，b_2强优于a_2；
  - 当行动组合为(a_1, a_2)或(b_1, b_2)时，无论参与人2什么类型，参与人1都收益1；在所有其它行动组合中，参与人1收益为0。由于参与人1知道参与人2的类型更可能是x_2，也就是参与人2更倾向于a_2，所以参与人1更倾向于a_1。
  - 因此，纯策略贝叶斯均衡为：

$$\left(s_{x_1}^* = a_1, s_{x_2}^* = a_2, s_{y_2}^* = b_2\right)$$

$p_2(x_2|x_1) = 0.6,\quad p_2(y_2|x_1) = 0.4$
$p_2(x_1|x_2) = 1,\quad p_2(x_1|y_2) = 1$

$\theta_1 = x_1, \theta_2 = x_2$的$\mu_1$和$\mu_2$

企业1 \ 企业2	a_2	b_2
a_1	1, 2	0, 1
b_1	0, 4	1, 3

$\theta_1 = x_1, \theta_2 = y_2$的$\mu_1$和$\mu_2$

企业1 \ 企业2	a_2	b_2
a_1	1, 3	0, 4
b_1	0, 1	1, 2

- 均衡：企业1定低价，企业2的策略是若生产x_2定低价，y_2定高价

强优势策略及其均衡

强优势策略（Strongly Dominate Strategy）：

给定策略式博弈$\Gamma = \langle N, (\Theta_i), \{S_i\}_{i=1}^{n}, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\}\rangle$及参与人$i$的策略$s_i^* \in S_i$，若 s_i^* 强优于此人任何其他策略， 即 $\forall \theta_i \in \Theta_i, \forall s_i \in S_i \wedge s_i \neq s_i^*$: $\mu_i((s_i^*, s_{-i})|\theta_i) > \mu_i((s_i, s_{-i})|\theta_i)$, $\forall s_{-i} \in S_{-i}$，
则称s_i^*是参与人i的**强优势策略**。

强优势策略均衡

给定贝叶斯博弈 $\Gamma =< N, (\Theta_i), (S_i), (p_i), (\mu_i) >$ 及其一个策略组$(s_1^*, \cdots, s_N^*)$，
若$\forall i \in N$； $\forall s_i: \Theta_i \to S_i; \forall s_i: \Theta_{-i} \to S_{-i}; \forall \theta_i \in \Theta_i$,

$$\mu_i((s_i^*, s_{-i})|\theta_i) > \mu_i((s_i, s_{-i})|\theta_i)$$

即，若$\forall\, i \in N$; $\forall\, s_i \in S_i$; $\forall\, \theta_i \in \Theta_i; \forall s_{-i}: \Theta_{-i} \to S_{-i}$:

$$\mathbb{E}_{\theta_{-i}}\left[\mu_i\left(\theta_i, \theta_{-i}, s_i^*(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i})\right)\right] > \mathbb{E}_{\theta_{-i}}\left[\mu_i\left(\theta_i, \theta_{-i}, s_i, s_{-i}(\theta_{-i})\right)\right]$$

则$(s_1^*, \cdots, s_N^*)$称为Γ的一个**强优势策略均衡**。

弱优势策略及其均衡

弱优势策略（Weakly Dominate Strategy）：

给定策略式博弈$\Gamma = \langle N, (\Theta_i), \{S_i\}_{i=1}^{N}, \{\mu_i(s_1, \ldots, s_N)\}\rangle$及参与人$i$的策略$s_i^* \in S_i$，若$s_i^*$ 弱优于此人任何其他策略，则称s_i^*是参与人i的**弱优势策略。**

弱优势策略均衡

给定贝叶斯博弈 $\Gamma =< N, (\Theta_i), (S_i), (p_i), (\mu_i) >$ 及其一个策略组$(s_1^*, \cdots, s_N^*)$，若$\forall i \in N$； $\forall s_i: \Theta_i \to S_i; \forall s_{-i}: \Theta_{-i} \to S_{-i}; \forall \theta_i \in \Theta_i$,

$$\mu_i((s_i^*, s_{-i})|\theta_i) \geq \mu_i((s_i, s_{-i})|\theta_i)$$

且$\mu_i((s_i^*, s_{-i})|\theta_i) > \mu_i((s_i, s_{-i})|\theta_i)$，对于某个$s_{-i} \in S_{-i}$成立.

即，若$\forall i \in N$; $\forall$ $s_i \in S_i$; $\forall \theta_i \in \Theta_i; \forall s_{-i}: \Theta_{-i} \to S_{-i}$:

$\mathbb{E}_{\theta_{-i}}\left[\mu_i\left(\theta_i, \theta_{-i}, s_i^*, s_{-i}(\theta_{-i})\right)\right] \geq \mathbb{E}_{\theta_{-i}}\left[\mu_i\left(\theta_i, \theta_{-i}, s_i, s_{-i}(\theta_{-i})\right)\right]$,

且$\mathbb{E}_{\theta_{-i}}\left[\mu_i\left(\theta_i, \theta_{-i}, s_i^*(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i})\right)\right] > \mathbb{E}_{\theta_{-i}}\left[\mu_i\left(\theta_i, \theta_{-i}, s_i, s_{-i}(\theta_{-i})\right)\right]$

对某个$s_{-i} \in S_{-i}$成立，则$(s_1^*, \cdots, s_n^*)$称为Γ的一个弱优势策略均衡。

极弱优势策略及其均衡

极弱优势策略（Very Weakly Dominate Strategy）：

给定策略式博弈$\Gamma = \langle N, (\Theta_i), \{S_i\}_{i=1}^{N}, \{\mu_i(s_1, \dots, s_N)\}\rangle$及参与人$i$的策略$s_i^* \in S_i$，若$s_i^*$ 极弱优于此人任何其他策略，则称s_i^*是参与人i的**极弱优势策略。**

极弱优势策略均衡

给定贝叶斯博弈 $\Gamma =< N, (\Theta_i), (S_i), (p_i), (\mu_i) >$ 及其一个策略组$(s_1^*, \cdots, s_N^*)$，

若$\forall i \in N$； $\forall s_i{:}\,\Theta_i \to S_i; \forall s_{-i}{:}\,\Theta_{-i} \to S_{-i}; \forall \theta_i \in \Theta_i$,

$$\mu_i((s_i^*, s_{-i})|\theta_i) \geq \mu_i((s_i, s_{-i})|\theta_i)$$

即，若$\forall i \in N$; $\forall s_i \in S_i$; $\forall \theta_i \in \Theta_i; \forall s_{-i}{:}\,\Theta_{-i} \to S_{-i}$:

$$\mathbb{E}_{\theta_{-i}}\left[\mu_i\left(\theta_i, \theta_{-i}, s_i^*, s_{-i}(\theta_{-i})\right)\right] \geq \mathbb{E}_{\theta_{-i}}\left[\mu_i\left(\theta_i, \theta_{-i}, s_i, s_{-i}(\theta_{-i})\right)\right]$$

则$(s_1^*, \cdots, s_n^*)$称为Γ的一个**极弱优势策略均衡**。

优势策略均衡举例：第二价格密封拍卖

- 问题描述：两买者的第二价格密封拍卖中，θ_i为各自对拍卖品的评价，b_i为各自的出价。
- 分析求解：令买者2报价为b_2，对买者1讨论以下情况：
  - $\theta_1 \geq b_2$时：$b_1 = \theta_1$为（极弱）优势策略，收益为$\theta_1 - b_2 \geq 0$;
  - $\theta_1 < b_2$时：$b_1 = \theta_1$为（极弱）优势策略，收益为0。
  - 所以，无论情形1还是2，在买者1的出价b_1等于其估价θ_1均为其最优反应。
  - 类似地，无论何种情况，买者2的出价b_2等于其估价θ_2也均为其最优反应。

均衡结果：无论何种情况，买者如实报价都是其最优反应，得到的均衡构成极弱优势策略均衡。
可以证明：该均衡也是一个弱优势策略均衡。

第四讲 不完全信息静态博弈

内容提纲

1. 贝叶斯博弈类型引入
2. 博弈类型定义及表示
3. 博弈均衡分析与求解
4. **贝叶斯博弈示例讲解**

不完全信息静态双寡头博弈

- 不完全信息条件下的博弈问题描述
  - 假设逆价格函数形式为$P(q_1,q_2)=a-q_1-q_2$,每个企业具有不变的单位成本，令企业i单位成本为c_i,则其利润为$\pi_i=q_i(a-q_1-q_2-c_i)$，$i=1,2$。
  - 参与人的成本函数互不知道，可令参与人的类型是成本函数
  - 完全信息中：价格函数：$P=a-q_1-q_2$ 单位成本：$c>0$。
  - 不完全信息中：企业1的单位成本c_1是共同知识；企业2的单位成本可能是c_2^L也可能是c_2^H，$c_2^L<c_2^H$;参与人2知道自己的成本是c_2^L还是c_2^H；参与人1只知道$c_2=c_2^L$的概率是μ，$c_2=c_2^H$的概率是$(1-\mu)$，μ是共同知识。
  - 为了更加直观一些，假定$a=2,c_1=1,c_2^L=3/4,c_2^H=5/4,\mu=1/2$。(这样假设是为了让二者的期望成本相同)

回顾：完全信息双寡头静态博弈

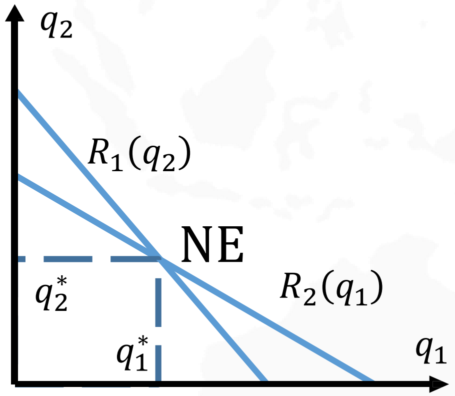
- 库诺特（Cournot）寡头竞争模型
  - 博弈有两个参与人，企业1和企业2，生产同质产品；参与人i的策略是选择自己的产量$q_i \in [0, \infty)$；
  - 效用函数是利润 $\pi_i(q_1, q_2) = q_i P(q_1 + q_2) - C_i(q_i), i = 1,2$，其中$C_i(q_i)$是各自的成本，$P(q_1 + q_2)$表示该产品市场价格。

解答：纳什均衡产量记作(q_1^*, q_2^*)，则有：

$$\begin{cases} q_1^* \in \operatorname{argmax} \pi_1(q_1, q_2^*) = q_1 P(q_1 + q_2^*) - C_1(q_1) \\ q_2^* \in \operatorname{argmax} \pi_2(q_1^*, q_2) = q_2 P(q_1^* + q_2) - C_2(q_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = P(q_1 + q_2) + q_1 P'(q_1 + q_2) - C_1'(q_1) = 0 \\ \dfrac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = P(q_1 + q_2) + q_2 P'(q_1 + q_2) - C_2'(q_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1^* = R_1(q_2) = \dfrac{C_1'(q_1)}{P'(q_1+q_2)} - \dfrac{1}{P'(q_1+q_2)} P(q_1 + q_2) \\ q_2^* = R_2(q_1) = \dfrac{C_2'(q_1)}{P'(q_1+q_2)} - \dfrac{1}{P'(q_1+q_2)} P(q_1 + q_2) \end{cases}$$ 反应函数



回顾：完全信息双寡头动态博弈

- 斯坦克尔伯格（Stackelberge）寡头竞争模型
  - 企业的行动有先后顺序，领头企业1首先选择产量$q_1 \geq 0$，尾随企业2根据领头企业的产量选择自己的产量$q_2 \geq 0$。
  - 价格函数：$P = a - q_1 - q_2$ 单位成本：$c>0$
- 求解：
  - 首先给定q_1求企业2的最优选择：$\max_{q_2 \geq 0} \pi_2(q_1, q_2) = q_2(a - q_1 - q_2) - q_2 c$
  - 最优化一阶条件（对q_2求导）得：$s_2(q_1) = (a - q_1 - c)/2$
  - 企业1知道企业2是理性的（知道其尾随的最优决策是$s_2(q_1)$）：$\max_{q_1 \geq 0} \pi_1(q_1, q_2) = q_1\big(a - q_1 - s_2(q_1)\big) - q_1 c$
  - 同样求一阶条件得：$q_1^* = (\mathrm{a} - \mathrm{c})/2$；进而得：$q_2^* = s_2(q_1^*) = (\mathrm{a} - \mathrm{c})/4$

不完全信息双寡头静态博弈

- 博弈问题求解过程

首先，给定企业2知道企业1的成本，企业2将选择q_2最大化利润函数：

$$\pi_2 = q_2\,(a - q_1 - q_2 - c_2)$$

令$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 0$, 得到 $q_2^*(q_1; c_2) = \frac{1}{2}(a - c_2 - q_1)$，进而有：

$$q_2^L = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4} - q_1\right), \quad q_2^H = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - q_1\right)$$

其次，企业1不知道企业2的成本，企业1将最大化期望利润函数:

$$\mathrm{E}\pi_1 = \frac{1}{2}q_1(a - q_1 - q_2^L - c_1) + \frac{1}{2}q_1(a - q_1 - q_2^H - c_1)$$

令$\frac{\partial \mathrm{E}\pi_1}{\partial q_1} = 0$，得到：$q_1^*(q_2) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}q_1^{\mathrm{L}} - \frac{1}{2}q_1^H\right) = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{E}q_2)$

根据纳什均衡，代入具体值，$q_1^*(q_2)$和$q_2^*(q_1; c_2)$达到均衡时满足：

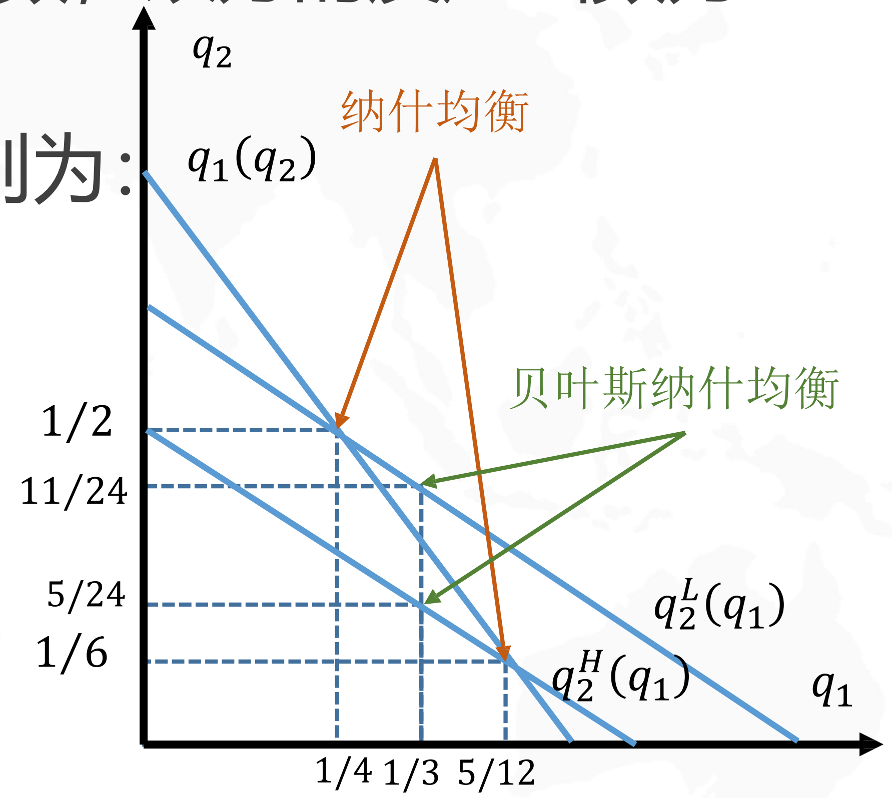
$$q_1^* = \frac{1}{3}, q_2^{L*} = \frac{11}{24}, q_2^{H*} = \frac{5}{24}$$

不完全信息双寡头静态博弈

- 博弈均衡结果分析
  - 在完全信息条件下，企业1知道企业2的成本函数，双方的反应函数为：$q_1^* = 1/2\,(1 - q_2)$，$q_2^* = 1/2\,(5/4 - q_1)$
  - 那么，企业2低成本和高成本时的纳什均衡分别为：
    - 低成本：$q_{1L}^{NE} = 1/4, q_{2L}^{NE} = 1/2$
    - 高成本：$q_{1H}^{NE} = 5/12, q_{2H}^{NE} = 1/6$
  - 两种均衡之间的关系：

$$q_{1L}^{NE} = \frac{1}{4} \le q_1^* = \frac{1}{3}; q_{2L}^{NE} = \frac{1}{2} \ge q_2^{L*} = \frac{11}{24}$$

$$q_{1H}^{NE} = \frac{5}{12} \ge q_1^* = \frac{1}{3}; q_{2H}^{NE} = \frac{1}{6} \le q_2^{H*} = \frac{5}{24}$$



总结：当企业1不知道c_2时，只能生产预期的最优产量，高于完全信息下低成本对手的产量，低于高成本对手的量，企业2相应地做出最优反应。

不完全信息下的公共产品提供博弈

- 博弈问题描述：两个参与人同时决定是否提供公共产品
  - 参与人 i 提供产品的成本为c_i，$i=1,2$，决策：提供 $a_i=1$ 或不提供$a_i=0$，支付矩阵见右图：
  - 注意：成本c_1和c_2具有独立、相同的定义在$[\underline{c},\overline{c}]$上的分布函数 $F(\cdot)$（因此，$F(\underline{c})=0$，$F(\overline{c})=1$），其中$\underline{c}<1<\overline{c}$，$F(\cdot)$是共同知识。

参与人2 \ 参与人1	提供	不提供
提供	$1\text{-}c_1, 1\text{-}c_2$	$1\text{-}c_1, 1$
不提供	$1, 1\text{-}c_2$	$0, 0$

- 假设：参与人知道自己的成本，不知道对方的成本，双方成本函数的分布是共同知识，公共产品的好处是双方共同知识。

不完全信息下的公共产品提供博弈

参与人1 \ 参与人2	提供	不提供
提供	$1\text{-}c_1$, $1\text{-}c_2$	$1\text{-}c_1$, 1
不提供	1, $1\text{-}c_2$	0, 0

- 博弈的一个纯策略函数$a_i(c_i)$是从 $[\underline{c},\bar{c}]$到$\{0,1\}$的一个函数，其中0表示不提供，1表示提供。参与人i的支付函数为：

$$u_i(a_i, a_j, c_i) = \max(a_1, a_2) - a_i c_i$$

- 最优策略组合$(a_1^*(\cdot), a_2^*(\cdot))$是使得对于每一个$i$和每一个可能的$c_i$，$a_i^*(\cdot)$最大化参与人$i$的期望效用函数$\mathrm{E}_{c_j}\mu_i(a_i, a_j^*(c_j), c_i)$

不完全信息下的公共产品提供博弈

参与人1 \ 参与人2	提供	不提供
提供	$1\text{-}c_1, 1\text{-}c_2$	$1\text{-}c_1, 1$
不提供	$1, 1\text{-}c_2$	$0, 0$

- 贝叶斯均衡求解
  - 注意脑子里记住并随时对照右表:
- 求解过程:

令$z_j = \text{Prob}\left(a_j^*(c_j) = 1\right)$表示均衡状态下参与人$j$提供的概率,

$1 - z_j$：表示均衡状态下参与人j不提供的概率;

参与人i提供时的预期收益：$(1 - z_j)(1 - c_i) + z_j(1 - c_i) = 1 - c_i$;

参与人i不提供的预期收益：$(1 - z_j) \cdot 0 + z_j \cdot 1 = z_j$;

参与人i提供的条件：$1 - c_i \geq z_j$，即：当$c_i \leq 1 - z_j$, $a_i^*(c_i) = 1$；$c_i \geq 1 - z_j, a_i^*(c_i) = 0$;

分割点$c_i^* = 1 - z_j$;

因为$z_j = \text{Prob}\left(\underline{c} \leq c \leq c_j^*\right) = F\left(c_j^*\right)$，则有$c_i^* = 1 - F\left(c_j^*\right)$;

由于对称性，c_i^*和c_j^*都满足：$c_i^* = 1 - F\left(1 - F(c_i^*)\right)$;

当$F(\cdot)$是[0,2]上的均匀分布时$c^* = 2/3$。

贝叶斯纳什均衡：当$c_i \leq c^* = 2/3$时，参与人i提供;
当 $c_i > c^* = 2/3$ 时，不提供。

不完全信息下的公共产品提供博弈

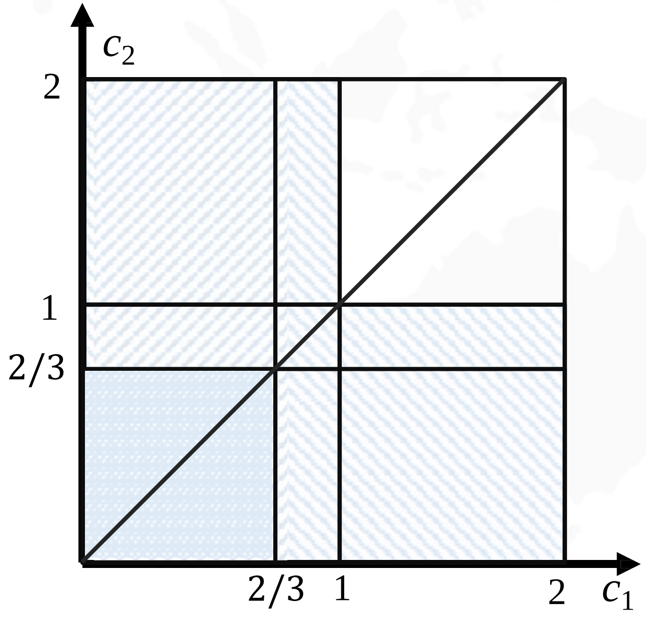
- 与完全信息下的问题比较
  - 当c_1和c_2都小于1时：斗鸡博弈
    - 均衡点1：（提供，不提供）
    - 均衡点2：（不提供，提供）

参与人1 \ 参与人2	提供	不提供
提供	$1-c_1, 1-c_2$	$1-c_1, 1$
不提供	$1, 1-c_2$	$0, 0$

  - 当$c_1 < 1, c_2 > 1$或$c_2 < 1, c_1 > 1$时：智猪博弈
    - $c_1 < 1, c_2 > 1$：（提供，不提供）
    - $c_1 < 1, c_2 > 1$：（不提供，提供）

囚徒困境博弈的本质特征是：存在唯一一个占优均衡的2×2矩阵博弈

  - 当c_1和c_2都大于1时：**囚徒博弈**
    - 均衡点：（不提供，不提供）
- 具体决策区域和相互关系见右图



本讲内容小结

- **信息不完全和不完美**
- **海萨尼转换**
- **定义及表示**
- **贝叶斯纳什均衡**

知识点

能力线

- **<u>问题的相互转换能力</u>**：信息不完全与不完美
- **<u>贝叶斯学派思维方式</u>**：概率思维看待问题，将无解问题到有解

- **<u>不完全信息静态博弈</u>**：如何估计对手类型？

① 获取对手的类型分布

② 期望均衡收益最大化

价值面

本次课程作业

- 作业内容：寻找存在静态贝叶斯博弈应用示例的不完全信息静态博弈习题两道，给出习题描述、问题分析、求解过程和最终结果。
  - 评分准则：选取习题的典型性、分析求解过程的完整性以及最终结果的指导性意义。
- 截止时间：下次上课前（2024年3月25日）
- 提交方法：在Sep课程网站上提交，同时提交电子版到助教邮箱（xuhang2020@ia.ac.cn）
- 邮件发送规范
  - 邮件主题：博弈论第**四**次作业_**学号**_**姓名**
  - 附件名称：博弈论第**四**次作业_**学号**_**姓名**.docx

感谢大家认真听讲

兴军亮

jlxing@nlpr.ia.ac.cn

2024年3月18日