

中国科学院大学 · 人工智能学院 · 本科生专业课

博弈论

上课时间：每周一晚上18:10-19:50

上课地点：玉泉路校区 教学楼阶一1

授课团队：兴军亮（教师）、徐航（助教）

2023春季学期·本科生专业课·《博弈论》

第二讲：完全信息静态博弈

兴军亮

授课时间：2024年3月4日

联系方式：jlxing@nlpr.ia.ac.cn

第二讲 完全信息静态博弈

内容 提纲

1

博弈类型介绍

2

博弈表示建模

3

均衡分析求解

4

均衡的存在性

第二讲 完全信息静态博弈

内容 提纲

1

博弈类型介绍

2

博弈表示建模

3

均衡分析求解

4

均衡的存在性

上节课讲过的博弈类型



囚徒困境



智猪博弈

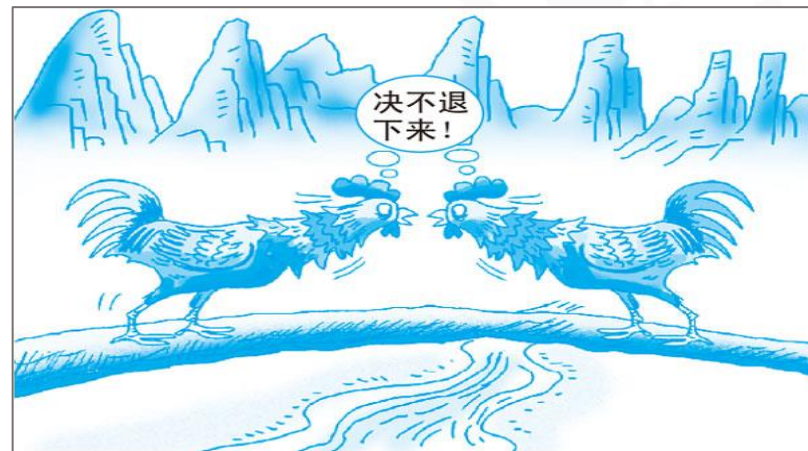
这些博弈有什么
共同点？

双方同时决策

并且知悉博弈
所有信息



警察小偷



斗鸡博弈

什么是博弈中的信息？

- **信息** (Information)：是博弈参与人有关博弈的知识，特别是有关自然的选择、其他人的类型特征、行动、偏好等知识，最终体现在有关博弈的支付函数的知识。
- **完美信息** (Perfect Information)：参与人对其他参与人（包括虚拟参与人）的行动信息有准确的了解，即所有参与人都知道其他参与人的所有行为历史。
- **完全信息**：参与人对博弈的支付函数信息有准确的了解。
- **对称信息** (Symmetric Information)：博弈的各方参与人对于博弈的相关知识在内容、时间等方面具有完全相同的掌握。

什么是博弈中的信息？

- **共同知识** (Common Knowledge)：对于某个事实，如果每个参与者知道该事实，并且每个参与者知道每个参与者知道该事实，如此循环下去，那么该事实就是所有参与者通享的共同知识。
- **相互知识** (Mutual Knowledge)：对于某个事实，如果每个参与者知道该事实，但并不要求“每个参与者知道每个参与者知道……每个参与人知道它”，那么该事实就是所有参与者的相互知识。
- 在博弈中，大多数分析需要共同知识这个假设；个别分析仅需要相互知识就足够了。
- 参与者的私有信息 (Private Information) 是指其拥有的信息，不属于共同知识或者相互知识。

完全信息静态博弈问题定义

- **完全信息静态博弈**：博弈过程中参与人预先知道关于博弈的所有信息，但是需要同时行动或者预先不知晓对方行动的博弈。
- 完全信息静态博弈的三要素
 - **局中人**：是博弈的行为主体，可能是自然人，也可能是企业、团体、群体，甚至可以是虚拟的参与人、无形的自然。有时候为了分析方便，参与人每个可能信息状态都可以看到代理人。
 - **策略空间**：参与人 i 可选择的行动策略集合记为 S_i ，则每一个选择的策略 $s_i \in S_i$ ， $s = (s_i, \dots, s_n)$ 称为 n 个参与人的策略组合（strategy profile），所有参与人的策略集 S 的组合就构成了博弈的策略空间 $S = \times_{1 \leq i \leq n} S_i$ 。
 - **效用函数**：或者称为收益函数，或者相反地称为支付函数等，是博弈的局中人最关心的。

第二讲 完全信息静态博弈

内容 提纲

1

博弈类型介绍

2

博弈表示建模

3

均衡分析求解

4

均衡的存在性

完全信息静态博弈的策略式表示

- 完全信息静态博弈是最为简单的一种博弈类型，通常使用策略式（strategic form）博弈表示，也称为标准式（normal form）表示，需要同时表示出完全信息静态博弈的三要素：
 - 博弈的参与人集合： $i \in N, N = \{1, 2, \dots, n\}$
 - 每个参与人的策略空间： $S_i, i = 1, 2, \dots, n$ ； $-i$ 表示除 i 外的其他参与人
 - 每个参与人的效用函数： $u_i(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$
- 上述表示用于**离散策略空间**的完全信息静态博弈表示。一般地，完全信息静态博弈可以形式化如下形式：

$$\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\} \rangle$$

其中： S_i 可以是受某些因素影响的连续函数， $u_i(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$ 也可以是定义在连续空间上的函数。

完全信息静态博弈的策略式表示

- 策略式表示是最初用于表示博弈的方法，也是其被称为标准式表示的原因。
- 策略式表示背后的思想：参与人的决策问题本质上是选择一个策略能够有效反击其他参与人选择的策略。这样的策略称为：最优反应策略（Best Response Strategy）。

最优反应策略（Best Response Strategy）

给定策略式博弈 $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\} \rangle$ 和策略组合 $s_{-i} \in S_{-i}$ ，对于参与人 i 的策略 $s_i \in S_i$ ，如果 $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$ 对所有 $s'_i \in S_i$ 成立，那么我们说策略 s_i 是参与人 i 对 s_{-i} 的一个最优反应策略。

完全信息静态博弈的策略式表示

- 策略式表示背后的含义

策略式表示的第一种解释

策略式博弈模拟的是只发生一次的事件。每个参与人知道博弈的所有细节，并且知道每个参与人都是理性的。所有参与人同时且独立地选择自己的策略。每个参与人都不知道其他参与人做出的策略选择。（完全信息静态博弈）

策略式表示的第二种解释

策略式博弈可以多次进行，但模拟的是参与人彼此之间行动不存在策略联系（strategic link）的情况下，参与人是如何先后行动的。不存在策略联系是指参与人只关注自己的瞬时收益，不考虑当前行动对其它参与人未来行为的影响（考虑策略联系：重复博弈/动态博弈，需要其他形式的表示方式，比如扩展式）。

完全信息静态博弈的策略式表示

- 策略式表示可以同时表示有限博弈和无限博弈
- 有限博弈：博弈的参与人是有限的，每个参与人的可选策略个数也是有限的。两人有限博弈的策略式表示可以使用矩阵来直观地表示，此时的表示也叫做矩阵式表示。
 - 矩阵采用列优先方式，用列表示第一个参与人，用行表示第二个参与人。
 - 行和列的具体条目分别表示第一个和第二个参与人的具体策略。
 - 矩阵每个元素为一个二元组，分别表示第一和第二个参与人的效益函数。
- 无限博弈：博弈的参与人个数无限或策略个数无限，其策略式表示只需要将三要素使用具体表示式给出即可。

参与人1 \ 参与人2	参与人2		
	$s_{2,1}$	\dots	$s_{2,n_{s_2}}$
$s_{1,1}$	$u_1(s_{1,1}, s_{2,1})$ $u_2(s_{1,1}, s_{2,1})$	\dots	$u_1(s_{1,1}, s_{2,n_{s_2}})$ $u_2(s_{1,1}, s_{2,n_{s_2}})$
\dots	\dots	\dots	\dots
$s_{1,n_{s_1}}$	$u_1(s_{1,n_{s_1}}, s_{2,1})$ $u_2(s_{1,n_{s_1}}, s_{2,1})$	\dots	$u_1(s_{1,n_{s_1}}, s_{2,n_{s_2}})$ $u_2(s_{1,n_{s_1}}, s_{2,n_{s_2}})$

有限博弈的策略式表示举例

- 课程经常使用到的有限博弈策略式表示

囚徒困境

囚徒A \ 囚徒B	坦白	抵赖
	坦白	抵赖
坦白	-5, -5	0, -10
抵赖	-10, 0	-1, -1

智猪博弈

大猪 \ 小猪	行动	不动
	行动	不动
行动	5, 1	4, 4
不动	9, -1	0, 0

斗鸡博弈

鸡A \ 鸡B	进攻	后退
	进攻	后退
进攻	-3, -3	2, -1
后退	-1, 2	-1, -1

集资修路

村民A \ 村民B	出资	不出资
	出资	不出资
出资	3, 3	2, 4
不出资	4, 2	1, 1

市场进入阻挠

进入者 \ 在位者	默许	斗争
	默许	斗争
进入	4, 5	-1, 0
不进入	0, 30	0, 30

警察小偷

警察 \ 小偷	A区	B区
	A区	B区
A区	3, 0	2, 1
B区	1, 2	3, 0

大家尝试说一下每个博弈中的参与者、策略空间、效用函数。

有限博弈的策略式表示举例

- 其他一些常见有限博弈的策略式表示

性别大战

男 \ 女	足球	芭蕾
	足球	芭蕾
足球	2, 1	0, 0
芭蕾	0, 0	1, 2

房地产开发博弈

市场需求大

开发商A \ 开发商B	开发	不开发
	开发	不开发
开发	4, 4	8, 0
不开发	0, 8	0, 0

市场需求小

开发商A \ 开发商B	开发	不开发
	开发	不开发
开发	-3, -3	1, 0
不开发	0, 1	0, 0

配对博弈

甲方 \ 乙方	正面	反面
	正面	反面
正面	1, -1	-1, 1
反面	-1, 1	1, -1

石头剪刀布

红方 \ 蓝方	石头	剪刀	布
	石头	剪刀	布
石头	0, 0	1, -1	-1, 1
剪刀	-1, 1	0, 0	1, -1
布	1, -1	-1, 1	0, 0

选择博弈

红方 \ 蓝方	L	C	R
	L	C	R
U	0, 4	4, 0	5, 3
M	4, 0	0, 4	5, 3
D	3, 5	3, 5	6, 6

有限博弈的策略式表示举例

- 公地悲剧 (tragedy of the commons) : 一个牧场有 n 个牧民, 即为集合 $N = \{1, 2, \dots, n\}$, 每个牧民可以养羊 (一只) 或者不养。
 - 令1表示养一只羊, 0表示不养羊, 策略集为: $S_1 = S_2 = \dots = S_n = \{0, 1\}$, 每个牧民的策略 $s_i \in S_i = \{0, 1\}$ 。
 - 养一只羊的效用 (来自于羊奶、羊毛等) 为1单位。该牧场的草地有限, 当牧民放牧一只羊时, 羊对环境的破坏等于5单位, 这个代价由所有牧民均摊, 那么牧民 i 的效用为: $u_i(s_1, \dots, s_n) = s_i - \left[\frac{5(s_1 + \dots + s_n)}{n} \right]$
- 博弈结果: 若 $n > 5$, 每个牧民养羊比不养效用高; 若 $n < 5$, 牧民养羊比不养的效用要低; 若 $n = 5$, 养不养无所谓。
- 两个牧民情况如右图, 如何解决公地悲剧问题?

		牧民2	
		不养	养
牧民1	不养	0, 0	-2.5, -1.5
	养	-1.5, -2.5	-4, -4

无限博弈的策略式表示举例

- 双寡头定价博弈：有两个公司1和2，生产一种同质产品。它们试图使自己的利润最大。需求 $x(p)$ 是关于价格的一个连续且严格递减的函数，每单位产品生产成本为 c 。两公司同时独立选择各自售价 p_1 和 p_2 ，每个公司销量为：

$$x_1(p_1, p_2) = \begin{cases} x(p_1) & \text{若 } p_1 < p_2 \\ \frac{x(p_1)}{2} & \text{若 } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{若 } p_1 > p_2 \end{cases}$$

$$x_2(p_1, p_2) = \begin{cases} x(p_2) & \text{若 } p_2 < p_1 \\ \frac{x(p_2)}{2} & \text{若 } p_2 = p_1 \\ 0 & \text{若 } p_2 > p_1 \end{cases}$$

假设企业仅在产量等于销量时才产生成本。则这个博弈表示为：
 $N = \{1, 2\}$, $S_1 = S_2 = [0, \infty)$, 两个企业的效用函数分别为：

$$u_1(p_1, p_2) = (p_1 - c)x_1(p_1, p_2) \quad u_2(p_1, p_2) = (p_2 - c)x_2(p_1, p_2)$$

这个博弈的策略集是无限的，因而是无限博弈。

第二讲 完全信息静态博弈

内容 提纲

1

博弈类型介绍

2

博弈表示建模

3

均衡分析求解

4

均衡的存在性

均衡分析和求解的目标和思路

- 均衡分析和求解的目标：获取博弈的稳定结果（均衡）
- 完全信息静态博弈是最简单的一种博弈，博弈参与者在充分了解博弈的相关信息之后，只要进行一次行动选择就可以形成自己的策略。
- 如何分析完全信息静态博弈的均衡解？
 - 尝试找到每个参与人的“优”策略；
 - 去掉每个参与人的“劣”策略；
 - 不断重复尝试搜索这样的策略或者评估每个候选策略；
 - 当所有参与人的最优响应策略集中在一起，就找到了博弈的稳定解。

优策略和劣策略

- **优策略**：博弈参与者的策略一般依赖于其他参与者的策略。在特定情况下，如果参与者的最优策略不依赖于其他参与者的策略选择，即不管其他参与者选择任何策略，参与者的某个策略都是最优的，这样的最优策略称为优策略。
- **劣策略**：类似地，如果博弈参与者某个策略不依赖于其他参与者的策略选择都是比另一个策略差，这样的差策略称为劣策略。
- 根据优劣强度的不同，可以将优劣策略分成不同的等级：
 - 强优（劣）势策略：Strongly Dominated Strategy
 - 弱优（劣）势策略：Weakly Dominated Strategy
 - 极弱优（劣）势策略：Very Weakly Dominated Strategy

强劣/优势策略定义

强劣势策略 (Strongly Dominated Strategy) :

给定策略式博弈 $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\} \rangle$ 及参与人 i 的两个不同策略 $s_i \in S_i$ 和 $s'_i \in S_i$, $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$, 若:

$$\mu_i(s'_i, s_{-i}) > \mu_i(s_i, s_{-i}), \quad \forall s_{-i} \in S_{-i},$$

则相对于策略 s'_i 来说, s_i 是**强劣势**的, 也可以说: s_i 强劣于 s'_i , 或者 s'_i 强优于 s_i 。

强优势策略 (Strongly Dominate Strategy) :

给定策略式博弈 $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\} \rangle$ 及参与人 i 的策略 $s_i^* \in S_i$, 若 s_i^* 强优于此人任何其他策略, 即 $\forall s_i \in S_i \wedge s_i \neq s_i^*$:

$$\mu_i(s_i^*, s_{-i}) > \mu_i(s_i, s_{-i}), \quad \forall s_{-i} \in S_{-i},$$

则称 s_i^* 是参与人 i 的**强优势策略**。

理性参与人肯定会选择强优势策略、排除强劣势策略。

强劣/优势策略举例

- 囚徒困境： $N = \{1,2\}$, $S_1 = S_2 = \{\text{坦白}, \text{抵赖}\}$, 收益如右图

- 对于囚徒A, 策略抵赖强劣于坦白, 因为:

$$u_1(\text{坦白}, \text{抵赖}) > u_1(\text{抵赖}, \text{抵赖})$$

$$u_1(\text{坦白}, \text{坦白}) > u_1(\text{抵赖}, \text{坦白})$$

- 对于囚徒B, 策略抵赖强劣于坦白, 因为:

$$u_2(\text{抵赖}, \text{坦白}) > u_2(\text{抵赖}, \text{抵赖})$$

$$u_2(\text{坦白}, \text{坦白}) > u_2(\text{坦白}, \text{抵赖})$$

囚徒A \ 囚徒B	坦白	抵赖
坦白	-5, -5	0, -10
抵赖	-10, 0	-1, -1

- 所以对于囚徒A和B, 抵赖都是强劣势策略, 坦白都是强优势策略
- 理性的囚徒肯定会选择强优势策略, 不考虑强劣势策略

弱劣/优势策略定义

弱劣势策略 (Weakly Dominated Strategy) :

给定策略式博弈 $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\} \rangle$ 及参与人 i 的两个不同策略 $s_i \in S_i$ 和 $s'_i \in S_i$, $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$, 若:

$$\mu_i(s'_i, s_{-i}) \geq \mu_i(s_i, s_{-i}), \text{ 对于所有的 } s_{-i} \in S_{-i},$$

且 $\mu_i(s'_i, s_{-i}) > \mu_i(s_i, s_{-i})$, 对于某个 $s_{-i} \in S_{-i}$,

则相对于策略 s'_i 来说, s_i 是**弱劣势**的, 也可以说: s_i 弱劣于 s'_i , 或者 s'_i 弱优于 s_i 。

弱优势策略 (Weakly Dominate Strategy) :

给定策略式博弈 $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\} \rangle$ 及参与人 i 的策略 $s_i^* \in S_i$, 若 s_i^* 弱优于此人任何其他策略, 则称 s_i^* 是参与人 i 的**弱优势策略**。

弱劣/优势策略举例

- 修改后囚徒困境： $N = \{1,2\}$, $S_1 = S_2 = \{\text{坦白}, \text{抵赖}\}$, 收益矩阵如右图：
- 对于囚徒A，策略抵赖弱劣于坦白，因为：
 $u_1(\text{坦白}, \text{抵赖}) \geq u_1(\text{抵赖}, \text{抵赖})$
 $u_1(\text{坦白}, \text{坦白}) > u_1(\text{抵赖}, \text{坦白})$
- 对于囚徒B，策略抵赖弱劣于坦白，因为：
 $u_2(\text{抵赖}, \text{坦白}) \geq u_2(\text{抵赖}, \text{抵赖})$
 $u_2(\text{坦白}, \text{坦白}) > u_2(\text{坦白}, \text{抵赖})$
- 所以对于囚徒A和B，抵赖都是弱劣势策略，坦白都是弱优势策略
- 理性的囚徒还是会选择弱优势策略，不考虑弱劣势策略

囚徒A \ 囚徒B	坦白	抵赖
	坦白	抵赖
坦白	-5, -5	-1, -10
抵赖	-10, -1	-1, -1

极弱劣/优势策略定义

极弱劣势策略 (Very Weakly Dominated Strategy) :

给定策略式博弈 $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\} \rangle$ 及参与人 i 的两个不同策略 $s_i \in S_i$ 和 $s'_i \in S_i$, $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$, 若:

$$\mu_i(s'_i, s_{-i}) \geq \mu_i(s_i, s_{-i}), \quad \forall s_{-i} \in S_{-i},$$

则相对于策略 s'_i 来说, s_i 是**极弱劣势**的, 也可以说: s_i 极弱劣于 s'_i , 或者 s'_i 极弱优于 s_i 。

极弱优势策略 (Very Weakly Dominate Strategy) :

给定策略式博弈 $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\} \rangle$ 及参与人 i 的策略 $s_i^* \in S_i$, 若 s_i^* 极弱优于此人任何其他策略, 则称 s_i^* 是参与人 i 的**极弱优势策略**。

极弱劣/优势策略举例

- 再修改囚徒困境： $N = \{1, 2\}$, $S_1 = S_2 = \{\text{坦白}, \text{抵赖}\}$, 收益矩阵如右图：
- 对于囚徒A，由于有：
$$u_1(\text{坦白}, \text{抵赖}) \geq u_1(\text{抵赖}, \text{抵赖})$$
$$u_1(\text{坦白}, \text{坦白}) \geq u_1(\text{抵赖}, \text{坦白})$$
并且：
$$u_2(\text{抵赖}, \text{坦白}) \geq u_2(\text{抵赖}, \text{抵赖})$$
$$u_2(\text{坦白}, \text{坦白}) \geq u_2(\text{坦白}, \text{抵赖})$$
- 对于囚徒B类似。所以对于两个囚徒坦白和抵赖都是极弱优势策略。
- 理性的囚徒这时候会怎么选？

囚徒A \ 囚徒B	坦白	抵赖
	坦白	抵赖
坦白	-5, -10	-1, -10
抵赖	-5, -1	-1, -1

占优策略均衡定义

- 当每个参与人都存在三种不同强度的优势策略时，其相关的优势策略组合均可构成相应的优势策略均衡，即强优势策略均衡、弱优势策略均衡和极弱优势策略均衡。
- 一个策略式博弈只有存在优势策略时，该博弈的均衡解才唯一确定，这个时候均衡被称为**占优策略均衡**。

占优策略均衡 (Dominate-Strategy Equilibrium) :

给定策略式博弈 $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\} \rangle$ ，如果对于每个参与人 i ， $s_i^* \in S_i$ 都是 i 的强优势策略，即：

$$\mu_i(s_i^*, s_{-i}) > \mu_i(s_i, s_{-i}), \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}, \forall s_i \in S_i \wedge s_i \neq s_i^*$$

那么策略组合 $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ 称为该博弈的**占优策略均衡**。

占优策略均衡举例

• 囚徒博弈

- 囚徒A占优策略：坦白
- 囚徒B占优策略：坦白
- 占优均衡：（坦白，坦白）

囚徒A \ 囚徒B	坦白	抵赖
	坦白	抵赖
坦白	-5, -5	0, -10
抵赖	-10, 0	-1, -1

• 买家市场房地产开发博弈

- 开发商A占优策略：开发
- 开发商B占优策略：开发
- 占优均衡：（开发，开发）

开发商A \ 开发商B	开发	不开发
	开发	不开发
开发	4, 4	8, 0
不开发	0, 8	0, 0

• 达到占优均衡的条件

- 只要求每个参与人是理性的即可；不要求参与人知道其他人是理性的

重复剔除的占优策略均衡

- 对于更多的策略式博弈，并不是每个参与人都存在强优势策略。对于部分参与人存在强优势策略的博弈，能否尝试求取其占优均衡策略呢？
- 智猪博弈回顾
 - 对于小猪：存在优策略“不动”
 - 对于大猪：不存在优策略
 - 如何求取这个博弈的均衡？
- 一种直观的思路
 - 首先找到某个参与人劣策略；剔除这个劣策略得到新博弈；对新博弈继续重复上述过程

大猪 \ 小猪	行动	不动
	行动	不动
行动	5, 1	4, 4
不动	9, -1	0, 0

大猪 \ 小猪	行动	不动
	行动	不动
行动	5, 1	4, 4
不动	9, -1	0, 0

重复剔除的占优策略均衡

- 在一个策略式博弈中，如果策略组合 $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ 是重复剔除强劣势策略后剩下的唯一策略组合，那么就称该策略组合为该博弈的重复剔除的占优策略均衡。
- 对于一个策略式博弈，如果它存在唯一的重复剔除的占优均衡，那么就称该博弈是重复剔除占优可解的 (dominance solvable)。
- 示例：

蓝方 \ 红方	L	M	R
U	1, 0	1, 2	0, 1
D	0, 3	0, 1	2, 0



蓝方 \ 红方	L	M
U	1, 0	1, 2
D	0, 3	0, 1



蓝方 \ 红方	L	M
U	1, 0	1, 2



蓝方 \ 红方	M
U	1, 2

重复剔除的占优策略均衡

- 给出右图策略式博弈的重复剔除的占优策略均衡
- 剔除方法1：按照R3-C3-C2-R2进行，
(R1, C1) 是剩下的策略组合
- 剔除方法2：按照C2-R2-C1-R3进行，
(R1, C3) 是剩下的策略组合

蓝方 红方	蓝方		
	C1	C2	C3
R1	2, 12	1, 10	1, 12
R2	0, 12	0, 10	0, 11
R3	0, 12	0, 10	0, 13

重复剔除的占优策略均衡要求理性参与者是共同知识。

蓝方 红方	C1	C2	C3
R1	2, 12	1, 10	1, 12
R2	0, 12	0, 10	0, 11
R3	0, 12	0, 10	0, 13

蓝方 红方	C1	C2	C3
R1	2, 12	1, 10	1, 12
R2	0, 12	0, 10	0, 11
R3	0, 12	0, 10	0, 13

蓝方 红方	C1	C2	C3
R1	2, 12	1, 10	1, 12
R2	0, 12	0, 10	0, 11
R3	0, 12	0, 10	0, 13

蓝方 红方	C1	C2	C3
R1	2, 12	1, 10	1, 12
R2	0, 12	0, 10	0, 11
R3	0, 12	0, 10	0, 13

蓝方 红方	C1	C2	C3
R1	2, 12	1, 10	1, 12
R2	0, 12	0, 10	0, 11
R3	0, 12	0, 10	0, 13

蓝方 红方	C1	C2	C3
R1	2, 12	1, 10	1, 12
R2	0, 12	0, 10	0, 11
R3	0, 12	0, 10	0, 13

蓝方 红方	C1	C2	C3
R1	2, 12	1, 10	1, 12
R2	0, 12	0, 10	0, 11
R3	0, 12	0, 10	0, 13

纳什均衡的定义

- 市场萎靡下的房地产开发博弈
 - 两个开发商都开发：都损失3
 - 一个开发商开发：收益1
 - 都不开发：收益为0
- 该博弈不存在占优策略均衡和重复剔除的占优均衡，但存在均衡：

开发商A \ 开发商B	开发	不开发
	开发	-3, -3
	不开发	0, 1
	不开发	0, 0

纳什均衡

在一个策略式博弈 $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\} \rangle$ 中，对于一个策略组合 $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ ，如果对于每一个参与人 i ，如果 s_i^* 是给定其他参与人策略 $s_{-i}^* = (s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$ 的情况下第 i 个人的（极弱）优势策略，即： $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$ ， $\forall s_i \in S_i, s_i \neq s_i^*$ ，那么策略组合 $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ 称为**纳什均衡**。

强纳什均衡和弱纳什均衡

- 纳什均衡也有强弱之分：强纳什均衡和弱纳什均衡

强纳什均衡 (Strong Nash Equilibrium) :

在一个纳什均衡中，如果给定其他参与人的策略，每一参与人的最优选择都是唯一的。即： s_i^* 是一个强纳什均衡，当且仅当对于所有的 $s'_i \in S_i$, $s'_i \neq s_i^*$, $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) > u_i(s'_i, s_{-i}^*)$ 。

弱纳什均衡 (Weak Nash Equilibrium) :

在一个纳什均衡中，如果给定其他参与人的策略，每一参与人的最优选择不是唯一的。即： s_i^* 是一个弱纳什均衡，对于所有的 $s'_i \in S_i$, $s'_i \neq s_i^*$, 满足： $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s'_i, s_{-i}^*)$, 且至少存在一个 $s'_i \in S_i$, $s'_i \neq s_i^*$, 满足： $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) = u_i(s'_i, s_{-i}^*)$ 。

纳什均衡的应用举例

- 求取右图抽象博弈的纳什均衡
 - 对于简单的两人有限博弈，可以根据纳什均衡定义设计方法求取
- 有限策略博弈求取纳什均衡方法
 - 不断固定一方的策略，求取另一方的最优策略，迭代完成后最优策略的交集就是纳什均衡。

红方 \ 蓝方	L	C	R
	U	M	D
U	0, 4	4, 0	5, 3
M	4, 0	0, 4	5, 3
D	3, 5	3, 5	6, 6

红方 \ 蓝方	L	C	R
	U	M	D
U	0, <u>4</u>	4, 0	5, 3
M	4, 0	0, <u>4</u>	5, 3
D	3, 5	3, 5	6, <u>6</u>

给定红方策略，求蓝方最优策略

红方 \ 蓝方	L	C	R
	U	M	D
U	0, <u>4</u>	<u>4</u> , 0	5, 3
M	<u>4</u> , 0	0, <u>4</u>	5, 3
D	3, 5	3, 5	<u>6</u> , <u>6</u>

给定蓝方策略，求红方最优策略

纳什均衡的应用举例

• 库诺特 (Cournot) 寡头竞争模型

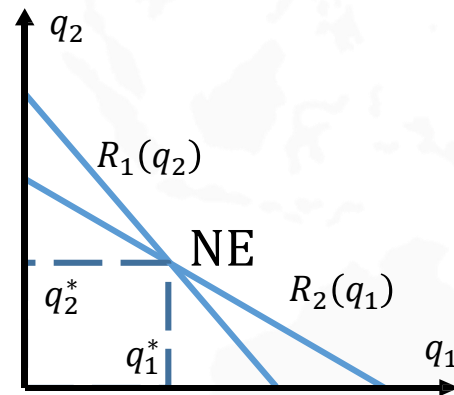
- 博弈有两个参与人，企业1和企业2，生产同质产品；参与人 i 的策略是选择自己的产量 $q_i \in [0, \infty)$ ；
- 效用函数是利润 $\pi_i(q_1, q_2) = q_i P(q_1 + q_2) - C_i(q_i), i = 1, 2$ ，其中 $C_i(q_i)$ 是各自的成本， $P(q_1 + q_2)$ 表示该产品市场价格。

解答：纳什均衡产量记作 (q_1^*, q_2^*) ，则有：

$$\begin{cases} q_1^* \in \operatorname{argmax} \pi_1(q_1, q_2^*) = q_1 P(q_1 + q_2^*) - C_1(q_1) \\ q_2^* \in \operatorname{argmax} \pi_2(q_1^*, q_2) = q_2 P(q_1^* + q_2) - C_2(q_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = P(q_1 + q_2) + q_1 P'(q_1 + q_2) - C_1'(q_1) = 0 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = P(q_1 + q_2) + q_2 P'(q_1 + q_2) - C_2'(q_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1^* = R_1(q_2) = \frac{C_1'(q_1)}{P'(q_1+q_2)} - \frac{1}{P'(q_1+q_2)} P(q_1 + q_2) \\ q_2^* = R_2(q_1) = \frac{C_2'(q_1)}{P'(q_1+q_2)} - \frac{1}{P'(q_1+q_2)} P(q_1 + q_2) \end{cases} \quad \text{反应函数}$$



混合策略纳什均衡定义

- 纯策略 (Pure Strategy) 和混合策略 (Mixed Strategy)
 - 在一个策略式博弈中, 如果一个策略规定参与人在一个给定的信息情况下只选择一种特定的行动, 我们就称该策略为纯策略。
 - 如果一个策略规定参与人在给定信息情况下以某种概率分布随机地选择不同的行动, 我们就称该策略为混合策略。

混合策略 (Mixed Strategy)

在一个策略式博弈 $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\} \rangle$ 中, 假定参与人 i 有 K 个纯策略: $S_i = \{s_{i,1}, \dots, s_{i,K}\}$, 那么, 概率分布 $\sigma_i = (\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{iK})$ 称为 i 的一个混合策略, 这里 $\sigma_{ik} = \sigma(s_{ik})$ 是 i 选择 s_{ik} 的概率, 对于所有的 $k = 1, \dots, K$, $0 \leq \sigma_{ik} \leq 1$, $\sum_i^K \sigma_{ik} = 1$ 。

混合策略纳什均衡定义

- 混合策略博弈要素的表示
 - 参与人的混合策略: $\sigma_i = (\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{i2}, \dots, \sigma_{ik})$
 - 参与人 i 混合策略空间: Σ_i , 其中 $\sigma_i \in \Sigma_i$
 - 混合策略组合: $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_n)$
 - 混合策略组合空间: $\Sigma = \times_i \Sigma_i$
 - 参与人 i 期望支付函数: $v(\sigma) = v(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_s (\prod_j^n \sigma_j(s_j)) u(s)$

混合策略纳什均衡

在一个策略式博弈 $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\} \rangle$ 中, 如果对于所有的 $i = 1, \dots, n$, 混合策略组合 $\sigma^* = \{\sigma_1^*, \dots, \sigma_i^*, \dots, \sigma_n^*\}$ 都满足:

$$v(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq v(\sigma_i, \sigma_{-i}^*), \quad \forall \sigma_i \in \Sigma_i$$

那么, 该混合策略组合是一个混合策略纳什均衡。

混合策略纳什均衡举例

- 社会福利博弈：
 - 政府想帮助流浪汉，但前提是对方必须试图找到工作，否则不予帮助；
 - 流浪汉只在得不到帮助时才找工作。

政府 \ 流浪汉	找工作	游荡
	救济	不救济
救济	3, 2	-1, 3
不救济	-1, 1	0, 0

均衡求解：

给定政府混合策略 $\sigma_G = (\theta, 1 - \theta)$ ，流浪汉混合策略 $\sigma_H = (\gamma, 1 - \gamma)$ ，那么政府和流浪汉的期望效用函数分别为：

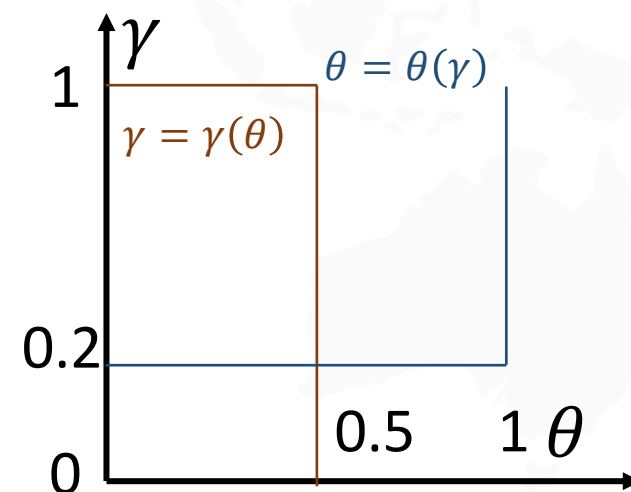
$$v_G(\sigma_G, \sigma_H) = \theta(3\gamma + (-1)(1 - \gamma)) + (1 - \theta)(- \gamma + 0(1 - \gamma)) = \theta(5\gamma - 1) - \gamma$$

$$v_L(\sigma_G, \sigma_H) = \gamma(2\theta + 1(1 - \theta)) + (1 - \gamma)(3\theta + 0(1 - \theta)) = -\gamma(2\theta - 1) + 3\theta$$

$$\text{令 } \frac{\partial v_G(\sigma_G, \sigma_H)}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial v_H(\sigma_G, \sigma_H)}{\partial \gamma} = 0, \text{ 得到: } \gamma^* = 0.2, \theta^* = 0.5$$

$$\text{政府 } \theta = \begin{cases} 0, & \text{if } \gamma < 0.2 \\ [0, 1], & \text{if } \gamma = 0.2 \\ 1, & \text{if } \gamma > 0.2 \end{cases}$$

$$\text{流浪汉 } \gamma = \begin{cases} 1, & \text{if } \theta < 0.5 \\ [0, 1], & \text{if } \theta = 0.5 \\ 0, & \text{if } \theta > 0.5 \end{cases}$$



混合策略纳什均衡举例

- 税收监督博弈：
 - 税务机关检查概率为 θ
 - 纳税人逃税的概率为 γ
 - 如何求取其纳什均衡？

税务机关 \ 纳税人	逃税	不逃税
	检查	不检查
检查	$a-C+F, -a-F$	$a-C, -a$
不检查	$0, 0$	$a, -a$

均衡求解：

给定逃税概率 γ ，税务机关选择检查($\theta = 1$)和不检查($\theta = 0$)的期望收益分别为：

$$\pi_G(1, \gamma) = (a - C + F)\gamma + (a - C)(1 - \gamma) = \gamma F + a - C$$

$$\pi_G(0, \gamma) = 0\gamma + a(1 - \gamma) = a(1 - \gamma)$$

$$\text{令 } \pi_G(1, \gamma) = \pi_G(0, \gamma), \text{ 得到: } \gamma^* = C/(a + F)$$

给定检查概率 θ ，税收人选择逃税($\gamma = 1$)和不逃税($\gamma = 0$)的期望收益分别为：

$$\pi_p(\theta, 1) = (-a - F)\theta + 0(1 - \theta) = (-a - F)\theta$$

$$\pi_p(\theta, 0) = -a\theta + (-a)(1 - \theta) = -a$$

$$\text{令 } \pi_p(\theta, 1) = \pi_p(\theta, 0), \text{ 得到: } \theta^* = a/(a + F)$$

$$\text{混合策略纳什均衡: } \gamma^* = C/(a + F), \theta^* = a/(a + F)$$

第二讲 完全信息静态博弈

内容 提纲

1

博弈类型介绍

2

博弈表示建模

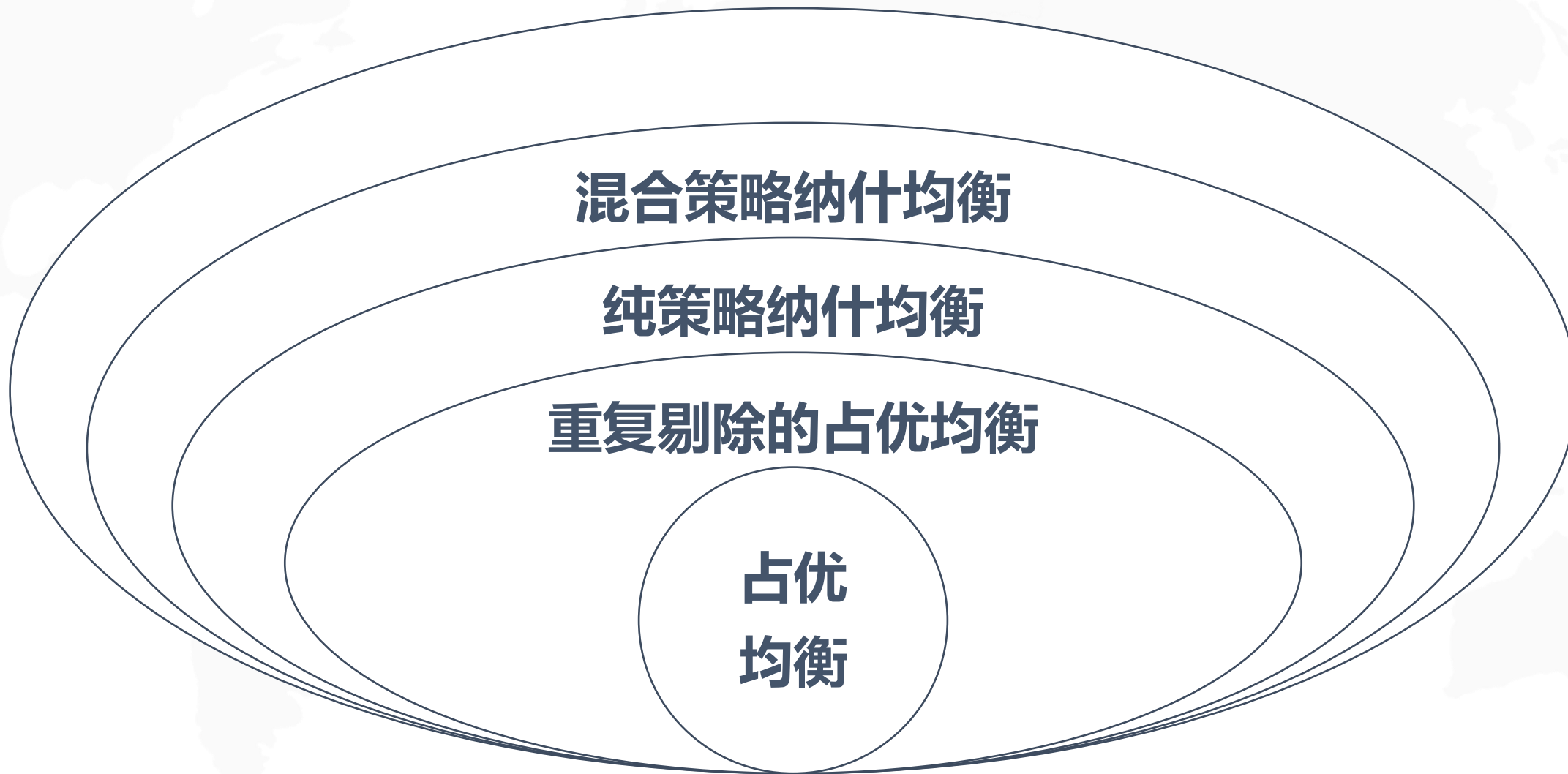
3

均衡分析求解

4

均衡的存在性

四种不同均衡的关系



纳什均衡的存在性问题

- 确定一个博弈是否存在均衡是博弈论中的重要议题。

两人零和博弈



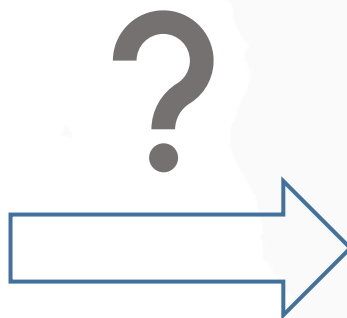
冯·诺依曼
极小极大值定理



证明结果：根据极大极小值得到解即为均衡解。

证明方法：利用初等概率和拓扑学的工具。

其他更多的博弈



证明结果：不断证明更多类型的博弈均衡存在性。

证明方法：数学归纳法；凸集分离定理；单纯形理论；各种不动点定理等。

纳什均衡存在性定理

- 纳什均衡的存在性

纳什均衡存在性定理一 (Nash, 1950)

每一个有限博弈至少存在一个纳什均衡（纯策略的或者混合策略的）。

纳什均衡存在性定理二 (Debreu, 1952; Glicksberg, 1952; Fan, 1952)

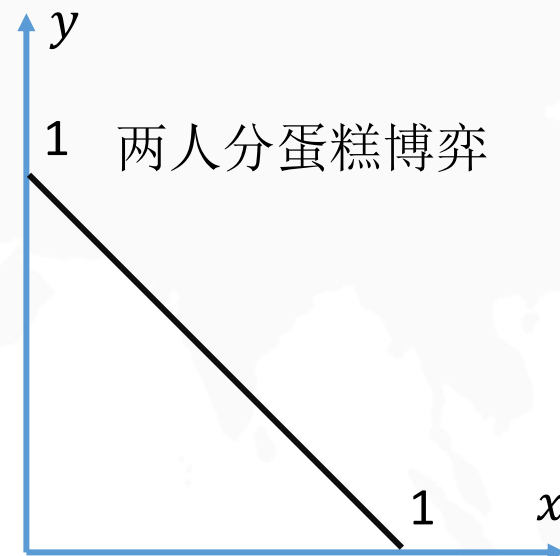
在 n 人策略式博弈中，如果每个参与人的纯策略空间 S_i 是欧式空间上一个非空的、闭的、有界的凸集，支付函数 $u_i(s)$ 是连续的且对 s_i 是拟凹的，那么存在一个纯策略纳什均衡。

纳什均衡存在性定理三 (Glicksberg, 1952)

在 n 人策略式博弈中，如果每个参与人的纯策略空间 S_i 是欧式空间上一个非空的、闭的、有界的凸集，支付函数 $u_i(s)$ 是连续的，那么存在一个混合策略纳什均衡。

纳什均衡的多重性讨论

- 纳什均衡的多重性：相对于纳什均衡的存在性，纳什均衡的多重性有时候更为棘手
- 一个博弈纳什均衡可能出现的数目
 - 不存在纳什均衡
 - 有唯一的纳什均衡
 - 有多个纳什均衡
 - 有无数个纳什均衡
- 当一个博弈有多个纳什均衡时
 - 如何保证纳什均衡出现？
 - 如果保证某个纳什均衡出现？



分配规则：

- 每人说出想要得到的蛋糕数量；
- 两人所要数量和不超蛋糕总量得到所要数量；
- 两人所要数量和超过蛋糕总量则什么都得不到；

纳什均衡的计算问题

- 证明了纳什均衡的存在性，如何得到这个纳什均衡？
- 理论计算机科学家更关心如何利用计算机算法搜索得到博弈的具体均衡解：

求解纳什均衡是极具挑战性的开放难题

- 纳什均衡这个博弈论解来源于经济学中分析经济现象，经济学家只关心存在性，根本不关心均衡解如何计算
- 求解一般的**两人博弈纳什均衡**是PPAD-Hard问题（不可解，除非 $P=NP$ ）
- 求解四人/三人纳什均衡都是PPAD-Hard问题，但**求解多人（五人及以上）纳什均衡**是否仍是PPAD-Hard问题还不确定
- **近似纳什均衡**求解相关研究进展缓慢
- **纳什均衡选择**问题仍然存在很多问题
- 纳什均衡的**理性假说**实际中可能不成立

一些**典型问题**的纳什均衡求解复杂度

➤ **两人变和策略式（矩阵式）博弈**

- 计算纳什均衡：PPAD-Hard
- 计算均衡个数：#P-Hard
- 检查均衡唯一性：NP-Hard
- 计算个体最少收益：NP-Hard
- 计算群体最小收益和：NP-Hard

➤ **随机博弈**（带随机状态转移的动态博弈）

- 检查纯策略纳什均衡存在性：PSPACE-Hard
- 计算任意策略的最优响应：Not Turing-computable
- 上述结论适用于两人对称博弈

关于博弈计算的复杂性问题后面算法博弈论中专门进行讲解

本讲内容小结

- 信息概念、静态特点
- 博弈定义与表示
- 均衡分析与求解
- 均衡的存在性

知识点

能力线

- 完全信息静态博弈：不同均衡概念的求解方法
- 不同类型均衡结果：均衡存在性的判定方法

- 完全信息静态博弈：实际生活中如何决策？

- ① 全面考虑所有信息
- ② 勿被虚假信息迷惑

价值面

本次课程作业

- 作业内容：分别寻找存在纯策略和混合策略的完全信息静态博弈习题各一道，给出习题描述、问题分析、求解过程和最终结果。
 - 评分准则：选取习题的典型性、分析求解过程的完整性以及最终结果的指导性意义。
- 截止时间：下次上课前（2024年3月11日）
- 提交方法：在[Sepi课程网站上](#)提交，同时提交电子版到助教邮箱（xuhang2020@ia.ac.cn）
- 邮件发送规范
 - 邮件主题：博弈论第**二**次作业_**学号_姓名**
 - 附件名称：博弈论第**二**次作业_**学号_姓名**.docx

中国科学院大学 · 人工智能学院 · 本科生专业课

感谢大家认真听讲

兴军亮

jlxing@nlpr.ia.ac.cn

2024年3月4日