中国科学院大学·人工智能学院·本科生专业课

博弈论

上课时间：每周一晚上18:10-19:50

上课地点：玉泉路校区 教学楼阶一1

授课团队：兴军亮（教师）、徐航（助教）

上一讲内容回顾：不完全信息动态博弈

- **贝叶斯定理**
- **定义及表示**
- **精炼贝叶斯纳什均衡**
- **不完美信息/信号博弈**

知识点

能力线

- **知识综合运用能力**：信息不完全+动态依赖性
- **贝叶斯思维再强化**：概率意义上的最优估计模型和方法

- **不完全信息动态博弈**：估计信号传达的信息

① 不断观察，迭代修正

② 无关路径，也要理性

价值面

第六讲：算法博弈论（1）

兴军亮

授课时间：2024年4月1日

联系方式：jlxing@nlpr.ia.ac.cn

第六讲：算法博弈论（1）

内容提纲

1. 算法博弈论整体介绍
2. 算法化机制设计概念
3. 拍卖及完美拍卖介绍
4. 拍卖机制设计的应用

第六讲：算法博弈论（1）

内容提纲

什么是算法博弈论?

- 自从1944年冯诺依曼发表《博弈论与经济行为》之后，博弈论在经济学领域得到了最为广泛的应用。
- 然而，在过去的二十多年里，由于互联网的飞速发展，极大地改变了人类和计算机的关系。
- 博弈论和经济学的发展遇到了一些具有共同特点的难题，比如如何找到或者设计包含多个存在互相交互自主个体的系统的均衡点（如在自由经济市场、互联网中）等，于是出现了“算法博弈论”这个新的交叉研究方向。

> “The Internet is an equilibrium; we just have to identify the game.”
>
> -- Scoott Shenker

什么是算法博弈论?

- 算法博弈论：计算机科学和博弈论的交叉点，研究博弈论中的计算问题，即如何“求解”现实世界中的博弈 。
- 这里的求解不光要分析出博弈的均衡，还要设计算法，优化计算得到实际的均衡解。
- 重点研究的问题：
  - 如何更好的设计博弈的规则?
  - 均衡点和最优结果之间存在多大的差异?
  - 能否有多项式复杂度的算法来计算均衡点?

> “If your laptop can not find the equilibrium, neither can the market.”
>
> -- 微软研究院Kamal Jain

什么是算法博弈论?

- 相对于经济学中讲授的博弈论的区别:
  - **应用领域**不一样：算法博弈论主要应用与和互联网相关的网络模型优化以及和拍卖相关的机制设计等；
  - **研究方法**不一样：算法博弈论通常使用具体的优化问题来对实际应用问题进行建模，并且求取最优结果、不可能的结果、可行的近似算法的上界和下界等；
  - **计算复杂度要求**不一样：算法博弈论通常要求博弈系统的设计者和参与者行为满足一定计算复杂度要求（比如满足多项式时间复杂度）。

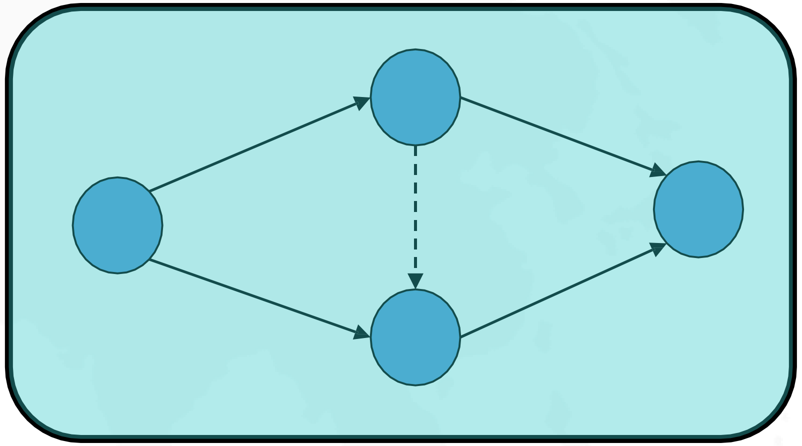
学习算法博弈论的原因

- 研究人工智能游戏：对“理性智能体”和他们之间的交互过程进行建模、学习和求解；
- 研究计算机算法：一些博弈论算法均具有非常有意思算法分析特点（比如是NP问题还是NPC问题）；
- 计算机科学逻辑：计算机科学的逻辑体现出了博弈的特性，包括逻辑模型逻辑和时序逻辑，自我博弈验证；
- 游戏的计算复杂度问题：包括回合制游戏、布尔电路等；
- 计算机网络和电子商务：如何为Internet这个巨大的博弈设定规则以达到全社会最优？
- 研究分析反应系统：计算机辅助验证、博弈驱动的模型检查等。

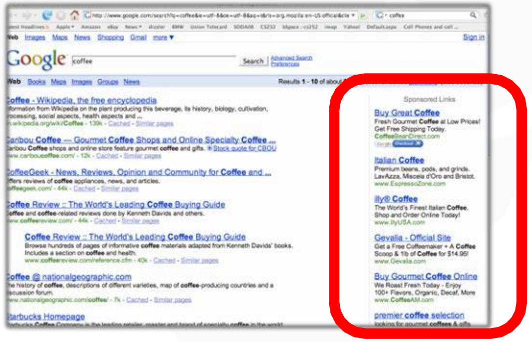
算法博弈论的应用领域

市场定价

网络路由



在线广告



种群进化

选举

主要研究内容

- 算法化机制设计（Algorithmic Mechanism Design）
  - 单参数化机制设计（Single-Parameter Mechanism Design）
  - 多参数化机制设计（Multi-Parameter Mechanism Design）
- 均衡的低效率性（Inefficiency of Equilibria）
  - 无序性代价（The Price of Anarchy）
  - 稳定度代价（The Price of Stability）
- 均衡计算复杂度（Complexity of Finding Equilibria）
  - 最优反应动态算法（Best-Response Dynamics）
  - 不后悔型动态算法（No-Regret Dynamics）
- 其他研究内容：图形化游戏、密码学，计算进化博弈等

算法化机制设计示例分析

• 2012年奥运会羽毛球女双比赛：八强对抗局势

羽毛球女双比赛最初八强

郑景银 / 金荷娜 （韩国）

王晓理 / 于洋 （中国）

程文欣 / 简毓瑾 （中华台北）

藤井瑞希 / 垣岩令佳 （日本）

河贞恩 / 金旼贞 （韩国）

格雷西娅·波利 / 梅利亚娜·乔哈里（印尼）

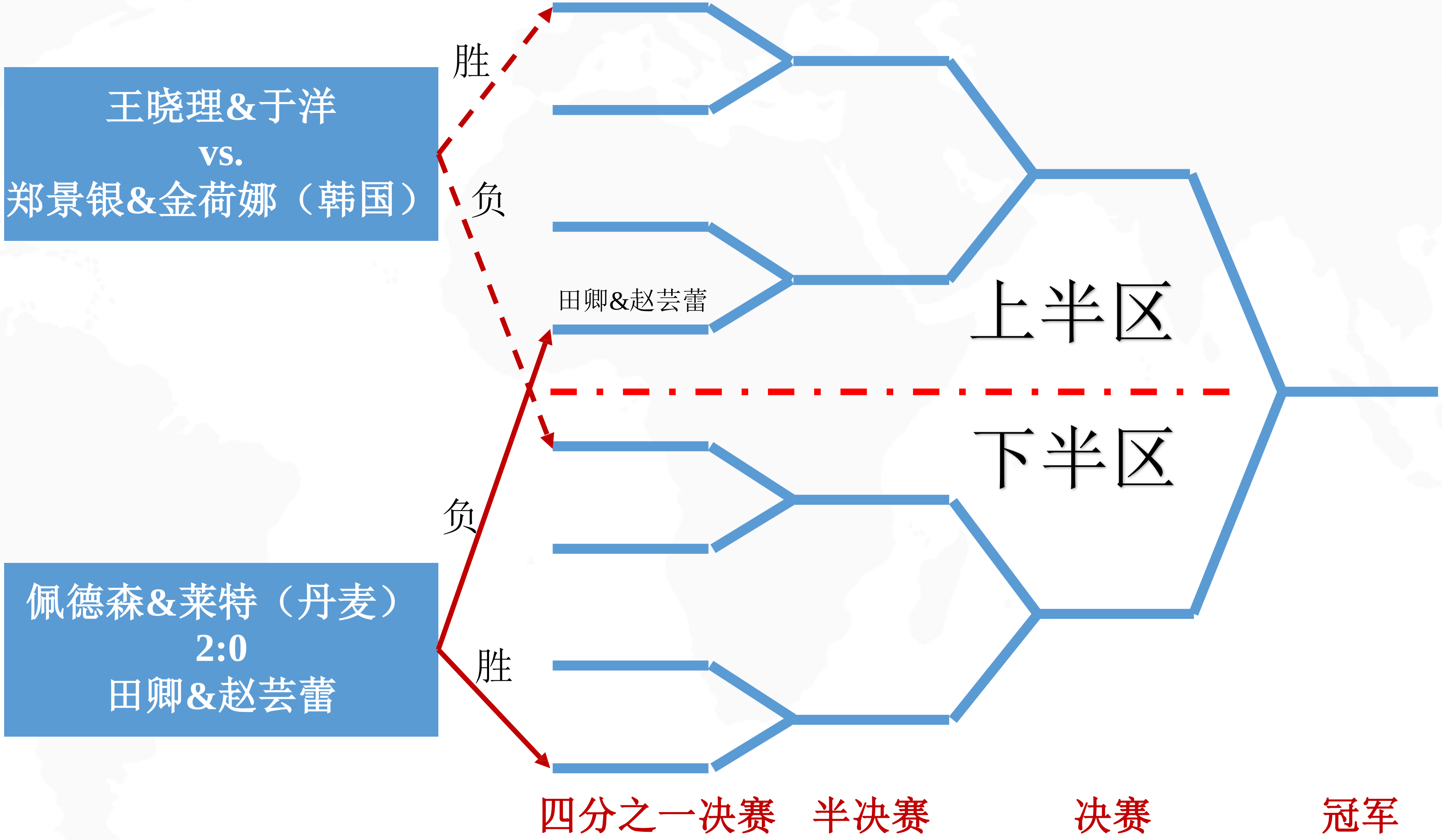
吕特·尤尔 / 克里斯汀娜·彼德森 （丹麦）

田卿 / 赵芸蕾 （中国）

参赛选手	国籍	排名
王晓理 / 于洋	中国	1
田卿 / 赵芸蕾	中国	2
河贞恩 / 金旼贞	韩国	3
藤井瑞希 / 垣岩令佳	日本	4
卡米拉·吕特·尤尔 / 克里斯汀娜·彼德森	丹麦	5
前田美顺 / 末纲聪子	日本	6
郑景银 / 金荷娜	韩国	8
程文欣 / 简毓瑾	中华台北	10
格雷西娅·波利 / 梅利亚娜·乔哈里	印尼	12
欣塔·穆利亚·萨里 / 姚蕾	新加坡	13
潘乐恩 / 谢影雪	中国香港	15
瓦拉·古塔 / 阿什维尼·蓬纳帕	印度	16
瓦莱里亚·索罗金娜 / 尼娜·维斯洛娃	俄罗斯	18
亚历山德拉·布鲁斯 / 李文珊	加拿大	28
周玉莲 / 雷努加·韦兰	澳大利亚	35
米歇尔·克莱尔·爱德华兹 / 安娜里·维尔容	南非	44

算法化机制设计案例分析

- 2012年奥运会羽毛球女双比赛：赛制对抗规则

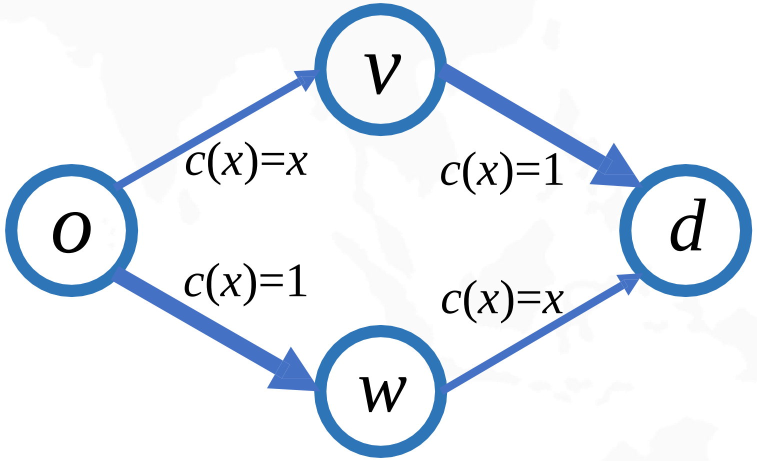


算法化机制设计案例分析

- 2012年奥运会羽毛球女双比赛：消极比赛视频

均衡的低效率性案例分析

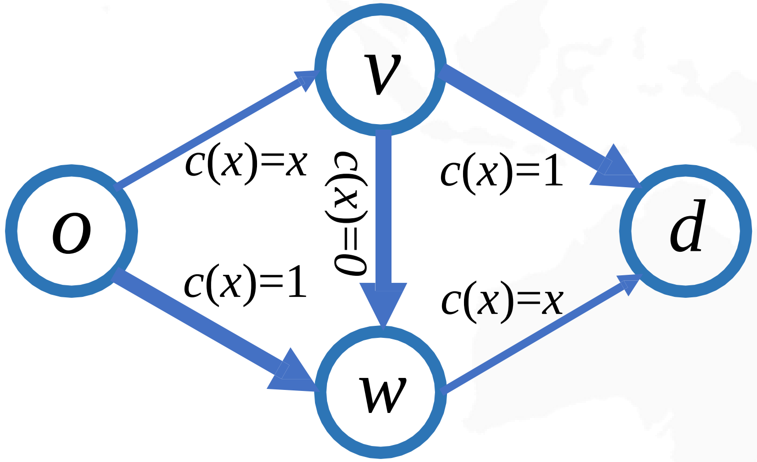
- 布雷斯悖论（Braess's Paradox）
  - 有一个起点 o 和终点 d，有固定数量的司机从起点到终点
  - 从起点到终点有两条路线，每条路线均包含一条长宽路，一条窄短路
  - 长宽路需要1个小时通过，不管多少车辆通过
  - 短窄路需要的时间=通过的车辆占总体的比例



- 通过道路所需的平均时间是多少？
  - 由于两条路线其实是一样的
  - 两条路线会平分所有的车流量
  - 因此，平均时间是1+0.5=1.5小时，这是达到均衡的平均用时
  - 为什么是均衡？没有人有改变路线的意愿！

均衡的低效率性案例分析

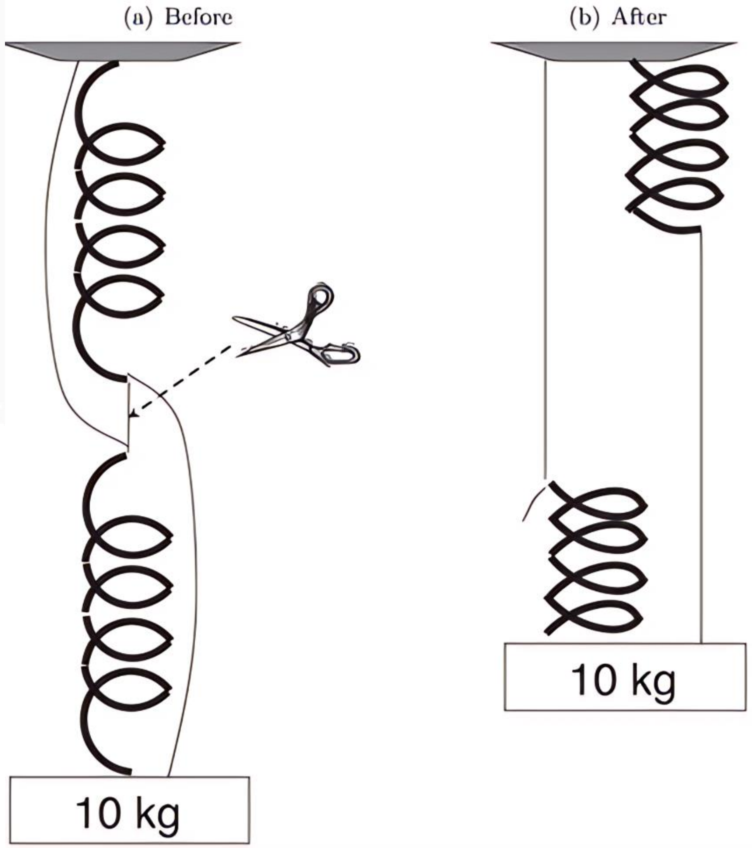
- 布雷斯悖论（Braess's Paradox）
  - 如果我们在道路网中增修一条超级便道之后呢？可以瞬间传送
  - 如果你是司机，你会做什么样的选择？
  - $o \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow d$不会比原来两条路线差
  - 因此，司机都会采用$o \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow d$这条路线，达到均衡
  - 均衡时平均的通勤时间变为1+1=2!
  - 而最优的平均通勤时间是1.5，好心办了坏事！



- 无秩序代价（Price of Anarchy，POA）
  - 均衡/最优，这里，$\mathrm{POA} = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3}$
  - POA理想条件下为1，有些场景均衡可以接近最优

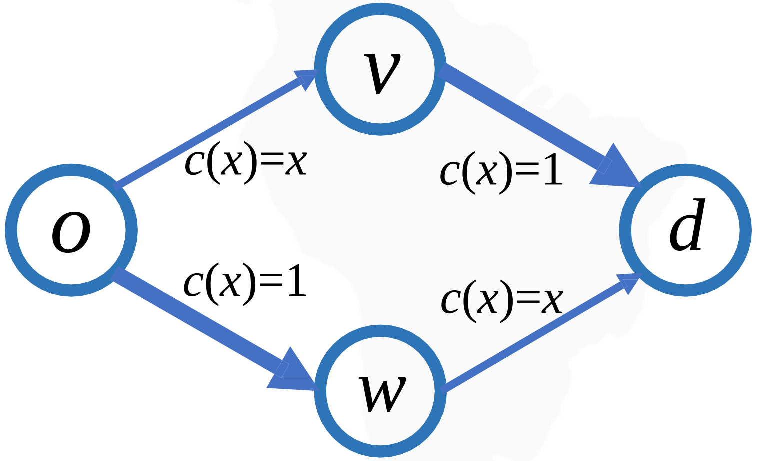
均衡的低效率性案例分析

- 绳子和弹簧（String and Springs）
  - 通过选择合适长度的弹簧和绳子，可以达到右图(a)的平衡状态
  - 剪掉右图(a)中两根弹簧之间的短绳，弹簧可以迅速切换到右图(b)的状态
  - 物体为什么会上升?
  - 左图两根弹簧都承重10Kg，右图则分别承重5Kg
- 这个例子其实和上页中的道路网是等价的
- 剪掉短绳等价于撤掉瞬时传送装置
- 分析不同场景下，均衡和最优的关系非常重要



均衡计算复杂度示例分析

- 聪明的博弈参与者能否学到均衡?
  - 布雷斯悖论：计算机简单搜索即可以得到均衡；
  - 石头剪刀布：零和游戏通过线性规划或迭代学习算法可以求解；
  - 其他更一般的博弈呢?



均衡计算复杂度示例分析

- 即使聪明的博弈参与者一起能够能达到均衡，计算机能否找到更为一般性博弈的均衡?
  - 两人非零和游戏：没有在计算复杂度上有效的方法保证得到纳什均衡，虽然这个问题并不属于NP完全问题。
  - 因此，两人博弈问题本身就是一个非常好的呈现出**“中间”计算难度**的自然问题。
  - 对于存在多个纳什均衡的博弈问题，博弈分析的预测功能愈发显得乏力。
- 因此，需要研究**在计算上可行**的纳什均衡的算法解或者算法近似解。使得研究者也开始转向可高效求解的均衡概念，比如相关均衡（Correlated Equilibria）、粗相关均衡（Coarse Correlated Equilibria），或者近似求解纳什均衡等。

第六讲：算法博弈论（1）

内容提纲

算法化机制设计的产生

- 算法化机制设计：最初由希伯来耶路撒冷大学的研究者在他们1999年发表的一篇论文中提出
- 该研究方向结合了经济学中的效用最大化和机制设计、博弈论中的理性假设和纳什均衡、理论计算机科学中的复杂度分析和算法设计等概念和理论
- 与经济学中机制设计的差别
  - 将计算复杂度作为一个核心限制，比如必须多项式时间内可实现，一些经典的经济学机制设计模型就不再适用
- 应用领域：物品拍卖、政治选举、市场活动、政府政策等

Nisan, Noam; Ronen, Amir (1999), "Algorithmic mechanism design", Proceedings of the thirty-first annual ACM symposium on Theory of computing: 129–140.

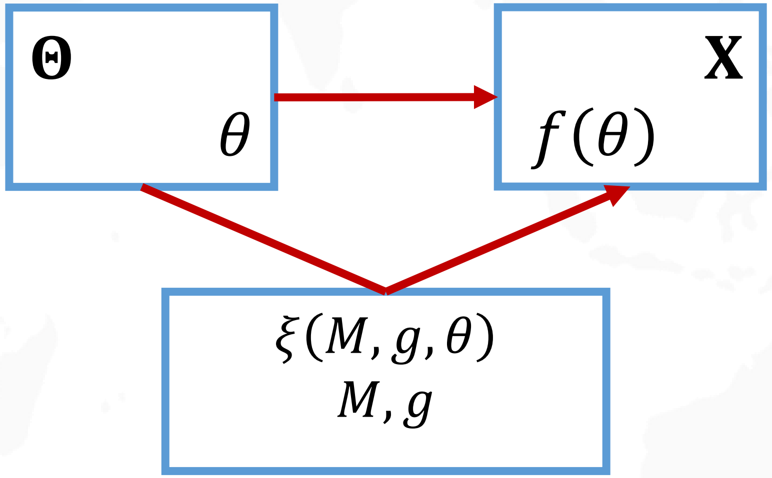
机制设计相关概念介绍

- 机制设计可以视为博弈的**逆向工程**
  - 机制设计是博弈设计的艺术，通过设计博弈规则实现设计者想要的行为
  - 机制设计就是设计者让博弈参与者做设计者想让他们做的事
- 2007年诺贝尔经济学奖：赫维茨（Hurwicz），马斯金（Maskin）和迈尔森（Myerson）
  - Prize motivation: “for having lid the foundations of mechanism design theory.”
  - 获奖原因：为机制设计理论建立了基础



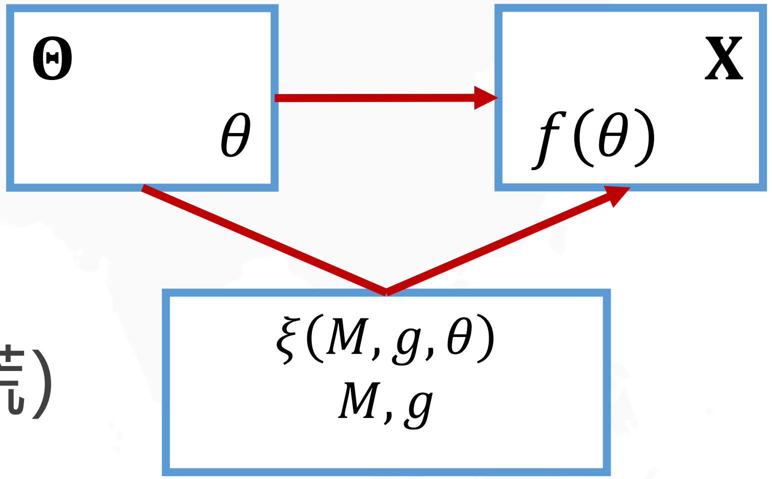
机制设计相关概念介绍

- 定义：机制设计师在策略环境中，针对理性的参与者，使用工程性的方法来设计经济学机制或者奖励措施，从而达到特定的目标。
- 作用：通过设计的“自然”解决博弈中特定参与人的个体决策与整体目标之间的分歧。
- 机制设计相关要素和过程示意图
  - 类型空间：$\boldsymbol{\Theta}$；参与者类型参数：θ；
  - 结果空间：$\mathbf{X}$；社会选择方程：$f(\theta)$；
  - 消息：M；游戏环境：g；
  - 游戏的均衡：$\xi(M,g,\theta)$；
  - 机制设计过程：参与者在博弈环境 g 中发布消息M，设计的目标是通过实现某个特定的社会选择方程$f(\theta)$来达到博弈的均衡



机制设计相关概念介绍

- 机制：将个体的信息类型（θ）映射为相关结果的一个过程函数，用$y(\theta)$表示



- 机制设计博弈过程
  - 特定参与者向机制 $y(\cdot)$ 提交自己的结果 $y(\theta)$
  - 参与者分别报告自己的信息类型 $\hat{\theta}$（有可能撒谎）
  - 机制进行执行（其他参与者收到结果 $y(\hat{\theta})$）
- 为了理解谁得到了什么，通常将结果y分成物品分配和奖励转让：$y(\theta)=\{x(\theta),t(\theta)\}, x\in \mathrm{X}, t\in \mathrm{T}$。
- 设计者确定完全信息下事件发生标准：社会选择函数 $f(\theta)\colon \Theta\to \mathrm{X}$
- 机制将报告的类型映射到结果：$y\left(\hat{\theta}\right)\colon \Theta\to \mathrm{X}$

第六讲：算法博弈论（1）

内容提纲

1 算法博弈论整体介绍

2 算法化机制设计概念

3 **拍卖及完美拍卖介绍**

4 拍卖机制设计的应用

机制设计应用：拍卖

- 拍卖理论：研究拍卖市场属性以及人们在其中行为的经济学分支。关注拍卖设计的效率、最优和均衡拍卖策略、拍卖收益比较等。
- 拍卖的种类
  - 英式拍卖（English Auction)
  - 荷兰式拍卖（Dutch Auction)
  - 密封第一价格拍卖（FPSB)
  - 密封第二价格拍卖（Vickrey Auction)

	密封出价	迭代出价
第一价格	FPSB	Dutch
第二价格	Vickrey	English

- 其他类型的拍卖：双重拍卖、单物品/多物品拍卖、全支付拍卖、有限时长拍卖（烧蜡烛拍卖）、投标缴费拍卖、收购拍卖、组合式拍卖、扩展第一/第二价格拍卖、日式拍卖、唯一价格拍卖、大宗商品拍卖（频谱拍卖）等。

拍卖理论：相关概念

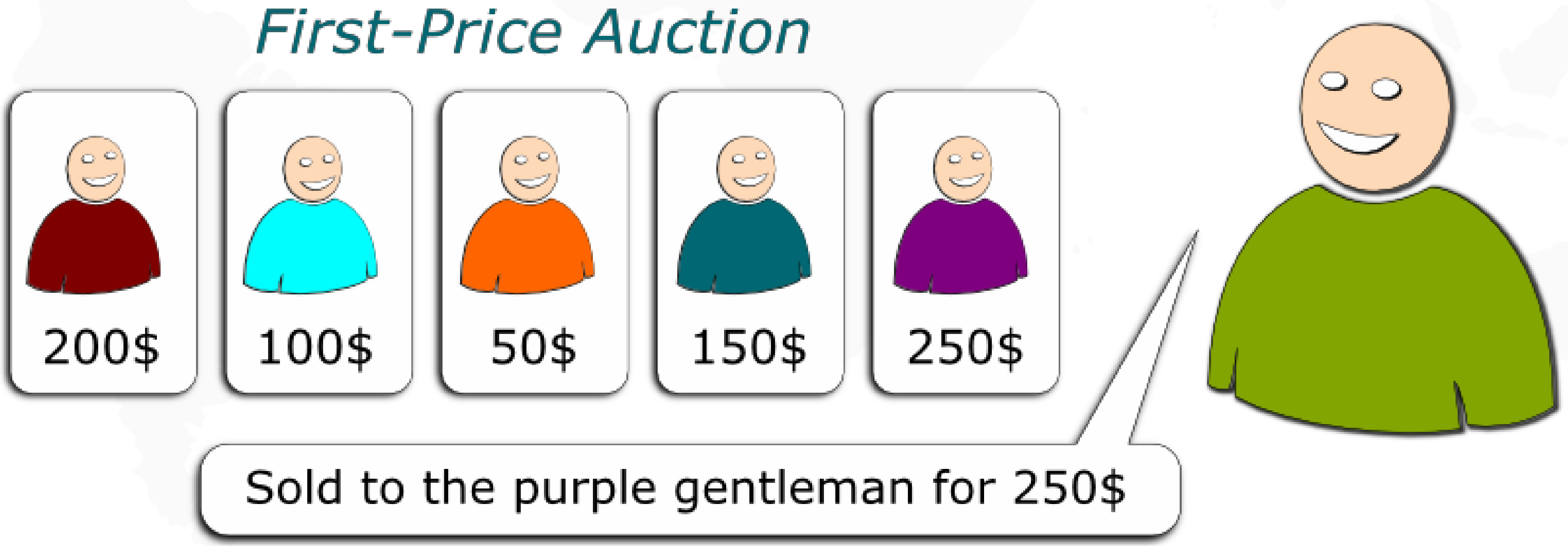
- **单物品拍卖**（Single-Item Auctions）
  - 给定一件物品和n个潜在购买者，每个潜在购买者对于该物品都有一个自己的价值评估v_i，$v_i \geq 0$，该价值评估对于其他潜在购买者和拍卖者都是不可知的。
  - 拍卖效益函数：如果购买者i 成功以价格p 拍得该物品，则他的效益为v_i - p; 如果未能拍得该物品，则效益为0。

$$f(x) = \begin{cases} v_i - p, & \text{拍到} \\ 0, & \text{未拍到} \end{cases}$$

- **密封出价拍卖**
  - 每一个出价者将出价值b_i悄悄地告诉卖家
  - 卖家决定谁成功拍得该物品（如果存在的话）
  - 卖家决定拍得该物品的价格（怎么决定？）

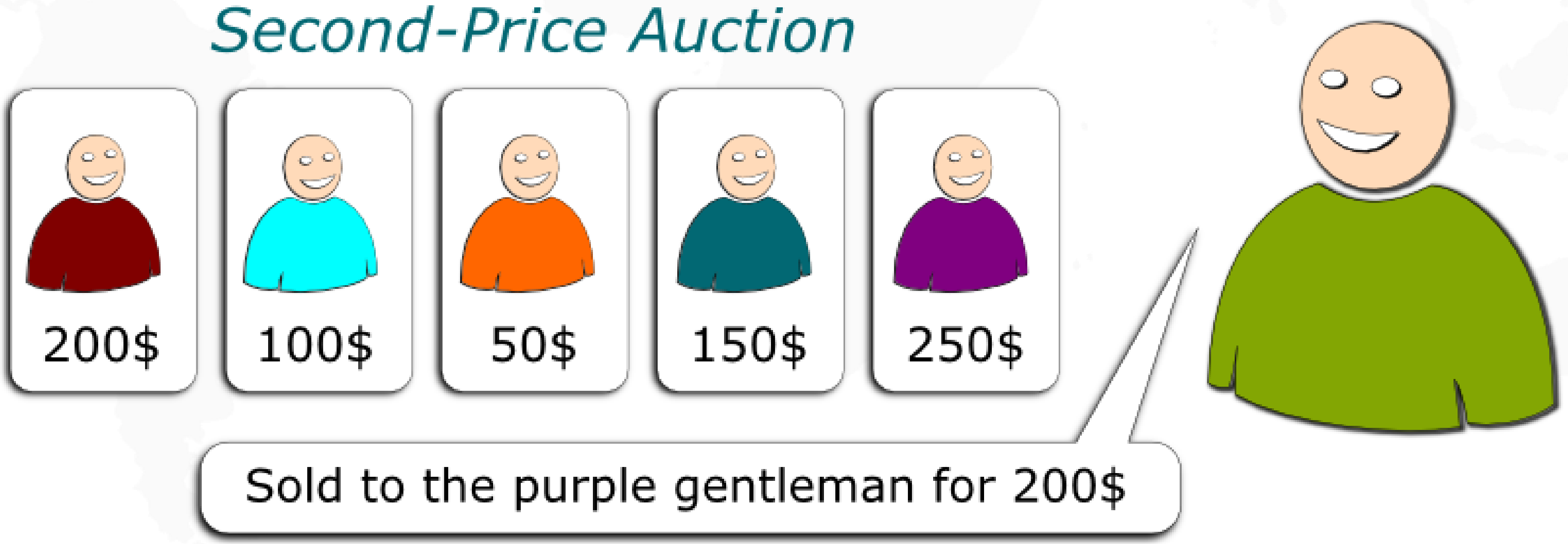
拍卖理论：相关概念

- **第一价格拍卖** （First-Price Auctions）： 赢得拍卖的购买者以自己的出价购买拍到的物品。
  - 是实际中非常常见的一种拍卖定价方式
  - 拍卖者貌似卖出了最高的价格，但是他能预测会发生什么吗?
  - 竞拍者虽然拍出了价格要购买，但他是否心甘情愿出最高价?



拍卖理论：相关概念

- **第二价格拍卖**（Second-Price Auctions）： 赢得拍卖的购买者以次高价购买拍到的物品。
  - 英式拍卖、eBay、常见拍卖公司拍卖等。
  - 第二价格拍卖也称为Vickrey拍卖，具有很多优良的性质，是非常重要的一类拍卖类型。



拍卖理论：相关概念

- 命题：关于第二价格拍卖中的奖励措施

第二价格拍卖的奖励措施

在一个第二价格拍卖中，每一个参与者 i 都有占优策略（优势策略）：设定他的出价 b_i 为自己对于拍卖品的私有评估值 v_i。

证明：对于任意一个竞拍者i及其出价b_i和评估值v_i，以及其他竞拍者出价b_{-i}，我们需要证明在$b_i = v_i$竞拍者i的收益最大化，令$B = \max_{j \neq i} b_j$，则第二价格竞拍收益函数为$\max(0, v_i - B)$。

- 当$b_i < B$，那么i竞拍失败，收益为$\max(0, b_i - B) = 0$;
- 当$b_i > B$，那么i竞拍成功，收益为$\max(0, b_i - B) = v_i - B$;

对于任意一种情况，竞拍者i的最优策略都是真实地报告自己的的评估值。

拍卖理论：相关概念

- 命题：关于第二价格拍卖中的奖励措施

第二价格拍卖的任一竞拍者收益为非负值

在一个第二价格拍卖中，每一个真实报告自己对于商品评估值的竞拍者的收益必定为非负值。

证明：对于任意一个竞拍者i及其出价b_i和评估值v_i，

当竞拍失败时，收益为0；

当竞拍成功时，收益为$v_i - p$，由于赢得竞拍并且他真实报告自己对于物品的私有评估值，那么$v_i - p \geq 0$；

因此，对于任意一种情况，竞拍者i的收益值均为非负值。

完美拍卖：DSIC特性

- 拍卖的DSIC特性

DSIC特性：Dominant-Strategy Incentive Compatible

在一个拍卖中，如果对于每一个竞拍者，真实报价总是优策略并且真实报价总是得到非负的收益，那么我们就称该拍卖具备DSIC特性。

- 拍卖的社会收益：定义$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i$为一个单物品拍卖结果的社会收益。其中当 i 拍卖成功$x_i = 1$，反之$x_i = 0$。

社会收益最大化特性：Welfare Maximizing

在一个拍卖中，如果对于每一个竞拍者真实报价后，竞拍的结果能够最大化社会收益，那么我们就称该拍卖具备社会收益最大化特性。

完美拍卖：定义及实例

- 完美拍卖的定义：

定义：完美拍卖（Ideal Auction）

满足下面三个条件的拍卖称为完美拍卖：

1. 强激励保证：它是一个满足DSIC特性的拍卖；
2. 强效果保证：它是社会福利最大化的拍卖；
3. 计算高效性：它可以在输入大小（表示$v_1, \dots, v_n$所需要的数量）的多项式（最好是线性）时间复杂度内被计算实现。

- 定理：第二价格拍卖是完美拍卖。
  - 证明：根据之前的命题结论即可证明条件1和2，求解第二价格拍卖所需的时间复杂度为线性，因此定理得证。

第二价格拍卖是完美拍卖

- 第二价格拍卖这一完美拍卖的三个特性都非常重要
- DSIC：
  - 从竞拍者的角度看，DSIC特性使得他们很容易报价
  - 从卖家的角度看，DSIC特性使得竞拍的结果很容易分析
- 社会福利最大化：
  - 虽然各竞拍者的评估值是私有的，但是通过第二价格拍卖，可以将物品给予“认为该商品价值最大的人”，也就是评估值最大的人
- 计算高效性：
  - 拍卖想要有实用价值，相应的算法计算层面必须足够快
  - 第二价格拍卖时间复杂度是线性的

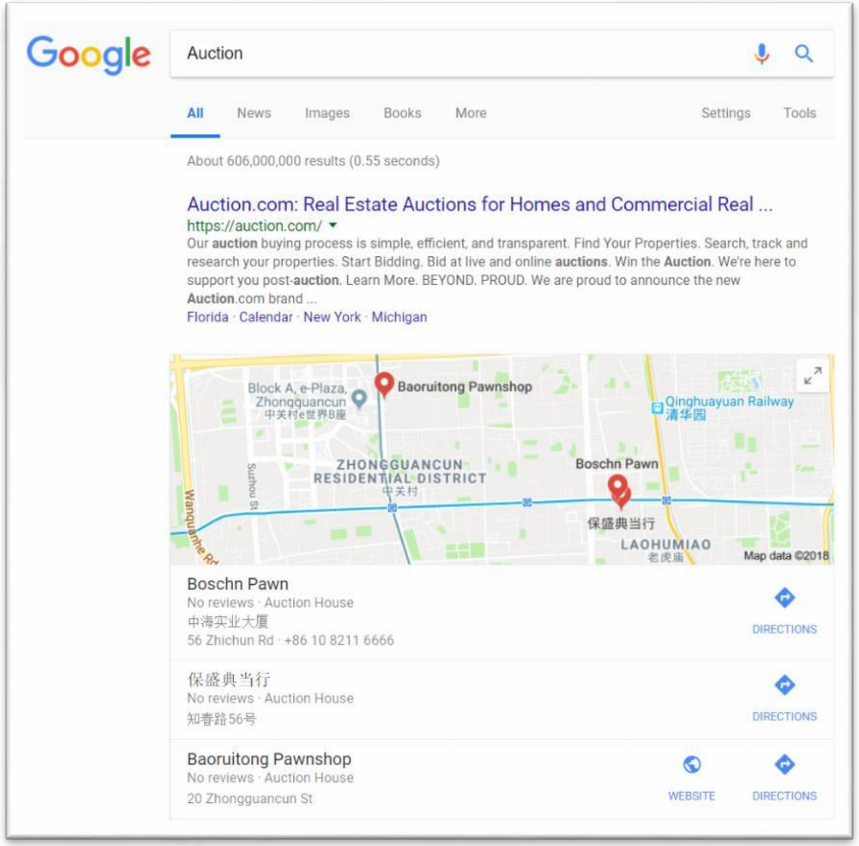
第六讲：算法博弈论（1）

内容提纲

1. 算法博弈论整体介绍
2. 算法化机制设计概念
3. 拍卖及完美拍卖介绍
4. **拍卖机制设计的应用**

完美拍卖案例：搜索引擎竞价拍卖

- 搜索引擎竞价拍卖（Sponsored Search Auctions）
  - 2019年谷歌的广告搜索收益1348 亿美元，占比**70.9%**；
  - 2019年百度的广告搜索收益781 亿元，占比**72.7%**。



完美拍卖案例：搜索引擎竞价拍卖

- 搜索引擎竞价拍卖基本模型：多物品拍卖模型
  - 物品：每个特定关键词的搜索页面包含的 k 个广告位
  - 竞拍者：比如相机关键词的竞拍者可能是索尼、尼康等厂商
  - 每个物品的价值不一样，使用点击率（CTR）评估其价值
    - 第 i 个广告位的CTR用 α_i 表示，$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_k$
  - 每个广告商 i 有一个私有价值 v_i：v_i可以认为是他的广告被点击给他带来的收益，因此，第 j 个广告位给他带来的期望收益为 $v_i\alpha_j$
- 问题：如何设计拍卖规则？是否有完美的搜索引擎竞价拍卖呢？
  - 社会福利最大化：$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i$，x_i代表厂商 i 竞得的广告位对应的CTR值，如果没有竞得任何广告位则为0
  - 一个厂商只能得一个广告位，一个广告位只能给一个厂商

案例研究：搜索引擎竞价拍卖

定义：完美拍卖（Ideal Auction）

满足下面三个条件的拍卖称为完美拍卖：
1. 强动机保证：它是一个满足DSIC特性的拍卖
2. 强效果保证：它是社会福利最大化的拍卖
3. 计算高效性：可在多项式（最好是线性）时间复杂度内计算实现

DSIC特性：Dominant-Strategy Incentive Compatible

在一个拍卖中，如果对于每一个竞拍者，真实报价总是占优策略，并且真实报价总是得到非负的收益，那么我们就称该拍卖具备DSIC特性

- 搜索引擎竞价拍卖机制设计
  - 选择哪个厂商赢得哪个广告位？广告位售价多少？
- 两阶段设计方法
  - 步骤（1）：假设所有竞拍者都真实报价，我们如何为广告商分配广告位从而使得要求2和要求3满足？
  - 步骤（2）：假设已经有了步骤（1）的答案，我们如何给广告位设定售价从而使得要求1得到满足？
- 如果我们能完成这两步，就会得到一个完美拍卖
  - 步骤（2）保证了DSIC特性，因此竞拍者会真实报价
  - 这正好满足了步骤（1）的条件，而步骤（1）可以保证社会福利最大化和计算高效性，因此满足完美拍卖的三个要求

案例研究：搜索引擎竞价拍卖

- 步骤（1）：假设所有竞拍者都真实报价，如何为广告商分配广告位从而使得社会福利最大化并且可以高效计算?
  - 回忆：社会福利$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i$，x_i代表厂商 i 竞得的广告位对应的CTR值，如果没有竞得任何广告位则为0
  - 直接采用简单的贪心算法就可满足：为出价第 i 高的广告商分配第 i 好的广告位
  - 也就是将广告商的出价按照由高到低排序，分别放到按照点击率由高到低排序的位置中，计算效率非常高
- 步骤（2）：如何设定广告位的售价从而使得DSIC特性得到满足?
  - 是否有类似于第二价格拍卖那样，找到一种售价的制定规则，使得所有广告商的占优策略是真实报价且收益非负？有，麦尔森定理！

麦尔森定理（Myerson's Lemma）

- 拍卖：一个用于交换物品和钱的特殊机制
- 单参数环境：
  - n个智能体，每个智能体 i 有一个私有的非负评估值v_i，表示它对于得到的单位物品的估价
  - 可行集X，它的每一个元素是一个非负的n维向量$(x_1, \ldots, x_n)$，其中 x_i 表示分给智能体i的物品数量
- 实例对应
  - 单物品拍卖：X是由01向量（至多有一个1）组成的集合，$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1$
  - k-物品拍卖：k个相同的物品，X是由01向量组成的集合，$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq k$
  - 搜索引擎竞价拍卖：如果第i个广告商安排了第j个位置，x_i等于位置j的点击率α_j

麦尔森定理（Myerson’s Lemma）

- 分配和支付规则：对应密封拍卖中的“谁赢得拍卖”和“谁支付多少”的问题。
  - 从所有竞拍者收集他们的竞价$b = (b_1, \dots, b_n)$，组成竞价向量
  - 分配规则：选择一个合适的分配方式$x(b) \in X \subseteq \mathbb{R}^n$作为竞价的函数；
  - 支付规则：选择一个支付方式$p(b) \in \mathbb{R}^n$作为竞价的函数；
- 上述过程也称为直接显式机制（direct-revelation mechanisms）
- 收益函数： $u_i(b) = v_i \cdot x_i(b) - p_i(b)$
- 对于支付规则的限制： $p_i(b) \in [0, b_i \cdot x_i(b)]$
  - 大于0要求拍卖者不能赔钱
  - 小于$b_i \cdot x_i(b)$ 要求真实报价的竞拍者收益为正

麦尔森定理（Myerson’s Lemma）

- 麦尔森定理相关的一些定义

定义：分配规则的可实现性（Implementable Allocation Rule）

在单参数环境下，当分配规则x有一个对应的支付规则 p 使得 (x,p) 具有DSIC特性，那么就称这个分配规则 x 是可实现的。

- 如果我们想要设计一个满足DSIC特性的拍卖，那么设计的分配规则必须是可实现的
  - 回到我们的竞价拍卖问题，为出价第 i 高的广告商分配第 i 好的广告位这一分配规则（已经满足社会福利最大化和可高效计算）是否可实现呢？如果可以，我们就找到了一个完美的竞价拍卖！
  - 回忆单物品拍卖，将物品给出价最高者这一分配规则可实现吗？
  - 可以，对应的支付规则是：**以所有出价第二高的价格购得物品**！

麦尔森定理（Myerson’s Lemma）

- 麦尔森定理的内容

麦尔森定理（Myerson’s Lemma）

固定一个单参数环境：

a. 一个分配规则 x 是可实现的当且仅当它是单调的
b. 如果一个分配规则 x 是单调的，那么存在一个唯一的支付规则使得 (x, p) 具有DSIC特性
c. 上述支付规则可以通过具体的计算公式给出

- 定理分析
  - 内容a表明分配规则的可实现性和单调性是等价的，单调性更有实用价值，因为比较容易验证
  - 内容b说明当分配规则可实现时有唯一的支付规则可以确保DSIC特性
  - 内容c说明有公式来直接计算支付规则，非常方便

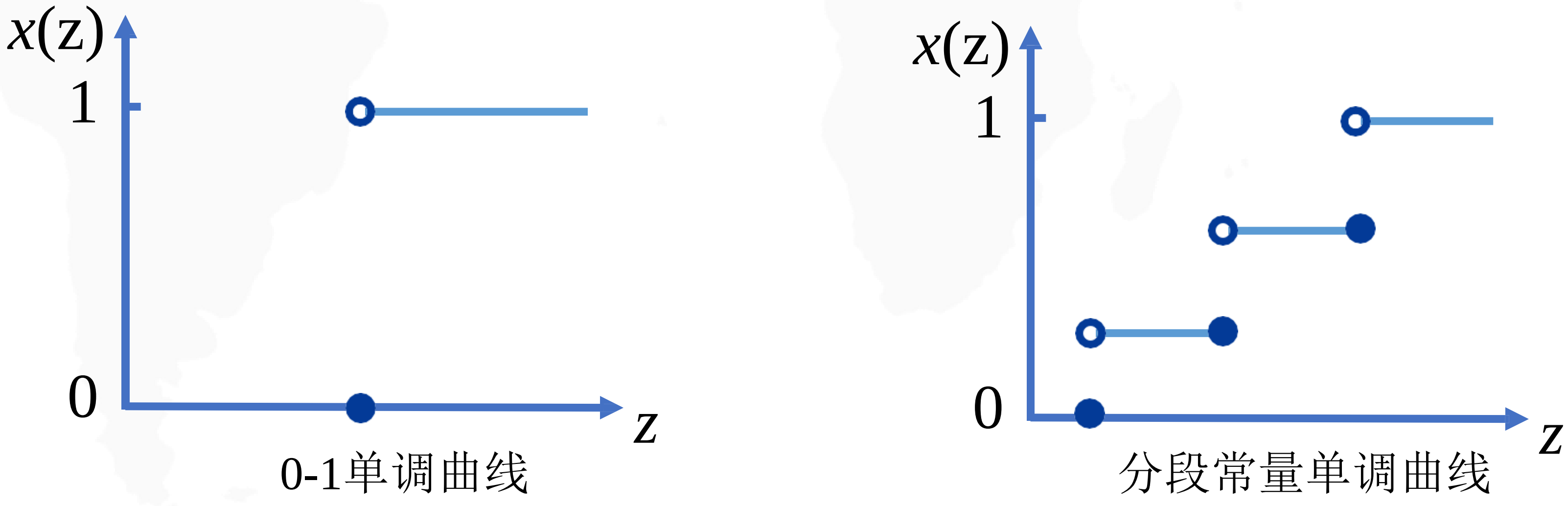
麦尔森定理（Myerson's Lemma）

• 麦尔森定理的内容

见参考书籍《Twenty Lectures on Algorithmic Game Theory》的第3.4节。证明中得到的一个结论：**麦尔森支付公式**

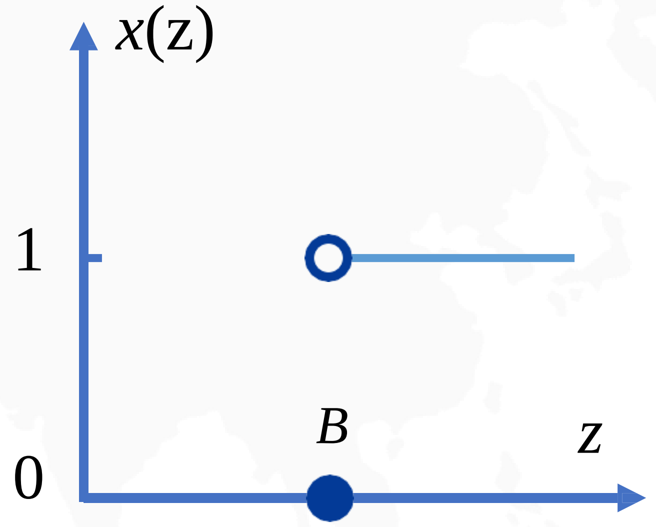
$$p_i(b_i, b_{-i}) = \sum_{j=1}^{l} z_j \cdot \left[\text{jump in } x_i(\cdot, b_{-i}) \text{ at } z_j\right]$$

其中$z_1, z_2, \ldots, z_l$为分配函数$x_i(\cdot, \boldsymbol{b}_{-i})$在区间$[0, b_i]$中的断点



麦尔森定理（Myerson's Lemma）

- 麦尔森定理的应用：单物品拍卖
  - 分配规则是将物品分配给最高出价的竞拍者
  - 分配规则满足单调性，因此可实现
  - 存在唯一的支付规则使得拍卖具有DSIC特性
  - 如何设计支付规则?



解答：使用麦尔森支付公式

$$p_i(b_i,\boldsymbol{b}_{-i}) = \sum_{j=1}^{l} z_j \cdot [\text{jump in } x_i(\cdot,\boldsymbol{b}_{-i}) \text{ at } z_j]$$

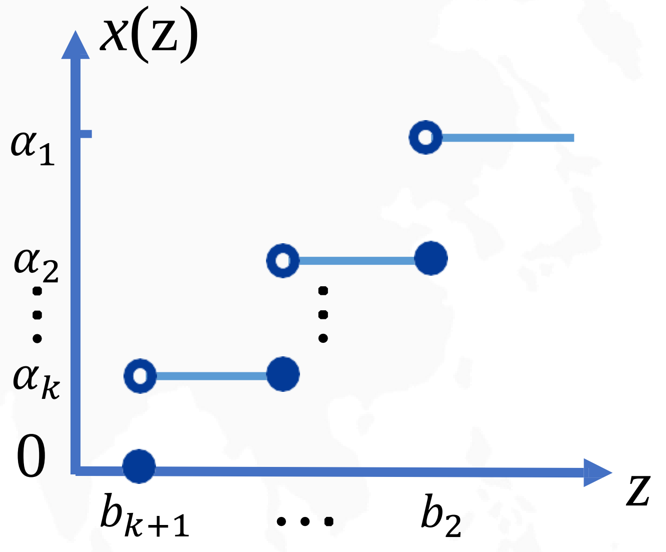
$$B = \max_{j\neq i} b_j$$

对于单物品最高出价获得拍卖品的原则，只有一个跳跃点：在B处，跳跃的高度为1，因此，当参与者i成功竞拍 $p_i(b_i,\boldsymbol{b}_{-i}) = B$，否则$p_i(b_i,\boldsymbol{b}_{-i}) = 0$

单物品拍卖所用的第二价格支付规则合理

麦尔森定理（Myerson’s Lemma）

- 麦尔森定理的应用：搜索引擎竞价拍卖
  - 给定k个按照点击率由高到低排序($\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_k$)的位置，分配规则：为出价第$i$高的广告商分配第$i$好的广告位
  - 分配规则满足单调性，因此可实现
  - 存在唯一的支付规则使得拍卖具有DSIC特性
  - 如何设计支付规则?



解答：给定一个竞价向量$\mathbf{b}$，从高到低将出价重排：$b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$。以第一个竞价者为例，固定其他出价，将第一个竞价者的出价由0逐渐增加到b_1，当z成为第j高的出价时，就会有一个在$\alpha_j - \alpha_{j+1}$的跳跃

根据麦尔森支付公式，可以得到:

$$p_i(\mathbf{b}) = \sum_{j=i}^{k} b_{j+1} \cdot \left(\alpha_j - \alpha_{j+1}\right)，其中\alpha_{k+1} = 0$$

最右边的跃点在$z = b_2$，一旦$z > b_2, x_i(z, \boldsymbol{b}_{-i}) = \alpha_1$，跳跃大小$\alpha_1 - \alpha_2$

最左边的跃点在$z = b_{k+1}$，一旦$z > b_{k+1}, x_i(z, \boldsymbol{b}_{-i}) = \alpha_k$，跳跃大小$\alpha_k - \alpha_{k+1} = \alpha_k$

拍卖机制设计及应用小结

- 拍卖的DSIC特性：对于每一个竞拍者，真实报价总是占优策略，并且真实报价总是得到非负的收益
- 社会福利最大化：如果竞拍者都真实报价，竞拍的结果能够最大化社会福利$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i$
- 完美拍卖：满足DSIC、社会福利最大化、可以高效计算；第二价格拍卖是完美拍卖；设计完美拍卖两步走：
  - **步骤1：假设真实报价，设计分配规则满足社会福利最大化并可高效计算**
  - **步骤2：设计支付规则使得DSIC特性成立，也就是真实报价是占优策略**

> 分配规则可实现：存在一个支付规则，使得DSIC满足，因此目标变成寻找可实现的分配规则
> 分配规则可实现与单调是等价的，因此寻找单调的分配规则即可
> 有了单调的分配规则，麦尔森支付公式可以直接找到对应的支付规则

本讲内容小结

- **算法博弈论研究内容**
- **算法化机制设计概念**
- **拍卖及完美拍卖**
- **完美拍卖应用案例**

知识点

能力线

- **算法博弈论**：博弈论+算法，学科交叉能力
- **机制化设计**：如何设计一个好的制度？

- **算法博弈论启示**：

① 要知其然、知其所以然，还要知其何以做

② 学会正向和逆向博弈

价值面

感谢大家认真听讲

兴军亮

jlxing@nlpr.ia.ac.cn

2024年4月1日