Полиноми. Действия.
Правило на Хорнер

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$.

x - независима променлива
n - степен на полинома
$a_0 \dots a_n$ - коефициент
a_n - свободен
a_0 - старши коефициент

$P_0(x) = a$ константа

$P_1(x) = ax + b$

$P_2(x) = ax^2 + bx + c$

$P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$x = \alpha$

$P_n(\alpha)$ заместване x с α

$P_n(\alpha) = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \dots a_{n-1}\alpha + a_n$

$P(x) = 4x^3 - 10x - 12$

$x = 1$

$4 - 10 - 12 = -6 - 12 = -18$

$x = 2 \rightarrow$ нула на полинома

$32 - 20 - 12 = 0$

Ако $P_n(x)$ при $x = \alpha$ има стойност 0, т.е $P_n(\alpha) = 0$, то $x = \alpha$ е нула на полинома

Ако е уравнение, тогава говорим за $\boxed{\text{корен}}$

най-много n-нули

2. Действия - + - * /

стандартни алгебрични действия

$(2x+3)(x^2-x+5) = 2x^3 \underline{-2x^2} + 10x \underline{+3x^2} - 3x + 15 =$
$= 2x^3 + x^2 + 7x + 15$

Деление е новото

делимо

$\frac{25}{7} = 3 + \frac{4}{7}$ остатък

делител, частно

$$\boxed{\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = G_{m-n}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)}}$$

частно, остатък

$\boxed{0 \le k \le m-1}$

$/ \cdot Q_m(x)$

$n \ge m$

Полиномите се делят точно при остатък 0

$$P_n(x) = G_{m-n}(x) \cdot Q_m(x) + R_k(x)$$

1) Да се разделят полиномите:

Непосредствено деление

$P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 2$

$Q(x) = x^2 + 2x + 3$

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - x^2 + 3x - 2 & x^2 + 2x + 3 \\ -(2x^3 + 4x^2 + 6x) & \overline{2x - 5} \text{ частно} \\ \hline -5x^2 - 3x - 2 & \\ -(-5x^2 - 10x - 15) & \\ \hline 7x + 13 \text{ остатък} & \end{array}$$

падналa е под степента на делителя

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 2x - 5 + \frac{7x+13}{x^2+2x+3}$$

резултат

$f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5x - 6$
$g(x) = x^2 + 3x - 1$

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{2x^4} + 0x^3 - 3x^2 + 5x - 6 & x^2 + 3x - 1 \\
-\cancel{2x^4} + 6x^3 - 2x^2 & \overline{2x^2 - 6x + 17} \\
\hline
\cancel{-6x^3} - x^2 + 5x - 6 & \\
-\cancel{-6x^3} + 18x^2 + 6x & \\
\hline
\cancel{17x^2} - x - 6 & \\
-\cancel{17x^2} + 51x - 17 & \\
\hline
-52x + 11 &
\end{array}
$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 2x^2 - 6x + 17 + \frac{-52x + 11}{x^2 + 3x - 1}$$

Метод на неопределените коефициенти

3

$f(x) = 8x^3 - 5x^2 + 7x + 4$
$g(x) = x^2 - x + 1$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = G_1(x) + \frac{R_1(x)}{g(x)}$$

$$\frac{8x^3 - 5x^2 + 7x + 4}{x^2 - x + 1} = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - x + 1} \qquad a, b, c, d = ?$$

$$8x^3 - 5x^2 + 7x + 4 = (ax + b)(x^2 - x + 1) + cx + d$$
$$8x^3 - 5x^2 + 7x + 4 = ax^3 - ax^2 + ax + bx^2 - bx + b + cx + d$$
$$ax^3 + (b - a)x^2 + (a - b + c)x + b + d$$

$8 = a$ $\quad$ $a=8$

$-5 = b - a$ $\quad$ $-5 = b - 8$ $\quad$ $b=3$

$7 = a - b + c$ $\quad$ $7 = 8 - 3 + c$ $\quad$ $7 = 5 + c$ $\quad$ $c=2$

$4 = b + d$ $\quad$ $4 = 3 + d$ $\quad$ $d = 1$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 8x + 3 + \frac{2x+1}{g(x)}$$

3. Правило на Хорнер

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots a_{n-1}x + a_n$$

$$Q(x) = x - \alpha$$

$$\frac{P_n(x)}{x-d} = C_{n-1}(x) + \frac{r}{x-\alpha}$$

$$C_{n-1}(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots b_{n-1}x + b_{n-1}$$

	a_0	a_1	a_2	....	a_{n-1}	a_n
α	$b_0 = a_0$	b_1	b_2			r → остатък стойността на полинома при $\alpha = x$
		$\alpha a_0 + a_1$	$\alpha \cdot b_1 + a_2$			

(4)

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$$

$$g(x) = x - 1$$

	1	-2	4	-6	8
1	1	-1	3	-3	5
2	1	0	4	2	12

$$\boxed{\frac{f(x)}{g(x)} = x^3 - x^2 + 3x - 3 + \frac{5}{g(x)}}$$

$f(x) = (x^3 - x^2 + 3x - 3)(x-1) + 5$

$f(1) = 5$ стойността на полинома при x=1 и резултат от делението

$f(2) = 12$ деление $\frac{f(x)}{x-2}$

(5)

$f(x) = x^5 - 3x^2 + 2$; $f(3)$, $\frac{f(x)}{x-3}$, $\frac{f(x)}{x+2}$

	1	0	0	-3	0	2
3	1	3	9	24	72	218

$$\frac{f(x)}{x-3} = x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 24x + 72 + \frac{218}{x-3}$$

-2	1	-2	4	-11	22	-42

$$\frac{f(x)}{x+2} = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 11x + 22 + \frac{-42}{x+2}$$

$P_n(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha$ е нула на полинома

може да има многократни нули

α е k-кратна нула на $P_n(x)$, ако
$P_n(x) = (x-\alpha)^k \cdot Q_{n-k}(x)$, при $Q(\alpha) \neq 0$

да ограничим числата

Тв: Нека $P_n(x)$ е полином с цели коефиц. Ако несъкратимата дроб $\frac{p}{q}$ е нула на полинома, то p е делител на своб. член, а q е делител на старшия коеф.

(6)

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$q = \pm 1$

$\frac{p}{q} = 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$

	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	0
-1	1	-7	18	-24
2	1			

нулите на този полином ~~с $\frac{p}{q}$ проверяване~~

$f(x) = (x-1)(x^2-5x+6)$ $\quad D = 25 - 24 = 1$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = 3, 2$

1, 3, 2 нули на полинома

$f(x) = 1.(x-1)(x-3)(x-2)$

ст. коеф ← Каноничен вид

(7)

$x^4+2x^3-3x^2-8x-4=0$

$p=\pm 1, \pm 2, \pm 4$

$q=\pm 1$

$\frac{p}{q}=1, -1, 2, -2, 4, -4$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 2 & -3 & -8 & -4 \\
1 & 1 & 3 & 0 & -8 & -12 \\
-1 & 1 & 1 & -4 & -4 & 0
\end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^3+x^2-4x-4)$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 1 & -4 & -4 \\
-1 & 1 & 0 & -4 & 0
\end{array}$$

$(x+1)^2(x^2 \cancel{2x} -4)$

$(x+1)^2(x-2)(x+2)$

$-1 \quad 2 \quad -2$ корени

(8)

$2x^3-x^2-18x+9=0$

$p=\pm 1, \pm 3, \pm 9$

$q=\pm 1, \pm 2$

$\frac{p}{q}=1, -1, 3, -3, 9, -9, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, -\frac{9}{2}$

	2	-1	-18	9
1	2	1	-18	-9
-1	2	-3	16	7
3	2	5	-3	0
3	2	11	30	

$2x^2+5x-3$

$D = 25+24 \quad \sqrt{49}=7$

$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{4}$ — -3, $\frac{1}{2}$

9. Да се намерят нулите

$x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$

$p = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

$q = \pm 1$

$\frac{p}{q} = 1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8$

	1	-5	7	-2	4	-8
1	1	-4	3	1	5	-3
-1	1	-6	13	-15	19	
2	1	-3	1	0	4	0
~~-2~~	~~1~~	~~-7~~	~~x1~~	~~-44~~		
2	1	-1	-1	-2	0	
2	1	1	1	0		

$f(x) = (x+2)^3(x^2+x+1)$ решаваме квадр.

Отг. -2 – трикратен корен

(10)

$6x^4+7x^3+6x^2-1=0$

$p=\pm 1$

$q=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$\frac{p}{q}= 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$

	6	7	6	0	-1
1	6	13	19	19	18
-1	6	1	5	-5	4
$\frac{1}{2}$	6	10	11	$\frac{11}{2}$ ...	
$-\frac{1}{2}$	6	4	4	-2	0
$-\frac{1}{2}$	6	1	...		
$\frac{1}{3}$	6	6	6	0	

$f(x)= 6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(6x^2+6x+6\right)$ $D<0$

x^2+x+1

$-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$

↓

ано се търси само реални корени

(16)

$6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1 = 0$

$p = \pm 1$

$q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$\frac{p}{q} = 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$

	6	7	6	0	-1
1	6	13	19	19	18
-1	6	1	5	-5	4
$\frac{1}{2}$	6	10	11	$\frac{11}{2}$ ...	
$-\frac{1}{2}$	6	4	4	-2	0
$-\frac{1}{2}$	6	1	...		
$\frac{1}{3}$	6	6	6	0	

$f(x) = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(6x^2 + 6x + 6\right)$ $\quad D < 0$

$x^2 + x + 1$

$-\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{3}$

ако се бараат само реални корени

(10)

$6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1 = 0$

$p = \pm 1$

$q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$\frac{p}{q} = 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$

	6	7	6	0	-1
1	6	13	19	19	18
-1	6	1	5	-5	4
$\frac{1}{2}$	6	10	11	$\frac{11}{2}$ ...	
$-\frac{1}{2}$	6	4	4	-2	0
$-\frac{1}{2}$	6	1	....		
$\frac{1}{3}$	6	6	6	0	

$f(x) = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)(6x^2 + 6x + 6)$ $D < 0$

$x^2 + x + 1$

$-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$

ако се търсят само реални корени

(16)

$6x^4+7x^3+6x^2-1=0$

$p=\pm 1$

$q=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$\frac{p}{q}= 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$

	6	7	6	0	-1
1	6	13	19	19	18
-1	6	1	5	-5	4
$\frac{1}{2}$	6	10	11	$\frac{11}{2}$ ...	
$-\frac{1}{2}$	6	4	4	-2	0

$-\frac{1}{2}$	6	1	...	
$\frac{1}{3}$	6	6	6	0

$f(x)=6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(6x^2+6x+6\right)$ $\quad D<0$

x^2+x+1

$-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3}$

$\downarrow$

ако се търсят само реални корени

(16)

$$6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1 = 0$$

$p = \pm 1$

$q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$\frac{p}{q} = 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$

	6	7	6	0	-1
1	6	13	19	19	18
-1	6	1	5	-5	4
$\frac{1}{2}$	6	10	11	$\frac{11}{2}$ ...	
$-\frac{1}{2}$	6	4	4	-2	0

$-\frac{1}{2}$	6	1	...	
$\frac{1}{3}$	6	6	6	0

$$f(x) = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(6x^2 + 6x + 6\right) \quad D < 0$$

$x^2 + x + 1$

$-\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{3}$

ако се бара само реални корени

(10)

$6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1 = 0$

$p = \pm 1$

$q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$\frac{p}{q} = 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$

	6	7	6	0	-1
1	6	13	19	19	18
-1	6	1	5	-5	4
$\frac{1}{2}$	6	10	11	$\frac{11}{2}$ ...	
$-\frac{1}{2}$	6	4	4	-2	0
$-\frac{1}{2}$	6	1	...		
$\frac{1}{3}$	6	6	6	0	

$f(x) = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(6x^2 + 6x + 6\right)$ $D < 0$

$x^2 + x + 1$

$-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$

ако се търси само реални корени

(10)

$6x^4+7x^3+6x^2-1=0$

$p=\pm 1$

$q=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$\frac{p}{q}= 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$

	6	7	6	0	-1
1	6	13	19	19	18
-1	6	1	5	-5	4
$\frac{1}{2}$	6	10	11	$\frac{11}{2}$	...
$-\frac{1}{2}$	6	4	4	-2	0
$-\frac{1}{2}$	6	1	...		
$\frac{1}{3}$	6	6	6	0	

$f(x)=6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(6x^2+6x+6\right)$ $D<0$

x^2+x+1

$-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$

↓

аио се тюрсо само реални корени

(16)

$$6x^4+7x^3+6x^2-1=0$$

$p = \pm 1$

$q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$\frac{p}{q} = 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$

	6	7	6	0	-1
1	6	13	19	19	18
-1	6	1	5	-5	4
$\frac{1}{2}$	6	10	11	$\frac{11}{2}$ ...	
$-\frac{1}{2}$	6	4	4	-2	0
$-\frac{1}{2}$	6	1	...		
$\frac{1}{3}$	6	6	6	0	

$$f(x) = 6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(6x^2+6x+6\right) \quad D<0$$

x^2+x+1

$-\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{3}$

ако се бара
само реални
корени