Зад 1. Да се провери сравними ли са числата 324 и 213 с числото 51 по модул 7.

а) $a = 324$ $b = 51$ $m = 7$

$a - b = 273$

$$\begin{array}{l} 273 : 7 = 39(0) \\ -21 \\ \hline \ \ 63 \\ -63 \\ \hline \ \ \ 0 \end{array}$$

$324 \equiv 51 \pmod 7$

сравнимо е

б) $a = 213$ $b = 51$ $m = 7$

$a - b = 162$

$$\begin{array}{l} 162 : 7 = 23(1) \\ 14 \\ \hline \ \ 22 \\ -21 \\ \hline \ \ \ 1 \end{array}$$

$213 \not\equiv 51 \pmod 7$

Зад 2 Да се сравнят числата 25, 62, 179 и 282 по модул 11.

а) $25 \equiv b \pmod{11}$ $\quad 25 = 11.2 + 3 \Rightarrow \boxed{25 \equiv 3 \pmod{11}}$

б) $62 \equiv b \pmod{11}$ $\quad 62 = 5.11 + 7 \Rightarrow 62 \equiv 7 \pmod{11}$

в) $179 \equiv b \pmod{11}$ $\quad 179 = 16.11 + 176 + 3 \Rightarrow \boxed{179 \equiv 3 \pmod{11}}$

г) $282 \equiv b \pmod{11}$ $\quad 282 = 11.25 + 7 \Rightarrow 282 \equiv 7 \pmod{11}$

$\cancel{62 \equiv}\ 282 \equiv 62 \pmod{11} \quad 179 \equiv 25 \pmod{11}$

зад3. Да се провери дали числата 15, 21, -8, 3, 19 образуват пълна система ост по модул 5

$15 \equiv 0 \pmod 5$ числата са 5 на брой
$21 \equiv 1 \pmod 5$
$-8 \equiv 2 \pmod 5$ числата са представители на
$3 \equiv 3 \pmod 5$ $3<m$ различни класове остатъци по
$19 \equiv 4 \pmod 5$ модул 5 (т.е са несравними две по две)

$\Rightarrow$ образуват пълна система

зад4. Да се запише пълна система $A_m$ от най-малките неотрицателни остатъци по модул m:

а) $m=5$ б) $m=10$

$A_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$A_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

зад5. Да се запише пълна с-ма $B_m$ от най-малките положителни остатъци по модул m:

а) $m=7$ б) $m=8$

$B_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$B_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Зад 6 Да се запише пълна система $C_m$ от най-малките по абсолютни стойност остатъци по модул $m$:

а) $m=5$  б) $m=8$

$A_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$4 \equiv -1 \pmod 5$
$3 \equiv -2 \pmod 5$
$2 \equiv -3 \pmod 5$  $|2| < |-3|$

$$\boxed{C_5 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}}$$

$A_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$7 \equiv -1 \bmod (8)$
$6 \equiv -2 \bmod (8)$
$5 \equiv -3 \pmod 8$
$4 \equiv -4 \pmod 8$  $|4| = |-4|$

$$\boxed{C_8 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}}$$ или

$$\boxed{C'_8 = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}}$$

зад 7. Кои числа трябва да се отстранят от множеството $A=\{4,6,10,13,17,24,35,44,47,75,83,89\}$ за да се получи редуцирана с-ма от по модул 8?

$13 \equiv 5 \pmod 8$

$17 \equiv 1 \pmod 8$

$35 \equiv 3 \pmod 8$

$47 \equiv 7 \pmod 8$

$\cancel{75 \equiv 3 \pmod 8}$

$\cancel{83 \equiv 3 \pmod 8}$

$\cancel{89 \equiv 1 \pmod 8}$

$\varphi(8) = \varphi(2^3) = 4$

$\tilde{A} = \{13, 17, 35, 47\}$

зад 8 Да се намери най-малкото естествено число $x$, за което:

а) $7^{142} \equiv x \pmod{19}$

$a=7 \quad p=19 \quad (7,19)=1$

$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

$7^{18} \equiv 1 \pmod{19} \quad |^{7}$

$7^{126} \equiv 1 \pmod{19}$

$7^{2}$

а) Започваме с малки степени. Целта е да стигнем до 1.

$7 \equiv 7 \pmod{19}$

$7^2 \equiv 49 \equiv 11 \pmod{19} \quad |\cdot 7$

$\cancel{7^3 \equiv 77 \pmod{19}}$

$7^3 \equiv 77 \equiv 1 \pmod{19} \qquad 142 = 3 \cdot 47 + 1$

$7^{142} = (7^3)^{47} \cdot 7 \equiv 1^{47} \cdot 7 \equiv 7 \pmod{19}$

$x = 7$

б) $2^{236} \equiv x \pmod{7}$

$2 \equiv 2 \pmod{7}$

$2^2 \equiv 4 \equiv 4 \pmod{7}$

$2^3 \equiv 1 \pmod{7} \qquad 2^{236} = (2^3)^{78} \cdot 2^2 \equiv 1^{78} \cdot 4 \equiv 4 \pmod{7}$

$\Rightarrow x = 4$

b) $3^{2022} \equiv x \pmod{11}$

$3 \equiv 3 \pmod{11}$
$3^2 \equiv 9 \equiv 9 \pmod{11}$ $| \cdot 3$
$3^3 \equiv 27 \equiv 5 \pmod{11}$ $| \cdot 3$
$3^4 \equiv 15 \equiv 4 \pmod{11}$ $| \cdot 3$
$3^5 \equiv 12 \equiv 1 \pmod{11}$

$2022 = 5 \cdot 404 + 2$

$\Rightarrow (3^5)^{404} \cdot 3^2 \equiv 1^{404} \cdot 3^2 \equiv \boxed{9} \pmod{11}$

зад 9. Да се намери ост. от делението на $6^{513}$ с 103.

$6^{513} \equiv x \pmod{103}$

$6^{102} \equiv 1 \pmod{103}$

$6^{513} = (6^{102})^5 \cdot 6^3 \equiv 1 \cdot 6^3 = 216 \equiv 10 \pmod{103}$

зад 10. Да се намерят последните две цифри на числото $1423^{162}$

$$1423^{162} \equiv x \pmod{100} \qquad 1423 \equiv 23 \pmod{100}$$

$$\Rightarrow 1423^{162} \equiv 23^{162} \pmod{100}$$

↳ можем да търсим посл. 2 цифри на това число

$$m = 100 = 2^2 \cdot 5^2$$

$$\varphi(100) = 100\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 40$$

23 и 100 - взаимно прости

$$23^{40} \equiv 1 \pmod{100}$$

$$23^{162} = 23^{4\cdot 40+2} = (23^{40})^4 \cdot 23^2 \equiv 1^4 \cdot 23^2 \equiv 23^2 \equiv 529 \equiv 29 \pmod{100}$$

$\Rightarrow 1423^{162}$ завършва на $\boxed{29}$

Зад 11 Да се намери показателят на 3 по модул 4.

$3 \equiv 3 \pmod{4}$

$3^2 \equiv 1 \pmod{4}$ $\boxed{3 \in 2 \bmod 4}$

Зад 12 -"- 3 -"- 11

$3 \equiv 3 \pmod{11}$

$3^2 \equiv -2 \pmod{11}$

$3^3 \equiv -6 \equiv 5 \pmod{11}$

$3^4 \equiv (-2)^2 \equiv 4 \pmod{11}$

$3^5 \equiv 4 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{11}$

$\Rightarrow 3 \in 5 \bmod 11$

Зад13. Да се намери показателят на 7 по модул 5

$a=7 \quad m=15 \quad (7,15)=1$

$\Rightarrow$ 7 има показател по модул 15 и $k \mid \varphi(15)$

$\varphi(15)=\varphi(3)\varphi(5)=2.4=8$

$k \mid 8 \quad \Rightarrow k \in \{2,4,8\}$

$k=2 \quad 7^2 = 49 \equiv 4 \bmod 15$

$k=4 \quad 7^4 \equiv 16 \equiv 1 \pmod{15}$

$7 \in 4 \bmod 15$