$$e^{-i\left(\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} = e^{\overbrace{\frac{\pi}{4}+2k\pi}^{Re} - \overbrace{i\ln\sqrt{2}}^{Im}} =$$

$$= e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi} \cdot e^{-i\ln\sqrt{2}} = e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}\left(\cos(-\ln\sqrt{2}) + i\sin(-\ln\sqrt{2})\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi} \cdot \cos(-\ln\sqrt{2}) \\ y &= e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi} \cdot \sin(-\ln\sqrt{2}) \end{aligned}} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Полиноми

1. Дефиниция

$f_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $(a_0 \neq 0)$, $a_0, a_1 \cdots a_{n-1}$, $a_n \in \mathbb{R}$, се нарича полином на x от степен n.

Числата $a_0, a_1 \ldots a_{n-1}$ се наричат коефициенти

a_n – свободен член

Означаване $f_n(x)$ $P_n(x)$, $Q_n(x)$ ...

$f_0(x) = a_0$ – полином от нулева степен

$f_1(x) = a_0x^1 + a_1$ – полином от първа степен

$f_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ – полином от втора степен и т.н.

2. Тъждественост на полиноми

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ е тъждествено равен на:

$Qm(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m$,

ако: 1) $n = m$; и
2) $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ ... $a_{n-1} = b_{m-1}$, $a_n = b_m$

3. Деление на полиноми

а) метод на неопределените коеф.

б) метод на непоср. деление

Правило за делене на два полинома

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots a_{n-1}x + a_n$ и

$Qm(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m$ е

$\frac{P_n(x)}{Qm(x)} = R_{n-m}$ ← "полином от степен" $n-m$

$= R_{n-m}(x) + \frac{r_k(x)}{Qm(x)}$, където

r_k ← "остатък"

$n \geq m$, $0 \leq k \leq m-1$

Правилото можем да запишем още така:

$P_n(x) = Q_m(x)\,R_{n-m}(x) + r_k(x)$

$P_n(x)$ - делимо, $Q_m(x)$ - делител, $R_{n-m}(x)$ - частно,

"ер"

и $r_k(x)$ - остатък

4. Метод на неопр. коеф.

Да се разделят полиномите:

$P_4(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5x - 6$ и

$Q_2(x) = x^2 + 3x - 1$

→ полином от 2 степен на x

Според правилото имаме:

$$\frac{2x^4 - 3x^2 + 5x - 6}{x^2 + 3x - 1} = ax^2 + bx + c + \frac{dx + e}{x^2 + 3x - 1}$$

Привеждаме под общ знаменател

$2x^4 - 3x^2 + 5x - 6 = (ax^2 + bx + c)(x^2 + 3x - 1) + dx + e$

или:

$2x^4 - 3x^2 + 5x - 6 = ax^4 + 3ax^3 - ax^2 + bx^3 + 3bx^2 - bx + cx^2 + 3cx - c +$
$dx + e$

още:

$2x^4 - 3x^2 + 5x - 6 = ax^4 + (3a+b)x^3 + (-a+3b+c)x^2 + (-b+3c+d)x$
$-c-e$

Като използваме т2 за тъжд на полиноми ще имаме

числото пред x^4

$$\begin{array}{c|l} x^4 & 2 = a \\ x^3 & 0 = 3a+b \\ x^2 & -3 = -a+3b+c \\ x^1 & 5 = -b+3c+d \\ x^0 & -6 = -c+e \end{array} \iff \begin{array}{|l} a=2 \\ b=-6 \text{ (заместване с a)} \\ c=17 \\ d=-52 \\ e=11 \end{array}$$

$$\frac{2x^4-3x^2+5x-6}{x^2+3x-1} = 2x^2-6x+17+\frac{-52x+11}{x^2+3x-1}$$

резултат

5. Метод на непоср. деление

$2x^4-3x^2+5x-6$

$2x^4 : x^2 = 2x^2$

x^2+3x-1

$2x^2$ (умн с x^2)

най-висока степен в делимото / -||- в делител

$$\begin{array}{l} \;\;2x^4-3x^2+5x-6 \\ -\;2x^4+6x^3-2x^2 \\ \hline \;\;-6x^3-x^2+5x-6 \\ -\;-6x^3-18x^2+6x \\ \hline \;\;17x^2-x-6 \\ -\;17x^2+51x-17 \\ \hline \;\;\underbrace{-52x+11}_{\text{остатък}} \end{array} \qquad \begin{array}{|l} x^2+3x-1 \\ \hline \underbrace{2x^2-6x+17}_{\text{частно}} \end{array}$$

Записваме делението така.

$$\frac{2x^4-3x^2+5x-6}{x^2+3x-1} = 2x^2-6x+17+\frac{-52x+11}{x^2+3x-1}$$

Правило на Хорнер

1. $P_3(x) = x^3+3x^2-3x-12$ и $Q_1(x) = x-2$

Делителят да е полином от вида $x-a$

$a=2$

св. число

	1	3	-3	-12
$a \leftarrow 2$	1	5	7	2

$2.1+3$

$2.5+(-3)$

$2.7+(-12)$

Записваме така

остатък

$$\frac{x^3+3x^2-3x-12}{x-2} = 1.x^2+5x+7+\frac{2}{x-2}$$

2. $P_4(x) = x^4+2x^2-3x+1$ и $Q_1(x) = x+2$

$$x+2 = x-(-2) \Rightarrow a=-2$$

няма x^3

	1	0	2	-3	1
-2	1	-2	6	-15	31

коеф. на частното

$$\frac{x^4+2x^2-3x+1}{x+2} = 1\cdot x^3-2x^2+6x-15+\frac{31}{x+2}$$

$P_{4-1}(x)$

Или $P_4(x) = x^4+2x^2-3x+1 = \cancel{x}(x+2)(x^3-2x^2+6x-15)+$
31

$P_4(-2) = (\underbrace{-2+2}_{0})(-2^3-2.2^2-6.2-15+31)$

$P_{(4)}\cdot(-2) = 31$

3. $P_3(x) = 2x^3-5x^2+7x+5$ и $Q_1(x) = 2x+1$

$Q_1(x) = 2x+1 = 2(x+\frac{1}{2}) = 2(x-(-\frac{1}{2})) \Rightarrow$

$a = -\frac{1}{2}$

	2	-5	7	5
$-\frac{1}{2}$	2	-6	10	0

$\to$ точно деление 0 ост (корен на пол)

$$\frac{2x^3-5x^2+7x+5}{2(x-\frac{1}{2})} = x^2-3x+5$$

$P_3(x) = (2x+1)(x^2-3x+5) \Rightarrow$

$P_3\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, $-\frac{1}{2}$ е нарича нула на полинома или корен на полинома

Нули на полиноми

1. Ако $P_n(x)$, $\frac{p}{q}$ (p,q - взаимно прости), то p е делител на a_n, а q е делител на a_0

$f_3(x)= x^3-6x^2+11x-6$

p е делител на $-6 \Rightarrow p= \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$
q е делител на $1 \Rightarrow q = \pm 1$

$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	$\boxed{0}$

$\Rightarrow$ числото 1 е 0 на пол

$f_3(x)=(x-1)(1x^2-5x+6)$

$x^2-5x+6=0 \quad D= 1$

$x_{12}= \frac{5 \pm 1}{2} \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$

$f_3(x)= (x-1)(x-3)(x-2)$

DATE ___ /

2. $f_5(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

$p = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

$q = \pm 1$

$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

	1	-5	7	-2	4	-8
1	1	-4	3	1	5	$-3 \neq 0$
-1	1	-6	13	-15	19	$-27 \neq 0$
2	1	-3	1	0	4	$\boxed{0} = 0$

$f_5(x) = (x-2)(x^4 - 3x^3 + x^2 + 4)$

нови коефициенти

	1	-3	1	0	4
2	1	-1	-1	-2	$\boxed{0}$

$f_5(x) = (x-2)(x-2)(\underbrace{x^3 - x^2 - x - 2})$

	1	-1	-1	-2
2	1	1	1	$\boxed{0}$

$f_5(x) = (x-2)^3(x^2 + x + 1)$ - каноничен вид

$D < 0$ не може да се разлага повече

няма повече реални 0

3. $f_4(x) = \underline{\underline{6}}x^4 - 23x^3 + 12x^2 + 11x - \underline{6}$

$p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm 6$

	6	-23	12	11	-6
1	6	-17	-5	6	$\boxed{0}$

$f_4(x) = (x-1)(6x^3 - 17x^2 - 5x + 6)$

	6	-17	-5	6
1	6	-11	-16	$-10 \neq 0$
$\frac{1}{2}$	6	-14	-12	$\boxed{0}$

$f_4(x) = (x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(6x^2 - 14x + 12) \to a(x-x_1)(x-x_2)$

$f_4(x) = (x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\underset{2.3}{6}(x-3)\left(x+\frac{2}{3}\right) =$

$= (x-1)(2x-1)(x-3)(3x+2)$

умножаване с тези множители

DATE

Делене

$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \qquad g(x) = x^2 - 3x + 1$

$$\begin{array}{l}
2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \\
-\underline{2x^4 - 6x^3 + 2x^2} \\
\quad 3x^3 + 2x^2 - 5x + 6 \\
\quad -\underline{3x^3 - 9x^2 + 3x} \\
\qquad 11x^2 - 8x + 6 \\
\qquad -\underline{11x^2 - 33x + 11} \\
\qquad\quad 25x - 5
\end{array}$$

остатък

$$\begin{array}{l} x^2 - 3x + 1 \\ \hline 2x^2 + 3x + 11 \end{array} = \boxed{2x^2 + 3x + 11 + \frac{25x - 5}{x^2 - 3x + 1}}$$

цялен резултат

няма нищо с което да умножим x^2 и да получим $25x - 5$

$f(x) = 3x^5 + 4x^4 + 4x^3 - 3 \qquad g(x) = x^3 + x^2 - 1$

$$\begin{array}{l}
-\ 3x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 0x^2 + 0x - 3 \\
\underline{3x^5 + 3x^4 \qquad\quad - 3x^2} \\
-\ x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 0x - 3 \\
\underline{x^4 + x^3 \qquad\quad - x} \\
-\ 3x^3 + 3x^2 + x - 3 \\
\underline{3x^3 + 3x^2 \qquad - 3} \\
\qquad\qquad x
\end{array}$$

остатък

$$\begin{array}{l} x^3 + x^2 - 1 \\ \hline 3x^2 + x + 3 \end{array} = 3x^2 + x + 3 + \frac{x}{x^3 + x^2 - 1}$$

Отговор

Съкратено полиномът $f_n(x)$ се записва така:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$$

~~3ад~~ Пример 1. $f(x) = x^3 - 2x + 6$

$f(-4) = (-4)^3 - 2(-4) + 6 = -50$

Тъждествено равен на нула $[f_n(x) = 0]$, ако той приема стойност нула за всяка стойност на X, т.е. ако $f_n(x) = 0$

Деление

$f_n(x)$ $g_m(x)$ $n \geq m$ $g_m(x) \neq 0$

единствени полиноми $q_{n-m}(x)$ и $r_s(x)$ $0 \leq s \leq m-1$

$f_n(x) = g_m(x) \cdot q_{n-m}(x) + r_s(x)$ метод на неопр коеф (1.1)

$f_n(x)$ делимо $g_m(x)$ делител $q_{n-m}(x)$ частно

$r_s(x)$ остатък

без остатък - точно деление

$$\frac{f_n(x)}{g_m(x)} = q_{n-m}(x) + \frac{r_s(x)}{g_m(x)}$$

Пример 2

$f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 8x - 1$

$g(x) = 2x^2 - 3x - 2$

Частното от делението ще бъде полином от трета степен - разликата от степените на делимото и делителя, а остатъкът ще бъде от степен най-много 1

Означаваме частното:

$q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,

Остатъка

$r(x) = ex + h$

$(1.1)\ 2x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 8x - 1 = (2x^2 - 3x - 2)(ax^3 + bx^2 + cx + d)$
$+ ex + h$

... дясната страна

$2x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 8x - 1 = 2ax^5 + (2b - 3a)x^4 + (2c - 3b - 2a)x^3 +$
$+ (2d - 2b - 3c)x^2 + (e - 2c - 3d)x + h - 2d$

Приравняваме коеф пред еднаквите степени на x от двете страни на равенството

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 2b - 3a = -3 \\ 2c - 3b - 2a = 6 \\ 2d - 2b - 3c = -8 \\ e - 2c - 3d = 8 \\ h - 2d = -1 \end{cases}$$

$a = 1 \quad b = 0 \quad c = 4 \quad d = 2 \quad e = 22 \quad h = 3$

$\Rightarrow q(x) = x^3 + 4x + 2 \; ; \; r(x) = 22x + 3$

$$\frac{2x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 8x - 1}{2x^2 - 3x - 2} = x^3 + 4x + 2 + \frac{22x + 3}{2x^2 - 3x - 2}$$

Нули на полиноми

$f_n(x_0) = 0$

Когато делителят е от първа степен: $g(x) = x - x_0$

частното е полином от степен $n-1$, r

$f_n(x) = (x - x_0)q_{n-1}(x) + r$

Пак $x = x_0$ $\quad r = f_n(x_0)$

$f_n(x) = (x - x_0)q_{n-1}(x)$ деление без остатък

$x = x_0$ - k - кратна нула на полинома $f_n(x)$

$f_n(x) = (x - x_0)^k q_{n-k}(x)$, $q_{n-k}(x_0) \neq 0$, $k = 1, 2, 3 \ldots$

еднократна, двукратна нула на полинома

$f(x) = (x-3)^2(x^2+1)$

$x^2 + 1 = 0$ - решенията са имагинерни числа $\pm i$

$i = \sqrt{-1}$ имагинерна единица $i^2 = -1$

Каноничен вид на полинома

Правилото на Хорнер

$f_n(x) = (x - x_0)q_{n-1}(x) + r$

$q_{n-1}(x) = b_0x^{n-1}$ частно r остатък

намиране на рационалните нули (цели и дробни)
рационалните корени (решения)

зад 1

$f(x) = 2x^5 - x^3 - 2x^2 + 4x + 8$

$g(x) = x^3 + x - 1$ | $2x^2 - 3$ $= 2x^2 - 3 + \frac{7x+5}{x^3+x-1}$

непосредствено деление

$$
\begin{array}{r}
2x^5 - 0x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x + 8 \\
-\;\; 2x^5 \qquad + 2x^3 - 2x^2 \qquad\qquad \\
\hline
-3x^3 \qquad + 4x + 8 \\
-\;\; -3x^3 \qquad - 3x + 3 \\
\hline
7x + 5
\end{array}
$$

$7x + 5$ - остатък

зад 2 неопределените коефициенти

Теорема 13

За всеки два полинома $f_n(x)$ и $g_m(x)$ при $n \geq m$ и $g_m(x) \neq 0$ съществуват еднозначно определени (единствени) полиноми $q_{n-m}(x)$ и $r_s(x)$, $0 \leq s \leq m-1$, за които е изпълнено равенството

$$f_n(x) = g_m(x) . q_{n-m}(x) + r_s(x)$$

$f_n(x)$ - делимо, $g_m(x)$ - делител, $q_{n-m}(x)$ - частно, $r_s(x)$ - остатък

$$\frac{f_n(x)}{g_m(x)} = q_{n-m}(x) + \frac{r_s(x)}{g_m(x)}$$

$$f(x) = 5x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 5x - 7$$
$$g(x) = x^3 - x + 2$$

$$\underbrace{\frac{5x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 5x - 7}{x^3 - x + 2} = ax + b + \frac{cx^2 + dx + e}{x^3 - x + 2}}_{x^3 - x + 2}$$

$$5x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 5x - 7 = (ax+b)(x^3 - x + 2) + cx^2 + dx + e$$
$$5x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 5x + 7 = ax^4 - ax^2 + 2ax + bx^3 - bx + 2b + cx^2 + dx + e$$
$$ax^4 + bx^3 + (c-a)x^2 + (2a - b + d)x + 2b + e$$

x^4	$5 = a$
x^3	$-2 = b$
x^2	$-3 = c - a$
x	$5 = 2a - b + d$
x^0	$7 = 2b + e$

$a = 5 \quad b = -2 \quad c = 2 \quad d = -7 \quad e = -3$

$\Rightarrow q = 5x - 2 \quad r_s(x) = 2x^2 - 7x - 3$

зад 3 правило на Хорнер

а) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - 8x - 1$, $g(x) = x - 2$

$a = 2$

	3	-4	-1	-8	-1
2	3	2	3	-2	-5

$= \frac{3x^4 - 4x^3 - x^2 - 8x - 1}{x - 2} = 3x^3 + 2x^2 + 3x - 2 - \frac{5}{x-2}$

б) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + x + 2$, $g(x) = x + 1$

$2x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 2$

$g(x) = x - (-1)$

$x = -1$

	2	0	-3	1	2
-1	2	-2	-1	2	$\boxed{0}$ остатък

нула на полинома

$\frac{2x^4 - 3x^2 + x + 2}{x + 1} = 2x^3 - 2x^2 - x + 2$

зад 4 С правилото на Хорнер да се намери стойността на полинома за $x = -3$

$f(x) = x^5 - 4x^3 + 7x^2 + 6$

	1	0	-4	7	0	6
-3	1	-3	5	8	-24	$\boxed{-66 = r}$ $= f(-3)$

зад 5 Да се намерят рационалните нули и да се представи в каноничен вид полиномът $f(x)$ ако:

a) $f(x) = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 1$

$p = \pm 1$

$q = \pm 1, \pm 3$

$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm \frac{1}{3}$

	3	8	6	-1
1	3	11	17	16 ≠ 0
-1	3	5	1	-2 ≠ 0
$\frac{1}{3}$	3	9	9	2 ≠ 0
$-\frac{1}{3}$	3	7		

	3	0	8	6	-1	
1	3	3	11	17	16	≠ 0
-1	-3	-3	11	-5	4	

	3	8	6	0	-1
1	3	11	17	17	16 ≠ 0
-1	3	5	1	-1	0

$f(x) = (x+1)(3x^3 + 5x^2 + x - 1)$

рационални нули

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x) = (x+1)(x+1)(3x^2 + 2x - 1)$

$3x^2 + 2x - 1 = 0$

$D = 1 + 3 = \sqrt{4} = 2$

$x_{12} = \frac{-1 \pm 2}{3}$ -1, $\frac{1}{3}$

$(x+1)(x-\frac{1}{3})$

$f(x) = (x+1)^3(x - \frac{1}{3})$

б) $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 + 2$

$p = \pm 1, \pm 2$

$q = \pm 1$

$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2$

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 \neq 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -4 & 5 & 3 \neq 0 \end{array}$$

	1	1	-1	-3	0	2
1	1	2	1	-2	-2	0

$$f(x) = (x-1)(x^4+2x^3+x^2-2x-2)$$

	1	2	1	-2	-2
1	1	3	4	2	0

$$f(x) = (x-1)^2(x^3+3x^2+4x+2)$$

	1	3	4	2
1	1	4	8	$10 \neq 0$
-1	1	2	2	0

$$f(x) = (x-1)^2(x+1)(x^2+2x+2)$$ каноничен вид

$$x^2+2x+2=0$$
$$D = 1-2 < 0$$

$x^2+2x+2 \quad D = -4 < 0$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

Рационалните на полинома са $x_1 = -1$ $x_2 = x_3 = 1$

За решение на полинома медаме нулите

Полиноми

1. Определение

$n \geq 0$

променлива

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

известни числа

$a_n \neq 0$

Полином на x от степен n

старши коефициент, коефициенти, свободен член

2. Символът Σ

символът за сума (съкратен запис)

n - крайна ст на брояча

$P_{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

$k=0$ → начална ст на бр

брояч

3. Числена стойност

Числото x_0 е нула на полинома $P(x)$, когато $P(x_0)=0$

Пример:

$P(x) = \sum_{k=0}^{4} k! \cdot x^k$, $x_0 = 2$

$P(2) = \sum_{k=0}^{4} k! \, 2^k = 0!\,2^0 + 1!\,2^1 + 2!\,2^2 + 3!\,2^3 + 4!\,2^4$

$k! = 1.2 \dots k$

Стойността $P(x_0)$ на полинома $P(x)$ при $x_0 = x$ е числото, което се получава след като в полинома $P(x)$ заместим променливата x с числото x_0 и извършим изчисленията

4. Равенство

- имат една и съща степен
- коефициентите пред еднаквите степени на x са равни

~~Пример~~

5 Действия с полиноми $+ \quad - \quad \cdot$

Пример:

$P(x) = 2x^3 - x + 1$, $Q(x) = x^2 - x - 1$

а) $P(x) + Q(x) = ?$

$2x^3 + \underline{0x^2} - x + \cancel{1} \underline{+ x^2} - x - \cancel{1} = 2x^3 + x^2 - 2x$

б) $P(x) - Q(x) = 2x^3 \cancel{-x} + 1 - x^2 \cancel{+x} + 1 = 2x^3 - x^2 + 2$

в) $P(x) . Q(x) = (2x^3 - x + 1)(x^2 - x - 1) = 2x^5 - 2x^4 \underline{- 2x^3} \underline{- x^3} + x^2 + x + x^2 - 1 - x = 2x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$

6. Деление на полиноми

Делението на полином $A(x)$ от степен n на полином $B(x)$ от степен m е нетривиално само когато $n \geq m$. Тогава съществува единствена двойка полиноми $Q(x)$ от степен $n-m$ и $R(x)$ от степен $S < m$, такива, че да е изпълнено равенството:

делимо $\dfrac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{B(x)}$ остатък $\Big/ \cdot B(x)$

делител, частно

$R(x) = 0$ – точно деление

Ако делителят е полином от вида $x - a$, то
$P(x) = (x-a)\,Q(x) + r$, където $r = P(a)$

Два метода: неопределените коефициенти, непосредствено деление

7. Метод на неопределените коефициенти

$A(x) = 2x^3 - x + 1 \;/\; B(x) = x^2 - x - 1$

$Q(x) = ax + b$ – частно $\quad R(x) = cx + d$ – остатък

$$\underbrace{\frac{A(x)}{B(x)} = ax + b + \frac{cx+d}{B(x)}}_{B(x)}$$

$$2x^3 - x + 1 = (ax+b)(x^2 - x - 1) + cx + d$$

$$2x^3 - x + 1 = ax^3 - ax^2 - ax + bx^2 - bx - b + cx + d$$

$$2x^3 - x + 1 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c - a - b)x - b + d$$

$$\begin{array}{l|l}
x^3 & 2 = a \\
x^2 & 0 = b - a \qquad b = 2 \\
x^1 & -1 = c - a - b \qquad -1 = c - 2 - 2 \qquad -1 = c - 4 \qquad c = 3 \\
x^0 & 1 = d - b \qquad 1 = d - 2 \qquad d = 3
\end{array}$$

$$\frac{2x^3 - x + 1}{x^2 - x - 1} = 2x + 2 + \frac{3x + 3}{x^2 - x - 1}$$

8. Метод на непосредствено деление

$A(x) = 2x^3 - x + 1 \qquad B(x) = x^2 - x - 1$

$\dfrac{x^2 - x - 1}{2x + 2} = 2x + 2 + \dfrac{3x + 3}{x^2 - x - 1}$

$$\begin{array}{rrrr} 2x^3 & +0x^2 & -x & +1 \\ -\,2x^3 & -2x^2 & -2x & \\ \hline & 2x^2 & +x & +1 \\ & -\,2x^2 & -2x & -2 \\ \hline & & 3x & +3 \end{array}$$

$3x + 3$ - остатък

9. Правило на Хорнер - въведение

$A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ - делимо

$B(x) = x - a$ - делител

В този случай е известен още един, трети метод за деление - деление чрез правилото на Хорнер

Таблица на Хорнер

- Деление на полином $A(x)$ на $x - a$

$A(x) = 2x^4 + x^3 - 17x^2 - 16x + 12$

$B(x) = (x - 1) \quad a = 1$

	2	1	-17	-16	12
1	2	3	-14	-30	-18

$= 2x^3 + 3x^2 - 14x - 30 + \dfrac{18}{x-1}$

• Изчисляване на стойността на полином $A(x)$ при $x = a$

$$A(x) = 2x^4 + x^3 - 17x^2 - 16x + 12$$

$A(1)$, $A(-1)$, $A(-2) = ?$

	2	1	-17	-16	12
1	2	3	-14	-30	$\boxed{-18}$
-1	2	-1	-16	0	12
-2	2	-3	-11	6	0

Последното число r, в реда за числото a, е равно на стойността $A(a)$ на полинома $A(x)$ за $x=a$

• Проверка дали $x=a$ е нула на даден полином

Проверете: -1, -2, $0{,}5$, $-0{,}5$

$$A(x) = 2x^4 + x^3 - 17x^2 - 16x + 12$$

Когато в последната колона на реда за a в таблицата на Хорнер за полинома $A(x)$ стои числото 0

• Разлагане на полином на множители

$$A(x) = 2x^4 + x^3 - 17x^2 - 16x + 12$$

$p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$;

$q = \pm 1, \pm 2$; $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \ldots \pm 2,$

$= (x+2)(2x^3 - 3x^2 - 11x + 6) =$

	2	-3	-11	6
-2	2	-7	3	0

$= (x+2)^2 (2x^2 - 7x + 3)$

$2(x-3)(x-0{,}5) =$

$= 2(x+2)^2 (x-3)(x-0{,}5)$ каноничен вид

Свойство на рационалните нули на полином с целочислени коефициенти

Т на Етиен Безу

Ако едно рационално число $a = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ е нула на полинома, то числото p дели свободния член a_0, а числото q дели старшия коеф. $a_n \neq 0$

Да се намерят рационалните корени на уравнението. $6x^3 + 67x^2 + 9x - 22 = 0$

$p = \pm 1, \pm 2, \pm 11, \pm 22$

$q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 11, \pm 22, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{11}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{11}{3}, \pm \frac{22}{3}$

$\pm \frac{1}{6}, \pm \frac{11}{6}$ биха могли да бъдат корени

Намиране на рационалните нули на полином с целочислени коефициенти

Ще проверим (чрез правилото на Хорнер) кои от ~~отделните числа са~~ числа отделените на първия етап са корени на уравнението

-11 е корен, след това търсим нулите на втория множител

$$x_1 = -11, \quad x_2 = -\frac{2}{3}, \quad x_3 = \frac{1}{2}$$

Детерминанти

1. Определение - На всяка квадратна матрица по определени правила се съпоставя число (или израз), което се нарича детерминанта.

det(A) ; |A| ; Δ делта

2. Детерминанти от първи и втори ред

- първи ред $\boxed{A = [a_{11}], \text{ то } \det(A) = a_{11}}$

- втори ред $\boxed{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \text{ то } \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} a_{21}}$