Системи линейни уравнения – I

1 $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -3 \\ 7x_1 - 15x_2 + 11x_3 - 4x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -6 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \end{cases}$

Методът на Гаус – Образува се матрица от числата пред неизвестните и се вкл. стълба на свободните членове

↗ свободни числа

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -3 \\ 7 & -15 & 11 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & -6 \\ 3 & 1 & -2 & -5 & 3 \end{array}\right]}_{\overline{A}} \begin{array}{c} \cdot(-7) \quad (-3) \\ + \quad + \\ + \end{array} \sim$$

(лявата част без стълба на свободните числа е A)

$\overline{A}$ разширена матрица със стълба на свободните числа

Ще я преобразуваме в триъгълен или трапецовиден вид (т.е. по гл. диагонал ел. да са $\neq 0$, а под гл. диаг. - вс. ел. = 0)

В 1 стълб 0 под единицата

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 13 & -3 & -4 & 25 \\ 0 & 13 & -7 & 1 & 3 \\ 0 & 13 & -8 & -5 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{c} \cdot(-1) \\ + \quad + \end{array} \sim$$

No:

DATE /

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 13 & -3 & -4 & 25 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -22 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & -13 \end{array}\right] \cdot\left(-\frac{5}{4}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 13 & -3 & -4 & 25 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{29}{4} & \frac{58}{4} \end{array}\right] \sim$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -3 \\ 13x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 25 \\ -4x_3 + 5x_4 = -22 \\ -\frac{29x_4}{\cancel{4}} = \frac{58}{\cancel{4}} \end{array} \right.$$

$x_4 = -\frac{58}{29} = -2 \Rightarrow \boxed{x_4 = -2}$

$-4x_3 - 10 = -22$

$-4x_3 = -12$

$\boxed{x_3 = 3}$

$13x_2 - 9 + 8 = 25$

$13x_2 = 26$

$\boxed{x_2 = 2}$

$x_1 - 8 + 6 = -3$

$\boxed{x_1 = -1}$

$X = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ – единственото реш. на системата

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 3 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ x_1 + x_3 + 2x_5 = 4 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] (-1) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right] (-1)\ (\cdot 1) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right] (1)\ 2\cdot \quad \left[\quad\right]$$

No: ______

DATE ______ / ______

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} -1 \\ + \\ + \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-1) \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \cdot 1 \\ - \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 4 \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right]$$

No: ______

DATE ______ / ______

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \cdot (-1) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right] (-1) \quad (1) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right] +$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = -1$$
$$2x_3 + x_5 = 3$$
$$2x_4 + x_5 = -1$$
$$3x_5 = 3$$

$$\boxed{x_5 = 1}$$

$$2x_4 + 1 = -1 \qquad 2x_4 = -2$$
$$\boxed{x_4 = -1}$$

$$2x_3 + 1 = 3$$
$$2x_3 = 2$$
$$\boxed{x_3 = 1}$$

$$x_2 + \cancel{2} - \cancel{1} + 1 = -1$$
$$\boxed{x_2 = -1}$$

$$x_1 - 1 + \cancel{1} - \cancel{1} = 0 \qquad \boxed{x_1 = 1}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ - единствено р-е на дадената с-ма

$r(A) = r(\bar{A})$ = брой на неизвестните

3. $$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right] .(-2) \sim$$

най-лесно за работа с

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right] .8 \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -22 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -22 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] .(5)$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -32 \end{array}\right]$$

No:

DATE

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ + \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \\ + \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot(-1) \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$r A = r(\bar{A}) = 4 < 5$ → бр. на уравненията

броя на неизвестните

$\Rightarrow$ системата има безбройно много решения

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ \cancel{x_2} + x_3 + x_4 = -3 \\ \boxed{x_3 = 3} \\ x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$$

Пол. $\boxed{x_5 = p}$

$x_4 + p = -1$

$\boxed{x_4 = -1 - p}$

$x_2 + \cancel{8}\, 3 - 1 - p = -3 \Rightarrow \boxed{x_2 = p - 5}$

$x_1 + p - 5 = 1 \Rightarrow \boxed{x_1 = 6 - p}$

$$x = \begin{cases} x_1 = 6 - p \\ x_2 = p - 5 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = -1 - p \\ x_5 = p \end{cases}$$

Решенията зависят от един произволен параметър

Ако $p = 0$, $p = 1$, $p = -1 \ldots$

Метод на Гаус-Жордан за решаване на системи линейни уравнения

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$\Delta\, \det A \neq 0$

$\Downarrow$

коеф пред неизв.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix} = -8 \neq 0$$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right] \cdot(-3)\ \cdot(-2) \sim$$

На мястото на A да получим единична матр., така на стълба със свободните числа се получават решенията на системата

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right] :(-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right] 3 \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right] :4 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \cdot(-1) \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{E} & \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ -1 \end{array} \end{array}\right]$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Системи линейни уравнения - Метод на Гаус

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 14 \\ 4x_2 + 7x_4 = 15 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}1&0&2&-1\\2&2&-1&-1\\3&2&1&4\\0&4&0&7\end{vmatrix} \quad \cdot(-2) \quad \cdot(-3) \quad \sim \begin{vmatrix}1&0&2&-1\\0&2&-5&1\\0&2&-5&7\\0&4&0&7\end{vmatrix}$$

$$\cancel{\Delta_{11} = \begin{vmatrix}2&-5&1\\2&-5&7\\4&0&7\end{vmatrix}\begin{matrix}2&-5\\2&-5\\4&0\end{matrix} = 2(-5)7+(-5)7\cdot4+1\cdot2\cdot0-4(-5)1-0\cdot7\cdot2-7\cdot2(-5) = -70-140+20+70 \neq 0}$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&2&-1&1\\2&2&-1&-1&7\\3&2&1&4&14\\0&4&0&7&15\end{array}\right] \quad \cdot(-2) \quad \cdot(-3)$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&2&-1&1\\0&2&-5&1&5\\0&2&-5&7&11\\0&4&0&7&15\end{array}\right] \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-2) \quad \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&2&-1&1\\0&2&-5&1&5\\0&0&0&6&6\\0&0&10&5&5\end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&2&-1&1\\0&2&-5&1&5\\0&0&10&5&5\\0&0&0&6&6\end{array}\right]$$

Ако това число беше 0 системата няма решение

$6x_4 = 6$ $\quad \boxed{x_4 = 1}$

$10x_3 + 5 = 5$ $\quad x_3 = 0$

$x_1 \cancel{=1=1}$ $\quad \boxed{x_1 = 2}$

$2x_2 = 4$ $\quad \boxed{x_2 = 2}$

Метод на Крамер

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases}$$

Заменяме стълба в Δ_1, в Δ_2, в Δ_3

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right| = -1 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \left|\begin{array}{ccc|cc} -2 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -4 & 5 & 2 \end{array}\right| = -1$$

$$\Delta_2 = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & -4 & -1 & 5 \end{array}\right| = -16 - 2 + 20 + 8 + 5 - 16 = -1$$

$$\Delta_3 \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right| = 1$$

Да намерим x_1 x_2 x_3

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1$ $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1$ $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1$

Системи линейни алгебрични уравнения

$x_1, x_2, \dots x_n$ - неизвестните

a_{ij} - коефициентите пред неизвестните

b_i - свободни членове

i - номера на уравнението j - номера на неизвестното

$i = 1, 2 \dots m$ (m уравнения)
$j = 1, 2 \dots n$ (n неизвестни)

основна матрица $A_{(m \times n)}$, вектор на неизвестните $X_{(n \times 1)}$, в. на свободните членове $B_{(n \times 1)}$

$(A|B)_{m(n+1)}$ разширена матрица на системата

Решение на линейна система от алгебрични у-я с n неизвестни е всеки n-мерен вектор-стълб X, чиито координати $a_1 \dots a_n$ удовлетворяват равенствата

2. Видове системи според броя на решенията им
Система, която има решение, се нарича съвместима, а система, която няма решение, се нарича несъвместима.

Съвместима система, която има точно едно решение се нарича определена, а такава, която има повече от едно решение се нарича неопределена (безбр много решения)

3. Определени системи с n уравнения и n неизвестни

Формули на Крамер

Ако в една линейна система, броят на уравненията е равен на броя на неизвестните и детерминантата $\Delta = \det(A)$, на матрицата от коефициентите пред неизвестните, е различна от 0, то системата е определена.

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 \dots$ $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$

Където Δ_i при $i = 1, 2, 3 \dots n$ са детерминантите на матриците получени от матрицата A (от коефициентите пред неизвестните) след заместване на i-тия стълб с вектора на свободните членове.

$$A \left| \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 3x_3 = -5 \end{array} \right.$$

$\cancel{2 - 2 - 3 = 0}$

$3x_3 = 14 - 3$ $\quad x_3 = \frac{17}{3}$ $\quad x_3 = -1$ $\quad 2 - x_2 - 3 = 0$

$-x_2 = 1$

$\boxed{x_2 = 1}$

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}$$

$\det A = 2 \cdot 1 \cdot 3 + (-1)(-1)(-1) + 3 \cdot 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \cdot 3 - 0(-1) \cdot 2 - 3 \cdot 1(-1) =$
$6 - 1 + 3 + 3 + 0 = 11$

$$A_1 = \left| \begin{array}{ccc} 0 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{array} \right| \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 4 & 1 \\ -5 & 0 \end{array}$$

$A_1 = -5 + 15 + 12 = 22$ $\quad x_1 = \frac{22}{11} = 2$

$$\left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right]$$

4. Трапецовидна матрица

В началото на всеки ред на произволна трапецовидна матрица, има поне една нула повече отколкото в началото на предходния ред

$$
\begin{array}{c}
\text{ненулеви редове} \\
\\
\\
\\
\text{нулеви редове}
\end{array}
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\
0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\
0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3r} & \dots & a_{3n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0
\end{bmatrix}
$$

5. Ранг на трапецовидна матрица

Т2

Броят r на ненулевите редове на трапецовидна матрица определя нейният ранг

Ако $T_{(m \times n)}$, то $\operatorname{rank}(T) \leq (\min(m,n))$

5. Елементарни преобразувания на матрица

(запазващи нейния ранг)

За всяка матрица съществува трапецовидна матрица, която може да се получи от дадената с поредица от следните елементарни преобразувания на матрици:

1. Умножаване на вс. ел. на един ред с число $\mu \neq 0$

2. Разменяне на местата на два реда / стълба
3. Прибавяне към елементите на един ред на съответните елементи на друг ред умножени по число $\mu \neq 0$
4. Отстраняване от матрицата на единият ~~ред~~ от два съвпадащи или пропорционални реда

Матриците са еквивалентни и записваме $A \sim B$

$$A \sim B \Rightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$$

6. Метод на Гаус за определяне на ранга на произволна матрица

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -13 & 11 \\ 3 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & 8 & -21 & 18 \end{bmatrix} (-1) \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -13 & 11 \\ 0 & -6 & 16 & -14 \\ 0 & -3 & 8 & -7 \\ 0 & 3 & -8 & 7 \end{bmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -13 & 11 \\ 0 & -6 & 16 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \operatorname{rank}(A) = 2$$

7. Теорема на Кронекер-Капели - отн. с-ма линейни у-я

$\operatorname{rank}(A) \neq \operatorname{rank}(\bar{A})$ - няма решение

$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(\bar{A}) = n$ (бр. неизв.) има точно едно решение

$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(\bar{A}) < n$ има безброй много решения

8. Еквивалентни преобразувания на системи и съответните им елементарни преобразувания на матрици

Действията с уравненията на една система уравнения, които преобразуват системата в еквивалентна на нея система, наричаме еквивалентни преобразувания

На всяко еквивалентно преобразуване на система от линейни у-я съответства елементарно преобразуване на разширената матрица на системата

1 Умножаваме едно у-е от системата с число $\mu \neq 0$	1. Умножаваме съответният ред на разширената матрица на системата с число $\mu \neq 0$
2. Разменяме местата на две у-я в с-ма	2. Разменяме местата на съотв. редове на разш. матрица на с-мат
3 Към едно у-е на с-мата прибавяме друго у-е от с-мата, умножено по някакво число	3. Към елементите на един ред от разш. матрица добавяме съответните елементи на друг ред, умножени по избраното число
4 Променяме местата на две неизвестни едновременно във всички у-я на системата	4 Разместваме местата на два стълба в разширената матрица на с-мата. Стълба от свободните членове не може да участ в разместване
5 Отстраняваме от с-мата едно от две еднакви или пропорционални у-я	5. От разширената матрица на системата отстраняваме единия от два равни или пропорционални реда.

Метод на Гаус - алгоритъм
за решаване на системи линейни у-я

Решете системата:
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + y - z = 4 \\ -x + 3z = -5 \end{cases}$$

1 Записваме разширената матрица на системата

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -5 \end{array}\right]$$

2. Намираме трапецовидна матрица T, еквивалентна на матрицата $\bar{A}$ (ел. преоб.)

- Първата цел е да получим 0-ли в първия стълб, под неговия първи елемент

Разменяме местата на първите два стълба:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \end{array}\right] \cdot 1 \sim$$

следваща цел да стане 0

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \end{array}\right] (\cdot -1) \sim$$

следваща цел да е равно на 1

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right] \cdot(-3) \quad \sim T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y & x & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 11 & -11 \end{array}\right] \end{array}$$

да стане 0

Матрицата е трапецовидна

3. Сравняваме стойностите на:
$r = rank(A)$ - ранга на основната матрица
$\bar{r} = rank(\bar{A})$ - ранга на разширената матрица и
n - броят на неизвестните на системата
и по теоремата на Кронекер-Капели определяме вида на системата:

3.1 Когато $r \neq \bar{r}$ системата е несъвместима. Преминаваме към стъпка 6.

Когато $r = \bar{r}$ системата е съвместима. Тогава:
3.2 при $r = \bar{r} = n$ е определена, а
3.3 при $r = \bar{r} < n$ е неопределена

В случая системата е определена, защото:

$r = 3$ - броят на ненулевите редове в частта на T пред чертата

$\bar{r} = 3$ - броят на ненулевите редове в цялата матрица T

$n = 3$ - броят на неизв. в системата
$\Rightarrow \boxed{r = \bar{r} = n = 3}$

Стъпка 4: Записваме системата у-я, съответстваща на матрицата T.

$$\rightarrow \left| \begin{aligned} -y + 2x + 3z &= 0 \\ x - 3z &= 5 \\ 11z &= -11 \end{aligned} \right.$$

5. Решаваме последната система „отдолу нагоре"

$z = -1 \quad x = 2 \quad y = 1$

6. Записваме крайният отговор (край): $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Решете системата: $\left| \begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 \quad + 5x_4 + x_5 &= 10 \end{aligned} \right.$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 5 & 1 & 10 \end{array}\right] (-2)$$

$$T = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 3 & 5 & 10 \end{array}\right]$$

$r = \overline{r} < n$ – съвместима неопределена

В системата има 2 ($r = 2$) независими у-я. От 2 у-я можем да намерим точно 2 неизвестни. Останалите 3 неизвестни ($n - r = 3$) считаме за параметри (свободни неизвестни) и е удобно да ги означим с подходящи букви (например a, b, c)

$$\left| \begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0 \\ x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 10 \end{aligned} \right.$$

Последното уравнение на новата система включва неизвестните x_2, x_3, x_4 и x_5. Трябва да изберем 3 на брой от тези неизвестни за параметри.

$$x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 10$$

$$\left| \begin{aligned} & x_3 = a,\ x_4 = b,\ x_5 = c \\ & x_2 = -6a - 3b - 5c + 10 \end{aligned} \right.$$

$$\left| \begin{aligned} & x_3 = a,\ x_4 = b,\ x_5 = c \\ & x_2 = -6a - 3b - 5c + 10 \\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} & x_3 = a,\ x_4 = b,\ x_5 = c \\ & x_2 = -6a - 3b - 5c + 10 \\ & x_1 = -9a - 7b - 8c + 20 \end{aligned} \right.$$

Т.е: Системата има безброй много решения от вида:

$$\begin{bmatrix} -9a - 7b - 8c + 20 \\ -6a - 3b - 5c + 10 \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \forall a, b, c$$

Задача: Изследвайте в зависимост от стойността на параметъра a и решете с-мата:

$$\left| \begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x - ay + z &= -1 \\ x - y + az &= -1 \end{aligned} \right.$$

Решение:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a & -1 \end{array}\right] (-a)\ (-1) \sim$$

$X_1 =$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 1 & -1 \\ 0 & a^2+1 & 1-a & a+1 \\ 0 & a-1 & a-1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & z & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & -1 \\ 0 & 1-a & a^2+1 & a+1 \\ 0 & a-1 & a-1 & 0 \end{array}\right] \end{array} (1) \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & -1 \\ 0 & 1-a & a^2+1 & a+1 \\ 0 & 0 & a^2+a & a+1 \end{array}\right]$$

Ранговете на матриците A и $\overline{A}$ зависят от това, дали елементите $1-a$ и $a(a+1)$ то са равни на нула или не.

Случаи: I) $a = 1 \Leftrightarrow a-1=0$

II) $a = 0$

III) $a = -1 \Leftrightarrow a+1=0$

IV) $a-1 \neq 0 \quad a \neq 0 \quad a+1 \neq 0$

I. $a = 1$

$$T(1) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & z & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \end{array} (:2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

съвместима неопределена

4,5,6 $\cancel{x+y-z} = -1$ | $x + z - y = -1$ $\quad x+z-1=-1$

$\boxed{y = 1}$ $\quad x+z=0$

$x+t=0$

$\boxed{z=t}$ $\quad \boxed{x=-t}$

No:

DATE: / /

$$X_1 = \begin{bmatrix} -t \\ 1 \\ t \end{bmatrix}$$

II При $a = 0$

$$T(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & z & y & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} r = 2 \\ \overline{r} = 3 \end{array}\right\} \quad r \neq \overline{r}$$ системата е несъвместима

III При $a = -1$

$$T(-1) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] :2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

съвместима неопр.

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$z = t$

$y = -t$

$x = -1$

$$X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -t \\ t \end{bmatrix}$$

IV $r = \overline{r} = 3 = n$ системата е определена

$$\begin{cases} x - ay + z = -1 \\ (a^2+1)y + (1-a)z = a+1 \\ a(a+1)y = a+1 \end{cases}$$

$y = \frac{1}{a}$ ...

$$X_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \\ -\frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$