зад 1

$\varphi(131), \varphi(600), \varphi(341)$

$\varphi(131) = \boxed{130}$

600	2
300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$

$$\varphi(600) = 600\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{600 \cdot 8}{30} = \boxed{160}$$

$$\varphi(341) = 341\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{31}\right)$$

$$\begin{array}{r|l} 341 & 11 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array}$$

$$\varphi(341) = \varphi(11)\cdot\varphi(31) = \boxed{300}$$

зад 1 Да се запише пълна система остатъци по модул 3
↓
всички възм. ост. при дел.

$m=3 \quad \{0,1,2\}$

зад 2. Да се запише пълна с-ма ост. по модул m, като са:

а) A_m - най-малките неотр. ост.

б) B_m - най-малките положителни ост.

в) C_m най-малките по абсолютна ст.

$m=3$

а) $A_3=\{0,1,2\}$

б) $B_3=\{1,2,3\}$ (заместване 0)

в) $C_3=\{-1,0,1\}$

$2\equiv-1 \pmod 3$

$3|2-(-1)$

$|-1|=1 \quad |2|=2$

$m=9$

а) $A_9=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

б) $B_9=\{1,2,3,\dots,9\}$

в) $C_9=\{-4,-3,-2,0,1,2,3,4\}$

$8\equiv-1 \pmod 9 \qquad |8|=8 \quad |-1|=\underline{1}$

$7\equiv-2 \pmod 9 \qquad |7|>|-2|$

$6\equiv-3 \pmod 9 \qquad |6|>|-3|$

$5\equiv-4 \pmod 9 \qquad |5|>|-4|$

$4\equiv-5 \pmod 9 \qquad |4|<|-5| \quad X$

Зад 3. Кои числа да отстраним от множеството $A = \{2, 6, 16, 20, \cancel{27}, \cancel{39}, 46, \cancel{81}, 85, 95, 107, 616\}$, за да получим редуцирана с-ма ост. по mod 9.

Ред. с-ма ост. се получава от пълн. с-ма ост, като се оставят вс. числа, които са вз. прости и които са несравними две по две.
Ред. с-ма ост. по mod m съдържа $\varphi(m)$ на брой числа.

$2 \equiv 2 \pmod 9$
$16 \equiv 7 \pmod 9$
$\cancel{20 \equiv 2 \pmod 9}$ повтарят и по-малкото избираме

$46 \equiv \underline{1} \pmod 9$

$85 \equiv 4 \pmod 9$

$95 \equiv 5 \pmod 9$

$107 \equiv 8 \pmod 9$

$\cancel{616 \equiv 4 \pmod 9}$

$\tilde{A} = \{2, 16, 46, 85, 95, 107\}$

$\varphi(9) = \varphi(3^2) = 6$

Зад 4 ост от дел 7^{17321} с 43

$7^2 \equiv \underline{6} \pmod{43}$ $\Big| \cdot 7$ $7^3 \equiv 42 \equiv -1 \pmod{43}$

$7^3 \equiv -\underline{1} \pmod{43}$ $\uparrow^2$

$7^6 \equiv 1 \pmod{43}$

$17321 = 6 \cdot 2886 + 5$

$7^{17321} = 7^{6 \cdot 2886 + 5} = (7^6)^{2886} \cdot 7^5 \equiv 1^{2886} \cdot 7^5 \equiv 7^3 \cdot 7^2 \equiv$

$\equiv -1 \cdot 6 \pmod{43}$

$\boxed{7^{17321} \equiv -6 \pmod{43}}$ $\boxed{7^{17321} \equiv 37 \pmod{43}}$

зад 5 7^{34} і 11
остатък ?

$a = 7 \quad p = 11 \quad (7, 11) = 1$

$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \quad T(Фо)$

$7^{10} \equiv 1 \pmod{11} \quad \uparrow^3$

$7^{30} \equiv 1 \pmod{11}$

$7^2 \equiv 5 \pmod{11} \quad \uparrow^2$

$7^4 \equiv 25 \equiv 3 \pmod{11}$

$7^{34} \equiv 1.3 \pmod{11}$

$\boxed{\text{Остатъкът е } 3}$

зад 6 Да се намерят посл. 2 цифрено число на числото $13^{40} - 5$

$13^{40} - 5 \equiv x \pmod{100}$

$a = 13, \quad m = 100 \qquad (a, m) = (13, 100) = 1$

от $T(Ойлер) \Rightarrow a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

$13^{\varphi(100)} \equiv 1 \pmod{100}$

$m = 100 = 2^2 . 5^2 \qquad \varphi(100) = 40$

$13^{40} \equiv 1 \pmod{100}$

$13^{40} - 5 \equiv -4 \pmod{100}$

$13^{40} - 5 = \boxed{96} \pmod{10}$

Зад 7 $3^{85} + 5$ посл. цифра
mod 10

$3^{85} + 5 \equiv x \pmod{10}$

$a = 3,\quad m = 10 \quad (a, m) = (3, 10) = 1$

от Т(Ойлер) $\Rightarrow a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$

$3^{\varphi(10)} \equiv 1 \pmod{10}$

$\varphi(10) = \varphi(2) \cdot \varphi(5) = 4$

$3^{4} \equiv 1 \pmod{10} \quad \uparrow^{20}$

$\cdot 3$

$3^{80} \equiv 1 \pmod{10}$

$3^{5} = 3 \pmod{10}$

$3^{85} \equiv 3 \pmod{10} \quad | + 5$

$3^{85} + 5 \equiv x \pmod{10}$

$3^{85} + 5 \equiv \boxed{8} \pmod{10}$