Матрици

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix}$ (3×3) три реда, три стълба , $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \\ -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (3×3)

а) $A+B = ?$ б) $2A - (3B + 2E)$

събират се по позиции

а) $A+B = \begin{bmatrix} 1+0 & -2+2 & 2+4 \\ 0+5 & 1-3 & 3+6 \\ 2-5 & 7+1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 5 & -2 & 9 \\ -3 & 8 & -3 \end{bmatrix}$

умножава се всеки елемент от матрицата

б) $2.A = \begin{bmatrix} 2.1 & 2.(-2) & 2.2 \\ 0 & 2.1 & 2.3 \\ 2.2 & 2.7 & 2.(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 4 & 14 & -6 \end{bmatrix}$

$3.B = \begin{bmatrix} 3.0 & 3.2 & 3.4 \\ 3.5 & 3.(-3) & 3.6 \\ 3.(-5) & 3.1 & 3.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 12 \\ 15 & -9 & 18 \\ -15 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$2.E$ E – еденична матрица

$2.E = \begin{bmatrix} 2.1 & 2.0 & 2.0 \\ 2.0 & 2.1 & 2.0 \\ 2.0 & 2.0 & 2.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

главен диагонал

$$3B+2E = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 15 & -7 & 18 \\ -15 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2A-(3B+2E) = \begin{bmatrix} 0 & -10 & -8 \\ -15 & 9 & -12 \\ 19 & 11 & -8 \end{bmatrix}$$

изваждат се по позиции

2зад

Да се умножат матриците:

а) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} (2\times3)$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (3\times2)$

За да можем да умножим матриците, трябва броят на стълбовете на първата матр. да е равен на броя на редовете на втората матрица.

$$A.B = \begin{bmatrix} 0.3+1.2+1.1 & 0.1+1.1+1.0 \\ 3.3+0.2+1.1 & 3.1+0.1+1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$$

Елементите от първия ред се умножават със съответните елементи от първия стълб и се събират.

δ) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (2x3), $B = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$ (3x1)
[illegible]

$$A.B = \begin{bmatrix} 3.1 + 2.2 + 1.3 \\ 0.1 + 1.2 + 2.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

6) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ (1x3), $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ (3x1)

$$A.B = \begin{bmatrix} 2.1 + 4.4 + 1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \end{bmatrix} \ (1x1)$$

v) A.B - B.A, wogemo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 1.1 + 2.(-4) + 1.1 & 1.1 + 2.2 + 1.2 & 1.1 + 2.0 + 1.1 \\ 2.1 + 1.(-4) + 2.1 & 2.1 + 1.2 + 2.2 & 2.1 + 1.0 + 2.1 \\ 1.1 + 2(-4) + 3.1 & 1.1 + 2.2 + 3.2 & 1.0 \ 2.0 + 3.1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 7 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ -4 & 11 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Резултатът от умножението на A.B и B.A не е еднакъв!

$$B.A = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 & 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 & 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 3 \\ -4\cdot 1 + 2\cdot 2 + 0\cdot 1 & -4\cdot 2 + 2\cdot 1 + 0\cdot 2 & -4\cdot 1 + 2\cdot 2 + 0\cdot 3 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1 & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 1\cdot 2 & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 0 \\ 6 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Отговор:

$$AB - BA = \begin{bmatrix} -10 & 2 & -4 \\ 0 & 14 & 4 \\ -10 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

II. Обратна Матрица

Зад 1. Да намерим обратната матрица на матрицата A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

За да има обратна матрица трябва детерминантата на матрицата A да е разл. от 0

detA детерминанта от трети ред = правилото на Сарус

преписваме първите 2 стълба надясно

$$\left|\begin{matrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} =$$

= (по главния диагонал) $3.1.3$ + (успоредно на гл. диаг) $1.3.1$ + (-||-) $2.2.2$ − (по вторият диаг) $1.1.2$ − (усп на вторият) $2.3.3 - 3.2.1 = -6 \neq 0 \Rightarrow$ има обратна матрица

A^{-1} обратна матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

адюнгирани к-ва

първи ред и първи стълб

произв. от вт. диаг.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.3 - 2.6 = -3$$

Зачертаваме първи ред и първи стълб

ред ← 1+2 → стълб

$A_{12} = (-1)^{1+2}$ = Зачертаваме първи ред, втори стълб

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(\text{нечетна степен}) = -(2.3 - 1.3) = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.2 - 1.1 = 3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(1.3 - 2.2) = 1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(6 - 1) = -5$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(9 - 4) = -5$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = \underline{1}$$

$$A^{-1} = \underset{\substack{\downarrow \\ \det A}}{\frac{1}{-6}} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -3 & 7 & -5 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{6} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

2 зад Да се намери обратната матрица: второст-диа.

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det C = \left| \begin{array}{ccc|cc} \overset{+}{3} & \overset{+}{-4} & \overset{+}{4} & 3 & -4 \\ 5 & -3 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & -2 \end{array} \right| =$$

$$= 3.(-3).2 + (-4).(4)(1) + 4.5.(-2) - 1.(-3)4 - (-2).4.3 - 2.5(-4) = 2 \neq 0$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 8 = 2$$

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(10 - 4) = -6$$

$$C_{13} = +\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} -(-8 + 8) = 0$$

$$C_{22} = +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (6 - 4) = 2$$

$$C_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -\left(3.(-2) - 1.(-4)\right) = 2$$

$C_{31} = -4$

$C_{32} = 8$

$C_{33} = 11$

$$C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -6 & 2 & 8 \\ -7 & 2 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ -\frac{7}{2} & 1 & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

43 -

3 зад Елементарно преобр. за обр матрица

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

До тази матрица подреждаме единичната матрица от същия ред.

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

Ел. преобразувания в/у тази разширена матрица.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \cdot(-3) \cdot(-5) \sim$$

Ел. преобр така че на мястото на дадената матрица да се получи единичната матрица

На мястото на ед матр. ще се получи обратната

Умножаваме първия ред с -3 и по добавяне към втория ще направим 0

След това с -5 към третия (0 на мястото на петицата

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & -6 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right] + \cdot(-3) \; + \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right] \cdot(-2) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & -2 & -11 \end{array}\right] \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 1 & \frac{11}{2} \end{array}\right]$$

$$\underbrace{}_{E} \qquad \underbrace{}_{C^{-1}}$$

Обратната на C

III Матрични Уравнения

Зад 1

$$X \cdot B = C, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$X \cdot B = C \,/\, \cdot B^{-1}$ отдясната страна на B и на C

т.е $X \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{E} = C \cdot B^{-1} \Rightarrow X = C \cdot B^{-1}$

тяхното произведение дава единичната матрица

Да намерим обратната на матрицата B

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{matrix} = 2.(-1).1 + 2.0.(-1) + 3.1.2 - (-1)(-1)3 - 2.0.2 - 1.1.2 = -1 \neq 0$$

$$B_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$B_{12} = -1$$

$$B_{13} = 1$$

$$B_{21} = 4 \quad B_{22} = -5 \quad B_{23} = -6$$

$$B_{31} = 3 \quad B_{32} = 3 \quad B_{33} = -4$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X = C \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 1\cdot(1) + 2\cdot(-1) & 3\cdot(-4) + 1(-5) + 2\cdot 6 & 3(-3) + 1(-3) + 2\cdot 4 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 1 + 3\cdot(-1) & 2(-4) + 1\cdot(-5) + 3\cdot 6 & 2(-3) + 1(-3) + 3\cdot 4 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot(-1) & 1(-4) + 2\cdot(-5) + 3\cdot 6 & 1(-3) + 2(-3) + 3\cdot 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -5 & -4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

2 зад

$A.X = B$, $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$A.X = B \,/\, A^{-1}$ от лявата страна на A и B

$\underbrace{A^{-1}.A}_{E}.X = A^{-1}B$

като се съберат обратната и дадената се получава единична матрица

$\Rightarrow X = A^{-1}B$

$$\det A = \begin{vmatrix} \overset{+}{3} & \overset{+}{-1} & \overset{+}{0} \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix}$$

$= 3.1.4 + (-1).1.2 + 0.(-2)(-1) - 2.1.0 - (-1).1.3 -$
$- 4.(-2).(-1) = 5 \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4+1 = \cancel{3}\,5 \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(-8-2) = 10 \\ A_{13} &= +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2-2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{1 стълб}$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -(-4+1) = 3$$

$$A_{22} = 12$$

$$A_{23} = 1$$

$$A_{31} = -1$$

$$A_{32} = -3$$

$$A_{33} = 1$$

$$A^{1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

да работим с цели числа

$$X = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5\cdot 3 + 3\cdot 2 + (-1)\cdot 1 & 5\cdot 1 + 3\cdot 1 + (-1)\cdot 2 & 5\cdot 2 + (-3)\cdot 3 + (-1)\cdot 3 \\ 10\cdot 3 + 12\cdot 2 + (-3)\cdot 1 & 10\cdot 1 + 12\cdot 1 + (-3)\cdot 2 & 10\cdot 2 + 12\cdot 3 + (-3) \\ 0\cdot 3 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 & 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 & 0\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 3 \end{bmatrix}$$

тъ има допусната грешка при A_{21}

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 22 & 7 & 19 \\ 51 & 16 & 47 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{22}{5} & \frac{7}{5} & \frac{19}{5} \\ \frac{51}{5} & \frac{16}{5} & \frac{47}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

3зад Ако има две матрици около неизвестната матрица

$A.X.B = C \;/\; A^{-1}$ $\boxed{\text{отляво}}$

$\underbrace{A^{-1}A}_{E}.X.B = A^{-1}C$, $X.B = A^{-1}C \;/\; B^{-1}$ $\boxed{\text{отдясно}}$

$$X.\underbrace{B.B^{-1}}_{E} = A^{-1}.C.B^{-1} \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}.C.B^{-1}}$$

IV. Ранг на Матрица 5x3 5x4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} \quad (4\times 4)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

ел. преоб до тригол. или трапецовиден вид

Умн, делим (ред, стълб), прибавне към др ред или стълб

По гл. диаг да има ел $\neq 0$

минори

ранкът не се променя

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} :2 \\ \\ \\ :5 \\ \\ \end{matrix} \overset{\text{екв.}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \\ \\ \\ \cdot 2 \end{matrix}$$

вс ел под -1 да са 0

Най-лесно се работи с единиците

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :11 \\ \\ :5 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} (-1) \sim$$

Колкото по-малки тегла има които елементи, толкова по-добре

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Има същия ранг както дадената матрица (2×3)

Изтриваме, защото не оказват влияние на ранга, ти ще сметаме минори от разл. редове (минорът ще е 0)

Ако има поне един елемент, различен от 0, то рангът на матрицата е поне 1

Ако всички минори от втори ред, които заграждат този елемент са 0, то рангът е точно 1

Ако има поне един минор от втори ред, който

Заграждаща този елемент различен от 0, то рангът ще бъде поне 2

Ако всички минори от $3^{ти}$ ред са 0, рангът ще бъде точно 2

Ако има поне един минор от $3^{ти}$ ред, който загражда нашия минор от $2^{ри}$ ред (който беше различен от 0), то рангът ще бъде поне 3. и т.н...

При нас рангът може да бъде най-много 2 (2×3)

$-1 \neq 0$, рангът е поне 1

За да бъде точно 1 трябва да бъдат всички минори от втори ред равни на 0 (които заграждат този елемент)

$\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ Този минор от втори ред загражда елементът -1, който е $\neq 0$

$= -1 \neq 0$ (разл. от и е $2^{ри}$ ред) $\Rightarrow$ $r(A) = 2$

Веднага го пресмятаме (удобен вид)

$-1 \cdot 1 = -1 \neq 0$ (разл от 0 и е от 2ри ред)

Няма минори от $3^{ти}$ ред

2 зад

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & -5 & 1 \\ -1 & -3 & -3 & -5 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & -7 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -3 & -3 & -5 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot 3 \quad \cdot 2 \quad \cdot 5 \\ + \\ + \\ + \\ + \end{matrix} \sim$$

Ако няма 1 можем да си направим чрез ел. преоб.

Ще работим с 1. Всички елементи под -1 да бъдат 0

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & -3 & -3 & -5 \\ 0 & -4 & -8 & -8 \\ 0 & -7 & -14 & -14 \\ 0 & -3 & -6 & -6 \\ 0 & -11 & -22 & -24 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ :(-4) \\ :(-7) \\ :(-3) \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 11 & 22 & 24 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \quad \cdot(-11) \\ + \\ + \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Дефиниция: Има ли ел. $\neq 0$?

$1 \neq 0 \Rightarrow$ рангът е поне 1

Разглеждаме минори от втори ред които заграждат това число

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 \neq 1 \neq 0$ Пресмятаме минорът по ах ш. д.

$r(B)$ е поне две

Минор от $3^{ти}$ ред загр. този минор от $2^{ри}$ ред, който беше $\neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.1.0 = 0$$

Бързо пресмятаме минорите заради преобразуванията.

Трябва вс. минори от трети ред да са 0, за да остане рангът 2

Ако минор от $3^{ти}$ ред $\neq 0$, рангът ще бъде 3

от 3 отгоре

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1.1.2 = 2 \neq 0 \Rightarrow r(B) \text{ е поне } 3$$

$(3\times4) \Rightarrow r(B) = 3$

най-много може да е 3

Ранг на матрица - II част

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} \quad (-2) \; (-5) \; (-7)$$

(4×4)

0 под глав. диаг. 1

триъг. вид (когато е квадратна)

трапецовиден вид (иначе)

Под гл. диаг. да направим 0 (може иначе)

Екв. матрици - един и същи ранг

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :2 \\ :2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -7 & -13 & 4 \end{bmatrix} (-1) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & 13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$a_{11} = 1 \neq 0$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$ $\Rightarrow$ поне 2 ранг, но може и да е 3 (3×4)

Минор който загражда този, но от $3^{ти}$ ред

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Още минори от $3^{ти}$ ред

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$$

$$B_{(5\times 5)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot(-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot(-2) \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot 3 \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \cdot(-2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

триъгълен вид

=> Вече прилагаме правилото за ранг на матрица

$a_{11} = 1 \neq 0$ => поне 1 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ => поне 2 ранг

Ако вс. минори от 2ри ред са 0, рангът е 1.

Минор от 3ти ред

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ поне 3

Ако вс. минори от 3ти ред са 0, рангът щеше да е 2

Може да е и 4.

Минор от $4^{ти}$ ред

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \text{ поне } 4$$

Ако вс от $4^{ти}$ са $0 \to$ рангът е 3

Минор от $5^{ти}$ ред:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \quad r(B) = 5$$

Детерми

V Детерминанти

1. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$

детерминанти от втори ред

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5$

б) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 12 = 10$

в) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix} = \overset{a^2 - x^2}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} - (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = -1 - 1 = -2$

г) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin x \cdot \sin x - \cos x(-\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2. детерминанти от трети ред

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix} = 1.1.1 + 2.2.3 + 3.4.2 - 3.1.3 - 2.2.1 - 1.4.2 = 16$

Правилото на Сарус се състои в това, че до тази детерминанта се преписват първите два стълба

\+ произведенията по главния диагонал

\- произведенията по второстепенния диагонал б) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -4 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix} = 1.(-1).4 + (-4).0.1 + 3.2.2 -$

$- 1.(-1).3 - 2.0.1 - 4.2.(-4) =$

43

3. Когато детерминантите са от $4^{ти}$ и по-висок ред с елементарни преобразувания правим така че да сведем детерминантата до по-нисък ред докато стигнем до трети ред и след това пресмятаме

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ (2) (-3) (-4)

Всички елементи под 1 да бъдат 0

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & -10 & -10 & -10 \\ 0 & -5 & -14 & -17 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 11 \\ -10 & -10 & -10 \\ -5 & -14 & -17 \end{vmatrix} =$

стълб, ред

Първият елемент 1

Изнасяме -10 и -1

$10 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 14 & 17 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \\ 5 & 14 \end{matrix} = (5.1.17 + 2.1.5 + 11.1.14) - (5.1.11 -$

$- 14.1.5 - 17.1.2).10 = 900$

б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $(-2)^{+}$ $= \begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Според правилото (ред стълб) разв. от 0 в 1 стълб

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot 3^{+} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

знакът отпред +

$$= \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix} = 6$$

в) Ако няма 1 тр да си направим

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{+} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \\ 4 & 2 \end{matrix} = 9$$

Матрици - Събиране, Изваждане, Транспониране

Събиране

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 8 & 4 & 5 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 9 & 6 & 8 \\ -7 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

Изваждане

$$\begin{bmatrix} 9 & 10 & -7 \\ 8 & -4 & 3 \\ 1 & 9 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 10 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & -6 \\ 10 & -5 & -7 \\ -6 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$

Транспониране

редове → стълбове

стълбове → редове

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 8 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Матрици - Умножение

Умножение с число

$$5 \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 4 & 8 & 2 \\ -1 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -5 & -10 \\ 20 & 40 & 10 \\ -5 & -10 & 30 \end{bmatrix}$$

Умножение с матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 + 2.(-1) + 3.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 + 3.1 & 1.(-1) + 3.3 \\ -2.2 + 2.1 & -2.(-1) + 2.3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1.(-1) + (-1).1 + 2.(-2) & 1.2 + (-1).0 + 2.1 & 1.1 + (-1).2 + 2(-1) \\ 0.(-1) + 1.1 + (-2)(-2) & 0.2 + 1.0 + (-2).1 & 0.1 + 1.2 + (-2)(-1) \\ 2.(-1) + 0.1 + 1(-2) & 2.2 + 0.0 + 1.1 & 2.1 + 0.2 + 1(-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 4 & -3 \\ 5 & -2 & 4 \\ -4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

No: ___
DATE ___

Матрици - Ранг на матрица 4x4

Да получим само 0 под диагонала

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot(-1) \; (-2) \sim$$

1) Всичко под единицата да стане 0

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} :2 \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} :2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /:-4 \sim$$

2) Всички първи ел на всеки ред да станат 1 (-4, 2)

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot(-2)$$

3) Елементите, които са ≠0 над 1 да ги направим на 0

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -3/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 3/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot\left(-\frac{3}{4}\right) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 9/4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Получихме възможно най-много 0 ранк 3

$\sim [$

Ранкът на тази матрица се определя от всички колони, които имат 0 във всички техни редове освен в един.

Матрица с ранк 3

//TODO експеримент с предния метод на преподавател

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$a_{11} = 1 \neq 0$ ранкът е поне 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{ранкът е поне } 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{ранкът е } 3$$

Матрици - Обратна матрица 2x2

1. Пресмятаме детерминантата. Трябва да е $\neq 0$
2. Намираме адюнгираните количества и съставяме нова матрица от тях
3. Транспонираме матрицата на адюнгираните к-ва
4. Умножаваме транспонираната матрица със $1/\det A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = 8 - 15 = -7 \neq 0$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{5} \\ \cancel{3} & 8 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{5} \\ 3 & \cancel{8} \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21} = + \begin{vmatrix} \cancel{1} & 5 \\ \cancel{3} & \cancel{8} \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & \cancel{5} \\ \cancel{3} & \cancel{8} \end{vmatrix} \quad 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Матрици - Обратна матрица 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 11 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = ?$$

$$\det A = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & + & + & & \end{matrix} \\ \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 11 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 5 & 11 \\ -2 & -5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} - & - & - & & \end{matrix} \end{array}$$

$$\det A = 1\cdot 11\cdot 1 + \cancel{2\cdot 0\cdot(-2) + 0\cdot 5(-5) - (-2)\cdot 11\cdot 0 - (-5)\cdot 0\cdot 1} - 1\cdot 5\cdot 2 = 11 - 10 = 1 \neq 0$$

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 11 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 11 + 50 = 11$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -\left(\cancel{0\cdot(-2) - 5}\ 5\cdot 1 - 0\right) = \cancel{0+5-5}\ -5$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 5 & 11 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = 5\cdot(-5) - 11\cdot(-2) = -25 + 22 = -3$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -(2\cdot 1 - 0) = -2$$

$$A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -((-5)\cdot 1 - 2(-2)) = -(-5 + 4) = 1$$

$A_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1$

$$A^{-1} = \underline{1} \begin{bmatrix} 11 & -2 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрици - Матрично уравнение част 1

1. Определяме вида на матричното уравнение
$A.X = B$, $X.A = B$, $A.X.B = C$

- първи случай използваме формулата $X = A^{-1} B$, $\det A \neq 0$

- втори случай използваме формулата $X = B.A^{-1}$, $\det A \neq 0$

- трети случай използваме формулата $X = A^{-1} C . B^{-1}$, $\det A \neq 0$ $\det B \neq 0$

2. Пресмятаме съответните детерм.

3. Намираме съответните обратни матрици

4. Решаваме уравнението по съответната формула

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A . X = B$$

$$X = A^{-1} B$$

$$\det A = 1 - 6 = -5 \neq 0$$

$$A_{11} = 1 \qquad A_{21} = -2$$

$$A_{12} = -3 \qquad A_{22} = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ +\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} + \frac{4}{5} & -1 + \frac{6}{5} \\ \frac{9}{5} - \frac{2}{5} & 3 - \frac{3}{5} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{12}{5} \end{bmatrix}$$

Матрици - Матрично Уравнение част 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad X = ?$$

$$X \cdot A = B$$

$$X = B \cdot A^{-1}$$

$$\det A = 1 - 6 = -5 \neq 0$$

$$A_{11} = 1 \quad A_{21} = -2$$

$$A_{12} = -3 \quad A_{22} = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} + 3 & \frac{6}{5} - 1 \\ -\frac{2}{5} + \frac{9}{5} & \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Детерминанти - 2×2 и 3×3

Дет от втори ред - 2реда и 2стълба

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 3 = \cancel{-1}\,5$$

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ - & - & - & & \end{array}$$

$$\det = 1.1.1 + 2.4.1 + (-3).2.1 - 1.1(-3) - 1.4.1 - 1.2.2 =$$
$$= 1 + \cancel{8} - 6 + 3 - \cancel{4} - \cancel{4} = 1 - 3 = -2$$

Детерминанти - 4×4

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad (-2) \quad (-4) \quad \sim$$

$$\sim \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{1+1}$$

$$= 1.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \\ 5 & -4 \end{matrix} = 3(-2).2 + (-4)4.5 + (-3).1(-4) - 5(-2)(-3) - (-4).4.3 - 2.1.(-4) = -54$$

Трябва да си избрали ред или стълб, по който ще развием този детерминанта

Всички елементи под 1 да станат 0

Зачертаваме стълба и реда, ~~но но~~ на елемента, по който сме развили детерминантата

Умножаваме с елемента по който сме развили · (1) и със −1 на степен реда + стълба на елемента по който развиваме

Матрици

1. Определение

Правоъгълна таблица от елементи

$(m \times n)$ m-реда и n-стълба

a_{mn}

2. Основни видове матрици

· Правоъгълна брой на редовете не е равен на броя на стълбовете

$(m \times n)$, $m \neq n$

При $n = 1$, матрицата има само 1 стълб и се нарича матрица стълб или вектор стълб, а при $m = 1$ има само 1 ред и се нарича матрица ред или вектор ред n-мерен вектор наричаме всеки вектор ред или вектор стълб с n елемента. Елементите на векторите се наричат координати

• Квадратна - редове = стълбове $(n \times n)$

главен диагонал и втори диагонал

• Нулева - ако всички елементи са 0

нулеви вектори

$O = [O]_{(m \times n)}$

• Единична матрица от ред n - кв. матрица от ред n, на която всички елементи по гл. диагонал са равни на 1, а всички елементи извън главния диагонал са равни на 0

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• Симетрична

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & \boxed{-1} & 4 \\ 3 & a & 2 & 3 \\ \boxed{-1} & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

• Диагонална

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Си

• Скаларна

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

No: ____
DATE ____

• Горна триъгълна

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & a & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

• Долна триъгълна

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & b \end{bmatrix}$$

3. Равенство на две матрици

Две матрици са равни когато са еднотипни и съответните им елементи са равни.

4. Действия

Умножението на две матрици е много различно от умножението на две числа и не е комутативно, т.е в общия случай $A.B \neq B.A$

5. Транспониране

A^T, A'

Матрицата $-A = -1.A$ е нарича противоположна матрица на матрицата A.

6. Сбор и разлика на две матрици

Можем само еднотипни матрици.

зад 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

а) $2A + 3B^T$ б) $2A^T + 3B$

а) $2.A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -2 & 6 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix} \quad 3.B^T = \begin{bmatrix} 3a & 3d \\ 3b & 3e \\ 3c & 3f \end{bmatrix}$

$$2A+3B^T = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -2 & 6 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3a & 3d \\ 3b & 3e \\ 3c & 3f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3a & 8+3d \\ -2+3b & 6+3e \\ -2+3c & 14+3f \end{bmatrix}$$

$\downarrow$?

б) $A^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 8 & 6 & 14 \end{bmatrix}$ ×

$$2A^T = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 16 & 12 & 28 \end{bmatrix}$$

$$2A^T+3B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 16 & 12 & 28 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4+3a & -4+3b & -4+3c \\ 16+3d & 12+3e & 28+3f \end{bmatrix}$$

8.1. Св-во на единичните матрици

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 \\ 11 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 \\ 11 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A . E = E . A = A$$

зад 2

$$A = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ & & \end{bmatrix}, \quad A.B = ?$$

$$\left(A.B = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 5 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.2 \\ 0.5 \\ 4.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix} \right) !$$

Умножаване на стълб с ред:

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.2 & 7.5 & 7.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ -4.2 & -4.5 & -4.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 35 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & -20 & -12 \end{bmatrix}$$

$$A.B \neq B.A$$

Когато $A.B = B.A$ казваме, че тези матрици са комутативни

Комутативни могат да бъдат само кв. матрици от един и същ ред

Пример: Намерете всички матрици X, комутативни на матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Матрицата X трябва да е квадратна матрица от втори ред, т.е трябва да има вида $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$

Система от уравнения, която се получава като приравним съответните елементи на двете матрици

A.X и X.A

$$A.X = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+4z & y+4t \\ 2x-z & 2y-t \end{bmatrix}$$

$$X.A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y & 4x-y \\ z+2t & 4z-t \end{bmatrix}$$

$$A.X = X.A$$

$$\begin{cases} x+4z = x+2y \\ y+4t = 4x-y \\ 2x-z = z+2t \\ 2y-t = 4z-t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{x}+4z-\cancel{x}-2y=0 \\ y+4t-4x+y=0 \quad (-1) \\ 2x-z-z-2t=0 \\ 2y-\cancel{t}-4z+\cancel{t}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2(2z-y)=0 \\ 4x-2y-4t=0 \\ 2x-2z-2t=0 \\ \cancel{2y-4z=0} \\ 2(y-2z)=0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} 2z-y&=0 \\ y&=2z \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y=2z \\ 4x-4z-4t=0 \\ \cancel{2x-2z-2t=0} \end{cases} \qquad \begin{cases} y=2z \\ x=z+t \end{cases} \qquad X = \begin{bmatrix} z+t & 2z \\ z & t \end{bmatrix}$$

за всички стойности на z и t

Пример: Да се намери такава матрица X, че да е в сила равенството $X . A = B$,

$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$

I) $X = B . A^{-1}$

$A^{-1} = $

$\det A = 6 - 6 = 0$ не съществува X, което е решение

$X_{(m \times n)} \cdot A_{(n \times p)} = B_{(m \times p)}$

$1 \quad 2 \qquad 2 \quad 2 \qquad 1 \quad 2$

II) $X_{(1 \times 2)} = [x, y]$

$X . A = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y & -6x + 3y \end{bmatrix} = B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\left| \begin{array}{l} 2x - y = 2 \\ 2x - y = -1 \end{array} \right.$ н.р.

9 Обратна матрица

Когато $A . B = B . A = E$, казваме, че матрицата B е обратна на матрицата A и записваме $B = A^{-1}$

Само квадратните матрици имат обратна матрица и то при определени условия

Нарича се обратима или неособена, такава, която няма обратна се нарича необратима или особена.

Как можем да намерим обратната на неособена квадратна матрица?

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ и $ad \neq bc$, то $A^{-1} = \dfrac{1}{ad \cdot bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & \cdot a \end{bmatrix}$

10. Матрични уравнения

$A.X = B$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$X = A^{-1}.B$

$\det A = 6 - 5 = 1 \neq 0$

$A_{11} = 3 \quad A_{21} = 5$

$A_{12} = 1 \quad A_{22} = 2$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} 3.1 + 5.4 \\ 1.1 + 2.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 89 \end{bmatrix}$

$X A = B$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$X = B \cdot A^{-1}$

$\det A = 6 - 5 = 1 \neq 0$

$\cancel{A_{11}}\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\cancel{\underset{\text{(2×2) ред стълб}}{X} = \underset{\text{(2×1) ред}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}} \cdot \underset{\text{(2×2) стълб}}{\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}}$$

$$\cancel{X = \begin{bmatrix} 1.3+1.1 & 1.5+1.2 \\ 4.3+4.1 & 4.5+4.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 16 & 28 \end{bmatrix}}$$

$$\cancel{X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}.$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3+0.1 & 1.5+0.2 \\ 2.3+(-1).1 & 2(5)+(-1)2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Умножаваме от тази страна, от която се намира матрицата A

Намиране на рационалните нули на полином с целочислени коефициенти

Ще проверим (чрез правилото на Хорнер) кои числа от ~~отделните числа са~~ отделените на първия етап са корени на уравнението

-11 е корен, след това търсим нулите на втория множител

$$x_1=-11,\ x_2=-\frac{2}{3},\ x_3=\frac{1}{2}$$

Детерминанти

1. Определение - На всяка квадратна матрица по определени правила се съпоставя число (или израз), което се нарича детерминанта.

det(A) ; |A| ; Δ делта

2. Детерминанти от първи и втори ред

- първи ред $\boxed{A=[a_{11}],\ \text{то}\ \det(A)=a_{11}}$
- втори ред $\boxed{A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ \text{то}\ \det A = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}a_{21}}$

3. Детерминанти от трети ред - правило на триъгълниците

Правило на Сарус

$$\Delta = \begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ - & - & - & & \end{array}$$

само за детерминанти от трети ред

4. Детерминанти от n-ти ред (поддетерминантата)

Поддетерминантата Δ_{kl}, $1 \le k, l \le n$ на Δ се получава, когато от Δ се отстранят реда с номер k и стълба с номер l.

5 Пресмятане на детерминанти от n-ти ред
(• Рекурсивна дефиниция)

Изчисляване на поддетерминанти от n-1 ред.

$$\Delta_n = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

• Развитие по ред или развитие по стълб

1. Избира се един ред или един стълб на детерминанта (нека изберем реда с номер i)

2. За всеки елемент ~~от~~ a_{ij} от избрания ред или стълб се изчислява произведението $(-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$, където Δ_{ij} е съответната детерминанта

3. Сумират се произведенията, получени на стъпка 2

4. Det е равна на получения сбор

$i+j$ - четно $+$ $\quad$ $i+j$ - нечетно $-$

Пример

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix} = 2.1.1 + 3.3.3 + 4.5.2 - 3.1.4 - 2.3.2 - 1.5.3 = 30$$

първи стълб: ~~$\Delta = 2\Delta_{11} - 3\Delta_{12} + 4\Delta_{13}$~~

$$\Delta = 2\Delta_{11} - 5\Delta_{21} + 3\Delta_{31} = 2.(-5) - 5(-5) + 3.5 = 30$$

втори стълб

$$\Delta = -3\Delta_{12} + 1\Delta_{22} - 2\Delta_{32}$$

трети стълб

$$\Delta = 4\Delta_{13} - 3\Delta_{23} + 1\Delta_{33}$$

Пример: Пресметнете детерминантите на триъгълните матрици.

Решение: Умножаваме елементите по гл. диагонал

5 Свойства на детерминантите

- $\det A = \det A^T$

- Ако се разменят местата на два реда (или два стълба), то стойността на детерминантата променя само знака си

- Ако всички елементи в един ред (или стълб) са равни на 0, то det. е равна на 0

- Ако два реда (или два стълба) на det са равни или пропорционални, то тя е равна на 0

- Ако всички елементи на един ред бъдат умножени по едно число, то стойността на матрицата се умножава по това число.

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \mu a_{k_1} & \dots & \mu a_{k_n} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{k_1} & \dots & a_{k_n} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$\det(\mu A) = \mu^n \det(A)$$

6. Основни свойства на детерминантите

Ако към един ред (стълб) прибавим друг ред (стълб), умножен по число, то стойността на детерминантата не се променя

Пример: Чрез ел. преобр., направете нули в първия стълб на детерминантата $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&4\\3&-1&1\end{vmatrix}$ и след това я изчислете

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&4\\3&-1&1\end{vmatrix} \begin{matrix}(-2)&(-3)\\ + & \\ & +\end{matrix} \sim \begin{vmatrix}1&2&3\\0&-3&-2\\0&-7&-8\end{vmatrix} = 10$$

7. Адюнгирани количества и присъединена матрица на квадратна матрица от n-ти ред

$$A_{k1} = (-1)^{k+1} \cdot \Delta_{k1}$$

присъединена матрица на матрицата A

$$A = (a_{ij})_{n\times n} \qquad A^* = A(ji)_{n\times n}$$

Транспонирана на матрицата, образувана от адюнгираните к-ва на съотв. елементи

Пример: Намерете присъединената матрица A^* на матрицата

$$A = \begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&4\\3&-1&1\end{bmatrix}$$

$$A_{11} = +\begin{vmatrix}1&-1\\4&1\end{vmatrix} = 1+4=5$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix}2&4\\3&1\end{vmatrix} = -(2-12) = 10$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix}2&1\\3&-1\end{vmatrix} = -2-3=-5 \ \dots$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 & 5 \\ 10 & -8 & 2 \\ -5 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

8. Елементарни преобразувания на матрица (запазващи детерминантата)

- Към един ред (или стълб) се прибавя друг ред (стълб) умножен по число.

- Пред детерминантата се изнася общ множител на елементите от един ред или стълб

- Разменят се местата на два реда (стълба) и се умножава получената детерминанта по (-1)

9. Обратна матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{*}$$

Намиране на обратна матрица чрез елементарни преобразувания

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A:E) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c|}{A} & \multicolumn{3}{c}{E} \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

нули навсякъде извън гл. диаг. на A
A-ед. матр => E-обр матр