

# Computer Vision Assignment 2 Camera Calibration

Prepared by:

Yazan A. Maalla

Supervised by:

Ph.Eng. Iyad Hatem

5 March 2020

## 1 الملخص:

عملية معايرة الكاميرا يمكن تلخيصها بكونها عملية تحديد العلاقة بين عنصر ما في مشهد حقيقي و مسقط هذا العنصر في الصورة الناتجة. سيتم اعتماد طريقة الباحث Zhengyou Zhang، والتي تتطلب فقط نمط مستوي planar pattern، والتقاط مجموعة صور لهذا النمط من زوايا رؤية مختلفة (على الأقل صورتين). وبناءً على هذه المعلومات يمكن تحديد بارامترات الكاميرا الداخلية، بالإضافة إلى البارامترات الخارجية (الموضع النسبي بين الكاميرا و المشهد). مع الأخذ بعين الاعتبار التشوه الناتج عن العدسات في الكاميرا Distortion Radial.

**Index Terms:** Computer vision, camera calibration, Zhang's method, camera projection, imaging geometry, Radial Distortion.

## 2 المقدمة :

إن معرفة بارامترات إسقاط الصورة بشكل دقيق هي أحد أهم متطلبات أي نظام قياس measurment يعتمد على خوارزميات رؤية الآلة. يقصد بنظام قياس أي نظام يهتم بمعرفة الأبعاد أو التوضع أو زوايا انحراف العناصر في المشهد. إن البارامترات المعيارية لاسقاط الكاميرا غالباً تكون غير متاحة من قبل الجهة المصنعة، بالإضافة إلى الكاميرات المزودة بإمكانية التقريب zooming وإضافة تأثيرات أخرى على الصور، تكون لها بارامترات تختلف باختلاف التأثير المطبق. وبالتالي فإن عملية معايرة الكاميرا هي التحديد الدقيق للبارامترات المعتمدة للانتقال من العالم الحقيقي الثلاثي البعد (المشهد) إلى الفضاء ثنائي البعد (الصورة)، وبالعكس. تم اتباع العديد من الخوارزميات والطرق الهادفة لإجراء عملية المعايرة. ومن هذه الطرق:

1- المعايرة المعتمدة على Photogrammetric :

وتم عبر من خلال عنصر معايرة متوضع في فضاء ثلاثي البعد، والذي يجب أن تكون احداثيات نقاطه معروفة بدقة، وعنصر المعايرة المستخدم غالباً يتألف من عدة أسطح متعامدة. وهذه التقنية تحتاج معدات قياس ومعايرة دقيقة ومضبوطة بدقة.

2- المعايرة الذاتية Sefl-calibration :

وهنا لا حاجة لأي عنصر معايرة، بل تتم عملية المعايرة من خلال التقاط مجموعة من الصور لمشهد ثابت باستخدام نفس الكاميرا.

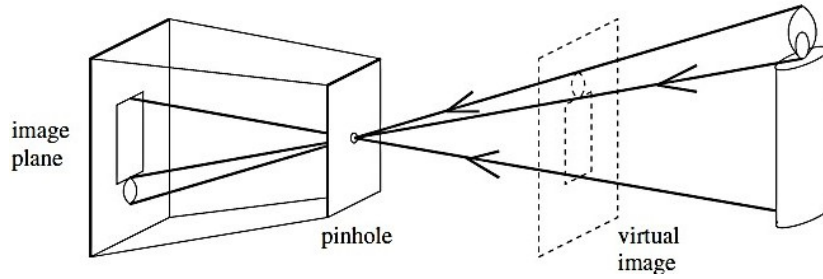
بما أن الصور ملتقطة من نفس الكاميرا فإن البارامترات الداخلية ثابتة (تتعلق بنوع الكاميرا ومواصفاتها) فإجراء عملية مطابقة بين ثلاث صور على الأقل يمكن الحصول على البارامترات الداخلية والخارجية للمعايرة.

اقترح العالم الصيني zhang خوارزمية جديدة تتوضع بين نوعي المعايرة السابقين، فيتم لجراء مطابقة ذاتية للاحداثيات كما في طريقة Self-calibration بالإضافة إلى اعتماد عنصر معايرة (كما في طريقة Photogrammetric) ولكن الفرق هو أن العنصر المعتمد ثنائي البعد وليس ثلاثي البعد.

### 3 الخلفية النظرية :

#### 1.3 نموذج الإسقاط في الكاميرا :

سيتم اعتماد مبدأ الكاميرا ذات الثقب Pin-Hole في الإسقاط.



شكل 1: Pin-hole Projection

باعتبار أن  $M_c(X_c, Y_c, Z_c)$  هي إحداثيات نقطة ما في فضاء الكاميرا الثلاثي البعد، و  $m'(x', y')$  هي إحداثيات مسقط هذه النقطة في الصورة ثنائية البعد. وباعتماد قوانين تشابه المثلثات نحصل على العلاقات التالية التي تربط بين الإحداثيات في الكاميرا وإحداثيات في مستوي الصورة.

$$y' = \frac{f}{Z_c} \cdot Y_c \quad x' = \frac{f}{Z_c} \cdot X_c$$

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_c/Z_c \\ Y_c/Z_c \\ 1 \end{vmatrix} \quad (1)$$

على اعتبار أن مركز الصورة Principle Point موجود في الموقع  $(x_0, y_0)$  بالنسبة لإحداثيات الصورة، مع الأخذ بعين الاعتبار مقياس الأبعاد للحساسات في الكاميرا Sensor Scale والتي هي  $dx, dy$  على المحورين  $x, y$  بالترتيب. فتصبح علاقة الإسقاط السابقة بالشكل:

$$y' = \frac{1}{dy} \frac{f}{Z_c} \cdot Y_c + y_0 \quad x' = \frac{1}{dx} \frac{f}{Z_c} \cdot X_c + x_0$$

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_x & 0 & x_0 \\ 0 & \alpha_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_c/Z_c \\ Y_c/Z_c \\ 1 \end{vmatrix} \quad (2)$$

حيث أن:

$$\alpha_y = \frac{f}{dy} \quad \text{و} \quad \alpha_x = \frac{f}{dx}$$

ويوجد بارامتر إضافي، يسمى معامل الانحراف Skew coefficient وهو يعبر عن مقدار الزاوية  $\theta$  بين المحاور الإحداثية ويظهر في الإسقاط بالشكل:

$$x = \alpha_x \cdot x' - \alpha_x \cdot \cot(\theta) \cdot y' + x_0$$

$$y = \frac{\alpha_y \cdot y'}{\sin(\theta)} + y_0$$

والانحراف غالبا تكون قيمته صغيرة جداً، أي تؤخذ قيمة الزاوية بين المحاور 90 درجة، أي بدون أي انحراف. أي:

$$\sin(\theta) = 1 \quad \cot(\theta) = 0$$

وبالتالي تصبح مصفوفة التحويل الشاملة المعبرة عن الانتقال بين إحداثيات الكاميرا ثلاثية البعد إلى إحداثيات الصورة ثنائية البعد بالشكل:

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_x & -\alpha_x \cdot \cot(\theta) & x_0 \\ 0 & \frac{\alpha_y}{\sin(\theta)} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_c/Z_c \\ Y_c/Z_c \\ 1 \end{vmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & x_0 \\ 0 & \beta & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_c/Z_c \\ Y_c/Z_c \\ 1 \end{vmatrix} \quad (4)$$

المصفوفة السابقة تسمى مصفوفة البارامترات الداخلية للكاميرا Intrinsic و  $\alpha, \beta, \gamma, x_0, y_0$  هي البارامترات الداخلية الخمسة التي يجب تحديدها لإجراء عملية المعايرة.

### 2.3 نموذج توضع الكاميرا Camera Pose :

يعبر عن الموضع النسبي بين الكاميرا و المشاهد, أي تحديد مصفوفة الانتقال من جملة إحداثيات العالم ثلاثي البعد  $M(X, Y, Z)$  إلى جملة إحداثيات الكاميرا  $M_c(X_c, Y_c, Z_c)$  وهي مستقلة تماماً عن نوع الكاميرا , ويتم التعبير عن ذلك بتحويل من نوع rigid والذي يتألف من قسمين ؛ دوران Rotation وإزاحة Translation .

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + T \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

وتكتب المصفوفة السابقة بالشكل المتجانس Homogeneous :

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

فعملية الدوران محددة بثلاث بارامترات هي زوايا الدوران حول المحاور الإحداثية, و الانتقالات محددة بثلاث بارامترات هي الإزاحة على المحاور الإحداثية. وهذه البارامترات الستة تسمى البارامترات الخارجية للكاميرا والتي تحدد موضع الكاميرا في إحداثيات العالم الحقيقي.

### 3.3 النموذج الكامل :

بناءً على ما سبق, تكون عملية الانتقال من فضاء العالم الثلاثي البعد  $M(X, Y, Z)$  إلى فضاء الصورة  $m'(x', y')$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & x_0 \\ 0 & \beta & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \right) \quad (7)$$

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} R & | & T \end{bmatrix} \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{vmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = P \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{vmatrix}$$

حيث أن P هي مصفوفة الانتقال الشاملة.

$$P = A \cdot \begin{bmatrix} R & | & T \end{bmatrix}$$

## 4 عملية المعايرة :

### 1.4 الفرضيات المعتمدة :

إن عملية المعايرة تعني تحديد جميع قيم المصفوفة P اعتمادا على معرفة قيم متوافقة بين نقاط ثنائية البعد في الصورة  $m'$ ، ونقاط ثلاثية البعد في العالم M .

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = P \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{vmatrix} \quad (9)$$

فلكل نقطة حقيقية M والنقطة الموافقة لها في الصورة  $m'$  يوجد معادلتين :

$$x' = p_{11}.X + p_{12}.Y + p_{13}.Z + p_{14}$$

$$y' = p_{21}.X + p_{22}.Y + p_{23}.Z + p_{24}$$

والمصفوفة P لها 11 درجة حرية، أي نحتاج على الأقل 6 نقاط (12 معادلة) لإيجاد قيمة 11 مجهولاً

$$(\alpha, \beta, \gamma, x_0, y_0, r_1, r_2, r_3, t_1, t_2, t_3)$$

- إن النقاط المستخدمة في المعايرة سيتم اختيارها بحيث تكون واقعة في مستوي واحد وليكن  $Z = 0$  أي يمكن اختزال العناصر المضروبة بالقيمة  $Z = 0$  , وهي العمود  $r_3$  من مصفوفة الدوران، فتصبح العلاقة بالشكل:

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = A \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & t \end{bmatrix} \begin{vmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{vmatrix} \quad (10)$$

فأصبح الانتقال انتقالاً متجانساً homogeneous بين فضاءين مستويين (ثنائي البعد) ويتم التعبير عن مصفوفة التحويل بالرمز  $H$ ، حيث :

$$m' = H.M \quad , \quad H = A \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & t \end{bmatrix} \quad (11)$$

## 2.4 : إجراء المعايرة رياضياً

- المعطيات : إحداثيات مجموعة من النقاط  $M_i$  في الفضاء ثلاثي البعد.
- المعلومات المحسوبة (المقاسة) : الإحداثيات الموافقة للنقاط السابقة في مستوي الصورة ثنائي البعد.
- المطلوب: تخمين قيم عناصر مصفوفة التحويل  $H$  .

$$H = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^T \\ B^T \\ C^T \end{vmatrix}$$

أي :

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^T \\ B^T \\ C^T \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{vmatrix}$$

بتقسيم كل السطرين الأولين على السطر الثالث (أي تقسيم اول معادلتين ناتجتين على المعادلة الثالثة) نحصل على :

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^T/C^T \\ B^T/C^T \\ 1 \end{vmatrix} \cdot M \quad (12)$$

بفك المعادلات الناتجة :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{A^T \cdot M}{C^T \cdot M} \implies x' \cdot C^T \cdot M = A^T \cdot M \\ y' &= \frac{B^T \cdot M}{C^T \cdot M} \implies y' \cdot C^T \cdot M = B^T \cdot M \end{aligned}$$

المجاهيل في العلاقات السابقة هي A,B,C ، وباعتماد الخاصية التالية:  
 $A^T \cdot B = B^T \cdot A$  يمكن كتابة العلاقات بالشكل:

$$\begin{aligned} -M^T \cdot A + x' \cdot M^T \cdot C &= 0 \\ -M^T \cdot B + y' \cdot M^T \cdot C &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل:

$$\begin{vmatrix} -M^T & 0 & x' \cdot M^T \\ 0 & -M^T & y' \cdot M^T \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A \\ B \\ C \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

حيث:

$$M = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{vmatrix} \quad A = \begin{vmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{vmatrix}$$

فتصبح العلاقة :



$$\begin{vmatrix} -X & -Y & -1 & 0 & 0 & 0 & x'.X & x'.Y & x' \\ 0 & 0 & 0 & -X & -Y & -1 & y'.X & y'.Y & y' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

والمطلوب هو حساب المصفوفة H، أي حل المعادلة من الشكل:

$$W.H = 0$$

إن المعادلات في العلاقة (15) هي معادلات ناتجة عن نقطة واحدة. والمصفوفة H المراد حساب قيمها تحوي 9 مجاهيل أي نحتاج على الأقل 5 صور لحساب كافة المجاهيل.

$$\begin{vmatrix} -X_1 & -Y_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & x'_1.X_1 & x'_1.Y_1 & x'_1 \\ 0 & 0 & 0 & -X_1 & -Y_1 & -1 & y'_1.X_1 & y'_1.Y_1 & y'_1 \\ -X_2 & -Y_2 & -1 & 0 & 0 & 0 & x'_2.X_2 & x'_2.Y_2 & x'_2 \\ 0 & 0 & 0 & -X_2 & -Y_2 & -1 & y'_2.X_2 & y'_2.Y_2 & y'_2 \\ -X_3 & -Y_3 & -1 & 0 & 0 & 0 & x'_3.X_3 & x'_3.Y_3 & x'_3 \\ 0 & 0 & 0 & -X_3 & -Y_3 & -1 & y'_3.X_3 & y'_3.Y_3 & y'_3 \\ -X_4 & -Y_4 & -1 & 0 & 0 & 0 & x'_4.X_4 & x'_4.Y_4 & x'_4 \\ 0 & 0 & 0 & -X_4 & -Y_4 & -1 & y'_4.X_4 & y'_4.Y_4 & y'_4 \\ -X_5 & -Y_5 & -1 & 0 & 0 & 0 & x'_5.X_5 & x'_5.Y_5 & x'_5 \\ 0 & 0 & 0 & -X_5 & -Y_5 & -1 & y'_5.X_5 & y'_5.Y_5 & y'_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

وجملة المعادلات السابقة هي جملة متجانسة homogeneous لأنها من الشكل  $A.X = 0$  والتي لها حالتان للحل الجبري:

\* إذا كانت A قابلة للعكس، فللجملة حل وحيد هو الحل الصفري. وهو في حالتنا غير ممكن لأن المصفوفة H تحوي قيم ثوابت غير معدومة كالبعد المحرق f ومقاييس scales على المحورين x,y.

\* إن لم تكن A قابلة للعكس، فللجملة عدد غير منتهي من الحلول. نختار الحل الذي يحقق أصغر قيمة للمصفوفة A وذلك باستخدام طريقة Singular Value Decompsion-SVD.

#### 1.2.4 خوارزمية Singular Value Decomposition-SVD

##### 2.2.4 الفكرة النظرية:

إن أي مصفوفة حقيقية ( جميع قيمها تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$  )  $A$  يمكن تحليلها إلى الشكل:

$$A^{m \times n} = U^{m \times r} \cdot \Sigma^{r \times r} \cdot (V^{r \times n})^T \quad (17)$$

حيث أن:

المصفوفتان  $U, V$  مصفوفتان orthogonal أي مقلوب المصفوفة يساوي منقولها:  $V \cdot V^T = I$  ,  $U \cdot U^T = I$  المصفوفة  $\Sigma$  قطرية قيم قطرها الرئيسي موجبة و مرتبة بشكل تنازلي، وقيم قطرها هي الجذور التربيعية للقيم الخاصة eigen-values للمصفوفة الأصلية  $A$  . أي:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \dots \geq 0$$

والأعمدة المصفوفة  $U$  تسمى left eigen vectors ، وأعمدة المصفوفة  $V$  تسمى right eigen vectors . ويتم الحصول على القيم الذاتية للمصفوفة  $A$  بحل المعادلة:

$$|A \cdot A^T - \lambda \cdot I| = 0$$

ولكل قيمة ذاتية يوجد شعاع ذاتي، هذه الأشعة تكون المصفوفة  $V$  وتحسب الأشعة الذاتية eigen-vectors من العلاقة:

$$|A \cdot A^T - \lambda_i \cdot I| \cdot |v_i| = 0$$

وأخيرا يتم حساب المصفوفة  $A$  من العلاقة:

$$A = U \cdot \Sigma \cdot (V)^T \Rightarrow A \cdot V = U \cdot \Sigma$$

وبما أن المصفوفة الوسطى قطرية، يمكن تحليل الجداء ليصبح مجموع جداءات كل منها هو ناتج جداء العمود  $i$  من المصفوفة  $U$  بالعنصر ذو الموقع  $(i, i)$  من المصفوفة  $\Sigma$  بالسطر  $i$  من المصفوفة  $V^T$  .

$$A^{m \times n} = U^{m \times r} \cdot \Sigma^{r \times r} \cdot (V^{r \times n})^T = \sum_{i=1}^r [\sigma_i \cdot u_i \cdot v_i^T] \quad (18)$$

$$A \approx U \Sigma V^T = \sum_i \sigma_i u_i \circ v_i^T$$

شكل 2: عمل طريقة SVD

### 3.2.4 التطبيق:

في مسألة معايرة الكاميرا وصلنا إلى العلاقة التالية:  $W.H = 0$  والجداء يكون معدوماً في الحالة المثالية فقط، وفي الحالة الفعلية يكون مساوياً لقيمة صغيرة  $\Omega$  أي  $W.H = \Omega$  لذلك يجب إيجاد المصفوفة  $H$  التي تصغر minimize مجموع مربع الأخطاء الناتجة والذي يعبر عنه بجداء شعاع الأخطاء  $\Omega$  بمنقوله:

$$\Omega^T \cdot \Omega = [W.H]^T \cdot [W.H] = H^T \cdot W^T \cdot W \cdot H$$

نكتب  $W$  بالشكل:  $W^{2I \times 9} = U^{2I \times 9} \cdot \Sigma^{9 \times 9} \cdot (V^{9 \times 9})^T$  حيث أن  $I$  هو عدد الصور المدروسة و  $2I$  هو عدد المعادلات الناتجة.

$$\begin{aligned} \|\Omega\| &= H^T \cdot W^T \cdot W \cdot H = H^T \cdot [U \cdot \Sigma \cdot (V)^T]^T \cdot [U \cdot \Sigma \cdot (V)^T] \cdot H \\ &= H^T \cdot V \cdot S^T \cdot U^T \cdot U \cdot S \cdot V^T \cdot H \end{aligned}$$

ولكن :

$$\begin{aligned} S^T &= S^T \text{ لأنها قطرية.}, \quad U \cdot U^T = I \\ H^T \cdot V \cdot S^T \cdot U^T \cdot U \cdot S \cdot V^T \cdot H &= H^T \cdot V \cdot S^2 \cdot V^T \cdot H = H^T \cdot (\sum_{i=1}^9 [s_i^2 \cdot v_i \cdot v_i^T]) \cdot H \end{aligned}$$

بما أن المطلوب هو تصغير قيمة الخطأ الناتج، فإن القيمة التي تحقق ذلك هي الشعاع المميز الموافق للقيمة المميزة الدنيا. أي العمود الأخير في المصفوفة  $V$ .

$$\begin{aligned} H &= v_9 \Rightarrow \\ H^T \cdot (\sum_{i=1}^9 [s_i^2 \cdot v_i \cdot v_i^T]) \cdot H &= v_9^T \cdot (\sum_{i=1}^9 [s_i^2 \cdot v_i \cdot v_i^T]) v_9 = (s_9)^2 \end{aligned}$$

أي أنه باختصار لحل المعادلة  $W.H = 0$  نوجد تحويل SVD للمصفوفة  $W$  وقيمة  $H$  المطلوبة هي الشعاع الأخير من المصفوفة  $V$  الناتجة من التحليل.

### 3.4 حساب قيم بارامترات الكاميرا :

تم إيجاد قيم المصفوفة H ولكن لم يتم بعد تحديد قيم كل البارامترات الداخلية والخارجية الخاصة بالكاميرا. من العلاقة (11) كان لدينا :

$$\begin{aligned} H = A \begin{bmatrix} r_1 & | & r_2 & | & t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} h_1 & | & h_2 & | & h_3 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow A.r_1 = h_1 &\Rightarrow r_1 = A^{-1}.h_1 \\ \Rightarrow A.r_2 = h_2 &\Rightarrow r_2 = A^{-1}.h_2 \\ \Rightarrow A.t = h_3 &\Rightarrow t = A^{-1}.h_3 \end{aligned}$$

الشعاعان  $r_1, r_2$  هما شعاعان متعامدان أي orthogonal يحققان :

• جداءهما الداخلي معدوم:

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0 \Rightarrow r_1^T . r_2 = 0$$

$$\Rightarrow h_1^T . A^{-T} . A^{-1} . h_2 = 0 \quad (19)$$

• طوليتهما متساويتين :

$$|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| \Rightarrow r_1^T . r_1 = r_2^T . r_2$$

$$\Rightarrow h_1^T . A^{-T} . A^{-1} . h_1 = h_2^T . A^{-T} . A^{-1} . h_2 \quad (20)$$

في المعادلتين السابقتين (19) و (20) نفرض :  $B = A^{-T} . A^{-1}$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & x_0 \\ 0 & \beta & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ B &= A^{-T} . A^{-1} = \end{aligned}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha^2} & \frac{-\gamma}{\alpha^2 \cdot \beta} & \frac{\gamma \cdot u_0 - v_0 \cdot \beta}{\alpha^2 \cdot \beta} \\ \frac{-\gamma}{\alpha^2 \cdot \beta} & \frac{\gamma^2}{\alpha^2 \cdot \beta^2} + \frac{1}{\beta^2} & \frac{-\gamma(\gamma \cdot u_0 - v_0 \cdot \beta)}{\alpha^2 \cdot \beta} - \frac{-v_0^2}{\beta} \\ \frac{\gamma \cdot u_0 - v_0 \cdot \beta}{\alpha^2 \cdot \beta} & \frac{-\gamma(\gamma \cdot u_0 - v_0 \cdot \beta)}{\alpha^2 \cdot \beta} - \frac{-v_0^2}{\beta} & \frac{(\gamma \cdot u_0 - v_0 \cdot \beta)^2}{\alpha^2 \cdot \beta^2} + \frac{v_0^2}{\beta} + 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

نلاحظ أن المصفوفة B قطرية لذلك يمكن متابعة العمليات على العناصر المتباينة فيها فقط فنعرّف المصفوفة b بالشكل:

$$b = [B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{13}, B_{23}, B_{33}]^T$$

ونعرف شعاعاً جديداً v يحقق العلاقة التالية:

$$h_i^T \cdot B \cdot h_j = v_{ij}^T \cdot b$$

فيكون:

$$v_{ij} = [h_{i1} \cdot h_{j1}, h_{i1} \cdot h_{j2} + h_{i2} \cdot h_{j1}, h_{i2} \cdot h_{j2}, h_{i1} \cdot h_{j3} + h_{i3} \cdot h_{j1}, h_{i2} \cdot h_{j3} + h_{i3} \cdot h_{j2}, h_{i3} \cdot h_{j3}]^T$$

فالعلاقتين (19) و(20) تصبحان:

$$h_1^T \cdot B \cdot h_2 = 0$$

$$: v \text{ و } b \text{ بتعويض } h_1^T \cdot B \cdot h_1 = h_2^T \cdot B \cdot h_2$$

$$\begin{vmatrix} v_{12}^T \\ (v_{11} - v_{22})^T \end{vmatrix} \cdot b = 0 \quad (22)$$

ومن أجل n صورة نحصل على:

$$\begin{vmatrix} v_{12}^T & (1) \\ (v_{11} - v_{22})^T & (1) \\ v_{12}^T & (2) \\ (v_{11} - v_{22})^T & (2) \\ \vdots & \\ v_{12}^T & (n) \\ (v_{11} - v_{22})^T & (n) \end{vmatrix} \cdot b = 0 \quad (23)$$

حل المعادلة السابقة يتم بنفس طريقة SVD عبر تحديد الشعاع الخاص eigen-vector الموافق للقيمة الخاصة الدنيا eigen-value للمصفوفة  $V^T \cdot V$  وبذلك تم تحديد قيم المصفوفة B . ومن العلاقة (21) يمكن الحصول على كل البارامترات الداخلية الخاصة بالكاميرا :  $\alpha, \beta, \gamma, u_0, v_0$  .  
 - بقي تحديد البارامترات الخارجية، بارامترات توضع الكاميرا بالنسبة للمشاهد، وهي قيم تختلف من صورة إلى أخرى، بعكس البارامترات الداخلية التي تكون ثابتة لكل الصور.  
 لكل صورة من الصور لدينا:

$$\begin{aligned}
H &= A \begin{bmatrix} r_1 & | & r_2 & | & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & | & h_2 & | & h_3 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow & \quad r_1 = A^{-1}.h_1 \\
\Rightarrow & \quad r_2 = A^{-1}.h_2 \\
\Rightarrow & \quad t = A^{-1}.h_3 \\
\Rightarrow & \quad r_3 = r_1 * r_2
\end{aligned}$$

بما أن كل من A, H تم حسابهم فيمكن حساب القيم السابقة.  
ولكن: يجب أن تكون مصفوفة الانتقال Orthogonal أي يجب أن تكون طويلة كل عمود فيها واحدة لذلك نقسم على الطويلة المتماثلة للأعمدة .

$$r_1 = \frac{1}{\lambda}.A^{-1}.h_1$$

$$r_2 = \frac{1}{\lambda}.A^{-1}.h_2$$

$$t = \frac{1}{\lambda}.A^{-1}.h_3$$

$$r_3 = r_1 * r_2$$

$$\lambda = \|A^{-1}.h_1\| = \|A^{-1}.h_2\| = \|A^{-1}.h_3\|$$

## 5 تشوه العدسات:

في المراحل السابقة لم يتم ذكر تأثير عدسات الكاميرا، والتشوه الناجم عن هذا الأثر.  
يتم نمذجة أثر العدسات والذي يسمى بالتشوه الشعاعي Radial Distortion ، بالعلاقة :

$$x_d = x * [1 + k_1.(x^2 + y^2) + k_2.(x^2 + y^2)^2] \quad (24)$$

$$y_d = y * [1 + k_1.(x^2 + y^2) + k_2.(x^2 + y^2)^2] \quad (25)$$

حيث أن  $k_1, k_2$  هي معاملات التشوه. و  $x^2 + y^2 = r^2$  هو نصف قطر التشوه.  
فيمكن كتابة علاقة التشوه بالشكل:

$$x_d - x = k_1.r^2 + k_2.r^4 \quad (26)$$

$$y_d - y = k_1.r^2 + k_2.r^4 \quad (27)$$

وهي إحداثيات نقطة ما في الصورة المشوهة  $(x_d, y_d)$  و  $(x, y)$  هي الإحداثيات المخمنة للنقطة اعتماداً على بارامترات معايرة الكاميرا التي تم إيجادها.

$$\begin{vmatrix} r^2 & r^4 \\ r^2 & r^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k_1 \\ k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_d - x \\ y_d - y \end{vmatrix} \quad (28)$$

ومن أجل  $n$  نقطة في الصورة :

$$\begin{vmatrix} r_1^2 & r_1^4 \\ r_1^2 & r_1^4 \\ r_2^2 & r_2^4 \\ r_2^2 & r_2^4 \\ \vdots & \vdots \\ r_n^2 & r_n^4 \\ r_n^2 & r_n^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k_1 \\ k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{d1} - x_1 \\ y_{d1} - y_1 \\ x_{d2} - x_2 \\ y_{d2} - y_2 \\ \vdots \\ x_{dn} - x_n \\ y_{dn} - y_n \end{vmatrix} \quad (29)$$

وهي من الشكل  $D.k = d$  ويمكن حساب قيم المصفوفة  $k$  عبر إيجاد مقلوب المصفوفة  $D$  ، وبما أن  $D$  مصفوفة مستطيلة فيتم اعتماد المقلوب الزائف pseudo-inverse :

$$k = (D^T.D)^{-1}.D^T.d \quad (30)$$

## 6 : Maximum Likelihood Estimation

أثناء القيام بحساب بارامترات الكاميرا تم الاعتماد على تصغير الخطأ باستخدام SVD بسبب عدم وجود الدقة الكاملة . لذلك يجب إعادة تقييم النتائج وذلك باستخدام عينات إضافية من الصور لأجل عملية التحقق validation . بفرض لدينا  $n$  صورة و في كل صورة تم اعتماد  $m$  نقطة، فإن المطلوب هو تحديد البارامترات  $(A, R, T, k)$  التي تحقق أصغر خطأ . هذا الخطأ هو الفرق بين الإحداثيات  $m_{ij}$  في فضاء الصورة المعروفة لنقطة  $M_{ij}$  والنقطة المخمنة  $m'_{ij}$  الناتجة من تحويل النقطة  $M_{ij}$  اعتماداً على بارامترات المعايرة التي تم إيجادها. وتابع الخطأ المعتمد هو تابع مجموع مربع الأخطاء Mean square error .

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m ||m_{ij} - m'_{ij}(A, k, R_i, T_i, M_{ij})||^2 \quad (31)$$

عبر إيجاد القيم  $A, R, T, k$  من القيم المقدرة من عينات صور التجريب ، والتي تحقق أصغر قيمة لتابع الخطأ السابق.

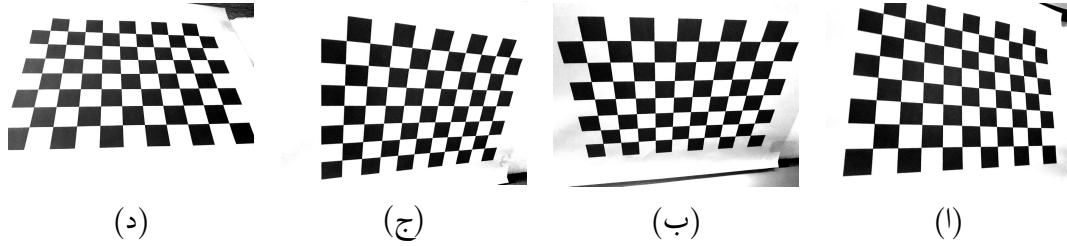
## 7 النتائج والمناقشة:

تم اعتماد رقعة شطرنج كنمط للمعايرة، بأبعاد  $10 \times 7$  عقدة مربعة بطول ضلع  $5\text{mm} \cdot 17$ .  
تم التقاط مجموعتين من الصور الأولى بتركيز جيد للرقعة ومن عدة اتجاهات، والأخرى بتركيز منخفض وكذلك من اتجاهات مختلفة.  
مواصفات الكاميرا:  
تم اجراء عملية المعايرة لكاميرتين مختلفتين.

الأولى: *Samsung - J600f/13 - Megapixel* وبعد محرق  $3.6\text{mm}$  ودقة الصور  $620 \times 826$   
الثانية: *S.M - J250f/8 - Megapixel* وبعد محرق  $3.3\text{mm}$  ودقة الصور  $490 \times 653$   
وباستخدام مكتبة OpenCv بلغة python تم إجراء عملية المعايرة على الصور الملتقطة، وتحديد بارامترات الكاميرا الداخلية، ومعاملات التشوه، بالإضافة إلى البارامترات الخارجية الخاصة بكل صورة على حدى.

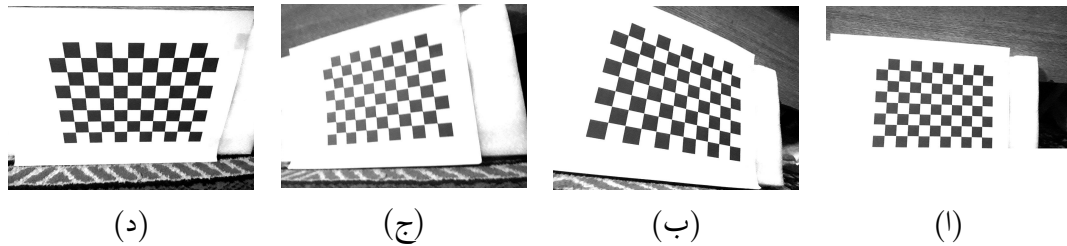
### 1.7 الكاميرا الأولى:

الشكل (3) يعرض عينة من الصور الملتقطة للرقعة ذات التركيز الجيد للرقعة، وهذه الصور ملتقطة من عدة اتجاهات.



شكل 3: الصور ذات التركيز الجيد

الشكل (4) يعرض عينة أخرى من الصور ذات تركيز منخفض.



شكل 4: الصور ذات التركيز المنخفض



تم تطبيق عملية المعايرة على عينات مختلفة، وتمت دراسة أثر عدد العينات على عملية المعايرة، وذلك من خلال:  
 في قاعدة البيانات لصور الكاميرا الأولى يوجد 20 صورة، في البداية نجري عملية المعايرة على كل صورة على حدى  
 ونجمع النتائج إحصائياً ونحدد قيمة الانحراف المعياري لها ، الذي يحدد مقدار تباعد القيم واختلاف النتائج التي  
 يتم الحصول عليها في كل مرة. نكرر نفس العملية لعدد عينات  $n=2$  ، ومن ثم لعدد عينات  $n=3$  وهكذا حتى  
 يتم الحصول على انحراف معياري نعتبر أن عدد العينات مناسب وأن الزيادة في عدد العينات ليست إلا هدراً  
 للزمن البرمجي.  
 بالإضافة إلى مقارنة نتائج الصور ذات التركيز الجيد مع صور التركيز المنخفض.

الجدول (1) يظهر نتائج عملية المعايرة على مجموعة من العينات بأعداد  $n$  مختلفة، و تراكيز تصوير مختلفة (قريب/بعيد)  
 والعمود الأخير يظهر نتائج اعتماد كل العينات القريبة والبعيدة معاً.

جدول 1: البارامترات الداخلية للكاميرا الأولى

n	1 near	2 near	6 near	12 near	1 far	2 far	6 far	9 far	all near and far
$\alpha$	623.8610	657.7905	661.1791	672.8646	440.6565	822.6535	724.0319	699.2655	687.6522
$\beta$	619.0648	655.5949	660.6544	672.5422	418.5032	826.6403	723.0704	698.8728	686.5679
$x_0$	401.9285	412.583	412.659	408.8775	385.662	459.1391	412.8966	414.2113	409.1149
$y_0$	310.4808	303.5797	311.375	316.8772	284.231	285.9887	300.5291	305.7991	317.2660
$k_1$	0.3771	0.4439	0.3874	0.2128	0.1692	0.0803	0.1819	0.4512	0.2034
$k_2$	-1.629	-2.0404	-2.0245	-0.8472	-0.381	-0.378	-0.2635	-0.3625	-0.8703

ولدراسة أثر تغير عدد العينات، بهدف تحديد عدد العينات الأفضل لأجل عملية المعايرة. نعيد تطبيق عملية  
 المعايرة على كل العينات ولكم ضمن مجموعات من  $n$  عينة.

نبدأ من  $n=2$  :

الجدول (2) يظهر نتائج تطبيق عملية المعايرة على كل ثنائية من الصور، بالإضافة إلى قيم الانحراف المعياري لكل  
 بارامتر، والخطأ النسبي المئوي الحاصل. نلاحظ وجود قيم كبيرة للخطأ النسبي خاصة في معاملات التشوه.

الجدول (3) يظهر نتائج المعايرة عند تقسيم العينات إلى مجموعات من 5 صور ، وكل مجموعة تؤخذ عيناتها على  
 حدى. نلاحظ انخفاضاً كبيراً في قيمة الخطأ النسبي المئوي عند زيادة عدد العينات المعتبرة. حيث انخفض  
 مقدار الخطأ في معامل التشوه الثاني من 45% في حال عدد عينات  $n=2$  إلى القيمة 4% عند عدد عينات  $n=5$ .

الجدول (4) يظهر نتائج عملية المعايرة عند تقسيم العينات إلى عدة مجموعات كل منها تحوي 10 عناصر، وتكون  
 اول مجموعة هي العينات العشر الأولى، وثاني مجموعة هي العينات العشر الأخيرة، والمجموعة الثالثة هي العينات

ذات الترتيب الفردي، والمجموعة الرابعة هي العينات ذات الترتيب الزوجي.

جدول 2: دراسة أثر عدد العينات - حالة  $n=2$

n	1 and 2	3 and 4	5 and 6	7 and 8	9 and 10	11 and 12	13 and 14	15 and 16	17 and 18	19 and 20
$\alpha$	657.7905	691.3295	633.8209	664.975	675.086	684.683	692.7921	683.797	621.277	657.7801
$\beta$	655.5649	693.3551	629.0391	665.992	676.0571	683.841	693.607	670.221	613.435	656.5075
$x_0$	412.5839	386.673	404.3124	409.807	423.904	421.3701	428.4133	424.7806	407.026	412.845
$y_0$	303.5797	325.0021	308.931	315.411	326.1251	302.421	297.057	327.758	316.521	310.6531
$k_1$	0.4439	0.2549	0.3909	0.3774	0.3568	0.3137	0.3712	0.4195	0.5474	0.5239
$k_2$	-2.404	-1.0759	-1.8854	-2.053	-1.6919	-0.9044	-1.9054	-1.244	-3.8654	-3.108

	mean value	standard deviation	std/mean ratio %
$\alpha$	666.331	24.217	3.63
$\beta$	663.762	26.3013	3.96
$x_0$	413.1715	12.3813	2.99
$y_0$	313.3459	10.68	3.41
$k_1$	0.4012	0.0889	22.23
$k_2$	-2.0137	0.9198	45.67

جدول 3: دراسة أثر عدد العينات - حالة  $n=5$

n	1-5	6-10	11-15	16-20	mean	std	std/mean ratio %
$\alpha$	657.1822	671.7308	683.689	668.683	670.3221	10.893	1.625
$\beta$	657.1009	672.433	686.706	669.134	671.3435	12.178	1.814
$x_0$	410.886	415.907	417.279	410.917	413.7448	3.433	0.801
$y_0$	311.6012	318.2205	310.8214	310.909	312.8801	3.57	1.14
$k_1$	0.3776	0.3895	0.4013	0.4108	0.3948	0.0144	3.64
$k_2$	-1.966	-2.079	-2.178	-2.147	-2.0919	0.0935	4.46

بتكرار نفس العملية على مختلف احتمالات أعداد العينات  $n = 2, 3, \dots, 20$  نحصل على الجدول (5) الذي يحوي قيم الخطأ النسبي المئوي المقابل لكل بارامتر من بارامترات الكاميرا الداخلية عند عدد عينات  $n$

ويمكن التعبير عن القيم في الجدول السابق بالشكل البياني (5)

من النتائج السابقة نلاحظ أن بزيادة عدد العينات تنخفض قيمة الخطأ ، وبالتالي نحصل على نتائج أفضل، ولكن بزيادة عدد العينات فوق 5 عينات أصبحت قيم النتائج متقاربة ، وزيادة العينات فوق هذا الحد هو عبء

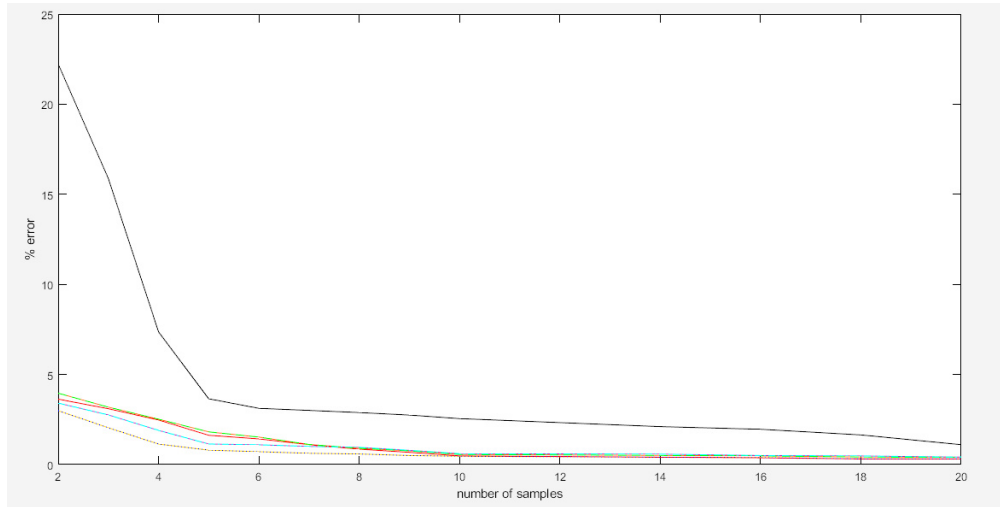
جدول 4: دراسة أثر عدد العينات - حالة  $n=10$

n	1-10	10-20	1:2:19	2:2:20	mean	std	std/mean ratio %
$\alpha$	665.4542	672.654	666.2537	668.1475	668.1272	3.22	0.482
$\beta$	665.649	674.107	666.7578	668.590	668.7759	3.75	0.56
$x_0$	414.623	419.007	416.038	415.297	416.2413	1.93	0.464
$y_0$	315.3315	311.334	313.618	315.329	313.9031	1.895	0.603
$k_1$	0.3847	0.403	0.3986	0.3829	0.3923	0.01	2.55
$k_2$	-2.034	-2.177	-2.096	-2.1237	-2.1077	0.059	2.82

جدول 5: قيم الأخطاء النسبية الموافقة لكل قيمة n

n	$\alpha$ %error	$\beta$ %error	$x_0$ %error	$y_0$ %error	$k_1$ %error	$k_2$ %error
n=2	3.6300	3.9600	2.9900	3.4100	22.2300	45.6700
n=3	3.098	3.185	2.0417	2.754	15.871	21.875
n=4	2.472	2.517	1.138	1.897	7.365	9.542
n=5	1.6250	1.8140	0.8000	1.1400	3.6500	4.4600
n=6	1.423	1.523	0.714	1.0965	3.12	4.125
n=7	1.1025	1.115	0.625	1.007	3.0047	3.874
n=8	0.854	0.9023	0.587	0.954	2.8857	3.568
n=9	0.678	0.758	0.501	0.789	2.7458	3.215
n=10	0.4820	0.5600	0.4620	0.6030	2.5500	2.8000
n=14	0.4102	0.508	0.408	0.578	2.105	2.418
n=16	0.3754	0.4785	0.3897	0.5014	1.958	2.1047
n=18	0.3128	0.4205	0.3145	0.4781	1.645	1.8559
n=20	0.2987	0.3871	0.3098	0.4123	1.1027	1.2478

برمجي لا أكثر. لذلك فإن عدد عينات 5 يكون كافياً للحصول على نتائج مقبولة.



شكل 5: الخطأ النسبي المئوي بدلالة عدد العينات

## 2.7 الكاميرا الثانية:

بتطبيق نفس الخطوات السابقة وعلى عدد كافي من العينات (20 صورة أيضاً) ملتقطة من اتجاهات مختلفة. نحصل على البارامترات الداخلية للكاميرا الثانية وهي :

$$\begin{array}{ll} \beta = 663.8785 & \alpha = 663.0697 \\ y_0 = 254.860 & x_0 = 344.9681 \\ k_2 = -1.31766 & k_1 = 0.24087 \end{array}$$

## 3.7 الكود البرمجي :

```
import numpy as np
import cv2 as cv
from glob import glob
from matplotlib import pyplot as plt
x,y=np.meshgrid(range(7),range(10))
x= 1.75*x
y=1.75*y
worldpoints=np.hstack((x.reshape(70,1),y.reshape(70,1),np.zeros((70,1)))).astype(np.float32)
3dpoints=[]
2dpoints=[]
imgpaths=glob('*.jpg')
for path in imgpaths:
im=cv.imread(path)
```

```

ret, corners = cv.findChessboardCorners(im, (7,10))
if ret:
    2dpoints.append(corners)
    3dpoints.append(worldpoints)
ret, mtx, dist, rvecs, tvecs = cv.calibrateCamera(3dpoints,2dpoints,
(im.shape[1],im.shape[0]),None ,None)
print ("Ret:",ret)
print ("Mtx:",mtx,)
print ("Dist:",dist)
print ("rvecs:",rvecs)
print ("tvecs:",tvecs)
cv.waitKey(0)
cv.destroyAllWindows()

```

## 8 المراجع:

[1] – Z. Zhang, S. Member, "A Flexible New Technique for Camera Calibration" IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 22, NO. 11, NOVEMBER 2000

[2] – Ph. GUERMEUR, J. LOUCHET, " An Evolutionary Algorithm for Camera Calibration", ENSTA - laboratoire LEI - 32 Bd Victor - 75015 Paris – France - guermeur@ensta.fr

[3] – A. Morde, M. Bouzit, L. Rabiner ; " A NOVEL APPROACH TO PLANAR CAMERA CALIBRATION" ; CAIP, Rutgers University  
96 Frelinghuysen Road, Piscataway, NJ 08855  
amorde@caip.rutgers.edu

[4] - Camera Calibration: "a USU Implementation" Lili Ma, YangQuan Chen, and Kevin L. Moore Center for Self-Organizing and Intelligent Systems Department of Electrical and Computer Engineering Utah State University  
Email: lilima@cc.usu.edu  
October 29, 2018

[5] - Peter Todorov MULTI-CAMERA CALIBRATION Calibration of Multi-camera Rig for Wide Field of View Light Field Capture Faculty of Information Technology and Communication Sciences Bachelor's Thesis May 2019