

国防科技大学研究生课程报告

课程名称:	小波分析及其应用
授课学期:	2020 年秋季
学员姓名:	汪星宇
学 号:	XS20073058
专 业:	仪器科学与技术
所属学院:	空天科学学院
完成日期:	2021 年 1 月 15 日

目录

- 1 引言..... 1
- 2 小波分析与神经网络..... 2
 - 2.1 小波分析相关介绍 2
 - 2.1.1 Haar 小波变换 3
 - 2.1.2 连续小波变换(CWT) 4
 - 2.2 结合了小波分析的神经网络..... 4
- 3 编写使用 CWT 结果训练 CNN 的实例 6
 - 3.1 结合 CWT 与 CNN 6
 - 3.2 结果呈现与分析..... 7
- 4 论文阅读与复现..... 9
 - 4.1 算法设计 9
 - 4.2 结果与讨论 11
 - 4.3 方法复现与阅读感悟..... 15
- 5 总结与思考 16
- 参考文献..... 17
- 附录：程序说明..... 18

使用小波变换训练神经网络

汪星宇

(中国运载火箭技术研究院 102 所, 北京 100076)

摘要: 本报告主要立足于《小波分析及其应用》和《信号处理中的神经网络方法》两门课程, 将小波变换应用在神经网络训练中。通过一个自己编写的使用连续小波变换(CWT)的结果训练卷积神经网络(CNN)解决多分类问题的实例进一步加深了对两门课程知识的融合、认识及理解, 还通过阅读与复现科技文献报告强化对学术前沿的认知与把握。

本报告首先分析了小波分析和卷积神经网络在数字图像处理中的优势与特点; 随后简要介绍了文章中运用到的 Haar 小波变换与连续小波变换, 并分析了如何将小波变换的结果用于卷积神经网络训练; 然后介绍了使用 CWT 结果训练 CNN 实现人体活动的多分类问题实例, 并做了简要的分析和评价; 然后是对 *Wavelet Deep Neural Network for Stripe Noise Removal* 文章阅读与评述, 并加入对算法复现的分析和自己的理解; 最后是对整个报告和课程的总结与思考。

关键词: 小波分析; CNN; 多分类问题; 条带图像去噪;

1 引言

随着人类生活信息化程度的不断加深, 图像作为包含了大量信息的载体形式越来越体现出其丰富的信息包含能力, 由此引发的就是对图像质量的高要求, 数字图像处理技术也由此不断发展。在实际的应用中, 系统获取的图像往往不是完美的, 常常会受到外界污染, 例如传输过程中的误差、光照等因素的影响都会导致图像的质量不高, 难以进行更深入的研究和处理, 所以需要对其进行处理, 便于提取我们感兴趣的信息。在数字图像处理过程中, 由于受到成像方法和条件的限制以及外界干扰, 数字图像信号不可避免地要受到噪声信号的污染。图像中的研究目标的边缘、特征等重要信息常被噪声信号干扰甚至覆盖, 使原始图像变得模糊, 给图像的后继研究和处理, 比如边缘检测、图像分割、图像识别等增加很大难度, 因此对图像进行噪声抑制, 恢复原始图像是图像预处理的重要任务和目标。噪声通常是不可预测, 只能用概率统计方法来认识的随机误差[1]。

图像中常见的噪声类型有: 1、加性噪声: 和输入图像信号无关, 比如信道噪声; 2、乘性噪声: 与图像信号有关, 常随着图像信号的变化而变化, 比如胶片中存在的颗粒噪声; 3、量化噪声: 与输入图像信号无关, 是量化过程中产生的误差, 其大小可以衡量数字图像与原始图像的差异; 4、椒盐噪声: 由于图像切割引起的噪声, 比如白图像上的黑点噪声; 5、高斯噪声: 其概率密度函数服从正态高斯分布的噪

声, 包括热噪声和散粒噪声[2]。红外图像中的条带噪声的来源是: 在红外焦平面探测器中, 读出电路通常是同一列像元或者同一行像元共享同一个输出电路。由于行输出电路的偏置电压不完全一致, 导致图像中包含以横条带为主要特征的非均匀噪声[3]。

小波变换能够分解数字图像, 获得低频分量和高频分量。低频分量代表图像的平滑区域, 变化趋势比较缓慢, 占的信息量比重较高; 而高频分量则是变化趋势较快的部分, 其信息变化率很高, 能够表达出数字图像的重要特征, 如图像的纹理细节。做完一次小波分解, 若将得到的高频分量继续分解, 仍然可以获得相应的低频分量和高频分量。重复上述步骤, 将高频分量不断分解, 数字图像的主要特征能被逐层描述出来, 这就体现了小波多分辨率分析的特性。小波分析理论因其优良的信号处理能力在数字图像处理、医学影像处理、通信、语音信号处理和信号滤波等领域被广泛应用[4]。

自 2006 年 *A Fast Learning Algorithm for Deep Belief Nets* 在《Science》杂志上发表以来[5], 深度学习理论凭借其在识别应用中超高的预测准确率, 在图像处理领域获得了极大关注, 众多学者积极跟进做出了大量研究, 其中很多算法已经应用于现有的图像处理系统并逐步开创了新的应用领域。以卷积神经网络为例, 卷积神经网络(Convolutional Neural Network, CNN)是一种前馈神经网络, 是当今图像处理的主流技术。相比传统算法, 利用深度学习处理某些任务更简单, 效果更好, 甚至某些任务只能用深度学习方法来解决。

由于小波分析与神经网络在数字图像处理领域的突出优势, 很多学者也对如何更好地结合两者进行了深入的研究。当前对于小波分析和神经网络结合的研究主要分为两种形式, 一种形式是用小波对信号进行预处理, 即以小波空间作为模式识别的特征空间。通过小波基于信号的内积进行加权和来实现信号的特征提取, 然后将提取的特征向量送入神经网络进行处理[6]; 另一种方法即所谓的小波神经网络(Wavelet Neural Networks, WNN)或小波网络, 把小波变换与神经网络有机地结合起来, 充分继承了两者的优点[7]。小波神经网络结合了小波变换和神经网络二者各自的优势, 充分利用小波变换良好的局部化性质并结合神经网络的自学习功能, 因而具有较强的逼近、容错能力, 其实现过程也较为简单, 故 WNN 的应用十分广泛。

在本文中, 结合神经网络和小波分析进行信号分类与处理采用的手段是第一种, 即用小波对信号进行预处理, 用输出信号作为神经网络的训练和测试数据。

2 小波分析与神经网络

2.1 小波分析相关介绍

小波分析(wavelet analysis)或小波变换(wavelet transform)是指用有限长或快速衰减的、称为母小波(mother wavelet)的震荡波形来表示信号的方法。该波形被缩放和平移以匹配输入的信号, 是一种强大通

用的信号处理方法。小波分析理论是在傅里叶分析的基础上发展而来的，但是傅立叶级数不能反映振幅变化的情况，即不能反映局部信息的特征，即使改进后的短时傅立叶变换也不能同时满足时频局部化的要求。在此背景下发展的小波分析理论很好地克服了傅里叶变换地这些不足。小波一词最早由 Morlet 和 Grossman 在二十世纪八十年代早期提出。

小波变换分成两个大类：离散小波变换(DWT)和连续小波变换(CWT)。两者的主要区别在于，连续变换在所有可能的缩放和平移上操作，而离散变换采用所有缩放和平移值的特定子集[8]。

2.1.1 Haar 小波变换

Haar 小波变换是于 1909 年由 Alfred Haar 所提出，是小波变换中最简单的一种，也是最早提出的小波变换。Haar 小波是 Daubechies 小波于 $N=2$ 时的特例，工程上一般称之为 D2[9]。

Haar 小波的母小波函数的表达形式为

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1/2, \\ -1 & 1/2 \leq t < 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1)$$

对应的尺度函数(scaling function)可以表示为

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2)$$

Haar 小波分解过程如下，假设

$$f_l(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k^l \phi(2^l x - k) \in V_l \quad (3)$$

则 $f_l(x)$ 可以分解为下列形式

$$f_l(x) = w_{l-1}(x) + f_{l-1}(x) \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} w_{l-1}(x) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} b_k^{l-1} \psi(2^{l-1} x - k) \in W_{l-1} \\ f_{l-1}(x) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k^{l-1} \phi(2^{l-1} x - k) \in V_{l-1} \end{aligned} \quad (5)$$

满足

$$b_k^{l-1} = \frac{a_{2k}^l - a_{2k+1}^l}{2}, \quad a_k^{l-1} = \frac{a_{2k}^l + a_{2k+1}^l}{2} \quad (6)$$

上述分解过程可以一直进行下去,直到得到下面的分解式

$$f_n = w_{n-1} + w_{n-2} + \cdots + w_1 + f_0, \quad w_l \in W_l \quad (7)$$

Haar 小波的重构过程如下，假设 $f_n = w_{n-1} + w_{n-2} + \cdots + w_1 + w_0 + f_0$, $w_l \in W_l$ 满足

$$f_0(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k^0 \phi(x - k) \in V_0 \quad (8)$$

与

$$w_l(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} b_k^l \psi(2^l x - k) \in W_l, 0 \leq l \leq n-1 \quad (9)$$

则

$$f_n(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k^n \phi(2^n x - k) \in V_n \quad (10)$$

的系数 a_k^n 可以按照下面的表达式递推地实现

$$a_n^l = \begin{cases} a_k^{l-1} + b_k^{l-1}, & n = 2k \\ a_k^{l-1} - b_k^{l-1}, & n = 2k+1, \end{cases} \quad l = 1, 2, 3, \dots, n \quad (11)$$

2.1.2 连续小波变换(CWT)

对于一般的小波函数，将 $\psi(t)$ 伸缩和平移后得到(12)式的小波序列

$$\psi_{a,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \quad (12)$$

若 $\psi(t)$ 的傅里叶变换 $\psi(\omega)$ 满足小波容许条件(13)式

$$C_\psi = \int_{\mathbf{R}} \frac{|\psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (13)$$

其中， a 为伸缩因子， τ 为平移因子。由此可以得到信号 $x(t)$ 的连续小波变换如公式(14)所示

$$\text{CWT}_x^\psi(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^*\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt \quad (14)$$

逆小波变换的公式如(15)式所示

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{CWT}_x^\psi(a, \tau) \psi_{a,\tau}(t) \frac{da}{a^2} d\tau \quad (15)$$

连续小波的概念。就是把一个可以称作小波的函数（从负无穷到正无穷积分为零）在某个尺度下与待处理信号卷积。改变小波函数的尺度，也就改变了滤波器的带通范围，相应每一尺度下的小波系数也就反映了对应通带的信息。本质上，连续小波也就是一组可控制通带范围的多尺度滤波器。

连续小波是尺度可连续取值的小波，里面的 a 一般取整数，工程上常用的连续小波 CWT、二进小波 SWT 和正交离散小波 DWT，对应于 a 、 τ 都连续， a 不连续、 τ 连续， a 、 τ 都不连续。因为 CWT 和 SWT 都具有冗余性，DWT 不具有冗余性，因此从应用角度分析，CWT 适合相似性检测、奇异性分析；SWT 适合消噪，模极大值分析；DWT 适合数据压缩。

2.2 结合了小波分析的神经网络

本次报告的主要学习方向是用小波对信号进行预处理，即以小波空间作为模式识别的特征空间，通过小波基于信号的内积进行加权和来实现信号的特征提取，然后将提取的特征向量送入神经网络进行处理。因此重点介绍使用小波变换后的数据进行神经网络训练和测试，这里我们以 CNN 为例。

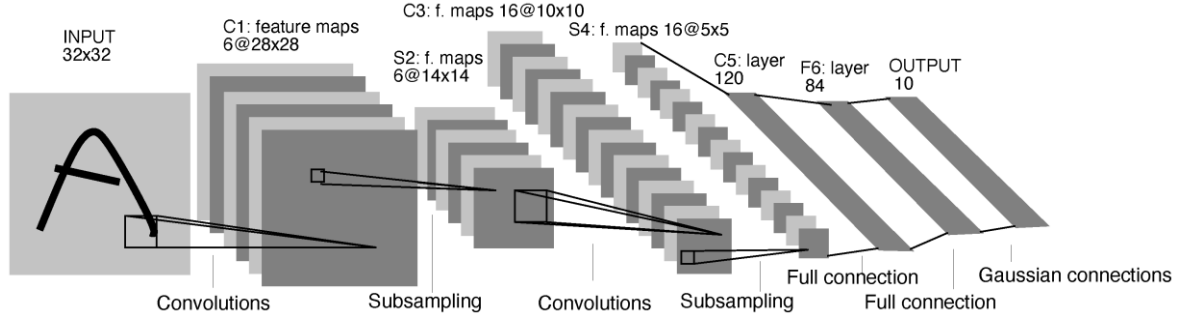


图1 典型的 CNN 结构示意图

一个典型的 CNN 结构如图 1 所示，它是在多层神经网络的基础上发展起来的针对图像分类和识别而特别设计的一种深度学习方法，卷积神经网络有三个基本概念：局部感知域(local receptive fields)、共享权重(shared weights)和池化(pooling)[10]。

局部感知域在 CNN 中的作用就是，使得每个隐藏层的神经元与输入层的一小块区域相连，而不是将每一个输入神经元都与每一个隐藏神经元连接。局部连接改善了全连接的结构容易引起参数数量的膨胀，容易过拟合的缺点，同时利用了图像的局部相似性。

CNN 中第 j 个隐藏层中第 k 个神经元的输出为：

$$\sigma \left(b + \sum_{l=0}^4 \sum_{m=0}^4 w_{l,m} a_{j+l,k+m} \right) \quad (16)$$

其中， σ 是神经元的激励函数， b 是该感知域连接的共享偏差， w 是大小为局部感知域的共享权重矩阵， a 代表在该位置的输入激励。这就意味着第一个隐藏层中的所有神经元都检测在图像的不同位置处的同一个特征。因此也将从输入层到隐藏层的这种映射称为特征映射。该特征映射的权重称为共享权重，其偏差称为共享偏差。在图像处理过程中，通常需要不止一个的特征映射，一个完整的卷积层往往包含若干个不同的特征映射[11]。

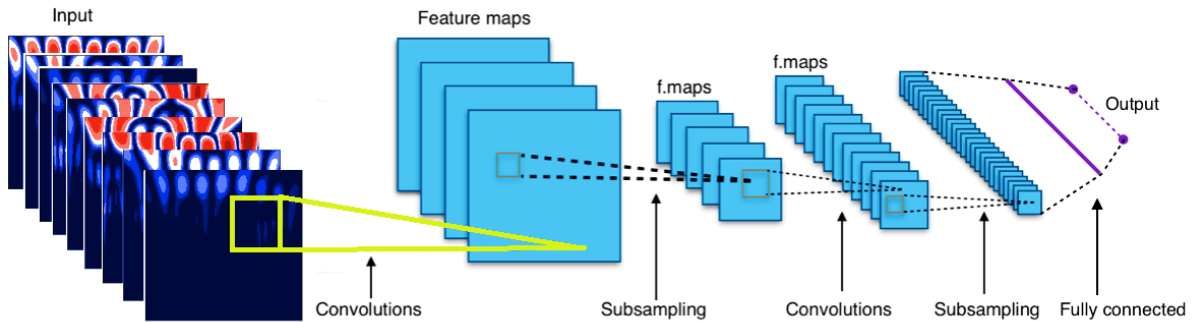


图2 使用 1 维 CWT 变换结果作为 CNN 训练数据示意图

使用小波变换的结果作为输入数据训练 CNN 的网络结构示意图如图 2 所示，这里是对一维输入信号进行 CWT，并将得到的结果变形为二维矩阵输入 CNN。我们不难发现，小波变换在数据处理中还有升维的效果，一维信号变为适合 CNN 学习的二维信号，且能够在样本量较少的情况下提升 CNN 的训练

效果。此外，图 2 中，输入的二维图像是 9 通道的，提升了 CNN 的学习效果，但也在一定程度上增加了过拟合的风险。

3 编写使用 CWT 结果训练 CNN 的实例

3.1 结合 CWT 与 CNN

我在学习小波变换在神经网络中的应用时查阅了许多博客和文献，从中得到了一些启发，并通过模仿与复现他人的算法自己动手完成了一个实例[12]，具体程序在附件的“使用 CWT 变换结果训练 CNN.ipynb”中。

首先，根据小波变换的原理可以知道 1 维信号的小波变换可以产生 2 个 1 维信号，将这两个 1 维信号作为横纵坐标轴，再经过简单的数据处理和变形可以得到 2 维的图像，好处在于，其中包含的信息比时间序列的信息或仅使用傅里叶变换的信息更多。该实例中，我们以经典的人体活动识别数据集(UCI-HAR)时间序列数据集为数据来源，UCI-HAR 包含人们在进行不同类型的活动（例如，上下楼梯、躺下、站立和行走等）时的传感器测量值。数据集总共有超过 10,000 个信号，每个信号有 9 个通道，包括：x 轴加速度、y 轴加速度、z 轴加速度和 x、y、z 轴陀螺仪等等。

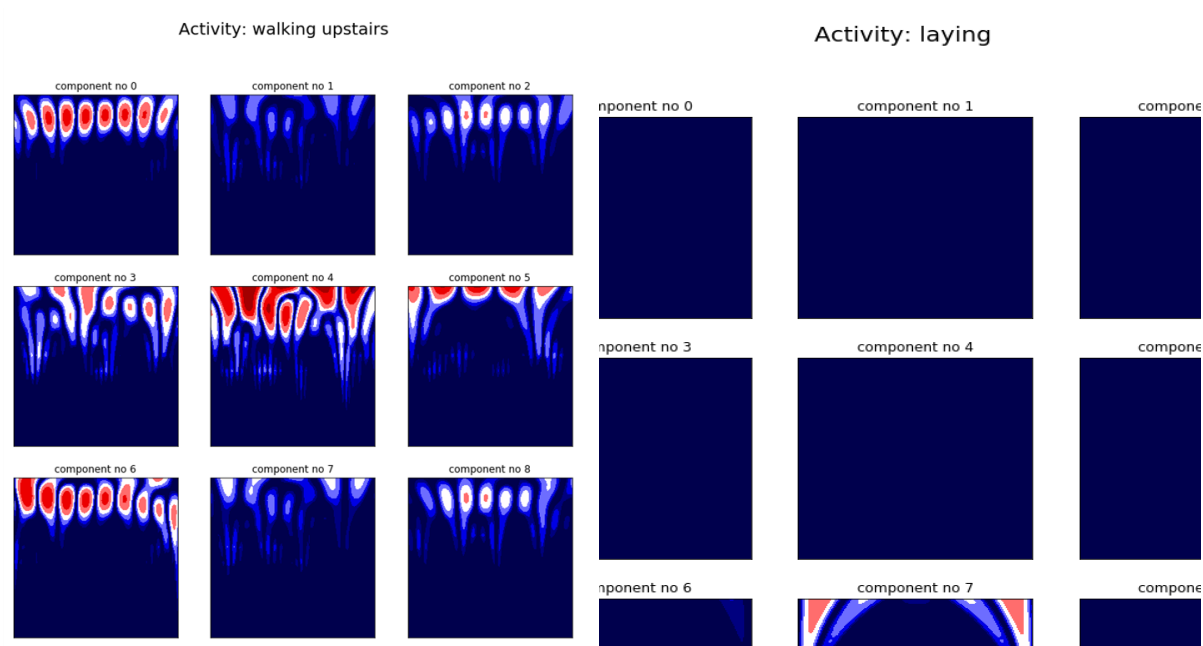


图 3 使用 1 维 CWT 变换将 1 维信号转变为 2 维矩阵(图像). (a)上楼梯信号; (b)平躺信号.

训练集包含 7352 个信号，其中每个信号包含 128 个测量样本和 9 个通道，训练集的输入信号被加载到大小为(7352,128,9)的数组中，测试集的信号大小则为(2947,128,9)。由于每个信号有 9 个通道构成，因此我们需要对每个通道使用 1 次 CWT，共 9 次。由于每个信号有 9 个通道，因此每个信号也将有 9 个结果图。以“上楼梯”和“平躺”两个动作为例，可以看到在数据集的两个不同信号上应用 CWT，由于被

测试人的动作不同，结果有明显的差异。

在如何使用输入数据的问题上，可以考虑以下几种方案：

1. 分别为每个通道训练 1 个 CNN，并在测试数据时将 9 个 CNN 的结果以某种方式结合起来共同判定行为分类。该方案忽略了不同通道之间相互联系的事实，很可能得到较差的分类结果。
2. 将 9 个通道串联成一个长信号，并在串联信号上应用 CWT。该方法在相邻通道串联的位置会引入不连续，在 CWT 得到的二维图像中引入噪声。
3. 首先计算每个通道的 CWT，将 9 个不同的 CWT 图像串并成一个，然后输入 CNN。这同样会在相邻通道间引入噪声。
4. 将 9 个二维图像堆叠在一起，并创建一个带 9 个通道的图像。考虑到 CNN 并不需要真正用肉眼辨别这些图像，尽管图像有 9 个通道，它也可以轻松处理。且 CNN 的工作方式保持不变，和传统的方法唯一的区别在于，与输入信号是 RGB 图像相比，滤波器数量增加到 3 倍。

该实例中，我选择了第四种方案，相比之下，方案四不会引入人为的噪声，数据利用也好充分。CNN 的网络结构和训练过程如图 2 所示，这也是为什么输入图像有 9 个通道。

3.2 结果呈现与分析

使用 CWT 变换结果训练卷积神经网络的如表 1 所示，可以看到，随着遍历数据次数的增多，测试正确率渐进提高，最终的测试结果达到了 94%。

表 1 CNN 的训练结果

遍历次数	训练		测试	
	损失	正确率	损失	正确率
1	0.4668	0.8682	0.5661	0.872
2	0.1551	0.9428	0.5823	0.91
3	0.1426	0.9398	0.6854	0.906
4	0.1389	0.948	0.5554	0.92
5	0.1565	0.9458	1.1199	0.904
6	0.2119	0.9392	1.1963	0.904
7	0.1691	0.944	0.6491	0.924
8	0.1186	0.9582	0.7551	0.93
9	0.1142	0.9562	0.7028	0.942
10	0.0959	0.9646	0.6696	0.944
结果	0.0830	0.9696	0.6696	0.9440

我寻找了其他常见算法在 UCI-HAR 数据集上的分类正确率[13]，如表 2 所示，可能是具体算法细节等存在不同，实际上使用 CWT 输出结果作为 CNN 训练数据得到的测试正确率要比使用原 1 维信号训练 CNN 高得多，此外，也高于其他常见的如 LSTM 算法、CNN+LSTM 算法。

表 2 其他常见算法的 UCI-HAR 数据集分类正确率

算法	测试正确率
CNN	93%
LSTM	88%
CNN+LSTM	88%
CNN+Inception	89%
Xgboost	96%

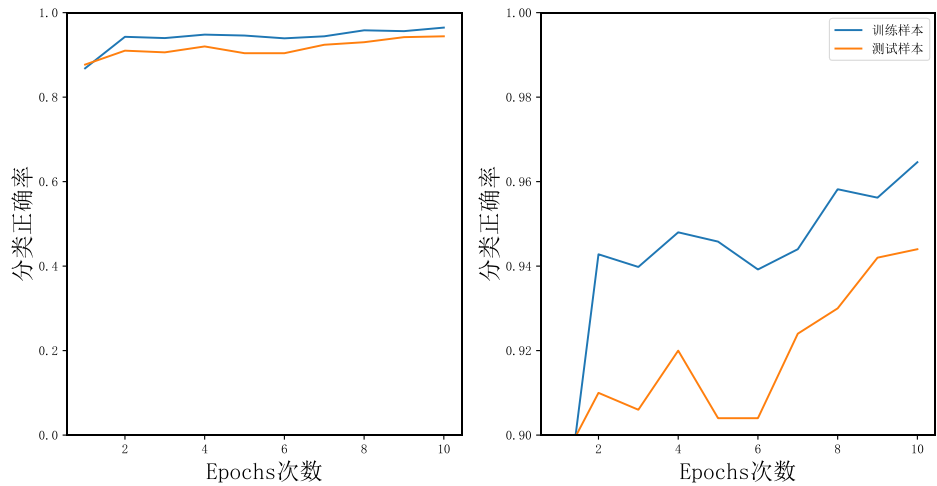


图 4 遍历次数和分类正确率曲线

遍历次数和分类正确率曲线如图 4 所示，左侧是整体的正确率变化趋势，右侧是局部放大的正确率增长趋势。总体上，分类的结果十分优异，且 10 次遍历所用的时间很短。

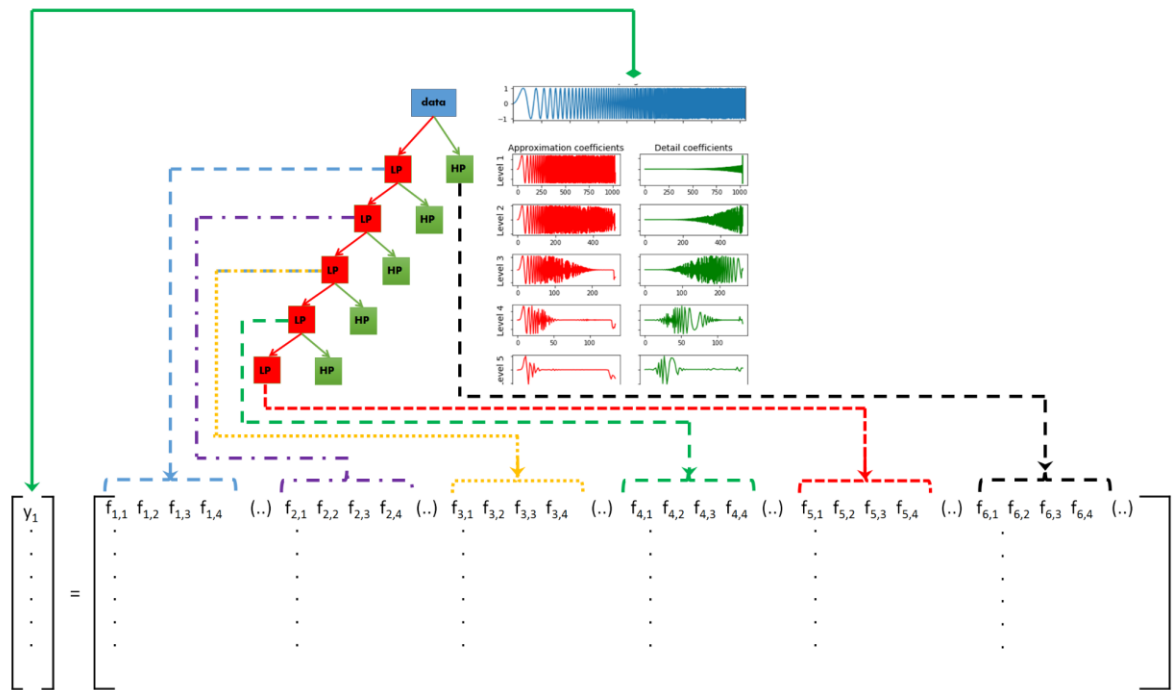


图 5 对 1 维信号做 5 层 DWT 得到的 2 维矩阵(图像)

除了 CWT，离散小波变换(DWT)也可以用于数据预处理，并将处理后的结果用于神经网络的学习。DWT 信号分类背后的理念在于：将信号拆分为不同的频率子频段，根据需要将信号分成多个或尽可能多的高、低频段。不同类型的行为信号在子频段中体现出不同的频率特征，因此，如果我们从每个子频段提取特征，并使用特征集合作为分类器的输入，利用其进行训练，则可以使分类器区分不同类型的信号。

还是以 UCI-HAR 的 1 维信号为例，图 5 展示了对信号做 DWT 变换，分解并得到的频率子段。在每个子频段中，我们可以得到用作分类器输入的数据。

4 论文阅读与复现

在自己动手编写 CWT+CNN 的实例之后，我还选择了一篇同样使用小波域信号训练神经网络的前沿文章深入阅读，与实例不同的使该文章提出的算法主要用于图像中条带噪声去除而非目标分类，文献名称为 *Wavelet Deep Neural Network for Stripe Noise Removal* [14]。并找到了作者提供的部分程序和数据，结合自己对算法的理解，额外做了一些图像测试和分析工作。下面对文章进行简要介绍。

红外热成像系统所拍摄的红外图像由于现有制造工艺水平和材料的限制，红外焦平面阵列中各探测单元的响应特性不完全一致，不同的探测光敏元对相同的红外辐射会产生不同的输出信号，这就使得红外图像内出现了一种条带状的非均匀性噪声。经典的去噪方法包括两个方向：基于先验的方法和基于统计的方法。该文章中使用的是基于深度学习的方法，虽然不是该方向的首创，但是作者提出的条带噪声去除的小波域深度神经网络(SNRWDNN)模型在去噪效果上相较已有的基于深度学习方法的条带噪声去除算法在性能上有很大的提升。该模型充分利用了小波域的特性，利用子带间的互补信息，很好地去除了条带噪声，保留了图像的细节[14]。文章的主要研究内容和创新点如下：

1. 引入深度神经网络直接学习小波域中的条带噪声特征，有助于准确地自适应估计噪声强度和分布。
2. 提出了一种定向正则化方法，避免模型产生不规则条带，更准确地将场景细节与条带噪声分离。
3. 利用小波分解将输入图像转换成一系列四分之一大小的系数，大大提高了计算效率和去噪性能。

4.1 算法设计

图像中的条带噪声的模型可以表示为

$$y(i, j) = x(i, j) + n(i, j) \quad (17)$$

其中， $y(i, j)$ 、 $x(i, j)$ 和 $n(i, j)$ 分别代表观测值、真实值和条带噪声分量。由公式(17)可见，条带噪声是加性噪声，此外，条带噪声具有显著的方向性，图 6 显示了受条带噪声污染图像在水平和垂直方向上的梯度。结果表明，条带噪声在水平梯度上表现出密集的反应，严重影响了沿垂直方向分布的图像纹理。相比之下，条带分量的垂直梯度在不干扰图像细节的情况下表现出良好的平滑性。因此该文章的去噪算法主要从方向梯度的角度去除条带噪声，从而得到原始图像的结构。

对含有条带噪声的图像做 Haar 离散小波变换(HDWT)提取条带噪声的梯度信息如图 7 所示。结果表

明, 条带噪声容易引起对低频系数(cA)和水平系数(cH)有明显的响应。相比之下, 垂直系数(cV)和对角线系数(cD)主要描述场景中的细节。

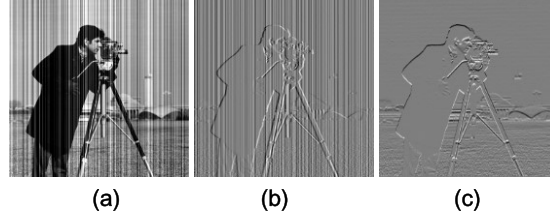


图6 条带噪声的方向性. (a)条带噪声污染图像; (b)图像的水平梯度; (c)图像的垂直梯度.

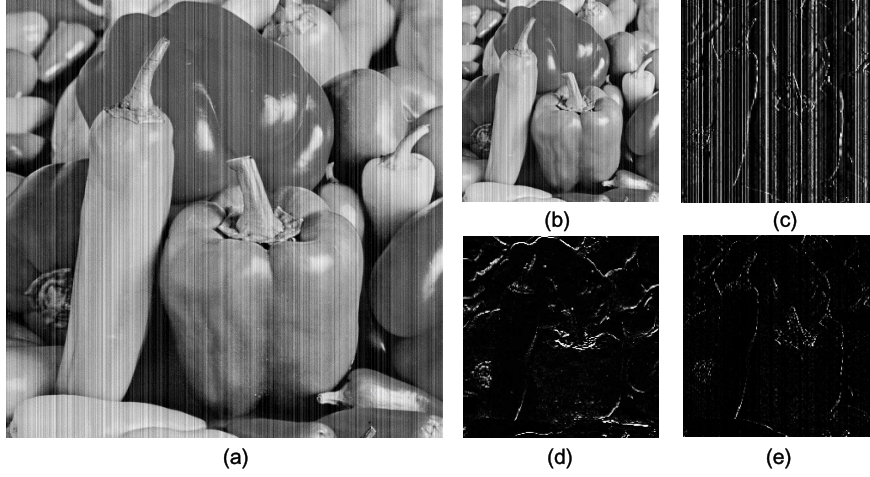


图7 条带噪声污染图像的 HDWT. (a)噪声污染图像; (b)低频系数; (c)水平系数; (d)垂直系数; (e)对角系数.

本文所提出的网络 SNRWDNN 体系结构如图 8 所示, 与现有的基于深度学习的条带噪声去除方法不同, 该方法将条带噪声的去除看作是小波系数的预测问题。SNRWDNN 方法包括三个步骤: 离散 Haar 小波变换(HDWT)、小波系数预测和逆 Haar 离散小波变换(IHDWT)。首先, 利用 HDWT 得到反映条带噪声固有特性的四个子带系数; 然后将这些系数连接成一个多通道的张量, 送入小波系数预测网络, 估计条带噪声分量; 随后利用输入张量与估计的条带分量, 进行噪声消除。和实例中运用的方法类似, 多通道的输入张量融合了不同子带中的信息, 并很好地保持了相互之间的一致性。最后用对预测得到小波系数使用 IHDWT 重构得到去除条带噪声的图像。

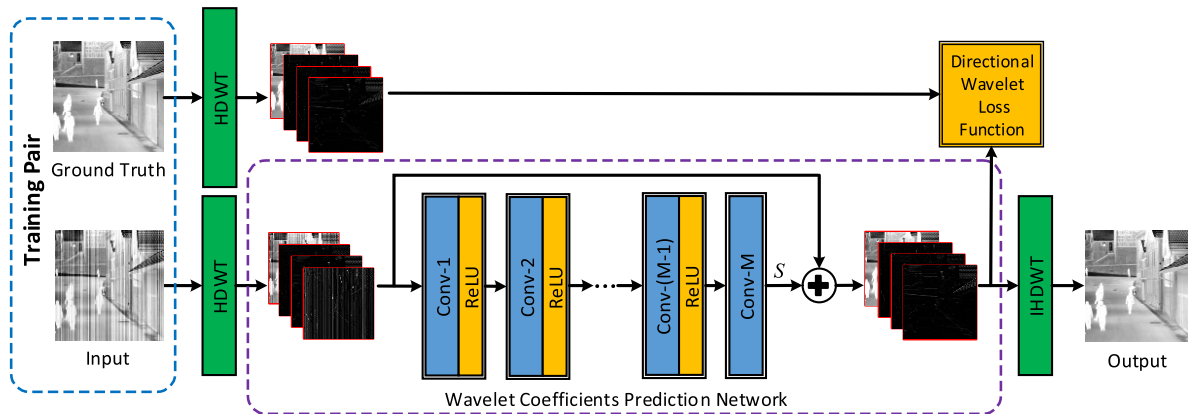


图8 文章提出的 SNRWDNN 方法的网络结构.

小波系数预测网络由 M 个具有残差连接的卷积层组成，其中所有卷积滤波器的步长为 1、大小为 3×3 ，前卷积层的输出被输入到线性单元(ReLU)激活函数中，进行非线性映射。由于 SNRWDNN 的输入和输出具有高度相似性，文章采用了残差学习方法，使训练更加稳定、快速和精确。

与图像域的最小均方误差(MSE)类似，定义小波均方误差损失为

$$L_w = \|cA - \overline{cA}\|_2^2 + \|cV - \overline{cV}\|_2^2 + \|cH - \overline{cH}\|_2^2 + \|cD - \overline{cD}\|_2^2 \quad (18)$$

其中， $\|\cdot\|_2^2$ 代表 L2 范数， cA, cV, cH, cD 是小波系数学习目标， $\overline{cA}, \overline{cV}, \overline{cH}, \overline{cD}$ 是对应的估计值。从局部图像角度看，单个条带噪声内部像素的强度变化范围相对较小，这意味小波系数沿条带方向具有良好的平滑性。条带相关子带，文章通过最小化条带分量沿估计方向的差异来描述平滑度，构造定向正则化表达式为

$$L_D = \|\nabla S_{cA}\|_2^2 + \|\nabla S_{cH}\|_2^2 \quad (19)$$

其中 ∇ 表示沿条带方向的偏差分算子。 S_{cA} 和 S_{cH} 分别代表 cA 和 cH 子带的条带分量。

因此方向小波损失函数可以定义为

$$Loss = L_w + \lambda \cdot L_D \quad (20)$$

其中 λ 为调整 L_D 权重的超参数。可以将损失函数的定义理解为，因为条带噪声对图像近似和水平子带影响较大，所以在损失函数中额外增加这两个子带的损失，能够使神经网络更加注重对该部分的学习，从而使这两个子带有更好的预测效果。

4.2 结果与讨论

神经网络的训练数据集为 BSDS500，通过对图像的裁剪，翻转，镜像等方法来扩大数据集。最后得到的数据集含有 230,000 个尺寸为 64×64 的图像。利用标准差范围为(0,0.25)的噪声来合成含条带噪声的图像，最后生成了训练图像对集合。

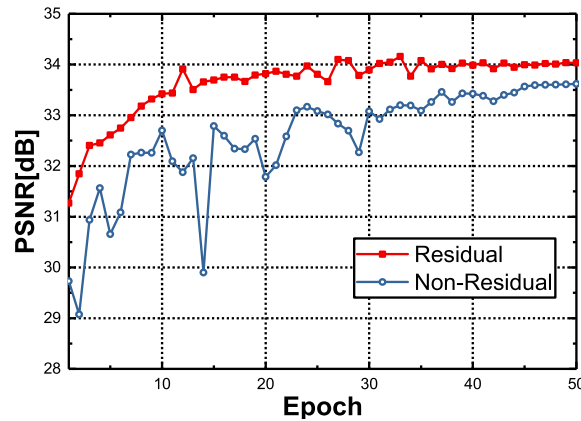


图 9 使用和不使用残差学习的 SNRWDNN 模型的 Epoch-PSNR 曲线。

作者对所提出的神经网络的两个特点进行了对照测试。

首先，对残差学习进行验证的例子表明，使用残差学习对提高网络的去条带能力有极大的影响。残差学习能够迅速提高网络的收敛速率，显著提高网络的效能，保证测试效果的稳定性，与无残差学习网络相比，峰值信噪比(PSNR)提高了约 0.4dB，残差随遍历样本的关系如图 9 所示。

表 3 测试图像上各种损失函数的 PSNR 结果比较。

Images	Cam.Man	Pepper	Starfish	Butterfly	Airplane	Barbara	Average
Loss Fun							
Noise level = 0.05							
With Directional Regularizer	35.67	33.02	34.66	34.03	31.8	34.52	33.95
Without Directional Regularizer	34.86	32.56	34.03	34.07	31.33	34.18	33.51
Noise level = 0.1							
With Directional Regularizer	31.27	28.69	30.2	29.48	28.3	30.52	29.74
Without Directional Regularizer	30.63	28.01	30.15	29.31	28.07	30.55	29.46

其次是定向正则化方法，在其它条件相同的情况下，一个模型使用定向正则化，对照模型则不使用，在噪声水平不同的情况下得到的去噪结果如表 3 所示。可以注意到，使用定向正则化在多数场景下都可以比不使用定向正则化取得更好的去噪效果，可见这是一个不错的条带噪声去除的技巧。

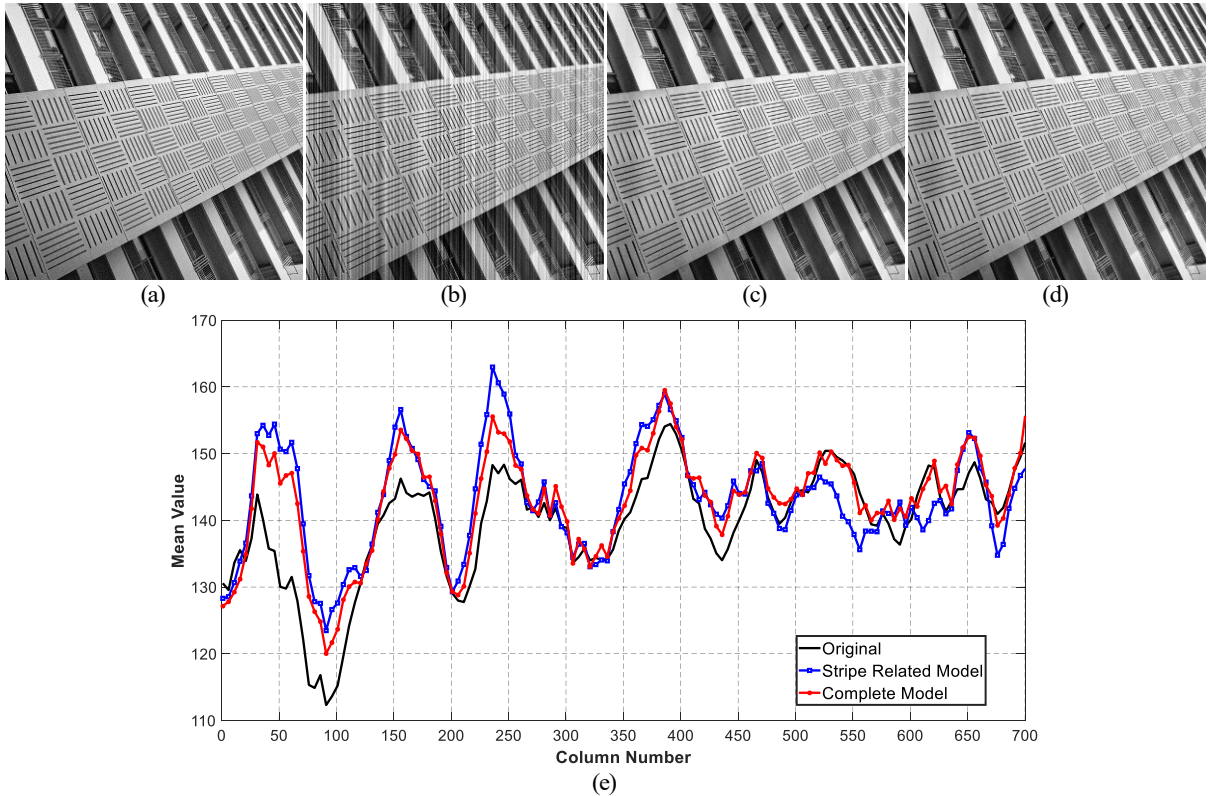


图 10 模拟条带噪声的去噪结果; (a)原始图像; (b)加噪图像; (c)条带相关模型的结果; (d)完整模型的结果; (e)条带相关模型和完整模型估计的去噪结果的均值比较。

作者还对小波子带之间的信息互补性进行了评估，为了进一步分析，训练了两个模型：仅使用 cA 和 cH 子带训练的条带相关 SNRWDNN 模型；使用完整的 4 个子带的 SNRWDNN 模型。两个模型的去条

带噪声的结果如图 10 所示。可以发现，在视觉效果上两种模型的去噪效果仅存在细微差别，在图 10(e) 中，横轴表示列数，纵轴表示图像每列的平均值以显示图像的差异性。通过比较，尽管可以发现尽管 cA 和 cH 子带包含了条带噪声的大部分分量，但是条带相关模型难以跟踪原始样本，即完整 SNRWDNN 模型更善于利用小波子带间的互补信息来精确去除条带噪声并保留细节。

作者也将 SNRWDNN 的去噪结果与如下经典的 7 种去噪算法进行了比较。

- 1) Guided Filter (GF) method
- 2) Non-local Mean Filter (NLM) method
- 3) Midway Histogram Equalization (MHE) method
- 4) Low-Rank Single-Image Decomposition (LRSID) model
- 5) Stripe Noise Removal Convolution Neural Network (SNRCNN) method
- 6) Deep Learning-based Stripe Nonuniformity Correction (DLSNUC) method
- 7) Infrared image Stripe Noise Removal Network (ICSRN) method

表 4 各种去条带方法的平均 PSNR/SSIM 结果.

Noise Level	Corrupted Image	Destriping Results							
		GF	NLM	MHE	LRSID	SNRCNN	DLSNUC	ICSRN	SNRWDNN
0.06	25.08/0.6023	27.36/0.8029	26.97/0.7782	27.86/0.8792	30.63/0.9426	28.13/0.9444	28.46/0.9502	28.73/0.9579	33.18/0.9878
0.1	20.74/0.4256	24.91/0.7043	24.48/0.6597	24.91/0.8122	29.42/0.9377	26.44/0.9286	26.56/0.9398	26.98/0.9466	30.07/0.9818
0.14	17.94/0.3211	23.05/0.6287	22.86/0.5725	22.45/0.7467	27.90/0.9273	24.79/0.9064	25.01/0.9179	25.26/0.9307	28.01/0.9761
0.18	15.92/0.2535	21.68/0.5874	21.37/0.5028	20.46/0.6804	26.23/0.9077	23.28/0.8770	23.45/0.8976	23.72/0.9108	26.43/0.9702
0.22	14.37/0.2066	20.71/0.5547	20.24/0.4453	18.77/0.6129	24.51/0.8735	21.93/0.8423	22.13/0.8729	22.36/0.8873	25.12/0.9638

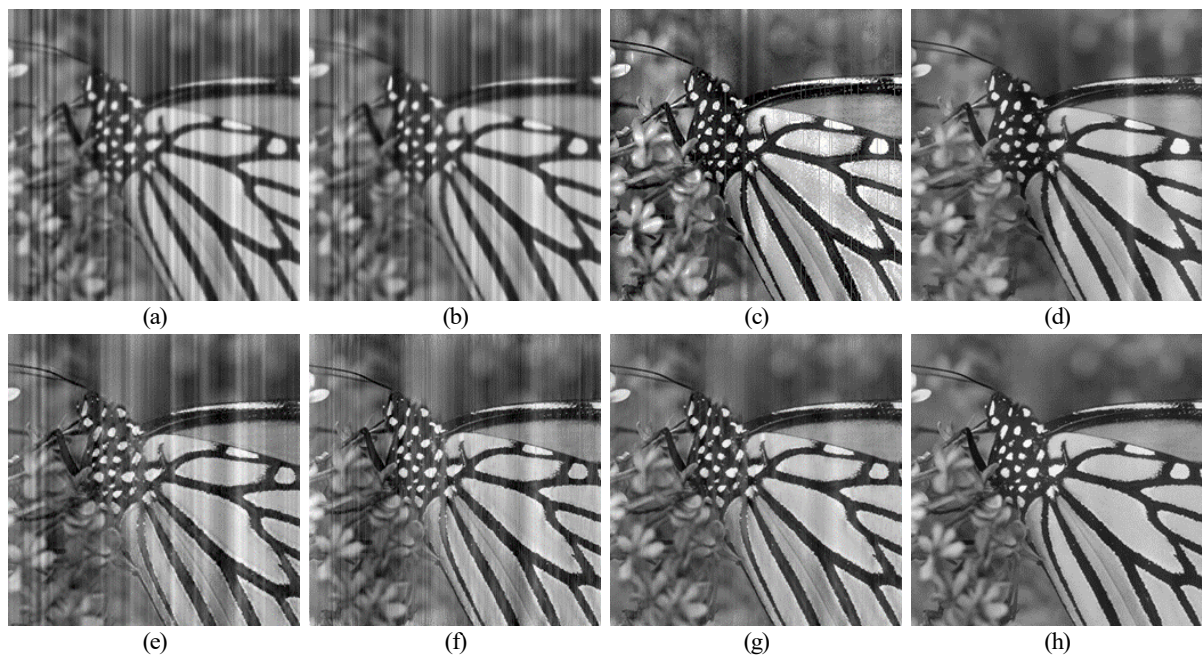


图 11 蝴蝶图像的去条带结果(噪声水平 0.14). (a)GF 结果; (b)NLM 结果; (c)MHE 结果; (d)LRSID 结果; (e)SNRCNN 结果; (f)DLSNUC 结果; (g)ICSRN 结果; (h)本文 SNRWDNN 结果.

定量比较的指标是平均 PSNR 和平均 SSIM，测试 12 张图片的结果如表 4 所示，相比其他各种去条

带噪声方法，文章提出的 SNRWDNN 在峰值信噪比和图像相似度上均有非常良好的表现。图 11 是其中一张测试图片的条带去噪效果 8 种算法对比。SNRWDNN 模型不仅去除了几乎所有的条带噪声，而且保留了清晰的细节，得到了令人满意的视觉效果。

文章还对真实的带条带噪声的红外图像进行去噪处理，火星轨道卫星采集的强条带噪声红外图像如图 12(a)所示。各种去条带方法的结果如图 12 所示，对比可以发现，SNRCNN、DLSNUC 和 ICSRN 仍然存在不同程度的噪声残留伪影，在红色框线内框出。相比之下，文章提出的 SNRWDNN 方法在不破坏图像内在结构的情况下更彻底地抑制了条带噪声，从而产生了更清晰的火星表面细节。总体上，提出的 SNRWDNN 模型在现实场景中也表现出突出的性能。

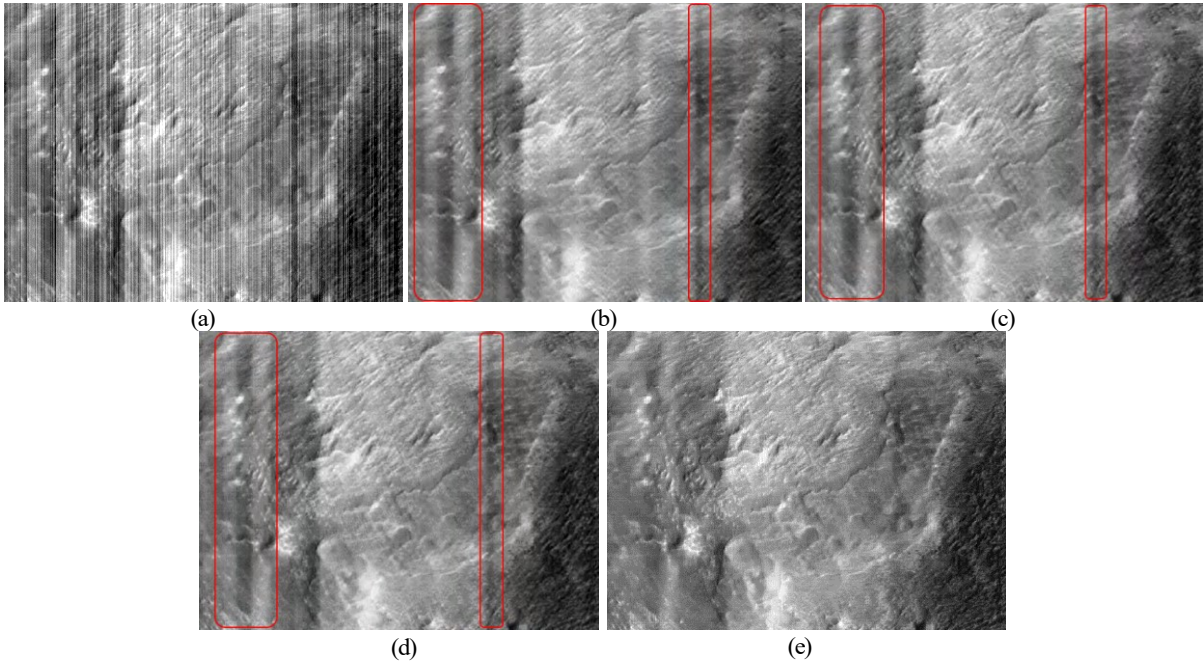


图 12 不同方法对火星表面的红外探测图像的去噪结果; (a)原始红外图像; (b)SNRCNN 的结果; (c)DLSNUC 的结果; (d)ICSRN 的结果; (e)SNRWDNN 的结果。

除了性能表现的优异之外，得益于小波域图像的稀疏性，SNRWDNN 方法还在很大程度上降低了运算时间。文章在不同大小的图像上对各种基于神经网络的条带去噪算法进行了对比实验，并在表 5 中列出了对应运行时间。相比之下，SNRWDNN 方法实现了接近神经网络层数较浅的 SNRCNN 模型的运算速度。

表 5 不同条带去噪算法在不同图像上所需的运算时间(ms)

Image Size	SNRCNN	DLSNUC	ICSRN	SNRWDNN
320×220	2.99	4.99	14.95	3.99
256×256	3.98	5.41	15.96	4.98
384×288	4.99	6.99	22.93	5.98
512×512	10.09	15.99	49.98	10.96

总体上，相比传统去噪算法，SNRWDNN 通过神经网络训练，获得了大幅性能提升；另一方面，该方法比其他基于神经网络的方法具有更高的时间效率和性能，更贴近实时处理和应用。

4.3 方法复现与阅读感悟

通过对文章的认真研读，我较好地掌握了作者的算法设计思想，即通过对小波域的系数预测实现原图像的恢复。通过查找作者公布的程序开源地址[15]，我下载了该算法对应的程序，在适当配置环境及修改一些程序参数和语句之后成功地通过了程序运行，并结合个性化图片对算法的理论性能进行了验证与复现。

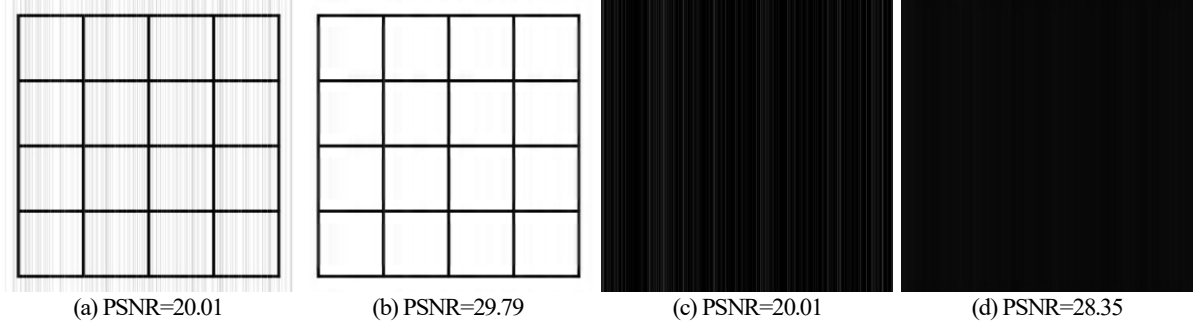


图 13 特殊图像的 SNRWDDN 性能测试 (a)加条带噪声图像; (b)(a)去噪声图像; (c)加条带噪声图像; (d)(c)去噪声图像.

为了验证极端情况下算法的性能，我自己绘制了两张图片，对这两张图片进行测试结果如图 13 所示，设置噪声水平 $level = 0.1$ 。

第一幅图是在白底图像上嵌入黑色网格状条纹，即小波域包含充分的横纵条纹分量，纵条纹是为了和条带噪声混淆，干扰算法性能；横条纹主要是对比分析。观察图 13(a)、(b)，对比表 4 第 2 行噪声水平 $level = 0.1$ 时的数据，可以看到 PSNR 同样提高了接近 10dB，可以认为作者的算法是较为令人满意的。

第二幅图片是纯黑色的图像，加入条带噪声的图像如图 13(c)所示。可能是由于除了噪声没有任何有意义的数值，SNRWDDN 这次的表现并不很好，得到的结果 PSNR 之提高了 8.34dB。分析原因应该是作者的参数设置较为保守，神经网络倾向于保留噪声图像中的信息，充分去除竖条纹并不难，但很容易导致原有图像的真实信息丢失。

为了印证我的想法，我从手机相册挑选了一幅在长沙某公园实景拍摄的图像，稍作格式处理作为神经网络的测试图像。给原图加噪之后的图像如图 14(a)所示，其中树干的条纹和条带噪声分量都十分丰富，图 14(b)是条带噪声去除后的图像，尽管肉眼难辨，但是很明显地，PSNR 下降较多，27.85dB 表 4 中的测试结果 30.07dB 相较甚远。分析可能原因是，训练好的神经网络是固定的，权重参数也都是固定的，对于输入图像是不加区分地测试，算法本身只专注于用它所学到的权重去除噪声，它会将含有很多树干的图像误认为是噪声很重的图像。

此外，我还将图 14(a)顺时针旋转 90° ，并对其进行条带去噪测试，结果如图 14(c)所示，如算法设计中提到的那样，横条带噪声完全没有被去除。很明显，如果我们采用 cA 和 cV 分量的去噪设计，也能去除图 14(c)中的横条带噪声。为了和图 14(a)、(b)形成对比，我将原图顺时针旋转了 90° 作为测试图像输入神经网络，输出的加条带噪声图像如图 14(d)所示，去噪后的结果如图 14(e)所示，由于原先的纵向树干变成了水平树干，原图像的纵向小波系数分量中条带噪声占据了大多数，因此去噪表现达到了正常

水平。

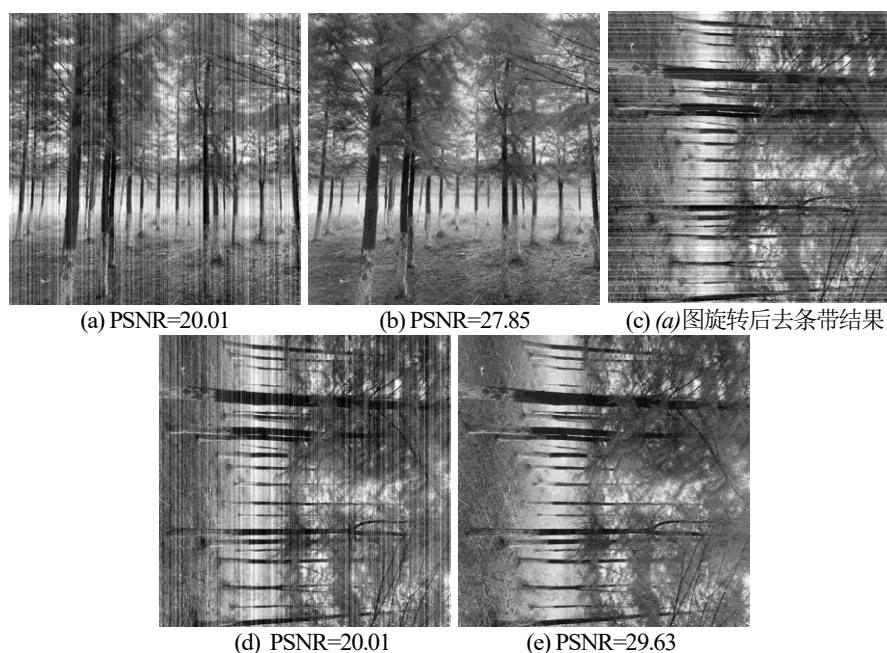


图 14 具有天然竖条纹成分图像的 SNRWDNN 性能测试

此外，在对 SNRWDNN 进行噪声测试时，发现在噪声水平比较高的情况下，去条带的性能会有所下降，这也是在情理之中的情况，因为很明显，作者使用的同一个数据集进行训练，其中的噪声水平往往差异不大，SNRWDNN 形成了一个模式，随着加在图像上的噪声增大，这个模式逐渐变得不再适用。在运行这个程序的时候，发现作者在训练集上添加的噪声范围在($\sigma = 0 \sim 0.25$)。在测试时，如果输入的噪声水平小于 0.25，都会获得较好的结果，这体现了该方法在性能上确实较为令人满意。

5 总结与思考

本文通过对如何结合小波分析与神经网络的原理讨论与介绍，结合使用 CWT 变换结果训练 CNN 进行人体行为活动分类的实例，展示了小波分析在神经网络中的重要应用；并结合对 *Wavelet Deep Neural Network for Stripe Noise Removal* 文献的深入阅读和结果复现，分析前沿的应用方法，并形成了自己的认识和理解。

在完成此次报告的过程中，我查阅了许多文献、博客资料和视频讲解，自己动手实现了小波分析和神经网络的实例应用。也能对论文作者给出的代码，从自己对文章和算法的理解角度入手，用个性化图片进行分析。整体上，这是一份内容充实、体系完成且具有充分的继续研究空间的报告。

得益于王老师扎实的课程知识讲授和丰富的课外内容拓展，我有能力和眼界在紧张的期末期间完成对本次报告从理论知识，到程序实现，再到论文阅读和复现的全部过程。小波分析只是信号处理领域的一个分支，但是学习方法和思维技巧却都是相通的，希望老师在有限课堂上传给我们的知识和信念能够在未来的学术生涯中被我时常运用。

参考文献

- [1] Gonzalez R C, Woods R E, Eddins S L. 数字图像处理的 MATLAB 实现[J]. 2013.
- [2] 张然, 解振东. 数字图像去噪算法研究与实现[J]. 信息通信, 2018 (12): 12-13.
- [3] 王阳. 红外图像条带噪声消除算法研究[D]. 西安电子科技大学, 2013.
- [4] 陆婷. 小波分析在图像处理中的运用[J]. 电子技术与软件工程, 2018 (11): 89-90.
- [5] Hinton G E, Osindero S, Teh Y W. A fast learning algorithm for deep belief nets[J]. Neural computation, 2006, 18(7): 1527-1554.
- [6] 高净植, 刘伟, 白旭, 等. 平稳小波域深度残差 CNN 用于 LDCT 图像估计[J]. 计算机应用, 2018: 0-0.
- [7] 蔡念, 胡匡祐, 李淑宇, 等. 小波神经网络及其应用[J]. 中国体视学与图像分析, 2001 (2001 年 04): 239-245.
- [8] Jensen A, la Cour-Harbo A. Ripples in mathematics: the discrete wavelet transform[M]. Springer Science & Business Media, 2001.
- [9] 成礼智, 王红霞, 罗永. 小波的理论与应用[M]. 科学出版社, 2004.
- [10] Kalchbrenner N, Grefenstette E, Blunsom P. A convolutional neural network for modelling sentences[J]. arXiv preprint arXiv:1404.2188, 2014.
- [11] O'Shea K, Nash R. An introduction to convolutional neural networks[J]. arXiv preprint arXiv:1511.08458, 2015.
- [12] Ahmet Taspinar. A guide for using the Wavelet Transform in Machine Learning[EB/OL]. <https://ataspinar.com/2018/12/21/a-guide-for-using-the-wavelet-transform-in-machine-learning/>, 2018-12-21.
- [13] Burak; Avatar David Bradway. Human Activity Recognition (HAR)[EB/OL]. <https://github.com/healthDataScience/deep-learning-HAR>, 2019-2-5.
- [14] Guan J, Lai R, Xiong A. Wavelet deep neural network for stripe noise removal[J]. IEEE Access, 2019, 7: 44544-44554.
- [15] Juntao Guan. Wavelet Deep Neural Network for Stripe Noise Removal[CP/DK]. <https://github.com/jtguan/Wavelet-Deep-Neural-Network-for-Stripe-Noise-Removal>, 2019-10-01.

附录：程序说明

1. 实例程序

- 程序见“实例代码/使用 CWT 变换结果训练 CNN.ipynb”
- 需要配置相应的 Keras 和 Tensorflow 环境
- 需要下载 [UCI-HAR](#) 数据，解压到 notebook 的同级目录下
- 运行每个 Cell，如果只使用 CPU，训练时间可能需要半小时

2. 论文程序

- 程序见“论文代码/main.py, tool.py”
- “Set12”和“realFrame”分别存放测试图片和真实条带噪声污染图像
- “sim_res”和“IR_Set”分别存放测试结果和去噪后的真实图像
- “weights”存放已经训练好的神经网络权系数
- “main.py”和“tool.py”分别是有训练、测试和真实图像处理的主程序和函数定义文件
- 可以通过下载 BSDS500 数据集，重新训练该神经网络