Probabilità e statistica

12 giugno 2019

richiami di v.a.

Def Varianza. *Sia X v.a. con legge P_X e alfabeto composto da elementi x_k. Si definisce la varianza:*

$$Var(X) = \sum_{x_k} [x_k - E(X)]^2 P_X(x_k)$$

Valgono:

1. $Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2$
2. $Var(X) \geq 0$, in particolare $Var(X) = 0 \Leftrightarrow X \equiv costante$
3. $Var(aX) = a^2 Var(X)$, $a \in \mathbb{R}$
4. $Var(X + a) = Var(X)$, $a \in \mathbb{R}$
5. $X \perp\!\!\!\perp Y \implies Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

Def Covarianza. *Siano X, Y v.a.. Si definisce la covarianza:*

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Valgono:

1. $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
2. $Cov(Y, X) = Cov(X, Y)$
3. $Cov(aX + b, Y) = aCov(X, Y)$
4. $Cov(X + Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$
5. $X \perp\!\!\!\perp \implies Cov(X, Y) = 0$

Def V.a. scorrelate. *Le v.a. X, Y sono dette scorrelate se $Cov(X, Y) = 0$*

V.a. notevoli

v.a.	Def	$p_X(k)$	$E(X)$	$Var(X)$
Bernulli	$X \sim \mathcal{B}e(p)$	$p_X(1) = p$ $p_X(0) = 1 - p$	p	$p(1-p)$
Binomiale	$X \sim \mathcal{B}in(n, p)$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Geometrica	$X \sim \mathcal{G}e(p)$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p}$
Poisson	$X \sim \mathcal{P}o(\lambda)$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

Teorema Limite di Poisson

Siano $X \sim \mathcal{B}in(n, \frac{\lambda}{n})$ e $Y \sim \mathcal{P}o(\lambda)$.
Allora $\lim_{n \to \infty} p_{X_0}(k) = p_Y(k)$,
con $k \in \mathbb{N}_0$ fissato.
Ossia posso trattare come una Poisson le binomiali con n molto grande e p molto piccoli
Euristica: $n > 100$; $p < 0.01$; $np \leq 20$

Vettori aleatori discreti

Def Vettore aleatorio discreto *Sia $(\Omega, \mathbb{P}, P)$ uno spaz. di prob. discreto. Un vettore aleatoriio è una funzione: $V : \Omega \to \mathbb{R}^n$, ossia*
$\omega \mapsto V(\omega) = \big(X_1(w), \ldots, X_n(\omega)\big)$.
D'ora in poi si assume $n = 2$

Def Densità congiunta. *Siano X e Y v.a. con densità P_X e P_Y. Si definisce $P_{XY} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to [0, 1]$, ossia*
$(x_i, y_j) \mapsto p_{XY}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$

Def Densità marginale. *Sia P_{XY} densità congiunta delle v.a. X e Y. Si dicono densità marginali P_X e P_Y. Valgono:*

1. $P_X(x_i) = \sum_{y_j} P_{XY}(x_i, y_j)$
2. $P_Y(y_i) = \sum_{x_i} P_{XY}(x_i, y_j)$

Prop *Siano X, Y v.a. e sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Allora:*

$$E[g(X, Y)] = \sum_{x_i, y_j} g(x_i, y_j) P_{XY}(x_i, y_j)$$

Def Indipendenza. *Siano X, Y v.a. con alfabeti composti da elementi x_i e y_j. Allora $X \perp\!\!\!\perp Y$ se:*

$$P_{XY}(x_i, y_j) = P_X(x_i) P_Y(y_j) \quad \forall x_i, y_j$$

V.a. ass. continue

Def *Una v.a. X si dice (ass.) continua si definisce associando una densità $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che:*

1. $f_X(x) \geq 0$
2. $\int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = 1$

Valgono:

1. $P(X \in I = P_X(I) = \int_I f_X(x) dx$
2. $P_X(a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Def Funzione di distribuzione.
$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$
$x \mapsto F_X(x) = P(X \leq x)$

Def Valor medio v.a.c..

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_x(x) dx$$

Def Varianza v.a.c..

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} [x - E(X)]^2 f_x(x) dx$$

V.a.c. notevoli

Def V.a. uniformi. *$X \sim U(a, b)$ con densità:*

$$f_x(x) = \frac{1}{b - a} \mathbb{1}_{(a,b)}(x)$$

Valogono:

1. $P_X(I) = \frac{|I \cap (a,b)|}{b-a}$
2. $E(X) = \frac{b+a}{2}$
3. $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Def V.a. esponenziale. *$X \sim Exp(\lambda)$ con densità:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & se\ t \geq 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Descrive la durata della vita di un fenomeno privo di memoria. Valgono:

1. $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
2. $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
3. $P(X \geq T + t \mid X \geq T) = P(X \geq t)$

Def Gaussiana. *$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ e densità:*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Valgono:

1. $E(X) = \mu$
2. $Var(X) = \sigma^2$
3. $\Phi(z) = P(X \le z) = 1 - \Phi(-z)$
4. $P(\mu - 4\sigma \le X \le \mu + 4\sigma) \approx 1$

Def Gaussiana standard. *$X \sim N(0, 1)$.*

Prop Trasformazioni affini di v.a. normali. *Sia $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $Y = aX + b$ allora*

$$Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

quindi se $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Teoremi su v.a.c.

Def Media empirica/campionaria. *Siano $X_1, ..., X_n$ v.a.. Si definisce:*

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Cor. *Siano $X_1, ..., X_n$ v.a. i.i.d.. Allora:*

1. $E(\overline{X_n}) = E(X_1)$
2. $Var(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}Var(X_1)$

Def Legge dei grandi numeri (LLN). *Siano $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. con media finita. Allora*

$$\overline{X_n} \to E(X_1)$$

Def Metodo Monte Carlo.

$$\mathcal{I} = \int_a^b f(x)dx \quad b > a$$

$$\mathcal{I} = (b-a)\int_a^b \frac{f(x)}{b-a}dx = (b-a)E(f(x))$$

con $X = U(a, b)$

Def Teorema centrale del limite (CLT). *Siano $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. con $E(X_1) = \mu$, $Var(X_1) = \sigma^2$. Allora:*

$$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\right) \to N(0, 1) \qquad (1)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} \to N(0, 1) \qquad (2)$$

$$\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mu) \to N(0, \sigma^2) \qquad (3)$$

Prop Velocità di convergenza. *Siano $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. ($X_i \sim \mathcal{B}e(p)$). Allora:*

$$P(|\overline{X_n} - E(X_1)| \le \varepsilon) > \alpha \iff n \ge \frac{Var(X_1)}{\varepsilon^2(1-\alpha)}$$

Statistica descrittiva

Def Scarto quadratico medio. *Sia X v.a. con alfabeto $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Si definisce:*

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}$$

Statistica inferenziale

Def Modello statistico. *L'insieme di densità $\{f_\theta(x) \mid \theta \in \Theta\}$, dove θ è un parametro (o n-pla di parametri) della distribuzione e Θ è l'insieme dei possibili θ.*

Def Campione casuale di ampiezza n. *n-pla di v.a. i.i.d. di legge $f_\theta(x)$.*

Def Statistica. *Una qualsiasi funzione che si applica a un campione casuale.*

Def Stimatore. *Una statistica $\hat{\theta}(x)$ usata per approssimare il valore di θ in un modello statistico.*

Def Stimatore corretto. *Uno stimatore $T(x)$ tale che $E^\theta(T) \to \theta$.*

Def Stimatore consistente. *Uno stimatore $T(x)$ tale che $Var^\theta(T) \to 0$.*

Prop Combinazioni lineari di Gaussiane indipendenti. *Siano $X_1, \ldots, X_n$ v.a. indipendenti con $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ e siano $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Allora:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right)$$

Def Maximum Likelihood Estimator. *Siano $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d con $X_i \sim f_\theta(X_i)$ e sia $Lik(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(X_i)$. Lo stimatore MLE $\hat{\theta}_{ML}(\cdot)$ è uno stimatore di θ che massimizza $Lik(\theta)$.*

Nota θ continuo. *Assumendo che il massimo sia l'unico punto critico, massimizzo $Lik(\theta)$ ponendo $\frac{\partial}{\partial\theta}Lik = 0$. Poichè $\log x \nearrow$, conviene massimizzare $\log Lik(\theta)$ ponendo:*
$\frac{\partial}{\partial\theta}\log Lik = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f_\theta(X_i) = 0$
Nel caso generale va scelto θ_{ML} massimo globale, i.e. $\theta_{ML} = \max\{\theta_{max} \mid \frac{\partial}{\partial\theta}Lik(\theta_{max}) = 0 \wedge \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}Lik(\theta_{max}) < 0\}$.

Nota θ discreto *Sia $g(\theta) = \frac{Lik(\theta+1)}{Lik(\theta)}$. Se $g(\theta) \searrow$ massimizzo $Lik(\theta)$ ponendo $g(\theta) = 1$.*

Altro

Integrazione per parti

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$$

Integrazione per sostituzione

$$\int f(x)g'(x)dx = \int f(t)dt$$

con $t = g(x)$ e $dt = g'(x)dx$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln|f(x)|$$

Integrali notevoli

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}$$

$$\int sin^2(x)dx = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}sin(2x))$$