LOGIKA – PTI BSC
2. GYAKORLAT

A kijelentések jelölésére már használtuk *a p, q, r,* … kisbetűket. A továbbiakban átismételjük az ezekkel végzett logikai műveleteket, tudományos elnevezését és a jelölésüket.

	A művelet	**jele**	**alkalmazás**	**…programozási nyelvben**
1.	Tagadás = ***negáció***	$\neg$	$\neg p$	
2.	ÉS- művelet = ***konjunkció***	$\wedge$	$p \wedge q \wedge r$	
3.	VAGY – művelet = ***diszjunkció***	$\vee$	$p \vee q$	
4.	„Ha *p*, akkor *q*”- művelet = ***implikáció***	$\Rightarrow$	$p \Rightarrow q$	
5.	„*p* akkor és csak akkor, ha *q*”művelet = ***ekvivalencia***	$\Leftrightarrow$	$p \Leftrightarrow q$	

1. Feladat. „Ha a gyerek lázas vagy köhög, akkor kihívjuk az orvost.” Írjuk fel ennek az összetett kijelentésnek a szerkezetét elemi kijelentések és műveletek segítségével.

……

A kijelentés szerkezetének ily módon való felírását ***formalizálásnak***, a kapott (kijelentésváltozókból, műveleti jelekből és zárójelpárokból felépített) jelsorozatot ***(logikai) formulának*** nevezzük.

Ha adott egy logikai formulában szereplő kijelentésváltozóknak a logikai értékét adjuk meg (igaz vagy hamis), akkor a logikai értékkel adott interpretációról, röviden ***interpretációról*** beszélünk.

2. Feladat. Mikor adott egy logikai művelet?

3. Feladat. Mitől függ az interpretációk száma?

4. Feladat. Hány kétváltozós művelet van?

5. Feladat. Hány *n* változós művelet van?

6. Feladat. Adja meg az $((p \vee q) \wedge r) \Rightarrow (p \wedge \neg q)$ formula kiértékelését minden interpretációban!

p	q	r	$(p \vee q) \wedge r$	$p \wedge \neg q$	$((p \vee q) \wedge r) \Rightarrow (p \wedge \neg q)$
i	i	i			
i	i	h			
i	h	i			
i	h	h			
h	i	i			
h	i	h			
h	h	i			
h	h	h			

7. Feladat. Adja meg az alábbi formulák kiértékelését minden interpretációban!

a. $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$

b. $(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge \neg q)$

p	q	$(p \Rightarrow q) \quad \wedge \quad (p \wedge \neg q)$	$(p \Rightarrow q) \quad \vee \quad (p \wedge \neg q)$
i	i		
i	h		
h	i		
h	h		

Definíció. Tautológia (azonosan igaz formula, érvényes formula): Az a formula, amely minden interpretációban igaz (például   ).
Definíció. ***Kontradikció (ellentmondás, azonosan hamis, kielégíthetlen)***: Az a formula, amely minden interpretációban hamis (például   ).
Definíció. ***Kontingens formula***: kielégíthető, de nem érvényes formula. (például ……….)

A logikai formulákat a következőkben nagy betűkkel fogjuk jelölni. (A, B, C, …)
Definíció. ***Egyenértékű (ekvivalens) formulák***: Az A formula egyenértékű a B formulával, ha az összes kijelentésváltozó minden interpretációjára az A logikai értéke megegyezik a B logikai értékével. Ezt így jelöljük: $A \equiv B$.

Az elmúlt héten értéktáblázattal igazoltuk az alábbiakat:

$$\neg(\neg p) \equiv p$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$ elnevezés: De Morgan azonosság

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$ elnevezés: De Morgan azonosság

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p) \equiv \neg(p \wedge \neg q) \equiv \neg p \vee q$$

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (p \Leftrightarrow q)$$

8. Feladat. Bizonyítsuk be a konjunkció és a diszjunkció műveletek alábbi tulajdonságait, és tanuljuk meg a tulajdonságok elnevezéseit!.

a) $p \vee q \equiv q \vee p$ elnevezés: a diszjunkció kommutatív
b) $p \wedge q \equiv q \wedge p$ elnevezés: a konjunkció kommutatív
c) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ elnevezés: a diszjunkció asszociatív
d) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ elnevezés: a konjunkció asszociatív
e) $p \vee p \equiv p$ elnevezés: a diszjunkció idempotens
f) $p \wedge p \equiv p$ elnevezés: a konjunkció idempotens
g) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ elnevezés: A konjunkció disztributív a diszjunkcióra nézve
h) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ elnevezés: A diszjunkció disztributív a konjunkcióra nézve
i) $p \wedge (p \vee q) \equiv p \vee (p \wedge q) \equiv p$ elnevezés: abszorpciós tulajdonság

p	q	$p \wedge (p \vee q)$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \wedge q$	$q \wedge p$
i	i				
i	h				
h	i				
h	h				

p	q	r	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$			
i	i	i							
i	i	h							
i	h	i							
i	h	h							
h	i	i							
h	i	h							
h	h	i							
h	h	h							

A felsorolt öt logikai műveleten kívül szokásos még három (kevésbé fontos) logikai műveletet használni. Ezek a következők:

6. **KIZÁRÓ VAGY-** művelet = **kizáró diszjunkció** (… XOR ...):

Pl. Vagy holnap vagy holnapután megírjuk a dolgozatot.

Jele: $p \nabla q$ vagy $p \oplus q$

Akkor és csak akkor igaz, ha pontosan az egyik tagja igaz.

7. ÖSSZEFÉRHETETLENSÉG = összeférhetetlenséget kifejező diszjunkció: (… NAND…)

Pl. vagy iszik valaki, vagy autót vezet.

Jele: $p | q$

Akkor és csak akkor igaz, ha legfeljebb az egyik tagja igaz.

8. **SEM-SEM** – művelet

Pl. Sem apja, sem anyja (nincsen). Se’ pénz se’ posztó.

Jele: $p \| q$

Akkor és csak akkor igaz, ha mindkét tagja hamis.

Végezetül készítsük el a megismert 2.-8. logikai művelet értéktáblázatát.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \nabla q$	$p \mid q$	$p \| q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
i	i							
i	h							
h	i							
h	h							
			megengedő	kizáró	összeférhetetlenséget kifejező			
			Diszjunkció					

Logikai feladatok:

1. **A hét törpe kunyhójában az egyik törpe eltört egy tányért. Szundi és Kuka nem lehetett a tettes, mert ők elmentek szamócát szedni. Hófehérke számon kért három törpét. Így vallottak:**

TUDOR: „Nem Szundi volt. Én voltam.”

MORGÓ: „Nem én voltam. Nem Hapci volt.”

VIDOR: „Tudor volt. Nem Morgó volt.”

Utólag kiderült, hogy mindhárom törpe egyik állítása igaz, a másik hamis volt. Ki törte el a tányért?

2. **Egy futóversenyen Mahala, Maugli, Santi nyerte meg az első három helyet. Mikor megkérdezték tőlük, melyikük hányadik lett, az alábbiakat válaszolták:**

- Mahala nem lett első.
- Maugli nem lett második.
- Santi nem lett sem első, sem harmadik.

Kiderült, hogy csak egyikük mondott igazat. Ki hányadik helyen végzett?

3. **Négy lány futóversenyen vett részt. A verseny után mindegyiket megkérdezték, melyik helyen végzett?**

Anna: *Nem lettem sem első, sem utolsó.*

Bella: *Nem lettem első.*

Csilla: *Első lettem.*

Dóra: *Én lettem a utolsó.*

Valaki, aki a versenyt látta, azt mondta, hogy a négy válasz közül három igaz, egy hamis. Ki mondott valótlant? Ki volt az első?

4. **Egy sziget lakói két típusba sorolhatók:"igazmondók", ők mindig igazat mondanak, és „hazugok", mert ők mindig hamisat állítanak. E sziget lakóira vonatkoznak az alábbi feladatok.**

a.) A sziget három lakója -*A, B* és *C* – együtt álldogálnak a kertben. Arra megy egy idegen, és megkérdezi *A*-t*:"Ön igazmondó vagy hazug?" A* válaszol, de olyan érthetetlenül, hogy az idegen nem érti, hogy mit mondott. Ezután megkérdezi *B*-t: „Mit mondott *A*?" *B* válasza: *„A azt mondta, hogy ő hazug."* Ekkor közbeszól *C*: *„Ne higgyen B-nek, hazudik!"* A kérdés az, hogy miféle *B* illetve *C*?

b.) Ennek a feladatok két szereplője van, *A* és *B*. *A* a következőket állítja*: „Legalább az egyikünk hazug."* Miféle *A* és *B*?

c.) Tegyük fel, hogy *A* ezt mondja*:"Hazug vagyok vagy B igazmondó."* Miféle *A* és *B*?

d.) Tegyük fel, hogy *A* ezt mondja*: "Igazmondó vagyok vagy kettő meg kettő az öt."* Mire lehet ebből következtetni?

e.) Ismét három szereplőnk van: *A*, *B* és *C*. A következőket állítják:

A: *„Mindhárman hazugok vagyunk."*

B: *„Pontosan egy igazmondó van köztünk."*

Miféle *A*, *B* és *C*?

f.) Tegyük fel, hogy a fentiek helyett *A* és *B* a következőket mondja:

A: „ Mindnyájan hazugok vagyunk."

B: „Pontosan egy hazug van köztünk."

Miféle *A, B* és *C*?

g.) Tegyük fel, hogy *A* ezt mondja: *„Én hazug vagyok, de B nem az."* Miféle *A* és *B*?

h.) Megint három szereplőnk van, *A, B* és *C*. Két személyt egyforma típusúnak mondunk, ha mindketten igazmondók vagy mindketten hazugok. *A* és *B* a következőket állítják:

A: *„B hazug."*

B: „ A és C egyforma típusú."

Miféle *C*?

i.) Újabb feladat. *A* ezt mondja: *„B és C egyforma típusú."* Valaki megkérdezi *C*-től: *„Egyforma típusú A és B?"* Mit válaszol *C*?

5. A lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők mindig hazudnak. Közösen kiállítottak egy 11 fős focicsapatot. A bíró megkérdezett minden játékost, hogy mondja meg, hogy *„Hány igazmondó van a csapatban?"* A játékosok egy-egy számmal válaszolnak. Íme a kapott válaszok: 3, 2, 5, 7, 5, 3, 9, 4, 3, 6, 5. Hány lovag van a csapatban?