Valószínűségszámítás és Statisztika (valszám)

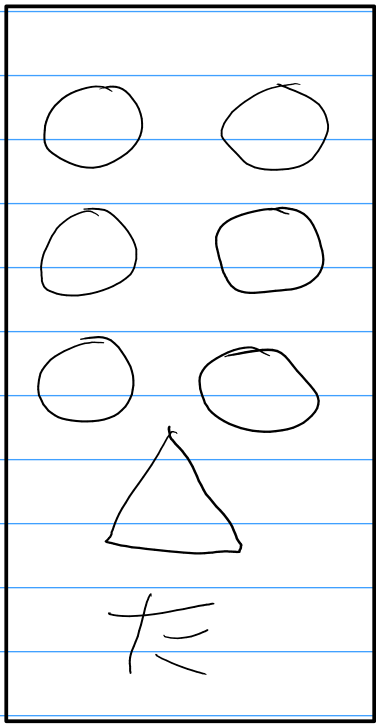
(Definitive jegyzet: Mikus Dániel és Maya Szigete jóvoltából)

Előszó

Motivációt a könyv elkészítésére, abból merítettünk, hogy ne bukjunk meg ebből a tárgyból. (valamint Zuld felbaszására :]) A tudást egyedül nehéz megszerezni, azonban ha többen gondolkodunk, és beszélgetünk róla akkor hamarabb megragad. Legyen bármilyen nehéz a tárgy léteznie kell egy fogas jegyzetnek, amiből bárki tanulhat, és végül legyen ez az!

Egy valszám jegyzet mindenek felett.

A jegyzet nem tartalmazza a nehéz bizonyításokat, mert senki nem fogja megjegyezni. Nem lehetetlen megérteni őket, de ha azok érdekelnek, akkor megtalálható a Czigó által kiosztott jegyzetben is. A lényeg, hogy megértsük mit is takarnak a fontos fogalmak.
Ez a könyv merít "valszam_jegyzet.pdf" és "VIK_Valszam_2021_eloadas.pdf" c. könyvekből. Jogilag nincsen hozzá semmi köze senkinek a Maya szigetéről.



Eseményalgebra (σ - algebra)

Kisérlet

- Azonos feltételek mellett megismételhető, véletlen esemény egy megfigyelését kisérletnek nevezzük.
- A kisérletekhez rendelhetünk kimeneteleket, amiket ω-val (kis omegával) jelölünk.

- $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \ldots\}$ Elemi események összessége

Eseménytér

  - Példa: Kocka dobásnál az eseménytér: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Az eseménytérben vannak események, amik kitüntetett kimenetelek: A, $A \subseteq \Omega$
- Az események bekövetkezésének van valószínűsége is: $P(A)$ aminek értéke 0 és 1 közötti valós szám.
- Műveletek eseményekkel (halmazokkal):

$\underbrace{\bar{A}}_{\text{Komplementer}}$ $\underbrace{A \cup B}_{\text{Uniója (elemek összessége) értelmezhető "vagy"-ként}}$ $\underbrace{A \cap B}_{\text{Metszete értelmezhető "és"-ként}}$ $\underbrace{A \setminus B}_{\text{Két esemény különbsége}}$

$\underbrace{A \cap B = \emptyset}_{\text{Kizáró események}}$ $\underbrace{\emptyset}_{\text{Üres halmaz lehetetlen esemény}}$ $\Longrightarrow$ $\underbrace{\Omega}_{\text{létezik biztos esemény}}$

- de Morgan-azonosságok a két halmazra:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \text{és} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Illetve végtelen sok halmazra

$$\overline{\underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}_{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots}} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \quad \text{és} \quad \overline{\underbrace{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}_{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots}} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$$

- Az összetett eseményeket definiálhatjuk az eseménytér részhalmazaként (nem mindig pontos ez a meghatározás).
- Egy összetett eseményt, LEGALÁBB két elemi esemény alkot. $\omega_1 \cup \omega_2$

- Az eseményalgebra az egy halmaz, ami tartalmazza az összes eseményt, azonban nem az Ω részhalmaza, VAGYIS egy $\mathcal{F} \subseteq \underbrace{\mathcal{P}(\Omega)}_{\Omega \text{ Hatványhalmazai}}$ részhalmaz.

$\mathcal{A}$

$\mathcal{A} \subseteq$

- Mivel $\mathcal{P}(\Omega) \subseteq \Omega$ belátható, hogy $\Omega \in \mathcal{A}$.

- Továbbá, mivel az eseményalgebra részhalmaza az eseménytér összes elemeinek hatványhalmaza, ezért eggyes elemek komplementere is eleme az $\mathcal{A}$ halmazrendszernek.

Pl.: $B=\{x,y,z\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\emptyset,\{x\},\{y\},\{z\},\{x,y\},\{x,z\},\{y,z\},\{x,y,z\}\}$

Ha $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A} \quad \forall A \in \mathcal{A}$

- És, ha hatványhalmaz egyes elemei megszámlálhatóan végtelen sok, azesetben

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow \{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots\} \in \mathcal{A}$$

- Eseményalgebra feltételei

- Az események bár az eseménytér részhalmazai, azonban nem lesz az összes részhalmaz esemény.

- Egy esemény bekövetkezett, ha $\omega \in A \in \mathcal{A}$. Az $\mathcal{A}$ eseményalgebra esetén pontosan egy ω elemi esemény következhet be.

- Események (halmazok) közötti relációk: Pl.: $A, B \in \mathcal{A}$ események.

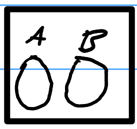
$\underbrace{A = B \text{ Mert } A=\{\omega_1,\omega_2\},\ B=\{\omega_1,\omega_2\}}$

Két esemény (halmaz) egyenlősége

$\underbrace{A \rightarrow B \text{ ha } A \subseteq B}$

A eseményből következik B esemény, ha A részhalmaza B-nek (részeseménye)

$A \cap B \neq \emptyset$ ha



A és B események kizáróak, ha a halmazok diszjunktat (tehát egyszerre nem következhetnek be, vagyis nincs közös metszetük)

- Az ismert halmazműveletek nem vezetnek ki az $\mathcal{A}$ eseményalgebrából!

- Vegyük észre, hogy az eseményekkel végzett halmazműveletek eredményei szintén események lesznek!

$\underbrace{A \cap B}$

Esemény bekövetkezik,
ha A ÉS B bekövetkezik

$\underbrace{A \cup B}$

esemény bekövetkezik,
ha A VAGY B bekövetkezik

$\underbrace{A \setminus B}$

esemény bekövetkezik, ha
A igen és B nem

$\underbrace{B \setminus A}$

esemény bekövetkezik, ha
B igen és A nem

Valószínűség

- A valószínűség egy $\mathcal{A} \to [0,1]$ függvény, ahol $\mathcal{A}$ eseményalgebra.

- Az események valószínűsége legalább 0 vagy legfeljebb 1 $\quad P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

$$P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(\emptyset) = 0^{(*)} \quad 0 \leq P(A) \leq 1 \ \forall A \in \mathcal{A}$$

- Az esemény komplementerének valószínűsége: $P(\overline{A}) = 1 - P(A) \ \forall A \in \mathcal{A}$

(*) $P(\emptyset) = 0 \Leftrightarrow P(\{?\}) = 0$

- Páronként kizáró eseménysorozat uniójának valószínűsége az események valószínűségének végtelen összege. Ezt a tulajdonságot sigma additivitásnak hívjuk.

$A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots \in \mathcal{A}$, amire minden $i \neq j$ esetén $A_i \cap A_j = \emptyset$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- A véges additivitás hasonlóképpen működik, azonban megszámlálhatóan sok elemmel.

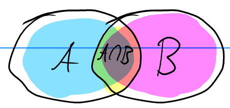
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Az események uniójainak valószínűsége megegyezik az események véges összegével.

- Egy trükk tetszőleges A és B eseményekre: $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$

- A Poincaré-formula használata esedékes, ha egy unió valószínűsége érdekel, azonban az események nem feltétlenül kizáróak.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad A, B \in \mathcal{A}$$



- A Boole-egyenlőtlenség kimondja, hogy egy események uniójának valószínűsége Kisebb vagy egyenlő az A események valószínűségének végtelen összege.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$\Omega \neq \emptyset$

- Egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármast (Kolmogorov-féle) valószínűségi mezőnek hívjuk.

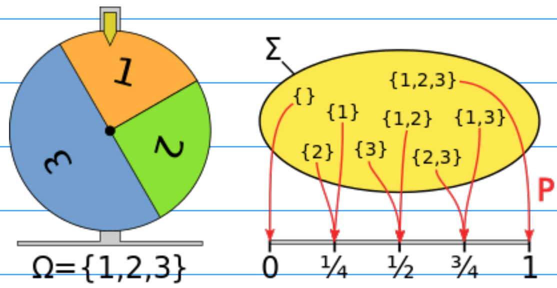
Valószínűségi (mérték)

Esemény algebra

- Ha egy A eseménynek a valószínűsége (valószínűségi mértéke) $P(A) = |A| / |B|$
azt klasszikus valószínűségi mezőnek hívjuk.

- Dobokockás példa: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$; $P(\{1,2,5,6\}) = \frac{4}{6}$ $\frac{\to |A|}{\to \Omega}$

- Ennek az általánosítása a geometriai valószínűségi mező,
ahol Ω a sík, tér ($\mathbb{R}^n$) egy részhalmaza, és $P(A) = \underbrace{\lambda(A)}_{\text{terület, térfogat, vagy n dimenziós térfogat.}} / \lambda(\Omega)$



- Egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt diszkrétnek nevezünk,
ha Ω eseménytér megszámlálhatób számosságú, azaz tehát véges vagy
megszámlálhastóan végtelen

- Ez egy gyakorlatban jól bevált modell, mivel problémák esetében
az eseménytér bármely részhalmaza esemény: $\mathcal{A} = \underbrace{P(\Omega)}_{\text{hatvány halmaz}}$

- Az itt elvégzett számolásokat többnyire
kombinatorikus összeszámlálásokat alkalmazunk.

Diszkrét valószínűségi mező

- Két fajtája van a diszkrét valószínűségi mezőnek:

Véges számosságú diszkrét valószínűségi mező

- Kocka feldobása véges:

$$\Omega = \{\underbrace{1,2,3,4,5,6}\}$$

Hat elemű az eseményterünk.

Megszámlálhatóan végtelen számosságú diszkrét valószínűségi mező

- A kockát addig feldobjuk, ameddig nem kapjuk meg az első négyest:

$$\Omega = \{\underbrace{1,2,3,\ldots}\}$$

Elméletileg akármeddig húzodhat az első négyes dobásának bekövetkezése.

- Mint említettük, a diszkrét valószínűségi mezőnek, hogy az eseménytér összes részhalmazát (hatványhalmazát) vehetjük eseménynek! $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

- Egy $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ diszkrét valószínűségi mezőn, ha $\mathbb{P}$ -t megszorítjuk Ω -ra, akkor a valószínűségi mező súlyfüggvényét kapjuk meg.

- A súlyfüggvény és a valószínűség megnevezés valójában felváltva használható:

$$P(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$$

(Ebben a jegyzetben csupán csak jelölés miatt használok különböző jelölést, innentől kezdve maradok a P jelölésnél!)

- A diszkrét valószínűségi mező $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ esetében a P súlyfüggvényére igazak a következő állítások:

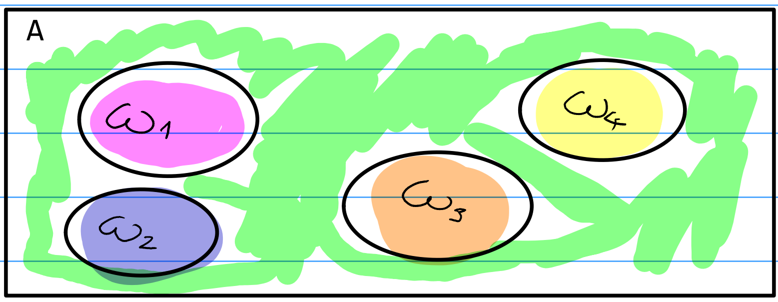
$$P(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega \qquad \left[\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\} \text{ emlékeztetésképpen}\right]$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$$

- A súlyfüggvények használatosak valószínűségek kiszámítása során:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$$

- Az A halmaz az őt alkotó elemi események diszjunk uniója. (Példa)



$$\Rightarrow A = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4 = \bigcup_{i=1}^{4} \omega_i$$

- Előfordulhat, hogy gyakorlati problémák esetén, egy véges eseménytéren az elemi események valószínűsége azonos. (pl. Dobokócka esetén $p(\omega) = 1/6$)

- Pontosan ilyenkor definiáljuk, hogy egy $(\Omega, P(\Omega), P)$ diszkrét valószínűségi mezőt klasszikus valószínűségi mezőnek nevezünk, ha teljesülnek a következő feltételek:

$$|\Omega| < \infty \Longleftrightarrow |\Omega| = n$$

$$\forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega \Rightarrow P(\omega_1) = P(\omega_2)$$

- Beláthatjuk, hogy ilyen esetben egy elemi esemény valószínűsége MINDEN esetben $P(\omega) = 1/n$

- Ezt értelmezzük a középiskolás, jól ismert "kedvező/összes" képletként:

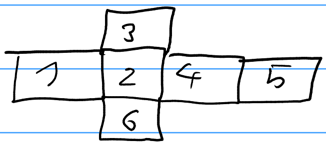
$|A| = k \leftarrow$ kedvező esetek száma

$|\Omega| = n \leftarrow$ összes esetek száma

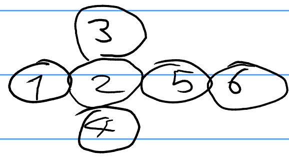
$$\Rightarrow P(A) = k/n$$

- Egyenletességi hipotézis alapján (egy véges sok elemi esemény, ahol nem derül ki, hogy az elemi események között a valószínűség egyenletesen nem oszlik el) megfontolhatjuk, hogy ez egy klasszikus valószínűségi mező:

- Vegyünk egy hatoldalú kockát, amit feldobunk. Hat oldalú kocka?



Ilyen?



Ilyen?

Milyen?

- Mivel nem mondja milyen, ezért feltehetjük, hogy szabályos, hatoldalú kockáról van szó: $P(\omega_n) = 1/6$

- Ettől függetlenül nem lehet mindenhol ezt használni:

- Egy kisérlet során dobjunk fel kettő kockát. Mi a valószínűsége, hogy a két dobott szám összege 5?

- Bár a két kocka fizikailag egyenlő, kénytelenek vagyunk definiálni, hogy melyik az első kocka, második kocka.

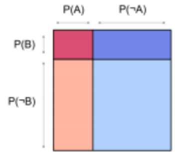
α	1	2	3	4	5	6
β	1	2	3	4	5	6

$(\alpha; \beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ezt vektorként értelmezve, már használhatjuk, az egyenletességi hipotézist!

$$|\Omega| = \underbrace{36}_{|\alpha| \cdot |\beta|} \quad |A| = \underbrace{4}_{\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}} \quad P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Függetlenség



- Az eddig vett valószínűségi mezők (diszkrét, klasszikus) helyett, egy nem-meghatározott valószínűségi mezőt fogunk használni, mert ugyancsak érvényes általánosságban. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
- Két esemény független, ha az egyik bekövetkezésével, a következő esemény bekövetkezésének valószínűsége nem változik (nem növekszik/csökken):

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad (A, B \subseteq \Omega)$$

- Dobjunk fel egy érmét:

F → A, I → B

Ezen két kimenetel (kölcsönösen) kizárja egymást: Ha fejt dobunk, akkor az nem írás, és ha írást dobunk, az nem fej. $P(A \cap B) = 0$; $P(A) = 1/2$; $P(B) = 1/2$

$$P(A) \cdot P(B) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4 \neq 0$$

Ezek tehát nem független események!

- Dobjunk két kockával egymás után:

$A = \text{elsőre } \{2, 4, 6\}$ $\quad P(A) = \frac{3}{6}$

$B = \text{másodjára } \{2, 4, 6\}$ $\quad P(B) = \frac{3}{6}$

$$\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36}$$

α	1	2	3	4	5	6
β	1	2	3	4	5	6

$$|\alpha| \cdot |\beta| = 36 = |\Omega|$$

$$|\{2,4,6\}| \cdot |\{2,4,6\}| = 9$$

$$P(A \cap B) = \frac{9}{36}$$

Vagyis ez a kettő esemény független!

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Ha két esemény független lássuk, be a következőket:

A és $\overline{B}$ függetlenek $\Rightarrow P(A)[1 - P(B)] = P(A) - P(A)P(B) =$
$= P(A) - P(A \cap B) = P(A \setminus B) = P(A \cap \overline{B})$

$\overline{A}$ és B függetlenek

$\overline{A}$ és $\overline{B}$ függetlenek

ezen gondolatmentén igazolható, a többi állítás is.

- A lehetetlen esemény és a biztos esemény minden eseménytől függetlenek.

$$\underbrace{P(\{\Omega\} \cap \{\emptyset\})}_{0} = \underbrace{P(\{\Omega\})}_{1} \cdot \underbrace{P(\{\emptyset\})}_{0}$$

- A két esemény függetlenségéből építhetünk általánosítást:

$A, B, C \subseteq \Omega$ függetlenek, ha

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$
$$P(C \cap A) = P(C) \cdot P(A)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

n független esemény

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i=1}^{k} P(A_i)$$

$A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \Omega$ események függetlenek, ha $\forall\, 2 \le k \le n$ esetén igaz.

- FONTOS, hogy események páronkénti függetlenségéből NEM KÖVETKEZIK AZOK FÜGGETLENSÉGE!!!!

$A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \Omega$ páronként függetlenek, ha $\forall\, i \neq j$ esetében

$$P(A_i)\, P(A_j) = P(A_i \cap A_j)$$

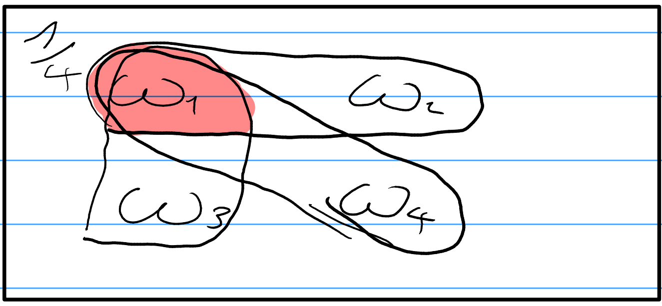
- Bernstein példája alapján:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} \quad : \quad \omega \in \Omega : P(\omega) = 1/4$$

$$A = \{\omega_1, \omega_2\}, \quad B = \{\omega_1, \omega_3\}, \quad C = \{\omega_1, \omega_4\}$$

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P(C) = P(C) \cdot P(A) = \frac{1}{4}$$



$P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(A \cap C)$ páronként függetlenek.

$$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$P(A \cap B \cap C) = 1/4$ Nem teljesül a teljes függetlenség!

- Ha egy kísérletsorozat esetében, az egymás után bekövetkező események valószínűsége nem változik, és az egyes események bekövetkezése nem befolyásolja az utána következő események valószínsűégét, akkor Bernoulli kísérletsorozatot létesítettünk.

- Tehát egy kísérletsorozat Bernoulli kísérletsorozat, ha:

  Bináris a kimenet: $S - K \Leftrightarrow I - N$

  Minden kísérlet esetén a sikernek ugyanakkora a valószínűsége

  A kisérletekből következő események egymástól függetlenek.

- A bináris kimenetel egy szabadabb feltétel: az egymástól független, nem-bináris kísérletsorozatokból is alkothatunk ilyet.

  - Vegyük ismét a kockadobást: egymás után dobjuk fel sokszor.

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \; ; \; \underbrace{A = \{6\}}_{\text{Siker}} \Rightarrow \underbrace{\bar{A} = \{1,2,3,4,5\}}_{\text{kudarc}}$$

- A Bernoulli-kísérletsorozat két kérdéssel foglalkozik:

- n kisérletet végzünk el, és valamely $0 \leq k \leq n$ esetben kiváncsiak vagyunk mennyi az esélye, hogy pontosan k darab sikerünk lesz.

- n szer ismételjük a kisérletet.

$$|\Omega| = n \qquad \binom{n}{k}$$

siker

n darab vektorunk van (0 - 1), amit rögzítünk és $\binom{n}{k}$ megismétlünk.

- Sikeres dobások száma r, ekkor azt keressük hogy valamely $k \geq r$ esetén éppen k.-adik kíséreltben következik be az r.-edik siker.

p — siker valószínűsége

$\bar{p} = 1 - p$ — kudarc valószínűsége

$$\Delta = p^k (1-p)^{n-k} \cdot \binom{n}{k}$$

P(k siker n dobásból) $= \Delta$

- Itt az eseménytérben nincs rögzítve, hogy mennyi a hossza.
A feltétel, hogy a vektorokban összesen r darab 1-es legyen benne (köztük az utolsó elem '1')
- Mi történik, ha az a kérdés, hogy k.-ra dobjuk az r-edik fejet?

$$\binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} = \square$$

P(k-adik dobás az r-edik siker)= $\square$

Feltételes valószínűség

- A következő definíciók minden valószínűségi mezőn érvényesek:

- Némely problémák esetében a kisérletek kimenetelét befolyásolható többlet információval rendelkezhetünk.
- Példa: Dobjunk egy dobókockával

$$A = \{ \text{Prím} \} = \{2, 3, 5\} \qquad B = \{ \text{páros} \} = \{2, 4, 6\}$$

- Ha B bekövetkezéséről nem tudunk semmit, akkor elmondhatjuk, hogy $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

- Viszont az A esemény B feltétele mentén bekövetkezési valószínűsége

$P(A|B) = \frac{1}{3}$ mivel, a B bekövetkezett (párosat dobtunk), ezért páros prímet kell nézni, amiből egyetlen van. (2)

- Az A esemény B feltétele melletti (feltételes valószínűség) valószínűsége:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{ha } P(B) \neq 0 \quad (A, B \in \mathcal{A})$$

- Értelmezhető, hogy az A esemény mekkora részt foglal a B eseményben.

- Ha A és B függetlenek, akkor elégséges a 'baloldali' esemény valószínűségével számolni:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{P(A) \cdot \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} \Rightarrow P(A|B) = P(A)$$

- Egy alternatív számolási módot képezhetünk függetlenség vizsgálatából a definíciókkal:

$P(A|B) = P(A)$ és $P(B|A) = P(B) \Rightarrow$ A és B függetlenek.

- Fontos tudni a következő összefüggéseket:

- $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) \quad (A, B \in \mathcal{A},\ P(B) \neq 0)$

- $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$ kivéve ha A és B diszjunktak, mert akkor:

$$P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)$$

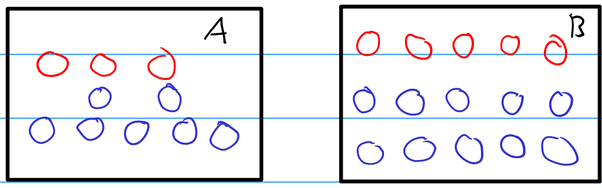
- A feltételes valószínűség alkalmazása előtt fontos tudni a teljeseseményrendszer fogalmát, továbbá négy definíciót.

- Az $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ eseményrendszert, teljes eseményredszernek, ha: $P(A_i) \neq 0 \quad \forall i: 0 \leq i \leq n$, és az események páronként kizáróak, és

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

- Valójában a teljeseseményrendszer az Ω egy partícióját adja. $\mathcal{A} \in \Omega$

- Teljes valószínűség tétele: $P(B) = P(B|A_1)\cdot P(A_1) + \dots + P(B|A_n)\,P(A_n)$,
  ahol: $A_1, A_2, \dots, A_n, B \in \mathcal{A}$ események, és $A_1, A_2, \dots, A_n$ teljes eseményrendszert képeznek.
  - A tétel használata akkor esedékes, amikor a vizsgált esemény valószínűsége valamilyen korábbi eseménytől függ. (ilyenkor feladarboljuk és külön vizsgáljuk).
  - Példa: Két dobozunk van: A és B. A-ban 3 piros és 7 kék, B-ben 5 piros, és 10 kék golyó van. Egyikből kihúzunk véletlenszerűen egy golyót. Az A dobozból $2/3$, a B dobozból pedig $1/3$ valószínűséggel. Mi a valószínűsége a piros golyót húzunk?
    - A - A dobozból való húzás eseménye
      B - B dobozból való húzás eseménye
      p - piros golyó húzás eseménye $P(p) = ?$



  - Látszólag fontos, hogy pontosan melyik úrnából húzzuk ki a piros golyót, ezért ketté fogjuk osztani az eseményteret (A-ra és B események-re)

$$P(p) = P(p|A)\cdot p(A) + P(p|B)\cdot P(B) = \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{3} + \frac{5}{15}\cdot\frac{1}{3} = \frac{14}{45}$$

- Bayes I. tétel: $P(A|B) = \dfrac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$, ha $P(A), P(B) \neq 0$ $[A, B \in \mathcal{A}]$

- Bayes II. tétel: $P(A_i|B) = \dfrac{P(B|A_i)\,P(A_i)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \dots + P(B|A_n)P(A_n)}$,
  ha $B, A_1, A_2, \dots A \in \mathcal{A}$, és $A_1, A_2, \dots, A_n$ teljes eseményrendszert alkotnak.
  - Megeshet néha, hogy egy későbbi esemény bekövetkezésének valószínűsége meghatározza egy korábbi esemény valószínűségét, erre hivatott válaszolni a tétel.
  - példa: A fentebbi feladatban megtörtént a piros húzás lezajlott. Azonban nem tudjuk melyik urnából húzta a pirosat. Mi a valószínűsége, hogy a pirosból húztuk?

$P(A|p)$ = a kérdés.

$$P(A|p) = \frac{P(p|A)\cdot P(A)}{P(p)} = \frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{14}{45}} = \frac{9}{14}$$

A dobozból, piros húzás

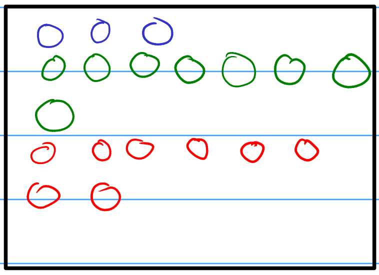
Ezt kiszámoltuk picivel fentebb.

Ezt a feladat megadta

- Szórzási szabály tétele: $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_n | A_{n-1}, \dots, A_1) \dots P(A_2 | A_1) P(A_1)$,

ha $A_1, A_2, \dots A_n \in \mathcal{A}$ események, ahol $n \geq 2$ és $P(A_1), \dots, P(A_{n-1}) \neq 0$.

- Akkor használjuk, ha kisérletezés több lépésből áll, és az egymásutáni lépések nem függetlenek. Ilyenkor végrehajtási sorrendben kell vizsgálni a rész kisérleteket.
- Példa: Legyen egy urnában 3 kék, 8 zöld és 9 piros golyó.
  Az urnából kihúzunk egymás után 5 golyót.
  Mi a valószínűsége, hogy a sorrendet megtartva
  ezek kék-zöld-zöld-piros-zöld sorozatot fognak alkotni?



$\rightarrow$ 

A_i $\quad i = \overline{1,5}$

esemény, ahol i. golyó
megfelelő színű

$P(A_i) = ?$

$\Downarrow$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = ?$$

Ezt felbonthatjuk a szorzási szabállyal: $\overset{?}{=}$

$$= \underbrace{P(A_1)}_{3/20} \cdot \underbrace{P(A_2 | A_1)}_{8/19} \cdot \underbrace{P(A_3 | A_2 \cap A_1)}_{7/18} \cdot \underbrace{P(A_4 | A_3 \cap A_2 \cap A_1)}_{8/17} \cdot \underbrace{P(A_5 | A_4 \cap A_3 \cap A_2 \cap A_1)}_{6/16}$$

A kéket már kivettük,
de 8 zöld továbbra is
hátra van.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{3}{20} \cdot \frac{8}{19} \cdot \frac{7}{18} \cdot \frac{8}{17} \cdot \frac{6}{16} = \frac{63}{6460}$$

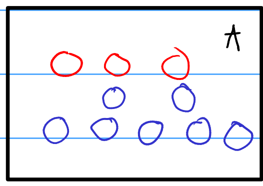
- Bonyibb gyakorlati példáknál jól jöhet a következő tétel:

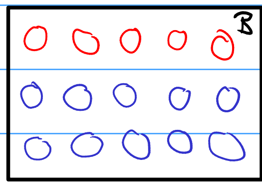
$$P(C|B) = P(C | A_1 \cap B) P(A_1 | B) + \dots + P(C | A_n \cap B) P(A_n | B),$$ ahol

$A_1, A_2, \dots, A_n$ teljes eseményrendszert alkot, továbbá $A, B, C \in \mathcal{A}$, $P(B) \neq 0$

- Példa: Vegyük ismét a kétdobozos példánkat. Kihúztuk a piros golyót (p) az ismeretlen dobozból. Újabb piros golyót húzva (visszatevés nélkül) mennyi az esélye hogy piros lesz?

- A - A dobozból való húzás eseménye
  B - B dobozból való húzás eseménye
  p - piros golyó húzás eseménye $\quad P(p) = ?$
  2p - másodszóri piros húzás eseménye





$P(2p | p) = ?$ A probléma megoldáshoz vissza kell vezetni, hogy melyik dobozból húztuk az első pirosat. Erre tökéletes az elöbbi tétel.

$$P(2p | p) = P(2p | A \cap p) \cdot P(A | p) + (2p | B \cap p) \cdot P(B | p)$$

Valószínűségi változó

- Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező esetében, $\mathcal{X}: \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt valószínűségi változónak nevezzük, ha $(\mathcal{X} \leq x) \in \mathcal{A}$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetében.
- $(\mathcal{X} \leq x) = \{\omega \in \Omega \mid \mathcal{X}(\omega) \leq x\}$ eseményeknek nevezzük (valószínűség rendelhető hozzájuk.)
- Továbbá $(\mathcal{X} = x), (\mathcal{X} \leq x), (\mathcal{X} < x), (\mathcal{X} \geq x), (\mathcal{X} \in [a, b])$ is események.
- Az $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}(\omega)$ jelölések felváltva cserélhetők, helyzettől függetlenül.
- A realizáció, amikor a valószínűség változó egy kisérlet elvégzése után egyetlen értéket vesz fel.
- A minta, amikor egy kisérlet többszöri elvégzése után több realizációt társítottunk a valószínűségi változóhoz.
- A valószínűségi mező és a valószínűségi változó között fontos különbség: példa: Egy dobókocka

$$\Omega = \{\omega_1 = 1, \ \omega_2 = 2, \ \omega_3 = 3, \ \omega_4 = 4, \ \omega_5 = 5, \ \omega_6 = 6\}$$

- Ez egy valószínűségi mező, ami értékei elemi események absztrakt szimbólumai.

$$\mathcal{X}(\omega_i) = i \qquad \left. i = \overline{1,6} \right\} \ (i = 1 \lor i = 2 \lor \dots \lor i = 6)$$

- A valószínűségi változó esetén valós számot társíthatunk hozzá.
- A valószínűség változókkal függvényekhez hasonló műveleteket végezhetünk:

$$(c \cdot \mathcal{X})(\omega) = c \cdot \mathcal{X}(\omega)$$
$$(\mathcal{X} \pm \mathcal{Y})(\omega) = \mathcal{X}(\omega) \pm \mathcal{Y}(\omega)$$
$$(\mathcal{X} \cdot \mathcal{Y})(\omega) = \mathcal{X}(\omega) \cdot \mathcal{Y}(\omega)$$
$$(\mathcal{X}/\mathcal{Y})(\omega) = \mathcal{X}(\omega)/\mathcal{Y}(\omega), \text{ ha } \mathcal{Y}(\omega) \neq 0 \quad \forall \omega \in \Omega$$

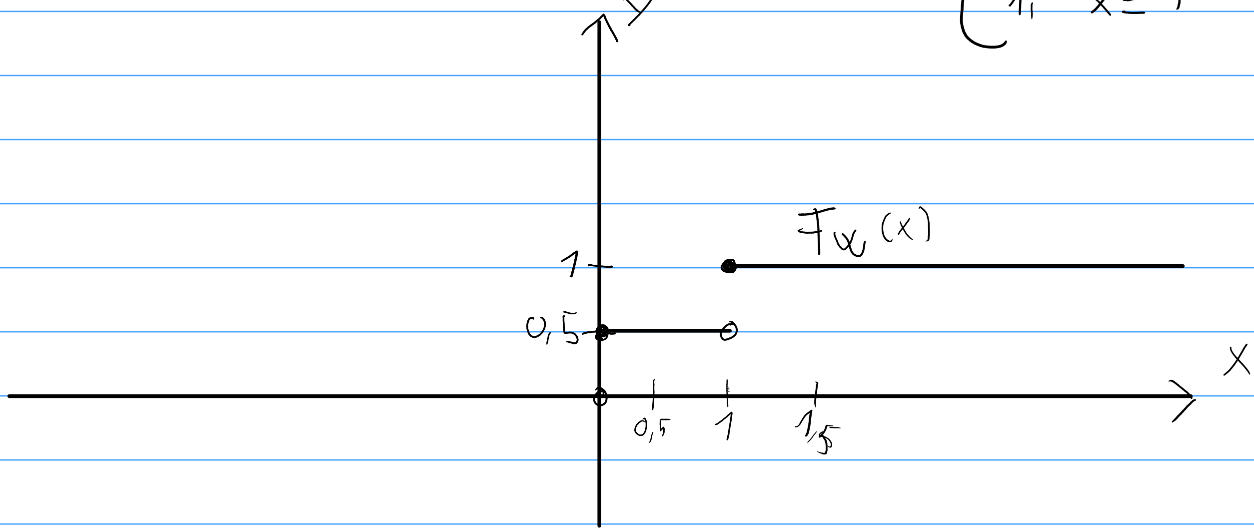
- A valószínűségi változzókhoz egyértelműen rendelhető eloszlásfüggvény. $F_{\mathcal{X}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esetén, hozzárendelési szabálya: $F_{\mathcal{X}} = (\mathcal{X} \leq x)$

- Azonos eloszlásról beszélünk, ha $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ valószínűség változók, és $F_\mathcal{X} = F_\mathcal{Y}$
  - Vegyünk kettő teljesen különböző eseményterű kisérletet:
    példa: dobjunk fel egy érmét és egy dobókockát:

$\mathcal{X}(\text{fej}) = 1$, $\mathcal{X}(\text{írás}) = 0$

$\mathcal{Y}(\text{páratlan}) = 1$, $\mathcal{Y}(\text{páros}) = 0$

$$F_\mathcal{X}(x) = F_\mathcal{Y}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/2, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$



- Tetszőleges $\mathcal{X}$ valószínűségváltozó esetében, hozzárendelt $F_\mathcal{X}$ eloszlás-függvényekre igazak a következők:

  Monoton növekvő $\Rightarrow$ $F_\mathcal{X}(x_1) = \underbrace{(\mathcal{X} \le x_1) \le (\mathcal{X} \le x_2)}_{x_1 < x_2} = F_\mathcal{X}(x_2)$

  Jobbról folytonos

  $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\mathcal{X}(x) = 0$ és $\lim\limits_{x \to \infty} F_\mathcal{X}(x) = 1$

- Bármely tetszőleges valószínűség változó esetén teljesül, hogy:

$$0 \le F_\mathcal{X}(x) \le 1$$

- A fenti három tulajdonságra igaz F függvényhez található egy valószínűség változó, aminek az F az eloszlás függvénye.

- Az $\mathcal{X}(\omega) = c$ $\quad (\forall c \in \mathbb{R}, \forall \omega \in \Omega)$ konstansnak nevezzük.
- Az $\mathbb{1}(\omega) = 1$ $\quad (\forall \omega \in \Omega)$ egységnek nevezzük.

sztochasztikus $\not\Leftrightarrow$ Determinisztikus

véletlenszerű valószínűségi változó

Diszkrét valószínűségi változó

- Az $\mathcal{X}$ valószínűségi változó diszkrét, ha értékkészlete megszámlálható.

$\{(\mathcal{X}=x) \mid (x \in R_x)\}$

- A $\mathcal{X}$ diszkrét valószínűségi változóhoz rendelhető súlyfüggvény: $P_x : R_x \to \mathbb{R}$

$P_{\mathcal{X}}(x) = P(\mathcal{X}=x) \to \mathcal{X}$ súlyfüggvénye.

- megadja, hogy egy adott értéket egy valószínűségű változó, milyen valószínűséggel vehet fel.
- Minden ω eseményhez tartozik egy x $\quad \mathcal{X}(\omega)=x$
- Súlyfüggvény tulajdonságai:

$$P_{\mathcal{X}}(x) \geq 0 \quad \forall x \in R_x \quad , \quad \text{és} \quad \sum_{x \in R_x} P_{\mathcal{X}}(x) = 1$$

- Vegyük már észre, hogy ezáltal egy diszkrét valószínűségi mezőt alkot (minimális eltéréssel):

$$(R_{\mathcal{X}}, P(R_{\mathcal{X}}), P_{\mathcal{X}}) : \quad P_{\mathcal{X}}(A) = \sum_{x \in A} P_{\mathcal{X}}(x) \quad \forall A \subseteq R_x$$

- A $E(\mathcal{X}) = \sum_{\omega \in \Omega} P(x)\mathcal{X}(x)$ nevezzük várható értéknek, egy valószínűségi mezőn értelmezve, ahol legfeljebb megszámlálhatóan sok elemi eseményt vehet fel, Ω eseménytér, és ezen események valószínűsége nemnulla. $P(\omega) > 0$.

- Magyarán a várható érték megfogalmazza, hogy a valószínűség változó milyen értékkörül fog csoportosulni. Egy átlag, amely nem feltétlen eleme az érték-készletnek.
- Gyakorlatban a várható érték egyszerűbben kiszámolható: $E(\mathcal{X}) = \sum_{x \in R_{\mathcal{X}}} x P(\mathcal{X}=x)$

$P(\omega)$

- Tulajdonságok:
- $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$ létezik várható értéke, és: $E(\mathcal{X}+\mathcal{Y}) = E(\mathcal{X}) + E(\mathcal{Y})$
- $\alpha \mathcal{X}$ létezik várható értéke, és $E(\alpha \mathcal{X}) = \alpha E(\mathcal{X}) \quad \alpha \in \mathbb{R}$
- $E(c) = c \quad c \in \mathbb{R}$
- $E(\mathcal{X}+c) = E(\mathcal{X}) + c \quad c \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{X}(\omega) \leq \mathcal{Y}(\omega)$ esetében teljesül, hogy: $E(\mathcal{X}) \geq E(\mathcal{Y})$
- $E(f(\mathcal{X})) = \sum_{\omega \in \Omega} f(\mathcal{X}(\omega)) P(\omega)$ (ha abszolút konvergens)

- A varianca megadja, hogy a változó értéke milyen mértékben térhetnek el a várható értéktől:

$Var(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$ nevezzük varianciának, ahol $E(X)^2$ a várható érték.

- A gyakorlatban használt képlet a varianciához: $Var(X) = E(X^2) + E^2(X)$

  példa: Legyen   valószínűségi változó, amely {-2, 0, 1, 3} értéket vehet fel.
  Súlyfüggvénye: $P_X(-2) = 1/8,\ P_X(0) = 1/8,\ P_X(1) = 1/4,\ P_X(3) = 1/2$

$$E(X^2) = -2 \cdot 1/8 + 0 \cdot 1/8 + 1 \cdot 1/4 + 3 \cdot 1/2$$

$$E^2(X) = [-2]^2 \cdot 1/8 + 0^2 \cdot 1/8 + 1^2 \cdot 1/4 + 3^2 \cdot 1/2$$

$$Var(X) = \frac{39}{8} - \frac{169}{64} = \frac{143}{64}$$

- Fontos tétel, hogy nemnegatív: $Var(X) \geq 0$

- A varianca műveleti tulajdonságai:

$Var(\alpha X) = \alpha^2 Var(X)$ $\qquad \alpha \in \mathbb{R}$

$Var(c) = c$ $\qquad c \in \mathbb{R}$

$Var(X + c) = Var(X)$ $\qquad c \in \mathbb{R}$

- Ha egy   valószínűség változónak létezik varianciája, akkor van szórása is:

$$D(X) = \sqrt{Var(X)}$$

- Tulajdonságai:

$D(X) \geq 0$

$D(\alpha X) = |\alpha| D(X)$

$D(c) = 0$ $\qquad c \in \mathbb{R}$

$D(X + c) = D(X)$

Többdimenziós eloszlások

- A $\mathcal{X}: \Omega \to \mathbb{R}^n$, $(\mathcal{X}_1(\omega), \mathcal{X}_2(\omega), \ldots, \mathcal{X}_n(\omega))$ leképezést vektorváltozónak hívjuk, ahol $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$ valószínűségi változók Ω eseménytеren.
- A vektorváltozók eloszlásfüggvénye: $F_{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ amely hozzárendelési szabálya: $F_{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(\mathcal{X}_1 \leq x_1, \mathcal{X}_2 \leq x_2, \ldots, \mathcal{X}_n \leq x_n)$

metszetek $\cap$

- Az eloszlás függvények tulajdonságai nagyon hasonlók az egydimenziós fajtájával:

Minden változójában jobbról folytonos.

Minden változójában monoton növekvő.

$$\lim_{x_i \to -\infty} F_{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad \forall i \in \{0, 1, 2, \ldots n\}$$

$$\lim_{x_1 \to \infty, \ldots, x_n \to \infty} F_{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$$

Együttes diszkrét eloszlások

- Az $(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n)$ vektorváltozó diszkrét, ha $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$ változók mindegyike diszkrét.

- A diszkrét vektorváltozóhoz súlyfüggvényén azt a $P_{\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots,\mathcal{X}_n} : R_{\mathcal{X}_1} \times R_{\mathcal{X}_2} \times \ldots \times R_{\mathcal{X}_n} \to \mathbb{R}$ függvényt értjük, amelynek hozzárendelési szabálya: $P_{\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots,\mathcal{X}_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) =$
$= P(\mathcal{X}_1 = x_1, \mathcal{X}_2 = x_2, \ldots, \mathcal{X}_n = x_n)$

- Példa: Tegyük fel, hogy egy kockát feldobunk. Legyen az X változó értéke 2, ha páros, és 1, ha páratlan számot dobtunk, valamint legyen Y értéke 2, ha 3-nál nagyobb számot dobtunk, és 1 különben. Adjuk meg (X, Y) együttes súlyfüggvényét!

A – páros, B – Páratlan, C – >3, D ≤ 3

$\uparrow \mathcal{X}=2$, $\uparrow \mathcal{X}=1$, $\uparrow \mathcal{Y}=2$, $\uparrow \mathcal{Y}=1$

- Vegyük sorra a lehetséges megoldásokat:

$$P_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}(1,1) = P(\mathcal{X}=1, \mathcal{Y}=1) \to B \wedge D \to P(\{1,3\}) = 2/6 = 1/3$$
$$P_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}(1,2) = P(\mathcal{X}=1, \mathcal{Y}=2) \to B \wedge C \to P(\{5\}) = 1/6$$
$$P_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}(2,1) = P(\mathcal{X}=2, \mathcal{Y}=1) \to A \wedge D \to P(\{2\}) = 1/6$$
$$P_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}(2,2) = P(\mathcal{X}=2, \mathcal{Y}=2) \to A \wedge C \to P(\{4, 6\}) = 2/6 = 1/3$$

- Érdemes táblázatba foglalni a súlyfüggvényt:

$\mathcal{X}/\mathcal{Y}$	$Y=1$	$Y=2$
$X=1$	$1/3$	$1/6$
$X=2$	$1/6$	$1/3$

$\to 1/3 + 1/3 + 1/6 + 1/6 = 1$

- Néhány tulajdonság:

$$P_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}(\omega) \geq 0 \qquad \forall \omega \in \Omega$$

$$\sum_{x \in R_{\mathcal{X}}, y \in R_{\mathcal{Y}}} P_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}(x,y) = 1$$

- A peremeloszlások megadhatók az együttes súlyfüggvényekkel: Milyen valószínűséggel veheti fel az eggyes értékeket?

$$P(\mathcal{X}=2) = P(\mathcal{X}=2, \mathcal{Y}=2) + P(\mathcal{X}=2, \mathcal{Y}=1) = 1/6 + 1/3 = 1/2$$

$\mathcal{X}/\mathcal{Y}$	$Y=1$	$Y=2$	$\mathcal{X}$
$X=1$	$1/3$	$1/6$	$1/2$
$X=2$	$1/6$	$1/3$	$1/2$
$\mathcal{Y}$	$1/2$	$1/2$	

Érdemes a táblázathoz kiegészíteni.

- X, Y változók függetlenek, ha $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: (X_1 \le x_1)$ és $(X_2 \le x_2)$ események függetlenek. példa: adott egy pénzérme és egy dobókocka. A kísérlet során egyszer feldobjuk az érmét és a kockát is. Legyen az X változó értéke 0, ha írást, és 1 ha fejet dobtunk, továbbá legyen az Y változó értéke 1, ha a kockával 1-est, 2, ha a kockával 2-est vagy 3-ast dobtunk, és 3 különben

$\underset{X=0}{A \sim \text{fej}}$, $\underset{X=1}{B - \text{írás}}$, $\underset{Y=1}{C - \text{kocka}: 1}$, $\underset{Y=2}{D - \text{kocka}: 2 \vee}$ $\text{kocka}: 3$; $\underset{Y=3}{E: \text{kocka}: >3}$

- A példa esetében most jelenleg nem kérdés a megoldás, azonban bármely eredményt kapunk, az X és Y független lesz egymástól. Vagyis az egyik valószínűségi változó nem befolyásolja a másik valószínűségi változó eloszlását.

- Gyakorlatban tehát a függetlenség miatt átírható (szórzattá):

$$P_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = P(X_1 = x_1,\dots,X_n = x_n) \Rightarrow P(X_1 = x_1)\dots P(X_n = x_n) = P_{X_1}(x_1)\dots P_{X_n}(x_n)$$

- SZÓVAL, AZT KAPTUK, HOGY AZ EGGYÜTTES ELOSZLÁST MEGKAPHATJUK A PEREMELOSZLÁS SZORZAT EREDMÉNYÉVEL.

- Gyakorlatra hasznos szarok:
- $\Phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ és $\Psi(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ függetlenek, ha $\Phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $\Psi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ folytonosak.
- $E(XY) = E(X)E(Y)$
- $E(X_1, X_2, \dots X_n) = E(X_1)E(X_2)\dots E(X_n)$

- Az $Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$ kovariánsnak nevezzük, ahol: $E(X)$, $E(Y)$ várható értékek (vagyis léteznek várható értékek).

$Cov(X, X) = Var(X)$

- Gyakorlatban használatos képlet: $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

- Visszatérve az elöző táblázathoz: Tegyük fel, hogy egy kockát feldobunk. Legyen az X változó értéke 2, ha páros, és 1, ha páratlan számot dobtunk, valamint legyen Y értéke 1, ha 3-nál nagyobb számot dobtunk, és 0 különben. Adjuk meg Cov(X,Y) értékét!

$\underset{X=2}{A - \text{Páros}}$, $\underset{X=1}{B - \text{páratlan}}$, $\underset{Y=1}{C - >3}$, $\underset{Y=0}{D \le 3}$

X/Y	$Y=1$	$Y=2$	X
$X=1$	$1/3$	$1/6$	$1/2$
$X=2$	$1/6$	$1/3$	$1/2$
Y	$1/2$	$1/2$	

Először a peremeloszlásokkal számoljuk ki a várható értéket: $E(X) = P(X) \cdot X(x) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{3}{2} \Leftarrow E(Y)$

Továbbá: $E(XY) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$$Cov(XY) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{7}{3} - \frac{9}{4} = \frac{1}{14}$$

- Kovariánssal kapcsolatban vegyük észre, hogy: $Cov(X,Y)=0$ ha X,Y függetlenek.

- Néhány további tulajdonságok:

$$Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$$

$$Cov(\alpha X+\beta Y, Z) = \alpha Cov(X,Z) + \beta Cov(Y,Z) \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

$$Cov(X,c) = Cov(c,X) = 0$$

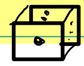
$$Cov(X,Y+c) = Cov(X,Y)$$

- A $Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{D(X)D(Y)}$ megadja az X és Y korrelációját.
- Az segít a megértésben, hogy ha a két változó független, akkor korrelációjuk értéke nulla.

Nevezetes diszkrét valószínűségi változók

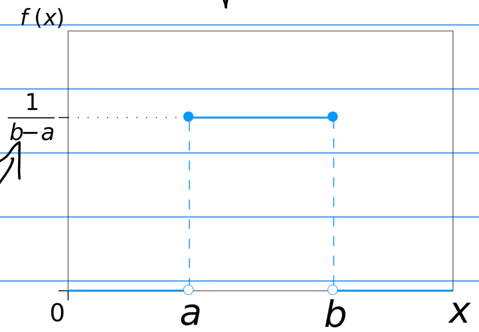
- Az egyenletes eloszlás értékkészlete véges, és minden értékhez egy azonos valószínűséget rendel hozzá: (kimenetelek valószínűsége azonosak)

$|R_\xi| = n$, $P(\xi = x)$, $\underbrace{E(\xi) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}}$



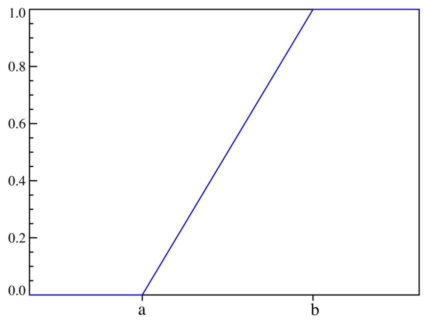
sűrűség függvény $\rightarrow$

csak akkor, ha $a \le x \le b$



$$f(x) \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & x < a \vee x > b \end{cases}$$

eloszlás függvénye $\rightarrow$



- A bernoulli eloszlás eseténél az értékkészlete {0,1} $= R_\xi$

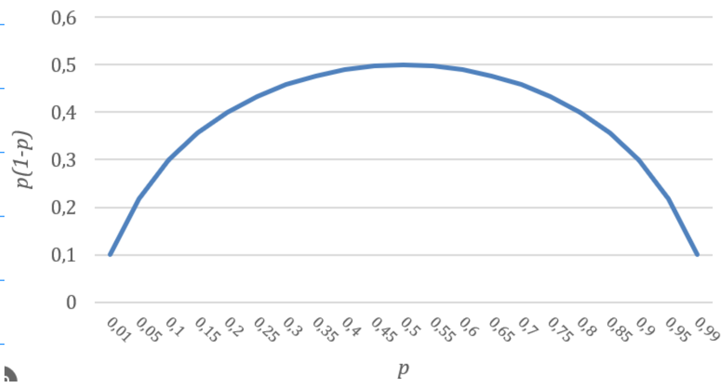
$\xi \sim B(p)$

$P_\xi(1) = p$, $P_\xi(0) = 1 - p$

$E(\xi) = 1 \cdot p + 0(1-p) = p$

$Var(\xi) = p(1-p)$

$D(\xi) = \sqrt{Var(\xi)}$



- A $\underbrace{\text{binomiális eloszlás}}$ értékkészlete {0,1,2, ... , n} $= R_\xi$

$\xi \sim Bin(n, p)$

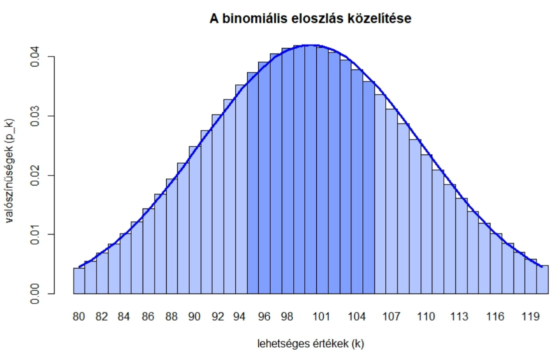
$\boxed{P_\xi(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-1}}$

$\boxed{E(\xi) = n \cdot p}$

$Var(\xi) = n p (1-p)$

$D(\xi) = \sqrt{Var(\xi)}$

$\underbrace{p}_{\text{siker valószínűsége}} \in [0,1]$, $\underbrace{n}_{\text{kisérletek száma}} \ge 2$



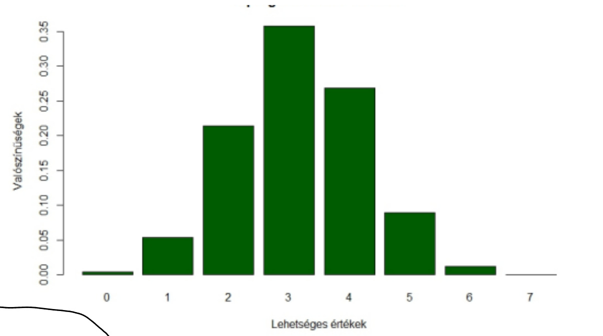
- Hipergeometriai eloszlás:

$X \sim HG(n, N, M)$ — Ászok / kitüntetett elemek; paklik / sokaság; nézett lapok / kisérlete

$R_X = \{\max\{\underbrace{0, M+n-N}\}\}$

nem negatív, amúgy pedig ez minusz

$$\boxed{P_X(k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$



$E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$

$Var(X) = n \frac{M}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{N-M}{N}$

- Úgy is hívják, hogy visszatétel nélküli binom.

Negatív hipergeometriai eloszlás

$X \sim NMG(r, N, M)$ $\quad 1 \le r \le M, \quad M \le N$

kitüntetett elemek előre rögzített száma (ez az amire hajtunk)

$R_X = \{r, \dots, N-M+r\}$

$$\boxed{P_X = \frac{\binom{k-1}{r-1}\binom{N-k}{M-r}}{\binom{N}{m}}}$$

$$\boxed{E(X) = r\,\frac{N+1}{M+1}}$$

Poisson eloszlás darabszámokat mér:

$X \sim Poi(\lambda)$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}^+$

intenzitás paraméter

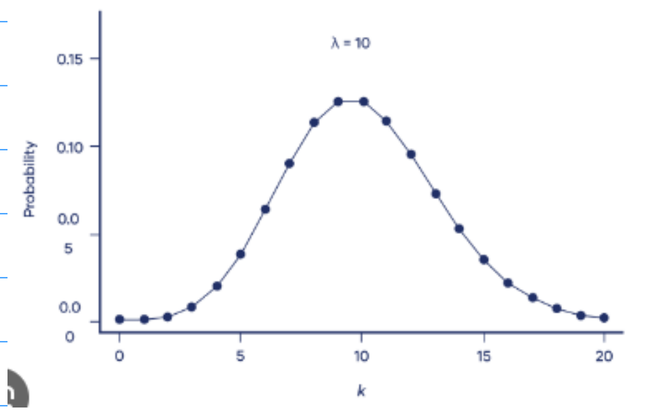
$R_X = \mathbb{N} \ni \{0\}$

$$\boxed{P_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}}$$

$$\boxed{E(X) = \lambda}$$

$Var(X) = \lambda$

$D(X) = \sqrt{\lambda}$



Folytonos Valószínűségi változók

- A folytonos valószínűségi változók kontinum sok értéket vehet fel.
    - Vagyis értékkészletük kontínuum.

- Egy kis emlékeztető:

$\mathcal{X}$ valószínűségi változó eloszlás függvénye

$F_{\mathcal{X}}(x) = P(\mathcal{X} \le x)$

tetszőleges valószínűségi változó esetén: $P(\mathcal{X} \le x) = F_{\mathcal{X}}(x)$

$P(\overline{\mathcal{X} \le x}) = P(\mathcal{X} > x) = 1 - F_{\mathcal{X}}(x)$

$P(\mathcal{X} < x) = F_{\mathcal{X}}(x-) = \lim\limits_{t \to x-} F_{\mathcal{X}}(t)$

$P(\overline{\mathcal{X} < x}) = P(\mathcal{X} \ge x) = 1 - F_{\mathcal{X}}(x-)$

$P(a < \mathcal{X} \le b) = F_{\mathcal{X}}(b) - F_{\mathcal{X}}(a)$

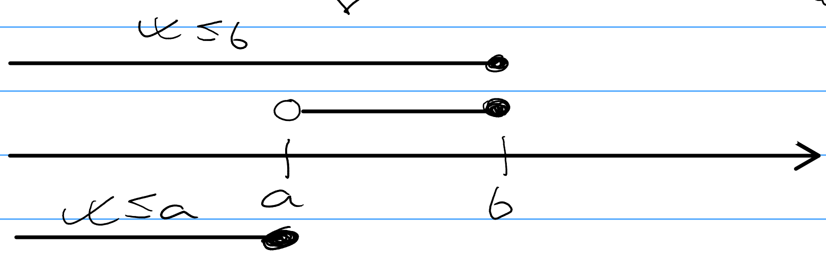
$P(a \le \mathcal{X} < b) = F_{\mathcal{X}}(b-) - F_{\mathcal{X}}(a-)$

$P(a \le \mathcal{X} \le b) = F_{\mathcal{X}}(b) - F_{\mathcal{X}}(a-)$

$P(a < \mathcal{X} < b) = F_{\mathcal{X}}(b-) - F_{\mathcal{X}}(a)$

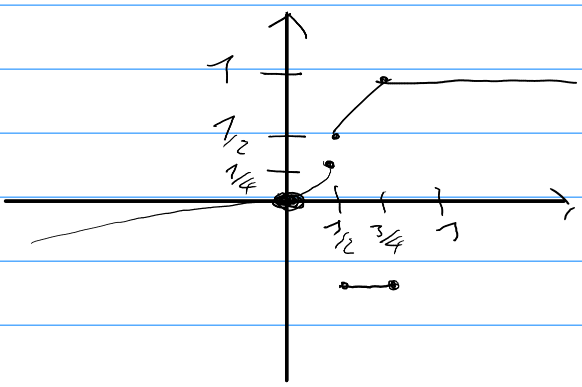
$P(a \,\square\, \mathcal{X} \,\square\, b)$

$\le \;\Rightarrow\; F_{\mathcal{X}}(a-)$, $\quad < \;\Rightarrow\; F_{\mathcal{X}}(a)$, $\quad \le \;\Rightarrow\; F_{\mathcal{X}}(b-)$, $\quad < \;\Rightarrow\; F_{\mathcal{X}}(b)$



Példa: $\mathcal{X}$ $\quad F_{\mathcal{X}}(x) \begin{cases} 0 : & x < 0 \\ x^2 : & 0 \le x < 1/2 \\ x : & 1/2 \le x < 1 \\ 1 : & x \ge 1 \end{cases}$

$\boxed{P(x = 3/4) = 0}$



$P(x \le 3/4) = F_{\mathcal{X}}(3/4) = 3/4$

$P(x \le 1/2) = F_{\mathcal{X}}(1/2) = 1/2$

$P(x < 3/4) = F_{\mathcal{X}}(3/4-) = 3/4$

$P(x < 1/2) = F_{\mathcal{X}}(1/2-) = 1/4$

$P(1/2 \le x \le 3/4) = F_{\mathcal{X}}(3/4) - F_{\mathcal{X}}(1/2-) = 3/4 - 1/4 = 1/2$

- Ha $\mathcal{X}$ folytonos, akkor: $F_{\mathcal{X}}(x) = F_{\mathcal{X}}(x-)$. Ennek következményei:

$P(\mathcal{X} = x) = 0$,

$P(\mathcal{X} \le x) = P(\mathcal{X} < x)$,

$P(\mathcal{X} \ge x) = P(\mathcal{X} > x)$,

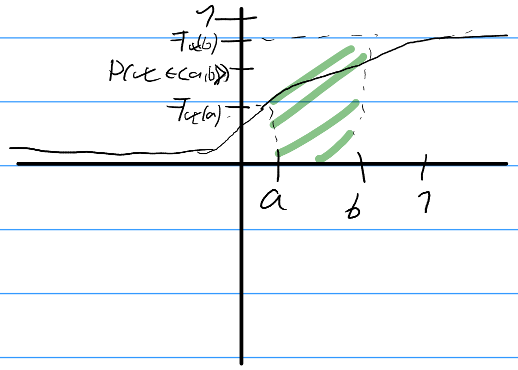
$P(a \overset{\le}{<} \mathcal{X} \overset{\le}{<}) = \dots$

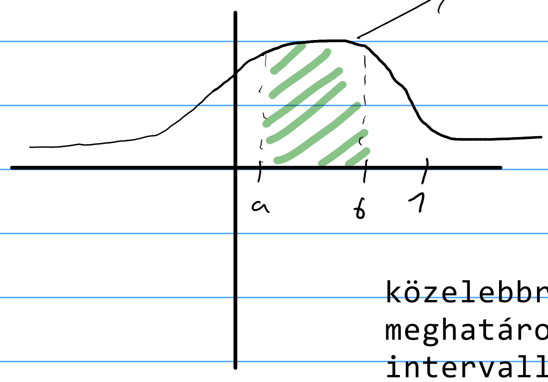
- $\mathcal{X}$ valószínűségi változó folytonos, ha megszámlálható halmazon kívül differenciálható és az $f_X(x) = \begin{cases} f_X(x): & F_X \in D_X \\ 0 & \end{cases}$ esetén:

F_X

$\mathcal{X}$ sűrűségfüggvénye

$$\boxed{F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt}$$





$P(X \in \langle a,b \rangle)$

közelebbről nem meghatározható intervallum

- $P(X \le a) = P(X < a) = \int_{-\infty}^{a} F_X(x)\,dx$
- $P(X \ge a) = P(X > a) = \int_{a}^{-\infty} F_X(x)\,dx$
- $P(X \in \langle a,b \rangle) = \int_{a}^{b} F_X(x)\,dx$

- Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

- $F_X(x) \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} F_X(x)\,dx = 1$

- Várható értéke: $E(X) = \boxed{\sum_{x \in R_X} x \cdot \underbrace{P(X=x)}_{P_X(x)}}$ diszkrét. fogalom: $\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot F_X(x)\,dx}$

- Varianciája: $Var(X) = E(X - E(X))^2) = \dots = E(X^2) - E^2(X)$
- Szórása: $D(X) = \sqrt{Var(X)}$

Együttes eloszlás

- Emlékeztető:

- $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ valószínűségi vektor változó eloszlág függvénye:
  $F_{\mathcal{X}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\boxed{F_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n) = P(\mathcal{X}_1 \leq x_1, \ldots, \mathcal{X}_n \leq n)}$
- $\mathcal{X}$ valószínűségi változó folytonos, ha $\exists \dfrac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2, \ldots, \partial_n} F_{\mathcal{X}}$
  = megszámlálható számosságú halmazon kívül, és az
  $f_{\mathcal{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \dfrac{\partial^n}{\partial x_1, \ldots, \partial x_n} F_{\mathcal{X}}(x_1, \ldots, x_n), & \text{ha } \exists \dfrac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_2} F_{\mathcal{X}} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$
- függvényre igaz az $F_{\mathcal{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathcal{X}}(t_1, \ldots, t_n)\, dt \ldots dt\, dt$
  integrál reprezentációja, akkor $\mathcal{X}$ abszolút folytonos eloszlású, és $f_{\mathcal{X}}$ a sűrűség függvénye.

- Tulajdonságai:
- $f(\underline{x}) \geq 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ $\quad \underline{x} = \text{vektor}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathcal{X}}(x_1, \ldots, x_n)\, dx \ldots dy = 1$

- Tudjuk, hogy $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ valószínűségi változók függetlenek $\Leftrightarrow (\mathcal{X}_1 \leq x_1)(\mathcal{X}_2 \leq x_2)$ esemény függetlenek $\forall\ x_1, x_2$ esetében.
- Láttuk $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ függetlenek, akkor $\boxed{F_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n) = F_{\mathcal{X}_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{\mathcal{X}_n}(x_n)}$
  Ezek a 'marginálisok', vagyis a peremeloszlás sűrűségfüggvénye.
- Ha $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n)$ abszolút folytonos $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} F_{\mathcal{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1, \ldots \partial x_2} F_{\mathcal{X}_1}(x_1) \ldots F_{\mathcal{X}_n}(x_n)$$

$$- f_{\mathcal{X}}(x_1, \ldots, x_n) = f_{\mathcal{X}_1}(x_1) \ldots f_{\mathcal{X}_n}(x_n)$$

Peremeloszlás:

- Adott az F_{ξ} együttes eloszlás függvény, ekkor $F_{\xi_i}(x_i) = $
$= \lim_{x_j \to \infty, j \neq i} F_{\xi}(x_1, \dots, x_n)$

- Ha $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ abszolút folytonos $\Rightarrow$
$F_{\xi}(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{x_i} \dots \int_{-\infty}^{x_i} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(t_1, t_2, \dots t_i) dt_1 \dots dx$

- $Cov(X, Y) = \underbrace{E(XY)}_{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{\xi\eta}(x,y) dy dx} - \underbrace{E(X)E(Y)}$ korábban lejegyzett anyag.

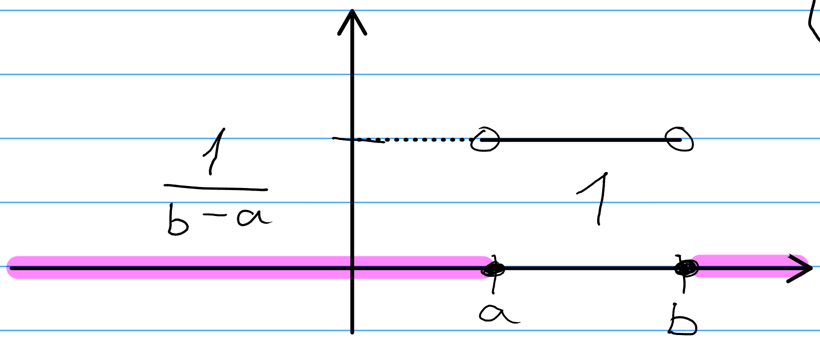
- $corr(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{D(X)D(Y)}$

- Az ξ η függetlenek $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \begin{cases} E(X)E(Y) = E(X,Y) \\ Var(XY) = Var(X) + Var(Y) \\ cov(XY) = corr(XY) = 0 \end{cases}$

Nevezetes folytonos eloszlások

- Egyenletes folytonos eloszlás:

$\xi \sim U[a,b]$, ha $f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$



$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx = \left[\frac{x}{b-a}\right]_a^b = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} =$$

$$= \frac{b-a}{b-a} = 1$$

mivel konstans, ezért csak konstans * x

- Gyakorlatban: $\xi, \eta \sim U[a,b]$ és függetlenek $\Rightarrow$

$$\Rightarrow Z := (\xi, \eta) \sim U[a,b]^2$$

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_\xi(x)\,dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{b-a}\right]_a^b =$$

konstans kipakolható az integrál elé

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \cancel{\frac{1}{b-a}} \cdot \frac{1}{2}\cancel{(b-a)}(b+a) = \frac{b+a}{2}$$

$$Var(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)\,dx - E^2(\xi) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(b-a)^2}{12} =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$D(\xi) = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

$$(*) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt = \ldots = \frac{x-a}{b-a}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ (*), & a \le x \le b \\ 1, & x \ge b \end{cases}$$

- Az exponenciális folytonos eloszlás (Poisson párja):

$X \sim Exp(\lambda)$ $\qquad \lambda > 0 \leftarrow$ intenzitás paraméter

- A Poisson-al darabszámot mérünk <-> Ez viszont nem csak darabszámot mér.

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$D(X) = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}$$

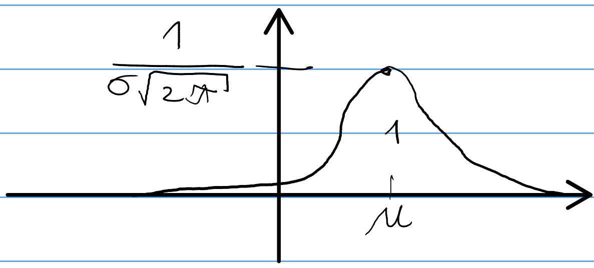
$$F_X(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 0, & \\ 1 & \end{cases}$$

$$\int_{a}^{\infty} \lambda e^{-2t}\,dt = e^2 x + 1 = 1 - e$$

- Normális eloszlás

$X \sim N(\mu, \sigma)$ $\qquad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

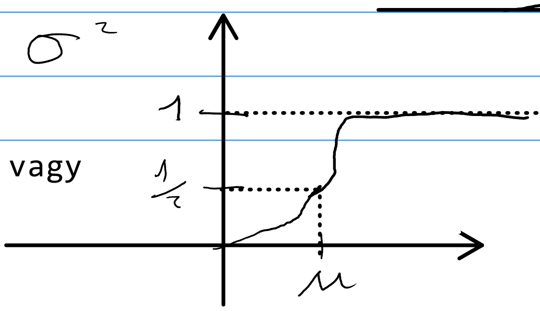
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma}}$$



$E(X) = \mu$

$Var(X) = \sigma^2$

$D(X) = \sqrt{\sigma^2} = \sigma^2$



- Olyan mint a Binom, vagy a Poisson

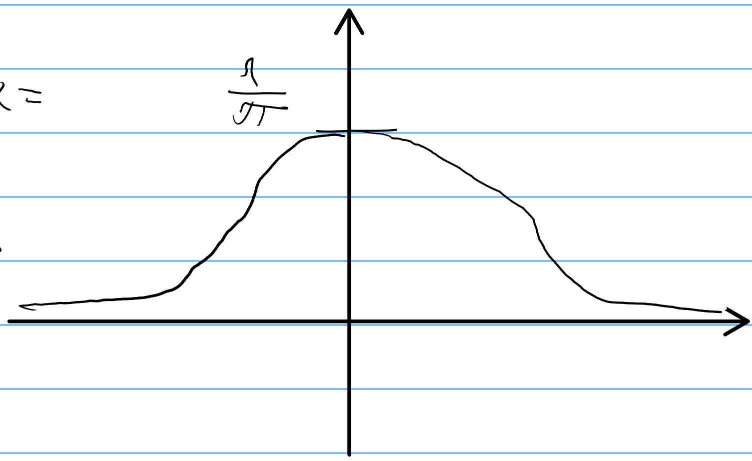
- A cauchy eloszlás:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\, dx = \frac{1}{\pi}\left[arctg(x)\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\ln|1+x|\right]_{-\infty}^{\infty} = \infty - \infty$$



Chebislev tétele

- Legyen $\xi \geq 0$ és $\exists\, E(\xi) < \infty$, $\forall a > 0$ $P(\xi \geq a) = \frac{E(\xi)}{a}$

Markov tétele

- Legyen ξ tetszőleges valószínűségi változó, $Var(\xi) < \infty$

$$(E(|\xi - E(\xi)|) \geq \varepsilon)\ \frac{Var(\xi)}{\varepsilon^2}$$

Konvergencia fajták

- Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots$ valószínűségi változók azonos Ω eseménytéren, ekkor ξ_n tart 1 valószínűséggel x-hez, ha $P(\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x) = 1$.

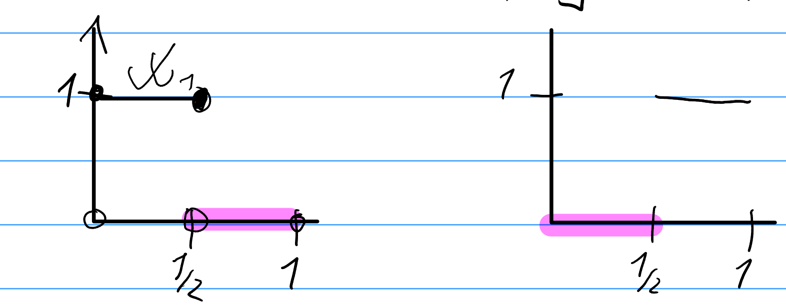
- ξ és η valószínűségi változók azonos eseménytéren ekvivalensek, ha $P(\xi = \eta) = 1$

- Legyenek $\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, \dots$ valószínűségi változók azonos Ω eseménytéren, ekkor ha $\xi_n \longrightarrow \xi$ és $\xi_n \xrightarrow{1v} \eta \Rightarrow \xi$ és η ekvivalensek.

- $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ valószínűségi változók azonos eseménytéren ξ_n tart sztochikusan ξ hez, ha $\forall \varepsilon > 0$ $P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
  - Jel: $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} \xi$

- Tétel $\xi_n \xrightarrow{1val} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{p} \xi$

$x = 0$ $\quad \Omega = [0, 1]$ $\quad$ P egyenletes



0 0 0 véletlenszámsor

- Tétel : $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ és $\xi_n \xrightarrow{p} \eta \Rightarrow \xi$ és η ekvivalensek

- Az eloszlásbeli konvergencia a következő:

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ valószínűségi változók, ξ-hez tart, ha $F_{\xi_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} F_\xi$ $\forall x \in C_{F_\xi}$ ponthoz.

Tétel: $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ valószínűségi változók azonos eseménytéren és sztochasztikusan $\xi_n \xrightarrow{p} \xi_\infty \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{d} \xi$ (*)

(*) side note: tényleg nem tudom megérteni pontosan mi a franc történik. Nem is próbálkozom már...

A **nagy számok törvénye** a valószínűségszámítás egyik alapvető tétele. A törvény azt mondja ki, hogy egy kísérletet sokszor elvégezve az eredmények átlaga egyre közelebb lesz a várható értékhez. A közeledés nem monoton, mivel újra és újra felbukkannak nem tipikus eredmények. Precízebb megfogalmazásban: ha $X_1, \dots, X_n$ azonos eloszlású független valószínűségi

Nagy számok gyenge törvénye:

- Legyen $X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változók sorozata azonos eseménytéren, $\exists\, \mu < \infty$ közös várható értékük, ekkor ha teljesül az $\frac{S_n}{n} - \mu \xrightarrow{P} 0$ konvergecnia, akkor X_n teljesíti a nagyszámok gyenge törvényét!

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

- Egy másik tétel:

Legyen X_n valószínűségi változó sorozat $E(X_n) = \mu < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $var(X_n) < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ és

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} var(X_i) \longrightarrow 0$$

Markov-egyenlőtlenség $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{var\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2}(S_n)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n^2}$

$$var(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon^2}}_{\varepsilon} \cdot \underbrace{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} var(X_i)}_{0} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} = 0$$

Nagyszámok erős törvénye

X_n sorozat $\mu < 0$ közös várható értékkel, ekkor ha $\frac{S_n}{n} - \mu \xrightarrow{1 val} 0$

ekkor X_n teljesíti a nagy számok törvényét!

egy tétele: X_1, X_2 független azonos eloszlású valószínűségi változó és létezi

$var(X_n) < \infty \Rightarrow X_n$ teljesíti a nagyszámok erős törvényét.

Karakterisztikus függvénye:

Legyen Ω tetszőleges, és $A \in \mathcal{A}$ esemény ; $\underbrace{X := \chi_A}$

Ez a karakterisztikus függvény

$$\chi_A(a) \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

$$E(X) = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot P(\overline{A}) = P(A)$$

- Ez is fontos: Legyen $\underbrace{X_1, X_2, \dots}$ $\sim X$ "realizációk"

N.Sz.E.T -t teljesítik $\Rightarrow \frac{X_1 + X_2 + \dots X_n}{n} \Rightarrow E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) \xrightarrow{1 val} 0$

Centralizáló H. tétel

ξ_1, ξ_2 sorozat tagjai független, azonos eloszlásúak, és $\exists \mu := E(\xi_n)\ \sigma = D(\xi_i) < \infty \Rightarrow \dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \underbrace{N(0;1)}$

standard normális eloszlás

Állítás: ξ valószínűségi változónak, $\mu = E(\xi)$, $\sigma = D(\xi) < \infty \Rightarrow$

$\xi - \mu$ az ξ centralizáltja $E(\xi - \mu) = 0$

$\dfrac{\xi - \mu}{\sigma}$ a standardizáltja $D\left(\dfrac{\xi-\mu}{\sigma}\right) = 1$

$Pl.: \xi \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow Y := \dfrac{\xi - \mu}{\sigma} \sim N(0;1)$

Átlag: $\dfrac{S_n}{n}$ $E\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \ldots = \mu$, $var\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2} var(S_n) =$

$= \dfrac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{var(\xi_i)}_{\sigma^2} = 1/n^2\, n\, \sigma^2 = \underline{\underline{\dfrac{\sigma^2}{n}}}$

$D\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Az áltag standardizáltja tehát:

$$\frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \ldots = \boxed{\frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}}$$

Végezetül pedig most már kezdődhet a valószínűség számítás...