Kalkulus I.

(Előadás és Gyakorlat)

Oktató(k): Dr. Király Balázs, Dr. Lucskai Gábor

Terem: Szentágothai János Kutatóközpontt (Kavics), E/432

Óra: 2022.09.06.

Email elérhetőség: kiralyb@gamma.ttk.pte.hu,

Elmélet

(“Kalkulus01ea_22HO.pdf”)

Általános jelölések és számhalmazok

N - Természetes számok

- Elemei: a természetes számok halmazába tartoznak a pozitiv egész számok és a 0.
  - N^* olyan természetes számok, amelyekben a nullát kizárjuk.
- Összeadás és a szorzás minden esetben a halmazon belül értelmezhető minden esetben.

Z - Egész számok halmaza

- Elemei: az összes pozitiv és negativ természetes szám, illetve a 0.
- Összeadás, kivonás és a szorzás a halmazon belül értelmezhető minden esetben.

Q - Racionális számok halmaza

- Elemei: olyan számok, melyek felirhatók két egész szám hányadosaként:
  - $\{\frac{p}{q}: \in Z,\ q \in N,\ q >,\ (p, q) = 1\}$
  - Irracionális számokhoz tartoznak olyan számok, amelyek nem tartoznak a racionális számokhoz.
    - Q^*-al jelöljük.
- Összeadás, kivonás, szorzás illetve az osztás értelmezhető halmazon belül minden esetben.

R - Valós számok halmaza

- Elemei: a számegyenesen értelmezhető pontokat értelmezzük valós számoknak.
- Összeadás, kivonás, osztás, szorzás értelmezhető a halmazon belül.

Ezen számhalmazokra elmondható, hogy a gyökvonás minden esetben problémát jelenthet.

A problémára orvoslást a “C” komplex számok bevezetése fogja jelenteni.

Az abszolútérték és az intervallum

Az $a \in R$ (valósszám) szám **abszolútértékén** az alábbi számot értjük definició alatt.

DEFINÍCIÓ

- $|a| := a | a \geq 0$
- $|a| := - a | a < 0$

TULAJDONSÁGOK

I. $|a| \geq 0 \,|\, \forall\, a \in R.$
   A. Minden esetben a ≥ 0-nál kivéve, ha $|a| = 0$

II. $\forall\, a \in R$ $\qquad - |a| \leq a \leq |a|$
   A. Bármely $a \in R$ esetén igaz az állitás.

III. $a, b \in R$ $\qquad |a + b| \leq |a| + |b|$
   A. Bizonyitás: Legyen a = 8, b = 5
      1. $|13| \leq 13$

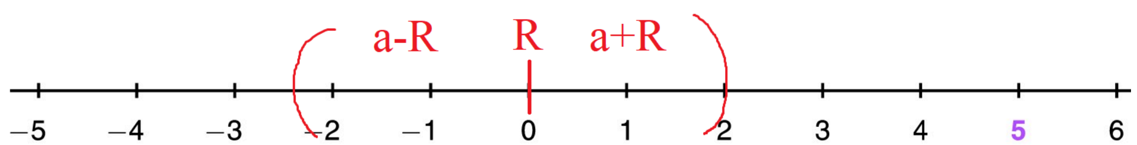
IV. $a, b \in R$ $\qquad ||a| - |b|| \leq |a - b|$
   A. Bizonyitás: legyen a=8, b=5
      1. $|40| = 40$

DEFINÍCIÓ

- A valós számhalmaz részhalmazait intervallumnak nevezhető.
- $a, b \in R$ $\qquad a < b$
  - ☐ Zárt intervallum: $[a, b] := \{x \in R |\, a \leq x \leq b\}$
  - ☐ Nyilt intervallum: $(a, b) := \{x \in R |\, a < x < b\}$
  - ☐ Balról zárt, jobbról zárt, balról nyílt, jobbról nyilt intervallumok is léteznek.

DEFINÍCIÓ

- Az a szám R sugarú környezetén egy nyilt $(a - R,\ a + R)$ intervallumot értelmezünk.
- $K_R(a)$-val jelöljük.



- Ezen intervallumba kizárólag olyan valós számok kerülhetnek, amelyekre igaz a következő kondició:
  - $|x - a| < R$
    - Azaz, olyan valós számok, amelyek kisebbek mint az R.
  - $K_R(a) = \{x \in R |\, |x - a| < R\}$

Minimum és Maximum

DEFINÍCIÓ

- A halmaz maximumának az M (Maximum) számot nevezzük, ami megfelel a következő kondicióknak:
  - A egy nem üres halmaz.
  - $M \in A$
  - $\forall M \geq a$
  - $\exists M \in A | \, \forall a \in A \; M \geq a.$
    - Azaz létezik olyan M szám, ami az A halmaz eleme, és minden esetben M nagyobb mint az összes a elem.
- Max A := M a jelölése.

DEFINÍCIÓ

- A halmaz minimumának az m (minimum) számot nevezzük, ami megfelelő a következő kondicióknak:
  - A egy nem üres halmaz.
  - $m \in A$
  - $\forall m \leq a$
  - $\exists m \in A$: $\forall a \in A \, A \, m \leq a.$
    - Létezik olyan m szám, ami az A halmaz eleme, és minden esetben m kisebb vagy egyenlő mint az összes a elem.
- Min A := m a jelölése

Minden véges halmaznak van minimuma és maximuma.

TULAJDONSÁGOK

- Ha egy **nem-véges** halmazról beszélünk, ahol **nincs minimum**, megfogalmazható pozitiv állitás formájában:
  - $\forall m \in A | \, \exists a \in A \qquad m > a$
- Ezen állítás tagadásánál elég kicserélni a **LÉTEZIK** és **MINDEN** kvantort, illetve a kondiciót is forditsuk meg.
  - $\forall m \in A | \, \exists a \in A \; m > a$
  - $\exists m \in A | \forall a \in A \; m \leq a$
- Ha egy **nem-véges** halmazról beszélünk, ahol **nincs maximum**, az is megfogalmazható pozitiv állitás formájában:
  - $\forall M \in A | \, \exists a \in A \; a > M$
- Vegyük észre, hogy használható az elöző trükk a rendezés esetében
  - $\forall M \in A | \, \exists a \in A \; a > M$
  - $\exists M \in A | \, \forall a \in A \; a \leq M$

$\forall m \in A$ **esetén** $\exists a \in A$ **elem, hogy a < m.**

(Végtelen halmaz esetében mindig van m, ami nagyobb mint az a ezáltal nincs minimuma)

Hogyan tagadható az eredeti állítás?

$$\exists m \in A\colon\ \forall a \in A\ m \leq a.$$

Létezik helyett minden-t és minden helyett létezik-et írunk, majd az állíáts ellentétét vesszük:

$$\forall m \in A\colon\ \exists a \in A\ m > a$$

Hasonlóképpen, ha $\emptyset \neq$ A $\subseteq$ R halmaznak nincs maximuma, akkor

$\forall M \in A$ esetén $\exists a \in A$ elem, hogy a > M.

A tagadás is az előzőhöz hasonlóan végezhető:

$$\exists M \in A\colon\ \forall a \in A\ M \geq a.$$

$$\forall M \in A\colon\ \exists a \in A\ M < a.$$

Korlátos halmazok és Korlátok

DEFINÍCIÓ

- Egy nem-üres, véges halmaz akkor felülről korlátos, ha létezik egy olyan K elem, ami ϵA halmaznak és ami minden elemre igaz, hogy $a \leq K$.
- Felső korlátot szuprémumnak szoktuk hivni: Sup A = K

DEFINÍCIÓ

- Egy nem-üres, véges halmaz akkor alulról korlátos, ha létezik olyan k elem, ami ϵA halmaznak, és ami minden elemre igaz, hogy $a \geq k$.
- Alsó korlátot infimumnak is szoktuk hivni.

DEFINÍCIÓ

- Egy nem üres, halmazra akkor mondjuk, hogy korlátos, ha létezik egy M szám, amelyre igaz $\forall a \epsilon A$ esetén, hogy $|a| \leq M$.
- Az M szám, amely ϵR^+ nemnegativ valós számot a halmaz egy korlátjának nevezünk
- **Egy halmaz csakis akkor korlátos, ha alulról és felülről is korlátos.**
    - Ha egy nem-üres halmaznak létezik felső, illetve alsó korlátja, akkor azokból végtelen sok van.
    - Továbbá, ezen végtelen sok korlátokból létezik:
        - Legnagyobb alsó korlát
        - Legkisebb felső korlát

Alsó- és felső határ

DEFINÍCIÓ

- Az α egy olyan valós szám, amely egy nem-üres korlátos halmaz szuprémumának (felső határának) nevezünk, ha teljesülnek az alábbi kondiciók:
  - $\alpha \geq a$ minden $a \in A$ esetében.
  - Legkisebb felső korlát, tehát $\forall K < \alpha \; \exists \; a \in A$ elem, amelyre teljesül, hogy $a > K$.
    - Azaz minden olyan alfára (ami szuprémum) létezik egy a elem, amely > az K korlát.

DEFINÍCIÓ

- A β egy olyan valós szám, amely egy nem-üres halmaz infimumának (alsó határának) nevezünk, ha teljesül a következő kondiciók:
  - $\beta \leq a$ minden $a \in A$ esetében.
  - A legnagyobb alsó korlát, azaz $\forall k > \beta \; \exists \; a \in A$ elem, amelyre teljesül, hogy $a < k$
    - Azaz minden olyan bétára (ami infimum) létezik egy elem, amely > a k korlát.

TULAJDONSÁGOK

- Azt, hogy egy nem-üres, a valós számhalmazon értelmezett halmaz **felülről nem korlátos** a következőképpen állitható:
  - $\exists K \in R, \quad \forall a \in A, \quad a \leq K.$
- Az **felülről nem korlátos kijelentés tagadására** használható az eddig eltanult trükk és hajtsuk végre.
  - $\forall K \in R, \exists a \in A, \quad a > K$
- Lássuk **alulról nem korlátos** halmaz esetében is:
  - $\exists k \in R, \quad \forall a \in A, \quad a \geq k.$
- **Trükkel alulról nem korlátos állitást forditsuk meg:**
  - $\forall k \in R, \quad \exists a \in A, \quad a < k.$

Nevezetes összefüggések

DEFINÍCIÓ

- A számtani és mértani közép között létezik összefüggés.
- $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ n darab nem negativ szám ($n \in N^+$) esetében kijelenthető, hogy a számtani közepe (átlaga) nem kisebb, mint ezen számok mértani közepe.
- $\sqrt[n]{a1 \ * \ a2 \ * \ \ldots \ an} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$
- Egyenlőség a kettő között csupán a következő esetben áll fent:
  - $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$
  - $\sqrt[n]{a_1 * a_2 * \ldots * a_n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$

DEFINÍCIÓ

- Általánositott háromszögegyenlőtlenségre elmondható a következő állitás:
- $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$.
  - $n = 3$ ás X = $\{5, 10, -15\}$
  - $|5 + 10 - 15| \leq |5| + |10| + |-15|$
  - $0 \leq 30$

DEFINÍCIÓ

- Bernoulli egyenlőtlenség a következő képpen alkalmazható, minden n nemnegativ szám és h valós szám esetén:
  - $1 + nh \leq (1 + h)^n | h > -1$
  - $(1 + h)^n \leq 1 + 2nh | \ 0 < h < \frac{1}{2n}$

Számsorozatok

DEFINÍCIÓ

- **A természetes számok halmazán értelmezett függvényt sorozatnak nevezünk.**

TULAJDONSÁGOK

- $x\colon N \to X (X \neq \emptyset)$: sorozat.
- $x(n) := x_n (n \in N)$: Sorozat n. tagja.
- $x = (x_0, x_1, ...)$ $x = (x_n, n \in N)$ $x_n (n \in N)$
- Sorozatokat megtudunk különbözteti számhalmaz alapján:
  - Ha X = R, akkor x **valós számsorozat**,
  - Ha X = C, akkor x **komplex számsorozat**,
  - vektorsorozat
  - intervallumsorozat
  - függvénysorozat
- Sorozatok többféle eljárással megadhatunk:
  - **Felsorolással**: Pl. (1,3,5,7,9,11, …),
  - **Képlettel**: Pl. $x_n = 2n + 1$, $(n \in N)$
  - Rekurzióval:
    1. $X_0 = 1$, $x_n = x_{n-1} + 2$, $(n \in N^*)$,
    2. x_0 = x1 = 1, xn+1 = xn-1 + xn, (n E N, n >= 2): (Fibonacci sorozat)
- Sorozatokat két féle módon ábrázolhatunk:
  - **Számegyenesen** az egyes elemek értékét ábrázoljuk, úgy, hogy jelöljük melyik elem melyik indexhez van hozzárendelve.
  - Koordinátarendszerben, ahol a sorozat elemeit számpáronként ábrázoljuk.
    - (n, a_n)

Monotonitás

DEFINÍCIÓ

- Az (x: $N \to R$) valós számsorozatot – ahol az index a természetes számok halmazán értelmezhető – monotonitása a következő képpen kategorizálható:
  - **Monoton csökkenő**nek nevezzük, **zárt intervallumon** értelmezzük, ha

    $x_n \geq x_{n+1} \qquad \forall n \in N$

  - **Szigorúan monoton csökkenő**nek nevezzük, **nyitott intervallumon** értelmezzük, ha

    $x_n > x_{n+1} \qquad \forall n \in N$

  - Monoton **növekedő**nek nevezzük, **zárt intervallumon értelmezzük**, ha

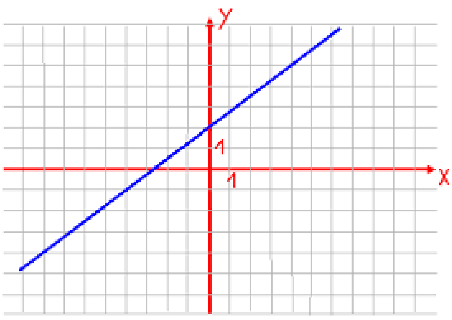
    $x_n \leq x_{n+1} \qquad \forall n \in N$

  - **Szigorúan monoton növő**nek hívjuk, **nyitott intervallumon értelmezzük**, ha

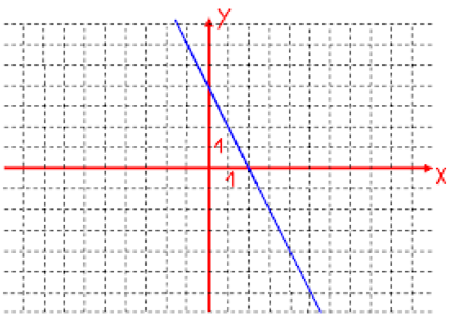
    $x_n < x_{n+1} \qquad \forall n \in N$

TULAJDONSÁGOK

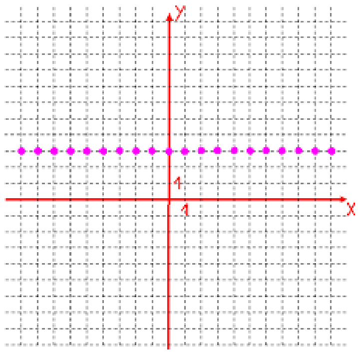
- Egy valós számsorozat monotonitás szempontjából csoportositható, mint:
  a. **monoton**
     - Szigorúan monoton növekedő (Pl. (n,n ϵ N))



- Szigorúan monoton csökkenő (Pl.: (-n,n ϵ N))



- Nem szigorúan monoton növekedő (pl. konstans sorozat)



- Nem szigorúan monoton csökkenő (Pl.: (-1, -1, -2, -2, -3, -3, -4, -4, …), konstans sorozat)

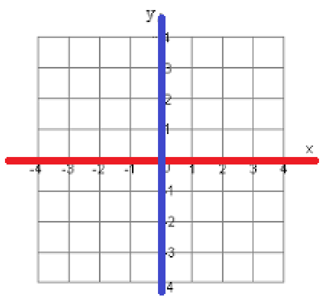
b. Nem monoton

- Egy adott indextől kezdve monoton: Pl. (6,5,3,4,9,8,2,7,5,8,5,1,2,3,4,5,6,...)
- Egy adott indextől kezdve sem monoton: Pl.: $((-1)^n,\ n \in N)$, $(sin\frac{4\pi}{n}, n \in N^*)$

- Ezen definiciókból következik, hogy egy **valós számsorozat következményei**:
  - **NEM monoton csökkenő** egy valós számsorozat, ha:
    - $\exists\, n \in N: x_n < x_{n+1}$, *(Ebben az esetben **szigorúan monoton növekvő)***
  - **NEM monoton növekvő** egy valós számsorozat, ha:
    - $\exists n \in N: x_n > x_{n+1}$, *(Ebben az esetben **szigorúan monoton csökkenő)***
  - **Egyáltalán NEM monoton**, ha nem monoton nővekvő és nem is monoton csökkenő, a valós számsorozat, ha:
    - $\exists n \in N: x_n < x_{n+1}$és$\exists m \in N: x_m > x_{m+1}$
  - Konstans egy valós számsorozat, ha egyszerre monoton növekedő és monoton csökkenő:
    - $x_n = x_{n+1} =$ állandó $\quad \forall n \in N.$

DEFINÍCIÓ

- Értelmezési tartomány a piros x tengely ↔
- Értékkészlet a kék y tengely. ↕
- Korlátosság tekintetében egy valós számsorozat esetében elmondhatók a következő állítások:
  - Egy valós számsorozat alulról korlátosnak nevezzük, ha értékkészlete *(y tengely)* alulról korlátozva van.
    - $\exists k \in R|\ \forall n \in N:\ x_n \geq k.$
      - Létezik egy olyan k (alsó korlát) valós szám, ami tekintettel az összes sorozatbeli a elemre, ≤ k.



  - Egy valós számsorozat felülről korlátosnak nevezzük ha értékkészlete felülről korlátozva van.
    - $\exists K \in R|\ \forall n \in N:\ x_n \leq K.$
      - Létezik egy olyan K (felső Korlát) valós szám, ami tekintettel az összes sorozatbeli elemre, $\leq K$.

DEFINÍCIÓ

- Hasonlóképpen az eddig emlitett nem üres, véges halmazok esetében is, egy valós számsorozat korlátosnak nevezünk, ha alulról és felülről is korlátos.

TULAJDONSÁGOK

- Egy valós számsorozat értékkészletének **legkisebb felső korlátját** felső határnak, vagy **szuprémumnak** nevezzük.
    - Jelölése: $sup\ x$
- Egy valós számsorozat értékkészletének **legnagyobb alsó korlátját**, alsó határnak vagy **infimumnak** nevezzük.
    - Jelölése: $sup\ y$

("kalkulus02eaHO.pdf")

Részsorozat

DEFINÍCIÓ

- **Ha egy sorozatból végtelen sok elemet választunk ki olyan sorrendben, ahogyan az eredeti sorozatban szerepeltek, akkor az eredeti sorozat részsorozatát kapjuk.**
- Bármelyik (x: $N \to R$) valós számsorozatnak van monoton részsorozata.

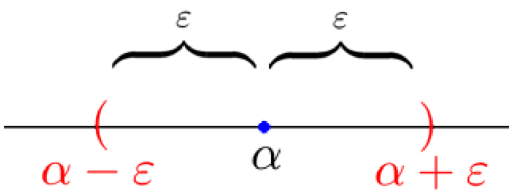
Konvergencia

DEFINÍCIÓ

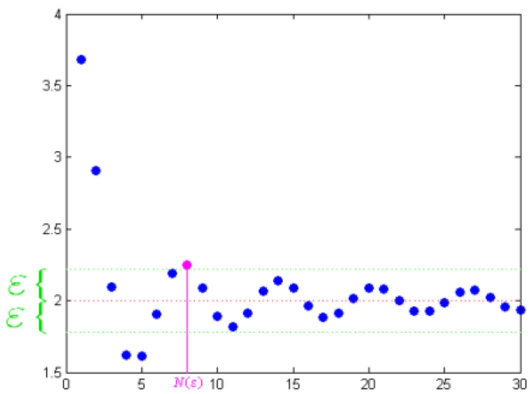
- **Egy számsorozat akkor konvergens ha létezik hozzá egyetlen határérték.**
- Vegyünk egy x valós számsorozatot ($X\colon N \rightarrow R$), elemeit megadjuk képlettel ($x_n, n \in N$). X számsorozat konvergens, ha teljesülnek a következő kondiciók:
  - $\exists\alpha \in R\colon \forall\varepsilon > 0 \quad V^{\varepsilon} := \{n \in N\colon x_n \notin K_{\varepsilon}(\alpha)\}$ véges halmaz.
    - Létezik olyan valós számok halmazán értelmezett értékkel biró alpha, ahol minden epszilon (0-hoz legközelebbi érték) > 0. V halmaz esetében x sorozat N.-ik eleme nem eleme az epszilon környezetnek (nyilt intervallum), ahol az alpha
      $\exists\alpha \in R\colon \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in N\colon \forall n > N\, esetén\colon |x_n - \alpha| < \varepsilon$
    - Létezik olyan a valós számok halmazán értelmezett értékkel biró alpha, ahol minden epszilon > 0, létezik Epszilon küszöbérték: ahol minden n > N.
- A felvázolt konvergencia tételek ekvivalensek egymással: $((A) \Leftrightarrow (B))$
  - Ezzel bizonyitjuk tétel definició szerint a konvergenciát.

DEFINÍCIÓ

- Ha egy valós számsorozat, konvergens számsorozat, akkor egyetlen $\alpha \in R$ valós szám létezik, amelyre (A) illetve (B) teljesül.
- Ezt az alpha értéket a konvergens számsorozat limeszének, vagy határértékének nevezünk.
    - $lim\, x = \alpha,\ \lim_{n \to \infty} x = \alpha,\ x_n \to \alpha\ (n \to \infty),\ L(X) = \alpha$
    - ("x konvergál alpha felé")



- A konvergencia, a határérték és a küszöbszám értelmezhető a következő ábrán:
    - **Konvergencia**
        - Konvergál valamilyen érték felé.
    - **Határérték**:
        - 2



$K_\varepsilon(2) = (2 - \varepsilon,\ 2,\ 2 + \varepsilon)$

- **Küszöbszám**:
    - Az az érték, ami nincs benne az epszilon sugárban, de a legközelebbi elem. $n(\varepsilon)$

PÉLDA

a. Definició alapján igazoljuk az $a = (\frac{1-2n}{2n+2}, n \in N)$ sorozat konvergenciáját!
b. Adjuk meg, hogy a sorozat mely elemei esnek a határérték $\varepsilon = 0,01$ sugaró környezetébe!

Sejtés: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -1 = A$.

Az $(a_n, n \in N)$ sorozat konvergens és határértéke A szám, ha belátjuk a következő definiciót.

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) \in N \, \forall n > N \, |x_n - \alpha| < \varepsilon.$

$|\frac{1-2n}{2n+2} - (-1)| < \varepsilon.$ $\qquad |\frac{1-2n+(2n+2)}{2n+2}| < \varepsilon$ $\qquad |\frac{3}{2n+2}| < \varepsilon$

Mivel az abszolut érték helyén szereplő kifejezés > 0, azaz pozitiv $\forall n \in N$ esetén, ezért elhagyható.

Következő lépésenként rendezzük az egyenletet, hogy az **epszilon** és az **n** helyet cseréljenek.

$\frac{3}{2n+2} < \varepsilon$ $\qquad 3 < \epsilon(2n + 2)$ $\qquad \frac{3}{\varepsilon} < 2n + 2$ $\quad \frac{3}{\varepsilon} - 2 < 2n$ $\quad \frac{\frac{3}{\varepsilon}-2}{2} < n$

Ezután használjuk a következő állitást.

$N(\varepsilon) := max\{[\frac{\frac{3}{\varepsilon}-2}{2}], 0\}.$

VEGYÜK ÉSZRE, hogy ez egy jó küszöbindex, ami használható bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén, kiszámitható, hogy a sorozat konvergens és bármilyen példa esetén a határérték -1.

Tesztelhetjük, behelyettesitéssel:

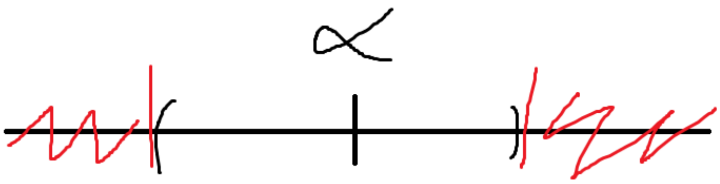
$N(0,01) = [\frac{\frac{3}{0,01}-2}{2}] = [\frac{300-2}{2}] = [\frac{298}{2}] = 149.$

Eredményképpen azt monhatjuk, hogy a sorozat 149. eleme még kivül van a (-1,01;-0,99) környezeten, azonban a 150. elemtől már az intervallumba esik.

Divergencia

DEFINÍCIÓ

- Ha egy valós számsorozat nem konvergens, akkor azt mondjuk, hogy divergens. Az A és B definició kimondja definició szerint:
    - $\forall\alpha \in R$: $\exists\varepsilon > 0$ $V^{\varepsilon} := \{n \in N: x_n \notin K_{\varepsilon}(\alpha)\}$ végtelen számosságú halmaz.
        - Minden valós szám alfára igaz, ha létezik olyan epszilon, ami nagyobb mint 0, hogy olyan epszilon terü természetes számhalmazt képez, ahol az x valós sorozat elemei nincsenek benne az epszilon sugarú alfa környezetben.



    - $\forall\alpha \in R$: $\exists\varepsilon > 0$ $\forall N \in \mathbf{N}$: $\exists n > N$, hogy $|x_n - \alpha| \geq \varepsilon$.
        - Minden valós szám alfára igaz, ha létezik olyan epszilon, ami nagyobb mint 0, hogy minden N, ami eleme a természetes számoknak, ha létezik n, ami nagyobb mint N, hogy abszolút xn különbség alfa kisebb vagy egyenlő epszilonnál.

DEFINÍCIÓ

- Egy valós számsorozat **határértéke** $+\infty$, ha igazak a következő kondiciók:
    - $\forall R \in R$ $V^{R} := \{n \in N:\ x_n \leq R\}$ véges.
    - $\forall R \in R$ $\exists N = N(R) \in N$: $\forall n > N$ esetén $x_n > R$
- Illetve, egy valós számsorozat **határértéka** $-\infty$, ha igazak a következő kondiciók:
    - $\forall R \in R$ $V^{r} := \{n \in N:\ x_n \geq r\}$ véges.
    - $\forall R \in R$ $\exists N = N(R) \in N$: $\forall n > N$ esetén $x_n < r$

TULAJDONSÁGOK

- Sorozatokat tudjuk osztályozni konvergencia szerint a következtő képpen:
    - **Konvergens**
        - Minden számsorozast konvergens, ha korlátos és egyetlen határértéke van.
            - Létezik olyan számsorozat, ami korlátos, de nem konvergens.
        - Konvergens sorozat bármely részsorozata is konvergens, és határértéke megegyezik az eredeti sorozatéval.d
    - **Divergens**
        - Egy sorozat divergens, ha nem határozható meg egy érték, amely felé tartanak a sorozat elemei.
            - Azaz divergens, ha nem konvergens.
            - Akkor is divergens, ha egy sorozat, két rész sorozatának határértéke eltérő, az eredeti sorozattól.
        - Tarthat ∞ és $-\infty$ felé.
    - **Ekvikonvergens**
        - Ha olyan x,y valós számsorozat, amely **majnem minden (m.m)** n indexre megegyezik, szóval $\exists N \in N$, ahol n > N: $x_n = x_y$, akkor két sorozat ekvikonvergens.
            - Azaz, x akkoir és csak akkor konvergens, ha y is konvergens
                - $L(x) = L(y)$.

DEFINÍCIÓ

- Egy monoton valós számsorozat, ami $(x = (x_n, n \in N))$, akkor konvergens és korlátos, ha
    - $L(x) = sup\, x$, ha x monoton nő,
    - $L(x) = inf\, x$ ha x monoton csökken.
- Monoton csökkenő sorozat esetében a szuprémuma lesz a kezdő elem
    - $sup\, x = x_0$
- Monoton növő sorozat infimuma lesz a kezdő elem.
    - $inf\, x = x_0$

Nevezetes sorozatok

DEFINÍCIÓ

- Léteznek olyan nevezetes sorozatok, melyekről számolás nélkül is meghatározható a határértéke, köszönhetően az alábbi bizonyitásoknak.
  - $\frac{1}{n} \to 0 : n \in N^{*}$
  - $n^{p} \to \infty : P \in N^{*}$
  - $\sqrt[P]{n} \to \infty : P \in N^{*}$
- **A következőkre tekintettel bizonyitásuk nem szükséges!**
  - $\frac{\alpha^{n}}{n!} \to 0$
  - $\sqrt[n]{\alpha} \to 1$
  - $\sqrt[n]{n} \to 1$
  - $\sqrt[n]{n^{P}} \to 1$
  - $\sqrt[n]{n!} \to \infty$
- a = ($a_n = C, n \in N,\ C \in$ R^{+}) konvergenciája.
  - Sejtés: $lim\ a = C$.
  - Bizonyitáshoz használjuk fel a konvergencia definicióját:
    - $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in N,\ \forall n > N\ |a_n - C| < \varepsilon.$

      - Mivel $a_n - C = 0$ minden $n \in N$ index esetén, ezért az $|a_n - C| < \varepsilon$ reláció bármely $n \in N$ esetén fennáll, igy $N = 0$ minden $\varepsilon > 0$ esetén jó küszöbindex.

- $a = (a_n = \frac{1}{n}, n \in N^{*})$ konvergenciája.

  - Sejtés: $lim\ a = 0$.

  - Bizonyitáshoz ismét irjuk fel a konvergencia definicióját, azonban tegyük hozzá az új értelmezett halmazt is, mivel 0-át kizárjuk!

    - $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in N^{*}, \forall n > N\ |a_n - 0| < \varepsilon.$

      - Mivel $\frac{1}{n} > 0$ minden $n \in N$ esetén, ezért , tehát elhagyható a definicióban az abszolutérték

      -

-

Mértani sorozat

DEFINÍCIÓ

- Legyen $x = (q^n, q \in R$ rögzitett,$n \in N)$. Az q^n alakban irt sorozatokat mértani sorozatnak nevezzük.

TULAJDONSÁGOK

- Egy x mértani sorozatról elmondhatók az alábbiak:
    a. ha $q > 1$, akkor x sorozat divergens és határértéke ∞.
    b. ha $q \leq - 1$, akkor x divergens,
    c. ha $- 1 < q < 1$ akkor x konvergens és határértéke 0,
    d. ha $q = 1$ akkor x konvergens és határértéke 1.
- $q > 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} q^n = \infty$.
    - Konvergencia definiciót ismét használhatjuk, hogy megállapitsuk a $lim\, x = \infty$:
        - $\forall R \in R,\ \exists N = N(R) \in N,\ \forall n > N,\ x_n > R$.

(“Kalkulus03eaHO.pdf”)

Euler sorozat

DEFINÍCIÓ

- A $(1+\frac{1}{n})^n$ sorozat konvergens
  - A sorozat konvergenciája belátható, hogy:
    1. Monoton
    2. Korlátos (konvergencia elégséges feltétele
  - A fenti sorozat határértékét e-vel szokás jelölni, és Euler-számnak (Euleri konstans) nevezzük.
    - Értéke közelitőleg: $e = 2,71828$.
  - Az 1 kitevő határozza meg az e kitevőjét, valahogyan igy:
    - $(1+\frac{1}{n})^n \to e$

TULAJDONSÁGOK

- A következő tételek bizonyitás nélkül elfogadhatók:
  - Ha $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{b_n})^{b_n} = e^1$
  1. Ha $a_n \to a > 0$ *és* $b_n \to b \in R$, akkor $a_n^{b_n} \to a^b \ (n\to\infty)$
  2. Ha $a_n \to a > 1$ és $b_n \to \infty$, akkor $a_n^{b_n} \to a^b \ (n\to\infty)$
  3. Ha $a_n \to a \ (0 < a < 1)$ és $b_n \to \infty$, akkor $a_n^{b_n} \to 0 \ (n\to\infty)$
- Ha $a > 0$, és valós szám, abban az esetben igy szól a képlet:
  - $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{a}{n})^n = e^a$
    - A tétel használatával kikerülhetző a hatványozás azonosságai.

Null-sorozatok

DEFINÍCIÓ

- Olyan konvergens sorozatokat, amelyek határértéke 0, zérus-sorozatoknak, vagy nullsorozatoknak nevezünk, és az alábbi módon jelöljük:
  - $C := \{x | x: N \to R,\ x\ konvergens\ sorozat\}$
  - $\aleph := \{x | x: N \to R,\ x \in C \text{ és } L(X) = 0\}$
- Ha x egy valós számsorozat, és ha $x \in C$, illetve $L(x) = \alpha \in R$, akkor $(x_n - \alpha, n \in N) \in \aleph$
  - Tehát ha x valós számsorozat eleme a null sorozatnak, akkor eleme az N-nek is.
- Kis rendőrelvet az alábbi módon tudjuk elképzelni:
  - Ha x és y valós számsorozatok, és $y \in \aleph$, akkor tekintettel:
    - $|x_n| \le |y_n|$ m.m-re,
  - Akkor $x \in N$ is nullsorozat.

TULAJDONSÁGOK

- Nullsorozatokra az alábbi módon érvényesülnek a müveletek:
  - Amikor x,y valós számorozatok
    - $x + y := \{x_n + y_n,\ n \in N\}$
    - $x \cdot y := \{x_n \cdot y_n,\ n \in N\}$
  - Továbbá, tekintettel a kis rendőrelvre:
    - $x + y \in \aleph$,
    - $x \cdot y \in \aleph$.
- Konvergens sorozatokra hasonlóképpen érvényesülnek a müveletek, valahogyan igy:
  - Legyenek x, y valós számosorzatok:
    - $x \div y = \frac{x}{y} := (\frac{x_n}{y_n},\ n \in N)$
    - $\lambda \cdot x := (\lambda \cdot x_n,\ n \in N)$
      - A λ egy konstans.
  - Legyenek x,y olyan valós, konvergens számsorozatok, hogy $x, y \in C$, valamint $\lambda \in R$
    - $x + y \in C$, és $L(x + y) = L(x) + L(y)$
    - $\lambda \cdot x \in C$, illetve $L(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot L(x)$
      - $\lambda \cdot y \in C$, *illetve* $L(\lambda \cdot y) = \lambda \cdot L(y)$
    - $x \cdot y \in C$, és $L(x \cdot y) = L(x) \cdot L(y)$
    - Olyan esetben, amikor $y_n \ne 0\ (n \in N)$ és $L(y) \ne 0$, akkor $\frac{x}{y} \in C$, és $L(\frac{x}{y}) = \frac{L(x)}{L(y)}$

Rendőrelv

DEFINÍCIÓ

- Legyen a, b, c valós számsorozat, melyeknek elemeire igazak:
    - $a_n \leq b_n \leq c_n$ $(\forall n \in N)$.
    - Ha a és c sorozatok konvergensek, illetve a és c határértéke megeggyezik, akkor a közrefogott b is megeggyezik.
        - $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} c_n \Rightarrow \lim_{n \to \infty} b_n \Rightarrow \lim_{n \to \infty} b_n = A$.
    - Az elv akkor is igaz marad, ha csak majdem minden $n \in N$ esetén áll fenn.
    - **A tételt nem kell igazolni Dr. Király Balázs-nál!**

TULAJDONSÁGOK

- Legyenek x,y valós számsorozatok, amiknek létezzen határértékük (nem feltétlenül konvergensek)
    - Ha $L(x)$ és $L(y) = +\infty$
        - $L(x \cdot y) = +\infty$
        - $L(x + y) = +\infty$
    - Ha $L(x) = \alpha \in R$ és $L(y) = +\infty$
        - $L(\frac{x}{y}) = 0$
    - Ha forditva az elöző eset:$L(x) = +\infty$ és $L(y) = \alpha \in R^+$
        - $L(\frac{x}{y}) = +\infty$
    - …
    - DE! Léteznek úgy nevezett határozatlansági esetek is
        - $"\frac{0}{0}", "\frac{\infty}{\infty}", "\infty - \infty", "0 \cdot \infty", "0^0", "1^\infty", "\infty^0"$
        - Ezek kimenetelét nem tudjuk müveleti tulajdonságok alapján a határértéküket közvetlenül leolvasni, ezért elemi matematikai meggondolásokkal át kell alakitani és megszüntetni a helyzetet.

Sorozatok alsó és felső határértéke

DEFINÍCIÓ

- Vegyük valamilyen sorozat összes véges, vagy végtelen határértékekkel rendelkező részsorozatát. Legyen $H \subseteq R^{C}$ egy olyan halmaz, mely ezen sorozatok határértékeinek halmazát jelölje.
    - a H halmaz legkisebb elemeét, az eredeti sorozat alsó határértékének ($lim\ inferior$) nevezzük
    - A H halmaz legnagyobb elemét a sorozat határértékének ($lim\ szuperior$) nevezzük.
    - A H halmaznak mindig vannak legkisebb és legnagyobb elemei, ezáltal ez egy igaz definició.
        - Konvergens sorozat esetén a szóban-forgó H halmaz egy-elemü:
            - A sorozat akkor, és csak akkor konvergens, ha $lim\ inf\ x = lim\ sup\ x$.

Végtelen sorok

DEFINÍCIÓ

- Egy x valós számsorozatból készitett $x_0 + x_1 + x_2 + ... + x_n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ végtelen számsornak (végtelen sor) nevezünk.
    - Az x_n **számot a végtelen sor n-edik tagjának nevezünk**.

DEFINÍCIÓ

- Az $S = (S_n, n \in N)$ sorozatot $S_n = x_0 + x_1 + x_2 + ... + x_n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x_k$ $(n \in N)$ a végtelen sor **részletösszeg sorozatának** nevezzük.
    - **Az $S_n \in R$ szám a sor n-edik részletösszege.**

TULAJDONSÁGOK

- A részletösszeg sorozat a következő rekurzióval is előállitható:
    - $S_0 := x_0, S_n := S_{n-1} + x_n$ $(n \in N)$

DEFINÍCIÓ

- Akkor konvergens egy $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ végtelen sorozat, **ha az** S_n **részletösszeg sorozata konvergens**.
    - **A részletösszeg sorozat határértékét a végtelensor összegének nevezzük.**
    - Ha konvergens és a végtelen sor összege az $\alpha \in R$ szám, azt a következőképpen jelöljük:
        - $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \alpha$

DEFINÍCIÓ

- Ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ végtelen sor konvergens, akkor az x_n sorozat nullsorozat.
    - **Ez a végtelen sor konvergenciájának szükséges feltétele, azonban nem elégséges.**
        - Ellen példa, az $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ végtelensor nem konvergens, annak ellenére, hogy általános tag határértéke 0.

DEFINÍCIÓ

- Ha $x_n = y_n$ majdnem minden $n \in N$ esetén, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ végtelen **sorok egyszerre konvergensek és divergensek**

DEFINÍCIÓ

- Egy $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ végtelen sor akkor abszolút konvergens, ha $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ végtelen sor konvergens.
    - Ha e**gy végtelen sor abszolút konvergens, akkor konvergens is**, mivel az abszolút konvergencia **szükséges feltétele a konvergencia**.
        - Csakis szükséges feltétel, mivel létezik olyan konvergens sorozat, amely nem abszolút konvergens: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2}$ végtelen sor egy példa erre.

Nevezetes végtelen sorok

DEFINÍCIÓ

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ végtelen sort, **harmonikus** sornak nevezzük.
    - A harmonikus sor divergens.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ végtelen sort, **hiperharmonikus** sornak nevezzük.
    - A hiperharmonikus sor csak akkor konvergens, ha $\alpha > 1$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n}$ végtelen sort, **mértani** vagy **geometriai sornak** nevezzük.
    - Az $|q^{n}| \geq 1$ esetén a mértani sorozat nem lehet konvergens, hiszen nem teljesiti a konvergencia szükséges feltételét, mivel az átlagos tagja nem tart a nullához.
    - Azonban az $|q^{n}| < 1$ esetében a mértani sor konvergens és az alábbi módon határozható meg az összege:
        - $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n} = \frac{1}{1-q}$.

("Kalkulus04eaHO.pdf")

Pozitiv tagú sorok

DEFINÍCIÓ

- Egy végtelen sort pozitivnak nevezünk, ha tagjaira igaz, hogy $x_n > 0$.
    - Az ilyen sorok tagjai nem-negativ számok.
        - Ezek után belátható, hogy az S sorozat monoton növő.
    - Konvergencia tekintetében, egy pozitív tagú sor csak akkor konvergens ha részletösszegeinek sorozata korlátos.

Összehasonlító kritériumok

DEFINÍCIÓ

- Majoráns kritérium a következő esetben végzünk.
    - Tegyük fel, hogy az x és y valós sorozatoknál $0 \le x_n \le y_n$ igaz, ahol majdnem minden$(n \in N)$ -re igaz
    - Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sor konvergens, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergens
- Minoráns kritérium az úgy történik, hogy:
    - Tegyük fel, hogy az x és y valós sorozatoknál $0 \le y_n \le x_n$ igaz, ahol majdnem minden$(n \in N)$ -re igaz
    - Ha $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sor divergens, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ is divergens.
- F**üggetlenül attól, hogy nem minden** $n \in N$-re igaz, a **reláció igaz marad.**
- **Ha valamely pozitív tagú sor** esetén sejtjük, hogy **konvergens**, akkor megpróbáljuk **felülről becsülni (majoráns).**
- **Ha pedig pozitiv tagú sor esetén divergens** sornak hisszük, akkor **alulról kell becsülni (minorálni).**

Leibniz-típusú sorok

DEFINÍCIÓ

- $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x_n$ leibniz-típusú sor, ahol x nemnegatív, monoton csökkenő sorozat.
    - Ezen sorozat tagjai váltakozó előjelűek.
    - Akkor konvergens, ha határértéke 0, ami szükséges és elégséges feltétel.

TULAJDONSÁGOK

- Részletösszeg sorozatát vizsgálva elmondható, hogy:
    - Páros elem esetében $x_n > S_n$
    - Páratlan elem esetében $x_n < S_n$
        - **A részletösszeg sorozat oszcillál a sor összege körül.**
- Ha a Leibniz-tipusú sor n-edik részletösszegét használjuk, a hiba felülről becsülhető az x sorozat n+1-edik elemével, azaz ha α jelöli a sor összegét ($\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x_n = \alpha$) akkor:
    - $|S_n - \alpha| \leq x_{n+1}$ igaz $n \in N$-re

További konvergencia kritériumok

DEFINÍCIÓ

- **Cauchy-féle gyök kritérium**: $\lim_{n \to \infty} sup \sqrt[n]{|x_n|}$:
    - Amikor x egy valós számsorozat:
        - $\lim_{n \to \infty} sup \sqrt[n]{|x_n|} < 1 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ abszolút konvergens
        - $\lim_{n \to \infty} sup \sqrt[n]{|x_n|} > 1 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ divergens.
        - $\lim_{n \to \infty} sup \sqrt[n]{|x_n|} = 1$ **Nem használható!**
- **D'Alembert-féle hányados kritérium**: $\lim_{n \to \infty} sup \frac{|x_n+1|}{|x_n|}$:
    - Amikor x egy valós számsorozat:
        - $\lim_{n \to \infty} sup \frac{|x_n+1|}{|x_n|} < 1 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ abszolút konvergens.
        - $\lim_{n \to \infty} sup \frac{|x_n+1|}{|x_n|} > 1 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ divergens.
        - $sup \frac{|x_n+1|}{|x_n|} \leq 1 \leq sup \frac{|x_n+1|}{|x_n|}$ **Nem használható!**
- Ha létezik határértéke, akkor a kritérium a határértékekkel hozható egyszerűbb alakra.

Hatványsorok

DEFINÍCIÓ

- Definiáljunk $x_0 \in R$ rögzitett valós számsorozatot, illetve egy a_n számsorozatot.
  - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ végtelen sort hatványsorozatnak nevezzük.
    - $a_n \rightarrow$ hatványsor együtthatói
    - $x_0 \rightarrow$ hatványsor konvergencia-középpontjának nevezzük.

TULAJDONSÁGOK

- A hatványsor minden $x \in R$ esetén egy végtelen sort ad eredményül.
- Továbbá megállapitható, hogy $x \in R$ esetén a végtelen sorozat konvergens vagy divergens-e.
  - Ilyenkor azt mondjuk, hogy az adott $x \in R$ pontban a hatványsorozat konvergens vagy divergens.

DEFINÍCIÓ

- Az $x \in R$ számok összességét, amelyekben a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ esetében $x \in R$ konvergens, a hatványsor **konvergencia halmazának** (vagy **konvergencia tartományának**) nevezzük.
  - $x_0 \in R$ **konvergencia-középpontban a hatványsor mindig konvergens.**

Konvergencia tartomány

DEFINÍCIÓ

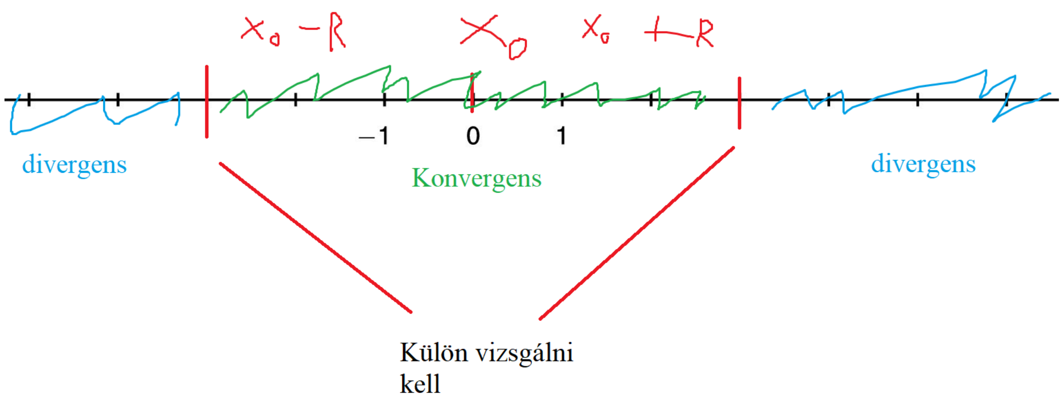
- Legyen $\alpha := \lim\limits_{n \to \infty} sup \sqrt[n]{|x_n|}$ (Cauchy-féle gyökkritérium). Ekkor a hatványsor konvergencia sugara (**R**):
  - $R := 0$, ha $\alpha = \infty$
  - $R := \infty$, ha $\alpha = 0$
  - $R := \frac{1}{\alpha}$, ha $0 < \alpha < \infty$.

DEFINÍCIÓ

- Legyen R a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ hatványsor konvergencia sugara.
  - $K_R(x_0)$
    - $K_R(x_0) = \{x \in R \colon |x - x_0| < R\}$ halmaz pontjaiban abszolút konvergens.
    - $K_R(x_0) = \{x \in R \colon |x - x_0| > R\}$ halmaz pontjaiban divergens.

TULAJDONSÁGOK

- Ahogyan mondtuk, az $x_0 \in R$ konvergencia középpontban a hatványsor MINDIG konvergens.
  - Ha a hatványsor konvergencia sugara R:
    - Abszolút konvergens az $(x_0 - R, x_0 + R)$ intervallum pontjaiban, ha kívül van, akkor divergens.



- Az intervallumok végpontjaibal a hatványsor konvergenciáját külön kell vizsgálni. (Ábra alá-támasztásként)

Összegfüggvény

DEFINÍCIÓ

- Abban az esetben amikor egy hatványsor konvergencia sugara $R > 0$, egy utasitással adott függvényt a hatványsor összegfüggvényének nevezzük.
    - $K_R(x_0) \ni x \to f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \in R.$
        - **“A függvént hatványsorba fejtettük”**

Analitikus függvények

DEFINÍCIÓ

- Egy $H \subseteq R$ halmaz nyilt, ha $\forall a \in R$ pontjának van olyan $K_R(\alpha)$ környezete, amelyre $K_R(\alpha) \subseteq H$ teljesül.

TULAJDONSÁGOK

- $\{\emptyset\}$ üres halmaz, egy nyilt halmaz.
- Ha $a, b \in R$, akkor az (a, b) nyilt halmaz.
- A nyilt $(-\infty, a)$ és a (b, ∞) halmazok, intervallumok.
- Nyilt halmaz uniója is nyilt halmazt képez.

DEFINÍCIÓ

- $f: H \rightarrow K$ függvényt analitikus függvénynek nevezzük, ha bármely $a \in H$ pontnak van olyan $K_R(\alpha)$ környezete, amelyben az f előállitható hatványsor összegfüggvényeként.

("Kalkulus05eaHO.pdf")

Függvények

DEFINÍCIÓ

- Függvény alatt olyan hozzárendelést értünk, amely egy H halmaz minden eleméhez egy K halmaz egyetlen elemét rendeli.
  - Jelölése: $f: H \to K,\ y = f(x)\ (x \in H)$
    - x: független változó
    - $y\ vagy\ f(x)$ a függő változó
    - $H\ (D_f\ vagy\ ÉT)$: a **függvény értelmezési tartománya** (x tengely)
    - $R_f(vagy\ ÉK)$ a Értékkészlet (vagyis y tengely)
      - $R_f = ÉK := \{y \in K: \exists x D_f, f(x) = y\} \subseteq K.$

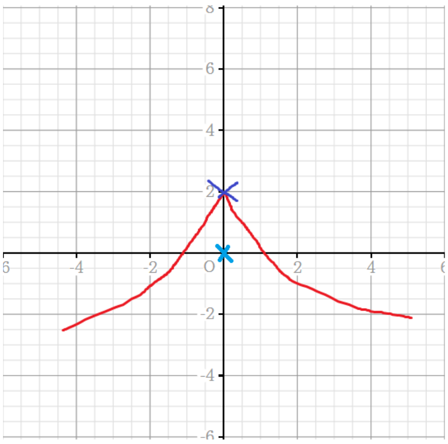
TULAJDONSÁGOK

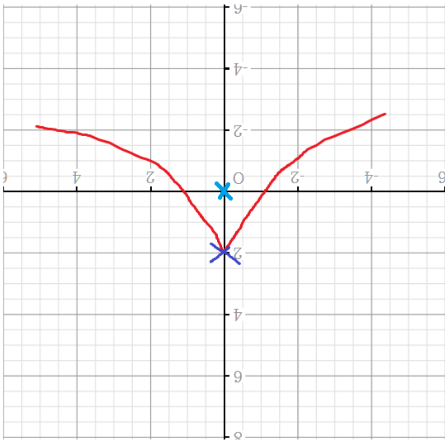
- Az f valós függvény, ha az értelmezési tartománya és értékkészlete eleme a valós számok halmazának.
  - Ezeket grafikonnal fogjuk ábrázolni, tehát a H nyilt halmazon értelemzett $f: N \to R$ függvényt a $\gamma(f) := \{(x, y) \in R^2: x \in H,\ y = f(x)\} \subset R^2$ sikbeli halmazzal szemléltetjük.

DEFINÍCIÓ

- Két függvény egyenlő, ha értelmezési tartományuk megegyezik:
  - $D_f = D_g$ és $f(x) = g(x)$
    - Ilyenkor az értékkészletük is megegyezik:
      - $R_f = R_g$

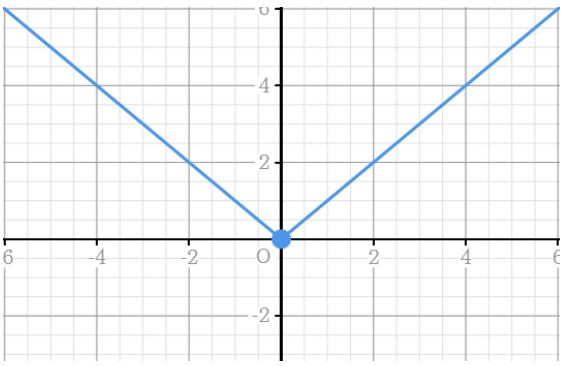
DEFINÍCIÓ

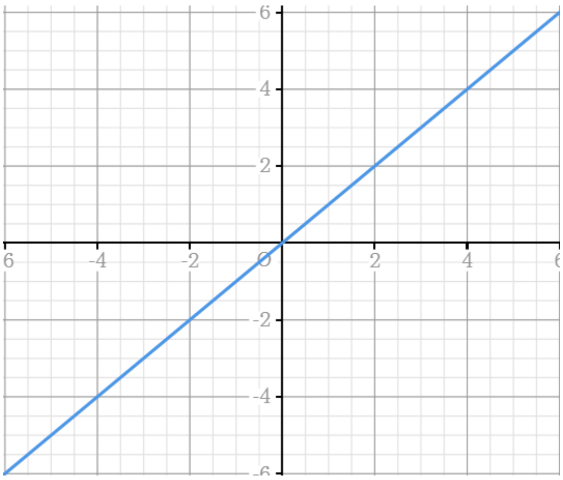
- Egy valós függvény **maximum érték**én az **értékkészletének maximumá**t értjük (függvény legmagasabb pontja).
- Egy valós függvény maximum helyén azt az x-et értjük, ahol a maximum érték van az x tengelyen.
  - 

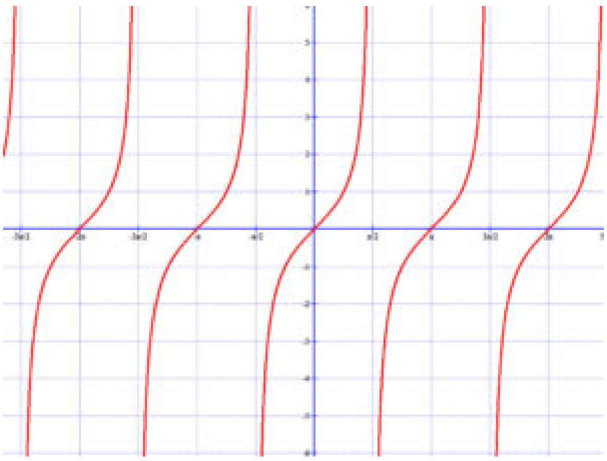
- **Minimum értékénén** az **értékkészletének minimumát** értjük (függvény legalacsonyabb pontja)
- Minimum helyén azt asz x-et értjük, ahol a legalacsonyabb érték van az x tengelyen.
- 

Alaptulajdonságok

DEFINÍCIÓ

- Egy függvényt párosnak nevezünk, ha a H az origóra szimmetrikus.
    - $f(-x) = f(x)$
    - 

- Egy függvény páratlan, ha H az origóra aszimetrikus
    - $f(-x) = -f(x)$
    - 

- Egy függvény periodikus, ha létezik $p > 0$ (ismétlödő tényező)
    - $f(x + p) = f(x)$.
    - 

TULAJDONSÁGOK

- Egy periodikus függvény esetén, ha teljesül a fenti definició minden valós pozitiv számra, akkor bármely nem-nulla, pozitiv P konstansra is igaz, hogy:

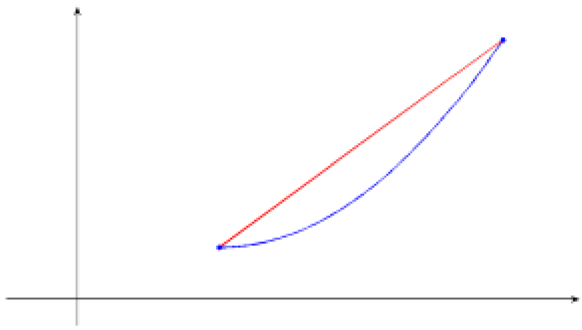
- $p^* = (c \cdot p : p \in R^*, c \in N^*) \rightarrow f(x + p^*) = f(x)$
    - A legkisebb pozitiv számot, mely minden $x \in H$ esetén $f(x + p) = f(x)$, a függvény periodusának nevezzük.

DEFINÍCIÓ

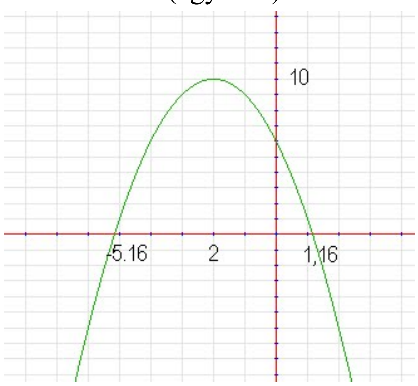
- Egy függvény monoton növő, ha minden x_1, x_2 pontpárra $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Egy függvény monoton csökkenő, ha minden x_1, x_2 pontpárra $x_1 > x_2$ esetén $f(x_1) \geq f(x_1)$.
    - Monoton függvények lehetnek szigorú monoton függvények is
        - Egész függvényre tekintettel,
        - egy bizonyos ponttól: Az adott intervallumon monoton.

DEFINÍCIÓ

- Akkor mondjuk, hogy egy valós függvény egy $I \subseteq H$ intervallumon konvex, ha bármilyen két a,b ponton áthaladó szelő (egyenes) az f függvény felett fekszik



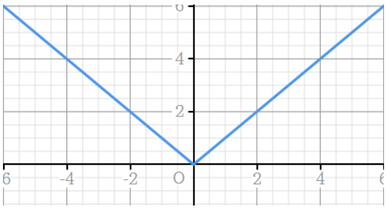
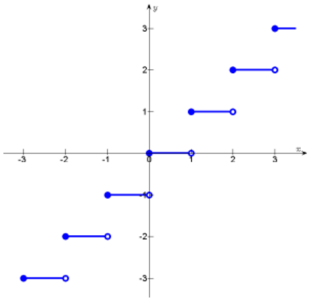
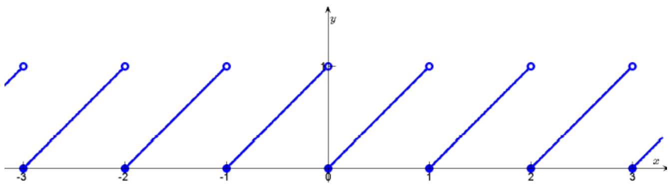
    -
    - (összegyülik az esővíz)
- Akkor mondjuk egy valós függvényre, egy $I \subseteq H$ intervallumon konkáv, ha bármilyen a,b ponton áthaladó szelő (egyenes) az f alatt fekszik.



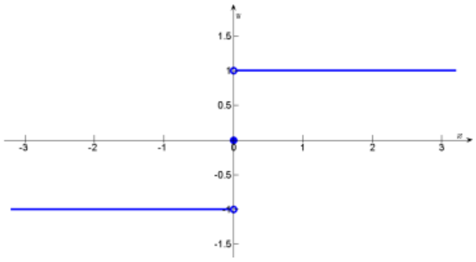
    -
    - (nem gyülik össze az esővíz)

Nevezetes függvények

DEFINÍCIÓ

- **Abszolút érték függvény**
  - $abs: R \to R \qquad x \to abs(x) := |x|$
  - 
  - ÉT: R, ÉK:$\{y \in R, y \geq 0\}$
  - Nem monoton (szakszonként monoton)
  - ÉT konvex
  - Miniuma $x = 0$
  - Páros
- **Egészrész fügvény**
  - Az a függvény, ahol az [x] jelöli az x valós szám egész részét, azaz a legnagyobb x-nél nem nagyobb egész számot.
  - $int: R \to Z \qquad x \to int(x) := [x]$
    - 
    - ÉT: R, ÉK: Z
    - Monoton növekvő
    - Minimuma és maximuma nincs
    - Nem páros és nem is páratlan függvény
- **Törtrész függvény**
  - Függvényt törtrész függvénynek nevezünk, ahol [x] jelöli az x valós szám egészrészét.
  - $frac: R \to [0, 1) \qquad x \to frac(x) = x - [x] := \{x\}$
    - 
    - ÉT: R, ÉK: [0,1)
    - Nem monoton
    - periodikus (p=1)
    - Minimuma y=0 (ebben az esetben azért y-t néz, mivel x helyen többször előfordul, y-on pedig csak egyszer
    - maximuma nincs (???)
    - Nem páros, nem páratlan
- **(Előjel) Szignum függvény**

- A szignum függvény utasitással értelmezett szignumfüggvénynek nevezzük.
- $sgn: R \to \{-1; 0; 1\}$ $x \to sgn(x) := 1,\ ha\, x > 0$ $x \to sgn(x) := 0,\ ha\, x = 0$ $x \to sgn(x) := -1,\ ha\, x < 0$



 -
 - ÉT: R ÉK: [1;-1]
 - Monoton növő
 - Páratlan
 - Periodikus függvény (p=1)
 - Minimuma y=-1, helye x_0 pontnál, ha $x_0 > 0$
 - Maximuma y=1 helye x_0 pontnál, ha $x_0 < 0$

Polinomok

DEFINÍCIÓ

- Egy $P: R \to R$: $x \to P(x) := a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ utasitással értelmezett **P** függvényt **polinomnak** nevezzük.
    - $n \in N$, illetve $a_n \in R$

TULAJDONSÁGOK

- Ha $a_n \neq 0$: P polinom pontosan n-ed fokú $n \in N$: P polinom fokszáma.
    - $deg(P) = n$
- $a_i (i = 0, 1,..., n)$: P **együtthatói**

DEFINÍCIÓ

- Legyen $P(z) := a_0 + a_1 z + ... + a_1 z^n$ $(z \in C)$, amelyekkel a P polinom felirható $P(z) = a_n(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)...(z - \lambda_n)\ (z \in C)$
    - $\forall \lambda_i\ (i = 1, 2,..., n)$ komplex számra minden p **zérushelyei**
        - $P(\lambda_i) = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ ...,\ n),$

DEFINÍCIÓ

- Legyen P(x) és Q(x) valós polinom.
    - $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$
    - $Q(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m$
- Ha $P = Q \Rightarrow n = m \Rightarrow a_n = b_n$

TULAJDONSÁGOK

- Bármilyen P és Q polinohoz létezik olyan S és R polinom, amelyre igaz, hogy $P = Q \cdot S + R, \quad deg(R) < deg(Q)$

Racionális törtfüggények

DEFINÍCIÓ

- Legyenek P és Q valós együtthatós polinómok, ahol
  - $Q \neq 0$
  - $\gamma_Q := \{\lambda_1, \dots \lambda_r\}$ a Q zérushelyeinek számának halmaza.
- Az $F: R \backslash \gamma_Q \to R$: $x \to F(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}$ utasitással értelmezett függvényt racionális törtfüggvénynek nevezzük.
  - A $\frac{P}{Q}$ racionális törtfüggvényt valódi racionális törtfüggvénynek nevezzük, ha $P < deg(Q)$

TULAJDONSÁGOK

- Maradékos soztást alkalmazva megkapjuk, hogy bármelyik $\frac{P}{Q} \in \partial$ racionális tört esetén létezik S, R, Q $\in P$, hogy $\frac{P}{Q} = S + \frac{R}{Q}$ ahol $S \in P$ és R/Q már valódi racionális törtfüggvény.
  - Emiatt bizonyos, rac. függvényekkel kapcsolatos kérdések vizsgálatában valódi racionális törtfüggvényekre szoritkozunk.

Függvények határértéke

DEFINÍCIÓ

- Akkor mondjuk, hogy $a \in \overline{R}$(Bármilyen nem valós szám) elem a $H \subseteq R$ valós számhalmaz torlódási pontja
  a) ha az a pont bármely környezete végtelen sok H-beli elemet tartalmaz:
     i) $\forall \varepsilon > 0$: $K_\varepsilon(\alpha) \cap H$ egy végtelen halmaz.
  b) Ha az a pont minden környezete tartalmaz legalább egy a-tól különböző H-beli pontot, azaz
     i) $\forall \varepsilon > 0$: $K_\varepsilon(\alpha) \cap H \backslash \{a\} \neq 0$.
  c) Ha létezik olyan H-beli nem stacionárius pontsorozat, melynek határértéke az a pont.

DEFINÍCIÓ

- A H halmaz torlódási pontjainak halmaza: H derivált halmaza
  - H'

DEFINÍCIÓ

- Egy sorozat stacionárius, ha csak véges sok egymástól különböző tagja van.

DEFINÍCIÓ

- A $H \in R$ halmaznak azokat a pontjait, amleyek nem tartoznak a H'-höz, a H halmaz izolált pontjainak nevezzük.
  - $a \in H,\ a \notin H'$

DEFINÍCIÓ

- Akkor mondjuk, hogy a nem üres $H \in R$ halmazon értelmezett $f: H \to R$ függvénynek az $a \in H'$ pontban van a határértéke, ha
  $\exists A \in \overline{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (K_\delta(a) \backslash \{a\}) \cap H$: $f(X) \in K_\varepsilon(A)$.
- Ez legfeljebb egyetlen határértékre teljesül, ami: $A \in \overline{R}$

DEFINÍCIÓ

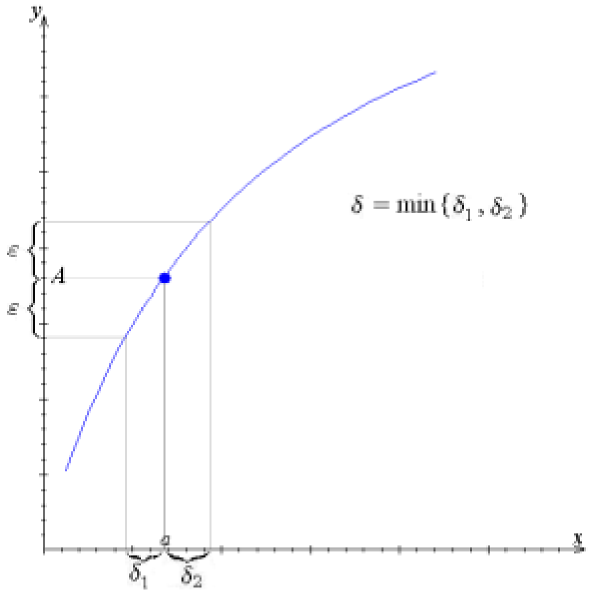
- A fenti értelmezésben szereplő $A \in \overline{R}$ elemet az f függvény a pontban vett határértékének nevezzük.
  - $lim\, f = A,\ \lim_{x \to a} f(x) = A,\ L_a(f) = A,\ f(x) \to A,\ ha\ x \to a$

Véges helyen véges határértékű

- Az $a, A \in R$ speciális esetben a definíció az alábbi alakban írható:
- Véges helyen vett véges határérték:

DEFINÍCIÓ

- $f: H \to R,\ a \in H' \cap R,\ A \in R,\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0,\ ha\ 0 < |x - a| < \delta,\ x \in H$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$



Függvény határérték

DEFINÍCIÓ

- Az $f: H \to R$ $(H \subseteq R)$ függvénynek az $a \in H'$ pontban akkor és csak akkor $A \in \overline{R}$ a határértéke, ha bármely olyan $(x_n, n \in)$ sorozatra, amelyre $x_n \in H,\ x_n \neq a\ (n \in N),\ \lim_{n \to \infty} x_n = a$, a függvényértékek $(f(x_n), n \in N)$ sorozatának is van határértéke és $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$.
    - Ez az **átviteli elv** képes arra, hogy kapcsolatba hozhassuk a sorozat határértékét a függvényhatárértékével.

Ezt a tényt, hogy ha $x \to 3$ akkor $f(x) \to 6$ úgy mondjuk, hogy a 3-ban a függvény határértéke 6 és így jelöljük:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

-

DEFINÍCIÓ

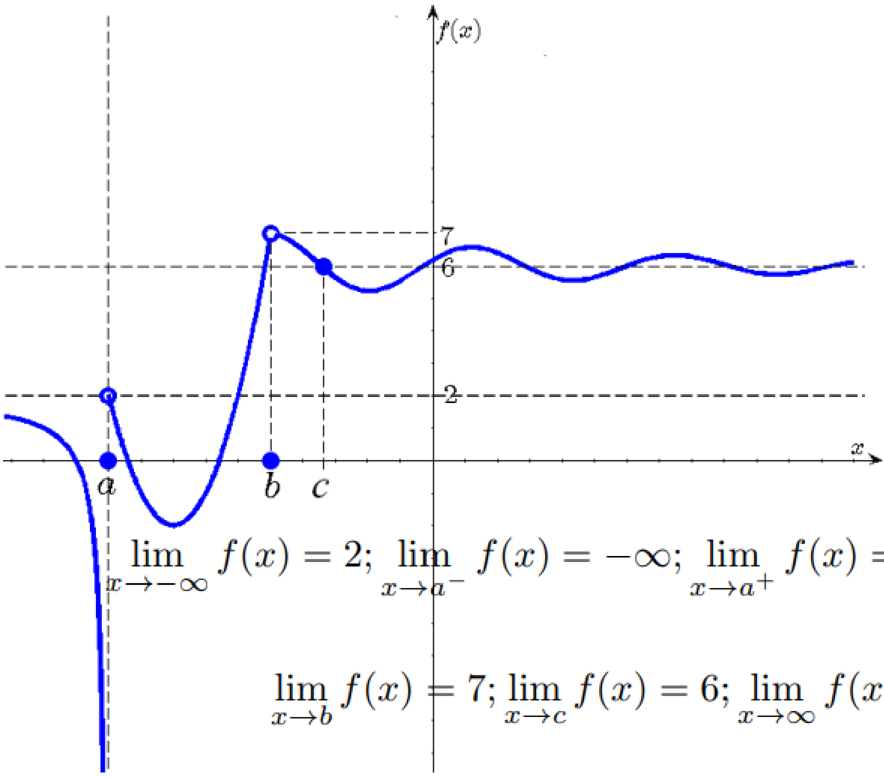
- Legyen $f: H \to R$ $(H \subseteq R)$ és tegyük fel, hogy az $a \in \overline{R}$ elem a $H_a^+ := H \cap (a, +\infty)$ halmaz torlodási pontja.
- Az f függvénynek az a helyen létezik jobboldali határértéke, ha f-nek a H_a^+ halmazra vonatkozó leszűkítésének létezik határértéke az a pontban.
- Ezt a határértéket f a-pontbeli jobboldali hatzárértékének nevezzük.
    - $lim\, f,\ \lim_{x \to a+} f(x),\ f(a+),\ L_{a+}(f).$

DEFINÍCIÓ

- Legyen $f: H \to R$ $(H \subseteq R)$ és tegyük fel, hogy az $a \in \overline{R}$ elem a $H_a^- := H \cap (-\infty, a)$ halmaz torlódási pontja.
- Az f függvénynek az a helyén létezik baloldali határértéke, ha f-nek a H_a^- halmazra vonatkozó leszűkítésének létezik határértéke az a pontban.
- Ezt a határértéket f a-pontbeli baloldali határtékének nevezzük.
    - $lim\, f,\ \lim_{x \to a-} f(x),\ f(a-),\ L_{a-}(f).$

TULAJDONSÁGOK

- Ha az a valós szám: $a \in H_a^+$ $és$ $a \in H_a^-$ halmazoknak a torlódási pontja.
- Ekkor f-nek az a helyen csakis akkor van határértéke, ha f-nek a-ban létezik a jobb-és baloldlai határértéke, és $\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = L_a(f).$



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2;\ \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty;\ \lim_{x\to a^+} f(x) = 2;\ \lim_{x\to a} f(x) = \nexists;$$

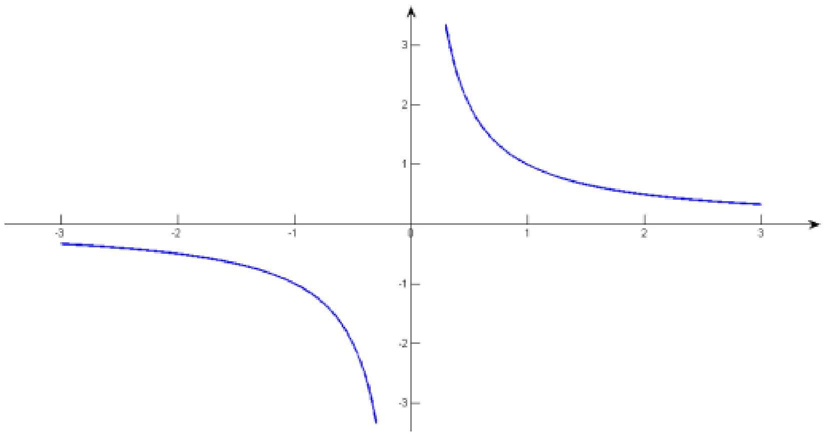
$$\lim_{x\to b} f(x) = 7;\ \lim_{x\to c} f(x) = 6;\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 6$$

("Kalkulus06eaHO.pdf")

Folytonosság

DEFINÍCIÓ

- Legyen $H \subseteq R$ és $f: H \to R$ a halmazon értelmezett függvény. Az f függvényt az $a \in H$ pontban folytonosnak nevezzük, ha
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon, a) > 0,\ \forall x \in H,\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$
- Az értelmezési tartományának $a \in H'$ torlódási pontjában a függvény akkor folytonos, ha
  - a) $a \in H$
  - b) $\exists A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ véges határérték
  - c) $f(a) = A$.
- Az értelmezési tartomány izolált pontjaiban a függvény folytonos.
- Azon pontokban, ahol a függvény nem értelmezett nincs értelme folytonosságról beszélni.
  - "Folytonos a függvény, ha ceruzám felemelése nélkül megrajzolható a grafikonja"
    - $f: R\backslash\{0\} \to R\backslash\{0\}$: $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény esetén a folytonosság naiv megközelítése sérül, mivel a függvény nullában nem értelmezett.



    - Ha jellemezni kell az $f(x) = \frac{1}{x}$ folytonosság szempontjából, akkor azt mondhatjuk, hogy a függvény teljes értelemzési tartományán folytonos.

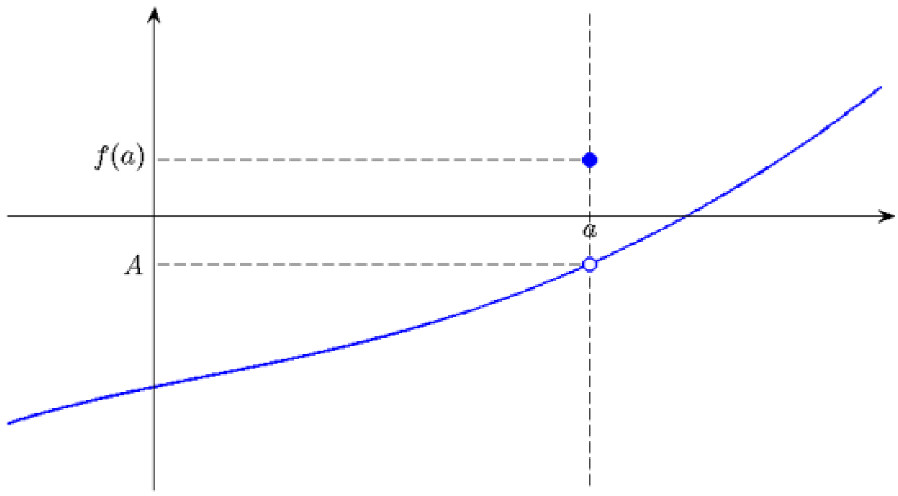
Szakadások típusai

DEFINÍCIÓ

- Ahol a függvény értelmezett, de nem folytonos azt szakadásnak nevezzük.

DEFINÍCIÓ

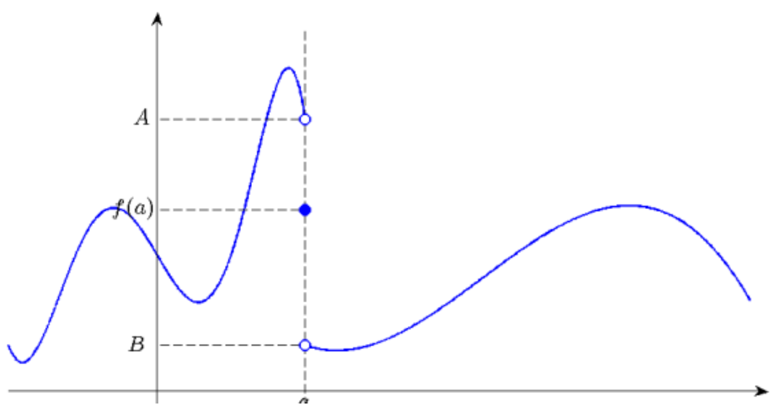
- Ha f az $a \in H$ pontban nem folytonos, de létezik véges határértéke a-ban (ekkor nyilván $(f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x))$, azt mondjuk, hogy a függvények megszüntethető szakadása van az a pontban.



-

DEFINÍCIÓ

- Ha f az $a \in H$ pontban nem folytonos és nem létezik véges határértéke a-ban, de léteznek véges egyoldali határértékek (amelyek ekkor nyílván nem egyenlők), azt mondjuk, hogy a függvénynek a-ban ugrása van A Δ számot az ugrás mértékének nevezzük, ahol
  - $\Delta := |\lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x)|$



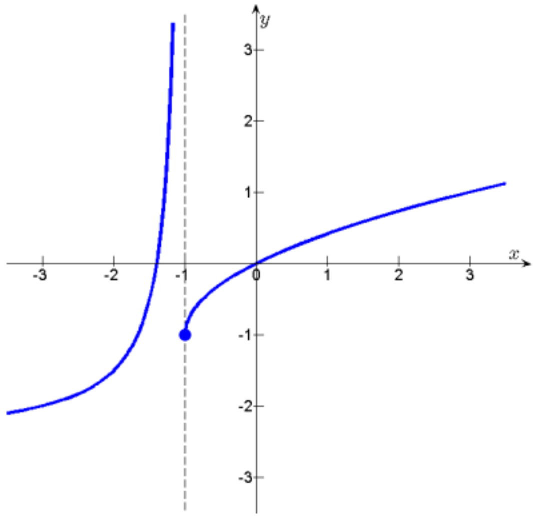
DEFINÍCIÓ

- **Az ugrást és a megszüntethető szakadást elsőfajú szakadásnak, minden más tippusú szakadást másodfajú szakadásnak nevezünk.**

DEFINÍCIÓ

- Ha az f függvény értelmezéi tartományának valamely $K \subseteq H$ részhalmazának minden pontjában folytonos, akkor azt mondjuk, hogy a K **halmazon folytonos**.

TULAJDONSÁGOK

- Az $f(x) = sgnx$ (szignum) függvénynek az $a = 0$ pontban ugrása van
- Egy olyan $f(x)$ függvényben, ahol:
  - $f(x) = x,\ ha\, x \neq 1$, és $f(x) =- 1,\ ha\, x = 1$ megszüntethető szakadása van.
- Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény a Értelmezési tartományon folytonos
- 

  - Az ábrában az $a = (-\ 1)$-ben másodfajú szakadása van
- Dirichlet-függvény, ahol $D(x) = \{1,\ ha\, x \in Q,\ vagy\ - 1,\ ha\, x \notin Q\}$
  - Sehol nem folytonos.

Műveletek folytonos függvényekkel

TULAJDONSÁGOK

- Legyen f, g két, a H halmazon értelmezett folytonos függvény ($f, g \in C_H$) és $\lambda \in R$ (valós számok halmaza) ekkor
    - $f + g$
    - $\lambda \cdot f$
    - $f \cdot g$ is folytonos a H-n.
    - Ha $g(x) \neq 0$ minden H halmazon értelmzezett elemén, akkor $\frac{f}{g}$ is folytonos H-n.

DEFINÍCIÓ

- Legyen $H \subseteq R$(valós számok) és $K \subseteq R$(valós számok).
    - Vegyünk két $f: H \to K$ és $g: K \to R$ függvényeket
- Függvények kompozícióján azt a $g \circ f$ függvényt értjük, melyeknek értelmezési tartománya a H halmaz és hozzárendelési szabálya
    - $x \to (g \circ f)(x) := g(f(x))$.

TULAJDONSÁGOK

- Az $f: H \to R$ (valós számok halmaza) függvény korlátos, ha értékkészlete korlátos, azaz ha létezik $k, K \in R$ (valós számok), hogy
    - $k \leq f(x) \leq K$ $(\forall x \in H)$.
        - Korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény korlátos

DEFINÍCIÓ

- Akkor mondjuk, hogy az $f: H \to R$(valós számok) függvénynek van maximuma, ha létezik $x^* \in H$, amelyre
    - $f(x^*) \geq f(x)$ $(\forall x \in H)$
- Akkor mondjuk, hogy $f: H \to R$(valós számok) függvényneik van minimuma, ha létezik $x_* \in H$, melyre:
    - $f(x_*) \leq f(x)$ $(\forall x \in H)$
    - A Weierstrass tétele kimondja, hogy véges, zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény felveszi szélsőértékeit.

DEFINÍCIÓ

- Az $f: H_1 \to H_2$ kölcsönösen egyértelmű leképezés inverz függvényén értjük azt az $\overline{f}$ függvényt, melynek értelmezési tartománya f értékkészlete ($f: H_1 \to H_2$), hozzárendelési szabálya
    - $\forall y \in H_2, \overline{f}: y \to x$, melyre $x \in H_1$, $f(x) = y$.
- Inverze azon függvényeknek van, amik két különböző x-hez különböző y-okat rendelnek. Kölcsönösen egyértelmű. Úgy is mondhatjuk, hogy rövidebben injektívek.
- Ha egy függvény invertálható, akkor értelmezési tartománya megegyezik inverzének értékkészletével, és értékkészlete az inverz értelmezési tartományával. Df=rf-1 és Rf=Df-1

DEFINÍCIÓ

- Ha $a, b \in R$(valós számok), és f: $(a, b) \to R$(valós számok) szigorúan monoton, folytonos függvény, akkor az f függvény $\overline{f}$: $(\alpha, \beta) \to (a, b)$ inverz függvénye is ugyanabban az értelemben szigorúan monoton és folytonos, ahol $\alpha = inf\{f(x),\ x \in (a, b)\}$ és $\beta = sup\{f(x), x \in (a, b)\}$.
  - Az inverz függvény grafikonja az eredeti függvény grafikonjának $y = x$ egyenesre vett tükörképe

DEFINÍCIÓ

- **Bolzano-tétel** kimondja, hogy:
  - Legyen f az $I \subseteq R$(valós számok) intervallumon értelmezett valósértékű folytonos függvény. Ekkor f értékkészletének bármely két eleme közé eső értékét felveszi.

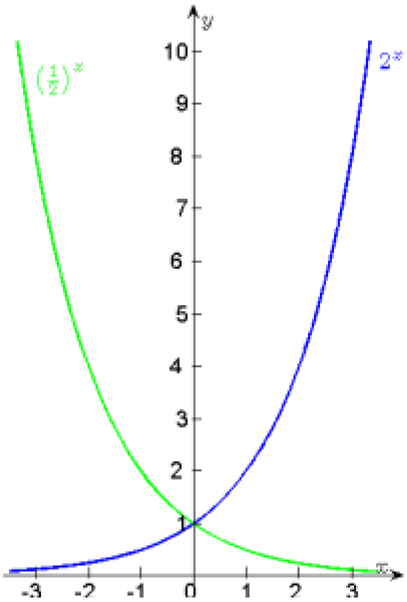
Nevezetes függvények és inverzeik

DEFINÍCIÓ

- Legyen $a > 0$ és $a \neq 1$ pozitív valós szám. Az a szám $r \in R$(valós szám) valós kitevős hatványán az alábbi értéket értjük
  - $a^r := \lim_{n \to \infty} a^{q_n}$, ahol ($q_n$, $m \in N$) tetszőleges r-hez tartó racionális számsorozat.
    - A fenti definició jó, azaz
      - A megadott határérték minden a és r esetén létezik
      - A határérték nem függ a (q_n, $m \in N$) sorozat választásától.
      - Ha $r \in Q$, akkor a^r korábbi értelmezéséhez jutunk.

Az exponenciális függvény

DEFINÍCIÓ

- Legyen $a > 1$ ($a > 0$ és $a \neq 1$) pozitív valós szám. Az $exp_a: R(valós\ szám) \rightarrow \{y \in R | y > 0\}\ x \rightarrow exp_a(x) := a^x$, utasítással értelmezett függvényt a alapú exponenciális függvénynek nevezzük.
- 

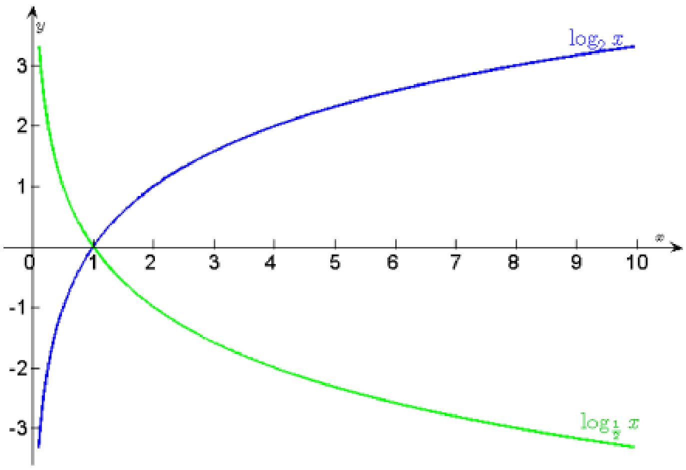
TULAJDONSÁGOK

- Értelmezési tartomány: R
- Értékkészlet R^+
- $a > 1$ esetén szigorúan monoton növekvő, $a < 1$ esetén szigorú monoton csökkenő
- nincs minimuma, sem maximuma
- Konvex
- A függvény nem páros, és nem is páratlan
- Nem periodikus
- Mindenhol folytonos (nincs szakadás)
- Az y tengelyt a (x=0, y=1) pontban metszi
- Mivel az exponenciális függvény, kölcsönösen egyértelmű, invertálható

Logaritmus függvény

DEFINÍCIÓ

- Legyen $a >$ és $a \neq 1$ pozitív valós szám.
- Az a alapú exponenciális függvény inverz függvényét a alapú logaritmus függvénynek nevezzük és a log_a szimbólummal jelöljük.



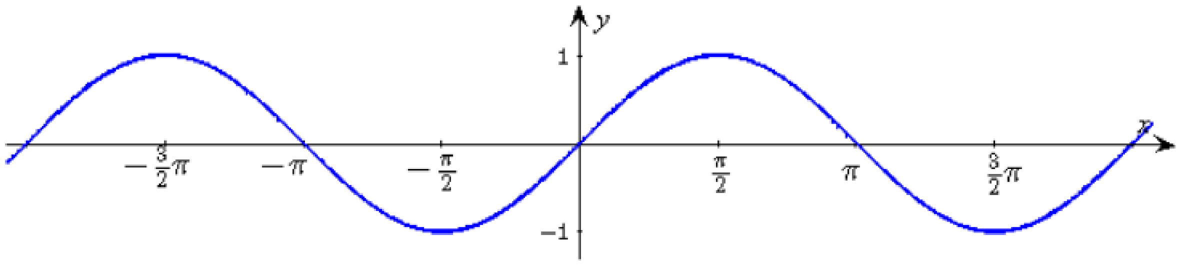
TULAJDONSÁGOK

- Értelmezési tartomány: $= \{x \in R | \; x > 0\}$
- értékkészlet: R
- $a > 1$ esetén szigorúan monoton növekvő, ha $a < 1$ akkor szigorúan monoton csökkenő
- Minimuma és maxiuma nincsen
- Ha $a > 1$ konkáv
- ha $a < 1$ konvex
- Zérushelye az 1
- Nem páros, és nem is páratlan
- Mindenhol folytonos
- y tengelyt nem metszi
- Nem periódikus
- Invertáltja van

Szinusz függvény

DEFINÍCIÓ

- A valós számokon értelmezett és az $x \in R$(valós szám) számhoz az x tengely pozitív felével x szöget bezáró egységvektor függőleges koordinátáját rendelő függvényt szinuszt függvénynek nevezzük.



TULAJDONSÁGOK

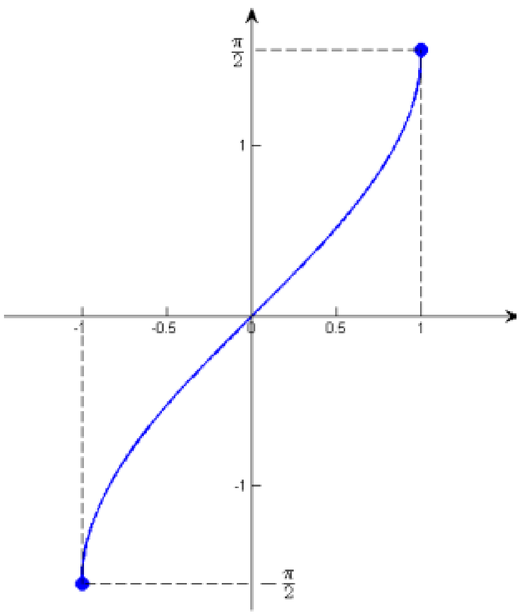
- Értelmezési tartomány: R
- Értékkészlet [1,-1]
- nem monoton
- $x_{min} =- \frac{pi}{2} + 2kpi$
- $y_{min} =- 1$
- $x_{min} = \frac{pi}{2} + 2kpi$
- $y_{min} = 1$
- zérushelyek: $kpi,\ k \in Z$(természetes számok)
- páratlan
- periodikus
  - Periodusa $P = 2pi$
- Mindenhol folytonos

Arkusz szinusz függvény

DEFINÍCIÓ

- A sin függvény több-egyértelmű leképezéssel keletkezett, így a teljes értelmezési tartományán nem invertálható.
    - A szinusz függvény a $[-\frac{pi}{2}, \frac{pi}{2}]$ intervallumon szigorúan monoton növő, így kölcsönösen egyértelmű, ezért ezen az intervallumon létezik inverze.

DEFINÍCIÓ

- A sin függvény $[-\frac{pi}{2}, \frac{pi}{2}]$ intervallumra vett leszűkítésének inverz függvényét arkusz szinusz függvénynek nevezzük, azaz $arcsin\, x$ jelenti azt a $-\frac{pi}{2} és \frac{pi}{2}$ közötti szöget, radiánban adva, melynek szinusza x.
- 

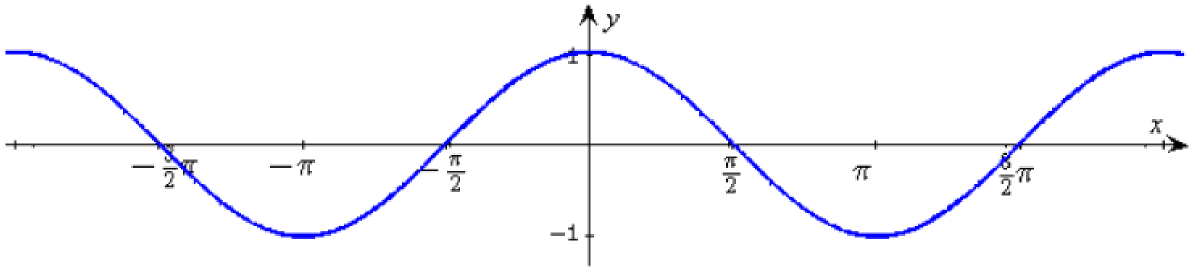
TULAJDONSÁGOK

- Értelmezési tartomány: (-0.5-0.5)
- Értékkészlet: [-pi/2-pi/2]
- monotonitás: folytonosan növő
- $x_{min} =- 0.5$
- $y_{min} =- \frac{pi}{2}$
- $x_{max} = 0.5$
- $y_{max} = \frac{pi}{2}$
- zérushely: (y=0) pontban metszi
- nem periodikus
- Páratlan
- Mindenhol folytonos

Koszinusz függvény

DEFINÍCIÓ

- A valós számokon értelmezett és az $x \in R$(valós szám) számhoz az x-tengely pozitív felével x szöget bezáró egységvektor vízszintes koordinátáját rendelő függvényt koszinusz függvénynek nevezzük.



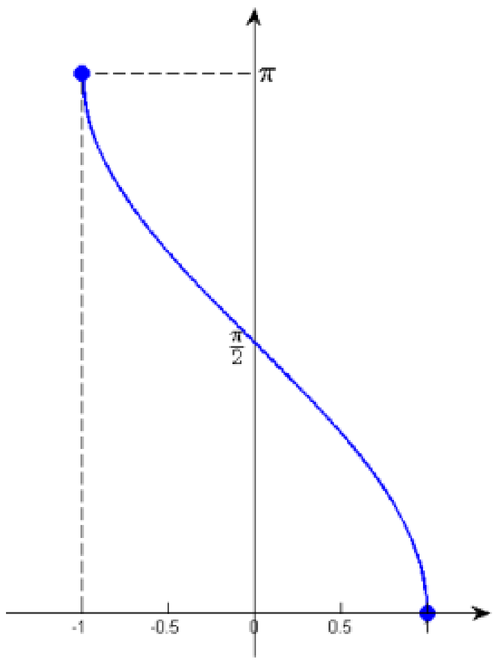
TULAJDONSÁGOK

- Értelmezési tartomány: R
- Értékkészlet $[-\ 1, 1]$
- Nem monoton
- $x_{min} = pi + 2kpi,\ k \in Z$(egész számok)
- $y_{min} =- 1$
- $x_{max} = 0 + 2kpi,\ k \in Z$(egész számok)
- $y_{max} = 1$
- Zérushelyek:
    - $x = \frac{pi}{2} + kpi,\ k \in Z$
- Páros
- Periodikus
    - Periodus értéke: $P = 2pi$
- Mindenhol folytonos

Arkusz koszinusz függvény

DEFINÍCIÓ

- A koszinusz függvény az $[0, pi]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, így kölcsönösen egyértelmű, ezért ezen az intervallumon létezik inverze.
- A cos függvény $[0, pi]$ intervallumra vett leszűkítésének inverz függvényét arkusz koszinusz függvénynek nevezzük, azaz $arccos\ x$ jelenti azt a 0 és pi közötti szöget, radiánba adva, amelynek koszinusza x.



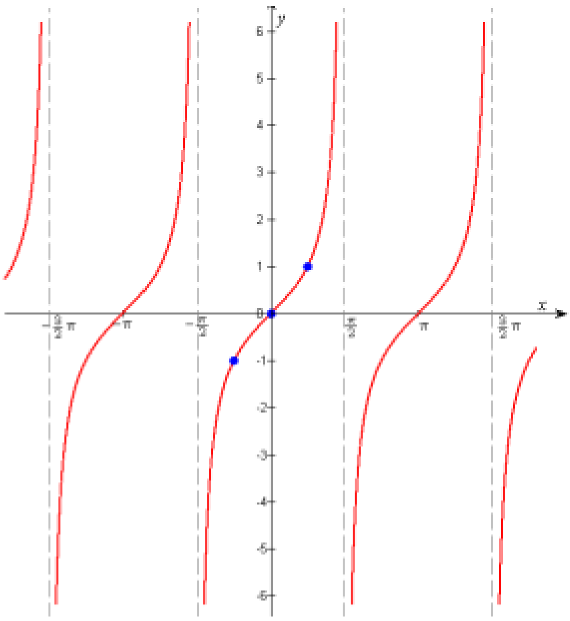
TULAJDONSÁGOK

- Értelmezési tartomány: $[-\ 1, 1]$
- Értékkészlet: [0,pi]
- $x_{max} =- 1\ y_{max} = pi$
- $x_{min} = 1\ y_{min} = 0$
- Zérushely $x\ =\ 1$-ben
- Nem páros és nem páratlan
- Nem periodikus
- Mindenhol folytonos

Tangens függvény

DEFINÍCIÓ

- Azt a függvényt, amelynek értelmezési tartománya: $R(valós\ számok) \setminus \{x \in R | x = \frac{pi}{2} + kpi,\ k \in Z(egész\ számok)\}$ és hozzárendelési utasítása $x \rightarrow tgx := \frac{sinx}{cosx}$ tangens függvénynek nevezzük



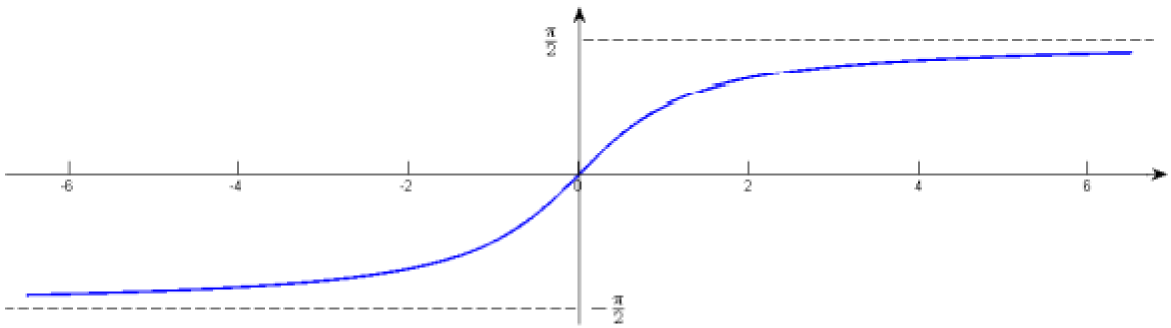
TULAJDONSÁGOK

- Értelmezési tartomány: $R(valós\ számok) \setminus \{x \in R | x = \frac{pi}{2} + kpi,\ k \in Z(egész\ számok)\}$
- Értékkészlet: R
- Nem monoton
- Nincs maximuma és nincs minimuma
- Páratlan
- Periodikus: $p = pi$
- zérushelyek: $x = 0 + kpi,\ k \in Z$ (egész számok)
- Értelmezési tartomány minden pontjában folytonos

Arkusz tangens függvény

DEFINÍCIÓ

- A tangens függvény a $(-\frac{pi}{2}, \frac{pi}{2})$ intervallumon szigorúan monoton növő, így kölcsönösen egyértelmű, ezért ezen az intervallumon létezik inverze.
- Az ezen intervallumon vett leszűkítésének inverzét az arkusz tangens függvénynek nevezzük, azaz $arctgx$ jelenti azt a $(-\frac{pi}{2}, \frac{pi}{2})$-beli szöget, radiánban adva, amelynek tangense x.



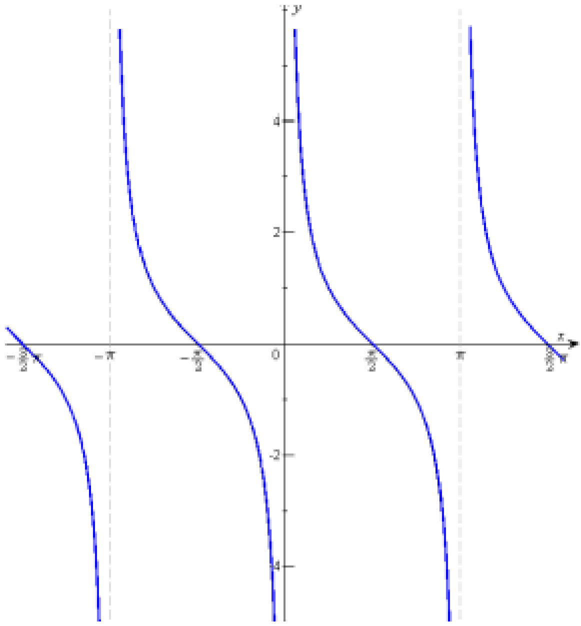
TULAJDONSÁGOK

- Értelmezési tartomány: R
- Értékkészlet: $(-\frac{pi}{2}, \frac{pi}{2})$
- Szigorúan monoton növő
- Nincs maximum és nincs minimum sem
- zérushely $x = 0$-ban
- Páratlan
- Nem periodikus
- Mindenhol folytonos

Kotangens függvény

DEFINÍCIÓ

- Azt a függvényt, amelynek értelmezési tartománya $R(valós\ számok)\backslash\{x \in R(valós)|x = kpi,\ k \in Z(egész)\}$ és hozzárendelési utasítása $x \rightarrow ctgx := \frac{cos\,x}{sin\,x}$ kotangens függvénynek nevezzük.



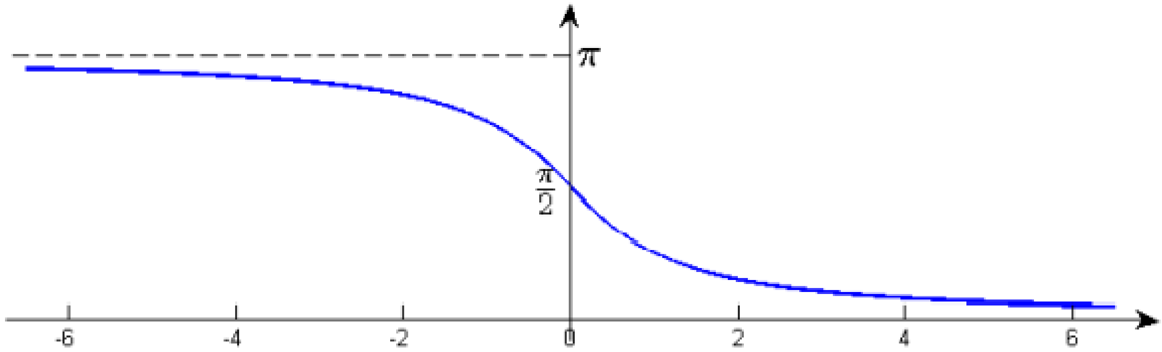
TULAJDONSÁGOK

- Értelmezési tartomány $R(valós\ számok)\backslash\{x \in R(valós)|x = kpi,\ k \in Z(egész)\}$
- Értékkészlet: R
- Nem monoton
- Nincs maximuma és minimuma
- Páratlan
- Periodikus
    - periódus: $P = pi$
- zérushelyek: $x = \frac{pi}{2} + kpi$
- Értelmezési tartomány minden pontjában folytonos

Arkusz kotangens függvény

DEFINÍCIÓ

- A ctg függvény a (0,pi) intervallumon szigorúan monoton csökkenő, így kölcsönösen egyértelmű, ezért ezen az intervallumon létezik inverze.
- Ezen intervallumon vett leszűkítésének inverz függvényét arkusz kotangens függvénynek nevezzük, azaz $arcctgx$ jelenti azt a $(0, pi)$-beli szöget, radiánban adva, amelynek kotangense x.



TULAJDONSÁGOK

- Értelmezési tartomány: valós számok halmaza
- Értékkészlete: (0, pi)
- szigorúan monoton csökkenő
- nincs maximum és nincs minimum
- Nem páros és nem is páratlan
- Nem periodikus
- Mindenhol folytonos

(“Kalkulus07eaHO.pdf”)

Függvények ábrázolása lineáris transzformációval

DEFINÍCIÓ

- Egy $f(x) = A \cdot f_0(a(x + b)) + B$ függvényt öt lépésben ábrázolhatunk:
  1. Ábrázoljuk az $f_0(x)$ nevezetes függvényt.
  2. Az $f_1(x) = f(ax)$ függvény grafikonjának x-tengely menti $\frac{1}{a}$-szoros nyújtásával kaphatjuk, azaz
     a. Az y-tengely pontjai fixen maradnak.
     b. A függvény azon pontjainak, melyeknek nem esnek az y-tengelyre úgy kapható a képe, hogy az y-tengelytől mért távolságukat $\frac{1}{a}$-szorosra változtatjuk.
     c. $a < 0$ esetben egy tengelyes tükrözést is elvégzünk az y-tengelyre.
  3. Az $f_2(x) = f_0(a(x + b))$ függvény grafikonját az $f_1(x)$ grafikonjának x-tengely menti eltolásával kapjuk, az eltolás mértéke: $- b$.

     Azaz, ha $b > 0$, akkor balra, ha $b < 0$, akkor pedig jobbra tolunk.
  4. Az $f_3(x) = A \cdot f_2(x)$ függvény grafikonját az $f_2(x)$ grafikonjának y-tengely menti A-szoros nyújtásával kapjuk. Negatív együttható esetén itt is tengelyes tükrözést is kell alkalmazni (az y-tengelyre)
  5. Az $f(x) = f_3(x) + B$ függvény grafikonját az $f_3(x)$ grafikonjának y-tengely menti eltolásával kapjuk, az eltolás mértéke: B.

     Azaz, ha $B > 0$ akkor fölfelé, ha $B < 0$, akkor lefelé tolunk
  - A feladatok esetében sokszor nekünk kell előállítani az $f(x) = A \cdot f_0(a(x + b)) + B$ alakot.

Függvények értelmezési tartománya

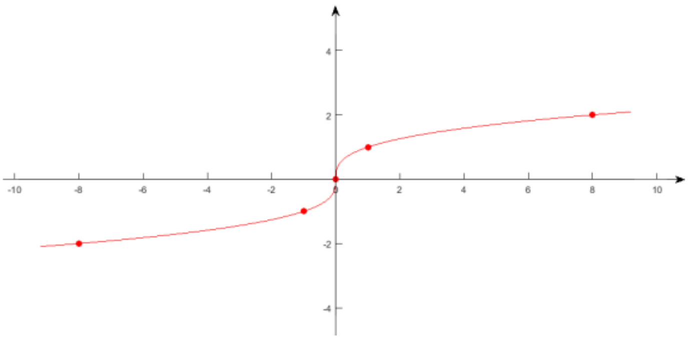
TULAJDONSÁGOK

- Az értelmezési tartomány vizsgálata során elegendő a következő három problémás függvényosztályhoz tartozó kikötést megtenni, amennyiben a függvény tartalmazza valamelyik típusú függvényrészletet:
  1. törtfüggvény $\frac{a}{b} \Rightarrow b \neq 0$
  2. gyök-függvény $\sqrt[2k]{a},\ k \in N\backslash\{0\} \Rightarrow a \geq 0$
  3. logaritmus függvény $log_{a}b \Rightarrow a > 0,\ a \neq 1,\ és\ b > 0.$
- Lineáris transzformációk során csak az x-tengely menti transzformációk változtathatják meg a függvény értelmezési tartományát. (azaz paraméterek közül csak a és b van rá hatással!)

Első feladat

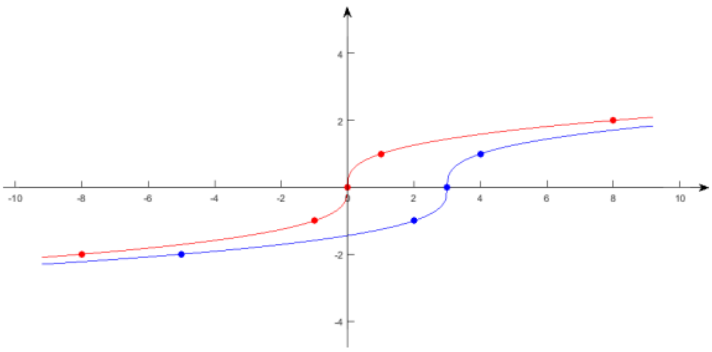
- Ábrázoljuk a következő függvényt nevezetes függvény grafikonjából kiindulva lineáris transzformációt alkalmazva: $f(x) = \sqrt[3]{x - 3} + 2$
- Ezt a függvény három lépésben fogjuk ábrázolni:

1. $f_1(x) = \sqrt[3]{x}$ Pirossal jelölöm



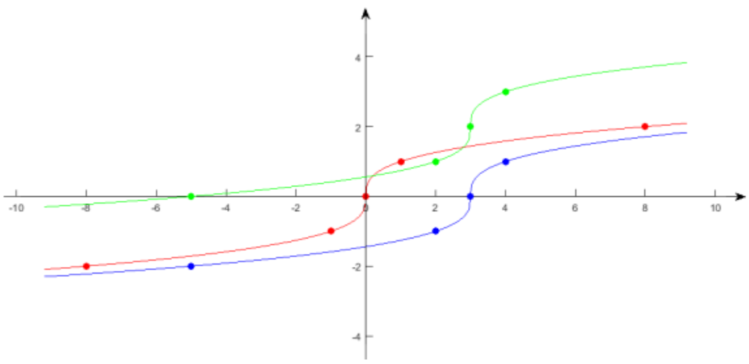
2. $f_2(x) = \sqrt[3]{x - 3}$ Kékkel jelölöm

eltolás jobbra 3-mal



3. $f_3(x) = f(x) = \sqrt[3]{x - 3} + 2$ Zölddel jelölöm

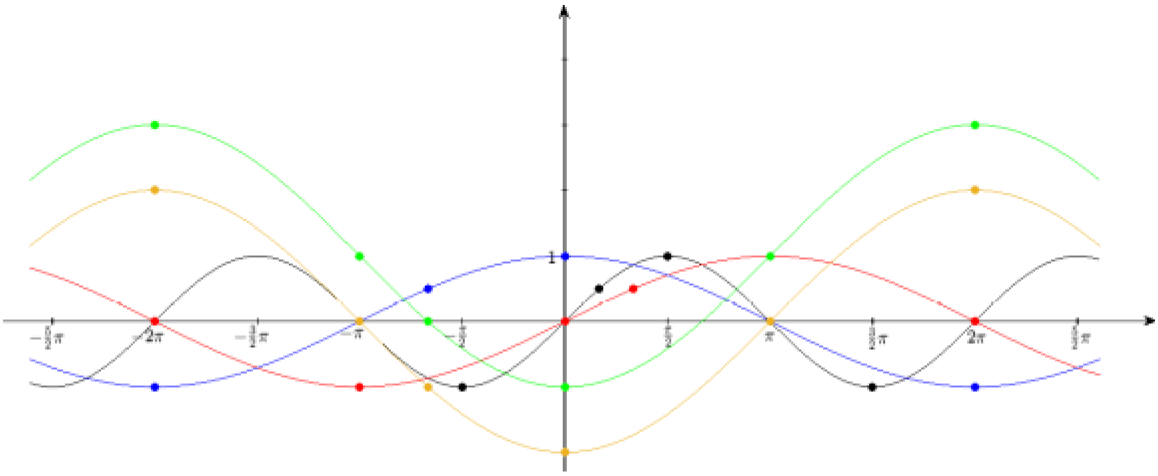
eltolás fölfelé 2-vel



Második Feladat

- Ábrázoljuk az alábbi függvényt nevezetes függvény grafikonjából kiindulva lineáris transzformációt alkalmazva: $f(x) = -2sin(\frac{1}{2}x + \frac{pi}{2}) + 1$
    - Érdemes átírni egy könyebb formába: $-2sin(\frac{1}{2}(x + pi))$
- A függvényt öt lépésben ábrázoljuk:

1. $f_1(x) = sin\, x$ Feketével jelölöm
2. $f_2(x) = sin(\frac{1}{2}x)$ Pirossal jelölöm
3. $f_3(x) = sin(\frac{1}{2}(x + pi))$ Kékkel jelölöm
4. $f_4(x) = -2sin(\frac{1}{2}x + \frac{pi}{2})$ Sárágval jelölöm
5. $f_5(x) = -2sin(\frac{1}{2}x + \frac{pi}{2}) + 1$ Zölddel jelölöm

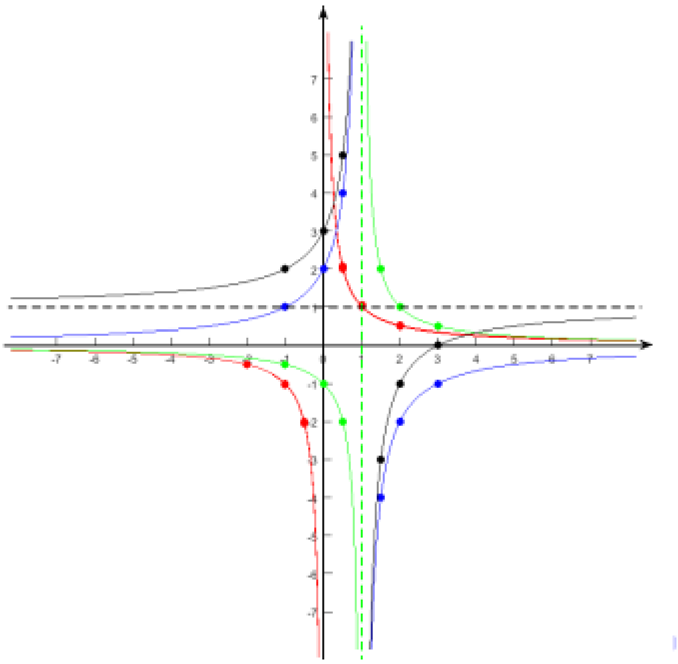


Értelmezési tartomány= R (valós számok)

Értékkészlet= $\{y|y \in R(Valós\ számok), \ -1 \leq y \leq 3\}$

Harmadik feladat

- Ábrázoljuk az alábbi függvényt nevezetes függvény grafikonjából kiindulva lineáris transzformációt alkalmazva: $f(x)\ = \frac{x-3}{x-1} = \frac{x-1-2}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{-2}{x-1} =- \ 2 \cdot \frac{1}{x-1} + \ 1$
- A függvény négy lépésben ábrázoljuk:
    1. $f_1(x)\ = \frac{1}{x}$ Pirossal jelölöm
    2. $f_2(x)\ = \frac{1}{x-1}$ Zölddel jelölöm
    3. $f_3(x)\ =-\ 2 \cdot \frac{1}{x-1}$ Kékkel jelölöm
    4. $f_4(x)\ =\ 2 \cdot \frac{1}{x-1} +\ 1$ Feketével jelölöm



Szaggatott vonal a segédlet: az a görbe, amit egy függvény nem ér, csak megközelíti.

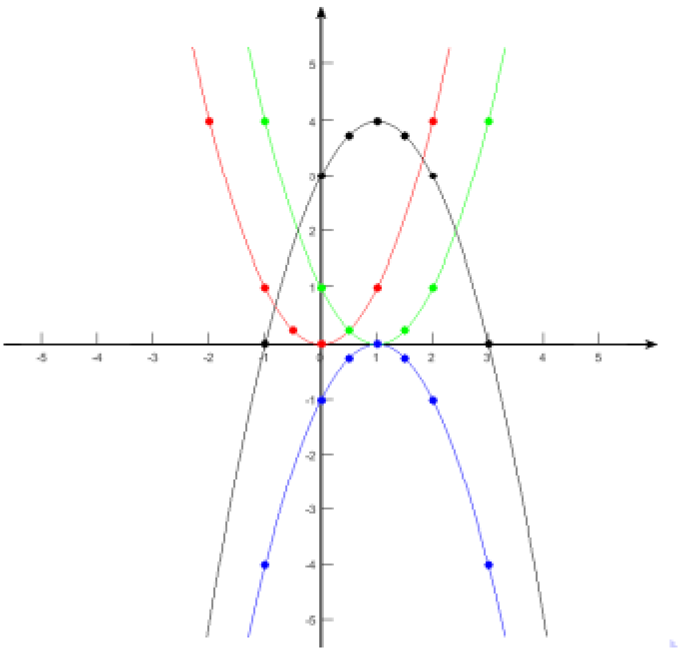
Értelmezési tartmoány: $R\backslash\{1\}$

Értékkészlet: $R\backslash\{1\}$

Negyedik feladat

- Ábrázoljuk az alábbi függvényt nevezetes függvény grafikonjából kiindulva lineáris transzformációt alkalmazva: $f(x) = -x^2 + 2x + 3 =- (x^2 - 2x) + 3 =$ $=- (x^2 - 2x + 1) + 1 + 3 =- (x - 1)^2 + 4$
- A függvényt négy lépésben ábrázoljuk.

1. $f_1(x) = x^2$ Pirossal jelöltem
2. $f_2(x) = (x - 1)^2$ Zölddel jelöltem
3. $f_3(x) = -(x - 1)^2$ Kékkel jelöltem
4. $f_4(x) =- (x - 1)^2 + 4$ Feketével jelöltem



Értelmezési tartomány: R

Értékkészlet:$= \{y |\, y \in R,\ y \leq 4\}$

("Kalkulus08eaHO.pdf")

Differenciálhatóság

DEFINÍCIÓ

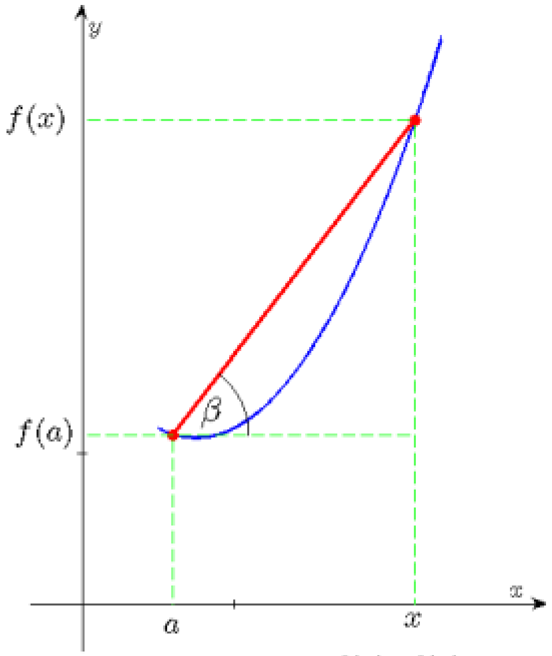
- Akkor mondjuk, hogy az $a \in H \subseteq R(valós)$ pont halmaz belső pontja, ha létezik a-nak olyan $K_r(a)$ környezete, ami $K_r(a) \in H$

DEFINÍCIÓ

- Amikor az $a \in H$ (valós halmaz) egy belső pontja. Az $f: H \to R(valós)$ függvény a pontbeli **differenciálhányadosán** (vagy különbségi hányadosán) az alábbi utasítással értelmezett függvényt értjük:
  - $(\Delta_a f)(x) := \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $(x \in H\backslash\{a\})$.

DEFINÍCIÓ

- **A differenciálhányados geometriai jelentése a következő:**
  - Legyen $H = \{\alpha, \beta\}$. Tehát az $f: (\alpha, \beta) \to R(valós)$ függvény $a \in (\alpha, \beta)$ pontbeli differenciálhányadosa az x helyen, megadja az f függvény grafikonjának $(a, f(a))$ és $(x, f(x))$ pontjait összekötő szelő meredekségét (iránytangensét).



$$m = \mathrm{tg}\beta = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

  -
  - $m = \frac{amennyit\ fölfele\ megy}{amennyit\ előre\ megy}$

DEFINÍCIÓ

- A differenciálhányados egy fizikai jelentése:

- Ha az $f: (\alpha, \beta) \to R(valós)$ függvény valamely egyenesvonalú mozgás út-idő függvénye, akkor a $(\Delta_a f)(x)$ szám az a és x időpillanatok közötti átlagsebességet jelenti.

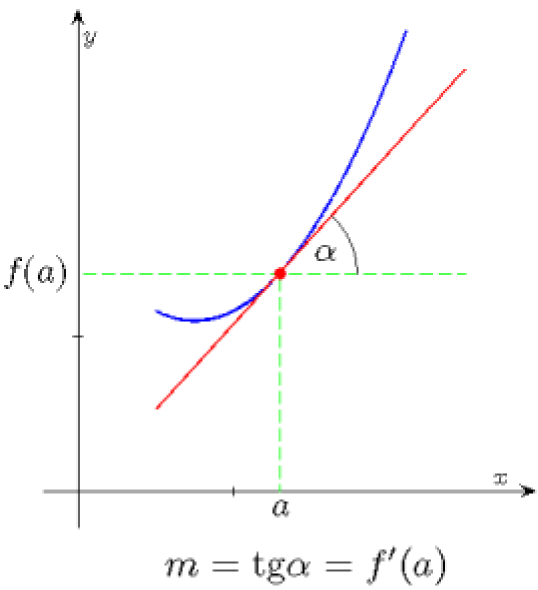
DEFINÍCIÓ

- Akkor mondjuk, hogy az $f: H \to R(valós)$ függvény az $a \in H$ belső **pontban differenciálható**, ha az $\Delta_a f$ differenciahányados függvénynek létezik a-ban véges határértéke. **Ezt a határértéket az f függvény a pontbeli deriváltjának nevezzük.**
  - $f'(a) = \frac{df}{dx}(a) := \lim\limits_{x \to a} (\Delta_a f)(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
    - Az x és az a közeledik, és mivel közelít, ezért a határértéke.
    - Az érintők meredeksétge a szelők meredekségének a határértéke.
  - Érdemes egy ekvivalens formulával számolni:
    - $f'(a) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$.

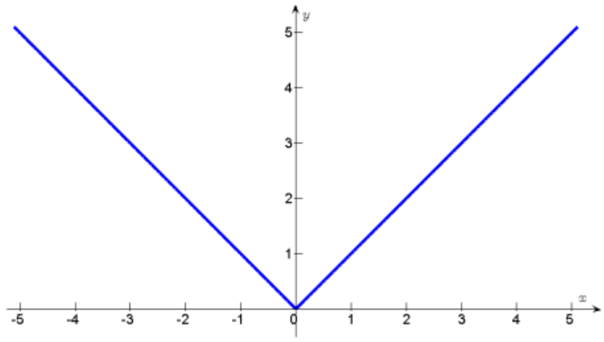
DEFINÍCIÓ

- Akkor mondjuk, hogy az $f: (\alpha, \beta) \to R(valós)$ függvénynek az $(a, f(a))$ pontjában van érintője, ha az f függvény az a pontban differenciálható. Az $(a,\ f(a))$ ponton áthaladó $m = f'(a)$ meredekségű egyenest az f grafikonjának $(a,\ f(a))$ pontjához tartozó érintőjének nevezzük. Az érintő egyenlete:
  - $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$.

DEFINÍCIÓ

- A **differenciálhányados** geometriai jelentése:
  - Az $f: (\alpha, \beta) \to R(valós)$ függvény $a \in (\alpha, \beta)$ pontbeli differenciálhányadosa megadja az f függvény grafikonjának $(a, f(a))$ pontjához tartó húzható érintő meredekségét (iránytangensét).
  - 

DEFINÍCIÓ

- A differenciálhányados egy fizikai jelentése:
  - Ha az f: $(\alpha, \beta) \rightarrow R(valós)$ függvény valamely egyenesvonalú mozgás út-idő függvénye, akkor a $f'(a)$ szám az a időpillanathoz tartozó pillanatnyi sebességét jelenti.
    - Ha f differenciálható az a pontban, akkor ott folytonos.
    - A **folytonosság**, a **differenciálhatóságnak szükséges**, de nem elégséges feltétele.
      - Az $f(x) = |x|$ függvény az $x = 0$ helyén folytonos, de nem differenciálható.
      - 

TULAJDONSÁGOK

- Az f: $H \rightarrow R(valós)$ függvény az értelmezési tartományának a belső pontjában akkor és csak akkor differenciálható, ha létezik olyan A valós határérték és olyan ε: $H \rightarrow R(valós)$ a-ban folytonos függvény, melyre $\varepsilon(a) = 0$ illetve amellyel
  - $f(x) - f(a) = A \cdot (x - a) + (x - a) \cdot \varepsilon(x)\ (x \in H)$.
    - Ezzel alkalmas lesz arra, hogy differenciálhányadost többváltozós függvények esetén is értelmezzünk.

Deriválási játékszabályok

DEFINÍCIÓ

- Konstans függvények deriváltja nula.
    - (konstans függvénynek nincs meredeksége.)

DEFINÍCIÓ

- Ha az f függvény differenciálható az a helyen és c valós szám, akkor a $g = c \cdot f$ függvény is differenciálható az a helyen és
    - $g'(a) = c \cdot f'(a)$
        - mert: $g'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{c \cdot f(x) - c \cdot f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} c \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a} =$
          $= c \cdot \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c \cdot f'(a)$

DEFINÍCIÓ

- Ha f és g függvények deriválhatók az a helyen, akkor $h = f + g$ függvény is differenciálható az a helyen és
    - $h'(a) = f'(a) + g'(a)$.
        - mert: $h'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{(f(x)+g(x))-(f(a)+g(a))}{x-a} =$
          $\lim\limits_{x \to a} \frac{(f(x)-f(a))+(g(x)-g(a))}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a) + g'(a)$

DEFINÍCIÓ

- Ha f és g függvények deriválhatók az a helyen, akkor $h = f - g$ függvény is differenciálható az a helyen és
    - $h'(a) = f'(a) - g'(a)$.

TULAJDONSÁGOK

- $h'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
    - első és utolsó tagot deriváljuk, a többit békén kell hagyni.

DEFINÍCIÓ

- Ha f és g függvények differenciálhatók az a helyen és $g(a) \neq 0$, akkor $h = \frac{f}{g}$ függvény is differenciálható az a helyen és
    - $h'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$.

TULAJDONSÁGOK

- $\frac{1}{g}$ függvény deriváltja
    - $(\frac{1}{g})'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$
- Az $\frac{f}{g}$ deriváltjára

- $(\frac{f}{g})'(a) = f(a) \cdot \frac{g'(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$.

DEFINÍCIÓ

- Ha az f függvény differenciálható az a helyen és g függvény differenciálható az $f(a)$ helyen, akkor $h = f \circ g$ függvény is differenciálható az a helyen és $h'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.
  - # SOHA NE FELEDD A LÁNC-SZABÁLYT!

DEFINÍCIÓ

- Ha egy f függvénynek létezik az $\overline{f}$ inverze, és f differenciálható az a helyen, $f'(a) \neq 0$ és $\overline{f}$ folytonos az $f(a)$ helyen, akkor az $\overline{f}$ inverzfüggvény differenciálható az $f(a)$ helyen és
  - $\overline{f}'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.
    - Gyakran használjuk az alábbi alakban:
      - Tegyük fel, hogy a f függvénynek létezik inverz függvény folytonos értelmezési tartományának b pontjában és az eredeti függvény differenciálható az $a = \overline{f}(b)$ helyen és $f'(\overline{f}(b)) \neq 0$, akkor $\overline{f}$ függvény differenciálható b-ben és $\overline{f}'(b) = \frac{1}{f'(\overline{f}(b))}$.

Konstans-függvény deriváltja

DEFINÍCIÓ

- Az $f(x) = c$ konstans függvény minden valós helyen differenciálható és a deriváltja 0.

Hatvány-függvény deriváltja

DEFINÍCIÓ

- Az $f(x) = x^n$, $n \in N(term.)$ függvény minden valós helyen differenciálható és a deriváltja $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
    - A határmenet segítségével a fenti tétel kiterjeszthető racionális kitevőkre.

Logaritmus függvény deriváltja

DEFINÍCIÓ

- Az $f(x) = lnx$ függvény az értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható és $(lnx)' = \frac{1}{x}$.
    - ln az e alapú logaritmus.

TULAJDONSÁGOK

- $Az\ f(x) = log_a x,\ (a > 0,\ a \neq 1)$ függvény értelmezési tartományának minden pontjába differenciálható és $(log_a x)' = \frac{1}{x\, ln\, a}$.
- $Az\ f(x) = a^x$ függvény minden valós helyen differenciálható és $(a^x)' = a^x \cdot ln\, a$.

Exponenciális-függvény deriváltja

DEFINÍCIÓ

- Az $f(x) = a^x$ függvény szigorúan monoton ezért invertálható. A függvény inveze az $\overline{f}(y) = log_a y$ függvény. Az inverz függvény deriválási szabálya alapján:
    - $f'(x) = \frac{1}{\overline{f}'(f(x))} = \frac{1}{(log_a y)'|_{y=a^x}} = \frac{1}{\frac{1}{y \cdot ln\, a}|_{y=a^x}} = a^x \cdot ln\, a.$
        - Speciális esetenként ($a = e\ esetén$) kapható, hogy az $f(x) = e^x$ függvény minden valós helyen differenciálható és $(e^x)' = e^x$.

Trigonometrikus-függvények deriváltja

DEFINÍCIÓ

- Az $f(x) = sin\,x$ függvény minden vaós helyen differenciálható és $(sin\,x)' = cos\,x$.
- Az $f(x) = cos\,x$ függvény minden valós helyen differenciálható és $(cos\,x)' =- sin\,x$.
- Az $f(x) = tg\,x$ függvény értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható és $(tgx)' = \frac{1}{cos^2x}$.
    - Sokszor praktikusabb felírni az $f(x) = tgx$ függvény deriváltját az alábbi alakban felírni:
        - $(tgx)' = \frac{1}{cos^1x} = \frac{cos^2x+sin^2x}{cos^2x} = 1 + \frac{sin^2x}{cos^2x} = 1 + tg^2x$.
        - Az $f = (x) = ctgx$ függvény az értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható és $(ctgx)' =- \frac{1}{sin^2x}$.
- Azonban még praktikuasbb a következő formula: $(ctgx)' =- (1 + ctg^2x)$.

Ciklometrikus-függvények deriváltja

DEFINÍCIÓ

- Az inverz függvény deriválási szabályának felhasználásával igazolhatók a következő tételek:
    - Az $f(x) = arcsin\, x$ függvény a $(-\ 1, 1)$ intervallumon differenciálható és $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
    - Az $f(x) = arccosx$ függvény a $(-\ 1, 1)$ intervallumon differenciálható és $f'(x) =- \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
    - Az $f(x) = arctgx$ függvény a teljes értelmezési tartományán differenciálható és $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- Az $f(x) = arcctgx$ függvény a teljes értelmezési tartományán differenciálható és $f'(x) =- \frac{1}{1+x^2}$.

Deriválások (összegezve)

TULAJDONSÁGOK

Függvények	*Derivált*	*Függvény*	*Függvény Művelet*
C	0	$(c \cdot f)'$	$c \cdot f'$
a^C a^X	Ca^{C-1} $a^X \cdot \ln a$	$(f \pm g)'$	$f' \pm g'$
e^x	e^x	$(f \cdot g)'$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$\sin x$	$\cos x$	$(\frac{f}{g})'$	$\frac{f'_0 - fg'}{g^2}$
$\cos x$	$-\sin x$	$(f \circ g)' = (f(g(x))'$	$f'(g(x)) \cdot g(x)'$
tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$		
$\log_x a$ $\ln x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$ $\frac{1}{x}$		
$\sin^{-1} x\ (arcsin\ x)$	$\sqrt{1 - x^2}$		
$tg^{-1} x\ (arctg\ x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$		
$ctg^{-1} x\ (arcctg\ x)$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		

Jó seggelést!

Gyakorlat

Feladat sémák:

Határérték számítás (Lim)

- Először is, érdemes megfigyelni, hogy a sorozat növekvő vagy csökkenő, illetve, hogy szigorúan?
- Ha a sorozat növő, akkor a sorozatban a legalacsonyabb érték az első elem volna.
- Ellenkező esetben, a csökkenő sorozatban a legmagasabb elem az első elem.
- Érdemes behelyettesíteni az n-ek helyére az iterációt, ahol aztán megkapjuk néhány eset végeredményét, ezáltal lehet egy approximációnk.

Monotonitás

- A sorozat n + 1. eleméből ki kell vonnunk a sorozat n. elemét!
- $a_{n+1} - a_n$ < vagy > 0 | $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ < vagy > 0 (ezt akkor érdemes ha faktoriális vagy hatványod van)
- Ezt már egyenlet formába lehet felírni. Ameddig csak tudjuk végezzük el az egyelet megoldást a bevált technikákkal.
- Ha pedig eljutunk a végső lépésre, és képesek vagyunk eldönteni, hogy kisebb vagy nagyobb mint nulla, akkor döntést hozhatunk.
- Ha $a_{n+1} - a_n < 0$, tehát $a_{n+1} < a_n$ teljesül minden n eleme N esetén, akkor **szigorúan monoton csökkenő**.
- Ha an <= an + 1, akkor minden n-re igaz, hogy szigorúan monoton növekvő.
- Azonban ha nem monoton sorozat esetéről beszélünk, akkor érdemes legalább három elemét megvizsgálni.
- PÉLDA (4.példa):
- $(\frac{n}{2n-7},\ n \in N)$ sorozat nem lehet monoton, mert
- $b_0 = 0 > b_1 = \frac{-1}{5} > b_2 = -\frac{2}{3} > b_3 = -3 < b_4 = 4$
- Tisztán látszik, hogy $b_2 > b_3 < b_4$.
- Vagyis megoldásként felírható a $b_2\, b_2 b_2$ vagy a $b_2 b_2 b_2$ hogy a sorozat nem monoton!
- Mivan, hogy ha egy bizonyos indextől kezdve monoton egy sorozat?

Konvergencia vizsgálat

- Összegük nem fontos, elegendő csupán határértéket kiszámítani és eldönteni (de ezt a feladat is mondja)
- Ilyenkor támaszkodhatunk a nevezetes sorozatokra, valamint a konvergencia kritériumokra!

Átviteli elv

- Be kell seggelni az alábbi bizonyítást:
  - $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall x_n \in H,\ x_n \neq a\ (n \in N(term))$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \qquad \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A.$
- Valószínűleg, ha kapunk egy feladatot, legtöbbször végtelenhez vagy minusz végtelenhez fog tartani valami. Azonban ha kapunk egy értéket, akkor érdemes behelyettesíteni először.

Miután behelyettesítettünk, és nem egy határozatlansági esetet kaptunk, akkor meg is van a határérték.

- A határozatlansági esetek a következők:
- $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$,,

1. Példa: (Felső, alsó határ)

Határozzuk meg az alábbi számhalmazok alsó és felső határát!

A = $\left\{\frac{(-1)^{n}}{n}:\ 0 < n \in N\right\}$

B = $\left\{\frac{x}{y}:\ 0 < x < 1;\ 0 < y < x\right\}$

A Sejtés: Infimum A = -1 ((-1)1 / 1 = -1)

Szuprémum A = ½

Észrevétel: Ha n páros, akkor $\frac{(-1)^{n}}{n}$> 0, illetve ha n páratlan akkor $\frac{(-1)^{n}}{n}$ < 0.

A halmaz elemeit két osztályra bontjuk (Osztály: olyan részhalmazok összessége, melyek páronként **diszjunktak** (nincs közös elemük) és egyesítésük visszaadja az eredeti halmazt.) tehát

A_1 = $\left\{\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}:\ k \in N\right\}$ és A_2 = $\left\{\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}:\ k \in N\right\}$

B sejtés: Szuprémum: B = ∞.

Infimum: B = 1.

Minden K ∈ R_+ esetén az archimédeszi axióma kimondja, hogy minden számnál, van nagyobb természetes szám: K < n * 1

A halmaz tehát nem korlátos, vagyis szuprémum B = ∞.

Az egy az jó alsó korlát, mivel a, mivel a számlálóban az x ,(a feladat szerint) nagyobb mint az y a nevezőben, így minden esetben: $\frac{számláló}{nevező} = \frac{x}{y} > 1$

2. példa: (sorozat monotonitás)

írjuk fel a sorozat 0.,1.,2.,3.,5.,10. elemét. Vizsgáljuk meg az $\alpha = (\frac{1-2n}{2+2n}, n \in N)$ sorozatot monotonitás szempontjából!

$a_1 = \frac{1-2*0}{2+2*0} = \frac{1}{2}$ $a_2 = -\frac{1}{4}$ $a_3 = -\frac{1}{2}$ $a_5 = -\frac{3}{4}$ $a_{10} = -\frac{19}{22}$

Sejtés: Szigorúan monoton (Ha nincs függvényében “vízszintes” szakaszok) csökkenő

$a_{n+1} - a_n = \frac{1-2(n+1)}{2+2(n+1)} - \frac{1-2n}{2+2n}$ = //felbontjuk a zárójelet

$= \frac{1-2n-2}{2+2n+1} - \frac{1-2n}{2+2n}$ = //Elvégezzük a bal oldalon, amit lehet.

$= \frac{-2n-1}{2n+4} - \frac{1-2n}{2+2n}$ =

$= \frac{(2+2n)(-1-2n)}{(2+2n)(4+2n)} - \frac{1-2n}{2+2n}$ = //Bővítjük a törtet, hogy megkapjuk a nevezük legkisebb közös többszörösét

$= \frac{(2+2)(-1-2n)}{(4+2n)(2+2n)} - \frac{(4+2n)(1-2n)}{(4+2n)(2+2n)}$ = //Kommutativitás miatt felcserélhetők a szorzatok | Összevonjuk a kifejezéseket

$= \frac{(2+2)(-1-2n)-(4+2n)(1-2n)}{(4+2n)(2+2n)}$ = //Bontsuk fel a zárójelet, hogy egyszerűsítsünk. Nevezőben emeljük ki a kettőt!

$= \frac{-2-4n-2n-4n^2-(4-6n+2n-4n^2)}{2(2+2n)(2+2n)} =$

$= \frac{-2-4n-2n-4n^2-4+6n+4n^2}{2(2+2n)(2+2n)}$ = //Végezd el az elvégezhetőt

$= \frac{-6}{2(2+2n)(2+2n)} < 0$ minden $n \in N$ esetén

Tehát $a_{n+1} - a_n < 0$, így $a_{n+1} < a_n$ teljesül minden $n \in N$ esetén.

Valóban a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

6.2. Feladat

(Tamopp jegyzet 91.oldal)

- Vizsgáljuk meg a következő sorok konvergenciáját! (Az összegükre nem vagyunk kiváncsiak, csak arra, konvergensek-e.)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n-7}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{3n+1}{2n-7}}_{a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-7} = \frac{\cancel{n}(3+\frac{1}{n})}{\cancel{n}(2-\frac{7}{n})} = \frac{3}{2}$$

- A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n-7}$ sor nem konvergens, mivel nem teljesíti a konvergencia szükséges feltételét, vagyis divergens!

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{3+n^3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{3n-2}{3+n^3}}_{a_n}$$

$n \gg 1$

Segítség: konvergens: majoráns kritérium

$$0 \leq a_n \leq \frac{3\cancel{n}}{n^{\cancel{3}}} = \frac{3}{n^2}$$

$$\underline{b_n = \frac{3}{n^2}} \qquad \boxed{\sum^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}}$$

- Majoráns kritériumot alkalmaztuk, mivel a nevezőben egy olyan n szerepelt, ami jóval nagyobb mint a számlálóban ($n >> 1$)
- Majoráns kritérium alkalmazásával kaptunk egy b_n végtelen sort, ami megfelel a hiperharmonikus sorra.
- A hiperharmonikus sor akkor konvergens ha a nevezőben a kitevő nagyobb, mint egy.
- Mivel 2 a kitevő, ezért konvergens a b_n sorozat
- Visszatérve, $0 \leq a_n \leq b_n$ értelmében az a_n konvergens.

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3-2n^2+1}}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^3-2n^2+1}}}_{a_n}$$

$$n \gg 1$$

$$0 \le a_n \le \frac{1}{\sqrt{n^3-2n^2+1}} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{n^3-\frac{1}{2}n^3}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}n^3}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}}$$

$$b_n = \frac{1}{\frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}} \quad \boxed{\sum^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}}$$

- Hasonlóképpen alkalmazzuk a majoráns kritériumot.

d) g

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{4n+8}{(2n+3)(2n+9)}}_{a_n}$$

$$a_{n+1} - a_n$$

$$\frac{4(n+1)+8}{(2(n+1))(2(n+1)+9)} - \frac{4n+8}{(2n+3)(2n+9)} =$$

$$= \frac{4n+4+8}{(2n+2)(2n+2+9)} - \frac{4n+8}{(2n+3)(2n+9)} =$$

$$\frac{(4n+4+8)(2n+3)(2n+9) - (4+8)(2n+2)(2n+2+9)}{\underbrace{(2n+2)}_{0}\underbrace{(2n+2+9)}_{0}\underbrace{(2n+3)}_{0}\underbrace{(2n+9)}_{0}} < 0$$

- Ez egy leibniz tipusú sor, ami azt jelenti, hogy ha az átalános tag limesze 0, akkor konvergens a sorozat.
- Miután megállapítjuk, hogy az általános tag monoton, eldönthető határérték számítással, hogy konvergens-e.
- Ez a sorozat konvergens, mivel $a_{n+1} - a_n < 0$
- és továbbá:
    - $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{4n+8}{(2n+3)(2n+9)} = 0$
    - Tehát konvergens.

9.2. Feladat

Határozzuk meg a következő határértékeket a műveleti tulajdonságok alapján, ha léteznek!

(tamopp 134.o)

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x+4}{5x+7}$ //Készítsünk egy x_n sorozatot és vizsgáljuk az $f(x_n)$ függvényt.

$\frac{3 \cdot 2+4}{5 \cdot 2+7} = \frac{10}{17}$

A határérték tehát: $A = \frac{10}{17}$.

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^4+5x-2}{-2x^3+4x^2-1}$ //Ha ezt be helyettesítjük, akkor bele futunk egy határozatlansági esetbe.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{3x^4}{x^3}+\frac{5x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}{-\frac{2x^3}{x^3}+\frac{4x^2}{x^3}-\frac{1}{x^3}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x+\frac{5x}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{-2+\frac{4x}{x}-\frac{1}{x^3}} =- \infty$ //Ezt a végtelen / végtelen határértéket //ismerjük. Ez esetben leosztjuk a nevező legnagyobb ismeretlenjével az összes tagot (nevezőben és számlálóban is) és ilyenkor nem lehet a nevezőben 0 az eredmény.

//Viszont továbbra is végtelen osztva negatív valamivel, az //negatív végtelen lesz.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{7x^2+3x-1}{2x-3}$ //$\frac{\infty}{\infty}$ határozatlansági eset, tudjuk mi a dolgunk.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{7x+3-\frac{1}{x}}{2-\frac{3}{x}} =- \infty$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4 \cdot 5^{x+1}+7 \cdot 2^x+1}{3 \cdot 2^{2x-1}+6 \cdot 5^x+2}$ //$\frac{\infty}{\infty}$ határozatlansági eset, tudjuk mi a dolgunk, azonban előtte az exponenciális cuccokat bontsuk ki!

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4 \cdot 5^x \cdot 5+7 \cdot 2^x+1}{3 \cdot 2^{2x} \cdot 2^{-1}+6 \cdot 5^x+2} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{20 \cdot 5^x+7 \cdot 2^x+1}{\frac{3}{2} \cdot 2^{2x}+6 \cdot 5^x+2} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4 \cdot 5^{x+1}+7 \cdot 2^x+1}{3 \cdot 2^{2x-1}+6 \cdot 5^x+2}$ //Ez a határérték, hasonlít az elöző feladatra, viszont a $- \infty$ felé konvergál.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4 \cdot 5^{x+1}+7 \cdot 2^x+1}{3 \cdot 2^{2x-1}+6 \cdot 5^x+2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4 \cdot 0+7 \cdot 0+1}{3 \cdot 0+6 \cdot 0+2} = \frac{1}{2}$

f) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4 \cdot (\frac{1}{4})^x+7 \cdot (\frac{2}{9})^{x-1}}{3 \cdot (\frac{1}{4})^x+6 \cdot (\frac{1}{6})^x}$ //Itt bekövetkezik, egy eddig nem látott "$\frac{0}{0}$" határozatlansági határeset.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4 \cdot (\frac{1}{4})^x+7 \cdot (\frac{2}{9})^x \cdot \frac{9}{2}}{3 \cdot (\frac{1}{4})^x+6 \cdot (\frac{1}{6})^x}$

g) g

h) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - \sqrt{x^2 - 2x})$ //$\infty - \infty$ határozatlansági eset. Használhatjuk a következő azonosságot: $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \Rightarrow \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - \sqrt{x^2 - 2x}) \cdot \frac{(\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2-2x})}{(\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2-2x})} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x^2+5x)-(x^2-2x)}{(\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2-2x})}$ //Rajtunk ez azért segített, mivel eljutottunk egy megoldhatobb határozatlansági esetre!

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x}{(\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2-2x})}$ //Ez a vételen/végtelen, ahol leosztunk a nevezőben legnagyobb taggal ami az x^2:

$$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x}{(\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2-2x})} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = \frac{7}{2}$$

Második próba Zárthelyi megoldás

Feladatlap

1. Vizsgáljuk meg a következő sorok konvergenciáját! (7p + 5p +7p)

a) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-7n+5}}$ //A nevezőben az n >>1, ezért végezzük el a következő átalakításokat:

$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-7n+5}} \approx \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \approx \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ //Ha megfigyeljük, akkor ez az alak megeggyezik a hiperharmonikus sor kritériumnak. Ez egy Hiperharmonikus sor. Továbbá, a kitevő kisebb mint egy, ezáltal sejthetjük, hogy divergens a sorozat, viszont tovább haladunk a minoráns kritériummal. (Majoráns kritériummal becslünk ha konvergens sorozatra számítunk, amúgy ha egy sor divergens, akkor minorálunk.)

$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-7n+5}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-0+5n^2}} \geq^{*} \frac{1}{\sqrt[3]{6n^2}}$ $b_n := \frac{1}{\sqrt[3]{6n^2}}$ //Készítettük egy új sorozatot, amit vizsgálni fogunk.

//lássuk a * jelölt egyenlőtlenséget!

$5n^2 \geq 5$ $n^2 \geq 1$ $n \geq 1$ (vagyis tehát

b) $\sum_{n=2}^{\infty}(-\ 1)^{n}\cdot\frac{4n+8}{(2n+3)(2n+5)}$ //Ez egy leibniz tipusú sor lesz, azonban mindazok előtt vizsgáljuk csak az általános sorozatot, elválasztva a prefixtől

$a_n = \frac{4n+8}{(2n+3)(2n+5)}$ //nézzük a monotonitását!

$a_{n+1} - a_n =$

$= \frac{4(n+1)+8}{(2(n+1)+3)(2(n+1)+5)} - \frac{4n+8}{(2n+3)(2n+5)} =$

$= \frac{4n+12}{(2n+5)(2n+7)} - \frac{4n+8}{(2n+3)(2n+5)} =$

$= \frac{((4n+12)(2n+3))-((4n+8)(2n+7))}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)} =$

$= \frac{(8n^2+12n+24n+36)-(8n^2+28n+16n+56)}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)} =$

$= \frac{(8n^2+36n+60)-(8n^2+44n+56)}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)} =$

$= \frac{-8-4}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)} < 0$ $\forall n \in N(valós)$ //Ez a sorozat szigorúan monoton csökken!

A leibniz tipusú sor felismerhető az általános tag előtti $(-\ 1)^{n}$-ről, ami azt mondja, hogy akkor konvergens, ha határértéke 0.

//Szóval kimondhatjuk, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty}(-\ 1)^{2}a_n$ sor a Leibniz-kritérium értelmében konvergens, mert:

$\lim_{n\to 2} a_n = \lim_{n\to 2}\frac{4n+8}{(2n+3)(2n+5)} = \lim_{n\to 2}\frac{\frac{4}{n}+\frac{8}{n}}{(2+\frac{3}{n})(2+\frac{5}{n})} = 0$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(2+\frac{1}{n})^n}$ //Itt használjuk a Cauchy-féle gyökkritériumot, hogy eltünjön a nevezőből az n kitevő

$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{(2+\frac{1}{n})^n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2+1}}{2+\frac{1}{n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}$ //A határérték tehát $\frac{1}{2}$. Kihoztuk a gyök alol, és mivel 1 a végtelen hatványon =1. Az fél kisebb mint 1, tehát ez a sor abszolút konvergens.

2. *Határozzuk meg az alábbi hatványsor konvergencia intervallumát! (10p)*

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2-2n+5}{3^n \cdot (n-2)^2} \cdot (x + 3)^n$ //Valamilyen intervallumot kell kapni. Ebben az esetben fontos megnézni az x-et, ami a konvergencia középponthoz köthető. Valamint, mint ebben az esetben, az ellenkezője lesz a művelettel: Tehát itt a $+ 3$ helyett, $- 3$ lesz a konvergencia középpont, amiből alakítünk egy környezetet.

//A Cauchy-Hadamard tétel segít. Vegyük itt is az általános sorozatot:

$$C_n = \frac{3n^2-2n+5}{3^n \cdot (n-2)^2}$$

//Jöhet a Cauchy-gyök kritérium, ezáltal kiemelhetjük az n kitevőjü tagokat!

$$\sqrt[n]{|C_n|} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[n]{\frac{3n^2-2n+5}{(n-2)^2}}$$

//Nézzük a környezetet az alpha

$\alpha = \lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{3} \cdot \sqrt[n]{\frac{3n^2-2n+5}{(n-2)^2}} = \frac{1}{3}$ //Az $\sqrt[n]{bármi} \to 1$ felé, ezért triviális, hogy mi a franc van alatta, azonban ez nekünk jó, mivel megkaptuk határértéket.

$R = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ //A konvergencia középpontja $x_0 =- 3$ Azonban ez ránézésre is eldönthető, csupán venni kell az ellentetjét

//Tehát a hatványsor nyílt intervallum következő pontjaiban abszolút konvergens:
$(- 3 - 3, - 3 + 3) \to (- 6, 0)$

//Továbbiakban vizsgáljuk az intervallum két végpontjaiban hogyan viselkedik a sorozat.

//Először is, mi van ha $x =- 6$?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3-2n+5}{3^n \cdot (n-2)^2} \cdot (x + 3)^n$ //Itt osztunk 3^n-el

$\sum_{n=1}^{\infty} (- 1)^n \cdot \frac{3n^3-2n+5}{(n-2)^2}$ //Az általános tagot vizsgáljuk, az pedig egy Leibniz-tipusú sor.

$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2n+5}{(n-2)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{2}{2}+\frac{5}{n^2}}{(1-\frac{2}{n})^2} = 3$ //Mivel itt 3 a határérték, és nem nulla, ezért ebben a pontban divergens a sorozat.

//Nézzük meg a másik esetet, amikor is $x = 0$

Mivel a sor általános tagja nem tart a 0 felé, ezért nem felel meg a konvergencia kritériumnak.

//Tehát végsősoron, az a pontban a hatványsor divergens. Így a konvergencia intervallum (-6,0).

3. *Az átviteli-elv segítségével adjuk meg a következő határértéket. (3p+4p)*

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{7x^2+3x-1}{2x-3}$ //Fontos a tanult definíciót bevésni.

$\forall x_n \in H,\ (n \in N(term))\ \lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = -\infty$
Legyen $x_n \in H,\ \lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$

//Röviden tömören, pofára, létrehozunk egy függvényt, ami n-től a végtelenig tart, aztán ha határozatlansági esetre jutunk, akkor tudjuk mi a dolgunk.

$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{7x_n^2+3x_n-1}{2x_n-3}$ //Határozatlansági esethez jutunk: "$\frac{\infty}{\infty}$"

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{7x_n+3-\frac{1}{x_n}}{2-\frac{3}{x_n}} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{-2}{x+3}$ //Ez a sorozat nagyon para, mert negatív számot osztunk 0-val

//Hozzunk létre az általános sorozatot!

Legyen $x_n := -3 - \frac{1}{n}$, ekkor $\lim\limits_{n \to \infty} x_n\ (x_n \neq -3)$. Ekkor $f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{-2}{x_n+3} =$
$= \lim\limits_{n \to \infty} \frac{-2}{(-3-\frac{1}{n})+3} = \lim\limits_{n \to \infty} 2n = \infty$. //Azonban van egy másik lehetőségé!

Legyen $y_n := -3 + \frac{1}{n}$, ekkor $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = -3\ (y_n \neq -3)$ ekkor

$f(y_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{-2}{y_n+3} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{-2}{(-3+\frac{1}{n})+3} = \lim\limits_{n \to \infty} -2n = -\infty$

4. Határozzuk meg a következő határértékeket a műveleti tulajdonságok alapján, ha léteznek! (3p+3p)

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5\cdot 8^{x+1}-4\cdot 3^{x}+1}{3\cdot 2^{\,3x-1}+4\cdot 7^{x}+2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5\cdot 8^{x+1}-4\cdot 3^{x}+1}{3\cdot 2^{\,3x-1}+4\cdot 7^{x}+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5\cdot 8^{x}\cdot 8-4\cdot 3^{x}+1}{3\cdot 8^{x}\cdot\frac{1}{2}+4\cdot 7^{x}+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{40\cdot 8^{x}-4\cdot 3^{x}+1}{\frac{3}{2}\cdot 8^{x}+4\cdot 7^{x}+2}$$ //8^{x}-et tüntessük el

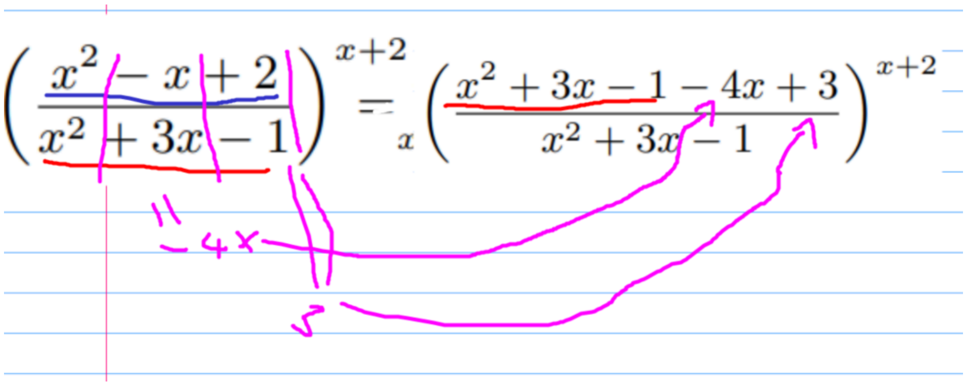
$$\lim_{x\to\infty} \frac{40\cdot 8^{x}-4\cdot 3^{x}+1}{\frac{3}{2}\cdot 8^{x}+4\cdot 7^{x}+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{40-4\cdot\frac{3^{x}}{8^{x}}+\frac{1}{8^{x}}}{\frac{3}{2}\cdot+4\cdot\frac{7^{x}}{8^{x}}+\frac{2}{8^{x}}} = \frac{40}{\frac{3}{2}}$$

Mi van ha $x \to -\infty$? //Ilyenkor egyként tekinthetjük az a^{nx-1} tagokat, így

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5\cdot 8^{x+1}-4\cdot 3^{x}+1}{3\cdot 2^{\,3x-1}+4\cdot 7^{x}+2} = \frac{5\cdot 0-4\cdot 0+1}{3\cdot 0+4\cdot 0+2} = \frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^{2}-x+2}{x^{2}+3x-1}\right)^{x+2}$ //Ez egy euler sorozat. Tehát formalizáljuk

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^{2}-x+2}{x^{2}+3x-1}\right)^{x+2} = \lim\limits_{x\to\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{-4x+3}{x^{2}+3x-1}\right)^{x+2}$ A formázás úgy zajlik, hogy leírjuk a nevezőt a számlálóba, aztán megnézzük az elöző számláló különbségét a nevezővel, és az új számláló után felírjuk. Aztán gyerekjáték a betanultak.



$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4x+3}{x^{2}+3x-1}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^{2}+3x-1}{-4x+3}}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^{2}+3x-1}{-4x+3}}\right)^{\frac{x^{2}+3x-1}{-4x+3}\cdot\frac{-4x+3}{x^{2}+3x-1}}\right]^{x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^{2}+3x-1}{-4x+3}}\right)^{\frac{x^{2}+3x-1}{-4x+3}}\right]^{\frac{-4x+3}{x^{2}+3x-1}(x+2)} \to e$$ //ez a forma, amiről beszéltünk.

Akkor most nézzük az euler kitevőjét, ami a sorozat határértéke:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-4x+3}{x^{2}+3x-1}(x+2)$ //Az (x+2) taggal beszorozzuk a számlálót:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(-4x+1+2)\cdot(x+2)}{x^{2}+3x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-4x^{2}+1x+2x-8x+2+4}{x^{2}+3x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-4x^{2}-5x+6}{x^{2}+3x-1}$ //Amit tehetünk, hogy leosztunk a nevező legnagyobb tagjával

$\lim_{x \to \infty} \frac{-4x^2-5x+6}{x^2+3x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{-4-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{-4}{1} =- 4$

Tehát $\rightarrow e^{-4}$

c) $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + x - 1})$ //Ismerős az eset, azzal, kezdünk, hogy a következő azonosságot bevetjük: $\sqrt{x} - \sqrt{x} = \frac{(x)-(x)}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}$ Ez az ún. Adjungáltal szorzunk.

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+3x-(x^2+x-1)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+x-1}}$ //Ha megnézzük, a kivonás jel indikálja, hogy össze kell adni a két tagot. Felfoghatjuk, úgy is, hogy:

$\lim_{x \to \infty} \frac{-(x^2+x-1)+x^2+3x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+x-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+x-1}}$//Itt pedig ismét leosztunk a nevező legerősebb tagjával, azonban érdemes figyelni arra, hogy négyzetgyök alatt, ha kiemeljük, akkor változik az érték: $\sqrt[2]{x^2} \rightarrow x$

$\lim_{x \to \infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{1+1} = 1$

d) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-7x+6}{x^2-4}$ //Először is: amikor x egy konstanshoz tart, akkor mindig behelyettesítünk és megállapítjuk, hogy milyen határozatlansági esethez jutunk.

$\lim_{x \to 2} \frac{2^3-7\cdot2+6}{2^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{28}{0}$ //Ez a $\frac{0}{0}$ határozatlansági eset. Ilyenkor szorzattá alakítunk (kiemelünk), egy olyan taggal, ami megtalálható a számlálóban és a nevezőben is!

$x^3 - 7x + 6$ és $x^2 - 4 \rightarrow (x - 2)$ //Továbbiakban az ismert polinom osztással haladunk!

$x^3 + 0x^2 - 7x + 6 : (x - 2) = x^3$ //Miután osztottunk, vissza kell szorozni az osztandóval.

$x^3 + 0x^2 - 7x + 6 : (x - 2) = x^2$ //illetve levonjuk, és továbbhaladunk

$- x^3 + 2x^2$

$- 2x^2 + 2x + 6 : (x - 2) = x^2 + 2x$

$- (2x^2 - 4x)$

$- 4x + 6 : (x - 2) = x^2 + 2x - 3$

$- 3x - 6$

0

Most tekintsük a nevezőt: $x^2 - 4$ Ezt nem is kell osztani, mivel ez egy azonosság: $(x + 2) \cdot (x - 2)$.

//Ennek tudatában a következőt megtehetjük:

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-7x+6}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x^2-2x-3)\cdot(x-2)}{(x+2)\cdot(x-2)}$ //Egyszerűsítsünk $(x - 2)$-vel.

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+2x-3}{x+2}$ //Ez egy emészthető forma, helyettesítsünk be!

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{2^2+2\cdot2-3}{2+2} = \frac{5}{4}$.

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4x^3+x^2-2x+5}{3x^3-4x^2}$ //Behelyettesítés

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{4\cdot0^3+0^2-2\cdot0+5}{3\cdot0^3-4\cdot0^2} = \frac{5}{0}$ //Szorzattá alakítunk: $(x - 0) = x$ megvan mindkettő részben

$(4x^3 + x^2 - 2x + 5) : (x - 0) = 4x^3$

$- 4x^3 + 0$

$(x^2 - 2x + 5) : (x - 0) = 4x^3 + x^2$

$- x^2 + 0$

$(- 2x + 5) : (x - 0) = 4x^3 + x^2 - 2x$

$+ 2x + 0$

$5 : (x - 0) = 4x^3 + x^2 - 2x + 5$

$- 5 + 0$

0

//Ezáltal megkaptuk, hogy számláló $(x - 0) \cdot (4x^3 + x^2 - 2x + 5)$

//Nevezőben

$3x^3 - 4x^2 : (x - 0) = 3x^2$

$- 3x^3 + 0$

$- 4x^2 : (x - 0) = 3x^3 - 4x^2$

$+ 4x - 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{(x-0)\cdot(4x^3+x^2-2x+5)}{(3x^3-4x^2)\cdot(x-0)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{4x^3+x^2-2x+5}{3x^3-4x^2}$ //Nem sok változott, mivel továbbra is $\frac{5}{0}$. Mivel problémás a nevező, ezért kicsit alakítunk rajta.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{4x^3+x^2-2x+5}{3x^3-4x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{4x^3+x^2-2x+5}{x^2 \cdot (3x-4)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{4x^3+x^2-2x+5}{3x-4} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \cdot (-\frac{5}{4})$
$= -\infty$ //Nos, így szétválasztva, kapunk egy hiperharmonikus sorhoz hasonlító alakot, és mivel x páros kitevőn van, ezért létezik határértéke, így olyan mintha az írnánk fel, hogy $\infty \cdot (-1)$ ennek a határértéke tehát $-\infty$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg7x}{sin3x}$ //Behelyettesít

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg7 \cdot 0}{sin3 \cdot 0} = \frac{0}{0}$ //$\frac{0}{0}$-t kapunk, ami nem jó! Itt azonban a polinom osztással kitörölhetjük a seggünket, valami újdonsággal kell próbálkozni. Itt jön egy olyan azonosság, hogy $\frac{sin\,\alpha}{\alpha}$, erre azonban rá kell vezetni a trigonometrikus azonosságokkal.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg7x}{sin3x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{sin7x}{cos7x}}{sin3x}$ //Bontsuk a tagokat úgy, hogy ne legyen határozatlansági eset

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{sin7x}{cos7x}}{sin3x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{cos7x} \cdot \frac{sin7x}{7x} \cdot 7x}{\frac{sin\,3x}{3x} \cdot 3x}$ //Letudjuk egyszerűsíteni az x-et

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{cos7x} \cdot \frac{sin7x}{7x} \cdot 7}{\frac{sin\,3x}{3x} \cdot 3} = \frac{7}{3}$

5. *Vizsgáljuk meg folytonosság szempontjából a következő függvényt! Ahol nem folytonos, adjuk meg a szakadás típusát! (7p)*

$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$ Ha $x \neq -2,\ x < 1$ //Ez egy racionális törtfüggvény

$f(x) = 2x - 1$ Ha $x \geq 1$ //Ez egy polinom

$f(x) = 3$ Ha $x = -2$ //Egy pont

//Le kell írni a sablonszöveget ingyen pontok érdekében:

"Az $f(x)$ függvény egy polinom, egy racionális törtfüggvény és egy pont összeragasztásával keletkezett, melynek értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak, ezért csak a csatlakozási pontban kell vizsgálni." (Lucskai approves)

//Ez magyarán azt jelenti, hogy az algoritmusnál, meg kell vizsgálni azokat a függvény részleteket, aminél $x = valami$, itt kettő helyen van ilyen: $f(x) = 2x - 1$ Ha $x \geq 1$, ahol $x = 1$ és $f(x) = 3$ Ha $x = -2$, ahol $x = -2$

1. $x_0 = -2$, $x_0 \in \textit{Értelmezési tartomány}$ és x_0 torlódási pont
2. $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$ //Mit csinálunk? behelyettesítünk!

   $\lim\limits_{x\to -2} \frac{(-2)^2+2\cdot(-2)-3}{(-2)^2+(-2)-2} = \frac{-3}{0}$ //Ebbe beletört a bicskánk, mivel határozatlansági eset, szóval polinom osztás:$(x - 1)$

   $\lim\limits_{x\to -2} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)}$ //Ez behelyettesítve továbbra is határozatlansági eset, szóval ismét alakítunk.

   $\lim\limits_{x\to -2} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} \cdot \frac{1}{x+2}$//ezzel nem sok szart tudunk kezdeni, szóval nem létezik határértéke.

   $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \infty$ és $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$

   //Ez egy másodfajú szakadás, mivel az $x_0 = -2$ pontban nem egyezik meg a két határérték, és az egyoldali határérték nem véges (nincs is határértéke).

   //Ezzel még nincs vége, mivel van még egy pontunk.
3. 1, $x_0 \in \textit{Értelmezési tartomány}$ és x_0 torlódási pont
4. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$ //Behelyettesítünk

   $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1^2+2\cdot1-3}{1^2+1-2} = \frac{0}{0}$ //Határozatlansági eset, mint az előzőben nem tanusít határértékről, ezért megnézzük jobb és baloldalról közelítve.

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)}$ //Itt egyszerűsítve és behelyettesítve, már nem bizonytalansági esetről van szó.

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1+3}{1+2} = \frac{4}{3}.$ //másik eset, amire figyelünk, hogy kikötésnél azt mondja:

$f(x) = 2x - 1$ Ha $x \geq 1$, így eljárunk, hogy

$\lim\limits_{x \to 1^+} 2x - 1 = 1$

Ez pedig egy elsőfajú szakadás, mivel $x_0 = 1$ pontban nem egyezik meg, de az egyoldali határértékek végesek.

6. *Adjuk meg a következő függvények inverzét. Ha a függvény nem invertálható, szűkítsük le egy olyan halmazra, amelyen már létezik inverze. Adjuk meg az eredeti és az inverzfüggvény értelmezési tartományát és értékkészletét.*

a) $f(x) = 3 \cdot log_2(2 - x) + 5$ //Itt mivel logaritmus összetett függvényről beszélünk, ezért úgy néz ki, hogy $log_2(\alpha - \beta) \rightarrow \alpha > \beta$

$2 - x > 0$

$2 > x$ //Ebből pedig kiépítjük az értelmezési tartományt, hogy:

$É.T. = \{x \in R | x < 2\}$ //tekintsük legközelebb az értékkészletét!

//Logaritmus függvény értékkészlete a valós számok halmaza.

$É.K. = R$

//A logaritmus függvény kölcsönösen egyértelmű, azaz bijektív és az f logaritmus függvény lineáris transzformáltja, azért f kölcsönösen egyértelmű, így a teljes értelmezési tartományon invertálható.

$y = 3 \cdot log_2(2 - x) + 5$ $//- 5$

$y - 5 = 3 \cdot log_2(2 - x)$ $//\div 3$

$\frac{y-5}{3} = log_2(2 - x)$ $//\frac{y-5}{3} = log_2(2 - x) \Rightarrow 2^{\frac{y-5}{3}} = 2 - x$

$2^{\frac{y-5}{3}} = 2 - x$ $//+ 2$

$-2^{\frac{y-5}{3}} + 2 = -x$

//Tehát, kiszámoltuk, hogy az x értelmezési tartománya, megegyezik az inverzfüggvény értékkészletével:

$x = \overline{f}(y)$

$x =- 2^{\frac{y-5}{3}} + 2$

//Illetve az inverz értelmezési tartománya megegyezik a függvény értékkészletével

$y = \overline{f}(x)$

$x =- 2^{\frac{y-5}{3}} + 2$

//Tehát az inverzfügggvény értelmezési tartománya és értékkészlete

$D_{\overline{f}} = R_f = R(valós)$

$R_{\overline{f}} = D_f = \{y \in R|\ y < 2\}$

b) $f(x) = 2tg(pi \cdot x - \frac{pi}{3}) + 2$

//A tgα nem értelmezett, ha α $= \frac{pi}{2} + k \cdot pi$, ahol $k \in Z(egész)$, mivel ez egy törtfüggvény, ahol a nevező nem lehet 0.

$pi \cdot x - \frac{pi}{3} \neq \frac{pi}{2} + k \cdot pi$

$pi \cdot x \neq \frac{5}{6}pi + k \cdot pi$

$x \neq \frac{5}{6} + k$

É.T.: $= \{x \in R|x = \frac{5}{6} + k\}$

É.K.: $= R$

//A függvény, mivel nem

7. *Definíció alapján határozzuk meg a következő függvény differenciálhányadosát a megadott pontban.*

$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$, $x_0 = 2$ //Ha megvan adva, akkor a következő átalakítást kell elvégezni:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f'(2) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$ //Helyettesítsük be a már ismert f(x) függvényt!

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{2x-3}{x+1} - \frac{2 \cdot 2-3}{2+1}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{2x-3}{x+1} - \frac{1}{3}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{3(2x-3)-(x+1)}{3(x+1)}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{5x-10}{3(x+1)}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{5x-\frac{10}{x}}{3(x+1)}}{-2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\frac{5}{3(x+1)}}{1} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{5}{3(2+1)}}{1} = \frac{5}{9}$$

8. Adjuk meg az alábbi függvények derivált függvénye:

//Eljárásunkat a deriválási játékszabályok mentén vigyük.

a) $f(x) = 3x^2 + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{4}{3\cdot\sqrt{x}} + \sqrt[3]{e} + 2$ //Erre a függvényre ráfér néhány átalakítás. Használjuk a következő azonosságokat! $\sqrt[x]{a^z} = a^{\frac{z}{x}}$

$f(x) = 3x^2 + x^{\frac{1}{3}} + x^{-1\cdot\frac{1}{2}} + \frac{4}{3\cdot\sqrt{x}} + e^{\frac{1}{3}} + 2$ //Nem vagyunk kész, ugyanis a törtes alakot is tudjuk változtatni.

$f(x) = 3x^2 + x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} + e^{\frac{1}{3}} + 2 = 3x^2 + x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{2}} + e^{\frac{1}{3}} + 2$

//Innentől lehet deriválni.

$f'(x) = 3\cdot 2x^1 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + (-\frac{1}{2})x^{-\frac{2}{3}} + \frac{4}{3}\cdot -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + e^{\frac{1}{3}} + 0$

b) $f(x) = e^x \cdot (sinx + cosx)$ //Ez ismét egy összetett függvény, amit egybe foghatunk:

$f(x) = e^x$ és $g(x) = (sinx + cosx)$

$f(x)\cdot g(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

c) $f(x) = \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ //Ha ezt megvizsgáljuk, ez kettő összetett függvény, amit átírhatunk egy fügvénnyé:

$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x} = \frac{f(x)}{g(x)}$ //Ebből pedig egyszerű művelettel tudunk deriválni.

$\frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \frac{f'_0 - f\cdot g'}{g^2}$

d)