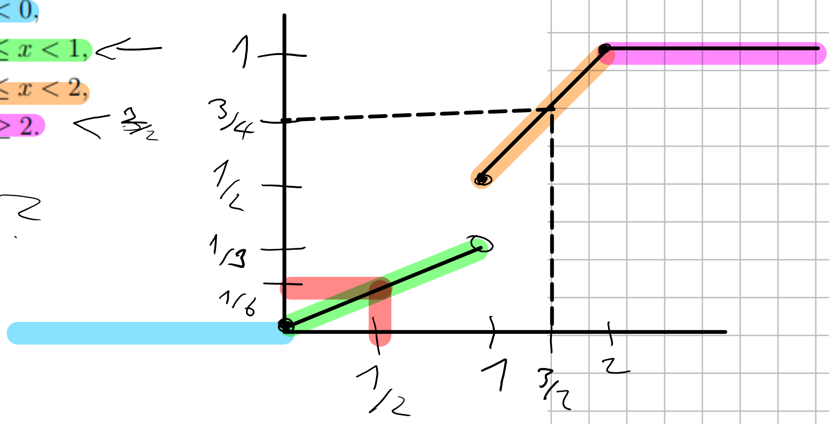
Valószám 2023.11.23.

Folytonos valószínűségi változók

33/ 3. Legyen X val. változó olyan, hogy a hozzá tartozó eloszlás a következő függvénnyel írható le:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{3}, & 0 \le x < 1, \\ \frac{x}{2}, & 1 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$



Keressük meg:

a) $\mathbb{P}(1/2 \le X \le 3/2)$; $\longrightarrow$ = ?
b) $\mathbb{P}(1/2 \le X \le 1)$;
c) $\mathbb{P}(1/2 \le X < 1)$;
d) $\mathbb{P}(1 \le X \le 3/2)$;
e) $\mathbb{P}(1 < X < 2)$.

$$P(1/2 \le X \le 3/2) = F_X(3/2) - F_X(1/2-) = \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$$

1. $P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$
2. $P(a \le X < b) = F_X(b-) - F_X(a-)$
3. $P(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a-)$
4. $P(a < X < b) = F_X(b-) - F_X(a)$

$P(a \square X \square b)$

$\le \Rightarrow F_X(a-)$, $< \Rightarrow F_X(a)$, $\le \Rightarrow F_X(b-)$, $< \Rightarrow F_X(b)$

b) $P(1/2 \le X \le 1) = F_X(1) - F_X(1/2-) = 1/2 - 1/6 = 0{,}33\ldots$

c) $P(1/2 \le X < 1) = F_X(1-) - F_X(1/2-) = 1/2 - 1/6 = 1/3$

33/4. Legyen X egy olyan val. változó amelynek a sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x) = \begin{cases} c(x^3 - 2x + 3) & 0 < x < 4, \\ 0 & \text{máskülönben.} \end{cases}$$

a) Határozzuk meg c értékét. $\Rightarrow c = 1/60 \Leftarrow \int f(x)\,dx$

b) Adjuk meg X eloszlásfüggvényét. $\Leftarrow ?$

c) Számítsuk ki X várható értékét és varianciáját.

d) Számítsuk ki az $P(4 \leq 2^{2X+2} \leq 16)$ valószínűséget!

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} c\,(x^3 - 2x + 3)\,dx = c\left[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^2}{2} + 3x\right] =$$

$$= c\left[\frac{x^4}{4} - x^2 + 3x\right]_0^4 = c\left(\left[\frac{4^4}{4} - 4^2 + 3\cdot 4\right] - [0]\right) =$$

$$= c[64 - 16 + 12] = 60c \Rightarrow c = \frac{1}{60}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ ⊛ & 0 < x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

$$⊛ = \int_0^x 1/60\,(t^3 - 2t + 3)\,dt =$$

$$= \frac{1}{60}\left[\frac{t^4}{4} - t^2 + 3t\right]_0^x = \frac{1}{60}\cdot\left(\frac{x^4}{4} - x^2 + 3x\right) - 0$$

c)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^4 x \underbrace{\frac{1}{60}\left[x^3 - 2x + 3\right]}_{f_X(x)}\,dx = \int_0^4 \frac{1}{60}\left[x^4 - 2x^2 + 3x\right]dx =$$

$$= \frac{1}{60}\int_0^4 x^4 - 2x^2 + 3x\,dx = \frac{1}{60}\left[x^5 - 2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \triangle$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \square - \triangle^2$$

$$\square = \int_0^4 x^2 \cdot f_X(x)\,dx = \frac{1}{60}\left[\frac{4^6}{6} - \frac{4^4}{2} + 4^3\right]$$

Felteendő kérdés első szám:
- Ha egy feladatnál megvan adva egy valószínűségi változó, és annak sűrűséfüggvénye és a feladat azt kérdezi, hogy adjuk meg az eloszlás függvényét, azt hogy kell?
Példa: 33/4, 33/5

35/4. Az X és Y val. változók együttes sűrűségfüggvénnye a következő alakú:

$$f(x,y) = \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right),$$

ahol $0 < x < 1$ és $0 < y < 2$.

a) Igazoljuk, h $f(x,y)$ tényleg együttes sűrűségfüggvény.

b) Keressük meg X sűrűségfüggvényét.

c) Keressük meg $\mathbb{P}(X > Y)$.

d) Keressük meg $\mathbb{E}[X]$-et.

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right), & 0<x<1,\ 0<y<2 \\ 0 & \text{elne} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^1 \frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dx\,dy =$$

$$\int_0^2 \frac{6}{7}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\cdot\frac{y}{2}\right]_0^1 dy = \int_0^2 \frac{6}{7}\left[\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}\cdot\frac{y}{2}\right]dy =$$

$$= \int_0^2 \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{2}\cdot\frac{6}{7}\,dy = \int_0^2 \frac{6}{7}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{2}\right)dy =$$

$$= \frac{6}{7}\left[\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}\cdot\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \frac{6}{7}\left[\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot\frac{2^2}{2}\right] \Rightarrow 1 \checkmark$$

b) $\int f_X(x)\,dx = \int_{-\infty} f_{XY}(x,y)\,dx \Rightarrow \begin{cases} F \\ 0, \text{hol} \end{cases}$

Második kérdés:

35/4. Az X és Y val. változók együttes sűrűségfüggvénnye a következő alakú:

$$f(x,y) = \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right),$$

ahol $0 < x < 1$ és $0 < y < 2$.

a) Igazoljuk, h $f(x,y)$ tényleg együttes sűrűségfüggvény.

b) Keressük meg X sűrűségfüggvényét.

c) Keressük meg $\mathbb{P}(X > Y)$. $\Leftarrow$ ezmi?

d) Keressük meg $\mathbb{E}[X]$-et.

Ezt az egészet nézzük meg pls.

35/4. Az X és Y val. változók együttes sűrűségfüggvénnye a következő alakú:

$$f(x,y) = \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right),$$

ahol $0 < x < 1$ és $0 < y < 2$.

a) Igazoljuk, h $f(x,y)$ tényleg együttes sűrűségfüggvény.

b) Keressük meg X sűrűségfüggvényét.

c) Keressük meg $\mathbb{P}(X > Y)$.

d) Keressük meg $\mathbb{E}[X]$-et.

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_\xi(x)\, dx = \int_0^1 x \cdot \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{6}{7}\int_0^1 x^3 + x^2 \cdot \frac{y}{2}\, dx =$$

Nevezetes folytonos eloszlások

38/1. Legyen X egy exponenciális eloszlású val. változó. Tegyük fel, hogy λ olyan, hogy $\mathbb{P}(X \geq 0.01) = 1/2$. Keressünk egy olyan t-t, hogy $\mathbb{P}(X \geq t) = 0.9$.

$$P(\xi \geq 0{,}01) = 0{,}5 \quad / \ \overline{P}$$

$$\boxed{\lambda e^{-\lambda x}}$$

$$1 - P(\xi < 0{,}01) = 0{,}5$$

$$1 - F_\xi(0{,}01) = 0{,}5$$

$$\cancel{1 - (1} - e^{-\lambda 0{,}01}) = 0{,}5$$

$$e^{-\lambda 0{,}01} = 0{,}5 \quad / \ln$$

$$-\lambda 0{,}01 = \ln(0{,}5) \quad / \div 100$$

$$\lambda = -100 \cdot \ln(0{,}5) = \underline{\underline{100 \cdot \ln 2}}$$

$$P(\xi \geq t) = 0{,}9$$

$$1 - F_\xi(t) = 0{,}9$$

$$\cancel{1 - (1} - e^{-\lambda t}) = 0{,}9$$

$$e^{-\lambda t} = 0{,}9$$

$$e^{-100 \ln 2 t} = 0{,}9 \quad / \ln$$

$$-100 \cdot \ln 2 t = \ln 0{,}9 \quad / \div(-100 \cdot \ln 2 t)$$

$$\underline{\underline{t = \frac{\ln 0{,}9}{-100 \ln 2}}}$$