Hatványsor definíciója.

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ rögzített szám és $a = (a_n,\ n \in \mathbb{N})$ pedig egy valós számsorozat. Az ezekkel képzett

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

formális összeget ***hatványsornak*** *nevezzük. Az $(a_n,\ n \in \mathbb{N})$ sorozat tagjait a hatványsor* ***együtthatóinak****, az $x_0 \in \mathbb{R}$ számot a hatványsor* ***konvergencia-középpontjának*** *nevezzük.*

Taylor- és MacLaurin-sor definíciója.

Definíció

Legyen az f függvény az $x_0 \in \mathbb{R}$ pont valamely környezetében végtelensokszor differenciálható, ekkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

hatványsort x_0-körüli ***Taylor-sornak*** *nevezzük, ha az a_n együtthatókra teljesül, hogy*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

ahol $f^{(n)}(x_0)$ jelöli az f függvény n-edik deriváltjának x_0-beli helyettesítési értékét és $a_0 = f(x_0)$.

Definíció

Az $x_0 = 0$ körüli Taylor-sort ***MacLaurin-sornak*** *nevezzük.*

Konvergencia tartomány definíciója. Konvergenciasugár definíciója.

Definíció

Azon valós x-ek halmazát, melyekre a hatványsor konvergens, a hatványsor ***konvergencia tartományának*** *nevezzük.*

Megjegyzés

Vegyük észre, hogy az $x = x_0$ helyen a hatványsor szükségszerűen konvergens, azaz x_0 mindig eleme a konvergencia tartománynak.

Definíció

Legyen $\alpha := \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, ekkor az

$$R := \begin{cases} 0, & \alpha = \infty \\ \infty, & \alpha = 0 \\ 1/\alpha, & 0 < \alpha < \infty \end{cases}$$

számot a hatványsor ***konvergenciasugarának*** *nevezzük.*

Cauchy-Hadamard-tétel

Legyen R *a hatványsor konvergencia sugara. Ekkor a hatványsor a*

$$K_R(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : \ |x - x_0| < R\}$$

halmaz minden pontjában abszolút konvergens, $|x - x_0| > R$ *esetén pedig divergens.*

Összegfüggvény definíciója.

Tegyük fel, hogy a hatványsor konvergenciasugara pozitív. A

$$K_R(x_0) \ni x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \in \mathbb{R}$$

függvényt a hatványsor ***összegfüggvényének*** *nevezzük.*

Analitikus függvény definíciója.

Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ *nyílt halmaz. Akkor mondjuk, hogy az* $f : H \to \mathbb{R}$ *függvény* ***analitikus****, ha bármely* $a \in H$ *pontnak van olyan környezete, amelyben az* f *előállítható hatványsor összegfüggvényeként.*

Taylor-polinom definíciója.

Legyen $n \in \mathbb{N}$*. Az* x_0 *helyen* n*-szer differenciálható* $f : H \to \mathbb{R}$ *függvény* x_0 ***körüli*** n***-edik Taylor-polinomján*** *a*

$$T_n(x) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n = \\ = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

n*-edfokú polinomot értjük.*

Lagrange-féle maradék tag definíciója. Taylor-formula és alkalmazása függvény közelítésre.

Tétel (Taylor-formula)

Ha az f függvény az x_0 pont valamely $K_r(x_0)$ környezetében $(n+1)$-szer differenciálható, akkor minden $x \in K_r(x_0)$ pont esetén

$$f(x) = T_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}}_{R_n(x)},$$

ahol ξ az x és az x_0 közötti hely.

Definíció

*Az előző tételben bevezetett $R_n(x)$ kifejezést n-**edik Lagrange-féle maradéktagnak** nevezzük.*

Érintő definíciója és egyenlete.

*Legyen az f függvény az $a \in \mathcal{D}_f$ helyen differenciálható. Az $(a,\ f(a))$ ponton áthaladó, $f'(a)$ meredekségű egyenest az f függvény a helyhez tartozó **érintőjének** nevezzük, azaz az érintő egyenlete:*

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Mondja ki a Rolle-tételt.

Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény

i) *folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon*

ii) *differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon*

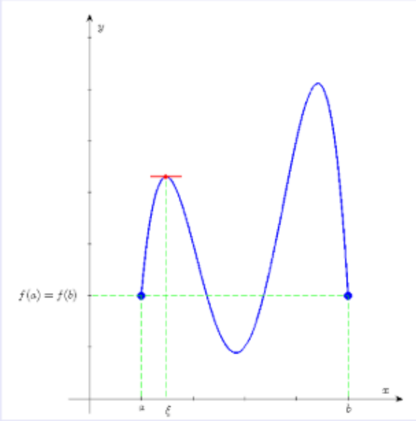
iii) *és $f(a) = f(b)$,*

akkor létezik olyan $\xi \in (a, b)$ pont ahol

$$f'(\xi) = 0.$$

Ismertesse és szemléltesse a Rolle-tétel geometriai jelentését.

Azaz ha teljesülnek a Rolle-tétel feltételei, akkor van legalább egy olyan belső pont, ahol a függvény érintője vízszintes.



Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt

Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény*

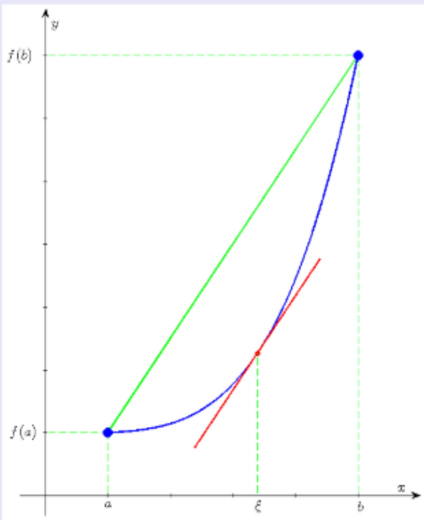
- i) *folytonos az* $[a, b]$ *zárt intervallumon*
- ii) *differenciálható az* (a, b) *nyílt intervallumon*

akkor létezik olyan $\xi \in (a, b)$ *pont ahol*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ismertesse és szemléltesse a Lagrange-féle középértéktétel geometriai jelentését.

Azaz ha teljesülnek a Lagrange-tétel feltételei, akkor van legalább egy olyan belső pont, ahol a függvény érintője párhuzamos az $(a, f(a))$ *és* $(b, f(b))$ *pontokon átmenő szelővel.*



Mondja ki a Cauchy-féle középértéktételt.

Ha az $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvények

- i) *folytonosak az $[a, b]$ zárt intervallumon*
- ii) *differenciálhatók az (a, b) nyílt intervallumon*

továbbá tetszőleges $x \in (a, b)$ esetén $g'(x) \neq 0$, akkor létezik olyan $\xi \in (a, b)$ pont ahol

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Vezesse le a logaritmikus deriválás képletét. (Adja meg mikor használható!)

Legyen $g(x)$ és $h(x)$ függvény differenciálható a H halmazon, továbbá $g(x) > 0$. Ekkor $f(x) = [g(x)]^{h(x)}$ is differenciálható a H-n és $f'(x)$ az alábbi módokon határozható meg.

1. Megoldás:

Ha $g(x) > 0$, akkor $f(x) > 0$. Ekkor

$$\ln (f(x)) = \ln \left(g(x)^{h(x)}\right) = h(x) \cdot \ln(g(x))$$

Deriváljuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= h'(x) \cdot \ln(g(x)) + h(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) \\
f'(x) &= f(x) \cdot \left[h'(x) \cdot \ln(g(x)) + h(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)\right].
\end{aligned}$$

2. Megoldás:

Ugyanehhez az eredményhez jutunk, ha az

$$f(x) = e^{\ln(f(x))} = e^{\ln\left(g(x)^{h(x)}\right)} = e^{h(x)\cdot\ln(g(x))}$$

átalakításból indulunk ki. Ekkor

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(e^{h(x)\cdot\ln(g(x))}\right)' = \\
&= \underbrace{e^{h(x)\cdot\ln(g(x))}}_{=f(x)} \cdot \left(h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)\right).
\end{aligned}$$

Megjegyzés

A feladatok megoldása során a két módszer egyformán hatásos. A **2. Megoldás***nak mégis van egy kis előnye, a későbbiekben a L'Hospital szabály alkalmazásakor ehhez a módszerhez meglehetősen hasonlító eljárásra van szükség.*

L'Hospital szabály véges helyen „0/0 " alakra

Tétel (L'Hospital szabály véges helyen „$\frac{0}{0}$" alakra)

Az f és a g függvények legyenek az x_0 valamely (esetleg féloldali) környezetében differenciálhatók és x_0-ban folytonosak, melyekre $f(x_0) = g(x_0) = 0$.
Továbbá tegyük fel, hogy létezik a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

határérték. Ekkor létezik a $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is és

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

L'Hospital szabály véges helyen „∞/∞" alakra

Tétel (L'Hospital szabály véges helyen „$\frac{\infty}{\infty}$" alakra)

Az f és a g függvények legyenek az x_0 valamely (esetleg féloldali) környezetében differenciálhatók, melyekre

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Továbbá tegyük fel, hogy létezik a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

határérték. Ekkor létezik a $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is és

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

L'Hospital szabály végtelenben. L'Hospital szabály mínusz végtelenben.

Tétel (L'Hospital szabály végtelenben)

Az f és a g függvények legyenek az differenciálhatók a (K, ∞) intervallumon és legyen

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \quad (vagy\ \pm\infty).$$

Továbbá tegyük fel, hogy létezik a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

határérték. Ekkor létezik a $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is és

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Lokálisan növő függvény definíciója.

*Akkor mondjuk, hogy az $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in (\alpha, \beta)$ **pontban lokálisan növekvő**, ha a-nak van olyan $K_r(a) \subseteq (\alpha, \beta)$ környezete,*

$$\begin{aligned} f(x) &\le f(a), \quad ha\ x \in (a-r, a), \\ f(x) &\ge f(a), \quad ha\ x \in (a, a+r). \end{aligned}$$

Lokálisan fogyó függvény definíciója.

*Akkor mondjuk, hogy az $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in (\alpha, \beta)$ **pontban lokálisan fogyó**, ha a-nak van olyan $K_r(a) \subseteq (\alpha, \beta)$ környezete,*

$$\begin{aligned} f(x) &\ge f(a), \quad ha\ x \in (a-r, a), \\ f(x) &\le f(a), \quad ha\ x \in (a, a+r). \end{aligned}$$

Lokálisan maximum definíciója.

*Akkor mondjuk, hogy az $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in (\alpha, \beta)$ pontban **lokális maximuma** van, ha a-nak létezik olyan $K_r(a) \subseteq (\alpha, \beta)$ környezete,*

$$f(x) \le f(a), \quad ha\ x \in K_r(a).$$

Lokálisan minimum definíciója.

*Akkor mondjuk, hogy az $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in (\alpha, \beta)$ pontban **lokális minimuma** van, ha a-nak létezik olyan $K_r(a) \subseteq (\alpha, \beta)$ környezete,*

$$f(x) \ge f(a), \quad ha\ x \in K_r(a).$$

Monotonitás és a derivált kapcsolatáról szóló két tétel.

Tétel

Legyen az $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in (\alpha, \beta)$ pontban differenciálható.

- i) *Ha f az a pontban (lokálisan) növő, akkor $f'(a) \geq 0$.*
- ii) *Ha f az a pontban (lokálisan) fogyó, akkor $f'(a) \leq 0$.*

Tétel

Legyen az $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in (\alpha, \beta)$ pontban differenciálható.

- i) *Ha $f'(a) > 0$, akkor az f függvény az a pontban szigorúan növő.*
- ii) *Ha $f'(a) < 0$, akkor az f függvény az a pontban szigorúan fogyó.*

Lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele.

Tétel

Ha az $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in (\alpha, \beta)$ pontban differenciálható és itt lokális szélsőértéke van, akkor $f'(a) = 0$

Megjegyzés

Az előző tétel a lokális szélsőérték létezésének szükséges, de nem elégséges feltétele. Például az $f(x) = x^3$ függvénynek az $x_0 = 0$ pontban nincs szélsőértéke, pedig $f'(0) = 0$.

A szélsőérték létezésének elsőrendű elégséges feltétele

Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ $\quad (H \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz), $a \in H$, $\quad f \in \mathcal{D}_a$. Ha $f'(a) = 0$ és f' az a-ban előjelet vált, akkor f-nek a-ban lokális szélsőértéke van. Ha a derivált negatívból pozitívvá válik, akkor az eredeti függvénynek lokális minimuma, ha pozitívból negatívvá válik, akkor lokális maximuma van az a pontban.

A szélsőérték létezésének másodrendű elégséges feltétele

Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ $\quad (H \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz), $a \in H$, $\quad f \in \mathcal{D}_a^2$. Ha $f'(a) = 0$ és $f''(a) \neq 0$, akkor f-nek a-ban lokális szélsőértéke van. Ha $f''(a) > 0$, akkor f-nek a-ban lokális minimuma, ha $f''(a) < 0$, akkor f-nek a-ban lokális maximuma van.

A szélsőérték létezésének magasabbrendű elégséges feltétele

Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ $\quad (H \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz), az $a \in H$ pontban n-szer differenciálható. Tegyük fel, hogy

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad \text{és} \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Az f-nek akkor és csak akkor van az a-ban lokális szélsőértéke, ha n páros. Ekkor ha $f^{(n)}(a) > 0$, akkor f-nek a-ban lokális minimuma, ha $f^{(n)}(a) < 0$, akkor lokális maximuma van.

Egy intervallumon konvex függvény definíciója

Akkor mondjuk, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény egy $I \subseteq H$ intervallumon konvex, ha bármely $a, b \in I,\ a < b$ esetén az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokon áthaladó egyenes (szelő) az (a, b)-ben az f fölött fekszik.

Egy intervallumon konkáv függvény definíciója

Akkor mondjuk, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény egy $I \subseteq H$ intervallumon konkáv, ha bármely $a, b \in I,\ a < b$ esetén az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokon áthaladó egyenes (szelő) az (a, b)-ben az f alatt fekszik.

Inflexiós pont definíciója

Akkor mondjuk, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in H$ helyen inflexiója van, ha ott a függvény konvexitást vált.

Adja meg a páros függvény definícióját! Adja meg a páratlan függvény definícióját! Definiálja a függvény periódusát

- szimmetria tulajdonságok vizsgálata
  - paritás
    - Ha $\mathcal{D}_f$ szimmetrikus és $f(-x) = f(x)$, $(\forall x \in \mathcal{D}_f)$, akkor f páros
    - Ha $\mathcal{D}_f$ szimmetrikus és $f(-x) = -f(x)$, $(\forall x \in \mathcal{D}_f)$, akkor f ptlan
    - különben se nem páros, se nem páratlan
  - periodicitás

  Az f függvény periódusa p, ha p a legkisebb pozitív szám, melyre minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(x+p) = f(x)$.

Adja meg mikor van a függvénynek függőleges aszimptotája és írja fel az aszimptota egyenletét.

- függőleges aszimptota, ahol $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ (elég ha az egyoldali határérték végtelen)

Adja meg mikor van a függvénynek vízszintes aszimptotája és írja fel az aszimptota egyenletét.

- vízszintes aszimptota van, ha $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$, vagy $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c$, ahol $c \in \mathbb{R}$

Adja meg mikor van a függvénynek ferde aszimptotája és írja fel az aszimptota egyenletét.

- ferde aszimptota, ha $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ és $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m,\ m \in \mathbb{R}$. Ekkor az aszimptota:

$$y = m \cdot x + \underbrace{\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - m \cdot x)}_{b}$$

A primitív függvény definíciója. A primitív függvény tulajdonságai. Milyen kapcsolatot ismer adott függvény primitív függvényei között? Írja le a határozatlan

integrálra vonatkozó műveleti tulajdonságokat!

*Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum és $f : I \mapsto \mathbb{R}$ egy intervallumon értelmezett valósértékű függvény. Akkor mondjuk, hogy a $F : I \mapsto \mathbb{R}$ függvény a f függvény **primitív függvénye**, ha*

- $F \in \mathcal{D}_I$
- $F'(x) = f(x)$ *minden* $x \in I$ *esetén*

Tétel

Ha F a f primitív függvénye az I intervallumon és $C \in \mathbb{R}$ konstans, akkor $F + C$ is a f primitív függvénye.

Bizonyítás.

Ha F a f primitív függvénye, akkor $F \in \mathcal{D}_I$, így a differenciálhatóság műveleti tulajdonságai alapján $F + C \in \mathcal{D}_I$ és $(F + C)' = F' + C' = f + 0 = f$. □

Ha az f az I intervallumon folytonos, akkor létezik primitív függvénye.

Tétel

Ha $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$ függvényeknek van primitív függvénye és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $f + g$-nek és $\lambda \cdot f$-nek is van primitívfüggvénye és

i) $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx,$

ii) $\int \lambda \cdot f(x)\, dx = \lambda \cdot \int f(x)\, dx.$

Bizonyítás.

Legyen $\int f(x)\, dx = F(x) + C_1$ és $\int g(x)\, dx = G(x) + C_2$, ahol $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Ekkor a definíció alapján $F, G \in \mathcal{D}_I$ és $F'(x) = f(x)$, valamint $G'(x) = g(x)$ minden $x \in I$ esetén.

A derivált műveleti tulajdonságai miatt $F + G$ és $\lambda \cdot F$ is differenciálható I-n és

$$\begin{aligned} (F+G)' &= F' + G' = f + g, \\ (\lambda \cdot F)' &= \lambda \cdot F' = \lambda \cdot f. \end{aligned}$$

Azaz $\lambda \cdot F$ a $\lambda \cdot f$ egy primitív függvénye illetve $F + G$ a $f + g$ egy primitív függvénye.

A határozatlan integrál fogalma.

Ha F_1 és F_2 a f primitív függvényei az I intervallumon, akkor $F_1 - F_2 = \textit{állandó}$, azaz f primitív függvényei csak egy additív konstansban különböznek.

Bizonyítás.

$F_1, F_2 \in \mathcal{D}_I$ így a differenciálhatóság műveleti tulajdonságai alapján $F_1 - F_2 \in \mathcal{D}_I$ $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$, az I intervallumon, így $F_1 - F_2 = \text{állandó}$. □

Definíció

Legyen $f : I \mapsto \mathbb{R}$ olyan függvény, melynek van primitív függvénye az I intervallumon. Ekkor az f primitív függvényeinek halmazát az f ***határozatlan integrál****jának nevezzük. Jelölés:*

$$\int f(x)\, dx = \int f = \{F(x) + C, C \in \mathbb{R}\},$$

ahol F a f egy primitív függvénye.

Fogalmazza meg a helyettesítéses integrálás szabályát határozatlan integrálokra!

Legyen $\varphi : I \mapsto J$ és $f : J \mapsto \mathbb{R}$, ahol $I, J \subset \mathbb{R}$ intervallumok. Ha

i) $\varphi \in \mathcal{D}_I$ *és*

ii) F *a* f *függvény primitív függvénye* J*-n,*

akkor $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ függvénynek is létezik primitív függvénye és

$$\int (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = F \circ \varphi + C.$$

Bizonyítás.

$F \in \mathcal{D}_J$ és $\varphi \in \mathcal{D}_I \Rightarrow F \circ \varphi \in \mathcal{D}_I$ és

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad \forall t \in I,$$

azaz az $F \circ \varphi$ függvény az $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ függvény primitív függvénye.

Legyen $\varphi : I \mapsto J$ *és* $f : J \mapsto \mathbb{R}$, *ahol* $I, J \subset \mathbb{R}$ *intervallumok. Ha*

i) $\varphi \in \mathcal{D}_I$ *és* $\varphi'(x) \neq 0, \ x \in I$,

ii) *Legyen* φ *kölcsönösen egyértelmű és jelölje* $\overline{\varphi}$ *az inverzét*

iii) *legyen* $h := (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. h*-nak van primitív függvénye, ez legyen* H,

ekkor f *függvénynek is létezik primitív függvénye és*

$$\int f(x)\ dx = (H \circ \overline{\varphi})(x) + C.$$

Bizonyítás.

$H \in \mathcal{D}_I$ és $H'(x) = h(x) = ((f \circ \varphi) \cdot \varphi')(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

Mivel $\overline{\varphi} \in \mathcal{D}_J$ és a közvetett függvény deriválási szabálya alapján $H \circ \overline{\varphi} \in \mathcal{D}_J$ legyen $x \in J$ ekkor

$$\begin{aligned}
(H(\overline{\varphi}(x)))' &= H'(\overline{\varphi}(x)) \cdot \overline{\varphi}'(x) = h(\overline{\varphi}(x)) \cdot \overline{\varphi}'(x) = \\
&= f(\varphi(\overline{\varphi}(x))) \cdot \varphi'(\overline{\varphi}(x)) \cdot \overline{\varphi}'(x) = \\
&= f(x) \cdot \varphi'(\overline{\varphi}(x)) \cdot \overline{\varphi}'(x) = \\
&= f(x) \cdot \varphi'(\overline{\varphi}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\overline{\varphi}(x))} = f(x).
\end{aligned}$$

Fogalmazza meg a határozatlan integrálra vonatkozó parciális integrálás elvét!

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathcal{D}_I$. *Ha az* $f \cdot g'$ *függvénynek van primitívfüggvénye az* I *intervallumon, akkor* $f' \cdot g$ *függvénynek is van és*

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'.$$

Bizonyítás.

$f, g \in \mathcal{D}_I \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{D}_I$ és

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \Rightarrow \quad f' \cdot g = (f \cdot g)' - f \cdot g'$$

Az $(f \cdot g)'$ és $f \cdot g'$ függvényeknek van primitív függvényük, így a különbségüknek, $f' \cdot g$-nek is van és

$$\int f' \cdot g = \int (f \cdot g)' - \int f \cdot g' = f \cdot g - \int f \cdot g'. \qquad \square$$

Sorolja fel, hogy milyen típusú integrandusok esetén és hogyan érdemes parciális integrálást végezni. (4 eset)

I. Polinom függvény és exponenciális-, vagy trigonometrikus függvény szorzata.
Megoldás: A parciális integrálás során legyen g a polinom, így a fenti eljárást alkalmazva a kiszámítandó $\int f(x) \cdot g'(x)dx$ hasonló típusú lesz, mint az eredeti primitív függvény, de a polinom fokszáma eggyel csökken. A parciális integrálást egészen addig ismételten alkalmazzuk, amíg a polinom konstanssá nem válik, ekkor már elemi úton integrálhatunk.

II.
- **a)** Polinom és logaritmus-, vagy ciklometrikus („arkusz") függvény szorzata.
  Megoldás: A parciális integrálás során legyen f' a polinom, így a fenti eljárást alkalmazva a kiszámítandó $\int f(x) \cdot g'(x)dx$ integrálban a polinom mellett egy könnyebben kezelhető függvény jelenik meg.
- **b)** Logaritmus-, vagy ciklometrikus („arkusz") függvény integrálása.
  Megoldás: Ilyenkor az integrandust tekinthetjük olyan szorzatnak, melynek az egyik tényezője az eredeti integrandus, a másik tényezője pedig az azonosan 1 polinom. A parciális integrálás során ugyanúgy járunk el, mint az előző típus esetén.

III. Exponenciális- és szinusz-, vagy koszinusz függvény szorzata.
Megoldás: Kétszer egymás után parciálisan integrálunk. (Tetszőleges megfeleltetéssel, de mindkétszer ugyanolyan szerepkiosztással.) A második lépés után egy függvényegyenlethez jutunk, melyből elemi átalakítással „kifejezhetjük" a keresett függvényt.

Milyen függvényeket nevezünk elemi törtfüggvényeknek?

Az

- **i)** $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$
  $x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R}\ (i = 0, \dots, n)$
- **ii)** $f(x) = \dfrac{A}{(x-a)^n}, \quad a \in \mathbb{R},\ x \neq a,\ n \in \mathbb{N}^*,\ A \in \mathbb{R}$
- **iii)** $f(x) = \dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n},$
  $A, B \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R},\ a, b, c \in \mathbb{R}, (b^2 - 4ac < 0),\ n \in \mathbb{N}^*,$

alakú függvényeket elemi törtfüggvényeknek nevezzük.

Írja le a racionális törtfüggvények integrálásának lépéseit!

1.lépés: A racionális függvényt polinom és valódi racionális tört összegére bontjuk.

Az $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ $x \in \mathbb{R} \setminus \Lambda_Q$, $\Lambda_Q = \{\lambda \in \mathbb{R} | \; Q(\lambda) = 0\}$ *(*P, Q *polinomok) racionális törtfüggvényt* ***valódi racionális tört****nek nevezzük, ha* $\deg P < \deg Q$*. (Ha* $\deg P \geq \deg Q$*, akkor a függvényt* ***racionális áltört****nek hívjuk.)*

Ha $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} (x \in \mathbb{R} \setminus \Lambda_Q)$ egy racionális áltört, akkor P-n Q-val maradékos osztást végezve felbontjuk:

$$P(x) = P_1(x) \cdot Q(x) + R(x), \quad \text{ahol } R = 0, \text{ vagy } \deg R < \deg Q.$$

Ekkor

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x) \cdot Q(x) + R(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

ahol $\frac{R(x)}{Q(x)}$ már valódi racionális tört.

2.lépés: A nevezőt irreducibilis (elsőfokú-, vagy negatív diszkriminánsú másodfokú-) tényezők szorzatára bontjuk.

3.lépés: A törtet elemi törtek összegére bontjuk az egyenlő együtthatók módszerével.

Írja fel a trigonometrikus függvényekre vonatkozó linearizáló formulákat!

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad x \in \mathbb{R}$$

Írja fel a tg(x/2)-es helyettesítéshez szükséges összefüggéseket!

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad x \in (-\pi, \pi)$$

$$dx = \frac{2}{1 + t^2} dt$$

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Írja fel a tgx-es helyettesítéshez szükséges összefüggéseket és azt, mikor érdemes alkalmazni a módszert!

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{tg} x \quad x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \\ dx &= \frac{1}{1+y^2} dy \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{y^2}{1+y^2} \\ \cos^2 x &= \frac{1}{1+y^2} \\ \sin x \cdot \cos x &= \frac{y}{1+y^2} \end{aligned}$$

A $\mathcal{R}(\sin x,\ \cos x) = \mathcal{R}(-\sin x,\ -\cos x)$ feltétel a gyakorlatban annyit jelent, hogy mind a $\sin x$, mind pedig a $\cos x$ hatványai az integrandusban páros kitevősek és a vegyes szorzatok esetén a kitevők összege páros.

Mit nevezünk egy intervallum felosztásának?

Legyen $\mathcal{I} := [a, b]$ véges, zárt intervallum.

Definíció

*A τ halmazt az $\mathcal{I} := [a, b]$ intervallum egy **felosztás**ának nevezzük, ha*

i) $\tau \subseteq \mathcal{I}$,

ii) τ *véges halmaz,*

iii) $a, b \in \tau$.

Jelölés: $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$.

Az $\mathcal{I}$ intervallum felosztásainak halmazát $\mathcal{F}(\mathcal{I})$-vel jelöljük.

Mit ért egy egy intervallum felosztásának finomságán?

*Legyen $\tau \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ az $\mathcal{I}$ intervallum egy felosztása. A τ felosztás **finomságá**n a*

$$\|\tau\| := \max_{i=1}^{n} \{x_i - x_{i-1}\}$$

számot értjük.

Mit nevezünk alsó közelíto összegnek?

Mit nevezünk felső közelítő összegnek? Mit mondhatunk ugyanazon függvény alsó- és felső közelítő összegeinek viszonyáról?

Legyen $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény és $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ az $\mathcal{I}$ intervallum egy felosztása. Jelölje

$$\begin{aligned} m_i &:= \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}, \quad i = 1, \dots, n \\ M_i &:= \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Ekkor a

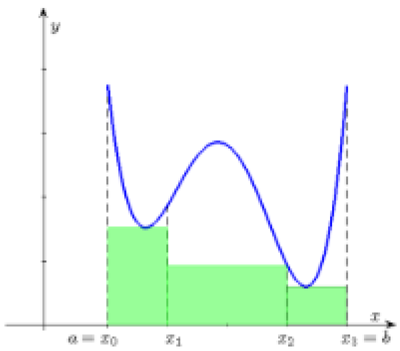
$$S(f, \tau) := \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

*összeget a függvény, τ felosztáshoz tartozó **felső közelítő összegének**, a*

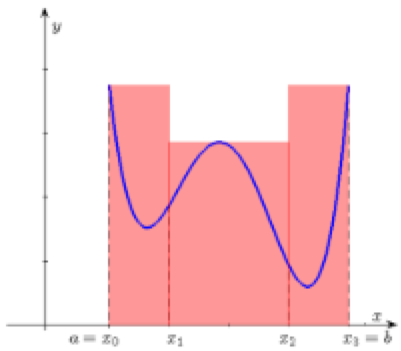
$$s(f, \tau) := \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

*összeget pedig a függvény, τ felosztáshoz tartozó **alsó közelítő összegének** nevezzük.*

Alsó- és felső- közelítő összeg



$s(f, \tau)$



$S(f, \tau)$

Megjegyzés

Mivel $m_i \le M_i$ minden i index esetén, ezért bármely τ felosztás mellett $s(f, \tau) \le S(f, \tau)$.

Hogyan változik a felső közelítő összeg értéke, ha a felosztást finomítjuk? Hogyan változik az alsó közelítő összeg értéke, ha a felosztást finomítjuk?

Legyen $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ugyanazon intervallum két felosztása. Akkor mondjuk, hogy a τ_2 felosztás a τ_1 felosztás ***finomítása****, ha annak minden osztópontját tartalmazza, azaz ha $\tau_1 \subset \tau_2$.*

Tétel

a) *Ha $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ és $\tau_1 \subset \tau_2$, akkor*

$$s(f, \tau_1) \leq s(f, \tau_2) \quad \text{és} \quad S(f, \tau_1) \geq S(f, \tau_2),$$

azaz a felosztás finomításával az alsó közelítő összeg nem csökken, a felső közelítő összeg pedig nem növekszik.

b) *Bármely két $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ felosztás esetén*

$$s(f, \tau_1) \leq S(f, \tau_2).$$

Mit nevezünk az f függvény Darboux-féle alsó integráljának? Mit nevezünk az f függvény Darboux-féle felso integráljának?

Legyen f az $\mathcal{I} = [a, b]$ zárt intervallumon korlátos függvény. Az

$$I_*(f) := \sup\{s(f, \tau) : \ \tau \in \mathcal{F}(\mathcal{I})\}$$

értéket az f ***Darboux-féle alsó integráljának****, az*

$$I^*(f) := \inf\{S(f, \tau) : \ \tau \in \mathcal{F}(\mathcal{I})\}$$

értéket az f ***Darboux-féle felső integráljának*** *nevezzük.*

Mikor mondjuk, hogy az f függvény Riemann-integrálható? Mondjon példát olyan függvényre, amely Riemann szerint nem integrálható a [0,1]-intervallumon!

Akkor mondjuk, hogy az f függvény az $\mathcal{I} = [a, b]$ intervallumon ***Riemann-integrálható****, ha $I_*(f) = I^*(f) =: I$. Ekkor az I számot az f függvény* ***Riemann-integrál****jának nevezzük és $\int_a^b f(x)dx := I$ jelölést használjuk.*

Definíció

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ és f Riemann integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor a

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

halmaznak létezik területe és $T(H) = \int_a^b f(x)dx$.

Definiálja a Riemann-féle közelítő összeget!

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény és* $\tau \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ *az* $[a, b]$ *intervallum egy felosztása, amelyre* $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$.
Legyen továbbá

$$A_\tau := \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) | \; x_{i-1} \le \xi_i \le x_i, \; i = 1,2,\ldots,n\}$$

úgynevezett ***közbeeső pontok rendszere****. Ekkor a*

$$\sigma(f, \tau, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}), \quad \tau \in \mathcal{F}(\mathcal{I}), \xi \in A_\tau$$

számot az f *függvény* τ, ξ *paraméterpárhoz tartozó* ***Riemann-közelítőösszegének*** *nevezzük.*

Mikor mondjuk, hogy az intervallum egy felosztás-sorozata minden határon túl finomodó?

Akkor mondjuk, hogy a $\tau_0 \subseteq \tau_1 \subseteq \ldots \subseteq \tau_k \subseteq \ldots$ *felosztás-sorozat minden határon túl finomodó, ha bármely* $\varepsilon > 0$ *esetén létezik* k_0 *index, hogy* $\|\tau_{k_0}\| < \varepsilon$.

Tétel

Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható, ha* $\sigma(f, \tau, \xi)$ *közelítő összegek sorozata a felosztás minden határon túl való finomítása mellett a* ξ *közbeeső pontok rendszer választásától függetlenül ugyanahhoz a* I *számhoz tart.*

Milyen szükséges feltételt ismer függvények Riemann-integrálhatóságára?

Ha f *Riemann-integrálható, akkor korlátos.*

Írjon 3 elégséges feltételt függvények Riemann-integrálhatóságára!

i) *A véges zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény Riemann-integrálható.*

ii) *A véges zárt intervallumon értelmezett korlátos függvény Riemann-integrálható, ha legfeljebb véges sok szakadása van.*

iii) *A véges zárt intervallumon értelmezett korlátos és monoton függvény Riemann-integrálható.*

Mondja ki a határozott integrálra vonatkozó műveleti tulajdonságokat!

Tétel

Legyen az f függvény az $[a,b]$ intervallumon integrálható és c tetszőleges valós szám, ekkor a $c \cdot f$ függvény is integrálható az $[a,b]$ intervallumon és

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Tétel

Ha az f és a g függvények az $[a,b]$ intervallumon integrálhatók, akkor az $f+g$ függvény is integrálható az $[a,b]$ intervallumon és

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Tétel

Ha az f függvény az $[a,b]$ intervallumon integrálható, akkor annak bármely részintervallumán is integrálható.

Tétel (intervallum szerinti additivitás 1.)

Ha az f függvény az $[a,b]$ intervallumon integrálható és $a < c < b$, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Tétel (intervallum szerinti additivitás 2.)

Ha az f függvény az $[a,c]$ és $[c,b]$ intervallumokon integrálható, akkor integrálható az $[a,b]$ intervallumon és

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Ha az f függvény az $[a,b]$ intervallumon integrálható és $f(x) \geq 0$ minden $x \in [a,b]$ esetén, akkor

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Tétel

Ha az f és a g függvények az $[a,b]$ intervallumon integrálhatók és $f(x) \leq g(x)$ minden $x \in [a,b]$ esetén, akkor

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Legyen f függvény az $[a,b]$ intervallumon integrálható, ekkor

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Tétel

Legyen f függvény az $[a,b]$ intervallumon integrálható, továbbá $m := \inf\{f(x)|\ a \leq x \leq b\}$ és $M := \sup\{f(x)|\ a \leq x \leq b\}$, ekkor

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \cdot (b-a).$$

Mondja ki a Newton-Leibniz tételt!

Legyen az f függvény integrálható az $[a,b]$ intervallumon. Ha az f függvénynek létezik az $[a,b]$ intervallumon F primitív függvénye, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Mit nevezünk integrálfüggvénynek?

Legyen f függvény az $[a,b]$ intervallumon integrálható. Értelmezzük a F függvényt a következőképpen:

$$\mathcal{D}_F = [a,b], \quad F(x) := \int_a^x f(t)dt.$$

*Ekkor a $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt a f függvény **integrálfüggvényének** nevezzük.*

Tétel

Ha a f függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon, akkor a $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ integrálfüggvény az $[a,b]$ intervallumon differenciálható és $F' = f$.

Írja le az integrálfüggvényre vonatkozó tételt!

Ha a f függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon, akkor a $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ integrálfüggvény az $[a,b]$ intervallumon differenciálható és $F' = f$.

Mondja ki a parciális integrálás szabályát határozott integrál esetén!

Legyen f és g függvény az $[a,b]$ intervallumon differenciálható és f', g' függvények legyenek Riemann-integrálhatók az $[a,b]$-n. Ekkor

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x) \cdot g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx.$$

Mondja ki a helyettesítéses integrálás szabályát határozott integrál esetén!

Legyen a $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a,b]$-n, differenciálható (a,b)-n és a φ' deriváltfüggvény legyen integrálható az [a,b]-n, továbbá f legyen folytonos a $\varphi([a,b])$ intervallumon. Ekkor

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du = \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx.$$

Definiálja az improprius integrál mindkét alapesetét!

A Riemann-integrálhatóság szükséges feltételein (véges intervallumon értelmezett, korlátos függvény) próbálunk lazítani. Így a következő esetekhez jutunk:

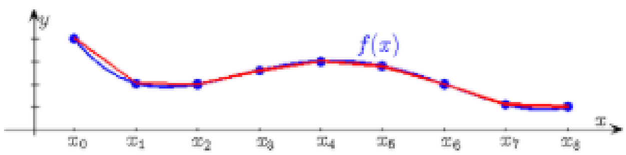
- Végtelen intervallumon értelmezett függvények integrálása
  - $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$
  - $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$
- Nem korlátos függvény integrálása
  - A függvény nem korlátos a bal végpont közelében
  - A függvény nem korlátos a jobb végpont közelében
  - Az intervallum belsejében található egy pont, melynek környezetében a függvény nem korlátos

Definiálja a rektifikálható görbe ívhosszát!

*Folytonos görbe **ívhosszán** értjük a görbéhez írt törött vonalak hosszának szuprémumát, feltéve, hogy ez létezik. Legyen adott a görbe az $[a, b]$ intervallumon az $y = f(x)$ egyenlettel, ahol $f(x)$ folytonosan differenciálható $[a, b]$-n. Ekkor a görbe ívhossza:*

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

*Ha a görbének létezik ívhossza, akkor **rektifikálható**nak nevezzük.*



Mondja ki a forgástest térfogatára vonatkozó mindkét tételt!

Tétel

Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ folytonos függvény grafikonjának x-tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogata:

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)dx.$$

Tétel

Az $f : [a,b] \to \mathbb{R},\ (a,b > 0)$ kölcsönösen egyértelmű, folytonos függvény grafikonjának y-tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogata:

$$V_y = \pi \cdot \int_{f(a)}^{f(b)} \bar{f}^2(y)dy.$$

Mondja ki a forgásfelület felszínére vonatkozó tételt!

Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ folytonosan differenciálható függvény grafikonjának x-tengely körüli megforgatásával nyert forgásfelület felszíne:

$$A = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Mit ért függvényegyenlet alatt?

*Az olyan egyenletet, melyben az ismeretlen egy függvény **függvényegyenlet**nek nevezzük.*

Mi a differenciálegyenlet?

*Az függvényegyenletet, melyben az ismeretlen függvény deriváltja, vagy deriváltjai szerepelnek **differenciálegyenlet**nek nevezzük.*

Mikor nevezzük a differenciálegyenletet közönségesnek?

*Ha az ismeretlen függvény egyváltozós valós függvény, akkor a differenciálegyenletet **közönséges differenciálegyenlet**nek nevezzük.*

Mikor beszélünk parciális differenciálegyenletről?

*Ha az ismeretlen függvény többváltozós valós függvény, akkor a differenciálegyenletet **parciális differenciálegyenlet**nek nevezzük.*

Definiálja a lineáris differenciálegyenletet!

*A differenciálegyenletet **lineáris**nak nevezzük, ha az egyenletben mind az ismeretlen függvény, mind annak deriváltjai csak az első hatványon szerepelnek és sem ezek szorzatai sem pedig irracionális vagy transzcendens függvényei nem fordulnak elő.*

Definiálja a homogén differenciálegyenletet! Mikor nevezzük a differenciálegyenletet homogénnek? Mikor nevezzük a differenciálegyenletet inhomogénnek?

*A differenciálegyenletet **homogén**nak nevezzük, ha nincs benne konstans illetve olyan tag, amely csak a független változótól függ. (Azaz a differenciál egyenlet minden tagja tartalmazza az ismeretlen függvényt, vagy annak valamelyik deriváltját.) Ha a differenciálegyenlet nem homogén, akkor **inhomogénnak** nevezzük.*

Mit ért a differenciálegyenletet rendjén!

*A differenciálegyenletet n**-edrendű**nek nevezzük, ha az ismeretlen függvény deriváltjai közül az egyenletben az n-edik derivált a legmagasabbrendű.*

Definiálja a differenciálegyenlet megoldását!

Definíció

*A differenciálegyenlet **megoldása** olyan függvény, amely a deriváltjaival együtt kielégíti a differenciálegyenletet.*

Definíció

*Az n-edrendű differenciálegyenlet **általános megoldása** olyan függvény, amely a deriváltjaival együtt kielégíti a differenciálegyenletet és pontosan n darab, egymástól független szabad paramétert tartalmaz.*

Definíció

*Az n-edrendű differenciálegyenlet **partikuláris megoldása** egy olyan függvény, amely a deriváltjaival együtt kielégíti a differenciálegyenletet és legfeljebb $n-1$ darab, egymástól független szabad paramétert tartalmaz.*