Numerikus módszerek

Távoktatás 6. hét
I. Próba Dolgozat Megoldások
2. gyakorlat

Király Balázs

Pécsi Tudományegyetem
Matematikai és Informatikai Intézet

2020.04.29

7. Feladat

7. Feladat (1. típus)

Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldására írja fel a Jacobi-módszert és állapítsa meg, hogy konvergens-e az eljárás minden $\underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ kezdővektor esetén. Adjuk meg, hogy, hány lépés kell a 10^{-2} pontossághoz, ha $\underline{x}^{(0)} = \underline{0}$.

7. Feladat

Megoldás :

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

7. Feladat

Megoldás :

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Feladat

Megoldás :

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ekkor

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

7. Feladat

Megoldás :

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} A\underline{x} &= \underline{b} \\ (L + D + U)\underline{x} &= \underline{b} \end{aligned}$$

7. Feladat

Megoldás :

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} A\underline{x} &= \underline{b} \\ (L+D+U)\underline{x} &= \underline{b} \\ D\underline{x} &= -(L+U)\underline{x} + \underline{b} \end{aligned}$$

7. Feladat

Megoldás:

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} A\underline{x} &= \underline{b} \\ (L + D + U)\underline{x} &= \underline{b} \\ D\underline{x} &= -(L + U)\underline{x} + \underline{b} \\ \underline{x} &= -D^{-1}(L + U)\underline{x} + D^{-1}\underline{b} \end{aligned}$$

7. Feladat

Megoldás:

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} A\underline{x} &= \underline{b} \\ (L + D + U)\underline{x} &= \underline{b} \\ D\underline{x} &= -(L+U)\underline{x} + \underline{b} \\ \underline{x} &= -D^{-1}(L+U)\underline{x} + D^{-1}\underline{b} \end{aligned}$$

Az iterációs formula

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{B_{\mathcal{J}}}\underline{x}^{(k)} + \underbrace{D^{-1}\underline{b}}_{\underline{c}_{\mathcal{J}}}$$

7. Feladat

Megoldás:

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} A\underline{x} &= \underline{b} \\ (L+D+U)\underline{x} &= \underline{b} \\ D\underline{x} &= -(L+U)\underline{x} + \underline{b} \\ \underline{x} &= -D^{-1}(L+U)\underline{x} + D^{-1}\underline{b} \end{aligned}$$

Az iterációs formula

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{B_{\mathcal{J}}}\underline{x}^{(k)} + \underbrace{D^{-1}\underline{b}}_{\underline{c}_{\mathcal{J}}}$$

7. Feladat

Megoldás:

$$B_{\mathcal{J}} = -D^{-1}(L+U) =$$

7. Feladat

Megoldás:

$$B_{\mathcal{J}} = -D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} =$$

7. Feladat

Megoldás:

$$B_{\mathcal{J}} = -D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

7. Feladat

Megoldás :

$$B_{\mathcal{J}} = -D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}_{\mathcal{J}} = D^{-1}\underline{b} =$$

7. Feladat

Megoldás :

$$B_{\mathcal{J}} = -D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}_{\mathcal{J}} = D^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

7. Feladat

Megoldás:

$$B_{\mathcal{J}} = -D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}_{\mathcal{J}} = D^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

7. Feladat

Megoldás:

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

7. Feladat

Megoldás:

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

Ha $\|B_{\mathcal{J}}\| < 1$ bármely illeszkedő normában, akkor a leképezés kontrakció és alkalmazható a fixpont tétel.

7. Feladat

Megoldás :

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

Ha $\|B_{\mathcal{J}}\| < 1$ bármely illeszkedő normában, akkor a leképezés kontrakció és alkalmazható a fixpont tétel.

Például $\|B_{\mathcal{J}}\|_1 =$

7. Feladat

Megoldás:

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

Ha $\|B_{\mathcal{J}}\| < 1$ bármely illeszkedő normában, akkor a leképezés kontrakció és alkalmazható a fixpont tétel.

Például $\|B_{\mathcal{J}}\|_1 = \max\left\{\frac{1}{4}, \frac{19}{20}, \frac{9}{10}\right\} =$

7. Feladat

Megoldás :

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

Ha $\|B_{\mathcal{J}}\| < 1$ bármely illeszkedő normában, akkor a leképezés kontrakció és alkalmazható a fixpont tétel.

Például $\|B_{\mathcal{J}}\|_1 = \max\left\{\frac{1}{4},\ \frac{19}{20},\ \frac{9}{10}\right\} = \frac{19}{20} = q$

7. Feladat

Megoldás:

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

Ha $\|B_{\mathcal{J}}\| < 1$ bármely illeszkedő normában, akkor a leképezés kontrakció és alkalmazható a fixpont tétel.

Például $\|B_{\mathcal{J}}\|_1 = \max\left\{\frac{1}{4},\ \frac{19}{20},\ \frac{9}{10}\right\} = \frac{19}{20} = q < 1$

Azaz a leképezés kontrakció, így a fixpont tétel értelmében az iteráció konvergens minden $\underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ kezdővektor esetén.

7. Feladat

Megoldás:

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

Ha $\|B_{\mathcal{J}}\| < 1$ bármely illeszkedő normában, akkor a leképezés kontrakció és alkalmazható a fixpont tétel.

Például $\|B_{\mathcal{J}}\|_1 = \max\left\{\frac{1}{4}, \frac{19}{20}, \frac{9}{10}\right\} = \frac{19}{20} = q < 1$

Azaz a leképezés kontrakció, így a fixpont tétel értelmében az iteráció konvergens minden $\underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ kezdővektor esetén.

Alkalmazható a fixpont tétel hibabecslése:

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_1 \le \frac{q^k}{1-q}\|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1$$

7. Feladat

Megoldás :

A hibabecsléshez :

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0}$$

7. Feladat

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} =$$

7. Feladat

Megoldás :

A hibabecsléshez :

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} =$$

7. Feladat

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Megoldás :

A hibabecsléshez :

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} =$$

7. Feladat

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} =$$

7. Feladat

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}}$$

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 = \frac{38}{20}$$

7. Feladat

Megoldás :

A hibabecsléshez :

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 = \frac{38}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^{*}\|_1 \leq \frac{q^k}{1-q}\|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 =$$

7. Feladat

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 = \frac{38}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_1 \leq \frac{q^k}{1-q}\|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 = \frac{\left(\frac{19}{20}\right)^k}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20}$$

7. Feladat

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 = \frac{38}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_1 \leq \frac{q^k}{1-q}\|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 = \frac{\left(\frac{19}{20}\right)^k}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} < 10^{-2}$$

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 = \frac{38}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_1 \leq \frac{q^k}{1-q}\|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 = \frac{\left(\frac{19}{20}\right)^k}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} < 10^{-2}$$

$$\frac{\left(\frac{19}{20}\right)^k}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} \quad < \quad 10^{-2}$$

7. Feladat

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 = \frac{38}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_1 \leq \frac{q^k}{1-q}\|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 = \frac{\left(\frac{19}{20}\right)^k}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} < 10^{-2}$$

$$\frac{\left(\frac{19}{20}\right)^k}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} < 10^{-2}$$

$$\left(\frac{19}{20}\right)^k < \frac{1}{38} \cdot 10^{-2}$$

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 = \frac{38}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^{*}\|_1 \le \frac{q^k}{1-q}\|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 = \frac{\left(\frac{19}{20}\right)^k}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} < 10^{-2}$$

$$\frac{\left(\frac{19}{20}\right)^k}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} < 10^{-2} \qquad k \cdot \ln\frac{19}{20} < \ln\frac{1}{3800}$$

$$\left(\frac{19}{20}\right)^k < \frac{1}{38} \cdot 10^{-2}$$

7. Feladat

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 = \frac{38}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^{*}\|_1 \leq \frac{q^k}{1-q}\|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 = \frac{\left(\frac{19}{20}\right)^k}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} < 10^{-2}$$

$$\frac{\left(\frac{19}{20}\right)^k}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} < 10^{-2} \qquad k \cdot \ln\frac{19}{20} < \ln\frac{1}{3800}$$

$$\left(\frac{19}{20}\right)^k < \frac{1}{38} \cdot 10^{-2} \qquad k > \frac{\ln\frac{1}{3800}}{\ln\frac{19}{20}}$$

7. Feladat

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 = \frac{38}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_1 \leq \frac{q^k}{1-q}\|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 = \frac{\left(\frac{19}{20}\right)^k}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} < 10^{-2}$$

$$\frac{\left(\frac{19}{20}\right)^k}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} < 10^{-2} \qquad k \cdot \ln\frac{19}{20} < \ln\frac{1}{3800}$$

$$\left(\frac{19}{20}\right)^k < \frac{1}{38} \cdot 10^{-2} \qquad k > \frac{\ln\frac{1}{3800}}{\ln\frac{19}{20}} \approx 160{,}7$$

7. Feladat

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 = \frac{38}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^{*}\|_1 \leq \frac{q^k}{1-q}\|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 = \frac{\left(\frac{19}{20}\right)^k}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} < 10^{-2}$$

$$\frac{\left(\frac{19}{20}\right)^k}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} < 10^{-2} \qquad k \cdot \ln\frac{19}{20} < \ln\frac{1}{3800}$$

$$\left(\frac{19}{20}\right)^k < \frac{1}{38} \cdot 10^{-2} \qquad k > \frac{\ln\frac{1}{3800}}{\ln\frac{19}{20}} \approx 160{,}7$$

Azaz 161 lépés kell.

7. Feladat (2. típus)

Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldására írja fel a Gauss-Seidel iterációt és állapítsa meg, hogy konvergens-e az eljárás minden $\underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ kezdővektor esetén. Adjuk meg, hogy, hány lépés kell a 10^{-2} pontossághoz, ha $\underline{x}^{(0)} = \underline{0}$.

7. Feladat

Megoldás:

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

7. Feladat

Megoldás :

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Feladat

Megoldás:

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ekkor

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

7. Feladat

Megoldás :

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} A\underline{x} &= \underline{b} \\ (L + D + U)\underline{x} &= \underline{b} \end{aligned}$$

7. Feladat

Megoldás:

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} A\underline{x} &= \underline{b} \\ (L+D+U)\underline{x} &= \underline{b} \\ (L+D)\underline{x} &= -U\underline{x} + \underline{b} \end{aligned}$$

7. Feladat

Megoldás:

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} A\underline{x} &= \underline{b} \\ (L+D+U)\underline{x} &= \underline{b} \\ (L+D)\underline{x} &= -U\underline{x} + \underline{b} \\ \underline{x} &= -(L+D)^{-1}U\underline{x} + (L+D)^{-1}\underline{b} \end{aligned}$$

7. Feladat

Megoldás:

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} A\underline{x} &= \underline{b} \\ (L+D+U)\underline{x} &= \underline{b} \\ (L+D)\underline{x} &= -U\underline{x} + \underline{b} \\ \underline{x} &= -(L+D)^{-1}U\underline{x} + (L+D)^{-1}\underline{b} \end{aligned}$$

Az iterációs formula

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underbrace{-(L+D)^{-1}U}_{B_S}\,\underline{x}^{(k)} + \underbrace{(L+D)^{-1}\underline{b}}_{\underline{c}_S}$$

7. Feladat

Megoldás :

Az $(L + D)$ mátrix invertálására Gauss eliminációt használunk.

7. Feladat

Megoldás :

Az $(L+D)$ mátrix invertálására Gauss eliminációt használunk.

$$L+D=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

7. Feladat

Megoldás :

Az $(L+D)$ mátrix invertálására Gauss eliminációt használunk.

$$L+D=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

7. Feladat

Megoldás :

Az $(L + D)$ mátrix invertálására Gauss eliminációt használunk.

$$L + D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

7. Feladat

Megoldás :

Az $(L+D)$ mátrix invertálására Gauss eliminációt használunk.

$$L+D=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{3}{20} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array}\right]$$

7. Feladat

Megoldás :

Az $(L+D)$ mátrix invertálására Gauss eliminációt használunk.

$$L+D=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{3}{20} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{20} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{80} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

7. Feladat

Megoldás:

Az $(L+D)$ mátrix invertálására Gauss eliminációt használunk.

$$L+D=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{3}{20} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{20} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{80} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Így

$$(L+D)^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{80} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

7. Feladat

Megoldás :

$$B_{\mathcal{S}} = -(L+D)^{-1}U =$$

7. Feladat

Megoldás :

$$B_{\mathcal{S}} = -(L+D)^{-1}U = -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{80} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

7. Feladat

Megoldás:

$$B_{\mathcal{S}} = -(L+D)^{-1}U = -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{80} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{1}{20} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{80} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

7. Feladat

Megoldás:

$$B_S = -(L+D)^{-1}U = -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{80} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{1}{20} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{80} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}_S = (L+D)^{-1}\underline{b} =$$

7. Feladat

Megoldás:

$$B_{\mathcal{S}} = -(L+D)^{-1}U = -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{80} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{1}{20} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{80} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}_{\mathcal{S}} = (L+D)^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{80} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

7. Feladat

Megoldás:

$$B_{\mathcal{S}} = -(L+D)^{-1}U = -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{80} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{1}{20} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{80} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}_{\mathcal{S}} = (L+D)^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{80} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

7. Feladat

Megoldás :

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

7. Feladat

Megoldás:

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

Ha $\|B_S\| < 1$ bármely illeszkedő normában, akkor a leképezés kontrakció és alkalmazható a fixpont tétel.

7. Feladat

Megoldás:

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

Ha $\|B_{\mathcal{S}}\| < 1$ bármely illeszkedő normában, akkor a leképezés kontrakció és alkalmazható a fixpont tétel.

Például $\|B_{\mathcal{S}}\|_\infty =$

7. Feladat

Megoldás :

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

Ha $\|B_{\mathcal{S}}\| < 1$ bármely illeszkedő normában, akkor a leképezés kontrakció és alkalmazható a fixpont tétel.

Például $\|B_{\mathcal{S}}\|_\infty = \max\left\{\frac{3}{5},\ \frac{9}{20},\ \frac{27}{80}\right\} =$

7. Feladat

Megoldás :

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

Ha $\|B_{\mathcal{S}}\| < 1$ bármely illeszkedő normában, akkor a leképezés kontrakció és alkalmazható a fixpont tétel.

Például $\|B_{\mathcal{S}}\|_\infty = \max\left\{\frac{3}{5}, \frac{9}{20}, \frac{27}{80}\right\} = \frac{9}{20} = q$

7. Feladat

Megoldás :

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

Ha $\|B_{\mathcal{S}}\| < 1$ bármely illeszkedő normában, akkor a leképezés kontrakció és alkalmazható a fixpont tétel.

Például $\|B_{\mathcal{S}}\|_\infty = \max\left\{\frac{3}{5},\ \frac{9}{20},\ \frac{27}{80}\right\} = \frac{9}{20} = q < 1$

Azaz a leképezés kontrakció, így a fixpont tétel értelmében az iteráció konvergens minden $\underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ kezdővektor esetén.

7. Feladat

Megoldás:

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

Ha $\|B_{\mathcal{S}}\| < 1$ bármely illeszkedő normában, akkor a leképezés kontrakció és alkalmazható a fixpont tétel.

Például $\|B_{\mathcal{S}}\|_\infty = \max\left\{\frac{3}{5},\ \frac{9}{20},\ \frac{27}{80}\right\} = \frac{9}{20} = q < 1$

Azaz a leképezés kontrakció, így a fixpont tétel értelmében az iteráció konvergens minden $\underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ kezdővektor esetén.

Alkalmazható a fixpont tétel hibabecslése:

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_\infty \leq \frac{q^k}{1-q}\|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_\infty$$

7. Feladat

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0}$$

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} =$$

7. Feladat

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} =$$

7. Feladat

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

7. Feladat

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} =$$

7. Feladat

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} =$$

7. Feladat

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}}$$

7. Feladat

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{27}{20}$$

7. Feladat

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{27}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_\infty \leq \frac{q^k}{1-q}\|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_\infty =$$

7. Feladat

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{27}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_\infty \leq \frac{q^k}{1-q}\|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20}$$

7. Feladat

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{27}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_\infty \leq \frac{q^k}{1-q}\|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} < 10^{-2}$$

7. Feladat

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{27}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_\infty \le \frac{q^k}{1-q}\|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} < 10^{-2}$$

$$\frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} \quad < \quad 10^{-2}$$

7. Feladat

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{27}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_\infty \le \frac{q^k}{1-q}\|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} < 10^{-2}$$

$$\frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} \quad < \quad 10^{-2}$$

$$\left(\frac{9}{20}\right)^k \quad < \quad \frac{11}{27} \cdot 10^{-2}$$

7. Feladat

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{27}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_\infty \leq \frac{q^k}{1-q}\|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} < 10^{-2}$$

$$\frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} < 10^{-2} \qquad k \cdot \ln\frac{9}{20} < \ln\frac{11}{2700}$$

$$\left(\frac{9}{20}\right)^k < \frac{11}{27} \cdot 10^{-2}$$

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{27}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_\infty \leq \frac{q^k}{1-q}\|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} < 10^{-2}$$

$$\frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} < 10^{-2} \qquad k \cdot \ln\frac{9}{20} < \ln\frac{11}{2700}$$

$$\left(\frac{9}{20}\right)^k < \frac{11}{27} \cdot 10^{-2} \qquad k > \frac{\ln\frac{11}{2700}}{\ln\frac{9}{20}}$$

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{27}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_\infty \le \frac{q^k}{1-q}\|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} < 10^{-2}$$

$$\frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} < 10^{-2} \qquad k \cdot \ln\frac{9}{20} < \ln\frac{11}{2700}$$

$$\left(\frac{9}{20}\right)^k < \frac{11}{27} \cdot 10^{-2} \qquad k > \frac{\ln\frac{11}{2700}}{\ln\frac{9}{20}} \approx 6{,}89$$

7. Feladat

Megoldás:

A hibabecsléshez:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{27}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_\infty \le \frac{q^k}{1-q}\|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} < 10^{-2}$$

$$\frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} < 10^{-2} \qquad k \cdot \ln\frac{9}{20} < \ln\frac{11}{2700}$$

$$\left(\frac{9}{20}\right)^k < \frac{11}{27} \cdot 10^{-2} \qquad k > \frac{\ln\frac{11}{2700}}{\ln\frac{9}{20}} \approx 6{,}89$$

Azaz 7 lépés kell.

8. Feladat

8. Feladat

Írjunk fel egy sorozatot $\sqrt[3]{10}$ közelítésére. Számoljuk ki a keresett értéket $\frac{1}{20}$ pontossággal!

8. Feladat

Írjunk fel egy sorozatot $\sqrt[3]{10}$ közelítésére. Számoljuk ki a keresett értéket $\frac{1}{20}$ pontossággal!

Megoldás:

A keresett $x^* = \sqrt[3]{10}$ érték a $P(x) = x^3 - 10$ polinom (egyik) gyöke.

8. Feladat

Írjunk fel egy sorozatot $\sqrt[3]{10}$ közelítésére. Számoljuk ki a keresett értéket $\frac{1}{20}$ pontossággal!

Megoldás:

A keresett $x^* = \sqrt[3]{10}$ érték a $P(x) = x^3 - 10$ polinom (egyik) gyöke.
Intervallum felezést fogunk használni.

8. Feladat

8. Feladat

Írjunk fel egy sorozatot $\sqrt[3]{10}$ közelítésére. Számoljuk ki a keresett értéket $\frac{1}{20}$ pontossággal!

Megoldás:

A keresett $x^* = \sqrt[3]{10}$ érték a $P(x) = x^3 - 10$ polinom (egyik) gyöke.
Intervallum felezést fogunk használni.
Olyan kiinduló $[a,\ b]$ intervallumra van szükségünk, amely tartalmazza a keresett gyököt és $P(a) \cdot P(b) < 0$.

8. Feladat

8. Feladat

Írjunk fel egy sorozatot $\sqrt[3]{10}$ közelítésére. Számoljuk ki a keresett értéket $\frac{1}{20}$ pontossággal!

Megoldás:

A keresett $x^* = \sqrt[3]{10}$ érték a $P(x) = x^3 - 10$ polinom (egyik) gyöke.
Intervallum felezést fogunk használni.
Olyan kiinduló $[a,\ b]$ intervallumra van szükségünk, amely tartalmazza a keresett gyököt és $P(a) \cdot P(b) < 0$.
Mivel $2 = \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{10} < \sqrt[3]{27} = 3$,

8. Feladat

8. Feladat

Írjunk fel egy sorozatot $\sqrt[3]{10}$ közelítésére. Számoljuk ki a keresett értéket $\frac{1}{20}$ pontossággal!

Megoldás:

A keresett $x^* = \sqrt[3]{10}$ érték a $P(x) = x^3 - 10$ polinom (egyik) gyöke.
Intervallum felezést fogunk használni.
Olyan kiinduló $[a,\ b]$ intervallumra van szükségünk, amely tartalmazza a keresett gyököt és $P(a) \cdot P(b) < 0$.
Mivel $2 = \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{10} < \sqrt[3]{27} = 3$, ezért a $[2,\ 3]$ intervallum tartalmazza x^*-ot.

8. Feladat

8. Feladat

Írjunk fel egy sorozatot $\sqrt[3]{10}$ közelítésére. Számoljuk ki a keresett értéket $\frac{1}{20}$ pontossággal!

Megoldás:

A keresett $x^* = \sqrt[3]{10}$ érték a $P(x) = x^3 - 10$ polinom (egyik) gyöke.
Intervallum felezést fogunk használni.
Olyan kiinduló $[a,\ b]$ intervallumra van szükségünk, amely tartalmazza a keresett gyököt és $P(a) \cdot P(b) < 0$.
Mivel $2 = \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{10} < \sqrt[3]{27} = 3$, ezért a $[2,\ 3]$ intervallum tartalmazza x^*-ot.

$$\left.\begin{aligned} P(2) &= 8 - 10 = -2 < 0 \\ P(3) &= 27 - 10 = 17 > 0 \end{aligned}\right\}$$

8. Feladat

8. Feladat

Írjunk fel egy sorozatot $\sqrt[3]{10}$ közelítésére. Számoljuk ki a keresett értéket $\frac{1}{20}$ pontossággal!

Megoldás:

A keresett $x^* = \sqrt[3]{10}$ érték a $P(x) = x^3 - 10$ polinom (egyik) gyöke.
Intervallum felezést fogunk használni.
Olyan kiinduló $[a,\ b]$ intervallumra van szükségünk, amely tartalmazza a keresett gyököt és $P(a) \cdot P(b) < 0$.
Mivel $2 = \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{10} < \sqrt[3]{27} = 3$, ezért a $[2,\ 3]$ intervallum tartalmazza x^*-ot.

$$\left.\begin{array}{r} P(2) = 8 - 10 = -2 < 0 \\ P(3) = 27 - 10 = 17 > 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x^* \in [2,\ 3]$$

Megoldás :

Hibabecslés : $\left.\begin{array}{l} |x_k - x^*| \\ |y_k - x^*| \end{array}\right\} \leq \dfrac{1}{2^k}$

Megoldás :

Hibabecslés :
$$\left.\begin{array}{l} |x_k - x^*| \\ |y_k - x^*| \end{array}\right\} \leq \frac{1}{2^k} < \frac{1}{20}$$

8. Feladat

Megoldás :

Hibabecslés : $\left.\begin{array}{l}|x_k - x^*| \\ |y_k - x^*|\end{array}\right\} \leq \frac{1}{2^k} < \frac{1}{20} \quad \Leftrightarrow \quad 2^k > 20$

8. Feladat

Megoldás :

Hibabecslés : $\left.\begin{matrix} |x_k - x^*| \\ |y_k - x^*| \end{matrix}\right\} \leq \frac{1}{2^k} < \frac{1}{20} \quad \Leftrightarrow \quad 2^k > 20$

Azaz $k = 5$ már jó.

8. Feladat

Megoldás:

Hibabecslés:
$$\left.\begin{array}{l}|x_k - x^*| \\ |y_k - x^*|\end{array}\right\} \leq \frac{1}{2^k} < \frac{1}{20} \quad \Leftrightarrow \quad 2^k > 20$$

Azaz $k = 5$ már jó. z_4 mindenképpen az 5. intervallum egyik végpontja lesz, ezért $x^* \approx z_4$ jó közelítés.

8. Feladat

Megoldás :

Hibabecslés :
$$\left.\begin{array}{l}|x_k - x^*| \\ |y_k - x^*|\end{array}\right\} \leq \frac{1}{2^k} < \frac{1}{20} \qquad \Leftrightarrow \qquad 2^k > 20$$

Azaz $k = 5$ már jó. z_4 mindenképpen az 5. intervallum egyik végpontja lesz, ezért $x^* \approx z_4$ jó közelítés.

$$\overset{-}{x_0 = 2} \qquad \overset{+}{y_0 = 3} \qquad z_0 = 2{,}5 \qquad P(z_0) = 5{,}625 > 0$$

8. Feladat

Megoldás:

Hibabecslés: $\left.\begin{array}{l}|x_k - x^*| \\ |y_k - x^*|\end{array}\right\} \leq \frac{1}{2^k} < \frac{1}{20} \quad \Leftrightarrow \quad 2^k > 20$

Azaz $k = 5$ már jó. z_4 mindenképpen az 5. intervallum egyik végpontja lesz, ezért $x^* \approx z_4$ jó közelítés.

$-$	$+$		
$x_0 = 2$	$y_0 = 3$	$z_0 = 2{,}5$	$P(z_0) = 5{,}625 > 0$
$x_1 = 2$	$y_1 = 2{,}5$	$z_1 = 2{,}25$	$P(z_1) = 1{,}39 > 0$

8. Feladat

Megoldás:

Hibabecslés: $\left.\begin{array}{l}|x_k - x^*| \\ |y_k - x^*|\end{array}\right\} \le \dfrac{1}{2^k} < \dfrac{1}{20} \quad \Leftrightarrow \quad 2^k > 20$

Azaz $k = 5$ már jó. z_4 mindenképpen az 5. intervallum egyik végpontja lesz, ezért $x^* \approx z_4$ jó közelítés.

$-$	$+$		
$x_0 = 2$	$y_0 = 3$	$z_0 = 2{,}5$	$P(z_0) = 5{,}625 > 0$
$x_1 = 2$	$y_1 = 2{,}5$	$z_1 = 2{,}25$	$P(z_1) = 1{,}39 > 0$
$x_2 = 2$	$y_2 = 2{,}25$	$z_2 = 2{,}125$	$P(z_2) = -0{,}404 < 0$

8. Feladat

Megoldás:

Hibabecslés: $\left.\begin{array}{l}|x_k - x^*| \\ |y_k - x^*|\end{array}\right\} \leq \frac{1}{2^k} < \frac{1}{20} \quad \Leftrightarrow \quad 2^k > 20$

Azaz $k = 5$ már jó. z_4 mindenképpen az 5. intervallum egyik végpontja lesz, ezért $x^* \approx z_4$ jó közelítés.

$-$	$+$		
$x_0 = 2$	$y_0 = 3$	$z_0 = 2{,}5$	$P(z_0) = 5{,}625 > 0$
$x_1 = 2$	$y_1 = 2{,}5$	$z_1 = 2{,}25$	$P(z_1) = 1{,}39 > 0$
$x_2 = 2$	$y_2 = 2{,}25$	$z_2 = 2{,}125$	$P(z_2) = -0{,}404 < 0$
$x_3 = 2{,}125$	$y_3 = 2{,}25$	$z_3 = 2{,}1875$	$P(z_3) = 0{,}4675 > 0$

8. Feladat

Megoldás:

Hibabecslés: $\left.\begin{array}{l}|x_k - x^*| \\ |y_k - x^*|\end{array}\right\} \leq \frac{1}{2^k} < \frac{1}{20} \quad \Leftrightarrow \quad 2^k > 20$

Azaz $k = 5$ már jó. z_4 mindenképpen az 5. intervallum egyik végpontja lesz, ezért $x^* \approx z_4$ jó közelítés.

$-$	$+$		
$x_0 = 2$	$y_0 = 3$	$z_0 = 2{,}5$	$P(z_0) = 5{,}625 > 0$
$x_1 = 2$	$y_1 = 2{,}5$	$z_1 = 2{,}25$	$P(z_1) = 1{,}39 > 0$
$x_2 = 2$	$y_2 = 2{,}25$	$z_2 = 2{,}125$	$P(z_2) = -0{,}404 < 0$
$x_3 = 2{,}125$	$y_3 = 2{,}25$	$z_3 = 2{,}1875$	$P(z_3) = 0{,}4675 > 0$
$x_4 = 2{,}125$	$y_4 = 2{,}1875$	$z_4 = 2{,}15625$	

8. Feladat

Megoldás:

Hibabecslés:
$$\left.\begin{array}{l}|x_k - x^*| \\ |y_k - x^*|\end{array}\right\} \le \frac{1}{2^k} < \frac{1}{20} \quad \Leftrightarrow \quad 2^k > 20$$

Azaz $k = 5$ már jó. z_4 mindenképpen az 5. intervallum egyik végpontja lesz, ezért $x^* \approx z_4$ jó közelítés.

$-$	$+$		
$x_0 = 2$	$y_0 = 3$	$z_0 = 2{,}5$	$P(z_0) = 5{,}625 > 0$
$x_1 = 2$	$y_1 = 2{,}5$	$z_1 = 2{,}25$	$P(z_1) = 1{,}39 > 0$
$x_2 = 2$	$y_2 = 2{,}25$	$z_2 = 2{,}125$	$P(z_2) = -0{,}404 < 0$
$x_3 = 2{,}125$	$y_3 = 2{,}25$	$z_3 = 2{,}1875$	$P(z_3) = 0{,}4675 > 0$
$x_4 = 2{,}125$	$y_4 = 2{,}1875$	$z_4 = 2{,}15625$	

Azaz $x^* \approx 2{,}15625$.

8. Feladat

Megoldás:

Hibabecslés: $\left.\begin{array}{l} |x_k - x^*| \\ |y_k - x^*| \end{array}\right\} \leq \frac{1}{2^k} < \frac{1}{20} \quad \Leftrightarrow \quad 2^k > 20$

Azaz $k = 5$ már jó. z_4 mindenképpen az 5. intervallum egyik végpontja lesz, ezért $x^* \approx z_4$ jó közelítés.

$-$	$+$		
$x_0 = 2$	$y_0 = 3$	$z_0 = 2{,}5$	$P(z_0) = 5{,}625 > 0$
$x_1 = 2$	$y_1 = 2{,}5$	$z_1 = 2{,}25$	$P(z_1) = 1{,}39 > 0$
$x_2 = 2$	$y_2 = 2{,}25$	$z_2 = 2{,}125$	$P(z_2) = -0{,}404 < 0$
$x_3 = 2{,}125$	$y_3 = 2{,}25$	$z_3 = 2{,}1875$	$P(z_3) = 0{,}4675 > 0$
$x_4 = 2{,}125$	$y_4 = 2{,}1875$	$z_4 = 2{,}15625$	

Azaz $x^* \approx 2{,}15625$.
A Newton-módszerrel gyorsabb konvergenciát tudunk biztosítani, de nehezebb a hibabecslés és a kezdőelem választás.

8. Feladat

8. Feladat

Kontrakció-e a $\varphi(x) = \frac{x^3-2}{4}$ leképezés a $[-1,\ 0]$-n ?

8. Feladat

Kontrakció-e a $\varphi(x) = \frac{x^3-2}{4}$ leképezés a $[-1,\ 0]$-n?

Megoldás:

Mivel $\varphi'(x) = \frac{3}{4}x^2 > 0$, ezért a φ függvény szigorúan monoton növő.

8. Feladat

Kontrakció-e a $\varphi(x) = \frac{x^3-2}{4}$ leképezés a $[-1,\ 0]$-n?

Megoldás:

Mivel $\varphi'(x) = \frac{3}{4}x^2 > 0$, ezért a φ függvény szigorúan monoton növő.

Így $\mathcal{R}_\varphi = [\varphi(-1),\ \varphi(0)] = \left[-\frac{3}{4},\ -\frac{1}{2}\right]$

8. Feladat

8. Feladat

Kontrakció-e a $\varphi(x) = \frac{x^3-2}{4}$ leképezés a $[-1,\ 0]$-n ?

Megoldás :

Mivel $\varphi'(x) = \frac{3}{4}x^2 > 0$, ezért a φ függvény szigorúan monoton növő.

Így $\mathcal{R}_\varphi = [\varphi(-1),\ \varphi(0)] = \left[-\frac{3}{4},\ -\frac{1}{2}\right] \subseteq [-1,\ 0]$

8. Feladat

8. Feladat

Kontrakció-e a $\varphi(x) = \frac{x^3-2}{4}$ leképezés a $[-1,\ 0]$-n ?

Megoldás :

Mivel $\varphi'(x) = \frac{3}{4}x^2 > 0$, ezért a φ függvény szigorúan monoton növő.

Így $\mathcal{R}_\varphi = [\varphi(-1),\ \varphi(0)] = \left[-\frac{3}{4},\ -\frac{1}{2}\right] \subseteq [-1,\ 0]$

Azaz a kontrakciós tulajdonság szükséges feltétele teljesül.

8. Feladat

Kontrakció-e a $\varphi(x) = \frac{x^3-2}{4}$ leképezés a $[-1,\ 0]$-n ?

Megoldás :

Mivel $\varphi'(x) = \frac{3}{4}x^2 > 0$, ezért a φ függvény szigorúan monoton növő.

Így $\mathcal{R}_\varphi = [\varphi(-1),\ \varphi(0)] = \left[-\frac{3}{4},\ -\frac{1}{2}\right] \subseteq [-1,\ 0]$

Azaz a kontrakciós tulajdonság szükséges feltétele teljesül.

Legyen $x, y \in [-1,\ 0]$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| =$$

8. Feladat

Kontrakció-e a $\varphi(x) = \frac{x^3-2}{4}$ leképezés a $[-1,\ 0]$-n?

Megoldás:

Mivel $\varphi'(x) = \frac{3}{4}x^2 > 0$, ezért a φ függvény szigorúan monoton növő.

Így $\mathcal{R}_\varphi = [\varphi(-1),\ \varphi(0)] = \left[-\frac{3}{4},\ -\frac{1}{2}\right] \subseteq [-1,\ 0]$

Azaz a kontrakciós tulajdonság szükséges feltétele teljesül.

Legyen $x, y \in [-1,\ 0]$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left|\frac{x^3-2}{4} - \frac{y^3-2}{4}\right| =$$

8. Feladat

8. Feladat

Kontrakció-e a $\varphi(x) = \frac{x^3-2}{4}$ leképezés a $[-1,\ 0]$-n?

Megoldás:

Mivel $\varphi'(x) = \frac{3}{4}x^2 > 0$, ezért a φ függvény szigorúan monoton növő.

Így $\mathcal{R}_\varphi = [\varphi(-1),\ \varphi(0)] = \left[-\frac{3}{4},\ -\frac{1}{2}\right] \subseteq [-1,\ 0]$

Azaz a kontrakciós tulajdonság szükséges feltétele teljesül.

Legyen $x, y \in [-1,\ 0]$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left|\frac{x^3-2}{4} - \frac{y^3-2}{4}\right| = \frac{1}{4}\left|x^3 - y^3\right| =$$

8. Feladat

8. Feladat

Kontrakció-e a $\varphi(x) = \frac{x^3-2}{4}$ leképezés a $[-1,\ 0]$-n?

Megoldás:

Mivel $\varphi'(x) = \frac{3}{4}x^2 > 0$, ezért a φ függvény szigorúan monoton növő.

Így $\mathcal{R}_\varphi = [\varphi(-1),\ \varphi(0)] = \left[-\frac{3}{4},\ -\frac{1}{2}\right] \subseteq [-1,\ 0]$

Azaz a kontrakciós tulajdonság szükséges feltétele teljesül.

Legyen $x, y \in [-1,\ 0]$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left|\frac{x^3-2}{4} - \frac{y^3-2}{4}\right| = \frac{1}{4}\left|x^3 - y^3\right| =$$

$$= \frac{1}{4}|x-y| \cdot \underbrace{\left|x^2 + xy + y^2\right|}_{\leq 3}$$

8. Feladat

8. Feladat

Kontrakció-e a $\varphi(x) = \frac{x^3-2}{4}$ leképezés a $[-1,\ 0]$-n ?

Megoldás :

Mivel $\varphi'(x) = \frac{3}{4}x^2 > 0$, ezért a φ függvény szigorúan monoton növő.

Így $\mathcal{R}_\varphi = [\varphi(-1),\ \varphi(0)] = \left[-\frac{3}{4},\ -\frac{1}{2}\right] \subseteq [-1,\ 0]$

Azaz a kontrakciós tulajdonság szükséges feltétele teljesül.

Legyen $x, y \in [-1,\ 0]$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left|\frac{x^3-2}{4} - \frac{y^3-2}{4}\right| = \frac{1}{4}\left|x^3 - y^3\right| =$$

$$= \frac{1}{4}|x-y| \cdot \underbrace{\left|x^2 + xy + y^2\right|}_{\leq 3} \leq \frac{3}{4}|x-y|$$

8. Feladat

8. Feladat

Kontrakció-e a $\varphi(x) = \frac{x^3-2}{4}$ leképezés a $[-1,\ 0]$-n ?

Megoldás :

Mivel $\varphi'(x) = \frac{3}{4}x^2 > 0$, ezért a φ függvény szigorúan monoton növő.

Így $\mathcal{R}_\varphi = [\varphi(-1),\ \varphi(0)] = \left[-\frac{3}{4},\ -\frac{1}{2}\right] \subseteq [-1,\ 0]$

Azaz a kontrakciós tulajdonság szükséges feltétele teljesül.

Legyen $x, y \in [-1,\ 0]$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left|\frac{x^3-2}{4} - \frac{y^3-2}{4}\right| = \frac{1}{4}\left|x^3 - y^3\right| =$$

$$= \frac{1}{4}|x-y| \cdot \underbrace{\left|x^2 + xy + y^2\right|}_{\leq 3} \leq \frac{3}{4}|x-y|$$

Azaz φ kontrakció és $q = \frac{3}{4} < 1$

8. Feladat

8. Feladat

Az $f(x) = \cos x - 4x + 2$ függvény gyökének közelítésére írjuk fel a Newton módszert és adjuk meg, milyen x_0 választása mellett lesz konvergens a módszer!

8. Feladat

8. Feladat

Az $f(x) = \cos x - 4x + 2$ függvény gyökének közelítésére írjuk fel a Newton módszert és adjuk meg, milyen x_0 választása mellett lesz konvergens a módszer!

Megoldás :

$$f(x) \quad = \quad \cos x - 4x + 2$$

8. Feladat

8. Feladat

Az $f(x) = \cos x - 4x + 2$ függvény gyökének közelítésére írjuk fel a Newton módszert és adjuk meg, milyen x_0 választása mellett lesz konvergens a módszer!

Megoldás :

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x - 4x + 2 \\ f'(x) &= -\sin x - 4 \end{aligned}$$

8. Feladat

8. Feladat

Az $f(x) = \cos x - 4x + 2$ függvény gyökének közelítésére írjuk fel a Newton módszert és adjuk meg, milyen x_0 választása mellett lesz konvergens a módszer!

Megoldás:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x - 4x + 2 \\ f'(x) &= -\sin x - 4 \end{aligned}$$

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} =$$

8. Feladat

8. Feladat

Az $f(x) = \cos x - 4x + 2$ függvény gyökének közelítésére írjuk fel a Newton módszert és adjuk meg, milyen x_0 választása mellett lesz konvergens a módszer!

Megoldás:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x - 4x + 2 \\ f'(x) &= -\sin x - 4 \end{aligned}$$

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\cos x_k - 4x_k + 2}{-\sin x_k - 4}$$

8. Feladat

8. Feladat

Az $f(x) = \cos x - 4x + 2$ függvény gyökének közelítésére írjuk fel a Newton módszert és adjuk meg, milyen x_0 választása mellett lesz konvergens a módszer!

Megoldás:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \cos x - 4x + 2 \\
f'(x) &= -\sin x - 4
\end{aligned}
$$

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\cos x_k - 4x_k + 2}{-\sin x_k - 4}$$

8. Feladat

Megoldás :

Az x_0 kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

8. Feladat

Megoldás :

Az x_0 kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1. Létezik $x^* \in [a,\ b]$

8. Feladat

Megoldás :

Az x_0 kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1. Létezik $x^* \in [a,\ b]$

   Azaz olyan $[a,\ b]$ intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.

8. Feladat

Megoldás:

Az x_0 kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1. Létezik $x^* \in [a,\ b]$

   Azaz olyan $[a,\ b]$ intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.

$$\left.\begin{array}{rcl} f(0) & = & 3 > 0 \\ f(1) & = & \cos 1 - 4 + 2 < 0 \end{array}\right\}$$

8. Feladat

Megoldás :

Az x_0 kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1. Létezik $x^* \in [a,\ b]$

   Azaz olyan $[a,\ b]$ intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.

$$\left.\begin{array}{rcl} f(0) & = & 3 > 0 \\ f(1) & = & \cos 1 - 4 + 2 < 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x^* \in [0,\ 1]$$

8. Feladat

Megoldás :

Az x_0 kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1. Létezik $x^* \in [a,\ b]$

   Azaz olyan $[a,\ b]$ intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.

$$\left.\begin{array}{rcl} f(0) & = & 3 > 0 \\ f(1) & = & \cos 1 - 4 + 2 < 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x^* \in [0,\ 1]$$

2. f' és f'' állandó előjelű

8. Feladat

Megoldás :

Az x_0 kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1. Létezik $x^* \in [a,\ b]$

   Azaz olyan $[a,\ b]$ intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.

   $$\left.\begin{array}{rcl} f(0) & = & 3 > 0 \\ f(1) & = & \cos 1 - 4 + 2 < 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x^* \in [0,\ 1]$$

2. f' és f'' állandó előjelű

   $f'(x) = -\sin x - 4$

8. Feladat

Megoldás:

Az x_0 kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1. Létezik $x^* \in [a,\ b]$

   Azaz olyan $[a,\ b]$ intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.

$$\left.\begin{array}{rcl} f(0) & = & 3 > 0 \\ f(1) & = & \cos 1 - 4 + 2 < 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x^* \in [0,\ 1]$$

2. f' és f'' állandó előjelű

   $f'(x) = -\sin x - 4 \leq -3$

8. Feladat

Megoldás:

Az x_0 kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1. Létezik $x^* \in [a,\ b]$

   Azaz olyan $[a,\ b]$ intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.

$$\left.\begin{array}{rcl} f(0) & = & 3 > 0 \\ f(1) & = & \cos 1 - 4 + 2 < 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x^* \in [0,\ 1]$$

2. f' és f'' állandó előjelű

   $f'(x) = -\sin x - 4 \leq -3 < 0$

8. Feladat

Megoldás :

Az x_0 kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1. Létezik $x^* \in [a,\ b]$

   Azaz olyan $[a,\ b]$ intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.

$$\left.\begin{array}{rcl} f(0) & = & 3 > 0 \\ f(1) & = & \cos 1 - 4 + 2 < 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x^* \in [0,\ 1]$$

2. f' és f'' állandó előjelű

   $f'(x) = -\sin x - 4 \leq -3 < 0$

   $f''(x) = -\cos x$

8. Feladat

Megoldás :

Az x_0 kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1. Létezik $x^* \in [a,\ b]$

   Azaz olyan $[a,\ b]$ intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.

$$\left.\begin{array}{rcl} f(0) & = & 3 > 0 \\ f(1) & = & \cos 1 - 4 + 2 < 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x^* \in [0,\ 1]$$

2. f' és f'' állandó előjelű

   $f'(x) = -\sin x - 4 \leq -3 < 0$

   $f''(x) = -\cos x < 0$

8. Feladat

Megoldás:

Az x_0 kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1. Létezik $x^* \in [a,\ b]$

   Azaz olyan $[a,\ b]$ intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.

$$\left.\begin{array}{rcl} f(0) & = & 3 > 0 \\ f(1) & = & \cos 1 - 4 + 2 < 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x^* \in [0,\ 1]$$

2. f' és f'' állandó előjelű

   $f'(x) = -\sin x - 4 \leq -3 < 0$

   $f''(x) = -\cos x < 0$ minden $x \in [0,\ 1]$ esetén

8. Feladat

Megoldás:

Az x_0 kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1. Létezik $x^* \in [a,\ b]$

   Azaz olyan $[a,\ b]$ intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.

$$\left.\begin{array}{rcl} f(0) & = & 3 > 0 \\ f(1) & = & \cos 1 - 4 + 2 < 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x^* \in [0,\ 1]$$

2. f' és f'' állandó előjelű

   $f'(x) = -\sin x - 4 \leq -3 < 0$

   $f''(x) = -\cos x < 0$ minden $x \in [0,\ 1]$ esetén

3. Legyen x_0 : $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ teljesüljön.

8. Feladat

Megoldás:

Az x_0 kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1. Létezik $x^* \in [a,\ b]$

   Azaz olyan $[a,\ b]$ intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.

$$\left.\begin{array}{rcl} f(0) & = & 3 > 0 \\ f(1) & = & \cos 1 - 4 + 2 < 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x^* \in [0,\ 1]$$

2. f' és f'' állandó előjelű

   $f'(x) = -\sin x - 4 \leq -3 < 0$

   $f''(x) = -\cos x < 0$ minden $x \in [0,\ 1]$ esetén

3. Legyen x_0 : $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ teljesüljön.

   Mivel $f''(x) < 0$ mindenhol, ezért x_0-ban is, így $f(x_0) < 0$ kell.

8. Feladat

Megoldás:

Az x_0 kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1. Létezik $x^* \in [a,\ b]$

   Azaz olyan $[a,\ b]$ intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.

$$\left.\begin{array}{rcl} f(0) & = & 3 > 0 \\ f(1) & = & \cos 1 - 4 + 2 < 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x^* \in [0,\ 1]$$

2. f' és f'' állandó előjelű

   $f'(x) = -\sin x - 4 \leq -3 < 0$

   $f''(x) = -\cos x < 0 \quad$ minden $x \in [0,\ 1]$ esetén

3. Legyen $x_0 : \quad f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ teljesüljön.

   Mivel $f''(x) < 0$ mindenhol, ezért x_0-ban is, így $f(x_0) < 0$ kell.

   Például $x_0 = 1$ megfelelő.