1. Halmazok:

Azonos tulajdonságú objektumok összessége.

Az alaphalmaz minden eleméről egyértelműen el kell tudni dönteni, hogy eleme-e az adott halmaznak.

$\underline{a \in \mathrm{A}}$: az **a** elem **hozzátartozik** az **A** halmazhoz.

$\underline{\neg : a \notin \mathrm{A}}$: az **a** elem **NEM** tarrtozik hozzá az **A** halmazhoz.

Egy halmazt egyértelműen meghatároznak az elemei.

1.1. Halmaz megadása:

$$\text{elemek felsorolása: } A = \{1, 2, 3\} \tag{1}$$

$$\text{tulajdonság megadása: } A = \{x|T(x)\} \text{ pl.:}\{x|x \in \mathbb{R}\}, 0 \leq x \leq 3 \tag{2}$$

1.2. Műveletek halmazokkal:

$$A \cap B = \{x|x \in A \text{ és } x \in B\} \textit{ metszet} \tag{3}$$

$$\text{ha } A \cap B = \emptyset \rightarrow A \text{ és } B \text{ diszjunkt halmazok.} \tag{4}$$

$$A \cup B = \{x|x \in A \text{ vagy } x \in B\} \textit{ unió} \text{ (legalább az egyiknek eleme)} \tag{5}$$

$$A \setminus B = \{x|x \in A \text{ és } x \notin B\} \tag{6}$$

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \ \ \& \ \ y \in B\} \text{ Olyan rendezett elempárt jelöl, ahol lényeges a sorrend.} \tag{7}$$

Ha $A \subseteq B$, akkor $E \setminus A$ az A halmaz E-re vonatkozó kiegészítése, komplementer halmaza $C_E(A)$ vagy $\overline{A}$ rögzített E alaphalmaz esetén

$$A \triangle B \text{ : szimmetrikus különbség } (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \tag{8}$$

2. Relációk:

n-változós relációk $\varrho = (A_1, A_2, ..., A_n, R)$ rendszert alkot, ahol R részhalmaza az $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$

Descartes-szorzatnak.

- **Bináris rélációk:** $\varrho = (A_1, A_2, R)$, ahol $R \subseteq A \times B$ (R a reláció **grafikonja**)

  $a \ \varrho \ b \rightarrow a$ relációban van b-vel

- **Homogén reláció:** Ha $A = B$ pl.: $\varrho = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, +)$

- **Homogén relációk tulajdonságai:**
  - **reflexív:** $\forall x \in A : x\varrho x$
  - **tranzitív:** $\forall x, y, z \in A : (x\varrho y) \wedge (y\varrho z) \Rightarrow x\varrho z$,
  - **szimmetrikus:** $\forall x, y \in A : (x\varrho y) \Leftrightarrow (y\varrho x)$,
  - **antiszimmetrikus:** $\forall x, y \in A :$ ha $(x\varrho y) \wedge (y\varrho x) \Rightarrow x = y$.
  - **dichotóm:** $(\forall a, b \in A : (a\varrho b) \vee (b\varrho a))$
- **Előrendezési reláció:** reflexív és tranzitív.
- **Ekvivalenciareláció:** reflexív, tranzitív és szimmetrikus. ekvivalenciarelációk összességét $\varepsilon(A)$-val jelöljük (A) halmazon.
- **Részbenrendezési relációk:** reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus. (A, ϱ) rendezett halmaz.
- **Lineáris (teljes) rendezés:** reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus és dichotóm.

3. Ekvivalenciarelációk és ekvivalenciaosztályok:

reflexív, tranzitív és szimmetrikus

$\varrho\langle x\rangle = \{x \in A : x\varrho y\}$ metszeteket az A halmazon, ahol $x \in A$ ekvivalenciaosztályoknak nevezzük. Ezeknek a halmaza a *faktorhalmaz.* $A/\varrho = \{\varrho\langle x\rangle >: x \in A\}$ Pl.: $a \equiv b \mod 6$ -hoz rendelt faktorhalmaz: $\mathbb{Z}/\equiv = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}, \widehat{5}\}$, ahol $\widehat{k} = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv k \mod 6\}$

4. Függvények:

függvény vagy leképezés:

- $f = (A, B, F), F \subseteq A \times B$ reláció, ha $\forall a \in A$ esetén az $f\langle a\rangle$ metszet egyelemű részhalmaza B-nek,
- Az f függvény az A halmaz **minden elemének megfelelteti** a B halmaz **pontosan egy elemét** $f : A \to B, A \xrightarrow{f} B$,

- A : a függvény **értelmezési tartománya**,
- B : a függvény **értékkészlete**,
- $f(A)$: a függvény képe,
- $f_1 = f_2$, ha $A_1 = A_2$ és $B_1 = B_2'$ és $f_1(a) = f_2(a) \forall a \in A$ esetén,
- karakterisztikus függvény: legyen $A \subseteq E$, $\varkappa_A : E \to \{0,1\} \begin{cases} 1, \text{ ha } x \in A \\ 0, \text{ ha } x \notin A \end{cases}$

5. Injektív, bijektív, szürjektív függvények:

- **injektív:** Az értelmezési tartomány különböző elemeihez az értékkészlet különböző elemeit rendelik.
  $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow: \forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- **szürjektív:** B-nek $\forall$ eleme képelem,
- **bijektív:** ha injektív ls szürjektív $\Leftrightarrow \forall y \in B, \exists!\, x \in A$ (csak egy $a \in A$ létezik):$f(A) = B$

példák:

- x^2 nem injektív: $-1 \neq 1$, de $f(-1) = f(1)$
- $x^2 : [0; \infty) \to \mathbb{R}$ azonban már injektív, de nem szürjektív
- $x^2 : [0; \infty) \to [0; \infty)$: bijektív

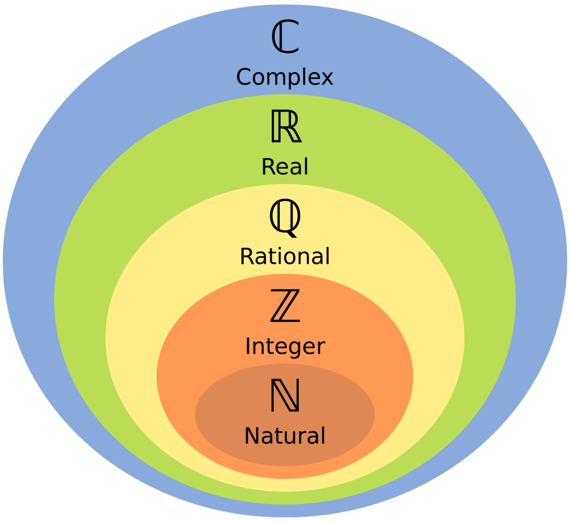
5.1. Összetétel:

$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \Longrightarrow$ 1. lépés (belső függvény) : $f(a) \to$ 2. lépés (külső függvény) : $g(f(a))$

asszociativitás: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

nem kommutatív: $pl. : f(x) = x^2, g(x) = x + 1,$

$ekkor : f \circ g = f(x^2) = x^2 + 1,$ illetve $g \circ f = (g(x+1))^2 = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$



1. ábra. Számhalmazok ábrája

6. Számhalmazok:

- **Természetes számok:** $\mathbb{N}$: egész, nemnegatív számok, amelyek a $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ számsorozat tagjai. $\mathbb{N}^*$: nemnulla természetes számok halmaza $\{1, 2, 3, \dots\}$.

  A természetes számok halmaza az összeadással és szorzással **kommutatív félcsoportot** alkot (asszociatív és kommutatív).

- **Egész számok:** $\mathbb{Z}$: egész, negatív és nemnegatív számok, valamint a 0 halmaza. A természetes számokat kibővíti a negatív számokkal. A halmaz zárt az összeadásra, a kivonásra és a szorzásra. Az egész számok halmaza lineárisan rendezett.

  Az összeadással Abel-csoportot alkot, a szorzással kommutatív félcsoportot képez. Összeadással (Abel) és szorzással (Félcsoport) a disztributív tulajdonság miatt gyűrűt alkot.

  Maradékos osztással euklideszi gyűrűt alkot $\Rightarrow$ euklideszi algoritmussal két egész szám lnko-ja kiszámolható.

- **Racionális számok:** $\mathbb{Q}$: Azok a számok, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként. Az egész számokkal végzett osztás eredményeképpen kapott törtek kifejezésére. $\frac{a}{b}(a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0, (a, b) = 1)$ alakú számok. Összeadás, kivonás, szorzás, osztás nem vezet ki a számhalmazból, a gyökvonás és határátmenet azonban igen.

- **Valós számok:** $\mathbb{R}$: A valós számok halmazában az összeadás, kivonás, szorzás és osztás is korlátozás nélkül elvégezhető, az eredmény mindig egy másik valós szám lesz.
  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ testet alkot, azaz $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:
  - Szorzás és összeadás műveletekre igaz külön-külön: asszociatív, kommutatív.
  - A szorzás disztributív az összeadásra nézve: $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

7. Komplex számok:

7.1. Trigonometrikus alak:

$z = a + b \cdot i$

$z = |z|(\cos\varphi + i \cdot \psi)$, ahol $|z|$ egy pozitív valós szám, φ pedig egy $[0, 2\pi]$ intervallumba eső szög. Ekkor $|z|= \sqrt{a^2 + b^2}$ a z komplex szám abszolútértéke, φ pedig az irányszöge.

- szorzás: $z \cdot v = |z| \cdot |v| \cdot (\cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi))$
- osztás: $\dfrac{z}{v} = \dfrac{|z|}{|v|} \cdot (\cos(\varphi - \psi) + i \cdot \sin(\varphi - \psi))$
- hatványozás: $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \cdot \sin n\psi$ (Moivre-képlet)

$a + bi$ alakú számok, ahol $(a, b \in \mathbb{R})$ és $i = \sqrt{-1}$ pl.: $1 + 7 \cdot i, 2 + \frac{3}{4}i$
algebrai alak: $z = a + bi$, $(i^2 = -1)$

- **összeadás:** $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d) \cdot i$ pl.: $(5 + 4 \cdot i) + (-1 + 3 \cdot i) = 4 + 7 \cdot i$
- **szorzás:** $z_1 \cdot z_2 = (a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i) = ac + ad \cdot i + bc \cdot i + bd \cdot i^2 = ac + adi + bci - bd \leftarrow (i^2 = -1)$
  $z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i$
- **konjugálás:** ha $z = a + bi$, akkor $\overline{z} = a - bi$, pl.: $z = 3 + 4i, \overline{z} = 3 - 4i$
- **osztás:** *nevező konjugáltjával bővitjük* $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+4i}{2+5i} = \frac{3+4i(2-5i)}{2+5i(2-5i)} = \frac{6-15i+8i-20i}{4-25i^2} = \frac{26-7i}{29} = \frac{26}{29} - \frac{7i}{29}$

- **abszolút értéke:** $|z|=\sqrt{a^2+b^2} \rightarrow$ z képének origótól való távolsága

  $z = 3 + 4i \rightarrow |z|= \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

8. Források:

- Diszkrét matematika I. előadás diasorok
- Kalkulus I. előadás diasorok
- https://arato.inf.unideb.hu/aradi.bernadett/files/Komplex.pdf