

## Próba Zárthelyi Dolgozat

1. Vizsgáljuk meg a következő sorok konvergenciáját! (Az összegükre nem vagyunk kíváncsiak, csak arra, konvergensek-e.)

a) 
$$\sum_{n=3}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-7n+5}}}_{a_n}$$

b) 
$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{4n+8}{(2n+3)(2n+5)}}_{a_n}$$

c) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$$

2. Határozzuk meg az alábbi hatványsor konvergencia intervallumát!

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2-2n+5}{3^n \cdot (n-2)^2} \cdot (x+3)^n$$

3. Az átviteli-elv segítségével adjuk meg a következő határértékeket.

a) 
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2+3x-1}{2x-3}$$

b) 
$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{-2}{x+3}$$

4. Határozzuk meg a következő határértékeket a műveleti tulajdonságok alapján, ha léteznek!

a) 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 8^{x+1} - 4 \cdot 3^x + 1}{3 \cdot 2^{3x-1} + 4 \cdot 7^x + 2} \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 3x - 1} \right)^{x+2} \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + x - 1} \right)$$

b) 
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 - 4}$$

c) 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + x^2 - 2x + 5}{3x^3 - 4x^2}$$

d) 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\sin 3x}$$

5. Vizsgáljuk meg folytonosság szempontjából a következő függvényeket! Ahol nem folytonosak, adjuk meg a szakadás típusát!

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} & \text{ha } x \neq -2, x < 1 \\ 2x-1 & \text{ha } x \geq 1 \\ 3 & \text{ha } x = -2 \end{cases}$$

6. Adjuk meg a következő függvények inverzét. Ha a függvény nem invertálható, szűkítsük le egy olyan halmazra, amelyen már létezik inverze. Adjuk meg az eredeti és az inverz függvény értelmezési tartományát és értékkészletét.

a)  $f(x) = 3 \cdot \log_2(2-x) + 5$

b)  $f(x) = 2 \operatorname{tg} \left( \pi x - \frac{\pi}{3} \right) + 2$

7. Definíció alapján határozzuk meg a következő függvény differenciálhányadosát a megadott pontban!

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}, \quad x_0 = 2$$

8. Adjuk meg az alábbi függvények deriváltfüggvényét:

a)  $f(x) = 3x^2 + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{4}{3 \cdot \sqrt{x}} + \sqrt[3]{e} + 2$

b)  $f(x) = e^x \cdot (\sin x + \cos x)$

c)  $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

d)  $f(x) = \ln \ln^2 x^3$

e)  $f(x) = (\ln x)^{\lg x}$