Kalkulus II.

(Előadás és Gyakorlat)

Oktatók: Dr. Király Balázs, Papp Tamás
Terem: C/V/I. , E331
Óra: 2023.02.08.

Előadások
Elméleti kérdések
Gyakorlatok

Előadások **8**
Első előadások **8**
("Kalk2_23_01HO.pdf") 8
Hatványsorok 8
DEFINÍCIÓ 8
Taylor-sor, MacLaurin-sor 9
DEFINÍCIÓ 9
Hatványsorok konvergenciája 10
DEFINÍCIÓ 10
Cauchy-Hadamard tétel 11
DEFINÍCIÓ 11
Hatványsor összegfüggvénye 12
DEFINÍCIÓ 12
Taylor-polinom 13
DEFINÍCIÓ 13
Taylor-formula 14
DEFINÍCIÓ 14
Érintő egyenlete 15
DEFINÍCIÓ 15
A differenciálszámítás középérték-tételei, Rolle-tétel 16
DEFINÍCIÓ 16
Lagrange-féle középértéktétel 17
DEFINÍCIÓ 17
Cauchy-féle középértéktétel 18
DEFINÍCIÓ 18
Második előadás **19**
("Kalk2_23_02HO.pdf") **19**
Logaritmikus deriválás 19
DEFINÍCIÓ 19
DEFINÍCIÓ 19
L'Hospital szabály 19
DEFINÍCIÓ 19
DEFINÍCIÓ 19

DEFINÍCIÓ 20
Monotonitás 21
DEFINÍCIÓ 21
DEFINÍCIÓ 21
Szélsőérték 22
DEFINÍCIÓ 22
DEFINÍCIÓ 22
DEFINÍCIÓ 22
TULAJDONSÁGOK 22
Monotonitás és a derivált kapcsolata 23
DEFINÍCIÓ 23
DEFINÍCIÓ 23
Szélsőérték-tételek 24
DEFINÍCIÓ 24
DEFINÍCIÓ 24
DEFINÍCIÓ 24
DEFINÍCIÓ 24
DEFINÍCIÓ 24
DEFINÍCIÓ 24
Harmadik előadás 25
(“Kalk2_23_02HO.pdf”) 25
Konvexitás és Inflexio 25
DEFINÍCIÓ 25
DEFINÍCIÓ 25
DEFINÍCIÓ 25
A konvexitás és a deriváltak kapcsolata 26
DEFINÍCIÓ 26
DEFINÍCIÓ 26
Tételek az inflexiós ponttal kapcsolatban 27
DEFINÍCIÓ 27
DEFINÍCIÓ 27
(“Kalk2_23_03HO.pdf”) 28
Alaptulajdonságok megállapítása 28
TULAJDONSÁGOK 28
Vizsgálatok az első derivált alapján 29
TULAJDONSÁGOK 29
Vizsgálatok a második derivált alapján 30
TULAJDONSÁGOK 30
A függvény határértékei 31
TULAJDONSÁGOK 31
A derivált határértékei 32
TULAJDONSÁGOK 32
Aszimptóták 33
TULAJDONSÁGOK 33
Ábrázolás 33

TULAJDONSÁGOK 33
Értékkészlet leolvasása 34
TULAJDONSÁGOK 34
Negyedik előadás 35
(“Kalk2_23_04HO.pdf”) 35
Primitív függvény 35
DEFINÍCIÓ 35
TULAJDONSÁGOK 35
A határozatlan integrál 35
DEFINÍCIÓ 35
TULAJDONSÁGOK 35
TULAJDONSÁGOK 35
Helyettesítéses integrálás 37
DEFINÍCIÓ 37
DEFINÍCIÓ 37
Parciális integrálás 38
DEFINÍCIÓ 38
Ötödik előadás 39
(“Kalk2_23_05HO.pdf”) 39
Elemi törtfüggvények 39
DEFINÍCIÓ 39
DEFINÍCIÓ 39
Elemi törtfüggvények integrálása 40
DEFINÍCIÓ 40
DEFINÍCIÓ 40
Trigonometrikus függvények polinomjainak integrálása 42
DEFINÍCIÓ 42
DEFINÍCIÓ 42
DEFINÍCIÓ 42
Hatodik előadás 44
(“Kalk2_22_06HO.pdf”) 44
Trigonometrikus függvények racionális függvényeinek integrálása 44
DEFINÍCIÓ 44
DEFINÍCIÓ 44
DEFINÍCIÓ 44
DEFINÍCIÓ 45
DEFINÍCIÓ 45
DEFINÍCIÓ 45
Irracionális függvényeinek integrálása 47
DEFINÍCIÓ 47
DEFINÍCIÓ 47
Hetedik előadás 48
(“Kalk2_22_07HO.pdf”) 48
Intervallum felosztás 48
DEFINÍCIÓ 48

DEFINÍCIÓ 48
Felosztás finomsága 49
DEFINÍCIÓ 49
Alsó- és felső- közelítő összeg 50
DEFINÍCIÓ 50
Felosztás finomítása és a közelítő összegek 51
DEFINÍCIÓ 51
Darboux-féle alsó- és felső integrál 52
DEFINÍCIÓ 52
DEFINÍCIÓ 52
Riemann-integrálhatóság, A Riemann integrál geometriai jelentése 53
DEFINÍCIÓ 53
DEFINÍCIÓ 53
DEFINÍCIÓ 53
DEFINÍCIÓ 54
Riemann-közelíthetőösszeg 55
DEFINÍCIÓ 55
DEFINÍCIÓ 55
DEFINÍCIÓ 55
A Riemann-integrálhatóság feltételei 56
DEFINÍCIÓ 56
DEFINÍCIÓ 56
DEFINÍCIÓ 56
A határozott integrál tulajdonságai 57
DEFINÍCIÓ 57
DEFINÍCIÓ 57
DEFINÍCIÓ 57
DEFINÍCIÓ 57
DEFINÍCIÓ 57
DEFINÍCIÓ 57
DEFINÍCIÓ 57
Integrálfüggvény 58
DEFINÍCIÓ 58
Newton-Leibniz formula 59
DEFINÍCIÓ 59
Integrálási szabályok határozott integrálra 60
DEFINÍCIÓ 60
DEFINÍCIÓ 60
Improprius integrál 61
DEFINÍCIÓ 61
DEFINÍCIÓ 61
DEFINÍCIÓ 61
DEFINÍCIÓ 61
DEFINÍCIÓ 62
Területszámítás 63

DEFINÍCIÓ 63
DEFINÍCIÓ 63
DEFINÍCIÓ 63
DEFINÍCIÓ 63
Görbe ívhossza 64
DEFINÍCIÓ 64
Forgástest térfogata 65
DEFINÍCIÓ 65
DEFINÍCIÓ 65
Forgásfelület felszíne 66
DEFINÍCIÓ 66
Nyolcadik előadás 67
Differenciálegyenletek 67
DEFINÍCIÓ 67
DEFINÍCIÓ 67
Differenciálegyenletek osztályozása 68
DEFINÍCIÓ 68
DEFINÍCIÓ 68
DEFINÍCIÓ 68
DEFINÍCIÓ 68
DEFINÍCIÓ 68
DEFINÍCIÓ 68
Differenciálegyenletek megoldásai 69
DEFINÍCIÓ 69
DEFINÍCIÓ 69
DEFINÍCIÓ 69
DEFINÍCIÓ 69
Kezdetiérték probléma 70
DEFINÍCIÓ 70
Példa feladatok 71
Elsőrendű szétválasztható változóju differenciálegyenletek 73
DEFINÍCIÓ 73
Elsőrendű lineáris (Inhomogén) differenciálegyenletek általános alakja 74
DEFINÍCIÓ 74
Másodrendű lineáris homogén differenciálegyenletek általános alakja 75
DEFINÍCIÓ 75
Másodrendű lineáris homogén állandóegyütthatós differenciálegyenletek általános alakja 76
DEFINÍCIÓ 76
Kilencedik előadás 77
Kétváltozós függvények differenciálhatósága. Szélsőérték keresés 77
Kétváltozós függvények 77
DEFINÍCIÓ 77
DEFINÍCIÓ 77
DEFINÍCIÓ 77

DEFINÍCIÓ 77
DEFINÍCIÓ 78
DEFINÍCIÓ 78
DEFINÍCIÓ 78
DEFINÍCIÓ 78
DEFINÍCIÓ 78
DEFINÍCIÓ 78
DEFINÍCIÓ 78
DEFINÍCIÓ 78
DEFINÍCIÓ 78
Kétváltozós függvények határértéke 80
DEFINÍCIÓ 80
DEFINÍCIÓ 80
DEFINÍCIÓ 80
Kétváltozós függvények folytonossága 81
DEFINÍCIÓ 81
Parciális deriváltak 82
DEFINÍCIÓ 82
DEFINÍCIÓ 82
DEFINÍCIÓ 83
DEFINÍCIÓ 83
DEFINÍCIÓ 83
DEFINÍCIÓ 84
DEFINÍCIÓ 84
DEFINÍCIÓ 84
Totális derivált 85
DEFINÍCIÓ 85
DEFINÍCIÓ 85
DEFINÍCIÓ 85
Szélsőérték probléma 86
DEFINÍCIÓ 86
DEFINÍCIÓ 86
DEFINÍCIÓ 86
DEFINÍCIÓ 86
DEFINÍCIÓ 86
DEFINÍCIÓ 86
DEFINÍCIÓ 87
DEFINÍCIÓ 87
DEFINÍCIÓ 87
DEFINÍCIÓ 87
DEFINÍCIÓ 87
DEFINÍCIÓ 87
Elméleti kérdések 88
Első téma 88
Második téma 91

Harmadik téma 93
Negyedik téma 94
Ötödik téma 96
Hatodik téma 97
Hetedik téma 100
Nyolcadik téma 101
Gyakorlatok 103
Deriválás 103
Érintő egyenlete 103
Taylor Polinom 103
Lagrange féle maradék 103
Függvény monotonitás és szélső érték 103
Függvény konvexitás (görbület), inflexió 104
Paritás 104
Határozatlan Integrálás 104
Helyettesítési integrálás 104
Parciális integrálás 105
Trigonometrikus függvények integrálása 105
Törtfüggvények integrálása 105
Törtfüggvény Integrálása, ha trigonometrikus függvény (Koszinus, Szinus) összeg 105
Irracionális törtfüggvény integrálása 106
Első Gyakorlat 107
13.1. Érintő egyenlete 107
13.2 Érintő egyenlete 108
14.1 Taylor-formula és alkalmazásai 109
Második Gyakorlat 110
13.4. L'Hospital szabály 110
Szöveges szélsőérték feladatok 111
Deriválási gyakorlatok (nem L'H) 112
Harmadik Gyakorlat 113
Példa feladat – Függvényvizsgálat 113
Negyedik Gyakorlat 116
Integrálás módszerek határozatlan integrál esetében 116
16.1. 117
16.2. 118
Ötödik Gyakorlat 119
I. Próba ZH 119
Hatodik + 1 Gyakorlat 120
Speciális függvényosztályok integrálása 120
17.3 121
Hetedik + 1 Gyakorlat 122
17.1.1. 122
17.2. 123
18.2f. 124
Nyolcadik + 1 Gyakorlat 125

18.1.f. 125
18.2. 126

Előadások

Első előadások

(“Kalk2_23_01HO.pdf”)

Hatványsorok

DEFINÍCIÓ

- Legyen $x_0 \in \mathbb{C}$ rögzített szám és $a = (a_n, n \in \mathbb{N})$ pedig egy valós számsorozat. Az ezekkel képzett

  $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_{x0})^n$$

  Formális összeget **hatványsor**nak nevezzük.
- Az $(a_n, n \in \mathbb{N})$ sorozat tagjait a hatványsor **együtthatóinak**, az $x_0 \in \mathbb{R}$ számot a hatványsor **konvergencia-középpontjának** nevezzük.

Taylor-sor, MacLaurin-sor

DEFINÍCIÓ

- Legyen az f függvény az $x_0 \in \mathbb{R}$ pont valamely környezetében végtelensokszor differenciálható, ekkor a
  $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$
  hatványsort x_0-körüli Taylor-sornak nevezzük, ha az a_n együtthatókra teljesül, hogy
  $$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, n \in \mathbb{N}^*$$
  ahol $f^{(n)}(x_0)$ jelöli az f függvény n-edik deriváltjának x_0-beli helyettesítési értéket és $a_0 = f(x_0)$
- Az $x_0 = 0$ körüli Taylor-sort MacLaurin-sornak nevezzük

Hatványsorok konvergenciája

DEFINÍCIÓ

- Azon valós x-ek halmazát, melyekre a hatványsor konvergens, a hatványsor **konvergencia tartomány**ának nevezzük.
- Legyen $\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, ekkor az

$$R := \begin{cases} 0, & \alpha = \infty. \\ \infty, & \alpha = 0 \\ \frac{1}{\alpha}, & 0 < \alpha < \infty \end{cases}$$

számot a hatványsor konvergenciasugarának nevezzük.

Cauchy-Hadamard tétel

DEFINÍCIÓ

- Legyen R a hatványsor konvergencia sugara. Ekkor a hatványsor a
  $K_R(x_0) := x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < R$
  halmaz minden pontjában abszolút konvergens, $|x - x_0| > R$ esetén pedig divergens.

Hatványsor összegfüggvénye

DEFINÍCIÓ

- Tételezzük azt, hogy a hatványsor konvergenciasugara pozitív. A
$$K_R(x_0) \ni x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \in \mathbb{R}$$
függvényt a hatványsor **összegfüggvényének** nevezzük.
- Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz. Akkor mondjuk, hogy az $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény analitikus, ha bármely $a \in H$ pontnak van olyan környezete, amelyben az f előállítható hatványsor összegfüggvényeként.

Taylor-polinom

DEFINÍCIÓ

- A Taylor-polinom a Taylor-sor n-edik részletösszege

  $$T_n(x) := f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)^1+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$$

  $$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k$$

  n-edfokú polinomot értjük
- A Taylor-polinom a Taylor-sor n-edik részletösszege

Taylor-formula

DEFINÍCIÓ

- Ha az f függvény az x_0 pont valamely $K_r(x_0)$ környezetében $(n+1)$-szer differenciálható, akkor minden $x \in K_r(x_0)$ pont esetén
  $$f(x) = T_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi))}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}$$
  ahol ξ az x és az x_0 közötti hely
- A tételben bevezetett $R_n(x)$ kifejezést n-edik **Lagrange féle maradéktagnak** nevezzük.

Érintő egyenlete

DEFINÍCIÓ

- Legyen az f függvény az $a \in D_f$ helyen differenciálható. Az $(a, f(a))$ ponton áthaladó, $f'(a)$ meredekségű egyenest az f függvény a helyhez tartozó érintőjének nevezzük, azaz az érintő egyenlete

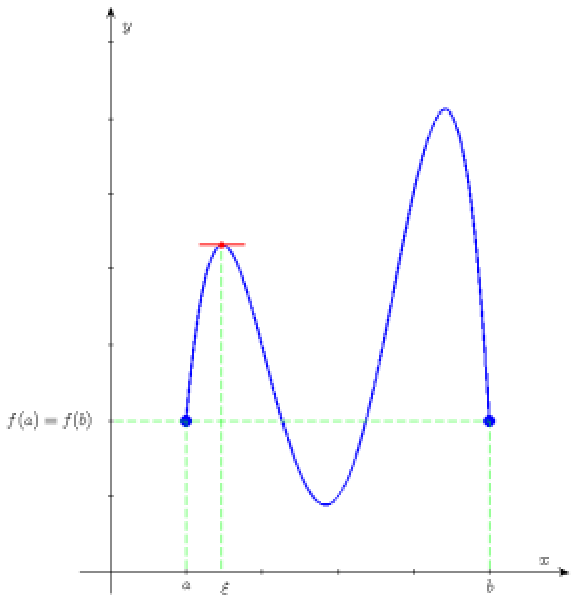
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

A differenciálszámítás középérték-tételei, Rolle-tétel

DEFINÍCIÓ

- Ha az $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény
    A. 1. folytonos az [a,b] zárt intervallumon
    B. 2.differenciálható az (a,b) nyílt intervallumon
    C. 3.és $f(a) = f(b)$,

  akkor létezik olyan $\xi \in (a, b)$ pont ahol
  $f'(xi) = 0$
- Tehát ha teljesülnek a feltételek, akkor legalább egy olyan belső pont, ahol a függvény érintője vízszintes



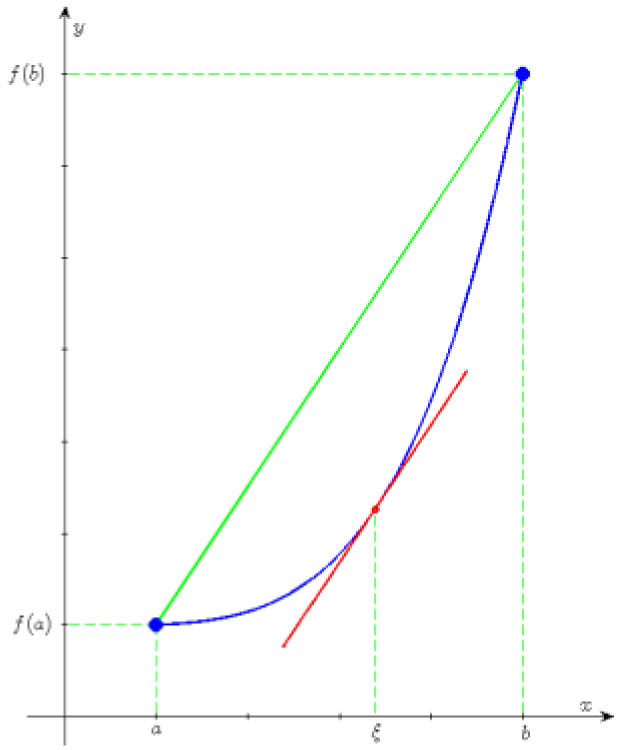
Lagrange-féle középértéktétel

DEFINÍCIÓ

- Ha az $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény
    A. folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon
    B. differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon
- akkor létezik olyan $\xi \in (a, b)$ pont, ahol

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Ha teljesülnek a feltételek, akkor van legalább olyan belső pont, ahol függvény érintője párhuzamos az $(a, f(a))$ és $(b, (f(b))$ pontokon átmenő szelővel



Cauchy-féle középértéktétel

DEFINÍCIÓ

- Ha az $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ függvények
    A. folytonosak a zárt intervallumon
    B. differenciálhatók az (a,b) nyílt intervallumon
- továbbá tetszőleges $x \in (a, b)$ esetén $g'(x) \neq 0$, akkor létezik olyan $\xi \in (a, b)$ pont, ahol

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Második előadás

(“Kalk2_23_02HO.pdf”)

Logaritmikus deriválás

DEFINÍCIÓ

- Ha $g(x) > 0$ akkor $f(x) > 0$ és ekkor
  $ln(f(x)) = ln(g(x)^{h(x)}) = h(x) \cdot ln(g(x))$

DEFINÍCIÓ

- Ugyanehez az eredményhez jutunk, ha az
  $f(x) = e^{ln(f(x))} = e^{ln(g(x)^{h(x)})} = e^{h(x) \cdot ln(g(x))}$
  alkalmazzuk.
- Ehhez társul a láncszabály.

L’Hospital szabály

DEFINÍCIÓ

- Véges helyen $\frac{0}{0}$ alakra.
- $f(x)$ és $g(x)$ függvények legyenek az x_0-ban folytonosak, melyekre $f(x_0)$-ban folytonosak, melyekre $f(x_0) = g(x_0) = 0.$
  Továbbá tegyük fel, hogy létezik a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

határérték. Ekkor létezik a $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is és

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

DEFINÍCIÓ

- A véges helyen $\frac{\infty}{\infty}$
- Az $f(x)$ és a $g(x)$ függvények legyenek az x_0 valamely (esetleg féloldali) környezetében differenciálhatók, melyekre

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$$

- Továbbá tegyük fel, hogy létezik a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

határérték. Ekkor létezik a $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ hátérérték is és

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

DEFINÍCIÓ

- Szabály a végtelenbe
- Az f és a g függvények legyenek a differenciálhatók a (K,∞) intervallumon és legyen $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0 (vagy \pm\infty)$

  Továbbá tegyük fel, hogy létezik a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték. Ekkor létezik a $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is és $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Monotonitás

DEFINÍCIÓ

- Akkor mondjuk, hogy az $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ függvény az $a\in(\alpha,\beta)$ **pontban lokálisan növekvő**, ha a-nak van olyan $K_r(a)\subseteq(\alpha,\beta)$ környezete,
  $f(a)\geq f(a)$, ha $x\in(a-r,a)$
  $f(x)\geq f(a)$, ha $x\in(a,a+r)$

DEFINÍCIÓ

- Akkor mondjuk, hogy az $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ függvény az $a\in(\alpha,\beta)$ **pontban lokálisan csökkenő**, ha a-nak van olyan $K_r(a)\subseteq(\alpha,\beta)$ környezete,
  $f(x)\geq f(a)$, ha $x\in(a-r,a)$
  $f(a)\geq f(x)$, ha $x\in(a,a+r)$

Szélsőérték

DEFINÍCIÓ

- Akkor mondjuk, hogy az $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ függvénynek az $a\in(\alpha,\beta)$ pontban lokális maximuma van, ha a-nak létezik olyan $K_r(a)\subseteq(\alpha,\beta)$ környezete,
$$f(a)\geq f(x), \text{ ha } x\in K_r(a)$$

DEFINÍCIÓ

- Akkor mondjuk, hogy az $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ függvénynek az $a\in(\alpha,\beta)$ pontban lokális maximuma van, ha a-nak létezik olyan $K_r(a)\subseteq(\alpha,\beta)$ környezete,
$$f(x)\geq f(a), \text{ ha } x\in K_r(a)$$

DEFINÍCIÓ

- A lokális maximumot és a lokális minimumot összefoglaló nevén lokális szélsőértéknek nevezzük.

TULAJDONSÁGOK

- Középiskolában tanult maximum egyben lokális maximumot is illetve a minimum lokális minimum is. Az egyértelmű elnevezés kedvéért ezeket a szélsőértékeket ezentúl **abszolút szélsőértékeknek** nevezzük.

Monotonitás és a derivált kapcsolata

DEFINÍCIÓ

- Legyen az $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in (\alpha, \beta)$ pontban differenciálható.
    - Ha f az a pontban (lokálisan) növő, akkor $f'(a) \geq 0.$
    - Ha f az a pontban (lokálisan) fogyó, akkor $0. \geq f'(a).$

DEFINÍCIÓ

- Legyen az $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in (\alpha, \beta)$ pontban differenciálható.
    - Ha $f'(a) > 0,$ akkor az f függvény az a pontban szigorúan növő.
    - Ha $f'(a) < 0,$ akkor az f függvény az a pontban szigorúan fogyó.

Szélsőérték-tételek

DEFINÍCIÓ

- Ha az $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ függvény az $a\in(\alpha,\beta)$ pontban differenciálható és itt lokális szélsőértéke van akor $f'(a)=0$
    - Ez a tétel **szükséges, de nem elégséges feltétele** az első függvény deriváltjának.
        - pl.: $f(x)=x^3$ függvénynek az $x_0=0$ pontban nincs szélsőértéke

DEFINÍCIÓ

- Legyen $f:H\longrightarrow\mathbb{R}$ ($H\subseteq\mathbb{R}$ nyílt halmaz), $a\in H$, $f\in D_a$. Ha $f'(a)=0$ és f’ az a-ban előjelet vált, akkor f-nek a-ban lokális szélsőértéke van.
- Ha a derivált negatívból pozitívvá válik, akkor az eredeti függvénynek lokális minimuma van, ha pozitívból negatívvá válik, akkor lokális maximuma az a pontban.

DEFINÍCIÓ

- Ha az $f:H\longrightarrow\mathbb{R}$ differenciálható függvény f’ deriváltja az $a\in H$ pontban differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy az f kétszer differenciálható az a pontban és az
  $$f''(a):=(f')'(a)$$
  számot a függvény a pontbeli **második deriváltjának**, vagy **másodrendű differenciálhányadosának** nevezzük.

DEFINÍCIÓ

- Legyen $f:H\to\mathbb{R}$ ($H\subseteq\mathbb{R}$ nyílt halmaz),$a\in H$, $f\in D^2_a$. Ha $f'(a)=0$ és $f''(a)\neq 0$, akkor f-nek a-ban lokális szélsőértéke van. Ha $f''(a)>0$, akkor f-nek a-ban lokális minimuma, ha $f''(a)<0$, akkor f-nek a-ban lokális maximuma van.

DEFINÍCIÓ

- Legyen $n\in\mathbb{N}$ és $f:H\longrightarrow\mathbb{R}$ függvény $(n-1)$-szer differenciálható. Ha a függvény $(n-1)$-edik deriváltja $(f^{(n-1)})$ differenciálható az $a\in H$ pontban, akkor azt mondjuk, hogy f az a pontban n-szer differenciálható és legyen $f^{(n)}(a):=(f^{(n-1)})'(a)$.

DEFINÍCIÓ

- Legyen $f:H\longrightarrow\mathbb{R}$ ($H\subseteq\mathbb{R}$ nyílt halmaz), az $a\in H$ pontban n-szer differenciálható. Tegyük fel, hogy
  $f'(a)=f''(a)=...=f^{(n-1)}(a)=0$, és $f^{(n)}(a)\neq 0$
  Az f-nek akkor és csak akkor van az a-ban lokális szélsőértéke, ha n páros. Ekkor ha $f^{(n)}(a)>0$, akkor f-nek a-ban lokális minimuma, ha $f^{(n)}(a)<0$, akkor lokális maximuma van.

Harmadik előadás

("Kalk2_23_02HO.pdf")

Konvexitás és Inflexio

DEFINÍCIÓ

- Akkor mondjuk, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény egy $I \subseteq H$ intervallumon konvex, ha bármely $a, b \in I$, $I, a < b$ esetén $(a, f(a))$ .s $(b, f(b))$ pontokon áthaladó egyenes (szelő) az (a, b)-ben az f fölött fekszik.

DEFINÍCIÓ

- Akkor mondjuk, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény egy$I \subseteq H$ intervallumon konkáv, ha bármely $a, b \in I$,$a < b$ esetén az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokon áthalaó egyenes szellő az (a, b)-ben az f alatt fekszik.

DEFINÍCIÓ

- akkor mondjuk, ohgy az $f : H- > \mathbb{R}$ függvénynek az a eleme H helyen inflexiója van, ha ott a függvény konvexitást vált.
- jelölése: inf

A konvexitás és a deriváltak kapcsolata

DEFINÍCIÓ

- Tekintsük az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvényt, tegyük fel, hogy f az (a,b)-n dfifferenciálható, ekkor
  a. ha F konvex (a,b)-n, akkor f' monoton nő (a,b)-n
  b. Ha f szigorúan konvex (a,b)-n, akkor f' szigorúan monoton nő (a,b)-n
  c. Ha f konkáv (a,b)-n akkor f' monoton csökken (a,b)-n
  d. Ha f szigorúan konkáv (a,b)-n, akkor f' szigorúan monoton csökken (a,b)-n

DEFINÍCIÓ

- Tekintsük az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvényt, tegyük fel, hogy f az (a,b)-n kétszer dfifferenciálható, ekkor
  a. Ha f konvex (a,b)-n, akkor $f''(x) \geq 0$
  b. Ha f konkáv (a,b)-n, akkor $f''(x) \leq 0$
  c. Ha $f''(x) > 0$, akkor f szigorúan konvex (a,b)-on
  d. Ha $f''(x) < 0$, akkor f szigorúan konvex (a,b)-on

Tételek az inflexiós ponttal kapcsolatban

DEFINÍCIÓ

- Ha az $f : H- > \mathbb{R}$ függvény az $a \in H$ pontban kétszer differenciálható és f nek a-ban inflexiója van, akkor $f''(a) = 0$
- A tétel szükséges de nem elégséges, például az $f(x) = x^4$ függvénynek $a = 0$-ban nincs inflexiója, pedig $f''(0) = 0$

DEFINÍCIÓ

- Legyen $f : H- > \mathbb{R}$ az $a \in H$, pontban háromszór differenciálható. Ha $f''(a) = 0$ és $f'''(a) \neq 0$, akkor f-nek a-ban inflexióspontja van.
- Legyen $f : H- > \mathbb{R}$ az $a \in H$, pontban n-szer differenciálható. Tegyük fel, hogy
$$f'(a) = f''(a) = ... = f^{n-1}(a) = 0 s f^{(n)}(a) \neq 0,$$
f-nek a-ban akkor és csak akkor van inflexiós pontja, ha n páratlan.

(“Kalk2_23_03HO.pdf”)

Alaptulajdonságok megállapítása

TULAJDONSÁGOK

- Értelmezési tartomány meghatározása
  - Szinguláris helyek
  - Értelmezési tartomány szélső pontjai
- Szimmetria tulajdonságok vizsgálata
  - Paritás
    - Ha D_f szimmetrikus és $f(-x) = f(x), (x \in D_f)$, akkor f páros
    - Ha D_f szimmetrikus és $f(-x) = -f(x), (x \in D_f)$, akkor f páratlan
    - különben se nem páros, se nem páratlan
  - Periodicitás
    - Az f függvény periódusa p, ha p a legkisebb pozitív szám, melyre minden $x \in D_f$ esetén $f(x+p) = f(x)$.
- Folytonosság vizsgálata
- Differenciálhatóság vizsgálata
- Tengelymetszetek meghatározása
  - y-tengely: $f(0)$ meghatározása
  - x-tengely: $f(x) = 0$ megoldása, ha lehetséges

Vizsgálatok az első derivált alapján

TULAJDONSÁGOK

  - Monotonitási intervallumok meghatározása
  - szélsőértékek keresése
- Mindkét szempont vizsgálható a szélsőérték létezésének elsőrendű elégséges feltételének alkalmazásakor használt táblázattal.
- A táblázat oszlopait a kritikus pontok (szinguláris helyek, intervallum szélső pontjai, szakadási helyek, lehetséges szélsőérték helyek) által meghatározott intervallumok adják
- A táblázatnak két sora van, az első a derivált, a második az eredeti függvény viselkedését írja le

Vizsgálatok a második derivált alapján

TULAJDONSÁGOK

  - Konvexitási intervallumok meghatározása
  - Inflexióspontok keresése
- Mindkét szempont vizsgálható az inflexiós pont létezésének másodrendű elégséges feltételének alkalmazásakor használt táblázattal.
- A táblázat oszlopait a kritikus pontok (szinguláris helyek, intervallum szélső pontjai, szakadási helyek, lehetséges inflexióspontok helyei) által meghatározott intervallumok adják
- A táblázatnak két sora van, az első a második derivált, a második az eredeti függvény viselkedését írja le

A függvény határértékei

TULAJDONSÁGOK

- Az értelmezési tartomány végpontjaiban (vagy $\pm\infty$-ben)
- A függvény szinguláris pontjaiban és szakadási helyeinél

A derivált határértékei

TULAJDONSÁGOK

- Ahol f folytonos, de nem differenciálható
- Ahol f nem folytonos, de létezik legalább féloldali véges határérték

Aszimptóták

TULAJDONSÁGOK

- Vízszintes aszimptota van, ha $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$ vagy $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$, ahol $c \in \mathbb{R}$
- Függőleges aszimptota, ahol $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ (elég ha az egyoldali határérték végtelen)
- Ferde aszimptota, ha $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ és $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m, m \in \mathbb{R}$ ekkor az aszimptota:

$$y = m \cdot x + \underbrace{\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - m \cdot x)}_{b}$$

Ábrázolás

TULAJDONSÁGOK

- Ábrázolás előtt érdemes a II. és III. pontban elkészített táblázatokat összevonni.
- A táblázat oszlopait a kritikus pontok (szinguláris helyek, intervallum szélső pontjai, szakadási helyek, lehetséges szlsőérték helyek és lehetséges inflexióspontok helyei) által meghatározott intervallumok adják
- A táblázatnak három sora van, az első az első derivált, a második a második derivált, a harmadik pedig az eredeti függvény viselkedését írja le

Értékkészlet leolvasása

TULAJDONSÁGOK

- A grafikon segítségével megadjuk a függvény értékkészletét

Negyedik előadás

(“Kalk2_23_04HO.pdf”)

Primitív függvény

DEFINÍCIÓ

- Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ egy intervallum és $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ egy intervallumon értelmezett valósértékű függvény. Akkor mondjuk, hogy a $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény a f függvény primitív függvénye, ha
  - $f \in D_I$
  - $F'(x) = f(x)$ minden $x \in I$ esetén

TULAJDONSÁGOK

- Ha F a f primitív függvénye az I intervallumon és C $\in \mathbb{R}$ konstans, akkor $F + C$ is a f primitív függvénye.
- Ha F a f primitív függvénye, akkor $F \in D_I$, így differenciálhatóság műveleti tulajdonságai alapján $F + C \in D_I$ és $(F + C)' = F' + C' = f + 0 = f.$
- Határozott intergál = primitív függvény.

A határozatlan integrál

DEFINÍCIÓ

Legyen $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melynek van primitív függvénye az I intervallumon. Ekkor az f primitív függvényeinek halmazát az f határozatlan integráljának nevezzük. Jelölés:

$$\int f(x)dx = \int f = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$$,

ahol F a f egy primitív függvénye.

TULAJDONSÁGOK

- $\int f(x) + g(x)\, dx = \int f(x)\, idx + \int g(x)\, dx,$
- $\int \lambda \cdot f(x)\, dx = \lambda \cdot \int f(x)\, dx$

TULAJDONSÁGOK

- A derivált műveleti tulajdonságai miatt $F + Gs\lambda \cdot F$ is differenciálható I -n és
$$(F + G)' = F' + G' = f + g$$

$$(\lambda \cdot F)' = \lambda \cdot F' = \lambda \cdot f$$

Helyettesítéses integrálás

DEFINÍCIÓ

- Legyen $\varphi : I \longrightarrow J$ és $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$, ahol $I, J \subset \mathbb{R}$ intervallumok. Ha
  - $\varphi \in D_I$ és
  - F a f függvény primitív függvénye J-n

Akkor $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ függvénynek is létezik primitív függvénye és

$$\int (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = F \circ \varphi + C.$$

DEFINÍCIÓ

- Legyen $\varphi : I \longrightarrow J$ és $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$, ahol $I, J \subset \mathbb{R}$ intervallumok. Ha
  - $\varphi \in D_I$ és $\varphi'(x) \neq 0, x \in I$
  - legyen φ kölcsönösen egyértelmű és jelölje $\bar{\varphi}$ az inverzét.
  - Legyen $h := (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. h-nak van primitív függvénye, ez legyen H,

  ekkor f függvénynek is létezik primitív függvénye és

$$\int f(x)\, dx = (H \circ \bar{\varphi}(x)) + C$$

Parciális integrálás

DEFINÍCIÓ

- Tegyük fel, hogy $f, g \in D_I$. Ha az $f \cdot g'$ függvénynek van primitívfüggvénye az I intervallumon, akkor $f' \cdot g$ függvénynek is van és

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$$

Ötödik előadás

(“Kalk2_23_05HO.pdf”)

Elemi törtfüggvények

DEFINÍCIÓ

- Az
  1. $f(x) = a_n^{xn} + a_{n_1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}(i = 0, , n)$
  2. $f(x) = \dfrac{A}{(x-a)^n}, \quad a \in \mathbb{R}, x \neq a, n \in \mathbb{N}^*, A \in \mathbb{R}$
  3. $f(x) = \dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}, A, B \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, (b^2 - 4ac < 0), n \in \mathbb{N}^*$,

Alakú függvényeket elemi törtfüggvénynek nevezzük.

DEFINÍCIÓ

1. A racionális függvényt polinom és valódi racionális tört összegére bontjuk.
   - Az $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} x \in \mathbb{R} \setminus \Lambda_Q, \Lambda_Q = \lambda \in \mathbb{R} | Q(\lambda) = 0 (P, Q polinomok)$ racionális törtfüggvényt valódi racionális törtnek nevezzük, ha deg P < deg Q. (Ha $degP \geq degQ$, akkor a függvényt racionális áltörtnek hívjuk.)
   - Ha $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} (x \in \mathbb{R} \setminus \Lambda Q)$ egy racionális áltört, akkor P_n Q-val maradékos osztást végezve felbontjuk:
     $P(x) = P_1(x) \cdot Q(x) + R(x),$ ahol $R = 0$, vagy deg $R <$ deg Q.
     Ekkor
     $$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x) \cdot Q(x) + R(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$
     ahol $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ már valódi racionális tört.
2. A nevezőt irreducibilis (elsőfokú-, vagy negatív diszkriminánsú másodfokú -) tényezők szorzatára bontjuk.
3. A törtet elemi törtek összegére bontjuk az egyenlő együtthatók módszerével.

Elemi törtfüggvények integrálása

DEFINÍCIÓ

- Ha f polinom akkor tagonként integráljuk

DEFINÍCIÓ

- Ha $f(x) = \dfrac{A}{(x-a)^n}, (n \in \mathbb{N}^*)$, akkor az alábbi két eset lehetséges
    a. ha $n = 1$, akkor
    $$\int \frac{A}{x-a}\,dx = \underbrace{A \int \frac{1}{x-a}\,dx}_{t=x-a \quad dt=dx} = A \int \frac{1}{t} dt = A \cdot ln|t| + C = A \cdot ln|x-a| + C.$$
    b. ha $n \geq 2$ akkor
    $$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = \underbrace{A \int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx}_{t=x-a \quad dt=1\,dx} = A \int t^{-n}\,dt = A \cdot \frac{t^{-n+1} - n + 1 + C}{=} \frac{A}{n-1} \cdot$$
    $$\frac{1}{(x-1)^{n-1}} + C.$$

- Ha $f(x) = \dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$, ahol

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \underbrace{\frac{4ac - b^2}{4a^2}}_{=:\alpha^2 > 0}\right)$$

Ekkor

$$\int f(x)dx = \int \frac{Ax+B}{a^n\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \alpha^2\right)^n} dx = \int \frac{A \cdot \left(t - \frac{b}{2a}\right) + B}{a^n\left(t^2 + \alpha^2\right)^n} dt =$$

$$\begin{aligned} t &= x + \tfrac{b}{2a} \\ x &= t - \tfrac{b}{2a} \\ dt &= dx \end{aligned}$$

$$= \frac{A}{a^n} \int \frac{t}{(t^2 + \alpha^2)^n} dt + \frac{B - \frac{Ab}{2a}}{a^n} \int \frac{1}{(t^2 + \alpha^2)^n} dt.$$

Ezek után a következő négy fajta integrál számítására lehet szükség

$$\int \frac{1}{t^2+\alpha^2}dt = \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2}dt = \frac{1}{\alpha}\int \frac{1}{1+u^2}du$$

$$\begin{aligned} u &= \tfrac{t}{\alpha} \\ du &= \tfrac{1}{\alpha}dt \end{aligned}$$

$$\int \frac{t}{t^2+\alpha^2}dt \;\; = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du =$$

$$\begin{aligned} u &= t^2+\alpha^2 \\ du &= 2tdt \end{aligned}$$

$$\int \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^n}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^n}du$$

$$\begin{aligned} u &= t^2+\alpha^2 \\ du &= 2tdt \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{(t^2+\alpha^2)^n}dt \quad = \int \frac{1}{(\alpha^2\mathrm{tg}^2 u+\alpha^2)^n}\cdot\frac{\alpha}{\cos^2 u}du$$

$$\begin{aligned} t &= \alpha\cdot\mathrm{tg}u \quad -\tfrac{\pi}{2}<u<\tfrac{\pi}{2} \\ dt &= \alpha\cdot\tfrac{1}{\cos^2 u}du \end{aligned}$$

Trigonometrikus függvények polinomjainak integrálása

DEFINÍCIÓ

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C \qquad \int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$

DEFINÍCIÓ

$$\int \sin(x)^n \cdot \cos(x)^m\,dx$$

- Az $n = m = 0$ eset érdektelen.
- Ha n páratlan (m tetszőleges)
  Legyen $n = 2k+1$

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)^m\,dx = \int \sin(x)^{2k+1} \cdot \cos(x)^m\,dx = \int \sin(x)^{2k} \cdot \cos(x)^m \cdot \sin(x)\,dx = \int (\sin(x)^2)^k \cdot \cos(x)^m \cdot \sin(x)\,dx = \underbrace{\int (1-\cos(x)^2)^k \cdot \cos(x)^m \cdot \sin(x)\,dx}_{t=\cos(x) \qquad dt=-\sin(x)\,dx} =$$

$$-\int (1-t^2)^k \cdot t^m\,dt$$

- Ha m páratlan (n tetszőleges)
  Legyen $m = 2l+1$

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x\ dx = \int \sin^n x \cdot \cos^{2\ell+1} x\ dx =$$

$$= \int \sin^n x \cdot \cos^{2\ell} x \cdot \cos x\ dx = \int \sin^n x \cdot (\cos^2 x)^\ell \cdot \cos x\ dx =$$

$$= \int \sin^n x \cdot (1-\sin^2 x)^\ell \cdot \cos x\ dx = \int u^n \cdot (1-u^2)^\ell du$$

$$\begin{aligned} u &= \sin x \\ du &= \cos x\ dx \end{aligned}$$

- Ha n és m is páros
  Legyen $n = 2k$ és $m = 2l$

$$\int \sin(x)^n \cdot \cos(x)^m\,dx = \int \sin^{2k} \cdot \cos(x)^{2l}\,dx = \int (\sin(x)^2)^k \cdot (\cos(x)^2)^l = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^l dx =$$

DEFINÍCIÓ

- A $\sin^2(x)$ és a $\cos^2(x)$ kifejezhető aképpen, hogy:

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} x \in \mathbb{R}$$
$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} x \in \mathbb{R}$$

Hatodik előadás

(“Kalk2_22_06HO.pdf”)

Trigonometrikus függvények racionális függvényeinek integrálása

DEFINÍCIÓ

A következő alakú integrálokat nevezzük trigonometrikus függvények racionális törtfüggvények intergálásának

$\int \frac{1}{\sin(x)^n}\,dx$ vagy $\int \frac{1}{\cos(x)^n}\,dx$

DEFINÍCIÓ

- Ha $n = 2k$

$$\int \frac{1}{\sin(x)^n}\,dx = \int \frac{1}{\sin(x)^{2k}}\,dx = \int \frac{1}{\sin(x)^{2k-2}}\cdot\frac{1}{\sin(x)^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin(x)^2}\right)^{k-1}\cdot \frac{1}{\sin(x)^2} = \int \left(\frac{\sin(x)^2+\cos(x)^2}{\sin(x)^2}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{\sin(x)^2}\,dx = \underbrace{(1+(x)^2)^{k-1}\cdot\frac{1}{\sin(x)^2}}_{t=ctg(x)\quad dt=\frac{-1}{\sin(x)^2}\,dx} =$$

$$-\int (1+t^2)^{k-1}\,dt$$

- hasonlóan járhatunk el koszinus esetén is.

$$\int \frac{1}{\cos^n(x)}\,dx = \int \frac{1}{\cos^{2k}(x)}\,dx = \int (\frac{1}{\cos^2(x)})^{k-1}\cdot\frac{1}{\cos^2(x)}\,dx =$$

$$= \int (\frac{cos^2(x)+sin^2(x)}{cos^2(x)})^{k-1}\cdot\frac{1}{\cos^2(x)}\,dx$$

- Ez pedig a tangens integráltja, amit visszua tudunk vezetni polinom integrálásra.

DEFINÍCIÓ

- Ha $n = 2k+1$

$$\int \frac{1}{sin^n(x)}\,dx = \int \frac{1}{sin^{2k+1}(x)}\,dx = \underbrace{\int \frac{\sin(x)}{(1-\cos^2(x))^{k+1}}}_{t=\cos(x)\quad dt=-\sin(x)\,dx} =$$

$$= -\int \frac{1}{(1-t^2)^{k+1}}dt$$

- Ami egy racionális tört integrálása.
- Hasonlóan a koszinusz esetében:

$$\int \frac{1}{\cos^n(x)}\,dx = \int \frac{1}{\cos^{2k+1}(x)}\,dx = \underbrace{\int fraccos(x)(1-\sin^2(x))^{k+1}}_{t=\cos(x) \qquad dt=-\sin(x)\,dx} =$$

$$= \int \frac{1}{(1-t^2)^{k+1}} dt$$

DEFINÍCIÓ

- Tangens, vagy kotangens racionális tört függvény integrálása.

$$\underbrace{\int R(\tan(x))\,dx}_{t=\tan(x) \qquad arctan(t)=x \qquad dx=\frac{1}{1+t^2}\,dt} = \int R \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

- Ami egy racionális tört függvény

$$\underbrace{\int R(\cot(x))\,dx}_{t=\cot(x) \qquad arcot(t)=x \qquad dx=\frac{-1}{1+t^2}\,dt} = \int R \cdot \frac{-1}{1+t^2}\,dt$$

- Ami szintén egy racionális tört függvény

DEFINÍCIÓ

- Szinusz és koszinusz racionális tört függvényeinek integrálása

$$\int R(\sin(x), \cos(x))\,dx$$

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t2}\,dt$$

$$sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}) \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

DEFINÍCIÓ

- Addíciós tételek és a négyzetes összefüggések alkalmazásával a következő képletek előállíthatók

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \cdot \cos^2\frac{x}{2} = 2\text{tg}\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} =$$

$$= \frac{2\text{tg}\frac{x}{2}}{\frac{\sin^2 x2+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\text{tg}\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \cos^2\frac{x}{2} =$$

$$= \left(1 - \mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Irracionális függvényeinek integrálása

DEFINÍCIÓ

$$\underbrace{\int R(x,\, \sqrt[n]{x})\, dx}_{t=\sqrt[n]{x} \quad t^n = x \quad dx = n \cdot t^{n-1}\, dt} = \int R(t^n, t) n \cdot t^{n-1}\, dt$$

- Ezzel racionális tört integrálására vezettük vissza a problémát

DEFINÍCIÓ

- Az $\int R(x,\, \sqrt[n_1]{x},\, \sqrt[n_2]{x}, ...,\, \sqrt[n_k]{x})\, dx$ alakú integrálok esetén a $t = \sqrt[n]{x}$ alkalmaható helyettesítés

Hetedik előadás

("Kalk2_22_07HO.pdf")

Intervallum felosztás

DEFINÍCIÓ

- Legyen $\boldsymbol{I} := [a, b]$ véges, zárt intervallum.
- A T halmazt az $\boldsymbol{I} := [a, b]$ intervallum egy felosztásának nevezzük, ha
  a. $T \subseteq \boldsymbol{I}$
  b. T véges halmaz,
  c. $a, b \in T$
- Jelölés: $T = a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

DEFINÍCIÓ

- Az .$\boldsymbol{I}$ intervallum felosztásainak halmazát $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{I})$-vel jelöljük

Felosztás finomsága

DEFINÍCIÓ

- Legyen $T \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{I})$ az $\boldsymbol{I}$ intervallum egy felosztása. A T felosztás finomságán a
  $||T|| := max_{i=1}^{n}.[x_i - x_{i-1}]$
  Számot értjük

Alsó- és felső- közelítő összeg

DEFINÍCIÓ

- Legyen $f : L \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény és $T = a = x_0 < x_1 < ... < x_k < .. < x_{n-1} < x_n = b \in F(I)$ az $\boldsymbol{I}$ intervallum egy felosztása.
- Jelölje:

$$m_i = inf[f(x)|x_{i-1} \leq x \leq x_i], i = 1, ..., n$$
$$M_i = sup[f(x)|x_{i-1} \leq x \leq x_i], i = 1, ..., n$$

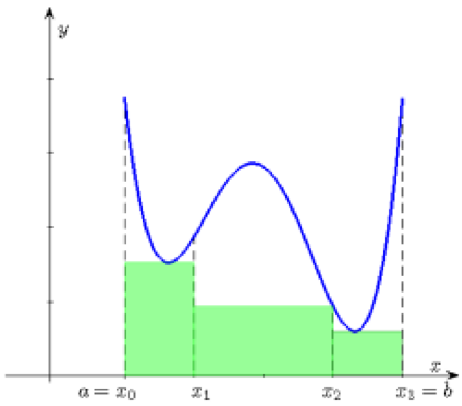
Ekkor a

$$S(F, T) := \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

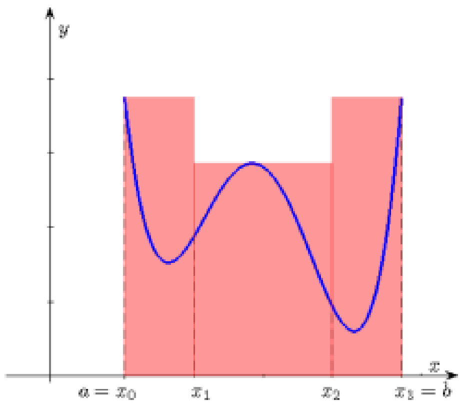
Összeget a függvény, T felosztáshoz tartozó felső közelítő összegének, a

$$s(F, T) := \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

összeget pedig a függvény, T felosztásához tartozó alsó közelítő összegének nevezzük.



$s(f, \tau)$



$S(f, \tau)$

Felosztás finomítása és a közelítő összegek

DEFINÍCIÓ

- Legyen $T_1, T_2 \in F(I)$ ugyanazon intervallum két felosztása. Akkor mondjuk, hogy a T_2 felosztása a T_1 felosztás finomítása, ha annak minden osztópontját tartalmazza, azaz ha $T_1 \subset T_2$
- Ha $T_1, T_2 \in F(I)$ és $T_1 \subset T_2$, akkor
  $s(f, T_1) \leq s(f, T_2)$ és $S(f, T1) \geq S(f, T_2)$
  azaz a felosztás finomításával az alsó közelítő összeg nem csökken, a felső közelítő összeg pedig nem növekszik.
- Bármely két $T_1, T_2 \in F(I)$ felosztás esetén
  $s(f, T_1) \leq S(f, T_2)$

Darboux-féle alsó- és felső integrál

DEFINÍCIÓ

- A $\{s(f,T), T \in F(I)\}$ számhalmaz felülről korltáos, amíg a $\{S(f,T), T \in F(I)\}$ számhalmaz alulról korlátos.

DEFINÍCIÓ

- Legyen f az $I = [a,b]$ zárt intervallum korlátos függvény. az

  $$I_*(f) := sup\{s(f,T) : T \in F(I)\}$$

  értékét az f **Darboux-féle alsó integráljának**, az

  $$I^*(f) := inf\{S(f,T) : T \in F(I)\}$$

  értéket az f **Darboux-féla felső integráljának** nevezzük.

Riemann-integrálhatóság, A Riemann integrál geometriai jelentése

DEFINÍCIÓ

- Akkor mondjuk, hogy az f függvény az $I = [a, b]$ intervallumon **Riemann-integrálható**, ha $I_*(f) = I^*(f) =: I$ Ekkor az I számot az f függvény **Riemann-integráljának** nevezzük és $\int_a^b f(x)\,dx := I$ jelölést használjuk.

DEFINÍCIÓ

- Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ és f Riemann integrálható, az [a,b] intervallumon, akkor a

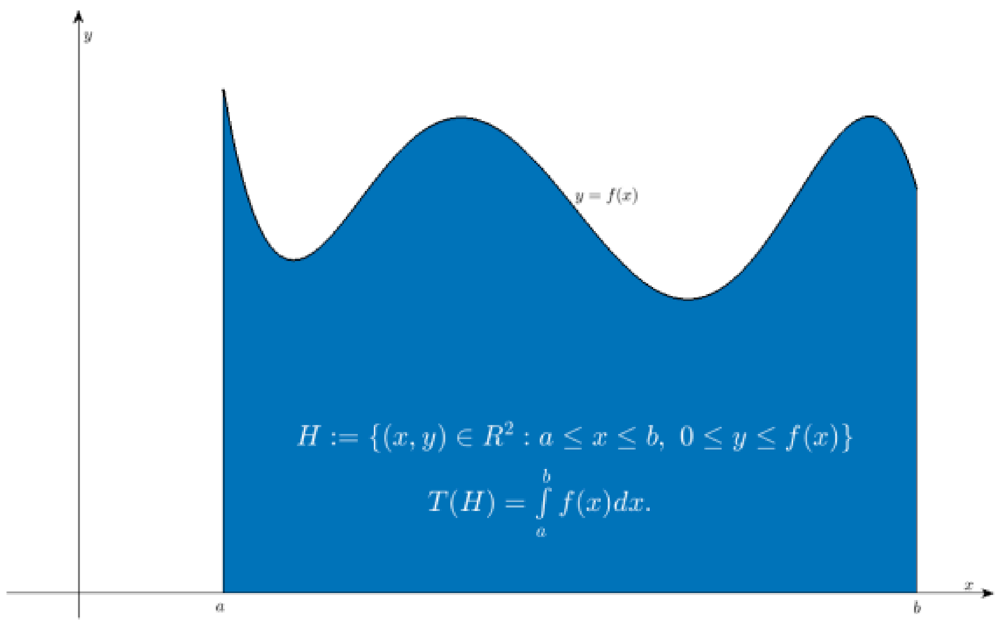
$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Halmaznak létezik területe és $T(H) = \int_a^b f(x)\,dx$

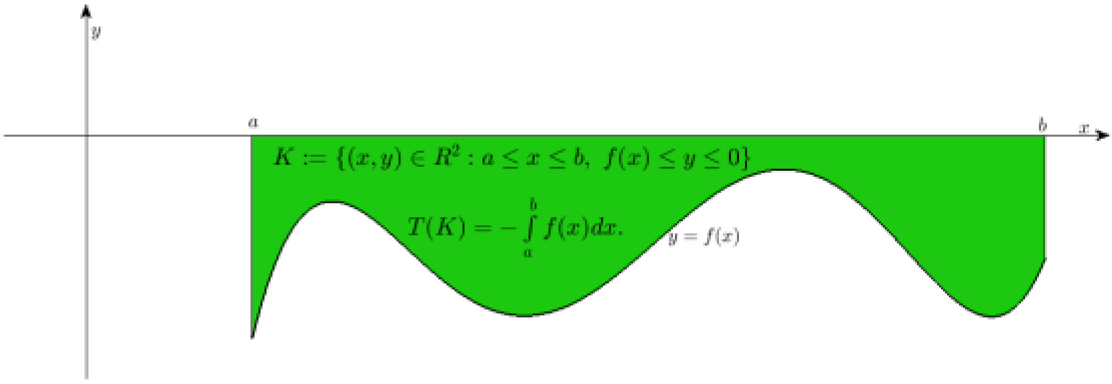
DEFINÍCIÓ

- Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}_0^-$ és f Riemann integrálható az [a,b] intervallumon akkor $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq 0\}$

halmaznak létezik területe és $T(K) = - \in_a^b f(x)\,dx$



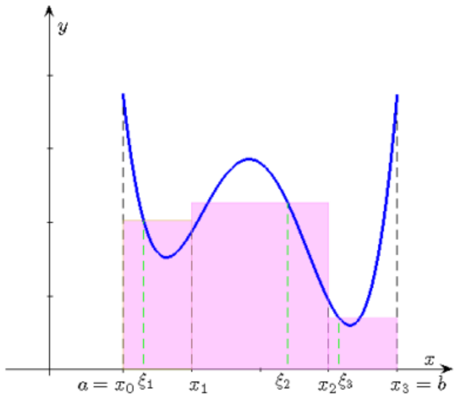
DEFINÍCIÓ



Riemann-közelíthetőösszeg

DEFINÍCIÓ

- Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény és $T \in F(I)$ az [a,b] intervallum egy felosztása, amelyre $T = \{a = x_0 < x_1 << x_k << x_{n-1} < x_n = b\}$Legyen továbbá $A_T := \{\ \xi = (\xi_1, \xi_2, , \xi :_n) | x_{i-1} \leq \xi i \leq \xi, i = 1, 2, , n\ \}$
  úgynevezett közbeeső pontok rendszere. Ekkor a
  $$(f, T, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi i) \cdot (x_i - x_{i-1}), T \in F(I), \xi \in A_T$$
  számot az f függvény T, ξ paraméterpárhoz tartozó Riemann-közelítőösszegének nevezzük.



$\sigma(f, \tau, \xi)$

DEFINÍCIÓ

- Akkor mondjuk, hogy a $T_0 \subseteq T_1 \subseteq\subseteq T_K \subseteq$ felosztás-sorozat minden határon túl finomodó, ha bármely ε > 0 esetén létezik index, K_0 hogy $||T_{K0}||$

DEFINÍCIÓ

- Az f : [a, b] → ℝ függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható, ha σ(f, T, ξ) közelítő összegek sorozata a felosztás minden határon túl való finomítása mellett a ξ közbeeső pontok rendszer választásától függetlenül ugyanahhoz a I számhoz tart.

A Riemann-integrálhatóság feltételei

DEFINÍCIÓ

- Ha f Riemann-integrálható, akkor korlátos.
    - Szükséges feltétel

DEFINÍCIÓ

- **Elégséges feltételei**
    1. A véges zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény Riemann-integrálható.
    2. A véges zárt intervallumon értelmezett korlátos függvény Riemann-integrálható, ha legfeljebb véges sok szakadása van.
    3. A véges zárt intervallumon értelmezett korlátos és monoton függvény Riemann-integrálható.

DEFINÍCIÓ

- Ha az f függvény értékét az intervallumban véges sok helyen megváltoztatjuk, akkor az sem az integrálhatóságot, sem pedig az integrál értékét nem változtatja meg.
    - Pl.: Dirichlet függvény nem integrálható az [0,1] intervallumon.

A határozott integrál tulajdonságai

DEFINÍCIÓ

- Legyen az f függvény az [a, b] intervallumon integrálható és c tetszoleges valós szám, ekkor a $c \cdot f$ függvény is integrálható az [a, b] intervallumon és

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

DEFINÍCIÓ

- Ha az f és a g függvények az [a, b] intervallumon integrálhatók, akkor az f + g függvény is integrálható az [a, b] intervallumon és

$$\int_a^b (f+g)(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

DEFINÍCIÓ

- Ha az f függvény az [a, b] intervallumon integrálható, akkor annak bármely részintervallumán is integrálható

DEFINÍCIÓ

- Ha az f függvény az [a, b] intervallumon integrálható és a < c < b, akkor

$$\int_a^b f(x) = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)$$

DEFINÍCIÓ

- Ha az f függvény az [a, b] intervallumon integrálható és f(x) ≥ 0 minden x ∈ [a, b] esetén, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

DEFINÍCIÓ

- Legyen f függvény az [a, b] intervallumon integrálható, ekkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

DEFINÍCIÓ

- Legyen f függvény az [a, b] intervallumon integrálható, továbbá $m := inf$ $\{$ $f(x)|a \leq x \leq b\}$ és $M := sup$ $\{$ $a \leq x \leq b\}$, ekkor

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \geq M \cdot (b-a)$$

Integrálfüggvény

DEFINÍCIÓ

- Legyen f függvény az [a, b] intervallumon integrálható. Értelmezzük a F függvényt a következoképpen:

  $$D_F = [a, b], \quad F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

  Ekkor a $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény **integrálfüggvényének** nevezzük.

Newton-Leibniz formula

DEFINÍCIÓ

- Legyen az f függvény integrálható az [a, b] intervallumon. Ha az f függvénynek létezik az [a, b] intervallumon F primitív függvénye, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Integrálási szabályok határozott integrálra

DEFINÍCIÓ

- Legyen a $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos [a, b]-n, differenciálható (a, b)-n és a φ deriváltfüggvény legyen integrálható az [a,b]-n, továbbá f legyen folytonos a $\varphi([a, b])$ intervallumon. Ekkor

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du = \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx$$

DEFINÍCIÓ

- Legyen f és g függvény az [a,b] intervallumon differenciálható és f', g' függvények legyenek Riemann-integrálhatók az [a,b]-n. Ekkor

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x) \cdot g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx$$

Improprius integrál

DEFINÍCIÓ

- Legyen $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ olyan függvény, amely integrálható minden $[a,x]$ intervallumon, ahol x > a. Azt mondjuk, hogy az
$$\int_A^\infty f(x)\,dx$$
Improprius integrál konvergens, ha létezik a
$$\lim_{\beta\to\infty}\int_a^\beta f(x)\,dx$$
véges határérték. Ekkor definíció szerint
$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{\beta\to\infty}\int_a^\beta f(x)\,dx$$

DEFINÍCIÓ

- Legyen $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ olyan függvény, amely integrálható minden $[x,b]$ intervallumon, ahol x < b. Azt mondjuk, hogy az
$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$$
improprius integrál konvergens, ha létezik a
$$\lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^b f(x)\,dx$$
véges határérték. Ekkor definíció szerint
$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^b f(x)\,dx$$

DEFINÍCIÓ

- Ha az f függvény integrálható minden véges [x, y] intervallumon és létezik a véges
$$\lim_{\alpha\to-\infty}\lim_{\beta\to\infty}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$
határérték, akkor
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \lim_{\alpha\to-\infty}\lim_{\beta\to\infty}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

DEFINÍCIÓ

- Legyen $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ nem korlátos függvény az a pont környezetében. Tegyük fel, hogy bármely $x\in(a,b]$ esetén f integrálható az $[x,b]$ intervallumon. Akkor mondjuk, hogy az
$$\int_a^b f(x)\,dx$$
improprius integrál konvergens, ha létezik a

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$$

véges határérték. Ekkor definíció szerint

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$$

DEFINÍCIÓ

- Legyen $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ nem korlátos függvény a ‘b’ pont környezetében. Tegyük fel, hogy bármely $x \in [a,b)$esetén f integrálható az $[a,x]$ intervallumon. Akkor mondjuk, hogy az

  $$\int_a^b f(x)\,dx$$

  improprius integrál konvergens, ha létezik a

  $$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a}^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$

  véges határérték. Ekkor definíció szerint

  $$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a}^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$

Területszámítás

DEFINÍCIÓ

- Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ és f Riemann integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor az f függvény $[a, b]$ intervallum fölé eső darabja, az x -tengely és az $x = a$ illetve az $x = b$ egyenesek által határolt síkidom területe, a korábbi definíció alapján:

$$T = \int_a^b f(x)\, dx$$

DEFINÍCIÓ

- Ha$f : [a, b] \to \mathbb{R}_0^-$ és f Riemann integrálható az [a, b] intervallumon, akkor az f függvény [a, b] intervallum fölé eso darabja, az x -tengely és az x = a illetve az x = b egyenesek által határolt síkidom területe, a korábbi definíció alapján:

$$T = -\int_a^b f(x)\, dx$$

DEFINÍCIÓ

- Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény az [a, b] intervallumban elojelet vált és f Riemann integrálható az [a, b] intervallumon, akkor az f függvény [a, b] intervallum fölé eso darabja, az ″ x -tengely és az x = a illetve x = b egyenesek által határolt síkidom területe, az integrál intervallum szerinti additivitása alapján, kiszámítható az eloz″ o két típusba es ″ o területek összegeként.

DEFINÍCIÓ

- Ha $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvénynek az [a,b] intervallumon Riemann integrálhatók és $f(x) \leq g(x), (x \in [a, b])$ akkor a két függvény [a,b] intervallum fölé eső darabja, az x = a és az x = b egyenesek által határolt síkidom területe:

$$T = \int_a^b g(x) - f(x)\, dx$$

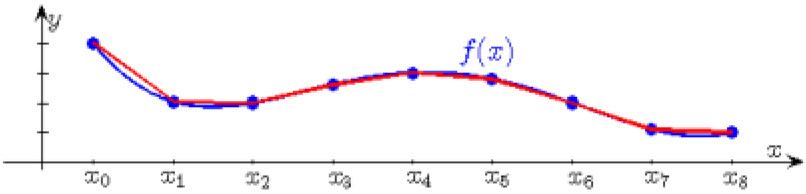
Görbe ívhossza

DEFINÍCIÓ

- Folytonos görbe ívhosszán értjük a görbéhez írt törött vonalak hosszának szuprémumát, feltéve, hogy ez létezik. Legyen adott a görbe az [a,b] intervallumon az y = f(x) egyenlettel, ahol f(x) folytonosan differenciálható [a,b]-n. Ekkor a görbe ívhossza:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Ha a görbének létezik ívhossza, akkor rektifikálhatónak nevezzük.

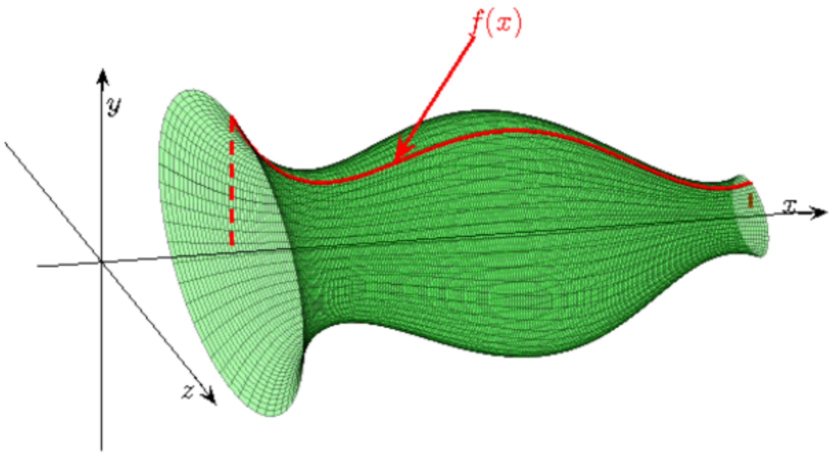


Forgástest térfogata

DEFINÍCIÓ

- Az $f:[a,b]\to\mathbb{R}_0^+$ folytonos függvény grafikonjának x tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogata:

$$V_x=\pi\cdot\int_a^b f^2(x)\,dx$$

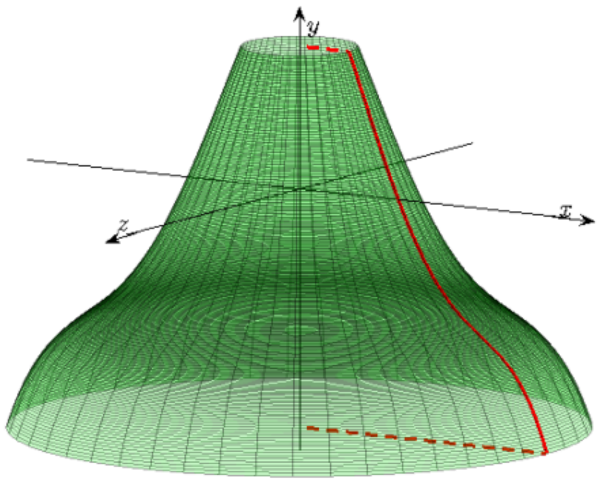


x-tengely körüli megforgatással nyert forgástest

DEFINÍCIÓ

- Az $f:[a,b]\to\mathbb{R},(a,b>0)$ kölcsönösen egyértelmű, folytonos függvény grafikonjának y-tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogata:

$$V_y=\pi\cdot$$



y-tengely körüli megforgatással nyert forgástest

Forgásfelület felszíne

DEFINÍCIÓ

- Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ folytonosan differenciálható függvény grafikonjának x-tengely körüli megforgatásával nyert forgásfelület felszíne:

$$A = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Nyolcadik előadás

Differenciálegyenletek

DEFINÍCIÓ

- Az olyan egyenletet, melyben az ismeretlen egy függvény, függvényegyenletnek nevezzük.

DEFINÍCIÓ

- a függvényegyenletet, melyben az ismeretlen függvény deriváltja, vagy deriváltjai szerepelnek differenciálegyenletnek nevezzük.

Differenciálegyenletek osztályozása

DEFINÍCIÓ

- Ha az ismeretlen függvény egyváltozós valós függvény, akkor a differenciálegyenletet közönséges differenciálegyenletnek nevezzük

DEFINÍCIÓ

- Ha az ismeretlen függvény többváltozós valós függvény akkor a differenciálegyenletet parciális differenciálegyenletnek nevezzük.

DEFINÍCIÓ

- A differenciálegyenletet lineráisnak nevezzük, ha az egyenletben mind az ismeretlen függvény, mind annak deriváltjai csak az első hatványon szerepelnek és sem ezek szorzatai sem pedig irracionális vagy transzvendens függvényei nem fordulnak elő.
    - pl.: $y \cdot y'$ tuti nem lineáris
    - Ellentétben az $y' + y = \sin(x)$ az lineáris

DEFINÍCIÓ

- A differenciálegyenletet homogénnak nevezzük,ha nincs benne konstans illetve olyan tag, amely csak a független változótól függ. (Azaz a differenciálegyenlet minden tagja tartalmazza az ismeretlen függvényt, vagy annak valamelyik deriváltját.
- Ha nem homogén, akkor inhomogén.

DEFINÍCIÓ

- A differenciálegyenletet n-edrendűnek nevezzük, ha az ismeretlen függvény deriváltjai közül az egyenletben az n-edik derivált a legmagasabbrendű.

DEFINÍCIÓ

- A differenciálegyenletet homogénnak nevezzük, ha nincs benne konstans illetve olyan tag, amely csak a független változótól függ. (Azaz a differenciál egyenlet minden tagja tartalmazza az ismeretlen függvényt, vagy annak valamelyik deriváltját.) Ha a differenciálegyenlet nem homogén, akkor inhomogénnak nevezzük.

Differenciálegyenletek megoldásai

DEFINÍCIÓ

- A differenciálegyenleg megoldása olyan függvény, amely a deriváltjaival együtt kielégíti a differenciálegyenletet.
    - $3x = 6 \to 3 \cdot 2 = 6$

DEFINÍCIÓ

- Az n-ed rendű differenciálegyenlet általános megoldása olyan függvény amely a deriváltjával együtt kielégíti a differenciálegyenletet és pontosan n darab, egymástól független szabad paratémert tartalmaz.

DEFINÍCIÓ

- Az n-ed rendű differenciálegyenlet partikuláris megoldása egy olyan függvény, amely egy deriváltjaival együtt kielégíti a differenciálegyenletet,legfeljebb n-1 darab egymástól független szabad paramétert tartalmaz.

DEFINÍCIÓ

- A differenciálegyenlet szinguláris megoldása olyan függvény, amely a deriváltjaival együtt kielégíti a differenciálegyenletet, de nem része az általános megoldásnak.

Kezdetiérték probléma

DEFINÍCIÓ

- A kezdeti érték probléma (KÉP) egy differenciálegyenletből és egy vagy több kezdeti feltételből álló rendszer, amelynek megoldása során a differenciálegyenlet azon partikuláris megoldásait keressük, amely kielégítik a kezdeti feltételeket.

Példa feladatok

1. Osztályozzuk a korábban megismert szempontok alapján az alábbi differenciál egyenletet

   $$9''' - 3y'' + 6y' + y = \frac{10}{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{8}{3}\sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

   Igazoljuk, hogy az

   $$y(x) = 2\sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

   függvény a differenciálegyenlet egyik megoldása.

   - Közönséges (DE), mert megoldásként az $y = y(x)$ egyváltozós függvényt keressük.
   - (DE) harmadrendű, mert az y''' a szereplő legmagasabb rendű derivált.
   - Lineáris, mert az y ismeretlen függvénynek sem egynél magasabb kitevős hatványai, sem irracionális, vagy transzcendens függvényei nem szerepelnek, továbbá nem található az egyenletben az ismeretlen függvénynek és deriváltjainak egymással vett szorzatai.
   - Inhomogén, a $\frac{10}{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ tag miatt.
   - Az $y(x) = 2\sin\left(\frac{x}{3}\right)$ függvény akkor megoldása a differenciálegyenlet kielégíti azt.
   - Az egyenletben a függvény első, másod és harmadrendű deriváltja szerepelő, így ezeket felírjuk:

     $$y'(x) = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right)$$

     $$y''(x) = -\frac{2}{9}\sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

     $$y'''(x) = -\frac{2}{27}\left(\frac{x}{3}\right)$$

   Így valóban

   $$9y''' - 3y'' + 6y' + y = -\frac{2}{3}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2}{3}\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 4\cos\left(\frac{x}{3}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{3}\right) =$$
   $$\frac{10}{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{8}{3}\sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

2. Oldjuk meg az $y' = x \cdot y$ differenciálegyenletet!
   - A differenciálegyenlet egy elsőrendű, homogén lineáris (közönséges) differenciálegyenlet, a megoldás módját tekintve pedig szétválasztható változójú.
   - A változók szétválasztásához y-nal kell osztanunk. Ezt csak akkor tehetjük meg, ha $y \neq 0$.
     - Ha $y = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow y = 0$ szinguláris megoldás
     - Ha $y \neq 0$

       $$\frac{y'}{y} = x$$

$$\int \frac{y'}{y}\,dx = \int x\,dx$$
$$\int \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{2}x^2 + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R})$$
$$ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C_1$$
$$|y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + C_1} = e^{C_1} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$

- Láthattuk tehát, hogy $|y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + C_1} = e^{C_1} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$
- Legyen $C := \begin{cases} \pm e^{C_1} \\ 0 \end{cases}$
- Ekkor
  $y(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} (C \in \mathbb{R})$
- Az $y(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} (C \in \mathbb{R})$ alakban adott függvénysereget nevezzük a fenti differenciálegyenlet általános megoldásának.
- Könnyen látható, hogy a C = 0 eettel beépítettük az y = 0 szinguláris megoldást is.

3. Adjuk meg az
$$\begin{cases} y'(x) & = x \cdot y(x) \\ y(0) & = 5 \end{cases}$$
kezdeti érték problémát!
   - Először megoldjuk az $y'(x) = x \cdot y(x)$ differenciálegyenletet.
   - Majd az általános megoldásból kiválasztjuk azt a partikuláris megoldást, amelyre teljesül a kezdeti feltétel.
   - A differenciálegyenlet általános megoldását az előző feladatban már felírtuk:
   $y(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad (C \in \mathbb{R})$
     - Általános megoldás paraméterét a kezdeti feltétel felhasználásával kiküszöbölhetjük:
       $y(0) = C \cdot e^0 = 5 \Leftrightarrow C = 5.$
     - Így a kezdetiérték probléma megoldása az ny $y(x) = 5 \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ függvény

Elsőrendű szétválasztható változóju differenciálegyenletek

DEFINÍCIÓ

- $y' = g(x) \cdot h(y)$ ahol g és h intervallumon értelmezett folytonos függvénye $\Rightarrow \frac{y'}{h(y)}$ (ha $h(y) \neq 0$)

Elsőrendű lineáris (Inhomogén) differenciálegyenletek általános alakja

DEFINÍCIÓ

- $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ ahol p, q intervallumon értelmezett folytonos függvények.

Másodrendű lineáris homogén differenciálegyenletek általános alakja

DEFINÍCIÓ

- $p(x)y''q(x) \cdot y' + r(x) \cdot y = 0,$ ahol p, q, r intervallumon értelmezett folytonos függvények.

Másodrendű lineáris homogén állandóegyütthatós differenciálegyenletek általános alakja

DEFINÍCIÓ

- $A \cdot y'' + B \cdot y' + C \cdot y = 0$ ahol $A, B, C \in \mathbb{R}$

Kilencedik előadás

Kétváltozós függvények differenciálhatósága. Szélsőérték keresés

Kétváltozós függvények

DEFINÍCIÓ

- A legyen $n \in \mathbb{R}$, ekkor $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt kétválrozós valós függvénynek nevezzük.

DEFINÍCIÓ

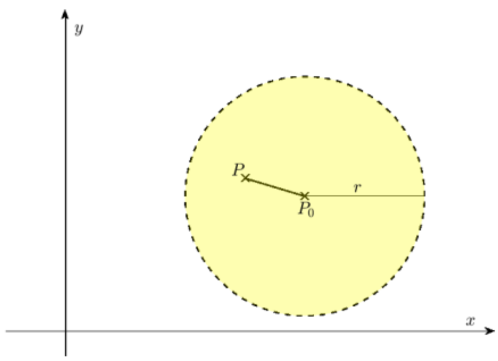
- Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt, amely rendezett számpárokhoz (kétkoordinátás vektorokhoz vagy pontokhoz) valós számokat rendel 2-változós valós függvényeknek nevezzük.

DEFINÍCIÓ

- A két koordinátás vektorok $\mathbb{R}^2$ terén a fent definiált $||.|| : X \to \mathbb{R}_+$ norma teljesíti az úgynevezett norma tulajdonságokat
  - $||x|| \geq 0$ minden $x \in \mathbb{R}^2$ esetén
  - $||x|| = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 0$
  - $||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ minden $x \in \mathbb{R}^2$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén
  - $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ minden $x, y \in \mathbb{R}^2$ esetén

DEFINÍCIÓ

- Egy $P_0 \in \mathbb{R}_+$ sugarú környezetén azon P pontok halmazát értjük, amelyek távolsága P_0 ponttól r-nél kisebb, azaz
  $K_r(P_0) := \{P \in \mathbb{R}^2 | ||P - P_0|| < r\}$



DEFINÍCIÓ

- Pontsorozat konvergenciája a környezet-definíció segítségével átfogalmazható:
  Az $(P_K, k \in \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{R}^2$ pontsorozat akkor és csak akkor tart az $P \in \mathbb{R}^2$ ponthoz, ha minden > 0 esetén található olyan n_0 küszöbindex, hogy minden $n > n_0$ esetén $P_n \in K_(P)$

DEFINÍCIÓ

- A $H \subseteq \mathbb{R}^2$ ponthalmazt korlátosnak nevezzük, ha a
  $\{||P - Q||, P, Q \in H\}$
  korlátos hszámhalmaz

DEFINÍCIÓ

- A $H \subseteq \mathbb{R}^2$ ponthalmaz akkor és csak akkor korlátos, ha pontjainak mindkét koordinátája korlátos halmazt alkot.

DEFINÍCIÓ

- A P pontot a $H \subseteq \mathbb{R}^2$ halmaz belső pontjának nevezzük, ha létezik olyan $\epsilon > 0$ sugár, hogy $K_\epsilon(P) \subseteq H$, azaz a környezet minden pontja H-beli.

DEFINÍCIÓ

- A Q pontot a $H \subseteq \mathbb{R}^2$ halmaz külsőpontjának nevezzük, ha létezik olyan $\epsilon > 0$ sugár, hogy $K_\epsilon(P) \cap H \neq 0$ és $K_\epsilon(P) \setminus H \neq 0$ azaz a pont minden környezete tartalmaz H-beli és a H-ba nem tartozó pontot is.

DEFINÍCIÓ

- A $H \subseteq \mathbb{R}^2$ halmaz nyílt halmaznak nevezzük, ha a halmaz egyetlen határpontját sem tartalmazza.

DEFINÍCIÓ

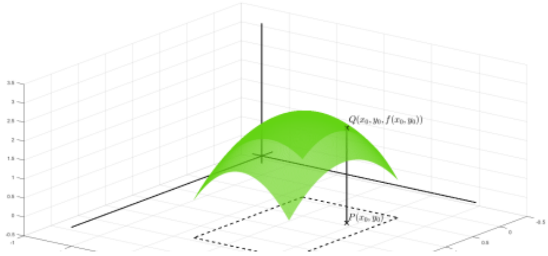
- A $H \subseteq \mathbb{R}^2$ halmaz zárt halmaznak nevezzük, ha a halmaz minden határpontját tartalmazza.

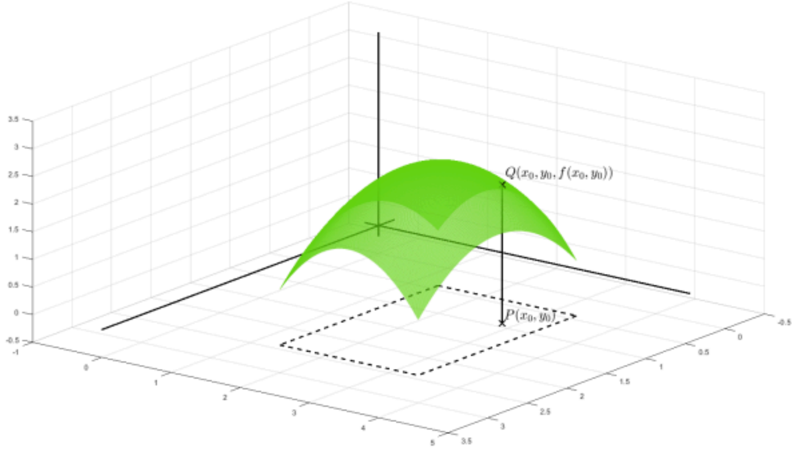
DEFINÍCIÓ

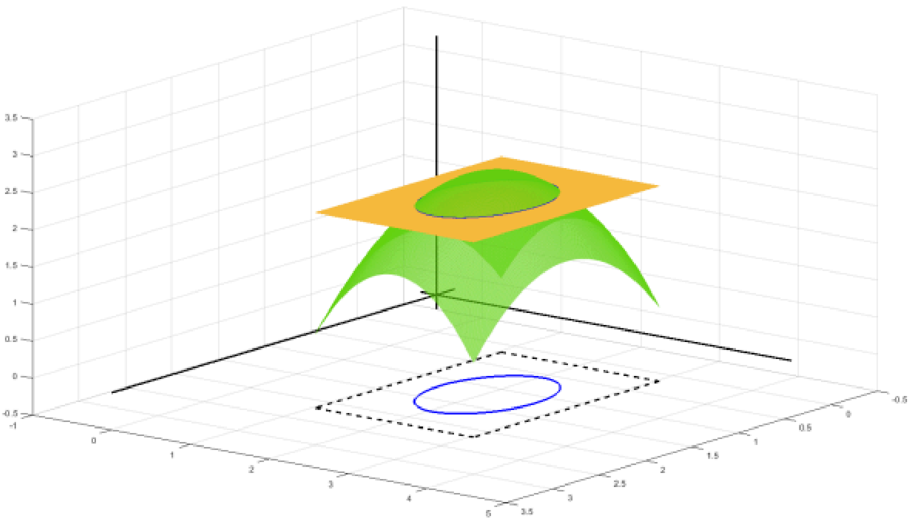
- A korlátos és zárt halmaz kompakt halmaznak nevezzük.

DEFINÍCIÓ

- Az $f : H \to \mathbb{R}(x, y) \to f(x, y)$ kétváltozós valós függvény grafikonján a
  $\gamma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x, y), (x, y) \in D_f\}$


$Q(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
$P(x_0, y_0)$


$Q(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
$P(x_0, y_0)$



Kétváltozós függvények határértéke

DEFINÍCIÓ

- Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^2$. Akkor mondjuk, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvénynek az értelmezési tartományának $P_0 \in H$ torlódási pontjában a határértéke a $A \in \mathbb{R}$ szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén létezik olyan $\gamma > 0$, hogy ha $P \in K_\gamma(P_0)$ akkor $|f(P) - A| < \epsilon$

DEFINÍCIÓ

- A végtelen határértékek is az egyváltozós esethez hasonlóan definiálhatók. Például a fenti f kétváltozós valós függvénynek a P_0 pontban a határértéke ∞, ha minden $R > 0$ esetén létezik olyan $\gamma > 0$, hogy ha $P \in K_\gamma(P_0)$ akkor $f(P) > R$

DEFINÍCIÓ

- Könnyen látható, hogy ha az $f : H \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény határértéke a $P_0(x_0, y_0)$ pontban A, akkor az az alábbi iterált határértékek léteznek és
  $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = \lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = \lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A,$
  tehát megegyeznek az iterált határértékek.

Kétváltozós függvények folytonossága

DEFINÍCIÓ

- Akkor mondjuk, hogy az f kétváltozós valós függvény az értelmezési tartományának P_0 torlódási pontjában folytonos, ha a pontban a határértéke megegyezik a helyettesítési értékével, azaz $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0) = f(x_0, y_0)$
- Az értelmezési tartomány izolált pontjaiban a függvény definíció szerint folytonos

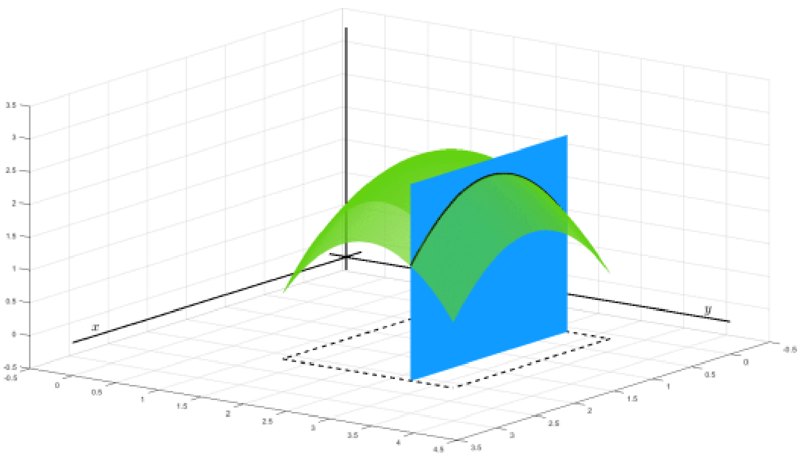
Parciális deriváltak

DEFINÍCIÓ

- Akkor mondjuk, hogy az f kétváltozós valós függvény az értelmezési tartományának $P_0(x_0, y_0)$ torlódási pontjában x-szerint parciálisan differenciálható, ha az $f(x, y_0)$ egyváltozós valós függvény az x_0-ban differenciálható, azaz ha az alábbi határérték létezik és véges

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

A fenti határértékek a $\frac{\partial f}{\partial x}$ vagy $f_x^{'}$ szimbólummal jelöljük és x szerinti parciális deriváltnak nevezzük



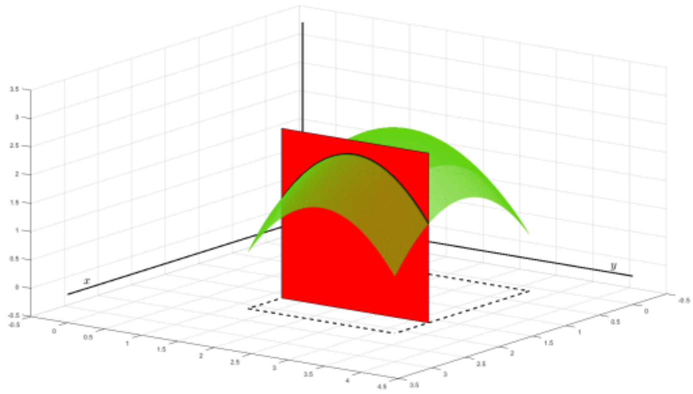
Az x-szerinti parciális derivált geometriai jelentése

DEFINÍCIÓ

- Akkor mondjuk, hogy az f kétváltozós valós függvény az értelmezési tartományának $P_0(x_0, y_0)$ torlódási pontjában y-szerint parciálisan differenciálható, ha az $f(x_0, y)$ egyváltozós valós függvény az x_0-ban differenciálható, azaz ha az alábbi határérték létezik és véges

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

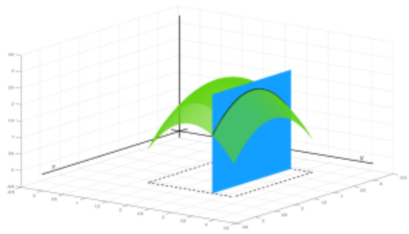
A fenti határértékek a $\frac{\partial f}{\partial y}$ vagy $f_y^{'}$ szimbólummal jelöljük és y szerinti parciális deriváltnak nevezzük

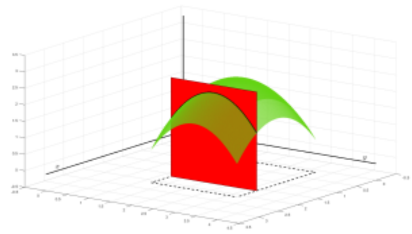


Az y-szerinti parciális derivált geometriai jelentése

DEFINÍCIÓ

- Az x-szerinti parciális derivált geometriai jelentése: az xz-síkkal párhuzamos metszősíkkal vett egyváltozós metszetgörbe x_0 pontba húzott érintőjének meredeksége, míg az y-szerinti parciális derivált geometriai jelentéseként az yz-síkkal párhuzamos metszősíkkal vett egyváltozós metszetgörbe y_0 pontba húzott érintőjének meredeksége kapható.





DEFINÍCIÓ

- Az egyváltozós esethez hasonlóan definiálhatók a parciális derivált függvények

DEFINÍCIÓ

- Szintén az egyváltozós esethez hasonlóan rekurzióval nyerhetők a magasabbrendű deriváltak. Könnyen látható, hogy másodrendű parciális deriváltból összesen 4 darab lesz.
- $f''_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ jelöli az x-szerinti parciális derivált x-szerinti parciális deriváltját.
- $f''_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ jelöli az x szerinti parciális derivált y-szerinti parciális deriváltját
- és így tovább…

DEFINÍCIÓ

- A P_0 pontbeli másodrendű parciális deriváltakat az alábbi mátrix elrendezésben szokás írni

$$F''(P_0) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & {}''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

DEFINÍCIÓ

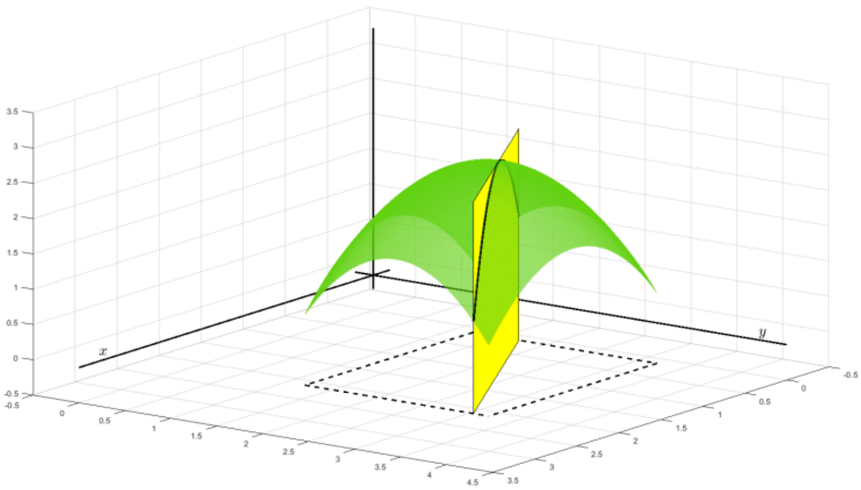
- Ha a függvény másodrendű parciális deriváltjai a P_0 pontban léteznek és valamely környezetében folytonosak, akkor a vegyes másodrendű parciálisok megegyeznek, azaz $f''_{xy} = f''_{yx}$. Ennél kevésbé szigorú feltétel is elég a vegyes parciálisok egyenloségéhez, de ez csak a totális derivált bevezetése után mondható ki. (Young tétel, Clairaut tétel)

DEFINÍCIÓ

- Akkor mondjuk, hogy az f kétváltozós valós függvény az értelmezési tartományának P_0 torlódási pontjában létezik a v iránymenti deriváltja (ahol $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$ kétkoordinátás vektor), ha az alábbi határérték létezik és véges

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + tv) - f(P_0)}{t}$$

Az iránymenti deriváltat az f'_v vagy f'_α szimbólummal jelöljük, ahol α a v vektor x-tengely pozitív felével bezárt szöge.



Totális derivált

DEFINÍCIÓ

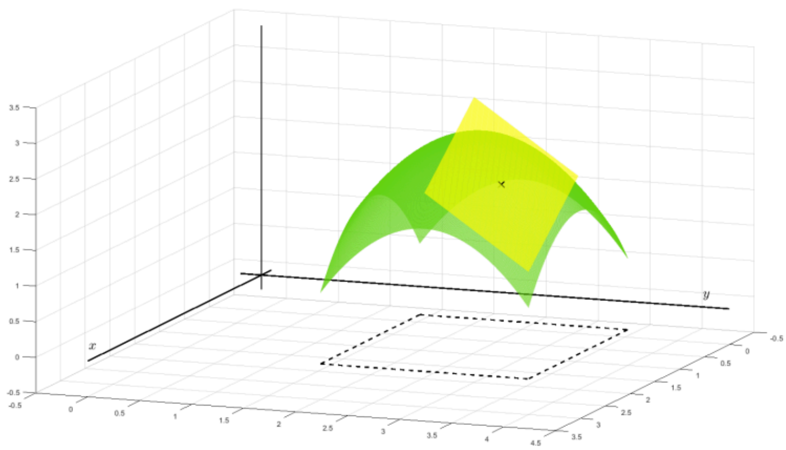
- Legyen az f egyváltozós valós függvény az a pontban differenciálható, ekkor létezik A szám és
$$f(a+h) - f(a) = A \cdot h + (h) \cdot |h|$$
Az $A \cdot h$ lineáris függvény A meredekségére $A = f'(a)$

DEFINÍCIÓ

- Akkor mondjuk, hogy az f kétváltozós valós függvény a $P_0(x_0, y_0)$ torlódási pontban (totálisan) differenciálható, ha létezik $A \in \mathbb{R}^2$ vektor és
$$f(P_0 + h) - f(P_0) = A \cdot h + \epsilon(h) \cdot ||h||$$
Az A vektort az f függvény P_0 beli gradiensének nevezzük. Az $A \cdot h = A_1 h_1 + A_2 h_2$ lineáris kifejezést a függvény P_0 beli totális derivltjának nevezzük.

DEFINÍCIÓ

- A parciális de riváltak létezése a totális deriválhatóságnak szükséges, de nem elégséges feltétele. (Ha a deriváltak folytonosak is a P_0 pontban, akkor egy elégséges, de nem szükséges feltételhez jutunk). Ha a függvény totálisan deriválható, akkor $A = (f'_x, f'_y)$ Az f függvénynek ilyenkor a $Q(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban létezik érintősíkja, melynek egyenlete
$$f - x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = z - f(x_0, y_0)$$



Szélsőérték probléma

DEFINÍCIÓ

- Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz. Akkor mondjuk, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvénynek a $P_0 \in H$ pontban lokális minimuma van, ha létezik $\gamma > 0$, hogy minden $P \in K_\gamma(P_0)$ esetén $f(P_0) \leq f(P)$

DEFINÍCIÓ

- Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz. Akkor mondjuk, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvénynek a $P_0 \in H$ pontban lokális maximuma van, ha létezik $\gamma > 0$ hogy minden $P \in K_\gamma(P_0)$ esetén $f(P_0) \geq f(P)$

DEFINÍCIÓ

- Tekintsük a $H \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmazt. Ha az $f : H \to \mathbb{R}$ differenciálható kétváltozós függvénynek a $P_0 \in H$ pontban lokális szélsőértéke van, akkor P_0ban a parciális deriváltjai 0-k, azaz

$$f'_x(P_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} = 0 \quad \text{és} \quad f'_y(P_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} = 0$$

DEFINÍCIÓ

- Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix, melynek elemeit a_{ij}-vel jelöljük szokásos módon. Az A mátrixhoz tartozó kvadratikus alakon a következő kifejezést értjük:

$$Q_A(\underline{v}) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_i v_j = \underline{v}^T A \underline{v} = \langle \underline{v}, A\underline{v} \rangle$$

ahol $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ egy tetszőleges vektor.

DEFINÍCIÓ

- A Q_A kvadratikus alak homogén másodfokú n változós polinom, azaz olyan kifejezés, amelynek minden tagja pontosan másodfokú.
- A Q_A kvadratikus alak minden $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorhoz egy valós számot rendel.
- Kétváltozós esetben, ha $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, akkor

$$Q_A(\underline{v}) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

DEFINÍCIÓ

- A Q_A kvadratikus alakot
  - Pozitív definitnek nevezzük, ha $Q_A(\underline{v}) > 0$ minden $\underline{v} \in \mathbb{R}^n, \underline{v} \neq 0$ esetén,
  - Pozitív szemidefinitnek nevezzük, ha $Q_A(\underline{v}) \geq 0$ minden $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén,
  - Negatív definitnek nevezzük, ha $Q_A(\underline{v}) < 0$ minden $\underline{v} \in \mathbb{R}^n, \underline{v} \neq 0$ esetén
  - Negatív szemidefinitnek nevezzük, ha $Q_A(\underline{v}) \leq 0$ minden $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén,

- és indefinitnek nevezzük, ha a kifejezés felvesz pozitív és negatív értéket is.

DEFINÍCIÓ

- Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrix első k sorábol és első k oszlopából álló determinánst a mátrix k-adik főminorának nevezzük.

DEFINÍCIÓ

- Legyen a kvadratikus alakhoz tartozó szimmetrikus mátrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A $Q_A$kvadratikus alak akkor és csak akkor pozitív definit, ha az A mátrix minden fominora pozitív

DEFINÍCIÓ

- Legyen a kvadratikus alakhoz tartozó szimmetrikus mátrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A Q_A kvadratikus alak akkor és csak akkor negatív definit, ha az A mátrix minden páratlan rendű fominora negatív és minden páros rendű pozitív előjelű azaz a főminorok váltakozó előjelűek (negatívval kezdődöen)

DEFINÍCIÓ

- Az elöző két tétel 2 × 2-es mátrixok esetére a következo feltételt szabja: ˝ Legyen mátrix determinánsa pozitív. Ha emellett $A_{11} > 0$, akkor a mátrix pozitív definit, ha pedig $A_1 1 < 0$, akkor negatív definit mátrixról van szó.

DEFINÍCIÓ

- Tegyük fel, hogy a $H \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmazon értelmezett $f : H \to R$ kétváltozós függvény kétszer folytonosan differenciálható és a $P_0 \in H$ pontban az elsorendű parciális deriváltak 0-k, azaz $f'_x(P_0) = f'_y(P_0) = 0$ ha a másodrend ˝u derivált mátrix a P_0 pontban pozitív definit, akkor az f függvénynek P_0-ban lokális minimuma, ha negatív definit, akkor pedig lokális maximuma van.

DEFINÍCIÓ

- Ha a P_0 pontban az elsorendű parciális deriváltak 0-k, de a másodrendű deriváltmátrix indefinit, akkor a függvénynek P_0-ban nincs szélsőértéke. Ilyenkor P_0-ban nyeregpontról beszélünk.

Elméleti kérdések

Első téma

1. **Hatványsor definíciója.**
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_{x0})^n$$
2. Taylor- és MacLaurin-sor definíciója.
    - Taylor-sor:
    $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$
    - MacLaurin-sor:
    $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, n \in \mathbb{N}^*$, ahol $x_0 = 0$
3. Konvergencia tartomány definíciója. [±]
    - Azon valós x-ek halmazát, amelykere ahatványsor konvergens, a hatványsor konvergencia tartományánka nevezzük.
4. Konvergenciasugár definíciója.
    - Az x_0 körüli hatványsor konvergenciasugara az a legnagyobb szám, amit r-el jelölve a hatványsor minden z-re konvergens, amire $|x - x_0| < r$. Vagyis a konvergenciasugár a konvergenciakör sugara.
    $\alpha = \limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, ekkor az
    $$R := \begin{cases} 0, & \alpha = \infty \\ \infty, & \alpha = 0 \\ \frac{1}{\alpha}, & 0 < A < \infty \end{cases}$$
5. Cauchy-Hadamard-tétel
    - Konvergens: $K_R(x_0) := x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < R$
    - Divergens: $|x - x_0| > R$
6. Összegfüggvény definíciója.
$$K_R(x_0) \ni x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \in \mathbb{R}$$
7. Analitikus függvény definíciója.
    - Akkor mondjuk az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény analitikus, ha bármely $a \in H$ pontnak van olyan környezete, amelyben az f előállítható hatványsor összefüggvényeként.
    $$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$
    és x_0 egy környezetében $f(x)$-hez konvergál.
8. Taylor-polinom és Lagrange-féle maradék tag definíciója.
    - Taylor-polinom:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

- Lagrange féle maradék:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

9. Taylor-formula és alkalmazása függvény közelítésre.
   - Taylor formula:

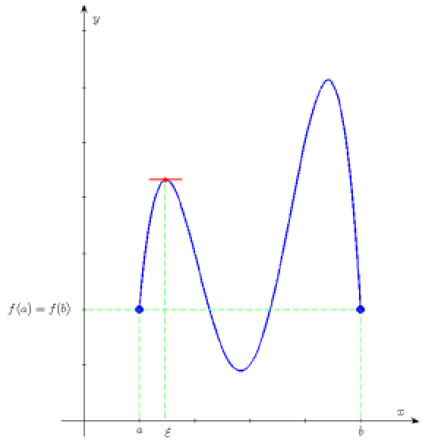
$$f(x) = T_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi))}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}}$$

   - Ha belátható, hogy $R_n(x)$, [ahol $R_n(x)$ kifejezés n-edik Lagrangeféle maradéktag], akkor minden szóbajöhető x esetén "elegendően kicsi", akkor használható az $f(x) \approx T_n(x)$ közelítés.

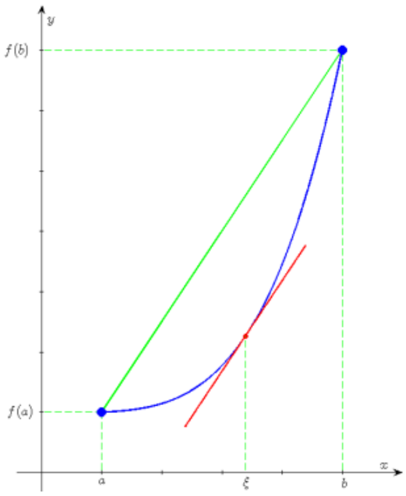
10. Érintő definíciója és egyenlete.

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

11. Mondja ki a Rolle-tételt.
12. Ismertesse és szemléltesse a Rolle-tétel geometriai jelentését.
   - Ha teljesül a Rolle tétel feltételei, akkor van legalább egy olyan belső pont, ahol a függvény érintője vízszintes.



13. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.
14. Ismertesse és szemléltesse a Lagrange-féle középértéktétel geometriai jelentését.



15. Mondja ki a Cauchy-féle középértéktételt.
16. Ismertesse a differenciálszámítás három középértéktételének viszonyát.
    - Rolle-tétel
    - Lagrange
    - Cauchy

Második téma

17. Vezesse le a logaritmikus deriválás képletét. (Adja meg mikor használható!)
18. L'Hospital szabály véges helyen „$\frac{0}{0}$" alakra
    - Az f és g függvények legyenek az x_0 valamely (esetleg féloldali) környezetében differenciálhatók és $x_0$ban folytonosak, melyekre $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Továbbá tegyük fel, hogy létezik a
    $$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
    határérték. Ekkor létezik a $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is és
    $$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
19. L'Hospital szabály véges helyen „$\frac{\infty}{\infty}$" alakra
    - Az f és a g függvények legyenek az x_0 valamely (esetleg féloldali) környezetében differenciálhatók, melyekre
    $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty.$
    továbbá tegyük fel, hogy létezik a
    $$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
    határérték. Ekkor létezik a $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is és
    $$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
20. L'Hospital szabály végtelenben.
    - ugh, fárasztó
21. L'Hospital szabály mínusz végtelenben.
    - Hasonló tétel mondható ki $-\infty$ben is.
22. Lokálisan növő függvény definíciója.
23. Lokálisan fogyó függvény definíciója.
24. Lokálisan maximum definíciója.
25. Lokálisan minimum definíciója.
26. Monotonitás és a derivált kapcsolatáról szóló két tétel.
27. Lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele.
    - Ha az $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in (\alpha, \beta)$ pontban differenciálható és itt lokális szélsőértéke van, akkor $f'(a) = 0$
        - Szükséges, de nem elégséges feltétele
28. Példa olyan függvényre, amely teljesíti a szélsőérték létezésének szükséges feltételét, még sem rendelkezik szélsőértékkel.
    - $f(x) = x^3$ függvénynek nincs szélsőértéke x_0 pontban, pedig $f'(0) = 0$.
29. A szélsőérték létezésének elsőrendű elégséges feltétele

30. A szélsőérték létezésének másodrendű elégséges feltétele
31. A szélsőérték létezésének magasabbrendű elégséges feltétele
32. Egy intervallumon konvex függvény definíciója
33. Egy intervallumon konkáv függvény definíciója
34. Inflexiós pont definíciója
    - Akkor mondjuk, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in H$ helyen inflexiója van, ha ott a függvény konvexitást vált.

Harmadik téma

35. Adja meg a páros függvény definícióját!
    - Ha D_f szimmetrikus és $f(-x) = f(x), (x \in D_f)$, akkor f páros
36. Adja meg a páratlan függvény definícióját!
    - Ha D_f szimmetrikus és $f(-x) = -f(x), (x \in D_f)$, akkor f páratlan
37. Definiálja a függvény periódusát!
    - Az f függvény periódusa p, ha p a legkisebb pozitív szám, melyre minden $x \in D_f$ esetén $f(x+p) = f(x)$.
38. Adja meg mikor van a függvénynek függőleges aszimptotája és írja fel az aszimptota egyenletét.
    - Függőleges aszimptota, ahol $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ (elég ha az egyoldali határérték végtelen)
39. Adja meg mikor van a függvénynek vízszintes aszimptotája és írja fel az aszimptota egyenletét.
    - Vízszintes aszimptota van, ha $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$ vagy $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c$, ahol $c \in \mathbb{R}$
40. Adja meg mikor van a függvénynek ferde aszimptotája és írja fel az aszimptota egyenletét
    - Ferde aszimptota, ha $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ és $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m, m \in \mathbb{R}$ ekkor az aszimptota:

$$y = m \cdot x + \underbrace{\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - m \cdot x)}_{b}$$

Negyedik téma

41. A primitív függvény definíciója.
    - $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, ahol az $F(x)$ a primitív függvény.
42. A primitív függvény tulajdonságai.

$$(F+G)' = F' + G' = f + g$$
$$(\lambda \cdot F)' = \lambda \cdot F' = \lambda \cdot f$$

43. A határozatlan integrál fogalma.
44. Milyen kapcsolatot ismer adott függvény primitív függvényei között?
45. Írja le a határozatlan integrálra vonatkozó műveleti tulajdonságokat!

$$\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,idx + \int g(x)\,dx,$$
$$\int \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int f(x)\,dx$$

46. Fogalmazza meg a helyettesítéses integrálás szabályát határozatlan integrálokra!

$$\int (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = F \circ \varphi + C.$$
$$\int f(x)\,dx = (H \circ \bar{\varphi}(x)) + C$$

47. Fogalmazza meg a határozatlan integrálra vonatkozó parciális integrálás elvét!

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$$

48. Sorolja fel, hogy milyen típusú integrandusok esetén és hogyan érdemes parciális integrálást végezni. (4 eset)

I. Polinom, Logaritmus, vagy cikometrikus ("arkusz") függvény sorzata

- A parciális integrálás során legyen f' a polinom, így a fenti eljárást alkalmazva a kiszámítandó $\int f(x) \cdot g'(x)\,dx$ integrálban a polinom mellett egy könnyebben kezelhető függvény jelenik meg

II. Logaritmus

- Ilyenkor az integrandust tekinthetjük olyan szorzatnak, melynek az egyik tényezője az eredeti integrandus, a másik tényezője pedig az azonosan 1 polinom. A parciális integrálás során ugyanúgy járunk el, mint az előző típus esetén

III. Exponenciális- és szinusz-, vagy koszinusz függvény szorzata.

- Kétszer egymás után parciálisan integrálunk. (Tetszőleges megfeleltetéssel, de mindkétszer ugyanolyan szerepkiosztással.) A második lépés után egy függvényegyenlethez jutunk, melyből elemi átalakítással „kifejezhetjük" a keresett függvényt

$$\int x \cdot \cos(x)\,dx \qquad \int \sin(x) \cdot e^x\,dx$$
$$\int x \cdot ln(x)\,dx \qquad \int ln(x)\,dx$$

Ötödik téma

49. Milyen függvényeket nevezünk elemi törtfüggvényeknek?

$$f(x) = a_n^{xn} + a_{n_1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}(i = 0, , n)$$

$$f(x) = \frac{A}{(x-a)^n}, \quad a \in \mathbb{R}, x \neq a, n \in \mathbb{N}^*, A \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}, A, B \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, (b^2 - 4ac < 0), n \in \mathbb{N}^*$$

50. Írja le a racionális törtfüggvények integrálásának lépéseit!
51. Írja fel a trigonometrikus függvényekre vonatkozó linearizáló formulákat!

$$\cos(x)^2 = \frac{1+\cos(2)}{2} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin(x)^2 = \frac{1-\cos(2)}{2} \quad x \in \mathbb{R}$$ ezeknél (cos2x)

52. Írja fel a $tg(\frac{x}{2})$ -es helyettesítéshez szükséges összefüggéseket!

$$t = tg(\frac{x}{2}) \quad x \in (-\pi, \pi)$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t2}$$

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

53. Írja fel a tgx-es helyettesítéshez szükséges összefüggéseket és azt, mikor érdemes alkalmazni a módszert!
    - A $R(\sin(x), \cos(x)) = R(-\sin(x), -\cos(x))$ feltétel a gyakorlatban annyit jelent, hogy mind a $\sin(x)$, mind pedig a $\cos(x)$ hatványai az integrandusban páros kitevősek és a vegyes szorzatok esetén a kitevők összege páros

$$y = tgx \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$dx = \frac{1}{1+y^2}dy$$

$$\sin(x)^2 = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\cos(x)^2 = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\sin(x) \cdot \cos(x) = \frac{y}{1+y^2}$$

Hatodik téma

54. Mit nevezünk egy intervallum felosztásának?
55. Mit ért egy egy intervallum felosztásának finomságán?
56. Mit nevezünk alsó közelítő összegnek?
57. Mit nevezünk felso közelítő összegnek?
58. Mit mondhatunk ugyanazon függvény alsó- és felső közelítő összegeinek viszonyáról?
    - Mivel $m_i \leq M_i i$ index esetén, ezért bármely τ felosztás mellett $s(f,) \leq S(f,\tau)$
59. Hogyan változik a felso közelítő összeg értéke, ha a felosztást finomítjuk?
    - a felosztás finomításával az alsó közelítő összeg nem csökken
60. Hogyan változik az alsó közelíto összeg értéke, ha a felosztást finomítjuk?
    - a felosztás finomításával a felső közelítő összeg pedig nem növekszik.
61. Mit nevezünk az f függvény Darboux-féle alsó integráljának?
    $I_*(f) := sup\,_{\{}s(f,T) : T \in F(I)_{\}}$
62. Mit nevezünk az f függvény Darboux-féle felso integráljának?
    $I^*(f) := inf\,_{\{}S(f,T) : T \in F(I)_{\}}$
63. Mikor mondjuk, hogy az f függvény Riemann-integrálható?
64. Mondjon példát olyan függvényre, amely Riemann szerint nem integrálható a [0,1]-intervallumon!
    - Dirichlet-függvény nem integrálható a [0, 1] intervallumon.
65. Definiálja az f nem-negatív függvény görbealatti területét!
    - Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ és f Riemann integrálható, az [a,b] intervallumon, akkor a $H :=_{\{}(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)_{\}}$
    Halmaznak létezik területe és $T(H) = \int_a^b f(x)\,dx$
66. Definiálja a g nem-pozitív függvény görbealatti területét!
    - Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}_0^-$ és f Riemann integrálható az [a,b] intervallumon akkor $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq 0\}$
    halmaznak létezik területe és $T(K) = -\in_a^b f(x)\,dx$
67. Definiálja a Riemann-féle közelítő összeget!
    - Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény és $T \in F(I)$ az [a,b] intervallum egy felosztása, amelyre $T = \{a = x_0 < x_1 << x_k << x_{n-1} < x_n = b\}$Legyen továbbá $A_T := _{\{}\ \xi = (\xi_1, \xi_2, , \xi\ :_n) | x_{i-1} \leq \xi i \leq \xi, i = 1, 2, , n\ _{\}}$
    úgynevezett közbeeső pontok rendszere. Ekkor a
    $(f, T, \xi) := \sum_{i=1}^n f(\xi i) \cdot (x_i - x_{i-1}), T \in F(I), \xi \in A_T$
    számot az f függvény T, ξ paraméterpárhoz tartozó Riemann-közelítőösszegének

nevezzük
68. Mikor mondjuk, hogy az intervallum egy felosztás-sorozata minden határon túl finomodó?
69. Milyen szükséges feltételt ismer függvények Riemann-integrálhatóságára?
    - Ha f Riemann-integrálható, akkor korlátos
70. Írja le a Riemann-integrálra vonatkozó műveleti tulajdonságokat!
    $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$
    $\int_a^b (f+g)(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

$$\int_a^b f(x) = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \geq M \cdot (b-a)$$

71. Írjon 3 elégséges feltételt függvények Riemann-integrálhatóságára!
    I. A véges zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény Riemann-integrálható.
    II. A véges zárt intervallumon értelmezett korlátos függvény Riemann-integrálható, ha legfeljebb véges sok szakadása van.
    III. A véges zárt intervallumon értelmezett korlátos és monoton függvény Riemann-integrálható.
72. Mondja ki a határozott integrálra vonatkozó műveleti tulajdonságokat!
73. Mondja ki a Newton-Leibniz tételt!

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

74. Mit nevezünk integrálfüggvénynek?

$$D_F = [a,b], \quad F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

Ekkor a $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény **integrálfüggvényének** nevezzük.

75. Írja le az integrálfüggvényre vonatkozó tételt!
    - Ha a f függvény folytonos az [a, b] intervallumon, akkor a $F(x) := \int_a^x f(x)\,dt$ integrálfüggvény az [a,b] intervallumon differenciálható és $F' = f$
76. Mondja ki a parciális integrálás szabályát határozott integrál esetén!

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x) \cdot g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx$$

77. Mondja ki a helyettesítéses integrálás szabályát határozott integrál esetén!

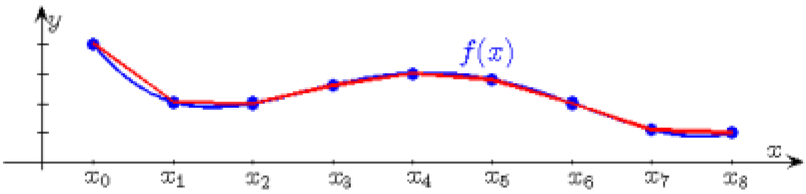
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du = \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx$$

78. Mondja ki az integrálszámítás középérték tételét!
    - Ha az f függvény folyotonos az [a,b] intervallumon, akkor létezik olyan $\xi \in [a,b]$ hely, hogy

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \cdot (b-a)$$

79. Definiálja az improprius integrál mindkét alapesetét!
80. Definiálja a rektifikálható görbe ívhosszát!

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$



81. Mondja ki a forgástest térfogatára vonatkozó mindkét tételt!
82. Mondja ki a forgásfelület felszínére vonatkozó tételt

$$A = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Hetedik téma

83. Mit ért függvényegyenlet alatt?
84. Mi a differenciálegyenlet?
85. Mikor nevezzük a differenciálegyenletet közönségesnek?
86. Mikor beszélünk parciális differenciálegyenletről?
87. Definiálja a lineáris differenciálegyenletet!
    - pl.: $y \cdot y'$ tuti nem lineáris
    - Ellentétben az $y' + y = \sin(x)$ az lineáris
88. Definiálja a homogén differenciálegyenletet!
89. Mit ért a differenciálegyenletet rendjén!
90. Mikor nevezzük a differenciálegyenletet homogénnek?
91. Mikor nevezzük a differenciálegyenletet inhomogénnek?
92. Definiálja a differenciálegyenlet megoldását!
93. Milyen típusú megoldásokról tanult a differenciálegyenleteknél?
    - Elsőrendű szétválasztható változóju differenciálegyenletek
    - Elsőrendű lineáris (Inhomogén) differenciálegyenletek általános alakja
    - Másodrendű lineáris homogén differenciálegyenletek általános alakja
    - Másodrendű lineáris homogén állandóegyütthatós differenciálegyenletek általános alakja
94. Definiálja a differenciálegyenlet általános megoldását!
95. Definiálja a differenciálegyenlet partikuláris megoldását!
96. Definiálja a differenciálegyenlet szinguláris megoldását!
97. Definiálja a kezdetiérték problémát!

Nyolcadik téma

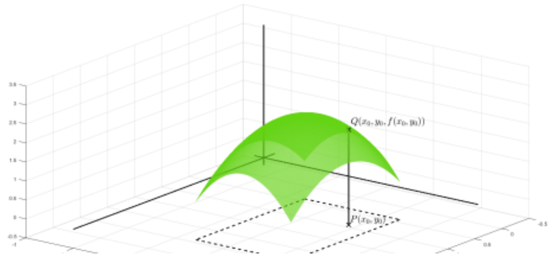
98. Adja meg a kétváltozós valós függvény definícióját.

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

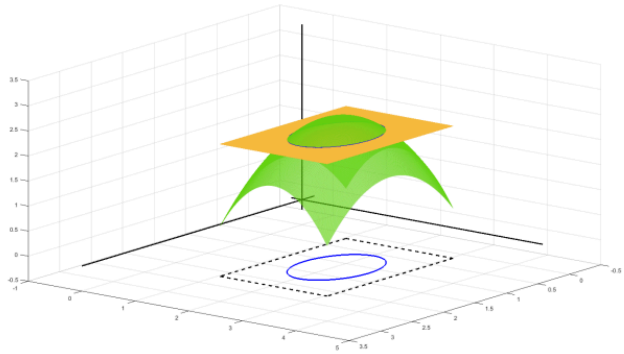
99. Mikor nevezünk egy pontsorozatot konvergensnek?
100. Definiálja egy P_0 pont r sugarú környezetét.
101. Adja meg a pont sorozatot konvergenciájának definícióját a környezet segítségével.
102. Korlátos ponthalmaz definíciója.

$$\{||P - Q||, P, Q \in H\}$$

103. Ponthalmaz korlátossága a koordináták segítségével.
104. Belső-, külső- és határpont definíciója. ″
105. Nyílt- és zárt halmaz definíciója.
106. Kompakt halmaz definíciója.
107. Definiálja a kétváltozós valós függvény grafikonját.



108. Definiálja a kétváltozós valós függvény szintvonalait.



109. Definiálja a kétváltozós valós függvény véges határértékét.
110. Mikor mondjuk, hogy a kétváltozós valós függvénynek P_0-ban végtelen a határértéke.
111. Mi a kapcsolat a pontbeli határérték és az iterált határértékek között?

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x,y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y) = \lim_{P \to P_0} f(P) = A,$$

112. Mikor mondjuk, hogy a kétváltozós valós függvény a P_0 pontban folytonos?
113. Elsorendű parciális deriváltak definíciója és geometriai jelentése. ″
114. Iránymenti deriváltak definíciója és geometriai jelentése.
    - Az iránymenti deriváltat az f'_v vagy f'_α szimbólummal jelöljük, ahol α a v vektor x-tengely pozitív felével bezárt szöge.
115. Kétváltozós valós függvény második derivált mátrixa.

$$F''(P_0) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & {}''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

116. Kétváltozós valós függvény totális differenciálhatósága.

$$f(a+h) - f(a) = A \cdot h + (h) \cdot |h|$$

117. Érintősík egyenlete.

$$f - x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0) = z - f(x_0, y_0)$$

118. Kétváltozós valós függvény lokális szélsoértékeinek definíciója. ″

119. Kétváltozós valós függvény lokális szélsoértékének szükséges feltétele.

$$f_x'(P_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} = 0 \quad \wedge \quad f_x'(P_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} = 0$$

120. Kvadratikus alak definíciója.

$$Q_A(\underline{v}) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_i v_j = \underline{v}^T A \underline{v} = \langle \underline{v}, A\underline{v} \rangle$$

121. Kvadratikus alakok osztályozása definitség szerint (az egyes típusok meghatározásával)

- Pozitív definitnek nevezzük, ha $Q_A(\underline{v}) > 0$ minden $\underline{v} \in \mathbb{R}^n, \underline{v} \neq 0$ esetén,
- Pozitív szemidefinitnek nevezzük, ha $Q_A(\underline{v}) \geq 0$ minden $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén,
- Negatív definitnek nevezzük, ha $Q_A(\underline{v}) < 0$ minden $\underline{v} \in \mathbb{R}^n, \underline{v} \neq 0$ esetén
- Negatív szemidefinitnek nevezzük, ha $Q_A(\underline{v}) \leq 0$ minden $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén,

122. A definitség és a főminorok kapcsolata.

I. eset

II. eset

III. eset

IV. eset

123. Kétváltozós valós függvény lokális szélsőértékének elégséges feltétele

Gyakorlatok

Deriválás

Ismétlés: deriválás

$sin^2x \implies f(g(x)) \longrightarrow 2cos(x) \cdot (-sin(x))$

$x \cdot y \iff \frac{\frac{y}{1}}{x}$

$\sqrt{x} \iff x^{\frac{1}{2}}$

$\frac{3x^2}{20} = 2\frac{3x}{20}$

$ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$

$(a^x)' = a^x lna$

$(log_a x)' = \frac{1}{x}\frac{1}{lna}$

$(\tan x)' = \frac{1}{cos^2(x)}$

$(x^x)' = (e^{lnx^x})' = (e^{xlnx})' = e^{xlnx} \cdot (1 \cdot lnx + x \cdot \frac{1}{x})$

Mert: $ANYTHING = e^{lnANYTHING}$

Érintő egyenlete

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Taylor Polinom

$T_n(x) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$

Lagrange féle maradék

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$

Függvény monotonitás és szélső érték

Példával statuálva.

Függvény konvexitás (görbület), inflexió

Példával statuálva.

Paritás

Példával statuálva

Határozatlan Integrálás

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$ **, ahol n egy konstans**

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{lna} + C$$ **, ahol x függvény**

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$

$$\int sin\,dx = -cosx + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a} \cdot arctg(\frac{x}{a}) + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

Helyettesítési integrálás

- Integrálás esetében összetett függvényeknél elfogadható eljárás.
  t= függvény

Parciális integrálás

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int g' \cdot f$$

$$\int P(x) \begin{cases} \mathrm{a^x} \\ \mathrm{e^x} \\ \mathrm{sinx} \\ \mathrm{cosx} \end{cases} dx \quad g = P(X) \ f' = (\dots)$$

$$\int P(X) \begin{cases} \mathrm{lnx} \\ \mathrm{logx} \\ \mathrm{arc} \end{cases} dx \quad g = (...) f' = P(x)$$

Trigonometrikus függvények integrálása

[Példával statuálva.]

Törtfüggvények integrálása

[Példával statuálva.]

Törtfüggvény Integrálása, ha trigonometrikus függvény (Koszinus, Szinus) összeg

$$\int \mathbb{R}(\sin(x); \cos(x))\, dx$$

- Abban az esetben, ha egy racionális tört függvény integrálásjában, valahol efféle képen található meg két trigonometrikus függvény.

$$t = \tan(\frac{x}{2}) \ //$$

$$2\arctan(t) = x$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt \implies \begin{matrix} \sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix}$$

Irracionális törtfüggvény integrálása

$$\int \mathbb{R}[x, \sqrt{n}x]\, dx$$

$t = \sqrt[n]{x}$

$t^n = x$

$dx = n \cdot t^{n-1}\, dt$ //MINDEN ESETBEN DX = VALAMI DT!!!!

$$\int \mathbb{R}[x, \sqrt[n]{ax+b}]\, dx$$

$t = \sqrt[n]{ax+b}$

$t^n = ax + b$

$\dfrac{t^n - b}{a} = x$

$\dfrac{dx}{dt}\dfrac{1}{a} \cdot [t^n - b]$

$dx = \dfrac{n \cdot t^{n-1}}{a}\, dt$

Első Gyakorlat

13.1. Érintő egyenlete

- ***Írjuk fel az*** $f(x) = cos(\pi x) + 1$ ***függvény*** $x_0 = \frac{1}{3}$ ***helyhez tartozó érintőjének egyenletét, készítsünk ábrát!***

1. $f(x_0) = f(\frac{1}{3}) = cos(\frac{\pi}{3}) + 1 = 1,99$
2. $f'(x) = (cos(\pi \cdot y)' = -\sin(\pi \cdot x) \cdot pi$
3. $f'(x_0) = -\sin(\frac{\pi}{3}) = -0.057$
4. $y = f'(x_0) - (x - x_0) + f(x_0))$
5. $y = -0.057 - (x - \frac{1}{3}) + 1,99$

13.2 Érintő egyenlete

- ***Határozzuk meg az*** $f(x) = \tan 2x$ ***függvény görbéjének azon pontjait, ahol az érintő párhuzamos az*** $\frac{1}{2}\, y = 4x - 1$ ***egyenessel!***

1. $f(x_0) = \tan 2 \cdot \frac{1}{2} = 0,017$
2. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot 2$
3. $f'(x_0) = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}} \cdot 2 = 2$
4. $y = 2 \cdot (x - \frac{1}{2}) + 0,017$

14.1 Taylor-formula és alkalmazásai

- ***Írjuk fel az alábbi függvények adott ponthoz tartozó megadott fokszámú Taylor polinomját* (T) *és Lagrange-féle maradék tagot* (R)*!***
- $f(x) = \cos 3x, \quad x_0 = \frac{\pi}{3}, \quad n = 4$
    1. $\cos 3x = T_4(x) + R_4(x).$

    $$\begin{aligned} f(x) &= \cos 3x \\ f'(x) &= -\sin 3x \cdot 3 = -3\sin 3x \\ f''(x) &= -\cos 3x \cdot 3 = -9\cos 3x \\ f'''(x) &= 9\sin 3x \cdot 3 = 27\sin 3x \\ f''''(x) &= 27\cos 3x \cdot 3 = 81\cos 3x \end{aligned}$$
    2. $f'''''(x) = -81\sin\ 3x \cdot 3 = -243\sin 3x$

    $$\begin{aligned} f(x_0) &= -1 \\ f'(x_0) &= 0 \\ f''(x_0) &= 9 \\ f'''(x_0) &= 0 \\ f''''(x_0) &= -81. \end{aligned}$$
    3. $f'''''(\xi) = -243\sin 3\xi$
- $T_n(x) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k$$

- $T_4(x) = f(x_0) + \frac{0}{1!} \cdot (x - \frac{\pi}{3})^1 + \frac{9}{2!} \cdot (x - \frac{\pi}{3})^2 + \frac{0}{3!} \cdot (x - \frac{\pi}{3})^3 + \frac{-81}{4!} \cdot (x - \frac{\pi}{3})^4$
- $R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \cdot (x - \frac{\pi}{3})^5$

Második Gyakorlat

13.4. L'Hospital szabály

- Leírás

a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x} \overset{\frac{0}{0}L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{1}=2$ //L'H szabály esetén tagonként deriválunk

b. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{ln(4-x)}{2x-6}=lim_{x\to 3}\frac{ln(4-3)}{2\cdot 3-6}\overset{\frac{0}{0}L'H}{=}$ //L'H szabály esetén tagonként deriválunk

$\lim\limits_{x\to 3}(\frac{ln(4-x)}{2x-6})'=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\frac{1}{4-x}\cdot(-1)}{2}=-\frac{1}{2}$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^\infty}{\infty^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{e^x}{x^2})'=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}$ //Mivel itt továbbra is határozatlansági eset van, megyünk tovább

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}\overset{\frac{\infty}{2}}{=}+\infty$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot e^{-x}\overset{\infty\cdot 0}{=}$ //Itt egy kis átalakításra lesz szükségünk

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{e}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}$ // ezt már lehet deriválni

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x}{e^x})'=\frac{1}{e^x}\Longrightarrow\infty$

e. $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot lnx\overset{0\cdot 0}{=}$ //Használjunk egy azonosságot, amivel átírható az egész

$\lim\limits_{x\to 0}x\cdot lnx=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\frac{lnx}{1}}{x})'=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\frac{1}{x}}{1}}{x}$ // ez nem jó

f. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{0-\sin 0}{0^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}$

$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x-\sin x}{x^3})'=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cosx}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{3\cdot 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{cosx}{3\cdot 2\cdot 1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{6}$

Szöveges szélsőérték feladatok

- Példa feladat: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 7$

1. **Első derivált:** $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ (szükséges feltétel)
   $3x^2 - 12x + 9 = 0$ /: 3
   $x^2 + -4x + 3 = 0$ /másodfokú megoldó képlet
   $x_1 = 3 \quad x_2 = 1$

Ha teljesül

$f'(a) = 0 \wedge f''(a) \neq 0 \Longrightarrow$ a pontban lokális szélsőérték van
$0 < f''(a) \Longrightarrow$ "a"-ban minimum hely van
$f''(a) < 0 \Longrightarrow$ "a" lesz a maximum hely

2. **Második derivált:** $f''(x) = 6x - 12$
   $f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0 \Longrightarrow x = 3$ lokális minimum hely
   $f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6 < 0 \Longrightarrow x = 1$ lokális maximum hely

Deriválási gyakorlatok (nem L’H)

a. $(6x^3+\sqrt{x}+\frac{1}{x^6}+\frac{3}{2\cdot\sqrt{x}}+5)'$ //Rendezzük át

$(6x^3+x^{\frac{1}{2}}+x^{-6}+\frac{3}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}})'$ $\frac{3}{2\cdot\sqrt{x}} \Longrightarrow \frac{3}{2\cdot x^{\frac{1}{2}}} \Longrightarrow \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \Longrightarrow \frac{3}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$()' = 18x^2+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+(-6)x^{-7}+\frac{3}{2}\cdot(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}}$

b. $(\sin x\cdot(e^x+5x))'$

$\cos x\cdot(e^x+5x)+\sin x\cdot(e^x+5)$

c. $(\frac{cosx+lnx}{5x^3})'$

$= \frac{(\cos x+lnx)'\cdot 5x^3-\cos x+lnx\cdot 15x^2}{(5x^3)^2} = \frac{(-\sin x+\frac{1}{x})\cdot 5x^3-cosx+lnx\cdot 15x^2)}{(5x^3)^2}$

d. $(2^{x^2+5x-6}+3)'$ //Be kell szorozni, és akkor lelehet hozni a kitevőt $/\cdot lnx$

$(2^{x^2+5x-6}\cdot lnx)\cdot(x^2+5x-6)'$

$= (2^{x^2+5x-6})\cdot 2x+5$

Harmadik Gyakorlat

Példa feladat – Függvényvizsgálat

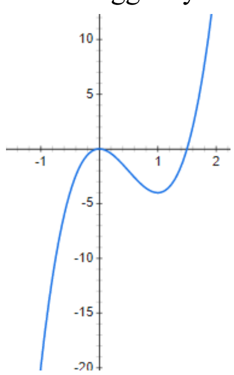
$f(x) = -2x^4 + 4x^3$

(1) **Monotonitás, szélső érték**

- Ott lehet szélső érték, ahol az első derivált nulla.
    - Szükséges feltétel: $f'(x) = 0$
- $f'(x) = -8x^3 + 12x^2$
- Ilyenkor le kell egyszerűsíteni, ahol tudjuk
- $-8x^3 + 12x^2$ Ki tudunk emelni x^2-el
- $x^2(-8x + 12)$
- Itt szegmensenként vizsgálhatjuk a függvényt
- x^2 függvény mindig pozitív. Akkor lesz nulla, ha $x_1 = 0$
- $-8x + 12$ rendezéssel kiderül, hogy akkor lesz nulla ha $x_2 = \frac{12}{8}$
    - $-8x + 12 = 0$
    - $-8x = -12$
    - $x_2 = \frac{12}{8} \Longrightarrow \frac{3}{4}$
- Ilyenkor táblázatba kell pakolni az eredményeket.

x	$]-\infty; 0[$	0	$]0; \frac{3}{4}[$	$\frac{3}{4}$	$]\frac{3}{2}; +\infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	–
$f(x)$	Szigorúan monoton növekvő	$(+) \rightarrow (+) \Longrightarrow$ nincs szélső érték	Szigorúan monoton növekvő	lokális maximum	Szigorúan monoton csökkenő

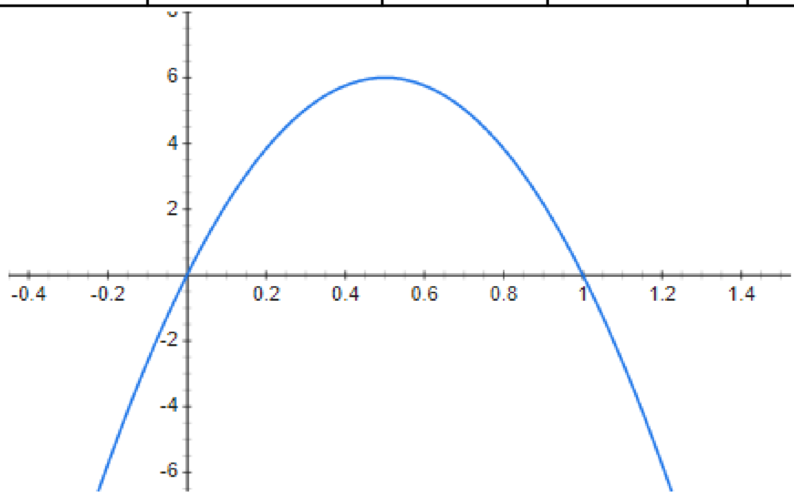
- Fejben összerakható, hogy így nézne ki ez a függvény



(2) **Görbület (konvexitás), inflexió**

- Az második deriváltat érdekel minket.
- $f''(x) = (-8x^3 + 12x^2)' = -24x^2 + 24x$
- Rendezzük, mégpedig kiemeljük, hogy eldöntsük mikor nulla ez a másodfokú függvény
    - Fordított parabola lesz a képe
- $-24x^2 + 24x = 0$
- $24x(-x + 1) = 0$
    - $24x = 0$
      $x_1 = 0$
    - $-x + 1 = 0$
      $x_2 = 1$
- Hasonló táblázatba kell pakolni

x	$]-\infty; 0$	0	$]0; 1[$	1	$]1; -\infty[$
$f'(x)$	–	0	$+$	0	–
$f(x)$	Konkáv (szomorú)		Konvex		Konkáv



(3) Paritás

- Tekintsük az $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x+3}$ eltérő függvényt
    - $f(-x) = f(x)$ páros
    - $f(-x) = -f(x)$ páratlan

Negyedik Gyakorlat

Integrálás módszerek határozatlan integrál esetében

$$\int x^2 dx = \ dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int k dx = \ dx = kx + C \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x|$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{lna} + C$$

$$\int sin \, dx = -cosx + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \cdot arctg(\frac{x}{a}) + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

Műveleti tulajdonságok

(1) $\int f(x) \pm g(x) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$

(2) $\int \lambda \cdot f(x) \, dx = \lambda \int f(x) \, dx$

16.1.

- Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat.

c)

$$\int 3 \cdot 2^x - \frac{2}{1+x^2}\, dx = \; 3 \cdot \frac{2^x}{ln2} - 2 - 2 \cdot arctgx + C$$

d)

$$\int \frac{\sqrt[4]{x \cdot \sqrt[5]{x}}}{\sqrt[6]{x}}\, dx = \int \frac{\sqrt[4]{\sqrt[5]{x^6}}}{\sqrt[6]{x}}\, dx \quad // \sqrt[2]{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[6]{x}$$

$$\int \frac{\sqrt[20]{x^6}}{\sqrt[6]{x}}\, dx$$ // közös nevező

$$\int \sqrt[60]{\frac{x^{18}}{x^{10}}}\, dx = \int \sqrt[60]{x^8}\, dx = \int x^{\frac{8}{60}}\, dx = \frac{x^{\frac{8}{60}+1}}{\frac{8}{60}+1} + C$$

16.2.

- *Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat.*

a. sd

b. d

c. f

d. $\int \cos \frac{5x+7}{3}\, dx$

//Mivel nincs erre az integrálásra szabályunk, ezért - mivel ez egy behelyettesítéses integrálás - trükközünk

$\boxed{t := \frac{5x+7}{3}}$

$\frac{dx}{dt} = (\frac{5x+7}{3})'$

$dx = \frac{3}{5}\, dt$

$\int \cos t \cdot \frac{3}{5}\, dt$ //Mivel $\frac{3}{5}$ konstans, ezért kipakolhatjuk az integrál elé

$\frac{3}{5} \int \cos t\, dt$ //Innentől pedig integrálunk

$\frac{3}{5} \cdot \sin t + C = \frac{3}{5} \cdot \sin(\frac{5x+7}{3}) + C$

Ötödik Gyakorlat

I. Próba ZH

- Megoldás

Hatodik + 1 Gyakorlat

Speciális függvényosztályok integrálása

1. $$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C.$$
$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$
2. $$\int \sin^n(x) \cdot \cos^m(x)\,dx$$
   - **a.** 1. eset: $n = m = 0$
   - **b.** **2. eset: n páratlan és m tetszőleges.**
     $$\int \sin^{2k+1}(x) \cdot \cos^m(x)\,dx$$
     Itt használhatjuk egy azonosságot:
     $$\boxed{\sin^2(\lambda) + \cos^2(\lambda) = 1}$$
     Szóval:
     $$\int \sin(x) \cdot \underbrace{\underbrace{\sin^2(x)}_{(\sin^2(x))^k}}_{1-\cos^2(x)} \cdot \cos^m(x)\,dx =$$
     $$= \int (1-\cos^2(x))^k \cdot \cos^m(x) \cdot \sin(x)\,dx$$
     $t := \cos(x)$
     $$\frac{dt}{dx} = -sin(x)$$
     $dt = -sin(x)\,dx$
     …
   - **c.** **3. eset: m páratlan és n tetszőleges**
     $$\int \sin^n(x) \cdot \cos^{2k+1}(x)\,dx = \int \cos(x) \cdot \sin^n(x) \cdot [1-\sin^2(x)]^k\,dx$$
   - **d.** **4. eset: n és m páros.**
     $$\int \sin^n(x) \cdot \cos^m(x)\,dx$$
     Itt használhatunk egy újabb azonosságot
     $$\boxed{\begin{aligned}\cos^2(x) &= \frac{1+\cos(2x)}{2}\\ \sin^2(x) &= \frac{1-\cos(2x)}{2}\end{aligned}}$$

17.3

- *Integráljuk a következő trigonometrikus függvényeket!*

a. $\int \sin^3(2x + \frac{\pi}{4})\, dx$

Hetedik + 1 Gyakorlat

17.1.1.

17.2.

a.
b.

18.2f.

Nyolcadik + 1 Gyakorlat

18.1.f.

$$\int \frac{1}{1+\sin(x)+\cos(x)}\,dx$$

- Itt úgy járunk el, ahogyan a módszer diktálja!

$$\underbrace{\int \frac{1}{1+\sin(x)+\cos(x)}\,dx} = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dx$$

$$t = \tan(\frac{x}{2})$$

$$2\arctan(t) = x$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dx$$

- továbbiakban valahogy

$$= \int \frac{1\cdot 2}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}(1+t^2)}\,dx$$

- Itt letudunk egyszerűsíteni $(1+t^2)$ taggal

$$= \int \frac{2}{1+t^2+2t+1-t^2}\,dx = \int \frac{2}{2+2t}\,dx = \int \frac{1}{1+1t}\,dx = \ln|1+\tan(\frac{x}{2})| + C$$

18.2.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x}+1}\,dx$$

- Ez egy irracionális függvény, amit a minta alapján végzünk.