

#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felad
- 7. Felada
- (2. típus)
- 8. Felada (1. típus)
- 8. Felada
- (2. típus)
- 8. Felada (3. típus)

#### Numerikus módszerek

Távoktatás 6. hét I. Próba Dolgozat Megoldások 2. gyakorlat

#### Király Balázs

Pécsi Tudományegyetem Matematikai és Informatikai Intézet

2020.04.29



Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Feladat (1. típus)

7. Felada (2. típus)

8. Felada

8. Felada

8. Felada (3. típus)

#### 7. Feladat (1. típus)

Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Az  $A\underline{x}=\underline{b}$  lineáris egyenletrendszer megoldására írja fel a Jacobi-módszert és állapítsa meg, hogy konvergens-e az eljárás minden  $\underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$  kezdővektor esetén. Adjuk meg, hogy, hány lépés kell a  $10^{-2}$  pontossághoz, ha  $\underline{x}^{(0)}=\underline{0}$ .



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (1. típus)
- 7. Felad
- 8. Felad
- (1. típus
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Felada (3. típus)

### Megoldás:

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (1. típus)
- 7. Felada
- 8. Felada
- (1. típus
- 8. Felada (2. típus
- 8. Felada

#### Megoldás:

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (1. típus)
- 7. Felada (2. típus)
- 8. Felada
- (1. típus)
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Felada

## Megoldás:

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (1. típus)
- 7. Felada (2. típus)
- 8. Felada
- (1. típus)
- 8. Felada
- (2. tipus
- 8. Felada (3. típus)

#### Megoldás:

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$
$$(L+D+U)\underline{x} = \underline{b}$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (1. típus)
- 7. Felada (2. típus)
- 8. Felada
- (1. típus)
- 8. Felad (2. típus
- (z. tipus
- 8. Felada (3. típus)

#### Megoldás:

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$(L+D+U)\underline{x} = \underline{b}$$

$$D\underline{x} = -(L+U)\underline{x} + \underline{b}$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (1. típus)
- 7. Felada (2. típus
- 8. Felada
- (1. típus)
- 8. Felad (2. típus
- 8. Felada (3. típus)

#### Megoldás:

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$(L+D+U)\underline{x} = \underline{b}$$

$$D\underline{x} = -(L+U)\underline{x} + \underline{b}$$

$$x = -D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (1. típus)
- 7. Felad (2. típus
- 8. Felada
- (1. típus)
- 8. Felad
- (z. tipus
- 8. Felada (3. típus)

#### Megoldás:

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ekkor

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$(L+D+U)\underline{x} = \underline{b}$$

$$D\underline{x} = -(L+U)\underline{x} + \underline{b}$$

$$x = -D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b$$

Az iterációs formula

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{R,\sigma} \underline{x}^{(k)} + \underbrace{D^{-1}\underline{b}}_{G,\sigma}$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (1. típus)
- 7. Felad (2. típus
- 8. Felada
- (1. típus)
- 8. Felad
- (z. tipus
- 8. Felada (3. típus)

#### Megoldás:

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ekkor

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$(L+D+U)\underline{x} = \underline{b}$$

$$D\underline{x} = -(L+U)\underline{x} + \underline{b}$$

$$x = -D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b$$

Az iterációs formula

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{R,\sigma} \underline{x}^{(k)} + \underbrace{D^{-1}\underline{b}}_{G,\sigma}$$



módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (1. típus)
- 7. Felada (2. típus)
- 8. Felada
- 8. Felada
- (2. típus)
- 8. Feladat (3. típus)

$$B_{\mathcal{J}} = -D^{-1}(L+U) =$$

Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (1. típus)
- 7. Felada
- 8. Felada
- (1. típus)
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Felada

$$B_{\mathcal{J}} = -D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} =$$

Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (1. típus)
- 7. Felada (2. típus)
- 8. Felada
- (1. típus)
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Felada

$$B_{\mathcal{J}} = -D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Numerikus módszerek

Király Balázs

# (1. típus)

#### 7 Feladat

$$B_{\mathcal{J}} = -D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[ \begin{array}{rrr} 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 \end{array} \right]$$

$$\underline{c}_{\mathcal{J}} = D^{-1}\underline{b} =$$

Numerikus módszerek

Király Balázs

# 7. Feladat (1. típus)

- 7. Felada
- (2. tipus)
- (1. típus)
- 8. Felada (2. típus)
- (2. tipus)
- 8. Felada (3. típus)

$$B_{\mathcal{J}} = -D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[ \begin{array}{rrr} 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 \end{array} \right]$$

$$\underline{c}_{\mathcal{J}} = D^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

Numerikus módszerek

Király Balázs

# 7. Feladat (1. típus)

- 7. Felada
- (2. tipus)
- (1. típus)
- 8. Felada (2. típus)
- (Z. tipus)
- (3. típus)

$$B_{\mathcal{J}} = -D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}_{\mathcal{J}} = D^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (1. típus)
- 7. Felada (2. típus
- 8. Felada
- (1. típus)
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Feladat (3. típus)

# Megoldás:

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (1. típus)
- 7. Felada (2. típus)
- 8. Felada
- 8. Felada
- (2. típus)

8. Felada (3. típus)

### Megoldás:

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

Ha  $\|B_{\mathcal{J}}\| < 1$  bármely illeszkedő normában, akkor a leképezés kontrakció és alkalmazható a fixpont tétel.



Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Feladat (1. típus)

7. Felada (2. típus)

8. Felada (1. típus)

8. Felada

8. Felada

### Megoldás:

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

Ha  $||B_{\mathcal{J}}|| < 1$  bármely illeszkedő normában, akkor a leképezés kontrakció és alkalmazható a fixpont tétel.

Például  $\|B_{\mathcal{J}}\|_1 =$ 



Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Feladat (1. típus)

7. Felada (2. típus)

8. Felada (1. típus)

8. Felada

(2. típus)

8. Felada (3. típus)

### Megoldás:

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

Ha  $||B_{\mathcal{J}}|| < 1$  bármely illeszkedő normában, akkor a leképezés kontrakció és alkalmazható a fixpont tétel.

Például 
$$\|B_{\mathcal{J}}\|_1 = \max\left\{\frac{1}{4}, \; \frac{19}{20}, \; \frac{9}{10}\right\} =$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Feladat (1. típus)

7. Felada (2. típus)

8. Felada (1. típus)

8. Felada (2. típus)

8. Felada

### Megoldás:

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

Ha  $||B_{\mathcal{J}}|| < 1$  bármely illeszkedő normában, akkor a leképezés kontrakció és alkalmazható a fixpont tétel.

Például 
$$||B_{\mathcal{J}}||_1 = \max\left\{\frac{1}{4}, \frac{19}{20}, \frac{9}{10}\right\} = \frac{19}{20} = q$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Feladat (1. típus)

7. Felada (2. típus)

8. Felada (1. típus)

8. Felada (2. típus)

8. Felada (3. típus)

#### Megoldás:

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

Ha  $\|B_{\mathcal{J}}\| < 1$  bármely illeszkedő normában, akkor a leképezés kontrakció és alkalmazható a fixpont tétel.

Például 
$$\|B_{\mathcal{J}}\|_1 = \max\left\{\frac{1}{4}, \; \frac{19}{20}, \; \frac{9}{10}\right\} = \frac{19}{20} = q < 1$$

Azaz a leképezés kontrakció, így a fixpont tétel értelmében az iteráció konvergens minden  $\underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$  kezdővektor esetén.



Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Feladat (1. típus)

7. Felada (2. típus)

8. Felada (1. típus)

8. Felada (2. típus)

8. Felada (3. típus)

#### Megoldás:

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

Ha  $\|B_{\mathcal{J}}\| < 1$  bármely illeszkedő normában, akkor a leképezés kontrakció és alkalmazható a fixpont tétel.

Például 
$$\|B_{\mathcal{J}}\|_1 = \max\left\{\frac{1}{4}, \; \frac{19}{20}, \; \frac{9}{10}\right\} = \frac{19}{20} = q < 1$$

Azaz a leképezés kontrakció, így a fixpont tétel értelmében az iteráció konvergens minden  $\underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$  kezdővektor esetén.

Alkalmazható a fixpont tétel hibabecslése:

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_1 \le \frac{q^k}{1 - q} \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1$$



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (1. típus)
- 7. Felada (2. típus
- 8. Felada
- (1. típus
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Felada

## Megoldás:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0}$$



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (1. típus)
- 7. Felad
- 8. Felad
- (1. típus
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Felada

# Megoldás:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} =$$



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (1. típus)
- 7. Felad
- 8. Felad
- (1. típus
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Felada

## Megoldás:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} =$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (1. típus)

#### Megoldás:

sléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$



módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (1. típus)
- 7. Felad
- 8. Felad
- (1. típus
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Felada

### Megoldás:

sléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} =$$



#### módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (1. típus)
- 7. Felada (2. típus
- 8. Felad
- (1. típus
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Felada

### Megoldás:

sléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} =$$



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (1. típus)
- 7. Felada (2. típus
- 8. Felad
- (1. típus
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Felada

#### Megoldás:

sléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}}$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (1. típus)
- 7. Felada
- 8 Felad
- (1. típus
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Felada

#### Megoldás:

sléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{1} = \frac{38}{20}$$

Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (1. típus)
- 7. Felada (2. típus
- 8. Felad
- (1. típus
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Felada

### Megoldás:

csléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 = \frac{38}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_1 \leq \frac{q^k}{1-q} \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 =$$

Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7 Feladat (1. típus)

#### Megoldás:

csléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{1} = \frac{38}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^{*}\|_{1} \le \frac{q^{k}}{1 - q} \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{1} = \frac{\left(\frac{19}{20}\right)^{k}}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_1 \le \frac{q^k}{1 - q} \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 = \frac{\left(\frac{19}{20}\right)^k}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20}$$

Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7 Feladat (1. típus)

### Megoldás:

csléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 = \frac{38}{20}$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{1} = \frac{38}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^{*}\|_{1} \le \frac{q^{k}}{1 - q} \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{1} = \frac{\left(\frac{19}{20}\right)^{k}}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} < 10^{-2}$$

Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7 Feladat (1. típus)

- (3. típus)

### Megoldás:

csléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{1} = \frac{38}{20}$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{1} = \frac{38}{20}$$
$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^{*}\|_{1} \le \frac{q^{k}}{1 - q} \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{1} = \frac{\left(\frac{19}{20}\right)^{k}}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} < 10^{-2}$$

$$\frac{\left(\frac{19}{20}\right)^k}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} \quad < \quad 10^{-2}$$

Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7 Feladat (1. típus)

- (3. típus)

## Megoldás:

csléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 = \frac{38}{20}$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{1} = \frac{38}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^{*}\|_{1} \le \frac{q^{k}}{1 - q} \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{1} = \frac{\left(\frac{19}{20}\right)^{k}}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} < 10^{-2}$$

$$\frac{\left(\frac{19}{20}\right)^k}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} \quad < \quad 10^{-2}$$

$$\left(\frac{19}{20}\right)^k < \frac{1}{38} \cdot 10^{-2}$$

Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7 Feladat (1. típus)

- (3. típus)

### Megoldás:

csléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 = \frac{38}{20}$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{1} = \frac{38}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^{*}\|_{1} \le \frac{q^{k}}{1 - q} \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{1} = \frac{\left(\frac{19}{20}\right)^{k}}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} < 10^{-2}$$

$$\frac{\left(\frac{19}{20}\right)^k}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} < 10^{-2} \qquad k \cdot \ln \frac{19}{20} < \ln \frac{1}{3800}$$

$$\left(\frac{19}{20}\right)^k < \frac{1}{38} \cdot 10^{-2}$$

Megoldás:

Numerikus módszerek

Király Balázs

- (1. típus)

- (3. típus)

#### 7 Feladat

A hibabecsléshez: 
$$x^{(0)} = 0$$

csléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{1} = \frac{38}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^{*}\|_{1} \le \frac{q^{k}}{1 - q} \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{1} = \frac{\left(\frac{19}{20}\right)^{k}}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} < 10^{-2}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_1 \le \frac{q^k}{1 - q} \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 = \frac{\left(\frac{19}{20}\right)^n}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} < 10^{-2}$$

$$\frac{\left(\frac{19}{20}\right)^k}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} < 10^{-2} \qquad k \cdot \ln \frac{19}{20} < \ln \frac{1}{3800}$$

$$\left(\frac{19}{20}\right)^k < \frac{1}{38} \cdot 10^{-2} \qquad k > \frac{\ln \frac{1}{3800}}{\ln \frac{19}{20}}$$

$$\left(\frac{19}{20}\right)^k < \frac{1}{38} \cdot 10^{-2}$$
  $k > \frac{\ln \frac{3800}{3800}}{\ln \frac{19}{20}}$ 

Megoldás:

Numerikus módszerek

- 7 Feladat (1. típus)

- (3. típus)

#### Király Balázs

csleshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{1} = \frac{38}{20}$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{1} = \frac{38}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^{*}\|_{1} \le \frac{q^{k}}{1 - q} \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{1} = \frac{\left(\frac{19}{20}\right)^{k}}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} < 10^{-2}$$

$$\frac{\left(\frac{19}{20}\right)^k}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} \quad < \quad 10^{-2} \qquad \qquad k \cdot \ln \frac{19}{20} \quad < \quad \ln \frac{1}{3800}$$

$$\frac{\left(\frac{19}{20}\right)^k}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} < 10^{-2} \qquad k \cdot \ln \frac{19}{20} < \ln \frac{1}{3800}$$

$$\left(\frac{19}{20}\right)^k < \frac{1}{38} \cdot 10^{-2} \qquad k > \frac{\ln \frac{1}{3800}}{\ln \frac{19}{20}} \approx 160,7$$

Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7 Feladat (1. típus)

- (3. típus)

### Megoldás:

A hibabecsléshez:

esléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{J}} = \underline{c}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{J}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{1} = \frac{38}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^{*}\|_{1} \le \frac{q^{k}}{1 - q} \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{1} = \frac{\left(\frac{19}{20}\right)^{k}}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} < 10^{-2}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_1 \le \frac{q^k}{1 - q} \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_1 = \frac{\left(\frac{120}{20}\right)}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} < 10^{-2}$$

$$\frac{\left(\frac{19}{20}\right)^k}{\frac{1}{20}} \cdot \frac{38}{20} < 10^{-2} \qquad k \cdot \ln \frac{19}{20} < \ln \frac{1}{3800}$$

$$\left(\frac{19}{20}\right)^k < \frac{1}{38} \cdot 10^{-2} \qquad k > \frac{\ln \frac{1}{3800}}{\ln \frac{19}{20}} \approx 160.7$$

Azaz 161 lépés kell.

7. Feladat (2. típus)

8. Felada

8. Felada (2. típus)

8. Felada (3. típus)

#### 7. Feladat (2. típus)

### Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Az  $A\underline{x}=\underline{b}$  lineáris egyenletrendszer megoldására írja fel a Gauss-Seidel iterációt és állapítsa meg, hogy konvergens-e az eljárás minden  $\underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$  kezdővektor esetén. Adjuk meg, hogy, hány lépés kell a  $10^{-2}$  pontossághoz, ha  $\underline{x}^{(0)}=\underline{0}$ .



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felad (1. típus
- 7. Feladat (2. típus)
- 8. Felada
- (1. típus
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Felada

### Megoldás:

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat
- (2. típus)

#### Megoldás:

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felac
- 7. Feladat
- (2. típus)
- (1. típus)
- 8. Felada
- (2. típus
- 8. Felada (3. típus)

#### Megoldás:

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felac
- 7. Feladat
- (2. típus)
- 8. Felada (1. típus
- 8 Feladat
- (2. típus
- 8. Felada (3. típus)

#### Megoldás:

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$
$$(L+D+U)\underline{x} = \underline{b}$$



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felac
- 7. Feladat
- (2. típus)
- 8. Felada (1. típus)
- (1. tipus)
- (2. típus
- 8. Felada (3. típus)

### Megoldás:

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$(L+D+U)\underline{x} = \underline{b}$$

$$(L+D)\underline{x} = -U\underline{x} + \underline{b}$$



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Fela
- 7. Feladat
- (2. típus)
- 8. Felada (1. típus)
- 8. Felada
- (2. típus
- 8. Felada (3. típus)

### Megoldás:

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$(L+D+U)\underline{x} = \underline{b}$$

$$(L+D)\underline{x} = -U\underline{x} + \underline{b}$$

$$\underline{x} = -(L+D)^{-1}U\underline{x} + (L+D)^{-1}\underline{b}$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Fela
- 7. Feladat
- (2. típus)
- 8. Felad (1. típus
- 8. Felad
- (2. tipus
- 8. Felada (3. típus)

#### Megoldás:

A mátrixot szétvágjuk egy alsóháromszög (L) egy diagonális (D) és egy felsőháromszög (U) mátrix összegére.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ekkor

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$(L+D+U)\underline{x} = \underline{b}$$

$$(L+D)\underline{x} = -U\underline{x} + \underline{b}$$

$$x = -(L+D)^{-1}Ux + (L+D)^{-1}\underline{b}$$

Az iterációs formula

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underbrace{-(L+D)^{-1}U}_{R_{\mathcal{S}}}\underline{x}^{(k)} + \underbrace{(L+D)^{-1}\underline{b}}_{C_{\mathcal{S}}}$$



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Felad

7. Feladat

(2. típus)

8. Felad (1. típus

8. Felada

8. Felada

#### Megoldás:



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felac
- (1. típus
- 7. Feladat (2. típus)
- 8. Felad
- (1. tipus
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Felada

#### Megoldás:

$$L + D = \left[ \begin{array}{rrr} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{array} \right]$$

#### Numerikus módszerek

Király Balázs

\_\_\_\_

(1. típus

7. Feladat (2. típus)

8 Folad

(1. típus

8. Felada (2. típus)

(2. tipus)

8. Feladai (3. típus)

#### Megoldás:

$$L + D = \left[ \begin{array}{rrr} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felac
- (1. típus
- 7. Feladat (2. típus)
- 8. Felada
- 8. Felada
- (2. típus)
- 8. Felada (3. típus)

#### Megoldás:

$$L + D = \left[ \begin{array}{rrr} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Feladat

(2. típus)

Megoldás:

$$L + D = \left[ \begin{array}{rrr} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc}
5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 4 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\
0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{3}{20} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array} \right]$$

Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Felada

7. Feladat

(2. típus)

8. Felada (1. típus)

8. Felada (2. típus)

8. Felada

#### Megoldás:

$$L + D = \left[ \begin{array}{rrr} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & | & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & -\frac{3}{20} & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{20} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{3}{80} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat
- (2. típus)

- (3. típus)

#### Megoldás:

Az (L+D) mátrix invertálására Gauss eliminációt használunk.

$$L + D = \left[ \begin{array}{rrr} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{3}{20} & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{20} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{80} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

ĺgy

$$(L+D)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0\\ \frac{1}{20} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{3}{30} & -\frac{3}{4\ell} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felac (1. típus
- 7. Feladat (2. típus)
- 8. Felad
- (1. típus
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Felada

$$B_{\mathcal{S}} = -(L+D)^{-1}U =$$



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felac
- 7 Folad
- 7. Feladat (2. típus)
- 8. Felad
- 8. Felada
- (z. tipus)
- 8. Felada (3. típus)

$$B_{\mathcal{S}} = -(L+D)^{-1}U = -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0\\ \frac{1}{20} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{3}{80} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felac
- 7. Feladat (2. típus)
- (2. típus)
- 8. Felad (1. típus
- 8. Felada (2. típus)
- (2. tipus)
- 8. Felada (3. típus)

$$B_{\mathcal{S}} = -(L+D)^{-1}U = -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0\\ \frac{1}{20} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{3}{80} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{1}{20} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{80} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felac
- 7. Feladat (2. típus)
- (2. típus)
- (1. típus
- 8. Felada (2. típus)
- (Z. tipus)

8. Felada (3. típus)

$$B_{\mathcal{S}} = -(L+D)^{-1}U = -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0\\ \frac{1}{20} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{3}{80} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{1}{20} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{80} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}_{\mathcal{S}} = (L+D)^{-1}\underline{b} =$$

#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Fela
- 7. Feladat
- (2. típus)
- 8. Felad (1. típus
- 8. Felada (2. típus)
- (2. tipus)
- (3. típus)

$$B_{\mathcal{S}} = -(L+D)^{-1}U = -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0\\ \frac{1}{20} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{3}{80} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{1}{20} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{80} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}_{\mathcal{S}} = (L+D)^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0\\ \frac{1}{20} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{3}{80} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2\\ 5\\ 1 \end{bmatrix} =$$

Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Fela
- 7. Feladat (2. típus)
- 8. Felada
- (1. típus
- 8. Felada (2. típus)
- (2. tipus)
- 8. Felada (3. típus)

$$B_{\mathcal{S}} = -(L+D)^{-1}U = -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0\\ \frac{1}{20} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{3}{80} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{1}{20} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{80} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}_{\mathcal{S}} = (L+D)^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{80} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Felad (1. típus

7. Feladat (2. típus)

8. Felada

8. Felada

8. Felada

### Megoldás:

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felada (1. típus
- 7. Feladat (2. típus)
- 8. Felada (1. típus)
- 8. Felada
- (2. tipus)

### Megoldás:

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

Ha  $\|B_S\| < 1$  bármely illeszkedő normában, akkor a leképezés kontrakció és alkalmazható a fixpont tétel.



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felad (1. típus
- 7. Feladat (2. típus)
- 8. Felada
- (1. tipus)
- (2. típus)
- 8. Felada (3. típus)

### Megoldás:

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

Ha  $\|B_S\| < 1$  bármely illeszkedő normában, akkor a leképezés kontrakció és alkalmazható a fixpont tétel.

Például 
$$\|B_{\mathcal{S}}\|_{\infty} =$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felada (1. típus
- 7. Feladat (2. típus)
- 8. Felada (1. típus)
- 8. Felada
- (2. tipus)

### Megoldás:

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

Ha  $\|B_S\| < 1$  bármely illeszkedő normában, akkor a leképezés kontrakció és alkalmazható a fixpont tétel.

Például 
$$\|B_{\mathcal{S}}\|_{\infty}=\max\left\{\frac{3}{5},\; \frac{9}{20},\; \frac{27}{80}
ight\}=$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felad (1. típus
- 7. Feladat (2. típus)
- 8. Felada (1. típus)
- 8. Felada
- (2. típus)
- 8. Felada (3. típus)

### Megoldás:

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

Ha  $||B_S|| < 1$  bármely illeszkedő normában, akkor a leképezés kontrakció és alkalmazható a fixpont tétel.

Például 
$$||B_{\mathcal{S}}||_{\infty} = \max\left\{\frac{3}{5}, \frac{9}{20}, \frac{27}{80}\right\} = \frac{9}{20} = q$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Felada (1. típus

7. Feladat (2. típus)

8. Felada (1. típus)

8. Felada

(2. típus)

8. Felada (3. típus)

#### Megoldás:

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

Ha  $\|B_S\| < 1$  bármely illeszkedő normában, akkor a leképezés kontrakció és alkalmazható a fixpont tétel.

Például 
$$\|B_{\mathcal{S}}\|_{\infty} = \max\left\{\frac{3}{5}, \ \frac{9}{20}, \ \frac{27}{80}\right\} = \frac{9}{20} = q < 1$$

Azaz a leképezés kontrakció, így a fixpont tétel értelmében az iteráció konvergens minden  $\underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$  kezdővektor esetén.



Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Felad (1. típus

7. Feladat (2. típus)

8. Felada (1. típus)

8. Felada (2. típus)

8. Felada (3. típus)

#### Megoldás:

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk először.

Ha  $\|B_S\| < 1$  bármely illeszkedő normában, akkor a leképezés kontrakció és alkalmazható a fixpont tétel.

Például 
$$\|B_{\mathcal{S}}\|_{\infty} = \max\left\{\frac{3}{5}, \ \frac{9}{20}, \ \frac{27}{80}\right\} = \frac{9}{20} = q < 1$$

Azaz a leképezés kontrakció, így a fixpont tétel értelmében az iteráció konvergens minden  $\underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$  kezdővektor esetén.

Alkalmazható a fixpont tétel hibabecslése:

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_{\infty} \le \frac{q^k}{1 - q} \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty}$$



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felac
- (1. típus
- 7. Feladat (2. típus)
- 8. Felad
- 8 Folade
- (2. típus)
- 8. Felada (3. típus)

## Megoldás:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0}$$



#### módszerek

Király Balázs

- 7. Fela
- (1. tipus
- 7. Feladat (2. típus)
- 8. Felad
- 8. Felada
- (2. típus
- 8. Felada

## Megoldás:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} =$$



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Fela
- (1. tipus
- 7. Feladat (2. típus)
- 8. Felad
- 9 Folad
- (2. típus
- 8. Felada

## Megoldás:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} =$$



#### módszerek

Király Balázs

- 7. Fela
- 7. Feladat
- (2. típus)
- 8. Felad (1. típus
- 8. Felada
- 8. Felada

### Megoldás:

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} =$$



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (2. típus)

### Megoldás:

ecsléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$
 
$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} =$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} =$$



#### módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (2. típus)

# Megoldás:

ecsléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$
 
$$x^{(1)} - x^{(0)} = x^{(1)} =$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} =$$



#### módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (2. típus)

# Megoldás:

csléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}}$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (2. típus)

### Megoldás:

csléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{27}{20}$$



#### módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (2. típus)

# Megoldás:

csléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{27}{20}$$

$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_{\infty} \le \frac{q^k}{1 - q} \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} =$$



módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (2. típus)

# Megoldás:

csléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{27}{20}$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{27}{20}$$
$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_{\infty} \le \frac{q^k}{1 - q} \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20}$$



módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (2. típus)

## Megoldás:

csléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{27}{20}$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{27}{20}$$
$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_{\infty} \le \frac{q^k}{1 - q} \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} < 10^{-2}$$



### módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (2. típus)

- (3. típus)

## Megoldás:

csléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{27}{20}$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{27}{20}$$
$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_{\infty} \le \frac{q^k}{1 - q} \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} < 10^{-2}$$

$$\frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} < 10^{-2}$$

#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (2. típus)

- (3. típus)

# Megoldás:

csléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{27}{20}$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{27}{20}$$
$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_{\infty} \le \frac{q^k}{1 - q} \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} < 10^{-2}$$

$$\frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} < 10^{-2}$$

$$\left(\frac{9}{20}\right)^k < \frac{11}{27} \cdot 10^{-2}$$

#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat
- (2. típus)

- (3. típus)

## Megoldás:

csléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{27}{20}$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{27}{20}$$
$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_{\infty} \le \frac{q^k}{1 - q} \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} < 10^{-2}$$

$$\frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} < 10^{-2} \qquad k \cdot \ln \frac{9}{20} < \ln \frac{11}{2700}$$

$$\left(\frac{9}{20}\right)^k < \frac{11}{27} \cdot 10^{-2}$$

Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat
- (2. típus)

- (3. típus)

# Megoldás:

csléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{27}{20}$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{27}{20}$$
$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_{\infty} \le \frac{q^k}{1 - q} \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} < 10^{-2}$$

$$\frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} < 10^{-2} \qquad k \cdot \ln \frac{9}{20} < \ln \frac{11}{2700}$$

$$\left(\frac{9}{20}\right)^k < \frac{11}{27} \cdot 10^{-2} \qquad k > \frac{\ln \frac{11}{2700}}{\ln \frac{9}{20}}$$

#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat
- (2. típus)

- (3. típus)

## Megoldás:

csléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{27}{20}$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{27}{20}$$
$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_{\infty} \le \frac{q^k}{1 - q} \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} < 10^{-2}$$

$$\frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} < 10^{-2} \qquad k \cdot \ln \frac{9}{20} < \ln \frac{11}{2700}$$

$$\left(\frac{9}{20}\right)^k < \frac{11}{27} \cdot 10^{-2} \qquad k > \frac{\ln \frac{11}{2700}}{\ln \frac{9}{20}} \approx 6.89$$



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Feladat (2. típus)

- (3. típus)

# 7. Feladat

## Megoldás:

A hibabecsléshez:

csléshez: 
$$\underline{x}^{(0)} = \underline{0} \quad \underline{x}^{(1)} = B_{\mathcal{S}}\underline{x}^{(0)} + \underline{c}_{\mathcal{S}} = \underline{c}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{61}{80} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{27}{20}$$

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)} = \underline{x}^{(1)} = \underline{c}_{\mathcal{S}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{27}{20}$$
$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|_{\infty} \le \frac{q^k}{1 - q} \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|_{\infty} = \frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} < 10^{-2}$$

$$\frac{\left(\frac{9}{20}\right)^k}{\frac{11}{20}} \cdot \frac{27}{20} < 10^{-2} \qquad k \cdot \ln \frac{9}{20} < \ln \frac{11}{2700}$$

$$\left(\frac{9}{20}\right)^k < \frac{11}{27} \cdot 10^{-2} \qquad k > \frac{\ln \frac{11}{2700}}{\ln \frac{9}{20}} \approx 6.89$$

Azaz 7 lépés kell.



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felad (1. típus
- 7. Felad
- 8. Feladat
- (1. típus)
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Felada

#### 8. Feladat

Írjunk fel egy sorozatot  $\sqrt[3]{10}$  közelítésére. Számoljuk ki a keresett értéket  $\frac{1}{20}$  pontossággal!



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felac (1. típus
- 7. Felad
- (2. típus)
- 8. Feladat (1. típus)
- 8. Felada
- 8. Felada (3. típus)

#### 8. Feladat

Írjunk fel egy sorozatot  $\sqrt[3]{10}$  közelítésére. Számoljuk ki a keresett értéket  $\frac{1}{20}$  pontossággal!

## Megoldás:

A keresett  $x^* = \sqrt[3]{10}$  érték a  $P(x) = x^3 - 10$  polinom (egyik) gyöke.



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felad (1. típus
- 7. Felada (2. típus)
- 8. Feladat
- 8. Felada (1. típus)
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Felada

#### 8. Feladat

Írjunk fel egy sorozatot  $\sqrt[3]{10}$  közelítésére. Számoljuk ki a keresett értéket  $\frac{1}{20}$  pontossággal!

### Megoldás:

A keresett  $x^* = \sqrt[3]{10}$  érték a  $P(x) = x^3 - 10$  polinom (egyik) gyöke.

Intervallum felezést fogunk használni.



Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Felad (1. típus

7. Felada (2. típus)

8. Feladat

(1. típus)

8. Felada (2. típus)

8. Felada (3. típus)

#### 8. Feladat

Írjunk fel egy sorozatot  $\sqrt[3]{10}$  közelítésére. Számoljuk ki a keresett értéket  $\frac{1}{20}$  pontossággal!

## Megoldás:

A keresett  $x^* = \sqrt[3]{10}$  érték a  $P(x) = x^3 - 10$  polinom (egyik) gyöke.

Intervallum felezést fogunk használni.

Olyan kiinduló [a, b] intervallumra van szükségünk, amely tartalmazza a keresett gyököt és  $P(a) \cdot P(b) < 0$ .



Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Felada (1. típus)

7. Felada (2. típus)

8. Feladat (1. típus)

8. Felada

(2. típus)

8. Felada (3. típus)

#### 8. Feladat

Írjunk fel egy sorozatot  $\sqrt[3]{10}$  közelítésére. Számoljuk ki a keresett értéket  $\frac{1}{20}$  pontossággal!

## Megoldás:

A keresett  $x^* = \sqrt[3]{10}$  érték a  $P(x) = x^3 - 10$  polinom (egyik) gyöke.

Intervallum felezést fogunk használni.

Olyan kiinduló [a, b] intervallumra van szükségünk, amely tartalmazza a keresett gyököt és  $P(a)\cdot P(b)<0$ .

Mivel  $2 = \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{10} < \sqrt[3]{27} = 3$ ,



Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Felada (1. típus)

7. Felada (2. típus)

8. Feladat

(1. típus)

(2. típus)

8. Felada (3. típus)

#### 8. Feladat

Írjunk fel egy sorozatot  $\sqrt[3]{10}$  közelítésére. Számoljuk ki a keresett értéket  $\frac{1}{20}$  pontossággal!

## Megoldás:

A keresett  $x^* = \sqrt[3]{10}$  érték a  $P(x) = x^3 - 10$  polinom (egyik) gyöke.

Intervallum felezést fogunk használni.

Olyan kiinduló [a, b] intervallumra van szükségünk, amely tartalmazza a keresett gyököt és  $P(a) \cdot P(b) < 0$ .

Mivel  $2 = \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{10} < \sqrt[3]{27} = 3$ , ezért a [2, 3] intervallum tartalmazza  $x^*$ -ot.



Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Felada (1. típus

7. Felada (2. típus)

8. Feladat (1. típus)

(1. tipus)

(2. típus)

8. Felada (3. típus)

#### 8. Feladat

Írjunk fel egy sorozatot  $\sqrt[3]{10}$  közelítésére. Számoljuk ki a keresett értéket  $\frac{1}{20}$  pontossággal!

## Megoldás:

A keresett  $x^* = \sqrt[3]{10}$  érték a  $P(x) = x^3 - 10$  polinom (egyik) gyöke.

Intervallum felezést fogunk használni.

Olyan kiinduló [a, b] intervallumra van szükségünk, amely tartalmazza a keresett gyököt és  $P(a) \cdot P(b) < 0$ .

Mivel  $2 = \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{10} < \sqrt[3]{27} = 3$ , ezért a [2, 3] intervallum tartalmazza  $x^*$ -ot.

$$P(2) = 8 - 10 = -2 < 0 P(3) = 27 - 10 = 17 > 0$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Felada (1. típus

7. Felada (2. típus)

8. Feladat (1. típus)

8. Felada

8. Felada

#### 8. Feladat

Írjunk fel egy sorozatot  $\sqrt[3]{10}$  közelítésére. Számoljuk ki a keresett értéket  $\frac{1}{20}$  pontossággal!

## Megoldás:

A keresett  $x^* = \sqrt[3]{10}$  érték a  $P(x) = x^3 - 10$  polinom (egyik) gyöke.

Intervallum felezést fogunk használni.

Olyan kiinduló [a, b] intervallumra van szükségünk, amely tartalmazza a keresett gyököt és  $P(a) \cdot P(b) < 0$ .

Mivel  $2 = \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{10} < \sqrt[3]{27} = 3$ , ezért a [2, 3] intervallum tartalmazza  $x^*$ -ot.



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felad (1. típu:
- 7. Felad (2. típus
- 8. Feladat
- (1. típus)
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Felada

## Megoldás:

#### Hibabecslés:

$$\begin{vmatrix} |x_k - x^*| \\ |y_k - x^*| \end{vmatrix} \le \frac{1}{2^k}$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felac (1. típus
- 7. Felad (2. típus
- 8. Feladat
- (1. típus)
- (2. típus)
- 8. Felada (3. típus)

# Megoldás:

#### Hibabecslés:

$$\begin{vmatrix} |x_k - x^*| \\ |y_k - x^*| \end{vmatrix} \le \frac{1}{2^k} < \frac{1}{20}$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felac (1. típus
- 7. Felad (2. típus
- 8. Feladat
- (1. típus)
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Felada

## Megoldás:

Hibabecslés:

$$\begin{vmatrix} |x_k - x^*| \\ |y_k - x^*| \end{vmatrix} \le \frac{1}{2^k} < \frac{1}{20} \quad \Leftrightarrow \quad 2^k > 20$$



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felac (1. típus
- 7. Felada (2. típus
- 8. Feladat
- (1. típus)
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Felada

### Megoldás:

$$\begin{vmatrix} |x_k - x^*| \\ |y_k - x^*| \end{vmatrix} \le \frac{1}{2^k} < \frac{1}{20} \quad \Leftrightarrow \quad 2^k > 20$$

Azaz k = 5 már jó.



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felad (1. típus
- 7. Felada (2. típus)
- 8. Feladat
- (1. típus)
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Felada (3. típus)

### Megoldás:

Hibabecslés:

$$\begin{vmatrix} |x_k - x^*| \\ |y_k - x^*| \end{vmatrix} \le \frac{1}{2^k} < \frac{1}{20} \quad \Leftrightarrow \quad 2^k > 20$$

Azaz k=5 már jó.  $z_4$  mindenképpen az 5. intervallum egyik végpontja lesz, ezért  $x^*\approx z_4$  jó közelítés.



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 8. Feladat
- (1. típus)

## Megoldás:

Hibabecslés:

$$\begin{vmatrix} |x_k - x^*| \\ |y_k - x^*| \end{vmatrix} \le \frac{1}{2^k} < \frac{1}{20} \quad \Leftrightarrow \quad 2^k > 20$$

Azaz k = 5 már jó.  $z_4$  mindenképpen az 5. intervallum egyik végpontja lesz, ezért  $x^* \approx z_4$  jó közelítés.

$$x_0 = 2 y_0$$

$$y_0 = 3$$

$$z_0 = 2.5$$

$$y_0 = 3$$
  $z_0 = 2.5$   $P(z_0) = 5.625 > 0$ 



Numerikus módszerek

Király Balázs

8. Feladat

(1. típus)

### Megoldás:

Hibabecslés:

$$\begin{vmatrix} |x_k - x^*| \\ |y_k - x^*| \end{vmatrix} \le \frac{1}{2^k} < \frac{1}{20} \quad \Leftrightarrow \quad 2^k > 20$$

Azaz k = 5 már jó.  $z_4$  mindenképpen az 5. intervallum egyik végpontja lesz, ezért  $x^* \approx z_4$  jó közelítés.

$$x_0 = 2$$

$$y_0 = 3$$

$$z_0 = 2,$$

$$x_0 = 2$$
  $y_0 = 3$   $z_0 = 2.5$   $P(z_0) = 5.625 > 0$ 

$$x_1 = 2$$

$$y_1 = 2,5$$

$$z_1 = 2,25$$

$$y_1 = 2.5$$
  $z_1 = 2.25$   $P(z_1) = 1.39 > 0$ 



Numerikus módszerek

Király Balázs

8. Feladat

(1. típus)

## Megoldás:

Hibabecslés:

$$\begin{vmatrix} |x_k - x^*| \\ |y_k - x^*| \end{vmatrix} \le \frac{1}{2^k} < \frac{1}{20} \Leftrightarrow 2^k > 20$$

Azaz k = 5 már jó.  $z_4$  mindenképpen az 5. intervallum egyik végpontja lesz, ezért  $x^* \approx z_4$  jó közelítés.

$$x_0 = 2$$

$$y_0 = 3$$

$$z_0 = 2,5$$

$$y_0 = 3$$
  $z_0 = 2.5$   $P(z_0) = 5.625 > 0$   
 $y_1 = 2.5$   $z_1 = 2.25$   $P(z_1) = 1.39 > 0$ 

$$x_1 = 2$$

$$y_1 = 2.5$$

$$z_1 = 2,25$$

$$z_1 = 2.23$$
  $P(z_1) = 1.39 > 0$   
 $z_2 = 2.125$   $P(z_2) = -0.404 < 0$ 

$$x_2 = 2$$

$$y_2 = 2,25$$

$$22 - 2,123$$

$$P(z_2) = -0.404 <$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Felada (1. típus

7. Felada (2. típus)

8. Feladat (1. típus)

(T. tipus)

(2. típus)

(3. típus)

## Megoldás:

Hibabecslés:

$$\begin{vmatrix} |x_k - x^*| \\ |y_k - x^*| \end{vmatrix} \le \frac{1}{2^k} < \frac{1}{20} \quad \Leftrightarrow \quad 2^k > 20$$

Azaz k=5 már jó.  $z_4$  mindenképpen az 5. intervallum egyik végpontja lesz, ezért  $x^* \approx z_4$  jó közelítés.

$$x_0 = 2$$
  $y_0 = 3$   $z_0 = 2.5$   $P(z_0) = 5.625 > 0$   
 $x_1 = 2$   $y_1 = 2.5$   $z_1 = 2.25$   $P(z_1) = 1.39 > 0$   
 $x_2 = 2$   $y_2 = 2.25$   $z_2 = 2.125$   $P(z_2) = -0.404 < 0$   
 $x_3 = 2.125$   $y_3 = 2.25$   $z_3 = 2.1875$   $P(z_3) = 0.4675 > 0$ 



Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Felada (1. típus

(2. típus)

8. Feladat (1. típus)

8. Felada

(2. típus)

(3. típus)

#### Megoldás:

Hibabecslés:

$$\begin{vmatrix} |x_k - x^*| \\ |y_k - x^*| \end{vmatrix} \le \frac{1}{2^k} < \frac{1}{20} \quad \Leftrightarrow \quad 2^k > 20$$

Azaz k=5 már jó.  $z_4$  mindenképpen az 5. intervallum egyik végpontja lesz, ezért  $x^* \approx z_4$  jó közelítés.

$$x_0 = 2$$
  $y_0 = 3$   $z_0 = 2.5$   $P(z_0) = 5.625 > 0$   
 $x_1 = 2$   $y_1 = 2.5$   $z_1 = 2.25$   $P(z_1) = 1.39 > 0$   
 $x_2 = 2$   $y_2 = 2.25$   $z_2 = 2.125$   $P(z_2) = -0.404 < 0$   
 $x_3 = 2.125$   $y_3 = 2.25$   $z_3 = 2.1875$   $P(z_3) = 0.4675 > 0$   
 $x_4 = 2.125$   $y_4 = 2.1875$   $z_4 = 2.15625$ 

Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Felada (1. típus)

(2. típus)

8. Feladat (1. típus)

8. Felada

8 Felada

(3. típus)

## Megoldás:

Hibabecslés:

Azaz k=5 már jó.  $z_4$  mindenképpen az 5. intervallum egyik végpontja lesz, ezért  $x^* \approx z_4$  jó közelítés.

$$x_0 = 2$$
  $y_0 = 3$   $z_0 = 2.5$   $P(z_0) = 5.625 > 0$   
 $x_1 = 2$   $y_1 = 2.5$   $z_1 = 2.25$   $P(z_1) = 1.39 > 0$   
 $x_2 = 2$   $y_2 = 2.25$   $z_2 = 2.125$   $P(z_2) = -0.404 < 0$   
 $x_3 = 2.125$   $y_3 = 2.25$   $z_3 = 2.1875$   $P(z_3) = 0.4675 > 0$   
 $x_4 = 2.125$   $y_4 = 2.1875$   $z_4 = 2.15625$ 

Azaz  $x^* \approx 2,15625$ .



Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Felada (1. típus)

(2. típus)

8. Feladat (1. típus)

8. Felada (2. típus)

8. Felada (3. típus)

#### Megoldás:

Hibabecslés:

$$\begin{vmatrix} |x_k - x^*| \\ |y_k - x^*| \end{vmatrix} \le \frac{1}{2^k} < \frac{1}{20} \quad \Leftrightarrow \quad 2^k > 20$$

Azaz k=5 már jó.  $z_4$  mindenképpen az 5. intervallum egyik végpontja lesz, ezért  $x^* \approx z_4$  jó közelítés.

$$x_0 = 2$$
  $y_0 = 3$   $z_0 = 2.5$   $P(z_0) = 5.625 > 0$   
 $x_1 = 2$   $y_1 = 2.5$   $z_1 = 2.25$   $P(z_1) = 1.39 > 0$   
 $x_2 = 2$   $y_2 = 2.25$   $z_2 = 2.125$   $P(z_2) = -0.404 < 0$   
 $x_3 = 2.125$   $y_3 = 2.25$   $z_3 = 2.1875$   $P(z_3) = 0.4675 > 0$   
 $x_4 = 2.125$   $y_4 = 2.1875$   $z_4 = 2.15625$ 

Azaz  $x^* \approx 2,15625$ .

A Newton-módszerrel gyorsabb konvergenciát tudunk biztosítani, de nehezebb a hibabecslés és a kezdőelem választás.



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felac
- 7. Felad
- (2. típus
- 8. Felad
- 8. Feladat
- (2. típus)
- 8. Felada (3. típus)

#### 8. Feladat

Kontrakció-e a  $\varphi(x)=\frac{x^3-2}{4}$  leképezés a  $[-1,\ 0]$ -n?



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felac (1. típus
- 7. Felad
- 8 Felada
- (1. típus)
- 8. Feladat (2. típus)
- 8. Felada (3. típus)

#### 8. Feladat

Kontrakció-e a  $\varphi(x) = \frac{x^3-2}{4}$  leképezés a [-1, 0]-n?

# Megoldás:

Mivel  $\varphi'(x) = \frac{3}{4}x^2 > 0$ , ezért a  $\varphi$  függvény szigorúan monoton növő.



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felac
- 7. Felada
- (2. típus)
- 8. Felada (1. típus)
- 8. Feladat (2. típus)
- 8. Felada (3. típus)

#### 8. Feladat

Kontrakció-e a  $\varphi(x) = \frac{x^3-2}{4}$  leképezés a [-1, 0]-n?

## Megoldás:

Mivel  $\varphi'(x) = \frac{3}{4}x^2 > 0$ , ezért a  $\varphi$  függvény szigorúan monoton növő.

Így 
$$\mathcal{R}_{arphi} = \left[ arphi(-1), \; arphi(0) 
ight] = \left[ -rac{3}{4}, \; -rac{1}{2} 
ight]$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felac
- 7. Felada
- 8. Felada
- 8. Felada (1. típus)
- 8. Feladat (2. típus)
- 8. Felada (3. típus)

### 8. Feladat

Kontrakció-e a  $\varphi(x) = \frac{x^3-2}{4}$  leképezés a [-1, 0]-n?

### Megoldás:

Mivel  $\varphi'(x) = \frac{3}{4}x^2 > 0$ , ezért a  $\varphi$  függvény szigorúan monoton növő.

Így 
$$\mathcal{R}_{arphi} = [arphi(-1), \; arphi(0)] = \left[-rac{3}{4}, \; -rac{1}{2}
ight] \; \subseteq [-1, \; 0]$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felad (1. típus
- 7. Felada
- 8. Felada
- (1. típus)
- 8. Feladat (2. típus)
- 8. Felada (3. típus)

#### 8. Feladat

Kontrakció-e a  $\varphi(x) = \frac{x^3-2}{4}$  leképezés a [-1, 0]-n?

## Megoldás:

Mivel  $\varphi'(x) = \frac{3}{4}x^2 > 0$ , ezért a  $\varphi$  függvény szigorúan monoton növő.

Így 
$$\mathcal{R}_{arphi}=[arphi(-1),\;arphi(0)]=\left[-rac{3}{4},\;-rac{1}{2}
ight]\subseteq[-1,\;0]$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felad
- 7. Felada (2. típus)
- 8. Felada
- (1. típus)
- 8. Feladat (2. típus)
- 8. Felada (3. típus)

### 8. Feladat

Kontrakció-e a  $\varphi(x) = \frac{x^3-2}{4}$  leképezés a [-1, 0]-n?

# Megoldás:

Mivel  $\varphi'(x) = \frac{3}{4}x^2 > 0$ , ezért a  $\varphi$  függvény szigorúan monoton növő.

Így 
$$\mathcal{R}_{arphi} = [arphi(-1),\; arphi(0)] = \left[-rac{3}{4},\; -rac{1}{2}
ight] \;\subseteq [-1,\; 0]$$

Legyen 
$$x, y \in [-1, 0]$$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| =$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felac
- 7. Felada
- 8. Felada
- (1. típus)
- 8. Feladat (2. típus)
- 8. Felada (3. típus)

### 8. Feladat

Kontrakció-e a  $\varphi(x) = \frac{x^3-2}{4}$  leképezés a [-1, 0]-n?

## Megoldás:

Mivel  $\varphi'(x) = \frac{3}{4}x^2 > 0$ , ezért a  $\varphi$  függvény szigorúan monoton növő.

Így 
$$\mathcal{R}_{arphi} = [arphi(-1), \; arphi(0)] = \left[-rac{3}{4}, \; -rac{1}{2}
ight] \; \subseteq [-1, \; 0]$$

Legyen 
$$x, y \in [-1, 0]$$
  $|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left|\frac{x^3 - 2}{4} - \frac{y^3 - 2}{4}\right| =$ 



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felac
- 7. Felada
- 8. Felada
- (1. típus)
- 8. Feladat (2. típus)
- 8. Felada (3. típus)

### 8. Feladat

Kontrakció-e a  $\varphi(x) = \frac{x^3-2}{4}$  leképezés a [-1, 0]-n?

### Megoldás:

Mivel  $\varphi'(x) = \frac{3}{4}x^2 > 0$ , ezért a  $\varphi$  függvény szigorúan monoton növő.

Így 
$$\mathcal{R}_{arphi}=[arphi(-1),\;arphi(0)]=\left[-rac{3}{4},\;-rac{1}{2}
ight]\subseteq[-1,\;0]$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felac
- 7. Felada
- (2. típus)
- 8. Felada (1. típus)
- 8. Feladat (2. típus)
- 8. Felada (3. típus)

#### 8. Feladat

Kontrakció-e a  $\varphi(x) = \frac{x^3-2}{4}$  leképezés a [-1, 0]-n?

## Megoldás:

Mivel  $\varphi'(x) = \frac{3}{4}x^2 > 0$ , ezért a  $\varphi$  függvény szigorúan monoton növő.

Így 
$$\mathcal{R}_{arphi}=[arphi(-1),\;arphi(0)]=\left[-rac{3}{4},\;-rac{1}{2}
ight]\subseteq[-1,\;0]$$

Legyen 
$$x, y \in [-1, 0]$$
  $|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left| \frac{x^3 - 2}{4} - \frac{y^3 - 2}{4} \right| = \frac{1}{4} \left| x^3 - y^3 \right| = \frac{1}{4} \left| x - y \right| \cdot \left| \underbrace{x^2 + xy + y^2} \right|$ 



Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Felac

7. Felada

8. Felada

8. Felada (1. típus)

8. Feladat (2. típus)

8. Felada (3. típus)

#### 8. Feladat

Kontrakció-e a  $\varphi(x) = \frac{x^3-2}{4}$  leképezés a [-1, 0]-n?

## Megoldás:

Mivel  $\varphi'(x) = \frac{3}{4}x^2 > 0$ , ezért a  $\varphi$  függvény szigorúan monoton növő.

Így 
$$\mathcal{R}_{arphi}=[arphi(-1),\;arphi(0)]=\left[-rac{3}{4},\;-rac{1}{2}
ight]\subseteq[-1,\;0]$$

Legyen 
$$x, y \in [-1, 0]$$
  $|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left| \frac{x^3 - 2}{4} - \frac{y^3 - 2}{4} \right| = \frac{1}{4} \left| x^3 - y^3 \right| = \frac{1}{4} |x - y| \cdot \left| \underbrace{x^2 + xy + y^2} \right| \le \frac{3}{4} |x - y|$ 



módszerek

Király Balázs

7. Felac

7. Felada

(2. típus)

8. Felada (1. típus)

8. Feladat (2. típus)

8. Felada (3. típus)

### 8. Feladat

Kontrakció-e a  $\varphi(x) = \frac{x^3-2}{4}$  leképezés a [-1, 0]-n?

### Megoldás:

Mivel  $\varphi'(x) = \frac{3}{4}x^2 > 0$ , ezért a  $\varphi$  függvény szigorúan monoton növő.

Így 
$$\mathcal{R}_{arphi}=[arphi(-1),\;arphi(0)]=\left[-rac{3}{4},\;-rac{1}{2}
ight]\,\subseteq[-1,\;0]$$

Azaz a kontrakciós tulajdonság szükséges feltétele teljesül.

Legyen 
$$x, y \in [-1, 0]$$
  $|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left| \frac{x^3 - 2}{4} - \frac{y^3 - 2}{4} \right| = \frac{1}{4} \left| x^3 - y^3 \right| = \frac{1}{4} \left| x - y \right| \cdot \left| \underbrace{x^2 + xy + y^2} \right| \le \frac{3}{4} |x - y|$ 

Azaz  $\varphi$  kontrakció és  $q = \frac{3}{4} < 1$ 



Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felad (1. típus
- 7. Felada (2. típus)
- 8. Felada
- (1. típus)
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Feladat (3. típus)

#### 8. Feladat

Az  $f(x) = \cos x - 4x + 2$  függvény gyökének közelítésére írjuk fel a Newton módszert és adjuk meg, milyen  $x_0$  választása mellett lesz konvergens a módszer!



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Felad (1. típus

7. Felada (2. típus)

8. Felada (1. típus)

(1. tipus)

(2. típus)

8. Feladat (3. típus)

#### 8. Feladat

Az  $f(x) = \cos x - 4x + 2$  függvény gyökének közelítésére írjuk fel a Newton módszert és adjuk meg, milyen  $x_0$  választása mellett lesz konvergens a módszer!

$$f(x) = \cos x - 4x + 2$$



Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Felada (1. típus)

7. Felada (2. típus)

8. Felada

(1. típus)

8. Felada (2. típus)

8. Feladat (3. típus)

#### 8. Feladat

Az  $f(x) = \cos x - 4x + 2$  függvény gyökének közelítésére írjuk fel a Newton módszert és adjuk meg, milyen  $x_0$  választása mellett lesz konvergens a módszer!

$$f(x) = \cos x - 4x + 2$$
  
$$f'(x) = -\sin x - 4$$

Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Felad (1. típus

7. Felada (2. típus)

8. Felada

8. Felada

(2. típus)

8. Feladat (3. típus)

#### 8. Feladat

Az  $f(x) = \cos x - 4x + 2$  függvény gyökének közelítésére írjuk fel a Newton módszert és adjuk meg, milyen  $x_0$  választása mellett lesz konvergens a módszer!

$$f(x) = \cos x - 4x + 2$$

$$f'(x) = -\sin x - 4$$

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} =$$

Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Felad (1. típus

7. Felada (2. típus)

8. Felada (1. típus)

8. Felada

(2. típus)

8. Feladat (3. típus)

#### 8. Feladat

Az  $f(x) = \cos x - 4x + 2$  függvény gyökének közelítésére írjuk fel a Newton módszert és adjuk meg, milyen  $x_0$  választása mellett lesz konvergens a módszer!

$$f(x) = \cos x - 4x + 2$$

$$f'(x) = -\sin x - 4$$

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\cos x_k - 4x_k + 2}{-\sin x_k - 4}$$

Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Felad (1. típus

7. Felada (2. típus)

8. Felada (1. típus)

8. Felada

(2. típus)

8. Feladat (3. típus)

#### 8. Feladat

Az  $f(x) = \cos x - 4x + 2$  függvény gyökének közelítésére írjuk fel a Newton módszert és adjuk meg, milyen  $x_0$  választása mellett lesz konvergens a módszer!

$$f(x) = \cos x - 4x + 2$$

$$f'(x) = -\sin x - 4$$

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\cos x_k - 4x_k + 2}{-\sin x_k - 4}$$



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felada (1. típus
- 7. Felada (2. típus)
- 8. Felada
- (1. típus)
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Feladat (3. típus)

### Megoldás:

Az  $x_0$  kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felada (1. típus)
- 7. Felada (2. típus)
- 8. Felada
- (1. típus)
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Feladat (3. típus)

### Megoldás:

Az  $x_0$  kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1 Létezik  $x^* \in [a, b]$ 



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felada (1. típus)
- 7. Felada (2. típus)
- 8. Felada (1. típus)
- 8. Felada
- 8. Feladat (3. típus)

### Megoldás:

Az  $x_0$  kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

- 1 Létezik  $x^* \in [a, b]$ 
  - Azaz olyan [a, b] intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felad (1. típus
- 7. Felada (2. típus)
- 8. Felada
- (1. típus)
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Feladat (3. típus)

### Megoldás:

Az  $x_0$  kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1 Létezik  $x^* \in [a, b]$ 

Azaz olyan [a, b] intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.

$$\begin{cases}
f(0) &= 3 > 0 \\
f(1) &= \cos 1 - 4 + 2 < 0
\end{cases}$$



#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felad (1. típus
- 7. Felada (2. típus)
- 8. Felada
- (1. típus)
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Feladat (3. típus)

## Megoldás:

Az  $x_0$  kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1 Létezik  $x^* \in [a, b]$ 

Azaz olyan [a, b] intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & 3 > 0 \\ f(1) & = & \cos 1 - 4 + 2 < 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad x^* \in [0, \ 1]$$

#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felad (1. típus
- 7. Felada (2. típus)
- 8. Felada
- 8. Felada
- (2. tipus)
- 8. Feladat (3. típus)

## Megoldás:

Az  $x_0$  kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1 Létezik  $x^* \in [a, b]$ 

Azaz olyan [a, b] intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & 3 > 0 \\ f(1) & = & \cos 1 - 4 + 2 < 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad x^* \in [0, \ 1]$$

#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felad (1. típus
- 7. Felada (2. típus)
- 8. Felada
- 8. Felada
- (2. típus)
- 8. Feladat (3. típus)

## Megoldás:

Az  $x_0$  kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1 Létezik  $x^* \in [a, b]$ 

Azaz olyan [a, b] intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & 3 > 0 \\ f(1) & = & \cos 1 - 4 + 2 < 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad x^* \in [0, \ 1]$$

$$f'(x) = -\sin x - 4$$

#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felad (1. típus
- 7. Felada (2. típus)
- 8. Felada
- 8. Felada
- (2. típus)
- 8. Feladat (3. típus)

## Megoldás:

Az  $x_0$  kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1 Létezik  $x^* \in [a, b]$ 

Azaz olyan [a, b] intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & 3 > 0 \\ f(1) & = & \cos 1 - 4 + 2 < 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad x^* \in [0, \ 1]$$

$$f'(x) = -\sin x - 4 \le -3$$

#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felad (1. típus
- 7. Felada (2. típus)
- 8. Felada
- 8. Felada
- 8. Feladat (3. típus)

# Megoldás:

Az  $x_0$  kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

- 1 Létezik  $x^* \in [a, b]$ 
  - Azaz olyan [a, b] intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.

$$\begin{cases}
f(0) &= 3 > 0 \\
f(1) &= \cos 1 - 4 + 2 < 0
\end{cases} \Rightarrow x^* \in [0, 1]$$

$$f'(x) = -\sin x - 4 \le -3 < 0$$

#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felad (1. típus
- 7. Felada (2. típus)
- 8. Felada (1. típus)
- 8. Felada
- 8. Feladat
- 8. Felada (3. típus)

## Megoldás:

Az  $x_0$  kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1 Létezik  $x^* \in [a, b]$ 

Azaz olyan [a, b] intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & 3 > 0 \\ f(1) & = & \cos 1 - 4 + 2 < 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad x^* \in [0, \ 1]$$

$$f'(x) = -\sin x - 4 \le -3 < 0$$
  
$$f''(x) = -\cos x$$

#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felad (1. típus
- 7. Felada (2. típus)
- 8. Felada (1. típus)
- 8. Felada (2. típus)
- 8. Felada

8. Feladat (3. típus)

## Megoldás:

Az  $x_0$  kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1 Létezik  $x^* \in [a, b]$ 

Azaz olyan [a, b] intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & 3 > 0 \\ f(1) & = & \cos 1 - 4 + 2 < 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad x^* \in [0, \ 1]$$

 $\mathbf{2}$  f' és f'' állandó előjelű

$$f'(x) = -\sin x - 4 \le -3 < 0$$
  
$$f''(x) = -\cos x < 0$$

#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felad (1. típus
- 7. Felada (2. típus)
- 8. Felada
- (I. tipus)
- (2. típus)
- 8. Feladat (3. típus)

### Megoldás:

Az  $x_0$  kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1 Létezik  $x^* \in [a, b]$ 

Azaz olyan [a, b] intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & 3 > 0 \\ f(1) & = & \cos 1 - 4 + 2 < 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad x^* \in [0, \ 1]$$

 $\mathbf{2}$  f' és f'' állandó előjelű

$$f'(x) = -\sin x - 4 \le -3 < 0$$
  
 $f''(x) = -\cos x < 0$  minden  $x \in [0, 1]$  esetén

#### Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Felada (1. típus

7. Felada (2. típus)

8. Felada (1. típus)

8. Felada

(2. típus)

8. Feladat (3. típus)

## Megoldás:

Az  $x_0$  kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1 Létezik  $x^* \in [a, b]$ 

Azaz olyan [a, b] intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & 3 > 0 \\ f(1) & = & \cos 1 - 4 + 2 < 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad x^* \in [0, \ 1]$$

2 f' és f" állandó előjelű

$$f'(x) = -\sin x - 4 \le -3 < 0$$
  
 $f''(x) = -\cos x < 0$  minden  $x \in [0, 1]$  esetén

3 Legyen  $x_0$ :  $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$  teljesüljön.

#### Numerikus módszerek

Király Balázs

- 7. Felada (1. típus
- 7. Felada (2. típus)
- 8. Felada
- (1. típus)
- (2. típus)
- 8. Feladat (3. típus)

## Megoldás:

Az  $x_0$  kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1 Létezik  $x^* \in [a, b]$ 

Azaz olyan  $[a,\ b]$  intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & 3 > 0 \\ f(1) & = & \cos 1 - 4 + 2 < 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad x^* \in [0, \ 1]$$

 $\mathbf{2}$  f' és f'' állandó előjelű

$$f'(x) = -\sin x - 4 \le -3 < 0$$
  
 $f''(x) = -\cos x < 0$  minden  $x \in [0, 1]$  esetén

Legyen  $x_0$ :  $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$  teljesüljön. Mivel f''(x) < 0 mindenhol, ezért  $x_0$ -ban is, így  $f(x_0) < 0$  kell.

#### Numerikus módszerek

Király Balázs

7. Felada (1. típus)

7. Felada (2. típus)

8. Felada (1. típus)

8. Felada

8. Feladat (3. típus)

### Megoldás:

Az  $x_0$  kezdőelem választásához és a konvergencia vizsgálathoz tekintsük a monoton konvergencia tételt.

1 Létezik  $x^* \in [a, b]$ 

Azaz olyan [a, b] intervallumot kell találnunk, ahol van gyök.

$$\begin{cases}
f(0) &= 3 > 0 \\
f(1) &= \cos 1 - 4 + 2 < 0
\end{cases} \Rightarrow x^* \in [0, 1]$$

2 f' és f'' állandó előjelű

$$f'(x) = -\sin x - 4 \le -3 < 0$$
  
 $f''(x) = -\cos x < 0$  minden  $x \in [0, 1]$  esetén

3 Legyen  $x_0$ :  $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$  teljesüljön. Mivel f''(x) < 0 mindenhol, ezért  $x_0$ -ban is, így  $f(x_0) < 0$  kell. Például  $x_0 = 1$  megfelelő.