Definíció

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ rögzített szám és $a = (a_n,\ n \in \mathbb{N})$ pedig egy valós számsorozat. Az ezekkel képzett

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

formális összeget ***hatványsor****nak nevezzük. Az $(a_n,\ n \in \mathbb{N})$ sorozat tagjait a hatványsor* ***együtthatóinak****, az $x_0 \in \mathbb{R}$ számot a hatványsor* ***konvergencia-középpontjának*** *nevezzük.*

Megjegyzés

Vegyük észre, hogy minden valós x helyettesítésével egy-egy végtelensorhoz jutunk. A továbbiakban azt fogjuk vizsgálni, milyen x-ek esetén konvergens a kapott végtelensor.

Taylor-sor, MacLaurin-sor

Definíció

Legyen az f függvény az $x_0 \in \mathbb{R}$ pont valamely környezetében végtelensokszor differenciálható, ekkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

hatványsort x_0-körüli ***Taylor-sor****nak nevezzük, ha az a_n együtthatókra teljesül, hogy*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

ahol $f^{(n)}(x_0)$ jelöli az f függvény n-edik deriváltjának x_0-beli helyettesítési értékét és $a_0 = f(x_0)$.

Definíció

Az $x_0 = 0$ körüli Taylor-sort ***MacLaurin-sornak*** *nevezzük.*

Hatványsorok konvergenciája

Definíció

*Azon valós x-ek halmazát, melyekre a hatványsor konvergens, a hatványsor **konvergencia tartományának** nevezzük.*

Megjegyzés

Vegyük észre, hogy az $x = x_0$ helyen a hatványsor szükségszerűen konvergens, azaz x_0 mindig eleme a konvergencia tartománynak.

Definíció

Legyen $\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, ekkor az

$$R := \begin{cases} 0, & \alpha = \infty \\ \infty, & \alpha = 0 \\ 1/\alpha, & 0 < \alpha < \infty \end{cases}$$

*számot a hatványsor **konvergenciasugarának** nevezzük.*

Cauchy-Hadamard tétel

Tétel (Cauchy-Hadamard tétel)

Legyen R a hatványsor konvergencia sugara. Ekkor a hatványsor a

$$K_R(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : \; |x - x_0| < R\}$$

halmaz minden pontjában abszolút konvergens, $|x - x_0| > R$ esetén pedig divergens.

Megjegyzés

Az $|x - x_0| = R$ feltétel teljesülése esetén, azaz a fenti intervallum végpontjaiban a konvergenciát külön vizsgálni kell.

Hatványsor összegfüggvénye

Definíció

Tegyük fel, hogy a hatványsor konvergenciasugara pozitív. A

$$K_R(x_0) \ni x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \in \mathbb{R}$$

függvényt a hatványsor ***összegfüggvényének*** *nevezzük.*

Definíció

Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz. Akkor mondjuk, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény ***analitikus****, ha bármely $a \in H$ pontnak van olyan környezete, amelyben az f előállítható hatványsor összegfüggvényeként.*

Taylor-polinom

Definíció

Legyen $n \in \mathbb{N}$. Az x_0 helyen n-szer differenciálható $f : H \to \mathbb{R}$ függvény x_0 ***körüli n-edik Taylor-polinomján*** *a*

$$T_n(x) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n = \\ = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k$$

n-edfokú polinomot értjük.

Megjegyzés

Vegyük észre, hogy a Taylor-polinom nem más, mint a Taylor-sor n-edik részletösszege.

Taylor-formula

Tétel (Taylor-formula)

Ha az f függvény az x_0 pont valamely $K_r(x_0)$ környezetében $(n+1)$-szer differenciálható, akkor minden $x \in K_r(x_0)$ pont esetén

$$f(x) = T_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}}_{R_n(x)},$$

ahol ξ az x és az x_0 közötti hely.

Definíció

Az előző tételben bevezetett $R_n(x)$ kifejezést ***n-edik Lagrange-féle maradéktagnak*** *nevezzük.*

Megjegyzés

Ha belátható, hogy $R_n(x)$ minden szóbajöhető x esetén „elegendően kicsi", akkor használható az $f(x) \approx T_n(x)$ közelítés.

Érintő egyenlete

Definíció

*Legyen az f függvény az $a \in \mathcal{D}_f$ helyen differenciálható. Az $(a,\ f(a))$ ponton áthaladó, $f'(a)$ meredekségű egyenest az f függvény a helyhez tartozó **érintőjének** nevezzük, azaz az érintő egyenlete:*

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Megjegyzés

Gondoljunk vissza a differencia-hányados és a differenciál-hányados geometriai jelentésével kapcsolatban megbeszéltekre.

A differenciálszámítás középérték-tételei, Rolle-tétel

Tétel (Rolle-tétel)

Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény*

i) *folytonos az* $[a, b]$ *zárt intervallumon*

ii) *differenciálható az* (a, b) *nyílt intervallumon*

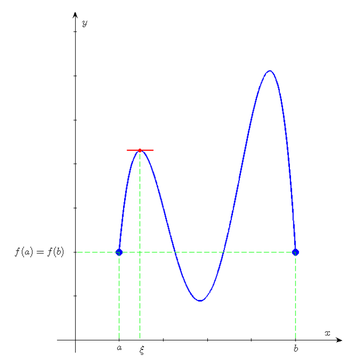
iii) *és* $f(a) = f(b)$,

akkor létezik olyan $\xi \in (a, b)$ *pont ahol*

$$f'(\xi) = 0.$$

Megjegyzés

Azaz ha teljesülnek a Rolle-tétel feltételei, akkor van legalább egy olyan belső pont, ahol a függvény érintője vízszintes.



A differenciálszámítás középérték-tételei, Lagrange-féle középértéktétel

Tétel (Lagrange-féle középértéktétel)

Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény

i) *folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon*

ii) *differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon*

akkor létezik olyan $\xi \in (a, b)$ pont ahol

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

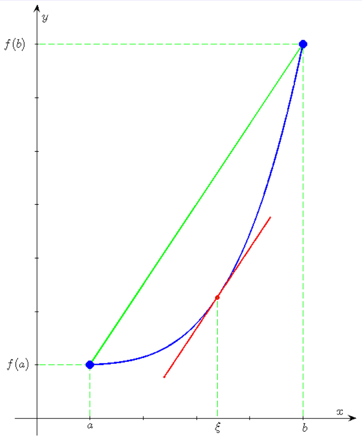
Megjegyzés

Vegyük észre, hogy a Lagrange-féle középérték tétel az $f(a) = f(b)$ speciális esetben éppen a Rolle-tételre vezet.

A differenciálszámítás középérték-tételei, Lagrange-féle középértéktétel

Megjegyzés

Azaz ha teljesülnek a Lagrange-tétel feltételei, akkor van legalább egy olyan belső pont, ahol a függvény érintője párhuzamos az $(a, f(a))$ *és* $(b, f(b))$ *pontokon átmenő szelővel.*



A differenciálszámítás középérték-tételei, Cauchy-féle középértéktétel

Tétel (Cauchy-féle középértéktétel)

Ha az $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvények

i) *folytonosak az $[a, b]$ zárt intervallumon*

ii) *differenciálhatók az (a, b) nyílt intervallumon*

továbbá tetszőleges $x \in (a, b)$ esetén $g'(x) \neq 0$, akkor létezik olyan $\xi \in (a, b)$ pont ahol

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Megjegyzés

Vegyük észre, hogy a Lagrange-féle középértéktétel a Cauchy-féle középértéktétel speciális esete, ha $g(x) = x$.

Logaritmikus deriválás

Legyen $g(x)$ és $h(x)$ függvény differenciálható a H halmazon, továbbá $g(x) > 0$. Ekkor $f(x) = [g(x)]^{h(x)}$ is differenciálható a H-n és $f'(x)$ az alábbi módokon határozható meg.

1. Megoldás:

Ha $g(x) > 0$, akkor $f(x) > 0$. Ekkor

$$\ln(f(x)) = \ln\left(g(x)^{h(x)}\right) = h(x) \cdot \ln(g(x))$$

Deriváljuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= h'(x) \cdot \ln(g(x)) + h(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) \\
f'(x) &= f(x) \cdot \left[h'(x) \cdot \ln(g(x)) + h(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)\right].
\end{aligned}$$

Logaritmikus deriválás

2. Megoldás:
Ugyanehhez az eredményhez jutunk, ha az

$$f(x) = e^{\ln(f(x))} = e^{\ln\left(g(x)^{h(x)}\right)} = e^{h(x)\cdot\ln(g(x))}$$

átalakításból indulunk ki. Ekkor

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{h(x)\cdot\ln(g(x))}\right)' = \\ &= \underbrace{e^{h(x)\cdot\ln(g(x))}}_{=f(x)} \cdot \left(h'(x)\cdot\ln g(x) + h(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\cdot g'(x)\right). \end{aligned}$$

Megjegyzés

*A feladatok megoldása során a két módszer egyformán hatásos. A **2. Megoldás**nak mégis van egy kis előnye, a későbbiekben a L'Hospital szabály alkalmazásakor ehhez a módszerhez meglehetősen hasonlító eljárásra van szükség.*

L'Hospital szabály

Tétel (L'Hospital szabály véges helyen „$\frac{0}{0}$" alakra)

Az f és a g függvények legyenek az x_0 valamely (esetleg féloldali) környezetében differenciálhatók és x_0-ban folytonosak, melyekre $f(x_0) = g(x_0) = 0$.
Továbbá tegyük fel, hogy létezik a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

határérték. Ekkor létezik a $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is és

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

L'Hospital szabály

Tétel (L'Hospital szabály véges helyen „$\frac{\infty}{\infty}$” alakra)

Az f és a g függvények legyenek az x_0 valamely (esetleg féloldali) környezetében differenciálhatók, melyekre

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Továbbá tegyük fel, hogy létezik a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

határérték. Ekkor létezik a $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is és

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

L'Hospital szabály

Tétel (L'Hospital szabály végtelenben)

Az f és a g függvények legyenek az differenciálhatók a (K,∞) intervallumon és legyen

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \quad (\textit{vagy} \ \pm\infty).$$

Továbbá tegyük fel, hogy létezik a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

határérték. Ekkor létezik a $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is és

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

L'Hospital szabály

Megjegyzés

Hasonló tétel mondható ki $-\infty$-ben is.

Megjegyzés

Azaz a L'Hospital szabály véges-, vagy végtelen helyen $\frac{0}{0}$, vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alak esetén alkalmazható, ha a deriváltak hányadosának határértéke kiszámolható.

L'Hospital szabály – Feladatok

Feladat

Számoljuk ki az alábbi határértékeket:

- $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{x^2-x-12}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^4}$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x \cdot \log_2 x$

Monotonitás

Definíció

Akkor mondjuk, hogy az $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ függvény az $a\in(\alpha,\beta)$ ***pontban lokálisan növekvő****, ha a-nak van olyan $K_r(a)\subseteq(\alpha,\beta)$ környezete,*

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(a), \quad \text{ha } x\in(a-r,a),\\ f(x) &\geq f(a), \quad \text{ha } x\in(a,a+r). \end{aligned}$$

Definíció

Akkor mondjuk, hogy az $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ függvény az $a\in(\alpha,\beta)$ ***pontban lokálisan fogyó****, ha a-nak van olyan $K_r(a)\subseteq(\alpha,\beta)$ környezete,*

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(a), \quad \text{ha } x\in(a-r,a),\\ f(x) &\leq f(a), \quad \text{ha } x\in(a,a+r). \end{aligned}$$

Szélsőérték definíciója

Megjegyzés

Könnyen látható, hogy a monoton növő függvények értelmezési tartományuk minden belső pontjában lokálisan növekednek illetve a monoton fogyó függvények értelmezési tartományuk minden belső pontjában lokálisan fogynak.

Definíció

Akkor mondjuk, hogy az $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ függvénynek az $a\in(\alpha,\beta)$ pontban ***lokális maximuma*** *van, ha a-nak létezik olyan $K_r(a)\subseteq(\alpha,\beta)$ környezete,*

$$f(x)\le f(a),\quad \text{ha } x\in K_r(a).$$

Szélsőérték definíciója

Definíció

*Akkor mondjuk, hogy az $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ függvénynek az $a\in(\alpha,\beta)$ pontban **lokális minimuma** van, ha a-nak létezik olyan $K_r(a)\subseteq(\alpha,\beta)$ környezete,*

$$f(x)\geq f(a),\quad ha\ x\in K_r(a).$$

Megjegyzés

*A lokális maximumot és a lokális minimumot összefoglaló néven **lokális szélsőértéknek** nevezzük.*

Megjegyzés

*A középiskolában tanult maximum egyben lokális maximum is illetve a minimum lokális minimum is. Az egyértelmű elnevezés kedvéért ezeket a szélsőértékeket ezentúl **abszolút szélsőértékeknek** nevezzük.*

A monotonitás és a derivált kapcsolata

Tétel

Legyen az $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ *függvény az* $a\in(\alpha,\beta)$ *pontban differenciálható.*

i) *Ha* f *az* a *pontban (lokálisan) növő, akkor* $f'(a)\geq 0$.

ii) *Ha* f *az* a *pontban (lokálisan) fogyó, akkor* $f'(a)\leq 0$.

Tétel

Legyen az $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ *függvény az* $a\in(\alpha,\beta)$ *pontban differenciálható.*

i) *Ha* $f'(a)>0$, *akkor az* f *függvény az* a *pontban szigorúan növő.*

ii) *Ha* $f'(a)<0$, *akkor az* f *függvény az* a *pontban szigorúan fogyó.*

Szélsőérték-tételek

Tétel

Ha az $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in (\alpha, \beta)$ pontban differenciálható és itt lokális szélsőértéke van, akkor $f'(a) = 0$

Megjegyzés

Az előző tétel a lokális szélsőérték létezésének szükséges, de nem elégséges feltétele. Például az $f(x) = x^3$ függvénynek az $x_0 = 0$ pontban nincs szélsőértéke, pedig $f'(0) = 0$.

Tétel (A szélsőérték létezésének elsőrendű elégséges feltétele)

Legyen $f : H \to \mathbb{R} \quad (H \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz), $a \in H, \quad f \in \mathcal{D}_a$. Ha $f'(a) = 0$ és f' az a-ban előjelet vált, akkor f-nek a-ban lokális szélsőértéke van. Ha a derivált negatívból pozitívvá válik, akkor az eredeti függvénynek lokális minimuma, ha pozitívból negatívvá válik, akkor lokális maximuma van az a pontban.

Szélsőérték-tételek

Definíció (Emlékeztető)

*Ha az $f : H \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény f' deriváltja az $a \in H$ pontban differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy az f **kétszer differenciálható** az a pontban és az*

$$f''(a) := (f')'(a)$$

*számot a függvény a pontbeli **második deriváltjának**, vagy **másodrendű differenciálhányadosának** nevezzük.*

Tétel (A szélsőérték létezésének másodrendű elégséges feltétele)

Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ $\quad (H \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz), $a \in H$, $\quad f \in \mathcal{D}^2_a$. Ha $f'(a) = 0$ és $f''(a) \neq 0$, akkor f-nek a-ban lokális szélsőértéke van. Ha $f''(a) > 0$, akkor f-nek a-ban lokális minimuma, ha $f''(a) < 0$, akkor f-nek a-ban lokális maximuma van.

Szélsőérték-tételek

Definíció

Legyen $n \in \mathbb{N}$ *és* $f : H \to \mathbb{R}$ *függvény* $(n-1)$*-szer differenciálható. Ha a függvény* $(n-1)$*-edik deriváltja (*$f^{(n-1)}$*) differenciálható az* $a \in H$ *pontban, akkor azt mondjuk, hogy* f *az* a *pontban* n*-szer differenciálható és legyen* $f^{(n)}(a) := (f^{(n-1)})'(a)$.

Tétel (A szélsőérték létezésének magasabbrendű elégséges feltétele)

Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ *(*$H \subseteq \mathbb{R}$ *nyílt halmaz), az* $a \in H$ *pontban* n*-szer differenciálható. Tegyük fel, hogy*

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad \textit{és} \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Az f*-nek akkor és csak akkor van az* a*-ban lokális szélsőértéke, ha* n *páros. Ekkor ha* $f^{(n)}(a) > 0$*, akkor* f*-nek* a*-ban lokális minimuma, ha* $f^{(n)}(a) < 0$*, akkor lokális maximuma van.*

Monotonitás, szélsőérték – Feladatok

Feladat

- Mit mondhatunk az $f(x) = x^2 - 4x + 7$ függvény monotonitásáról az $x_0 = -5$, az $x_0 = 3$ és az $x_0 = 2$ pontokban? Vizsgáljuk a monotonitását és adjuk meg a szélsőértékeit a teljes értelmezési tartományán.
- Mit mondhatunk az $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$ függvény monotonitásáról az $x_0 = -4$ és az $x_0 = 5$ helyeken? Az $x_0 = 3$ van-e szélsőértéke? Vizsgáljuk a monotonitását és adjuk meg a szélsőértékeit a teljes értelmezési tartományán.

Konvexitás és inflexió

Definíció

Akkor mondjuk, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény egy $I \subseteq H$ intervallumon konvex, ha bármely $a, b \in I$, $a < b$ esetén az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokon áthaladó egyenes (szelő) az (a, b)-ben az f fölött fekszik.

Definíció

Akkor mondjuk, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény egy $I \subseteq H$ intervallumon konkáv, ha bármely $a, b \in I$, $a < b$ esetén az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokon áthaladó egyenes (szelő) az (a, b)-ben az f alatt fekszik.

Definíció

Akkor mondjuk, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in H$ helyen inflexiója van, ha ott a függvény konvexitást vált.

A konvexitás és a deriváltak kapcsolata

Tétel (A konvexitás és az első derivált kapcsolata)

Tekintsük az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvényt, tegyük fel, hogy f az (a, b)-n differenciálható, ekkor

i) *Ha f konvex (a, b)-n, akkor f' monoton nő (a, b)-n*

ii) *Ha f szigorúan konvex (a, b)-n, akkor f' szigorúan monoton nő (a, b)-n*

iii) *Ha f konkáv (a, b)-n, akkor f' monoton csökken (a, b)-n*

iv) *Ha f szigorúan konkáv (a, b)-n, akkor f' szigorúan monoton csökken (a, b)-n*

A konvexitás és a deriváltak kapcsolata

Tétel (A konvexitás és a második derivált kapcsolata)

Tekintsük az $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ függvényt, tegyük fel, hogy f az (a,b)-n kétszer differenciálható, ekkor

i) *Ha f konvex (a,b)-n, akkor $f''(x) \geq 0$*
ii) *Ha f konkáv (a,b)-n, akkor $f''(x) \leq 0$*
iii) *Ha $f''(x) > 0$, akkor f szigorúan konvex (a,b)-on*
iv) *Ha $f''(x) < 0$, akkor f szigorúan konkáv (a,b)-on*

Tételek az inflexiós ponttal kapcsolatban

Tétel (Inflexióspont létezésének szükséges feltétele)

Ha az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in H$ pontban kétszer differenciálható és f-nek a-ban inflexiója van, akkor $f''(a) = 0$.

Megjegyzés

Az előző tétel szükséges de nem elégséges, például az $f(x) = x^4$ függvénynek $a = 0$-ban nincs inflexiója, pedig $f''(0) = 0$.

Tétel (Inflexióspont létezésének másodrendű elégséges feltétele)

Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ az $a \in H$, pontban kétszer differenciálható. Ha $f''(a) = 0$ és f'' az a-ban előjelet vált, akkor f-nek a-ban inflexióspontja van.

Tételek az inflexiós ponttal kapcsolatban

Tétel (Inflexióspont létezésének harmadrendű elégséges feltétele)

Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ az $a \in H$, pontban háromszor differenciálható. Ha $f''(a) = 0$ és $f'''(a) \neq 0$, akkor f-nek a-ban inflexióspontja van.

Tétel (Inflexióspont létezésének magasabbrendű elégséges feltétele)

Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ az $a \in H$, pontban n-szer differenciálható. Tegyük fel, hogy

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \textit{és} \quad f^{(n)}(a) \neq 0,$$

f-nek a-ban akkor és csak akkor van inflexióspontja, ha n páratlan.

I. Alaptulajdonságok megállapítása

- Értelmezési tartomány meghatározása
  - Szinguláris helyek
  - Értelmezési tartomány szélső pontjai
- szimmetria tulajdonságok vizsgálata
  - paritás
    - Ha $\mathcal{D}_f$ szimmetrikus és $f(-x) = f(x)$, $(\forall x \in \mathcal{D}_f)$, akkor f páros
    - Ha $\mathcal{D}_f$ szimmetrikus és $f(-x) = -f(x)$, $(\forall x \in \mathcal{D}_f)$, akkor f ptlan
    - különben se nem páros, se nem páratlan
  - periodicitás

  Az f függvény periódusa p, ha p a legkisebb pozitív szám, melyre minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(x+p) = f(x)$.
- Folytonosság vizsgálata
- Differenciálhatóság vizsgálata
- Tengelymetszetek meghatározása
  - y-tengely: $f(0)$ meghatározása
  - x-tengely: $f(x) = 0$ megoldása, ha lehetséges

II. Vizsgálatok az első derivált alapján

- Monotonitási intervallumok meghatározása
- szélsőértékek keresése

Mindkét szempont vizsgálható a szélsőérték létezésének elsőrendű elégséges feltételének alkalmazásakor használt táblázattal.

A táblázat oszlopait a kritikus pontok (szinguláris helyek, intervallum szélső pontjai, szakadási helyek, lehetséges szélsőérték helyek) által meghatározott intervallumok adják

A táblázatnak két sora van, az első a derivált, a második az eredeti függvény viselkedését írja le

III. Vizsgálatok a második derivált alapján

- Konvexitási intervallumok meghatározása
- inflexióspontok keresése

Mindkét szempont vizsgálható az inflexiós pont létezésének másodrendű elégséges feltételének alkalmazásakor használt táblázattal.

A táblázat oszlopait a kritikus pontok (szinguláris helyek, intervallum szélső pontjai, szakadási helyek, lehetséges inflexióspontok helyei) által meghatározott intervallumok adják

A táblázatnak két sora van, az első a második derivált, a második az eredeti függvény viselkedését írja le

IV. A függvény határértékei

- Az értelmezési tartomány végpontjaiban (vagy $\pm\infty$-ben)
- A függvény szinguláris pontjaiban és szakadási helyeinél

V. A derivált határértékei:

- Ahol f folytonos, de nem differenciálható
- Ahol f nem folytonos, de létezik legalább féloldali véges határérték

VI. Aszimptoták

- vízszintes aszimptota van, ha $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$, vagy $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$, ahol $c \in \mathbb{R}$
- függőleges aszimptota, ahol $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ (elég ha az egyoldali határérték végtelen)
- ferde aszimptota, ha $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ és $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m,\ m \in \mathbb{R}$. Ekkor az aszimptota:

$$y = m\cdot x + \underbrace{\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - m\cdot x)}_{b}$$

VII. Ábrázolás

Ábrázolás előtt érdemes a II. és III. pontban elkészített táblázatokat összevonni.

A táblázat oszlopait a kritikus pontok (szinguláris helyek, intervallum szélső pontjai, szakadási helyek, lehetséges szlsőérték helyek és lehetséges inflexióspontok helyei) által meghatározott intervallumok adják

A táblázatnak három sora van, az első az első derivált, a második a második derivált, a harmadik pedig az eredeti függvény viselkedését írja le

VIII. Értékkészlet leolvasása

A grafikon segítségével megadjuk a függvény értékkészletét.

Primitív függvény

Definíció

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum és $f : I \mapsto \mathbb{R}$ egy intervallumon értelmezett valósértékű függvény. Akkor mondjuk, hogy a $F : I \mapsto \mathbb{R}$ függvény a f függvény ***primitív függvénye****, ha*

- $F \in \mathcal{D}_I$
- $F'(x) = f(x)$ *minden* $x \in I$ *esetén*

Tétel

Ha F a f primitív függvénye az I intervallumon és $C \in \mathbb{R}$ konstans, akkor $F + C$ is a f primitív függvénye.

Bizonyítás.

Ha F a f primitív függvénye, akkor $F \in \mathcal{D}_I$, így a differenciálhatóság műveleti tulajdonságai alapján $F + C \in \mathcal{D}_I$ és $(F + C)' = F' + C' = f + 0 = f$. $\square$

A határozatlan integrál

Tétel

Ha F_1 és F_2 a f primitív függvényei az I intervallumon, akkor $F_1 - F_2 = \acute{a}lland\acute{o}$, azaz f primitív függvényei csak egy additív konstansban különböznek.

Bizonyítás.

$F_1, F_2 \in \mathcal{D}_I$ így a differenciálhatóság műveleti tulajdonságai alapján $F_1 - F_2 \in \mathcal{D}_I$ $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$, az I intervallumon, így $F_1 - F_2 = \text{állandó}$. □

Definíció

Legyen $f : I \mapsto \mathbb{R}$ olyan függvény, melynek van primitív függvénye az I intervallumon. Ekkor az f primitív függvényeinek halmazát az f ***határozatlan integrál****jának nevezzük. Jelölés:*

$$\int f(x)\, dx = \int f = \{F(x) + C, C \in \mathbb{R}\},$$

ahol F a f egy primitív függvénye.

Műveleti tulajdonságok

Tétel

Ha az f az I intervallumon folytonos, akkor létezik primitív függvénye.

Tétel

Ha $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$ függvényeknek van primitív függvénye és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $f + g$-nek és $\lambda \cdot f$-nek is van primitívfüggvénye és

i) $\int (f(x) + g(x))\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx,$

ii) $\int \lambda \cdot f(x)\ dx = \lambda \cdot \int f(x)\ dx.$

Bizonyítás.

Legyen $\int f(x)\ dx = F(x) + C_1$ és $\int g(x)\ dx = G(x) + C_2$, ahol $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Ekkor a definíció alapján $F, G \in \mathcal{D}_I$ és $F'(x) = f(x)$, valamint $G'(x) = g(x)$ minden $x \in I$ esetén.

Műveleti tulajdonságok

A derivált műveleti tulajdonságai miatt $F+G$ és $\lambda \cdot F$ is differenciálható I-n és

$$\begin{aligned}(F+G)' &= F' + G' = f + g,\\ (\lambda \cdot F)' &= \lambda \cdot F' = \lambda \cdot f.\end{aligned}$$

Azaz $\lambda \cdot F$ a $\lambda \cdot f$ egy primitív függvénye illetve $F+G$ a $f+g$ egy primitív függvénye.

$\square$

Helyettesítéses integrálás

Tétel

Legyen $\varphi : I \mapsto J$ *és* $f : J \mapsto \mathbb{R}$, *ahol* $I, J \subset \mathbb{R}$ *intervallumok. Ha*

i) $\varphi \in \mathcal{D}_I$ *és*

ii) F *a* f *függvény primitív függvénye* J*-n,*

akkor $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ *függvénynek is létezik primitív függvénye és*

$$\int (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = F \circ \varphi + C.$$

Bizonyítás.

$F \in \mathcal{D}_J$ és $\varphi \in \mathcal{D}_I \Rightarrow F \circ \varphi \in \mathcal{D}_I$ és

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad \forall t \in I,$$

azaz az $F \circ \varphi$ függvény az $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ függvény primitív függvénye. $\square$

Helyettesítéses integrálás, 2. módszer

Tétel

Legyen $\varphi : I \mapsto J$ *és* $f : J \mapsto \mathbb{R}$, *ahol* $I, J \subset \mathbb{R}$ *intervallumok. Ha*

i) $\varphi \in \mathcal{D}_I$ *és* $\varphi'(x) \neq 0,\ x \in I$,

ii) *Legyen* φ *kölcsönösen egyértelmű és jelölje* $\overline{\varphi}$ *az inverzét*

iii) *legyen* $h := (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. h*-nak van primitív függvénye, ez legyen* H,

ekkor f *függvénynek is létezik primitív függvénye és*

$$\int f(x)\, dx = (H \circ \overline{\varphi})(x) + C.$$

Helyettesítéses integrálás, 2. módszer

Bizonyítás.

$H \in \mathcal{D}_I$ és $H'(x) = h(x) = ((f \circ \varphi) \cdot \varphi')(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

Mivel $\overline{\varphi} \in \mathcal{D}_J$ és a közvetett függvény deriválási szabálya alapján $H \circ \overline{\varphi} \in \mathcal{D}_J$ legyen $x \in J$ ekkor

$$\begin{aligned}
(H(\overline{\varphi}(x)))' &= H'(\overline{\varphi}(x)) \cdot \overline{\varphi}'(x) = h(\overline{\varphi}(x)) \cdot \overline{\varphi}'(x) = \\
&= f(\varphi(\overline{\varphi}(x))) \cdot \varphi'(\overline{\varphi}(x)) \cdot \overline{\varphi}'(x) = \\
&= f(x) \cdot \varphi'(\overline{\varphi}(x)) \cdot \overline{\varphi}'(x) = \\
&= f(x) \cdot \varphi'(\overline{\varphi}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\overline{\varphi}(x))} = f(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Parciális integrálás

Tétel

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathcal{D}_I$. Ha az $f \cdot g'$ függvénynek van primitívfüggvénye az I intervallumon, akkor $f' \cdot g$ függvénynek is van és

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'.$$

Bizonyítás.

$f, g \in \mathcal{D}_I \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{D}_I$ és

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \Rightarrow \quad f' \cdot g = (f \cdot g)' - f \cdot g'$$

Az $(f \cdot g)'$ és $f \cdot g'$ függvényeknek van primitív függvényük, így a különbségüknek, $f' \cdot g$-nek is van és

$$\int f' \cdot g = \int (f \cdot g)' - \int f \cdot g' = f \cdot g - \int f \cdot g'.$$

□

Parciális integrálás, alapesetek

Megjegyzés

Nyilvánvaló, hogy a módszer akkor használható jól, ha az f és g függvényeket úgy választjuk, hogy $f \cdot g'$ függvény primitív függvénye könnyebben számolható, mint az eredeti $f' \cdot g$ függvényé. A következő négy típus esetén érdemes parciálisan integrálni:

I. Polinom függvény és exponenciális-, vagy trigonometrikus függvény szorzata. **Megoldás:** A parciális integrálás során legyen g a polinom, így a fenti eljárást alkalmazva a kiszámítandó $\int f(x) \cdot g'(x)dx$ hasonló típusú lesz, mint az eredeti primitív függvény, de a polinom fokszáma eggyel csökken. A parciális integrálást egészen addig ismételten alkalmazzuk, amíg a polinom konstanssá nem válik, ekkor már elemi úton integrálhatunk.

Parciális integrálás, alapesetek

II.

a) Polinom és logaritmus-, vagy ciklometrikus („arkusz”) függvény szorzata.
Megoldás: A parciális integrálás során legyen f' a polinom, így a fenti eljárást alkalmazva a kiszámítandó $\int f(x) \cdot g'(x)dx$ integrálban a polinom mellett egy könnyebben kezelhető függvény jelenik meg.

b) Logaritmus-, vagy ciklometrikus („arkusz”) függvény integrálása.
Megoldás: Ilyenkor az integrandust tekinthetjük olyan szorzatnak, melynek az egyik tényezője az eredeti integrandus, a másik tényezője pedig az azonosan 1 polinom. A parciális integrálás során ugyanúgy járunk el, mint az előző típus esetén.

Parciális integrálás, alapesetek

III. Exponenciális- és szinusz-, vagy koszinusz függvény szorzata.
Megoldás: Kétszer egymás után parciálisan integrálunk. (Tetszőleges megfeleltetéssel, de mindkétszer ugyanolyan szerepkiosztással.) A második lépés után egy függvényegyenlethez jutunk, melyből elemi átalakítással „kifejezhetjük” a keresett függvényt.

Elemi törtfüggvények

Definíció

Az

i) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$
$x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R}\ (i = 0, \ldots, n)$

ii) $f(x) = \dfrac{A}{(x-a)^n}, \quad a \in \mathbb{R},\ x \neq a,\ n \in \mathbb{N}^*,\ A \in \mathbb{R}$

iii) $f(x) = \dfrac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n},$
$A, B \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R},\ a, b, c \in \mathbb{R}, (b^2 - 4ac < 0),\ n \in \mathbb{N}^*,$

alakú függvényeket elemi törtfüggvényeknek nevezzük.

Elemi törtfüggvények

Tétel

Minden racionális függvény felbontható véges számú elemi törtfüggvény összegére.

Megjegyzés

A tétel bizonyításától eltekintünk. Helyette egy, a gyakorlatban jól alkalmazható eljárás lépéseit írjuk le, amellyel a felbontást elő is állíthatjuk.

1.lépés: A racionális függvényt polinom és valódi racionális tört összegére bontjuk.

Elemi törtfüggvények

Definíció

Az $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ $x \in \mathbb{R} \setminus \Lambda_Q,\ \Lambda_Q = \{\lambda \in \mathbb{R} |\ Q(\lambda) = 0\}$ *(P, Q polinomok) racionális törtfüggvényt* ***valódi racionális tört****nek nevezzük, ha* $\deg P < \deg Q$*. (Ha* $\deg P \geq \deg Q$*, akkor a függvényt* ***racionális áltört****nek hívjuk.)*

Ha $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} (x \in \mathbb{R} \setminus \Lambda_Q)$ egy racionális áltört, akkor P-n Q-val maradékos osztást végezve felbontjuk:

$$P(x) = P_1(x) \cdot Q(x) + R(x), \quad \text{ahol } R = 0, \text{ vagy } \deg R < \deg Q.$$

Ekkor

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x) \cdot Q(x) + R(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

ahol $\frac{R(x)}{Q(x)}$ már valódi racionális tört.

Elemi törtfüggvények

2.lépés: A nevezőt irreducibilis (elsőfokú-, vagy negatív diszkriminánsú másodfokú-) tényezők szorzatára bontjuk.

3.lépés: A törtet elemi törtek összegére bontjuk az egyenlő együtthatók módszerével.

Elemi törtfüggvények integrálása

I. Ha f polinom, akkor tagonként integrálunk.

II. Ha $f(x) = \dfrac{A}{(x-a)^n}$, $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$, akkor az alábbi két eset lehetséges.

a) Ha $n = 1$, akkor

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{1}{x-a}dx = A\int \frac{1}{t}dt = A \cdot \ln|t| + C = A \cdot \ln|x-a| + C.$$

$$\begin{aligned} t &= x-a \\ dt &= dx \end{aligned}$$

b) Ha $n \geq 2$, akkor

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int \frac{1}{(x-a)^n}dx = A\int t^{-n}dt = A \cdot \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = -\frac{A}{n-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C.$$

$$\begin{aligned} t &= x-a \\ dt &= dx \end{aligned}$$

Elemi törtfüggvények integrálása

III Ha $f(x) = \dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}, \quad (n \in \mathbb{N}^*)$, ahol $D = b^2 - 4ac < 0$, akkor első lépésként a nevezőt teljes négyzetté alakítjuk:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \underbrace{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}_{=:\alpha^2>0}\right)$$

Elemi törtfüggvények integrálása

Ekkor

$$\int f(x)dx = \int \frac{Ax+B}{a^n\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\alpha^2\right)^n}dx = \int \frac{A\cdot\left(t-\frac{b}{2a}\right)+B}{a^n\left(t^2+\alpha^2\right)^n}dt =$$

$$\begin{aligned} t &= x+\frac{b}{2a} \\ x &= t-\frac{b}{2a} \\ dt &= dx \end{aligned}$$

$$= \frac{A}{a^n}\int \frac{t}{\left(t^2+\alpha^2\right)^n}dt + \frac{B-\frac{Ab}{2a}}{a^n}\int \frac{1}{\left(t^2+\alpha^2\right)^n}dt.$$

Ezek után a következő négy fajta integrál kiszámítására lehet szükség.

Elemi törtfüggvények integrálása

a)

$$\int \frac{1}{t^2+\alpha^2}dt = \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2}dt = \frac{1}{\alpha}\int \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{\alpha}\mathrm{arctg} u + C = \frac{1}{\alpha}\mathrm{arctg}\frac{t}{\alpha} + C$$

$$\begin{aligned} u &= \tfrac{t}{\alpha} \\ du &= \tfrac{1}{\alpha}dt \end{aligned}$$

b)

$$\int \frac{t}{t^2+\alpha^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|t^2+\alpha^2| + C$$

$$\begin{aligned} u &= t^2+\alpha^2 \\ du &= 2tdt \end{aligned}$$

c)

$$\int \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^n}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^n}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{-1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(t^2+\alpha^2)^{n-1}} + C$$

$$\begin{aligned} u &= t^2+\alpha^2 \\ du &= 2tdt \end{aligned}$$

Elemi törtfüggvények integrálása

d)

$$\int \frac{1}{(t^2+\alpha^2)^n}dt \qquad = \int \frac{1}{(\alpha^2 \mathrm{tg}^2 u + \alpha^2)^n} \cdot \frac{\alpha}{\cos^2 u} du =$$

$$\begin{aligned} t &= \alpha \cdot \mathrm{tg} u \quad -\tfrac{\pi}{2} < u < \tfrac{\pi}{2} \\ dt &= \alpha \cdot \tfrac{1}{\cos^2 u} du \end{aligned}$$

$$= \int \frac{1}{\alpha^{2n-1}(1+\mathrm{tg}^2 u)^n} \cdot \frac{1}{\cos^2 u} du = \frac{1}{\alpha^{2n-1}} \int \frac{1}{\left(\frac{\cos^2 u + \sin^2 u}{\cos^2 u}\right)^n} \cdot \frac{1}{\cos^2 u} du =$$

$$= \frac{1}{\alpha^{2n-1}} \int \frac{\cos^{2n} u}{\cos^2 u} du = \frac{1}{\alpha^{2n-1}} \int \cos^{2(n-1)} u \; du$$

Az eljárás folytatására visszatérünk a trigonometrikus függvények integrálásakor.

Trigonometrikus függvények polinomjainak integrálása

I.) $\int \sin x \; dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x \; dx = \sin x + C$

II. $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \; dx \quad (n, m \in \mathbb{N})$

- i) Az $n = m = 0$ eset érdektelen, hiszen ekkor valójában nem is trigonometrikus függvényről van szó.
- ii) Ha n páratlan (m tetszőleges)
  Legyen $n = 2k+1$, ahol $k \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x \; dx = \int \sin^{2k+1} x \cdot \cos^m x dx = \int \sin^{2k} x \cdot \cos^m x \cdot \sin x \; dx =$$

$$= \int (\sin^2 x)^k \cdot \cos^m x \cdot \sin x \; dx = \int (1 - \cos^2 x)^k \cdot \cos^m x \cdot \sin x dx = -\int (1 - t^2)^k \cdot t^m dt$$

$$\begin{aligned} t &= \cos x \\ dt &= -\sin x dx \end{aligned}$$

Ezzel a feladatot egy polinom integrálására vezettük vissza.

iii) Ha m páratlan (n tetszőleges)

Legyen $m = 2\ell + 1$, ahol $\ell \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x \; dx = \int \sin^n x \cdot \cos^{2\ell+1} x \; dx =$$

$$= \int \sin^n x \cdot \cos^{2\ell} x \cdot \cos x \; dx = \int \sin^n x \cdot (\cos^2 x)^\ell \cdot \cos x \; dx =$$

$$= \int \sin^n x \cdot (1 - \sin^2 x)^\ell \cdot \cos x \; dx = \int u^n \cdot (1 - u^2)^\ell du$$

$$\begin{aligned} u &= \sin x \\ du &= \cos x \; dx \end{aligned}$$

Ezzel a feladatot most is egy polinom integrálására vezettük vissza.

Trigonometrikus függvények polinomjainak integrálása

iv) Ha n és m mindegyike páros, azaz $n = 2k$ és $m = 2\ell$, ahol $k, \ell \in \mathbb{N}$ és nem mindegyik 0.
Ehhez a jól ismert addíciós képletből és a trigonometrikus Pitagorasz tételből ún. linearizáló formulák vezethetők le:

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ 1 &= \cos^2 x + \sin^2 x \end{aligned}$$

A fenti egyenletrendszerből $\cos^2 x$-t illetve $\sin^2 x$-t kifejezve:

Linearizáló formulák

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \qquad x \in \mathbb{R} \\ \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Trigonometrikus függvények polinomjainak integrálása

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x \; dx = \int \sin^{2k} x \cdot \cos^{2\ell} x \; dx = \int (\sin^2 x)^k \cdot (\cos^2 x)^\ell dx =$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^\ell dx = \ldots$$

Megmutatható, hogy véges sok lépésben
$\displaystyle\int \cos^m ax \; dx \quad (a \in \mathbb{Z}^+, m \in \mathbb{N} \text{ páratlan})$ integrálására vezethető a probléma.

Megjegyzés

Parciális integrálással rekurziós formula adható erre az esetre.

III. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^n x}dx$ és $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^n x}dx$ alakú integrálok

i) Ha $n = 2k \quad k \in \mathbb{N}^*$

$$\int \frac{1}{\sin^n x}dx = \int \frac{1}{\sin^{2k} x}dx = \int \frac{1}{\sin^{2k-2} x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}dx =$$

$$= \int (1 + \mathrm{ctg}^2 x)^{k-1} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\int (1 + t^2)^{k-1} dt.$$

$$\begin{aligned} t &= \mathrm{ctg} x \quad x \in (0, \pi) \\ dt &= \frac{-1}{\sin^2 x}dx \end{aligned}$$

Ezzel a feladatot egy polinom integrálására vezettük vissza.

Trigonometrikus függvények racionális függvényeinek integrálása

Hasonlóan járhatunk el $\int \frac{1}{\cos^n x} dx$ esetén is:

$$\int \frac{1}{\cos^n x} dx = \int \frac{1}{\cos^{2k} x} dx = \int \frac{1}{\cos^{2k-2} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)^{k-1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \right)^{k-1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \int \left(1 + \mathrm{tg}^2 x \right)^{k-1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + u^2)^{k-1} du.$$

$$\begin{array}{rcl} u & = & \mathrm{tg} x \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ du & = & \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{array}$$

Ezzel ezt a feladatot is egy polinom integrálására vezettük vissza.

Trigonometrikus függvények racionális függvényeinek integrálása

i) Ha $n = 2k+1 \quad k \in \mathbb{N}$

$$\int \frac{1}{\sin^n x} dx = \int \frac{1}{\sin^{2k+1} x} dx = \int \frac{\sin x}{(\sin^2 x)^{k+1}} dx = \int \frac{\sin x}{(1-\cos^2 x)^{k+1}} dx =$$

$$= -\int \frac{1}{(1-t^2)^{k+1}} dt \qquad \begin{aligned} t &= \cos x \\ dt &= -\sin x dx \end{aligned}$$

A feladatot ezzel egy racionális tört integrálására vezettük.

Hasonlóan:

$$\int \frac{1}{\cos^n x} dx = \int \frac{1}{\cos^{2k+1} x} dx = \int \frac{\cos x}{(\cos^2 x)^{k+1}} dx = \int \frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)^{k+1}} dx =$$

$$= \int \frac{1}{(1-t^2)^{k+1}} dt \qquad \begin{aligned} t &= \sin x \\ dt &= \cos x dx \end{aligned}$$

Ezzel ezt a feladatot is egy racionális tört integrálására vezettük.

Megjegyzés

Parciális integrálással rekurziós formula adható.

Trigonometrikus függvények racionális függvényeinek integrálása

IV) $\mathrm{tg}x$, vagy $\mathrm{ctg}x$ racionális tört-függvényeinek integrálása

$$\int \mathcal{R}(\mathrm{tg}x)dx = \int \mathcal{R}(t) \cdot \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$\begin{aligned} t &= \mathrm{tg}x \quad x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \\ x &= \mathrm{arctg}t \\ dx &= \tfrac{1}{1+t^2}dt \end{aligned}$$

Így egy racionális tört-függvényt kell integrálnunk.

$$\int \mathcal{R}(\mathrm{ctg}x)dx = \int \mathcal{R}(y) \cdot \frac{-1}{1+y^2}dy.$$

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{ctg}x \quad x \in (0, \pi) \\ x &= \mathrm{arcctg}y \\ dx &= \tfrac{-1}{1+y^2}dy \end{aligned}$$

Így egy racionális tört-függvényt kell integrálnunk.

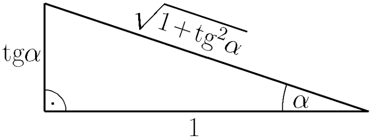
Trigonometrikus függvények racionális függvényeinek integrálása

V) $\sin x$ és $\cos x$ racionális tört-függvényeinek integrálása

$$\int \mathcal{R}(\sin x,\ \cos x)dx \ominus.$$

$$\begin{aligned} t &= \operatorname{tg}\tfrac{x}{2} \qquad x\in(-\pi,\pi) \\ x &= 2\operatorname{arctg} t \\ dx &= \tfrac{2}{1+t^2}dt \end{aligned}$$

$\sin x$ és $\cos x$ átírásához tekintsük a következő ábrát:



$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

Trigonometrikus függvények racionális függvényeinek integrálása

Az addíciós összefüggések alapján:

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{2\cdot\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}\\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha-\sin^2\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}.\end{aligned}$$

$\alpha = \frac{x}{2}$ esetén

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{2\cdot\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}\\ \cos x &= \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.\end{aligned}$$

Így

$$\ominus \int \mathcal{R}\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}dt.$$

Azaz újfent elég egy racionális tört-függvényt integrálni.

Trigonometrikus függvények racionális függvényeinek integrálása

Ezeket az összefüggéseket megkaphatjuk pusztán az addíciós képletek és a négyzetes összefüggés (trigonometrikus Pitagorasz-tétel) alkalmazásával:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = 2\mathrm{tg}\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} =$$

$$= \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\frac{\sin^2 x2+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2} =$$

$$= \left(1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Trigonometrikus függvények racionális függvényeinek integrálása

Megjegyzés

Ezzel a módszerrel minden ilyen típusú integrál megoldható (a korábban tárgyalt esetek is), de nem mindig ez a célszerű út.

Összefoglalva $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$-es helyettesítés során az alábbiak igazak:

$$\begin{aligned} t &= \mathrm{tg}\frac{x}{2} \quad x \in (-\pi, \pi) \\ dx &= \frac{2}{1+t^2}dt \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

Trigonometrikus függvények racionális függvényeinek integrálása

VI) Az előző típusba tartozó integrálok esetén, ha $\mathcal{R}(\sin x,\ \cos x) = \mathcal{R}(-\sin x,\ -\cos x)$, akkor az $y = \mathrm{tg} x$-es helyettesítés is célravezető és egyszerűbb eredményt ad. Ilyenkor

$$\cos^2 x = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x = \mathrm{tg}^2 x \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{y^2}{1+y^2}$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = \mathrm{tg} x \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{y}{1+y^2}$$

Trigonometrikus függvények racionális függvényeinek integrálása

Összefoglalva, a helyettesítés során az alábbiak igazak:

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{tg} x \quad x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \\ dx &= \frac{1}{1+y^2} dy \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{y^2}{1+y^2} \\ \cos^2 x &= \frac{1}{1+y^2} \\ \sin x \cdot \cos x &= \frac{y}{1+y^2} \end{aligned}$$

Megjegyzés

A $\mathcal{R}(\sin x,\ \cos x) = \mathcal{R}(-\sin x,\ -\cos x)$ feltétel a gyakorlatban annyit jelent, hogy mind a $\sin x$, mind pedig a $\cos x$ hatványai az integrandusban páros kitevősek és a vegyes szorzatok esetén a kitevők összege páros.

Irracionális függvények integrálása

I.) x és $\sqrt[n]{x}$ racionális tört-függvényeinek integrálása

$$\int \mathcal{R}(x,\ \sqrt[n]{x})dx = \int \mathcal{R}(t^n,\ t)n \cdot t^{n-1}dt,$$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt[n]{x} \\ x &= t^n \\ dx &= n \cdot t^{n-1}dt \end{aligned}$$

Ezzel racionális tört integrálására vezettük vissza a problémát.

II.) Az $\int \mathcal{R}(x,\ \sqrt[n_1]{x},\ \sqrt[n_2]{x}, \ldots,\ \sqrt[n_k]{x})dx$ alakú integrálok esetén legyen $n := [n_1; n_2; \ldots; n_k]$, ahol $[a; b]$ az a és b számok legkisebb közös többszöröse, ekkor a $t = \sqrt[n]{x}$ helyettesítés célravezető.

Irracionális függvények integrálása

Kalkulus II előadás

Király Balázs

Trigonometrikus függvények II.

Irracionális függvények

III. x és $\sqrt[n]{ax+b}$ racionális tört-függvényeinek integrálása

$$\int \mathcal{R}(x,\ \sqrt[n]{ax+b})dx = \int \mathcal{R}\left(\frac{t^n-b}{a},\ t\right)\cdot\frac{n}{a}\cdot t^{n-1}dt,$$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt[n]{ax+b} \\ t^n &= ax+b \\ \frac{t^n-b}{a} &= x \\ \frac{n}{a}\cdot t^{n-1}dt &= dx \end{aligned}$$

így most is egy racionális törtet kell integrálni.

IV. Az $\int \mathcal{R}(x,\ \sqrt[n_1]{ax+b},\ \sqrt[n_2]{ax+b},\ldots,\ \sqrt[n_k]{ax+b})dx$ alakú integrálok esetén legyen $n := [n_1;n_2;\ldots;n_k]$, ahol $[a;b]$ az a és b számok legkisebb közös többszöröse, ekkor a $t = \sqrt[n]{ax+b}$ helyettesítés célravezető.

Irracionális függvények integrálása

Kalkulus II előadás

Király Balázs

Trigonometrikus függvények II.

Irracionális függvények

V.) x és $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ racionális tört-függvényeinek integrálása

$$\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \qquad ,$$

$$\begin{aligned}
t &= \sqrt[n]{\tfrac{ax+b}{cx+d}} \\
t^n \cdot (cx+d) &= ax+b \\
x \cdot (t^n c - a) &= b - dt^n \\
x &= \tfrac{b-dt^n}{t^n c - a} \\
dx &= \tfrac{-ndt^{n-1}\cdot(t^n c-a)-cnt^{n-1}\cdot(b-dt^n)}{(ct^n-a)^2} dt
\end{aligned}$$

$$= \int \mathcal{R}\left(\frac{b-dt^n}{t^n c - a}, t\right) \cdot \frac{-ndt^{n-1}\cdot(t^n c - a) - cnt^{n-1}\cdot(b-dt^n)}{(ct^n-a)^2} dt$$

Azaz most is egy racionális törtfüggvényt kell integrálni.

Irracionális függvények integrálása

VI. Az $\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ alakú integrálok esetén legyen legyen $n := [n_1; n_2; \dots; n_k]$, ahol $[a; b]$ az a és b számok legkisebb közös többszöröse, ekkor a $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ helyettesítés célravezető.

VII. Az $\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ alakú integrálok esetén a másodfokú kifejezés főegyűtthatójától és diszkriminánsától függően a teljes-négyzetté alakítás és helyettesítés után a következő három integrál valamelyikéhez jutunk.

Irracionális függvények integrálása

a) $a < 0,\ D > 0$

$$\int \sqrt{1-t^2}dt = \int \sqrt{1-\sin^2 u} \cdot \cos u \; du =$$

$$\begin{aligned} t &= \sin u \quad -\tfrac{\pi}{2} \le u \le \tfrac{\pi}{2} \\ dt &= \cos u \; du \end{aligned}$$

$$= \int \sqrt{\cos^2 u} \cdot \cos u \; du = \int |\cos u| \cdot \cos u \; du =$$

$$-\tfrac{\pi}{2} \le u \le \tfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos u \ge 0$$

$$= \int \cos^2 u \; du = \ldots$$

Ezzel a feladatot egy korábban tárgyalt problémára vezettük vissza.

b) $a > 0,\ D < 0$

$$\int \sqrt{1+t^2}\,dt \qquad = \int \sqrt{1+\mathrm{tg}^2 u} \cdot \frac{1}{\cos^2 u} du =$$

$$\begin{aligned} t &= \mathrm{tg} u \quad -\tfrac{\pi}{2} < u < \tfrac{\pi}{2} \\ dt &= \tfrac{1}{\cos^2 u} du \end{aligned}$$

$$= \int \sqrt{\frac{1}{\cos^2 u}} \cdot \frac{1}{\cos^2 u} du = \underbrace{\int \frac{1}{|\cos u|} \cdot \frac{1}{\cos^2 u} du}_{-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos u > 0} =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^3 u} du = \ldots$$

Ezzel a feladatot egy korábban tárgyalt problémára vezettük vissza.

Irracionális függvények integrálása

c) Az $a > 0,\ D > 0$ esetben úgynevezett *Euler-helyettesítés*t használunk.

$$\left.\begin{array}{rcl} \sqrt{ax^2+bx+c} & = & \sqrt{a}x+t \\ ax^2+bx+c & = & ax^2+2\sqrt{a}xt+t^2 \\ x(b-2\sqrt{a}t) & = & t^2-c \\ x & = & \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t} \\ dx & = & \frac{2t(b-2\sqrt{a}t)+(t^2-c)2\sqrt{a}}{(b-2\sqrt{a}t)^2}dt \end{array}\right\}$$

Így

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{ax^2+bx+c} & = & \sqrt{a}\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}+t \\ x & = & \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t} \\ dx & = & \frac{2t(b-2\sqrt{a}t)+(t^2-c)2\sqrt{a}}{(b-2\sqrt{a}t)^2}dt \end{array}$$

Ezzel a feladatot racionális tört integrálására vezettük.

Intervallum felosztása

Legyen $\mathcal{I} := [a, b]$ véges, zárt intervallum.

Definíció

*A τ halmazt az $\mathcal{I} := [a, b]$ intervallum egy **felosztás**ának nevezzük, ha*

i) $\tau \subseteq \mathcal{I}$,

ii) τ *véges halmaz,*

iii) $a, b \in \tau$.

Jelölés: $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$.

Az $\mathcal{I}$ intervallum felosztásainak halmazát $\mathcal{F}(\mathcal{I})$-vel jelöljük.

Felosztás finomsága

Definíció

*Legyen $\tau \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ az $\mathcal{I}$ intervallum egy felosztása. A τ felosztás **finomságán** a*

$$\|\tau\| := \max_{i=1}^{n}\{x_i - x_{i-1}\}$$

számot értjük.

Megjegyzés

A felosztás finomsága tehát a felosztással létrehozott $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumok hosszainak maximuma

Alsó- és felső- közelítő összeg

Definíció

Legyen $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ *egy korlátos függvény és* $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ *az* $\mathcal{I}$ *intervallum egy felosztása. Jelölje*

$$\begin{aligned} m_i &:= \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}, \quad i = 1, \ldots, n \\ M_i &:= \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}, \quad i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Ekkor a

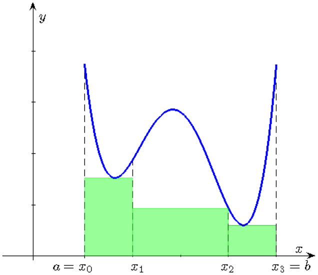
$$S(f, \tau) := \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

összeget a függvény, τ *felosztáshoz tartozó* ***felső közelítő összegének****, a*

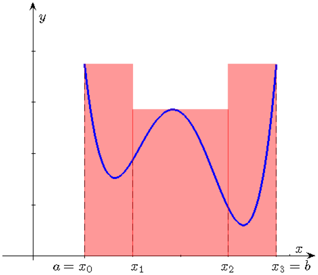
$$s(f, \tau) := \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

összeget pedig a függvény, τ *felosztáshoz tartozó* ***alsó közelítő összegének*** *nevezzük.*

Alsó- és felső- közelítő összeg



$s(f,\tau)$



$S(f,\tau)$

Megjegyzés

Mivel $m_i \leq M_i$ minden i index esetén, ezért bármely τ felosztás mellett $s(f,\tau) \leq S(f,\tau)$.

Felosztás finomítása és a közelítő összegek

Definíció

Legyen $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ugyanazon intervallum két felosztása. Akkor mondjuk, hogy a τ_2 felosztás a τ_1 felosztás ***finomítása****, ha annak minden osztópontját tartalmazza, azaz ha $\tau_1 \subset \tau_2$.*

Tétel

a) *Ha $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ és $\tau_1 \subset \tau_2$, akkor*

$$s(f, \tau_1) \leq s(f, \tau_2) \quad \text{és} \quad S(f, \tau_1) \geq S(f, \tau_2),$$

azaz a felosztás finomításával az alsó közelítő összeg nem csökken, a felső közelítő összeg pedig nem növekszik.

b) *Bármely két $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ felosztás esetén*

$$s(f, \tau_1) \leq S(f, \tau_2).$$

Darboux-féle alsó- és felső integrál

Következmény

A $\{s(f,\tau),\ \tau \in \mathcal{F}(\mathcal{I})\}$ számhalmaz felülről korlátos, míg a $\{S(f,\tau),\ \tau \in \mathcal{F}(\mathcal{I})\}$ számhalmaz alulról korlátos.

Definíció

Legyen f az $\mathcal{I}=[a,b]$ zárt intervallumon korlátos függvény. Az

$$I_*(f) := \sup\{s(f,\tau):\ \tau \in \mathcal{F}(\mathcal{I})\}$$

*értéket az f **Darboux-féle alsó integráljának**, az*

$$I^*(f) := \inf\{S(f,\tau):\ \tau \in \mathcal{F}(\mathcal{I})\}$$

*értéket az f **Darboux-féle felső integráljának** nevezzük.*

Riemann-integrálhatóság, A Riemann integrál geometriai jelentése

Definíció

Akkor mondjuk, hogy az f függvény az $\mathcal{I} = [a, b]$ intervallumon ***Riemann-integrálható****, ha $I_*(f) = I^*(f) =: I$. Ekkor az I számot az f függvény* ***Riemann-integrál****jának nevezzük és $\int\limits_a^b f(x)dx := I$ jelölést használjuk.*

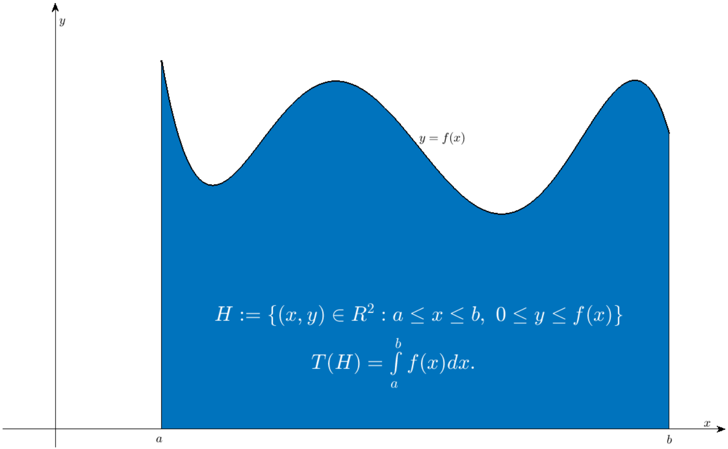
Definíció

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ és f Riemann integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor a

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

halmaznak létezik területe és $T(H) = \int\limits_a^b f(x)dx$.

A Riemann integrál geometriai jelentése



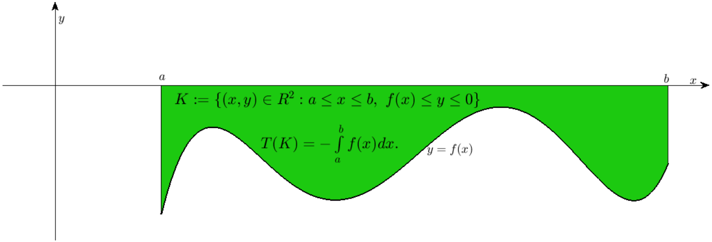
A Riemann integrál geometriai jelentése

Definíció

Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}_0^-$ *és* f *Riemann integrálható az* $[a,b]$ *intervallumon, akkor a*

$$K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq 0\}$$

halmaznak létezik területe és $T(K) = -\int\limits_a^b f(x)dx$.



Riemann-közelítőösszeg

Definíció

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény és $\tau \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása, amelyre $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$. Legyen továbbá

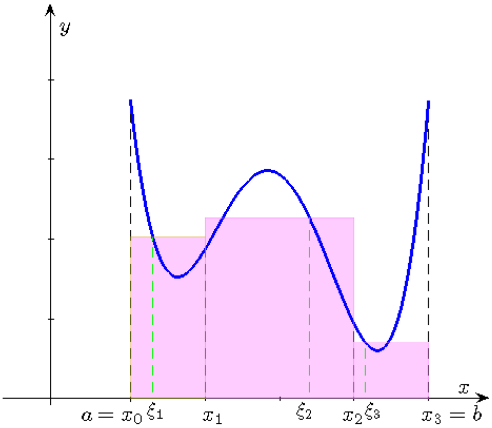
$$A_\tau := \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \mid x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i,\ i = 1,2, \ldots, n\}$$

*úgynevezett **közbeeső pontok rendszere**. Ekkor a*

$$\sigma(f, \tau, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}), \quad \tau \in \mathcal{F}(\mathcal{I}), \xi \in A_\tau$$

*számot az f függvény τ, ξ paraméterpárhoz tartozó **Riemann-közelítőösszegének** nevezzük.*

Riemann-közelítőösszeg



$$\sigma(f, \tau, \xi)$$

Riemann-közelítőösszeg

Definíció

Akkor mondjuk, hogy a $\tau_0 \subseteq \tau_1 \subseteq \ldots \subseteq \tau_k \subseteq \ldots$ *felosztás-sorozat minden határon túl finomodó, ha bármely* $\varepsilon > 0$ *esetén létezik* k_0 *index, hogy* $\|\tau_{k_0}\| < \varepsilon$.

Tétel

Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható, ha* $\sigma(f, \tau, \xi)$ *közelítő összegek sorozata a felosztás minden határon túl való finomítása mellett a* ξ *közbeeső pontok rendszer választásától függetlenül ugyanahhoz a* I *számhoz tart.*

A Riemann-integrálhatóság feltételei

Tétel (szükséges feltétel)

Ha f Riemann-integrálható, akkor korlátos.

Tétel (elégséges feltételek)

i) *A véges zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény Riemann-integrálható.*

ii) *A véges zárt intervallumon értelmezett korlátos függvény Riemann-integrálható, ha legfeljebb véges sok szakadása van.*

iii) *A véges zárt intervallumon értelmezett korlátos és monoton függvény Riemann-integrálható.*

A Riemann-integrálhatóság feltételei

Következmény

Ha az f függvény értékét az intervallumban véges sok helyen megváltoztatjuk, akkor az sem az integrálhatóságot, sem pedig az integrál értékét nem változtatja meg.

Megjegyzés

Például a Dirichlet-függvény nem integrálható a $[0,\ 1]$ intervallumon.

$$D(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,\ 1], \\ 0, & x \in [0,\ 1] \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Mivel bármely részintervallumban van racionális szám, ezért minden $M_i = 1$ és mivel minden részintervallumban van irracionális szám, ezért minden $m_i = 0$. Így a felső Darboux-integrál 1, az alsó Darboux-integrál pedig 0. A függvény korlátos, de végtelen sok szakadási helye van.

A határozott integrál tulajdonságai

Tétel

Legyen az f függvény az $[a, b]$ intervallumon integrálható és c tetszőleges valós szám, ekkor a $c \cdot f$ függvény is integrálható az $[a, b]$ intervallumon és

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Tétel

Ha az f és a g függvények az $[a, b]$ intervallumon integrálhatók, akkor az $f + g$ függvény is integrálható az $[a, b]$ intervallumon és

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

A határozott integrál tulajdonságai

Tétel

Ha az f függvény az $[a, b]$ intervallumon integrálható, akkor annak bármely részintervallumán is integrálható.

Tétel (intervallum szerinti additivitás 1.)

Ha az f függvény az $[a, b]$ intervallumon integrálható és $a < c < b$, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Tétel (intervallum szerinti additivitás 2.)

Ha az f függvény az $[a, c]$ és $[c, b]$ intervallumokon integrálható, akkor integrálható az $[a, b]$ intervallumon és

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

A határozott integrál tulajdonságai

Tétel

Ha az f függvény az $[a,b]$ intervallumon integrálható és $f(x) \geq 0$ minden $x \in [a,b]$ esetén, akkor

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Tétel

Ha az f és a g függvények az $[a,b]$ intervallumon integrálhatók és $f(x) \leq g(x)$ minden $x \in [a,b]$ esetén, akkor

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

A határozott integrál tulajdonságai

Tétel

Legyen f függvény az $[a,b]$ intervallumon integrálható, ekkor

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Tétel

Legyen f függvény az $[a,b]$ intervallumon integrálható, továbbá $m := \inf\{f(x) \mid a \le x \le b\}$ és $M := \sup\{f(x) \mid a \le x \le b\}$, ekkor

$$m \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M \cdot (b-a).$$

Az integrálszámítás középérték-tétele

Tétel (Az integrálszámítás középérték-tétele)

Ha az f függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon, akkor létezik olyan $\xi \in [a,b]$ hely, hogy

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b-a).$$

Integrálfüggvény

Definíció

Legyen f függvény az $[a,b]$ intervallumon integrálható. Értelmezzük a F függvényt a következőképpen:

$$\mathcal{D}_F = [a,b], \quad F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt.$$

Ekkor a $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt a f függvény ***integrálfüggvényének*** *nevezzük.*

Tétel

Ha a f függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon, akkor a $F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt$ integrálfüggvény az $[a,b]$ intervallumon differenciálható és $F' = f$.

Megjegyzés

Az előző tétel alapján nyilvánvaló, hogy az integrálfüggvény egy primitív függvény.

Tétel (Newton-Leibniz formula)

Legyen az f függvény integrálható az $[a, b]$ intervallumon. Ha az f függvénynek létezik az $[a, b]$ intervallumon F primitív függvénye, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Integrálási szabályok határozott integrálra

Tétel (Helyettesítéses integrálás szabálya határozott integrálra)

Legyen a $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *függvény folytonos* $[a,b]$*-n, differenciálható* (a,b)*-n és a* φ' *deriváltfüggvény legyen integrálható az [a,b]-n, továbbá* f *legyen folytonos a* $\varphi([a,b])$ *intervallumon. Ekkor*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du = \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx.$$

Integrálási szabályok határozott integrálra

Tétel (Parciális integrálás szabálya határozott integrálra)

Legyen f és g függvény az $[a,b]$ intervallumon differenciálható és f', g' függvények legyenek Riemann-integrálhatók az $[a,b]$-n. Ekkor

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)\cdot g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx.$$

Improprius integrál

A Riemann-integrálhatóság szükséges feltételein (véges intervallumon értelmezett, korlátos függvény) próbálunk lazítani. Így a következő esetekhez jutunk:

- Végtelen intervallumon értelmezett függvények integrálása
  - $\int_a^\infty f(x)\,dx$
  - $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$
  - $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$
- Nem korlátos függvény integrálása
  - A függvény nem korlátos a bal végpont közelében
  - A függvény nem korlátos a jobb végpont közelében
  - Az intervallum belsejében található egy pont, melynek környezetében a függvény nem korlátos

Improprius integrál

Definíció

Legyen $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely integrálható minden $[a, x]$ intervallumon, ahol $x > a$. Azt mondjuk, hogy az

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

***improprius integrál konvergens**, ha létezik a*

$$\lim_{\beta\to\infty} \int_a^\beta f(x)dx$$

véges határérték. Ekkor definíció szerint

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{\beta\to\infty} \int_a^\beta f(x)dx.$$

Improprius integrál

Definíció

Legyen $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely integrálható minden $[x, b]$ intervallumon, ahol $x < b$. Azt mondjuk, hogy az

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$$

***improprius integrál konvergens**, ha létezik a*

$$\lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{b} f(x)dx$$

véges határérték. Ekkor definíció szerint

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx := \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{b} f(x)dx.$$

Improprius integrál

Definíció

Ha az f függvény integrálható minden véges $[x,y]$ intervallumon és létezik a véges

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\lim_{\beta\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

határérték, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{\alpha\to-\infty}\lim_{\beta\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Definíció

Legyen $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ nem korlátos függvény az a pont környezetében. Tegyük fel, hogy bármely $x \in (a, b]$ esetén f integrálható az [x,b] intervallumon. Akkor mondjuk, hogy az

$$\int_a^b f(x)dx$$

***improprius integrál konvergens**, ha létezik a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

véges határérték. Ekkor definíció szerint

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Improprius integrál

Definíció

Legyen $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ nem korlátos függvény a b pont környezetében. Tegyük fel, hogy bármely $x \in [a,b)$ esetén f integrálható az [a,x] intervallumon. Akkor mondjuk, hogy az

$$\int_a^b f(x)dx$$

***improprius integrál konvergens**, ha létezik a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

véges határérték. Ekkor definíció szerint

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Megjegyzés

Ha az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *függvény valamely* $c\in(a,b)$ *belső pont környezetében nem korlátos, akkor az integrál intervallum szerinti additivitását kihasználva két, az előző definíciók alapján számolható improprius integrál összegére bontható az*

$$\int_a^b f(x)dx$$

improprius integrál:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

Területszámítás

Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ és f Riemann integrálható az $[a,b]$ intervallumon, akkor az f függvény $[a,b]$ intervallum fölé eső darabja, az x -tengely és az $x = a$ illetve az $x = b$ egyenesek által határolt síkidom területe, a korábbi definíció alapján:

$$T = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}_0^-$ és f Riemann integrálható az $[a,b]$ intervallumon, akkor az f függvény $[a,b]$ intervallum fölé eső darabja, az x -tengely és az $x = a$ illetve az $x = b$ egyenesek által határolt síkidom területe, a korábbi definíció alapján:

$$T = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Területszámítás

Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény az $[a,b]$ intervallumban előjelet vált és f Riemann integrálható az $[a,b]$ intervallumon, akkor az f függvény $[a,b]$ intervallum fölé eső darabja, az x -tengely és az $x = a$ illetve $x = b$ egyenesek által határolt síkidom területe, az integrál intervallum szerinti additivitása alapján, kiszámítható az előző két típusba eső területek összegeként.

Ha $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvények az $[a,b]$ intervallumon Riemann integrálhatók és $f(x) \leq g(x), \ (x \in [a,b])$, akkor a két függvény $[a,b]$ intervallum fölé eső darabja, az $x = a$ és az $x = b$ egyenesek által határolt síkidom területe:

$$T = \int_a^b g(x) - f(x) dx.$$

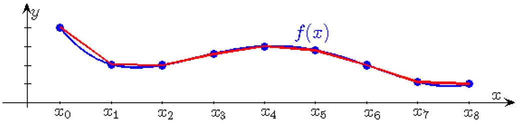
Görbe ívhossza

Definíció

*Folytonos görbe **ívhosszán** értjük a görbéhez írt törött vonalak hosszának szuprémumát, feltéve, hogy ez létezik. Legyen adott a görbe az $[a, b]$ intervallumon az $y = f(x)$ egyenlettel, ahol $f(x)$ folytonosan differenciálható $[a, b]$-n. Ekkor a görbe ívhossza:*

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

*Ha a görbének létezik ívhossza, akkor **rektifikálható**nak nevezzük.*



Forgástest térfogata

Tétel

Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ folytonos függvény grafikonjának x-tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogata:

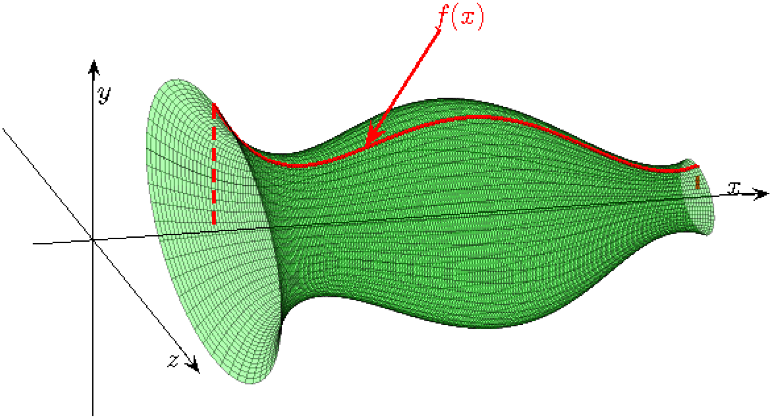
$$V_x = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)dx.$$

Tétel

Az $f : [a,b] \to \mathbb{R},\ (a,b > 0)$ kölcsönösen egyértelmű, folytonos függvény grafikonjának y-tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogata:

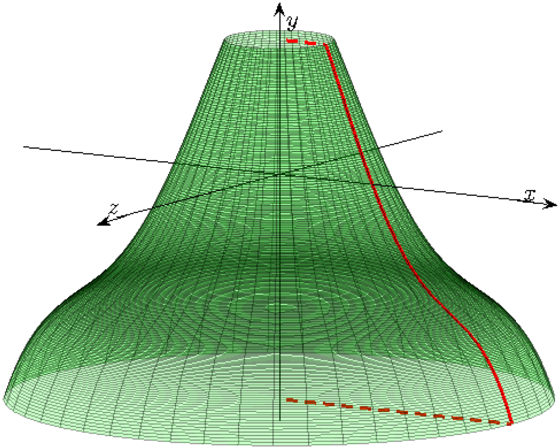
$$V_y = \pi \cdot \int_{f(a)}^{f(b)} \bar{f}^2(y)dy.$$

Forgástest térfogata



x-tengely körüli megforgatással nyert forgástest

Forgástest térfogata



y-tengely körüli megforgatással nyert forgástest

Forgásfelület felszíne

Tétel

Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ folytonosan differenciálható függvény grafikonjának x-tengely körüli megforgatásával nyert forgásfelület felszíne:

$$A = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Differenciálegyenletek

Definíció

Az olyan egyenletet, melyben az ismeretlen egy függvény ***függvényegyenlet****nek nevezzük.*

Definíció

Az függvényegyenletet, melyben az ismeretlen függvény deriváltja, vagy deriváltjai szerepelnek ***differenciálegyenlet****nek nevezzük.*

Differenciálegyenletek osztályozása

Definíció

*Ha az ismeretlen függvény egyváltozós valós függvény, akkor a differenciálegyenletet **közönséges differenciálegyenlet**nek nevezzük.*

Definíció

*Ha az ismeretlen függvény többváltozós valós függvény, akkor a differenciálegyenletet **parciális differenciálegyenlet**nek nevezzük.*

Megjegyzés

A félév során csak közönséges differenciálegyenletekkel foglalkozunk.

Differenciálegyenletek osztályozása

Definíció

*A differenciálegyenletet **lineáris**nak nevezzük, ha az egyenletben mind az ismeretlen függvény, mind annak deriváltjai csak az első hatványon szerepelnek és sem ezek szorzatai sem pedig irracionális vagy transzcendens függvényei nem fordulnak elő.*

Megjegyzés

Azaz a DE nem-lineáris, ha következők közül bármelyik szerepel:

- *Az ismeretlen függvény, vagy bármely deriváltjának magasabb hatványa (például y^2)*
- *Az ismeretlen függvény és valamelyik deriváltjának szorzata (például $y \cdot y'$)*
- *Az ismeretlen függvény, vagy bármely deriváltjának irracionális vagy transzcendens függvénye (például $\sqrt{y}$ vagy $\sin y'$)*

Differenciálegyenletek osztályozása

Definíció

*A differenciálegyenletet n**-edrendűnek** nevezzük, ha az ismeretlen függvény deriváltjai közül az egyenletben az n-edik derivált a legmagasabbrendű.*

Definíció

*A differenciálegyenletet **homogénnak** nevezzük, ha nincs benne konstans illetve olyan tag, amely csak a független változótól függ. (Azaz a differenciál egyenlet minden tagja tartalmazza az ismeretlen függvényt, vagy annak valamelyik deriváltját.) Ha a differenciálegyenlet nem homogén, akkor **inhomogénnak** nevezzük.*

Differenciálegyenletek megoldásai

Definíció

*A differenciálegyenlet **megoldása** olyan függvény, amely a deriváltjaival együtt kielégíti a differenciálegyenletet.*

Definíció

*Az n-edrendű differenciálegyenlet **általános megoldása** olyan függvény, amely a deriváltjaival együtt kielégíti a differenciálegyenletet és pontosan n darab, egymástól független szabad paramétert tartalmaz.*

Definíció

*Az n-edrendű differenciálegyenlet **partikuláris megoldása** egy olyan függvény, amely a deriváltjaival együtt kielégíti a differenciálegyenletet és legfeljebb $n-1$ darab, egymástól független szabad paramétert tartalmaz.*

Differenciálegyenletek megoldásai

Definíció

A differenciálegyenlet ***szinguláris megoldása*** *olyan függvény, amely a deriváltjaival együtt kielégíti a differenciálegyenletet, de nem része az általános megoldásnak.*

A kezdetiérték probléma

Definíció

*A **kezdetiérték probléma** (KÉP) egy differenciálegyenletből és egy vagy több **kezdeti feltételből** álló rendszer, melynek megoldása során a differenciálegyenlet azon partikuláris megoldásait keressük, melyek kielégítik a kezdeti feltételeket.*

Megjegyzés

A kezdeti feltételek általában megadják a keresett függvény illetve deriváltjainak értékét egy rögzített pontban. (Azaz olyan partikuláris megoldást keresünk, amely átmegy egy adott ponton. Esetleg olyat, amely a megadott pontban megadott meredekségű érintővel rendelkezik, stb.)

1. Feladat

1. Feladat

Osztályozzuk a korábban megismert szempontok alapján az alábbi differenciálegyenletet:

$$9y''' - 3y'' + 6y' + y = \frac{10}{3}\cos\frac{x}{3} + \frac{8}{3}\sin\frac{x}{3}$$

Igazoljuk, hogy az

$$y(x) = 2\sin\frac{x}{3}$$

függvény a differenciálegyenlet egyik megoldása.

1. Feladat

1. Feladat

A $9y''' - 3y'' + 6y' + y = \dfrac{10}{3}\cos\dfrac{x}{3} + \dfrac{8}{3}\sin\dfrac{x}{3}$ diff.egy.:

- Közönséges de., mert megoldásként az $y = y(x)$ egyváltozós valós függvényt keressük.
- harmadrendű, mert az y''' a szereplő legmagasabb rendű derivált.
- lineáris, mert az y ismeretlen függvénynek sem egynél magasabb kitevős hatványai, sem irracionális, vagy transzcendens függvényei **nem szerepelnek**, továbbá nem található az egyenletben az ismeretlen függvénynek és deriváltjainak egymással vett szorzatai.
- inhomogén, a $\frac{10}{3}\cos\frac{x}{3} + \frac{8}{3}\sin\frac{x}{3}$ tag miatt

1. Feladat

1. Feladat

Az $y(x) = 2\sin\frac{x}{3}$ függvény akkor megoldása a differenciálegyenletnek, ha deriváltjaival kielégíti azt.

Az egyenletben a függvény első, másod és harmadrendű deriváltja szerepel, így ezeket felírjuk:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \tfrac{2}{3}\cos\tfrac{x}{3} \\ y''(x) &= -\tfrac{2}{9}\sin\tfrac{x}{3} \\ y'''(x) &= -\tfrac{2}{27}\cos\tfrac{x}{3}, \end{aligned}$$

így valóban

$$9y''' - 3y'' + 6y' + y = -\frac{2}{3}\cos\frac{x}{3} + \frac{2}{3}\sin\frac{x}{3} + 4\cos\frac{x}{3} + 2\sin\frac{x}{3} = \frac{10}{3}\cos\frac{x}{3} + \frac{8}{3}\sin\frac{x}{3}$$

Elsőrendű szétválasztható változójú differenciálegyenletek

A következő megoldási módszereket egy-egy példán keresztül mutatjuk be.

Elsőrendű szétválasztható változójú differenciálegyenlet általános alakja

$y' = g(x) \cdot h(y)$, ahol g és h intervallumon értelmezett folytonos függvények.

$\Rightarrow \dfrac{y'}{h(y)} = g(x)$ (ha $h(y) \neq 0$)

2. Feladat

Oldjuk meg az $y' = x \cdot y$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

A differenciálegyenlet egy elsőrendű, homogén lineáris (közönséges) differenciálegyenlet, a megoldás módját tekintve pedig szétválasztható változójú.

Elsőrendű szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Megoldás :

A változók szétválasztásához y-nal kell osztanunk. Ezt csak akkor tehetjük meg, ha $y \neq 0$.

- ha $y = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow y \equiv 0$ szinguláris megoldás.
- ha $y \neq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{y} &= x \\
\int \frac{y'}{y}\,dx &= \int x\,dx \\
\int \frac{1}{y}\,dy &= \frac{1}{2}x^2 + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \\
\ln|y| &= \frac{1}{2}x^2 + C_1 \\
|y| &= e^{\frac{1}{2}x^2 + C_1} = e^{C_1} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}
\end{aligned}$$

Láttuk tehát, hogy $|y| = e^{\frac{1}{2}x^2+C_1} = e^{C_1} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

Legyen $C := \begin{cases} \pm e^{C_1} \\ 0 \end{cases}$

Ekkor

$$y = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad (C \in \mathbb{R})$$

Az $y(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ $(C \in \mathbb{R})$ alakban adott függvénysereget nevezzük a fenti differenciálegyenlet általános megoldásának.

Könnyen látható, hogy a $C = 0$ esettel beépítettük az $y \equiv 0$ szinguláris megoldást is.

3. Feladat

3. Feladat

Adjuk meg az

$$\left.\begin{array}{rcl} y'(x) & = & x \cdot y(x) \\ y(0) & = & 5 \end{array}\right\} \text{kezdetiérték probléma megoldását!}$$

Megoldás:

Először megoldjuk az $y'(x) = x \cdot y(x)$ differenciálegyenletet.

Majd az általános megoldásból kiválasztjuk azt a partikuláris megoldást, amelyre teljesül a kezdeti feltétel.

A differenciálegyenlet általános megoldását az előző feladatban már felírtuk:

$$y(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}. \qquad (C \in \mathbb{R})$$

3. Feladat

Az általános megoldás paraméterét a kezdeti feltétel felhasználásával kiküszöbölhetjük:

$$y(0) = C \cdot e^0 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad C = 5.$$

Így a kezdetiérték probléma megoldása az $y(x) = 5 \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ függvény.

Elsőrendű lineáris (inhomogén) differenciálegyenletek

Elsőrendű lineáris (inhomogén) differenciálegyenletek általános alakja

$$y' + p(x) \cdot y = q(x),$$

ahol p, q intervallumon értelmezett folytonos függvények.

A megoldás menete

- A homogén egyenlet ($Y' + p(x) \cdot Y = 0$) megoldása.$\Rightarrow$ $Y_{hom}^{\text{ált}}$ a homogén egyenlet általános megoldása
- Állandó variálásának módszere. $\Rightarrow$ y_{inh}^{part} az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása
- Belátható, hogy $y_{inh}^{\text{ált}} = Y_{hom}^{\text{ált}} + y_{inh}^{part}$

Elsőrendű lineáris (inhomogén) differenciálegyenletek

Állandó variálásának módszere.

- A homogén egyenlet általános megoldásában jelölje C a szabad paramétert.
- Minden $C \in \mathbb{R}$ választás mellett olyan függvényt kapunk, amely kielégíti a homogén egyenletet.
- Ha a $C \in \mathbb{R}$ paraméter helyett $C(x)$ x-től függő függvényt használunk, olyan függvényt kapunk, amelyre $y' + p(x) \cdot y \neq 0$
- Keressük azt a $C(x)$ függvényt, amelyre éppen $y' + p(x) \cdot y = q(x)$
- Így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását találtuk.

4. Feladat

4. Feladat

Oldjuk meg az $y' - \frac{y}{x} = x^2$ differenciálegyenletet

Megoldás :

A homogén egyenlet : $Y' - \frac{Y}{x} = 0$.

Megoldása során a változók szétválasztásához Y-nal kell osztani.

Ezt csak akkor tehetjük meg, ha $Y \neq 0$.

Ha $Y = 0 \;\Leftrightarrow\; Y' = 0 \Leftrightarrow \underbrace{Y'}_{=0} - \underbrace{\frac{Y}{x}}_{=0} = 0$

Azaz az $Y \equiv 0$ függvény a homogén egyenlet szinguláris megoldása.

4. Feladat

$$
\begin{aligned}
Y' - \frac{Y}{x} &= 0 \quad \text{Ha } Y \neq 0 \\
Y' &= \frac{Y}{x} \\
\frac{Y'}{Y} &= \frac{1}{x} \\
\int \frac{Y'}{Y}\, dx &= \int \frac{1}{x}\, dx \\
\int \frac{1}{Y}\, dY &= \ln|x| + C_1 \qquad (C_1 \in \mathbb{R}) \\
\ln|Y| &= \ln|x| + C_1 \qquad (C_1 \in \mathbb{R}) \\
|Y| &= e^{\ln|x| + C_1} = e^{C_1} \cdot e^{\ln|x|} = |x| \cdot e^{C_1}, \qquad C := \pm e^{C_1} \\
Y &= C \cdot x \qquad (C \in \mathbb{R} \setminus \{0\})
\end{aligned}
$$

A szinguláris megoldás a $C = 0$ eset megengedésével az általános megoldásba beolvasztható.

A homogén egyenlet általános megoldása: $Y_{\text{hom}}^{\text{ált}} = C \cdot x \quad (C \in \mathbb{R})$.

4. Feladat

Állandó variálásának módszere:

Keressük a megoldást $y = c(x) \cdot x$ alakban. Ekkor

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

Visszahelyettesítve az egyenletbe:

$$\begin{aligned}
\underbrace{c'(x) \cdot x + c(x)}_{y'} - \overbrace{c(x) \cdot x}^{y} \cdot \frac{1}{x} &= x^2 \\
c'(x) \cdot x &= x^2 \\
c'(x) &= x \\
c(x) = \int c'(x)\, dx &= \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + C
\end{aligned}$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{\text{inh}}^{\text{part}} = \frac{x^2}{2} \cdot x = \frac{x^3}{2} \quad \Rightarrow \quad y_{\text{inh}}^{\text{ált}} = y_{\text{inh}}^{\text{part}} + Y_{\text{hom}}^{\text{ált}} = \frac{x^3}{2} + C \cdot x \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Másodrendű lineáris homogén állandóegyütthatós differenciálegyenletek

Másodrendű lineáris homogén differenciálegyenletek általános alakja

$p(x) \cdot y'' + q(x) \cdot y' + r(x) \cdot y = 0$, ahol p, q, r intervallumon értelmezett folytonos függvények.

Másodrendű lineáris homogén **állandóegyütthatós** differenciálegyenletek általános alakja

$A \cdot y'' + B \cdot y' + C \cdot y = 0$, ahol $A, B, C \in \mathbb{R}$.

Megoldási ötlet

A megoldást $y = e^{\lambda x}$ alakban keressük. Ekkor

$$\begin{aligned} y' &= \lambda \cdot e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Másodrendű lineáris homogén állandóegyütthatós differenciálegyenletek

Megoldás

Visszahelyettesítve az egyenletbe:

$$\begin{aligned} A\cdot\lambda^2\cdot e^{\lambda x}+B\cdot\lambda\cdot e^{\lambda x}+Ce^{\lambda x} &= 0\\ e^{\lambda x}\cdot\left(A\cdot\lambda^2+B\cdot\lambda+C\right) &= 0 \end{aligned}$$

Mivel $e^{\lambda x}\neq 0$, ezért $A\cdot\lambda^2+B\cdot\lambda+C=0$ egyenlethez jutunk.

A kapott egyenlet a de. **karakterisztikus egyenlete**.

Tétel

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van (λ_1 és λ_2), akkor a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y_{ált}=C_1\cdot y_1+C_2\cdot y_2=C_1\cdot e^{\lambda_1 x}+C_2\cdot e^{\lambda_2 x}\quad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

Másodrendű lineáris homogén állandóegyütthatós differenciálegyenletek

Tétel

Ha a karakterisztikus egyenletnek egyetlen valós megoldása van (λ), akkor a

$$
\begin{aligned}
y_1 &= e^{\lambda x} \\
y_2 &= x \cdot e^{\lambda x}
\end{aligned}
$$

két lineárisan független partikuláris megoldás és így a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y_{ált} = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 = C_1 \cdot e^{\lambda x} + C_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Másodrendű lineáris homogén állandóegyütthatós differenciálegyenletek

Tétel

Ha a karakterisztikus egyenletnek nincs valós megoldása (mert $D = B^2 - 4AC < 0$), legyen:

$$\alpha := \frac{-B}{2A}, \qquad \beta := \frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x \\ y_2 &= e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x \end{aligned}$$

két lineárisan független partikuláris megoldás és így a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y_{\acute{a}lt} = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 = C_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x + C_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

5. Feladat

Oldjuk meg az $y'' + 2y' - 15y = 0$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

Keressük a megoldást $y = e^{\lambda x}$ alakban! Ekkor

$$\begin{aligned} y' &= \lambda \cdot e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve az egyenletbe:

$$\begin{aligned} \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + 2\lambda \cdot e^{\lambda x} - 15 e^{\lambda x} &= 0 \\ \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} \cdot \left(\lambda^2 + 2\lambda - 15\right) &= 0 \\ \lambda^2 + 2\lambda - 15 &= 0 \quad \text{(Karakterisztikus egyenlet)} \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} = -1 \pm 4 = \begin{aligned} \lambda_1 &= -5 \\ \lambda_2 &= 3. \end{aligned}$$

5. Feladat

Tehát a két lineárisan független partikuláris megoldás:

$$y_1 = e^{-5x} \quad y_2 = e^{3x}.$$

Az általános megoldás ezen partikuláris megoldások lineáris kombinációiként kapható:

$$y = C_1 \cdot e^{-5x} + C_2 \cdot e^{3x}. \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$