Kalkulus II előadás

1. előadás

Hatványsorok és Taylor-, Maclaurin-sorok, Taylor-formula és alkalmazásai

Király Balázs

Pécsi Tudományegyetem
Matematikai és Informatikai Intézet

2023.

A kurzus várható tematikája és időbeosztása

Külön fájlban

Dolgozatok követelmények

- 2 gyakorlati dolgozat 7. hét (03.22-23) és utolsó hét (05.10-11)
- 1 elméleti dolgozat (Vizsgaidőszakban)
- Részletes követelmények külön fájlban.

Értékelés

A félévi eredmények kialakítása

- Gyakorlati rész
  - 2 zárthelyi dolgozat
  - Elérhető maximális pont: 200
  - Elfogadva 66,5p fölött (A neptunban erre jár az aláírás)
  - Akinek ez nem sikerül 2 javítási lehetőség (ezekről részletesebben később)
- Elméleti rész
  - 25 kérdés
  - minden kérdés 5 pontos
  - Elérhető maximális pont: 125
  - Elfogadva 50p fölött

Értékelés

- Félévi jegy kialakítás
  - Összpontszám számítása: $\sum = \frac{\mathrm{Gy}}{2} + \mathrm{E}$
    (Gy A gyakorlati dolgozatokból szerzett pont és E az elméleti rész pontszáma.)
  - Elérhető maximális pont: 225
  - Elfogadva 83p fölött
  - Ponthatárok:

0p	–	83p	elégtelen(1)
83,1p	–	119p	elégséges(2)
119,1p	–	154p	közepes(3)
154,1p	–	190p	jó(4)
190,1p	–	225p	jeles(5)

Értékelés

Akik a régi háló szerint külön gyakorlati- és külön vizsga-jegyet szereznek, az alábbi ponthatárok alapján kaphatnak gyakorlati jegyet.

- Gyakorlati jegy
  - A két gyakorlati dolgozatból szerzett pont alapján
  - Elérhető maximális pont: 200
  - Elfogadva 66,5p fölött
  - Ponthatárok:

0p	–	66,5p	elégtelen(1)
66,51p	–	100p	elégséges(2)
100,1p	–	133p	közepes(3)
133,1p	–	166,5p	jó(4)
166,51p	–	200p	jeles(5)

Értékelés

Akik

- a régi háló szerint külön gyakorlati- és külön vizsga-jegyet szereznek,
- vagy korábbi teljesítésből már rendelkeznek aláírással, ezért a gyakorlati dolgozatokat nem írták meg

az alábbi ponthatárok alapján kaphatnak vizsga-jegyet.

- Vizsga-jegy
  - A Moodle 25-kérdéses vizsga-tesztje alapján
  - Elérhető maximális pont: 125
  - Elfogadva 50p fölött
  - Ponthatárok:

0p	–	50p	elégtelen(1)
50,1p	–	69p	elégséges(2)
69,1p	–	87p	közepes(3)
87,1p	–	106p	jó(4)
106,01p	–	125p	jeles(5)

Dolgozatok – Javítási lehetőségek

Gyakorlati javítások

- Valószínűleg a vizsgaidőszak első vagy második hetében.
  - A két megírt gyakorlati dolgozat egyike javítható.
    - Az új dolgozat pontja felülírja a régit.
    - Előre jelezni kell (MeetStreet jelentkezéssel), hogy melyik témát szeretné javítani
  - Összevont dolgozat a teljes félév anyagából
    - Szintén előzetes jelentkezés szükséges
    - Próbadolgozatban jelezzük, mely feladattípusokra kell koncentrálni
    - Összevont dolgozattal legfeljebb közepes(3) érdemjegy szerezhető
- **A vizsgaidőszak végén még egy gyakorlati javítás**
  - Összevont dolgozat a teljes félév anyagából

Elméleti Dolgozatok – Javítási lehetőségek

Elméleti dolgozatok

- A vizsgaidőszak minden hetében
- Moodle-teszt
- 25 kérdés – 60 perc
- Eredmény (remélhetőleg) azonnal

Irodalmak

- Elmélet
  - Az előadások diái felkerülnek a Meet Street-re (A teljesítéshez elegendő)
  - A diasor végén megtalálják az aktuális témakör elméleti kérdéseinek listáját
  - Schipp Ferenc: Analízis II.
    `http://numanal.inf.elte.hu/~schipp/Jegyzetek/ANAL_2.pdf`
  - Thomas Kalkulus
  - Bármely analízis, vagy kalkulus jegyzet használható
- Gyakorlat
  - Elérhető egy feladatgyűjtemény az alábbi linken:
    `http://tamop412a.ttk.pte.hu/files/analizis.pdf`
  - A gyakorlatvezetők által javasolt irodalmak
  - A gyakorlati dolgozatokhoz lesz próbadolgozat

Hatványsorok

Definíció

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ rögzített szám és $a = (a_n,\ n \in \mathbb{N})$ pedig egy valós számsorozat. Az ezekkel képzett

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

*formális összeget **hatványsor**nak nevezzük. Az $(a_n,\ n \in \mathbb{N})$ sorozat tagjait a hatványsor **együtthatóinak**, az $x_0 \in \mathbb{R}$ számot a hatványsor **konvergencia-középpontjának** nevezzük.*

Megjegyzés

Vegyük észre, hogy minden valós x helyettesítésével egy-egy végtelensorhoz jutunk. A továbbiakban azt fogjuk vizsgálni, milyen x-ek esetén konvergens a kapott végtelensor.

Taylor-sor, MacLaurin-sor

Definíció

Legyen az f függvény az $x_0 \in \mathbb{R}$ pont valamely környezetében végtelensokszor differenciálható, ekkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

*hatványsort x_0-körüli **Taylor-sor**nak nevezzük, ha az a_n együtthatókra teljesül, hogy*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

ahol $f^{(n)}(x_0)$ jelöli az f függvény n-edik deriváltjának x_0-beli helyettesítési értékét és $a_0 = f(x_0)$.

Definíció

*Az $x_0 = 0$ körüli Taylor-sort **MacLaurin-sornak** nevezzük.*

Hatványsorok konvergenciája

Definíció

Azon valós x-ek halmazát, melyekre a hatványsor konvergens, a hatványsor ***konvergencia tartományának*** *nevezzük.*

Megjegyzés

Vegyük észre, hogy az $x = x_0$ helyen a hatványsor szükségszerűen konvergens, azaz x_0 mindig eleme a konvergencia tartománynak.

Definíció

Legyen $\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, *ekkor az*

$$R := \begin{cases} 0, & \alpha = \infty \\ \infty, & \alpha = 0 \\ 1/\alpha, & 0 < \alpha < \infty \end{cases}$$

számot a hatványsor ***konvergenciasugarának*** *nevezzük.*

Cauchy-Hadamard tétel

Tétel (Cauchy-Hadamard tétel)

Legyen R a hatványsor konvergencia sugara. Ekkor a hatványsor a

$$K_R(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : \ |x - x_0| < R\}$$

halmaz minden pontjában abszolút konvergens, $|x - x_0| > R$ esetén pedig divergens.

Megjegyzés

Az $|x - x_0| = R$ feltétel teljesülése esetén, azaz a fenti intervallum végpontjaiban a konvergenciát külön vizsgálni kell.

Hatványsor összegfüggvénye

Definíció

Tegyük fel, hogy a hatványsor konvergenciasugara pozitív. A

$$K_R(x_0) \ni x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \in \mathbb{R}$$

függvényt a hatványsor ***összegfüggvényének*** *nevezzük.*

Definíció

Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz. Akkor mondjuk, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény ***analitikus****, ha bármely $a \in H$ pontnak van olyan környezete, amelyben az f előállítható hatványsor összegfüggvényeként.*

Taylor-polinom

Definíció

Legyen $n \in \mathbb{N}$. Az x_0 helyen n-szer differenciálható $f : H \to \mathbb{R}$ függvény x_0 ***körüli n-edik Taylor-polinomján*** *a*

$$T_n(x) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

n-edfokú polinomot értjük.

Megjegyzés

Vegyük észre, hogy a Taylor-polinom nem más, mint a Taylor-sor n-edik részletösszege.

Taylor-formula

Tétel (Taylor-formula)

Ha az f függvény az x_0 pont valamely $K_r(x_0)$ környezetében $(n+1)$-szer differenciálható, akkor minden $x \in K_r(x_0)$ pont esetén

$$f(x) = T_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}}_{R_n(x)},$$

ahol ξ az x és az x_0 közötti hely.

Definíció

*Az előző tételben bevezetett $R_n(x)$ kifejezést **n-edik Lagrange-féle maradéktagnak** nevezzük.*

Megjegyzés

Ha belátható, hogy $R_n(x)$ minden szóbajöhető x esetén „elegendően kicsi", akkor használható az $f(x) \approx T_n(x)$ közelítés.

Érintő egyenlete

Definíció

Legyen az f függvény az $a \in \mathcal{D}_f$ helyen differenciálható. Az $(a,\ f(a))$ ponton áthaladó, $f'(a)$ meredekségű egyenest az f függvény a helyhez tartozó ***érintőjének*** *nevezzük, azaz az érintő egyenlete:*

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Megjegyzés

Gondoljunk vissza a differencia-hányados és a differenciál-hányados geometriai jelentésével kapcsolatban megbeszéltekre.

A differenciálszámítás középérték-tételei, Rolle-tétel

Tétel (Rolle-tétel)

Ha az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény

i) *folytonos az $[a,b]$ zárt intervallumon*

ii) *differenciálható az (a,b) nyílt intervallumon*

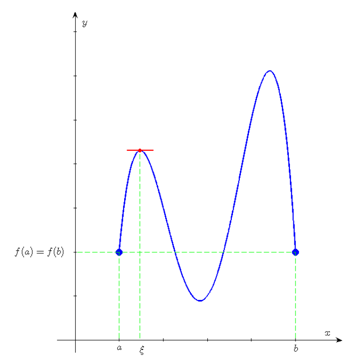
iii) *és $f(a) = f(b)$,*

akkor létezik olyan $\xi \in (a,b)$ pont ahol

$$f'(\xi) = 0.$$

Megjegyzés

Azaz ha teljesülnek a Rolle-tétel feltételei, akkor van legalább egy olyan belső pont, ahol a függvény érintője vízszintes.



A differenciálszámítás középérték-tételei, Lagrange-féle középértéktétel

Tétel (Lagrange-féle középértéktétel)

Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény

- i) *folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon*
- ii) *differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon*

akkor létezik olyan $\xi \in (a, b)$ pont ahol

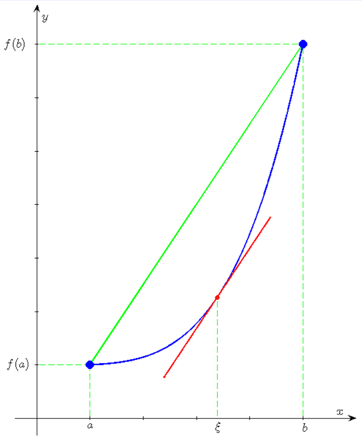
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Megjegyzés

Vegyük észre, hogy a Lagrange-féle középérték tétel az $f(a) = f(b)$ speciális esetben éppen a Rolle-tételre vezet.

Megjegyzés

Azaz ha teljesülnek a Lagrange-tétel feltételei, akkor van legalább egy olyan belső pont, ahol a függvény érintője párhuzamos az $(a, f(a))$ *és* $(b, f(b))$ *pontokon átmenő szelővel.*



A differenciálszámítás középérték-tételei, Cauchy-féle középértéktétel

Tétel (Cauchy-féle középértéktétel)

Ha az $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvények*

i) *folytonosak az* $[a, b]$ *zárt intervallumon*

ii) *differenciálhatók az* (a, b) *nyílt intervallumon*

továbbá tetszőleges $x \in (a, b)$ *esetén* $g'(x) \neq 0$, *akkor létezik olyan* $\xi \in (a, b)$ *pont ahol*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Megjegyzés

Vegyük észre, hogy a Lagrange-féle középértéktétel a Cauchy-féle középértéktétel speciális esete, ha $g(x) = x$.

Elméleti kérdések 1 téma

1. Hatványsor definíciója.
2. Taylor- és MacLaurin-sor definíciója.
3. Konvergencia tartomány definíciója.
4. Konvergenciasugár definíciója.
5. Cauchy-Hadamard-tétel
6. Összegfüggvény definíciója.
7. Analitikus függvény definíciója.
8. Taylor-polinom és Lagrange-féle maradék tag definíciója.
9. Taylor-formula és alkalmazása függvény közelítésre.
10. Érintő definíciója és egyenlete.
11. Mondja ki a Rolle-tételt.
12. Ismertesse és szemléltesse a Rolle-tétel geometriai jelentését.
13. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.

Elméleti kérdések 1 téma folytatás

14 Ismertesse és szemléltesse a Lagrange-féle középértéktétel geometriai jelentését.

15 Mondja ki a Cauchy-féle középértéktételt.

16 Ismertesse a differenciálszámítás három középértéktételének viszonyát.

Kalkulus II előadás

2. előadás
L'Hospital szabály és alkalmazásai, Szélsőérték fogalma. Szélsőérték tételek. Szöveges szélsőérték feladatok. Konvexitás, inflexiós pontok

Király Balázs

Pécsi Tudományegyetem
Matematikai és Informatikai Intézet

2023.

Logaritmikus deriválás

Legyen $g(x)$ és $h(x)$ függvény differenciálható a H halmazon, továbbá $g(x) > 0$. Ekkor $f(x) = [g(x)]^{h(x)}$ is differenciálható a H-n és $f'(x)$ az alábbi módokon határozható meg.

1. Megoldás:

Ha $g(x) > 0$, akkor $f(x) > 0$. Ekkor

$$\ln(f(x)) = \ln\left(g(x)^{h(x)}\right) = h(x) \cdot \ln(g(x))$$

Deriváljuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= h'(x) \cdot \ln(g(x)) + h(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) \\
f'(x) &= f(x) \cdot \left[h'(x) \cdot \ln(g(x)) + h(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)\right].
\end{aligned}$$

Logaritmikus deriválás

2. Megoldás:
Ugyanehhez az eredményhez jutunk, ha az

$$f(x) = e^{\ln(f(x))} = e^{\ln\left(g(x)^{h(x)}\right)} = e^{h(x)\cdot\ln(g(x))}$$

átalakításból indulunk ki. Ekkor

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{h(x)\cdot\ln(g(x))}\right)' = \\ &= \underbrace{e^{h(x)\cdot\ln(g(x))}}_{=f(x)} \cdot \left(h'(x)\cdot\ln g(x) + h(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\cdot g'(x)\right). \end{aligned}$$

Megjegyzés

A feladatok megoldása során a két módszer egyformán hatásos. A ***2. Megoldás****nak mégis van egy kis előnye, a későbbiekben a L'Hospital szabály alkalmazásakor ehhez a módszerhez meglehetősen hasonlító eljárásra van szükség.*

L'Hospital szabály

Tétel (L'Hospital szabály véges helyen „$\frac{0}{0}$” alakra)

Az f és a g függvények legyenek az x_0 valamely (esetleg féloldali) környezetében differenciálhatók és x_0-ban folytonosak, melyekre $f(x_0) = g(x_0) = 0$.
Továbbá tegyük fel, hogy létezik a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

határérték. Ekkor létezik a $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is és

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

L'Hospital szabály

Tétel (L'Hospital szabály véges helyen „$\frac{\infty}{\infty}$" alakra)

Az f és a g függvények legyenek az x_0 valamely (esetleg féloldali) környezetében differenciálhatók, melyekre

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Továbbá tegyük fel, hogy létezik a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

határérték. Ekkor létezik a $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *határérték is és*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

L'Hospital szabály

Tétel (L'Hospital szabály végtelenben)

Az f és a g függvények legyenek az differenciálhatók a (K, ∞) intervallumon és legyen

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0 \quad (vagy \ \pm\infty).$$

Továbbá tegyük fel, hogy létezik a

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

határérték. Ekkor létezik a $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ *határérték is és*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

L'Hospital szabály

Megjegyzés

Hasonló tétel mondható ki $-\infty$-ben is.

Megjegyzés

Azaz a L'Hospital szabály véges-, vagy végtelen helyen $\frac{0}{0}$, vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alak esetén alkalmazható, ha a deriváltak hányadosának határértéke kiszámolható.

L'Hospital szabály – Feladatok

Feladat

Számoljuk ki az alábbi határértékeket:

- $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{x^2-x-12}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^4}$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot \log_2 x$

Monotonitás

Definíció

Akkor mondjuk, hogy az $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ függvény az $a\in(\alpha,\beta)$ ***pontban lokálisan növekvő****, ha a-nak van olyan $K_r(a)\subseteq(\alpha,\beta)$ környezete,*

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(a), \quad \textit{ha } x\in(a-r,a),\\ f(x) &\geq f(a), \quad \textit{ha } x\in(a,a+r). \end{aligned}$$

Definíció

Akkor mondjuk, hogy az $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ függvény az $a\in(\alpha,\beta)$ ***pontban lokálisan fogyó****, ha a-nak van olyan $K_r(a)\subseteq(\alpha,\beta)$ környezete,*

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(a), \quad \textit{ha } x\in(a-r,a),\\ f(x) &\leq f(a), \quad \textit{ha } x\in(a,a+r). \end{aligned}$$

Szélsőérték definíciója

Megjegyzés

Könnyen látható, hogy a monoton növő függvények értelmezési tartományuk minden belső pontjában lokálisan növekednek illetve a monoton fogyó függvények értelmezési tartományuk minden belső pontjában lokálisan fogynak.

Definíció

Akkor mondjuk, hogy az $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ függvénynek az $a\in(\alpha,\beta)$ pontban ***lokális maximuma*** *van, ha a-nak létezik olyan $K_r(a)\subseteq(\alpha,\beta)$ környezete,*

$$f(x)\le f(a),\quad ha\ x\in K_r(a).$$

Szélsőérték definíciója

Definíció

*Akkor mondjuk, hogy az $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ függvénynek az $a\in(\alpha,\beta)$ pontban **lokális minimuma** van, ha a-nak létezik olyan $K_r(a)\subseteq(\alpha,\beta)$ környezete,*

$$f(x)\geq f(a),\quad ha\ x\in K_r(a).$$

Megjegyzés

*A lokális maximumot és a lokális minimumot összefoglaló néven **lokális szélsőértéknek** nevezzük.*

Megjegyzés

*A középiskolában tanult maximum egyben lokális maximum is illetve a minimum lokális minimum is. Az egyértelmű elnevezés kedvéért ezeket a szélsőértékeket ezentúl **abszolút szélsőértékeknek** nevezzük.*

A monotonitás és a derivált kapcsolata

Tétel

Legyen az $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in (\alpha, \beta)$ pontban differenciálható.

i) *Ha f az a pontban (lokálisan) növő, akkor $f'(a) \geq 0$.*

ii) *Ha f az a pontban (lokálisan) fogyó, akkor $f'(a) \leq 0$.*

Tétel

Legyen az $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in (\alpha, \beta)$ pontban differenciálható.

i) *Ha $f'(a) > 0$, akkor az f függvény az a pontban szigorúan növő.*

ii) *Ha $f'(a) < 0$, akkor az f függvény az a pontban szigorúan fogyó.*

Szélsőérték-tételek

Tétel

Ha az $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ függvény az $a\in(\alpha,\beta)$ pontban differenciálható és itt lokális szélsőértéke van, akkor $f'(a)=0$

Megjegyzés

Az előző tétel a lokális szélsőérték létezésének szükséges, de nem elégséges feltétele. Például az $f(x)=x^3$ függvénynek az $x_0=0$ pontban nincs szélsőértéke, pedig $f'(0)=0$.

Tétel (A szélsőérték létezésének elsőrendű elégséges feltétele)

Legyen $f:H\to\mathbb{R}\quad(H\subseteq\mathbb{R}$ nyílt halmaz), $a\in H,\quad f\in\mathcal{D}_a$. Ha $f'(a)=0$ és f' az a-ban előjelet vált, akkor f-nek a-ban lokális szélsőértéke van. Ha a derivált negatívból pozitívvá válik, akkor az eredeti függvénynek lokális minimuma, ha pozitívból negatívvá válik, akkor lokális maximuma van az a pontban.

Szélsőérték-tételek

Definíció (Emlékeztető)

Ha az $f : H \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény f' deriváltja az $a \in H$ pontban differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy az f ***kétszer differenciálható*** *az a pontban és az*

$$f''(a) := (f')'(a)$$

számot a függvény a pontbeli ***második deriváltjának****, vagy* ***másodrendű differenciálhányadosának*** *nevezzük.*

Tétel (A szélsőérték létezésének másodrendű elégséges feltétele)

Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ $\quad (H \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz$)$, $a \in H$, $\quad f \in \mathcal{D}^2_a$. Ha $f'(a) = 0$ és $f''(a) \neq 0$, akkor f-nek a-ban lokális szélsőértéke van. Ha $f''(a) > 0$, akkor f-nek a-ban lokális minimuma, ha $f''(a) < 0$, akkor f-nek a-ban lokális maximuma van.

Szélsőérték-tételek

Definíció

Legyen $n \in \mathbb{N}$ *és* $f : H \to \mathbb{R}$ *függvény* $(n-1)$*-szer differenciálható. Ha a függvény* $(n-1)$*-edik deriváltja* $(f^{(n-1)})$ *differenciálható az* $a \in H$ *pontban, akkor azt mondjuk, hogy* f *az* a *pontban* n*-szer differenciálható és legyen* $f^{(n)}(a) := (f^{(n-1)})'(a)$.

Tétel (A szélsőérték létezésének magasabbrendű elégséges feltétele)

Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ $\quad$ *(*$H \subseteq \mathbb{R}$ *nyílt halmaz), az* $a \in H$ *pontban* n*-szer differenciálható. Tegyük fel, hogy*

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad \text{és} \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Az f*-nek akkor és csak akkor van az* a*-ban lokális szélsőértéke, ha* n *páros. Ekkor ha* $f^{(n)}(a) > 0$*, akkor* f*-nek* a*-ban lokális minimuma, ha* $f^{(n)}(a) < 0$*, akkor lokális maximuma van.*

Monotonitás, szélsőérték – Feladatok

Feladat

- Mit mondhatunk az $f(x) = x^2 - 4x + 7$ függvény monotonitásáról az $x_0 = -5$, az $x_0 = 3$ és az $x_0 = 2$ pontokban? Vizsgáljuk a monotonitását és adjuk meg a szélsőértékeit a teljes értelmezési tartományán.
- Mit mondhatunk az $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$ függvény monotonitásáról az $x_0 = -4$ és az $x_0 = 5$ helyeken? Az $x_0 = 3$ van-e szélsőértéke? Vizsgáljuk a monotonitását és adjuk meg a szélsőértékeit a teljes értelmezési tartományán.

Konvexitás és inflexió

Definíció

Akkor mondjuk, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény egy $I \subseteq H$ intervallumon konvex, ha bármely $a, b \in I$, $a < b$ esetén az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokon áthaladó egyenes (szelő) az (a, b)-ben az f fölött fekszik.

Definíció

Akkor mondjuk, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény egy $I \subseteq H$ intervallumon konkáv, ha bármely $a, b \in I$, $a < b$ esetén az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokon áthaladó egyenes (szelő) az (a, b)-ben az f alatt fekszik.

Definíció

Akkor mondjuk, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in H$ helyen inflexiója van, ha ott a függvény konvexitást vált.

A konvexitás és a deriváltak kapcsolata

Tétel (A konvexitás és az első derivált kapcsolata)

Tekintsük az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvényt, tegyük fel, hogy f az (a, b)-n differenciálható, ekkor

i) *Ha f konvex (a, b)-n, akkor f' monoton nő (a, b)-n*

ii) *Ha f szigorúan konvex (a, b)-n, akkor f' szigorúan monoton nő (a, b)-n*

iii) *Ha f konkáv (a, b)-n, akkor f' monoton csökken (a, b)-n*

iv) *Ha f szigorúan konkáv (a, b)-n, akkor f' szigorúan monoton csökken (a, b)-n*

A konvexitás és a deriváltak kapcsolata

Tétel (A konvexitás és a második derivált kapcsolata)

Tekintsük az $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ függvényt, tegyük fel, hogy f az (a,b)-n kétszer differenciálható, ekkor

i) *Ha f konvex (a,b)-n, akkor $f''(x)\geq 0$*

ii) *Ha f konkáv (a,b)-n, akkor $f''(x)\leq 0$*

iii) *Ha $f''(x)>0$, akkor f szigorúan konvex (a,b)-on*

iv) *Ha $f''(x)<0$, akkor f szigorúan konkáv (a,b)-on*

Tételek az inflexiós ponttal kapcsolatban

Tétel (Inflexióspont létezésének szükséges feltétele)

Ha az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in H$ pontban kétszer differenciálható és f-nek a-ban inflexiója van, akkor $f''(a) = 0$.

Megjegyzés

Az előző tétel szükséges de nem elégséges, például az $f(x) = x^4$ függvénynek $a = 0$-ban nincs inflexiója, pedig $f''(0) = 0$.

Tétel (Inflexióspont létezésének másodrendű elégséges feltétele)

Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ az $a \in H$, pontban kétszer differenciálható. Ha $f''(a) = 0$ és f'' az a-ban előjelet vált, akkor f-nek a-ban inflexióspontja van.

Tételek az inflexiós ponttal kapcsolatban

Tétel (Inflexiópont létezésének harmadrendű elégséges feltétele)

Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ az $a \in H$, pontban háromszor differenciálható. Ha $f''(a) = 0$ és $f'''(a) \neq 0$, akkor f-nek a-ban inflexióspontja van.

Tétel (Inflexiópont létezésének magasabbrendű elégséges feltétele)

Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ az $a \in H$, pontban n-szer differenciálható. Tegyük fel, hogy

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{és} \quad f^{(n)}(a) \neq 0,$$

f-nek a-ban akkor és csak akkor van inflexióspontja, ha n páratlan.

Elméleti kérdések 2 téma

1. Vezesse le a logaritmikus deriválás képletét. (Adja meg mikor használható!)
2. L'Hospital szabály véges helyen „$\frac{0}{0}$" alakra
3. L'Hospital szabály véges helyen „$\frac{\infty}{\infty}$" alakra
4. L'Hospital szabály végtelenben.
5. L'Hospital szabály mínusz végtelenben.
6. Lokálisan növő függvény definíciója.
7. Lokálisan fogyó függvény definíciója.
8. Lokálisan maximum definíciója.
9. Lokálisan minimum definíciója.
10. Monotonitás és a derivált kapcsolatáról szóló két tétel.
11. Lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele.
12. Példa olyan függvényre, amely teljesíti a szélsőérték létezésének szükséges feltételét, még sem rendelkezik szélsőértékkel.

Elméleti kérdések 2 téma

13. A szélsőérték létezésének elsőrendű elégséges feltétele
14. A szélsőérték létezésének másodrendű elégséges feltétele
15. A szélsőérték létezésének magasabbrendű elégséges feltétele
16. Egy intervallumon konvex függvény definíciója
17. Egy intervallumon konkáv függvény definíciója
18. Inflexiós pont definíciója

Kalkulus II előadás

3. előadás
Teljes függvényvizsgálat.

Király Balázs

Pécsi Tudományegyetem
Matematikai és Informatikai Intézet

2023.

I. Alaptulajdonságok megállapítása

- Értelmezési tartomány meghatározása
  - Szinguláris helyek
  - Értelmezési tartomány szélső pontjai
- szimmetria tulajdonságok vizsgálata
  - paritás
    - Ha $\mathcal{D}_f$ szimmetrikus és $f(-x) = f(x)$, $(\forall x \in \mathcal{D}_f)$, akkor f páros
    - Ha $\mathcal{D}_f$ szimmetrikus és $f(-x) = -f(x)$, $(\forall x \in \mathcal{D}_f)$, akkor f ptlan
    - különben se nem páros, se nem páratlan
  - periodicitás

  Az f függvény periódusa p, ha p a legkisebb pozitív szám, melyre minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(x+p) = f(x)$.
- Folytonosság vizsgálata
- Differenciálhatóság vizsgálata
- Tengelymetszetek meghatározása
  - y-tengely: $f(0)$ meghatározása
  - x-tengely: $f(x) = 0$ megoldása, ha lehetséges

II. Vizsgálatok az első derivált alapján

- Monotonitási intervallumok meghatározása
- szélsőértékek keresése

Mindkét szempont vizsgálható a szélsőérték létezésének elsőrendű elégséges feltételének alkalmazásakor használt táblázattal.

A táblázat oszlopait a kritikus pontok (szinguláris helyek, intervallum szélső pontjai, szakadási helyek, lehetséges szélsőérték helyek) által meghatározott intervallumok adják

A táblázatnak két sora van, az első a derivált, a második az eredeti függvény viselkedését írja le

III. Vizsgálatok a második derivált alapján

- Konvexitási intervallumok meghatározása
- inflexióspontok keresése

Mindkét szempont vizsgálható az inflexiós pont létezésének másodrendű elégséges feltételének alkalmazásakor használt táblázattal.

A táblázat oszlopait a kritikus pontok (szinguláris helyek, intervallum szélső pontjai, szakadási helyek, lehetséges inflexióspontok helyei) által meghatározott intervallumok adják

A táblázatnak két sora van, az első a második derivált, a második az eredeti függvény viselkedését írja le

IV. A függvény határértékei

- Az értelmezési tartomány végpontjaiban (vagy $\pm\infty$-ben)
- A függvény szinguláris pontjaiban és szakadási helyeinél

V. A derivált határértékei:

- Ahol f folytonos, de nem differenciálható
- Ahol f nem folytonos, de létezik legalább féloldali véges határérték

VI. Aszimptoták

- vízszintes aszimptota van, ha $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$, vagy $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$, ahol $c \in \mathbb{R}$
- függőleges aszimptota, ahol $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ (elég ha az egyoldali határérték végtelen)
- ferde aszimptota, ha $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ és $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m,\ m \in \mathbb{R}$. Ekkor az aszimptota:

$$y = m \cdot x + \underbrace{\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - m \cdot x)}_{b}$$

VII. Ábrázolás

Ábrázolás előtt érdemes a II. és III. pontban elkészített táblázatokat összevonni.

A táblázat oszlopait a kritikus pontok (szinguláris helyek, intervallum szélső pontjai, szakadási helyek, lehetséges szlsőérték helyek és lehetséges inflexióspontok helyei) által meghatározott intervallumok adják

A táblázatnak három sora van, az első az első derivált, a második a második derivált, a harmadik pedig az eredeti függvény viselkedését írja le

VIII. Értékkészlet leolvasása

A grafikon segítségével megadjuk a függvény értékkészletét.

Elméleti kérdések

1. Adja meg a páros függvény definícióját!
2. Adja meg a páratlan függvény definícióját!
3. Definiálja a függvény periódusát!
4. Adja meg mikor van a függvénynek függőleges aszimptotája és írja fel az aszimptota egyenletét.
5. Adja meg mikor van a függvénynek vízszintes aszimptotája és írja fel az aszimptota egyenletét.
6. Adja meg mikor van a függvénynek ferde aszimptotája és írja fel az aszimptota egyenletét.

Kalkulus II előadás

4. előadás
Határozatlan integrál. Integrálási módszerek

Király Balázs

Pécsi Tudományegyetem
Matematikai és Informatikai Intézet

2023.

Primitív függvény

Definíció

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum és $f : I \mapsto \mathbb{R}$ egy intervallumon értelmezett valósértékű függvény. Akkor mondjuk, hogy a $F : I \mapsto \mathbb{R}$ függvény a f függvény ***primitív függvénye****, ha*

Primitív függvény

Definíció

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum és $f : I \mapsto \mathbb{R}$ egy intervallumon értelmezett valósértékű függvény. Akkor mondjuk, hogy a $F : I \mapsto \mathbb{R}$ függvény a f függvény ***primitív függvénye***, *ha*

- $F \in \mathcal{D}_I$

Primitív függvény

Definíció

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum és $f : I \mapsto \mathbb{R}$ egy intervallumon értelmezett valósértékű függvény. Akkor mondjuk, hogy a $F : I \mapsto \mathbb{R}$ függvény a f függvény ***primitív függvénye****, ha*

- $F \in \mathcal{D}_I$
- $F'(x) = f(x)$ *minden* $x \in I$ *esetén*

Primitív függvény

Definíció

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum és $f : I \mapsto \mathbb{R}$ egy intervallumon értelmezett valósértékű függvény. Akkor mondjuk, hogy a $F : I \mapsto \mathbb{R}$ függvény a f függvény ***primitív függvénye****, ha*

- $F \in \mathcal{D}_I$
- $F'(x) = f(x)$ *minden* $x \in I$ *esetén*

Tétel

Ha F a f primitív függvénye az I intervallumon és $C \in \mathbb{R}$ konstans, akkor $F + C$ is a f primitív függvénye.

Primitív függvény

Definíció

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum és $f : I \mapsto \mathbb{R}$ egy intervallumon értelmezett valósértékű függvény. Akkor mondjuk, hogy a $F : I \mapsto \mathbb{R}$ függvény a f függvény ***primitív függvénye****, ha*

- $F \in \mathcal{D}_I$
- $F'(x) = f(x)$ *minden* $x \in I$ *esetén*

Tétel

Ha F a f primitív függvénye az I intervallumon és $C \in \mathbb{R}$ konstans, akkor $F + C$ is a f primitív függvénye.

Bizonyítás.

Ha F a f primitív függvénye, akkor $F \in \mathcal{D}_I$, így a differenciálhatóság műveleti tulajdonságai alapján $F + C \in \mathcal{D}_I$ és

Primitív függvény

Definíció

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum és $f : I \mapsto \mathbb{R}$ egy intervallumon értelmezett valósértékű függvény. Akkor mondjuk, hogy a $F : I \mapsto \mathbb{R}$ függvény a f függvény ***primitív függvénye****, ha*

- $F \in \mathcal{D}_I$
- $F'(x) = f(x)$ *minden* $x \in I$ *esetén*

Tétel

Ha F a f primitív függvénye az I intervallumon és $C \in \mathbb{R}$ konstans, akkor $F + C$ is a f primitív függvénye.

Bizonyítás.

Ha F a f primitív függvénye, akkor $F \in \mathcal{D}_I$, így a differenciálhatóság műveleti tulajdonságai alapján $F + C \in \mathcal{D}_I$ és $(F + C)' = F' + C' = f + 0 = f$. □

A határozatlan integrál

Tétel

Ha F_1 és F_2 a f primitív függvényei az I intervallumon, akkor $F_1 - F_2 =$ állandó, azaz f primitív függvényei csak egy additív konstansban különböznek.

A határozatlan integrál

Tétel

Ha F_1 és F_2 a f primitív függvényei az I intervallumon, akkor $F_1 - F_2 =$ állandó, azaz f primitív függvényei csak egy additív konstansban különböznek.

Bizonyítás.

$F_1, F_2 \in \mathcal{D}_I$ így a differenciálhatóság műveleti tulajdonságai alapján $F_1 - F_2 \in \mathcal{D}_I$

A határozatlan integrál

Tétel

Ha F_1 és F_2 a f primitív függvényei az I intervallumon, akkor $F_1 - F_2 = \acute{a}lland\acute{o}$, azaz f primitív függvényei csak egy additív konstansban különböznek.

Bizonyítás.

$F_1, F_2 \in \mathcal{D}_I$ így a differenciálhatóság műveleti tulajdonságai alapján $F_1 - F_2 \in \mathcal{D}_I$ $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$, az I intervallumon,

A határozatlan integrál

Tétel

Ha F_1 és F_2 a f primitív függvényei az I intervallumon, akkor $F_1 - F_2 =$ állandó, azaz f primitív függvényei csak egy additív konstansban különböznek.

Bizonyítás.

$F_1, F_2 \in \mathcal{D}_I$ így a differenciálhatóság műveleti tulajdonságai alapján $F_1 - F_2 \in \mathcal{D}_I$
$(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$, az I intervallumon, így $F_1 - F_2 =$ állandó. $\square$

A határozatlan integrál

Tétel

Ha F_1 és F_2 a f primitív függvényei az I intervallumon, akkor $F_1 - F_2 = \acute{a}lland\acute{o}$, azaz f primitív függvényei csak egy additív konstansban különböznek.

Bizonyítás.

$F_1, F_2 \in \mathcal{D}_I$ így a differenciálhatóság műveleti tulajdonságai alapján $F_1 - F_2 \in \mathcal{D}_I$
$(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$, az I intervallumon, így $F_1 - F_2 = \text{állandó}$. $\square$

Definíció

Legyen $f : I \mapsto \mathbb{R}$ olyan függvény, melynek van primitív függvénye az I intervallumon. Ekkor az f primitív függvényeinek halmazát az f ***határozatlan integrál****jának nevezzük. Jelölés:*

$$\int f(x)\, dx = \int f = \{F(x) + C, C \in \mathbb{R}\},$$

ahol F a f egy primitív függvénye.

Műveleti tulajdonságok

Tétel

Ha az f az I intervallumon folytonos, akkor létezik primitív függvénye.

Műveleti tulajdonságok

Tétel

Ha az f az I intervallumon folytonos, akkor létezik primitív függvénye.

Tétel

Ha $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$ függvényeknek van primitív függvénye és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $f + g$-nek és $\lambda \cdot f$-nek is van primitívfüggvénye és

i) $\int (f(x) + g(x))\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx,$

ii) $\int \lambda \cdot f(x)\ dx = \lambda \cdot \int f(x)\ dx.$

Műveleti tulajdonságok

Tétel

Ha az f az I intervallumon folytonos, akkor létezik primitív függvénye.

Tétel

Ha $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$ függvényeknek van primitív függvénye és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $f+g$-nek és $\lambda \cdot f$-nek is van primitívfüggvénye és

i) $\int (f(x) + g(x))\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$,

ii) $\int \lambda \cdot f(x)\ dx = \lambda \cdot \int f(x)\ dx$.

Bizonyítás.

Legyen $\int f(x)\ dx = F(x) + C_1$ és $\int g(x)\ dx = G(x) + C_2$, ahol $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Műveleti tulajdonságok

Tétel

Ha az f az I intervallumon folytonos, akkor létezik primitív függvénye.

Tétel

Ha $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$ függvényeknek van primitív függvénye és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $f + g$-nek és $\lambda \cdot f$-nek is van primitívfüggvénye és

i) $\int (f(x) + g(x))\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$,

ii) $\int \lambda \cdot f(x)\ dx = \lambda \cdot \int f(x)\ dx$.

Bizonyítás.

Legyen $\int f(x)\ dx = F(x) + C_1$ és $\int g(x)\ dx = G(x) + C_2$, ahol $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Ekkor a definíció alapján $F, G \in \mathcal{D}_I$ és $F'(x) = f(x)$, valamint $G'(x) = g(x)$ minden $x \in I$ esetén.

Műveleti tulajdonságok

A derivált műveleti tulajdonságai miatt $F+G$ és $\lambda \cdot F$ is differenciálható I-n és

Műveleti tulajdonságok

A derivált műveleti tulajdonságai miatt $F + G$ és $\lambda \cdot F$ is differenciálható I-n és

$$\begin{aligned} (F+G)' &= F' + G' = f + g, \\ (\lambda \cdot F)' &= \lambda \cdot F' = \lambda \cdot f. \end{aligned}$$

Műveleti tulajdonságok

A derivált műveleti tulajdonságai miatt $F+G$ és $\lambda \cdot F$ is differenciálható I-n és

$$\begin{aligned}(F+G)' &= F'+G' = f+g,\\ (\lambda \cdot F)' &= \lambda \cdot F' = \lambda \cdot f.\end{aligned}$$

Azaz $\lambda \cdot F$ a $\lambda \cdot f$ egy primitív függvénye illetve $F+G$ a $f+g$ egy primitív függvénye.

$\square$

Helyettesítéses integrálás

Tétel

Legyen $\varphi : I \mapsto J$ *és* $f : J \mapsto \mathbb{R}$, *ahol* $I, J \subset \mathbb{R}$ *intervallumok.*

Helyettesítéses integrálás

Tétel

Legyen $\varphi : I \mapsto J$ *és* $f : J \mapsto \mathbb{R}$, *ahol* $I, J \subset \mathbb{R}$ *intervallumok. Ha*

i) $\varphi \in \mathcal{D}_I$ *és*

Tétel

Legyen $\varphi : I \mapsto J$ *és* $f : J \mapsto \mathbb{R}$, *ahol* $I, J \subset \mathbb{R}$ *intervallumok. Ha*

i) $\varphi \in \mathcal{D}_I$ *és*

ii) F *a* f *függvény primitív függvénye* J*-n,*

Helyettesítéses integrálás

Tétel

Legyen $\varphi : I \mapsto J$ *és* $f : J \mapsto \mathbb{R}$, *ahol* $I, J \subset \mathbb{R}$ *intervallumok. Ha*

i) $\varphi \in \mathcal{D}_I$ *és*

ii) F *a* f *függvény primitív függvénye* J*-n,*

akkor $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ *függvénynek is létezik primitív függvénye és*

$$\int (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = F \circ \varphi + C.$$

Helyettesítéses integrálás

Tétel

Legyen $\varphi : I \mapsto J$ *és* $f : J \mapsto \mathbb{R}$, *ahol* $I, J \subset \mathbb{R}$ *intervallumok. Ha*

i) $\varphi \in \mathcal{D}_I$ *és*

ii) F *a* f *függvény primitív függvénye* J*-n,*

akkor $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ *függvénynek is létezik primitív függvénye és*

$$\int (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = F \circ \varphi + C.$$

Bizonyítás.

$F \in \mathcal{D}_J$ és $\varphi \in \mathcal{D}_I \Rightarrow F \circ \varphi \in \mathcal{D}_I$ és

Helyettesítéses integrálás

Tétel

Legyen $\varphi : I \mapsto J$ *és* $f : J \mapsto \mathbb{R}$, *ahol* $I, J \subset \mathbb{R}$ *intervallumok. Ha*

- i) $\varphi \in \mathcal{D}_I$ *és*
- ii) F *a* f *függvény primitív függvénye* J*-n,*

akkor $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ *függvénynek is létezik primitív függvénye és*

$$\int (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = F \circ \varphi + C.$$

Bizonyítás.

$F \in \mathcal{D}_J$ és $\varphi \in \mathcal{D}_I \Rightarrow F \circ \varphi \in \mathcal{D}_I$ és

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad \forall t \in I,$$

Helyettesítéses integrálás

Tétel

Legyen $\varphi : I \mapsto J$ *és* $f : J \mapsto \mathbb{R}$*, ahol* $I, J \subset \mathbb{R}$ *intervallumok. Ha*

i) $\varphi \in \mathcal{D}_I$ *és*

ii) F *a* f *függvény primitív függvénye* J*-n,*

akkor $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ *függvénynek is létezik primitív függvénye és*

$$\int (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = F \circ \varphi + C.$$

Bizonyítás.

$F \in \mathcal{D}_J$ és $\varphi \in \mathcal{D}_I \Rightarrow F \circ \varphi \in \mathcal{D}_I$ és

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad \forall t \in I,$$

azaz az $F \circ \varphi$ függvény az $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ függvény primitív függvénye. $\square$

Helyettesítéses integrálás, 2. módszer

Tétel

Legyen $\varphi : I \mapsto J$ *és* $f : J \mapsto \mathbb{R}$*, ahol* $I, J \subset \mathbb{R}$ *intervallumok.*

Helyettesítéses integrálás, 2. módszer

Tétel

Legyen $\varphi : I \mapsto J$ *és* $f : J \mapsto \mathbb{R}$, *ahol* $I, J \subset \mathbb{R}$ *intervallumok. Ha*

i) $\varphi \in \mathcal{D}_I$ *és* $\varphi'(x) \neq 0,\ x \in I$,

Helyettesítéses integrálás, 2. módszer

Tétel

Legyen $\varphi : I \mapsto J$ *és* $f : J \mapsto \mathbb{R}$, *ahol* $I, J \subset \mathbb{R}$ *intervallumok. Ha*

i) $\varphi \in \mathcal{D}_I$ *és* $\varphi'(x) \neq 0,\ x \in I$,

ii) *Legyen* φ *kölcsönösen egyértelmű és jelölje* $\overline{\varphi}$ *az inverzét*

Helyettesítéses integrálás, 2. módszer

Tétel

Legyen $\varphi : I \mapsto J$ *és* $f : J \mapsto \mathbb{R}$, *ahol* $I, J \subset \mathbb{R}$ *intervallumok. Ha*

i) $\varphi \in \mathcal{D}_I$ *és* $\varphi'(x) \neq 0,\ x \in I$,

ii) *Legyen* φ *kölcsönösen egyértelmű és jelölje* $\overline{\varphi}$ *az inverzét*

iii) *legyen* $h := (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. h*-nak van primitív függvénye, ez legyen* H,

Helyettesítéses integrálás, 2. módszer

Tétel

Legyen $\varphi : I \mapsto J$ *és* $f : J \mapsto \mathbb{R}$*, ahol* $I, J \subset \mathbb{R}$ *intervallumok. Ha*

i) $\varphi \in \mathcal{D}_I$ *és* $\varphi'(x) \neq 0,\ x \in I$,

ii) *Legyen* φ *kölcsönösen egyértelmű és jelölje* $\overline{\varphi}$ *az inverzét*

iii) *legyen* $h := (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. h*-nak van primitív függvénye, ez legyen* H,

ekkor f *függvénynek is létezik primitív függvénye és*

$$\int f(x)\, dx = (H \circ \overline{\varphi})(x) + C.$$

Helyettesítéses integrálás, 2. módszer

Bizonyítás.

$H \in \mathcal{D}_I$ és $H'(x) = h(x) = ((f \circ \varphi) \cdot \varphi')(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

Helyettesítéses integrálás, 2. módszer

Bizonyítás.

$H \in \mathcal{D}_I$ és $H'(x) = h(x) = ((f \circ \varphi) \cdot \varphi')(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

Mivel $\overline{\varphi} \in \mathcal{D}_J$ és a közvetett függvény deriválási szabálya alapján $H \circ \overline{\varphi} \in \mathcal{D}_J$ legyen $x \in J$ ekkor

$$(H(\overline{\varphi}(x)))' \quad =$$

.

$\square$

Helyettesítéses integrálás, 2. módszer

Bizonyítás.

$H \in \mathcal{D}_I$ és $H'(x) = h(x) = ((f \circ \varphi) \cdot \varphi')(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

Mivel $\overline{\varphi} \in \mathcal{D}_J$ és a közvetett függvény deriválási szabálya alapján $H \circ \overline{\varphi} \in \mathcal{D}_J$ legyen $x \in J$ ekkor

$$(H(\overline{\varphi}(x)))' = H'(\overline{\varphi}(x)) \cdot \overline{\varphi}'(x) =$$

.

□

Helyettesítéses integrálás, 2. módszer

Bizonyítás.

$H \in \mathcal{D}_I$ és $H'(x) = h(x) = ((f \circ \varphi) \cdot \varphi')(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

Mivel $\overline{\varphi} \in \mathcal{D}_J$ és a közvetett függvény deriválási szabálya alapján $H \circ \overline{\varphi} \in \mathcal{D}_J$ legyen $x \in J$ ekkor

$$(H(\overline{\varphi}(x)))' = H'(\overline{\varphi}(x)) \cdot \overline{\varphi}'(x) = h(\overline{\varphi}(x)) \cdot \overline{\varphi}'(x) =$$

.

$\square$

Helyettesítéses integrálás, 2. módszer

Bizonyítás.

$H \in \mathcal{D}_I$ és $H'(x) = h(x) = ((f \circ \varphi) \cdot \varphi')(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

Mivel $\overline{\varphi} \in \mathcal{D}_J$ és a közvetett függvény deriválási szabálya alapján $H \circ \overline{\varphi} \in \mathcal{D}_J$ legyen $x \in J$ ekkor

$$\begin{aligned}(H(\overline{\varphi}(x)))' &= H'(\overline{\varphi}(x)) \cdot \overline{\varphi}'(x) = h(\overline{\varphi}(x)) \cdot \overline{\varphi}'(x) = \\ &= f(\varphi(\overline{\varphi}(x))) \cdot \varphi'(\overline{\varphi}(x)) \cdot \overline{\varphi}'(x) =\end{aligned}$$

.

$\square$

Helyettesítéses integrálás, 2. módszer

Bizonyítás.

$H \in \mathcal{D}_I$ és $H'(x) = h(x) = ((f \circ \varphi) \cdot \varphi')(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

Mivel $\overline{\varphi} \in \mathcal{D}_J$ és a közvetett függvény deriválási szabálya alapján $H \circ \overline{\varphi} \in \mathcal{D}_J$ legyen $x \in J$ ekkor

$$\begin{aligned}(H(\overline{\varphi}(x)))' &= H'(\overline{\varphi}(x)) \cdot \overline{\varphi}'(x) = h(\overline{\varphi}(x)) \cdot \overline{\varphi}'(x) = \\ &= f(\varphi(\overline{\varphi}(x))) \cdot \varphi'(\overline{\varphi}(x)) \cdot \overline{\varphi}'(x) = \\ &= f(x) \cdot \varphi'(\overline{\varphi}(x)) \cdot \overline{\varphi}'(x) =\end{aligned}$$

.

$\square$

Helyettesítéses integrálás, 2. módszer

Bizonyítás.

$H \in \mathcal{D}_I$ és $H'(x) = h(x) = ((f \circ \varphi) \cdot \varphi')(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

Mivel $\overline{\varphi} \in \mathcal{D}_J$ és a közvetett függvény deriválási szabálya alapján $H \circ \overline{\varphi} \in \mathcal{D}_J$ legyen $x \in J$ ekkor

$$\begin{aligned}
(H(\overline{\varphi}(x)))' &= H'(\overline{\varphi}(x)) \cdot \overline{\varphi}'(x) = h(\overline{\varphi}(x)) \cdot \overline{\varphi}'(x) = \\
&= f(\varphi(\overline{\varphi}(x))) \cdot \varphi'(\overline{\varphi}(x)) \cdot \overline{\varphi}'(x) = \\
&= f(x) \cdot \varphi'(\overline{\varphi}(x)) \cdot \overline{\varphi}'(x) = \\
&= f(x) \cdot \varphi'(\overline{\varphi}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\overline{\varphi}(x))} = f(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Parciális integrálás

Tétel

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathcal{D}_I$. *Ha az* $f \cdot g'$ *függvénynek van primitívfüggvénye az* I *intervallumon, akkor* $f' \cdot g$ *függvénynek is van és*

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'.$$

Parciális integrálás

Tétel

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathcal{D}_I$. Ha az $f \cdot g'$ függvénynek van primitívfüggvénye az I intervallumon, akkor $f' \cdot g$ függvénynek is van és

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'.$$

Bizonyítás.

$f, g \in \mathcal{D}_I \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{D}_I$

Parciális integrálás

Tétel

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathcal{D}_I$. *Ha az* $f \cdot g'$ *függvénynek van primitívfüggvénye az* I *intervallumon, akkor* $f' \cdot g$ *függvénynek is van és*

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'.$$

Bizonyítás.

$f, g \in \mathcal{D}_I \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{D}_I$ és

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Parciális integrálás

Tétel

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathcal{D}_I$. Ha az $f \cdot g'$ függvénynek van primitívfüggvénye az I intervallumon, akkor $f' \cdot g$ függvénynek is van és

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'.$$

Bizonyítás.

$f, g \in \mathcal{D}_I \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{D}_I$ és

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \Rightarrow \quad f' \cdot g = (f \cdot g)' - f \cdot g'$$

Parciális integrálás

Tétel

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathcal{D}_I$. *Ha az* $f \cdot g'$ *függvénynek van primitívfüggvénye az* I *intervallumon, akkor* $f' \cdot g$ *függvénynek is van és*

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'.$$

Bizonyítás.

$f, g \in \mathcal{D}_I \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{D}_I$ és

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \Rightarrow \quad f' \cdot g = (f \cdot g)' - f \cdot g'$$

Az $(f \cdot g)'$ és $f \cdot g'$ függvényeknek van primitív függvényük, így a különbségüknek, $f' \cdot g$-nek is van és

$$\int f' \cdot g = \int (f \cdot g)' - \int f \cdot g' = f \cdot g - \int f \cdot g'.$$

□

Parciális integrálás, alapesetek

Megjegyzés

Nyilvánvaló, hogy a módszer akkor használható jól, ha az f és g függvényeket úgy választjuk, hogy $f \cdot g'$ függvény primitív függvénye könnyebben számolható, mint az eredeti $f' \cdot g$ függvényé.

Parciális integrálás, alapesetek

Megjegyzés

Nyilvánvaló, hogy a módszer akkor használható jól, ha az f és g függvényeket úgy választjuk, hogy $f \cdot g'$ függvény primitív függvénye könnyebben számolható, mint az eredeti $f' \cdot g$ függvényé. A következő négy típus esetén érdemes parciálisan integrálni:

I. Polinom függvény és exponenciális-, vagy trigonometrikus függvény szorzata.

Parciális integrálás, alapesetek

Megjegyzés

Nyilvánvaló, hogy a módszer akkor használható jól, ha az f és g függvényeket úgy választjuk, hogy $f \cdot g'$ függvény primitív függvénye könnyebben számolható, mint az eredeti $f' \cdot g$ függvényé. A következő négy típus esetén érdemes parciálisan integrálni:

I. Polinom függvény és exponenciális-, vagy trigonometrikus függvény szorzata. **Megoldás:** A parciális integrálás során legyen g a polinom, így a fenti eljárást alkalmazva a kiszámítandó $\int f(x) \cdot g'(x)dx$ hasonló típusú lesz, mint az eredeti primitív függvény, de a polinom fokszáma eggyel csökken. A parciális integrálást egészen addig ismételten alkalmazzuk, amíg a polinom konstanssá nem válik, ekkor már elemi úton integrálhatunk.

Parciális integrálás, alapesetek

II. a) Polinom és logaritmus-, vagy ciklometrikus („arkusz”) függvény szorzata.

Parciális integrálás, alapesetek

II. a) Polinom és logaritmus-, vagy ciklometrikus („arkusz'') függvény szorzata.
Megoldás: A parciális integrálás során legyen f' a polinom, így a fenti eljárást alkalmazva a kiszámítandó $\int f(x) \cdot g'(x)dx$ integrálban a polinom mellett egy könnyebben kezelhető függvény jelenik meg.

Parciális integrálás, alapesetek

II. a) Polinom és logaritmus-, vagy ciklometrikus („arkusz") függvény szorzata.
Megoldás: A parciális integrálás során legyen f' a polinom, így a fenti eljárást alkalmazva a kiszámítandó $\int f(x) \cdot g'(x)dx$ integrálban a polinom mellett egy könnyebben kezelhető függvény jelenik meg.

b) Logaritmus-, vagy ciklometrikus („arkusz") függvény integrálása.

Parciális integrálás, alapesetek

II.

a) Polinom és logaritmus-, vagy ciklometrikus („arkusz”) függvény szorzata.
Megoldás: A parciális integrálás során legyen f' a polinom, így a fenti eljárást alkalmazva a kiszámítandó $\int f(x) \cdot g'(x)dx$ integrálban a polinom mellett egy könnyebben kezelhető függvény jelenik meg.

b) Logaritmus-, vagy ciklometrikus („arkusz”) függvény integrálása.
Megoldás: Ilyenkor az integrandust tekinthetjük olyan szorzatnak, melynek az egyik tényezője az eredeti integrandus, a másik tényezője pedig az azonosan 1 polinom. A parciális integrálás során ugyanúgy járunk el, mint az előző típus esetén.

Parciális integrálás, alapesetek

III. Exponenciális- és szinusz-, vagy koszinusz függvény szorzata.

Parciális integrálás, alapesetek

III. Exponenciális- és szinusz-, vagy koszinusz függvény szorzata.
Megoldás: Kétszer egymás után parciálisan integrálunk. (Tetszőleges megfeleltetéssel, de mindkétszer ugyanolyan szerepkiosztással.) A második lépés után egy függvényegyenlethez jutunk, melyből elemi átalakítással „kifejezhetjük” a keresett függvényt.

Az előadáson megbeszélt feladatok

1. „Ismerjük fel", mely függvény deriváltját látjuk!
   a) $\int 3x^2\ dx$
   b) $\int \cos x\ dx$
   c) $\int \frac{1}{1+x^2}\ dx$
   d) $\int \frac{1}{x}\ dx$
   e) $\int x^3\ dx$
   f) $\int x^n\ dx$
   g) $\int \sin x\ dx$

Az előadáson megbeszélt feladatok

2. Adjuk meg a kijelölt határozatlan integrálokat (helyettesítéses integrálást használva)
   a) $\displaystyle\int (6x+3)\cdot\cos(3x^2+3x)\ dx$
   b) $\displaystyle\int x\cdot\sin(x^2+\frac{2}{3}\pi)\ dx$
   c) $\displaystyle\int \frac{1}{(3\sqrt{x}+2)^2}\ dx$
3. Adjuk meg a kijelölt határozatlan integrálokat (parciális integrálást használva)
   a) $\displaystyle\int x\cdot\cos x\ dx$
   b) $\displaystyle\int x\cdot\ln x\ dx \qquad \int \ln x\ dx$
   c) $\displaystyle\int \sin x\cdot e^x\ dx$

Elméleti kérdések

1. A primitív függvény definíciója.
2. A primitív függvény tulajdonságai.
3. A határozatlan integrál fogalma.
4. Milyen kapcsolatot ismer adott függvény primitív függvényei között?
5. Írja le a határozatlan integrálra vonatkozó műveleti tulajdonságokat!
6. Fogalmazza meg a helyettesítéses integrálás szabályát határozatlan integrálokra!
7. Fogalmazza meg a határozatlan integrálra vonatkozó parciális integrálás elvét!
8. Sorolja fel, hogy milyen típusú integrandusok esetén és hogyan érdemes parciális integrálást végezni. (4 eset)

Kalkulus II előadás

5. előadás

Speciális függvényosztályok integrálása I.

Király Balázs

Pécsi Tudományegyetem
Matematikai és Informatikai Intézet

2022.

Elemi törtfüggvények

Definíció

Az

i) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$
$x \in \mathbb{R},\; n \in \mathbb{N},\; a_i \in \mathbb{R}\; (i = 0, \ldots, n)$

ii) $f(x) = \dfrac{A}{(x-a)^n}, \quad a \in \mathbb{R},\; x \neq a,\; n \in \mathbb{N}^*,\; A \in \mathbb{R}$

iii) $f(x) = \dfrac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n},$
$A, B \in \mathbb{R},\; x \in \mathbb{R},\; a, b, c \in \mathbb{R}, (b^2 - 4ac < 0),\; n \in \mathbb{N}^*,$

alakú függvényeket elemi törtfüggvényeknek nevezzük.

Elemi törtfüggvények

Tétel

Minden racionális függvény felbontható véges számú elemi törtfüggvény összegére.

Megjegyzés

A tétel bizonyításától eltekintünk. Helyette egy, a gyakorlatban jól alkalmazható eljárás lépéseit írjuk le, amellyel a felbontást elő is állíthatjuk.

1.lépés: A racionális függvényt polinom és valódi racionális tört összegére bontjuk.

Elemi törtfüggvények

Definíció

Az $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ $x \in \mathbb{R} \setminus \Lambda_Q$, $\Lambda_Q = \{\lambda \in \mathbb{R} | \ Q(\lambda) = 0\}$ *(*P, Q *polinomok) racionális törtfüggvényt* ***valódi racionális tört****nek nevezzük, ha* $\deg P < \deg Q$*. (Ha* $\deg P \geq \deg Q$*, akkor a függvényt* ***racionális áltört****nek hívjuk.)*

Ha $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} (x \in \mathbb{R} \setminus \Lambda_Q)$ egy racionális áltört, akkor P-n Q-val maradékos osztást végezve felbontjuk:

$$P(x) = P_1(x) \cdot Q(x) + R(x), \quad \text{ahol } R = 0, \text{ vagy } \deg R < \deg Q.$$

Ekkor

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x) \cdot Q(x) + R(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

ahol $\frac{R(x)}{Q(x)}$ már valódi racionális tört.

Elemi törtfüggvények

2.lépés: A nevezőt irreducibilis (elsőfokú-, vagy negatív diszkriminánsú másodfokú-) tényezők szorzatára bontjuk.

3.lépés: A törtet elemi törtek összegére bontjuk az egyenlő együtthatók módszerével.

Elemi törtfüggvények integrálása

I. Ha f polinom, akkor tagonként integrálunk.

II. Ha $f(x) = \dfrac{A}{(x-a)^n}$, $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$, akkor az alábbi két eset lehetséges.

a) Ha $n = 1$, akkor

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{1}{x-a}dx = A\int \frac{1}{t}dt = A \cdot \ln|t| + C = A \cdot \ln|x-a| + C.$$

$$\begin{aligned} t &= x-a \\ dt &= dx \end{aligned}$$

b) Ha $n \geq 2$, akkor

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int \frac{1}{(x-a)^n}dx = A\int t^{-n}dt = A \cdot \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = -\frac{A}{n-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C.$$

$$\begin{aligned} t &= x-a \\ dt &= dx \end{aligned}$$

Elemi törtfüggvények integrálása

III Ha $f(x) = \dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$, $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$, ahol $D = b^2 - 4ac < 0$, akkor első lépésként a nevezőt teljes négyzetté alakítjuk:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\underbrace{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}_{=:\alpha^2>0}\right)$$

Elemi törtfüggvények integrálása

Ekkor

$$\int f(x)dx = \int \frac{Ax+B}{a^n\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\alpha^2\right)^n}dx = \int \frac{A\cdot\left(t-\frac{b}{2a}\right)+B}{a^n\left(t^2+\alpha^2\right)^n}dt =$$

$$\begin{aligned} t &= x+\tfrac{b}{2a} \\ x &= t-\tfrac{b}{2a} \\ dt &= dx \end{aligned}$$

$$= \frac{A}{a^n}\int \frac{t}{\left(t^2+\alpha^2\right)^n}dt + \frac{B-\frac{Ab}{2a}}{a^n}\int \frac{1}{\left(t^2+\alpha^2\right)^n}dt.$$

Ezek után a következő négy fajta integrál kiszámítására lehet szükség.

Elemi törtfüggvények integrálása

a)

$$\int \frac{1}{t^2+\alpha^2}dt = \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2}dt = \frac{1}{\alpha}\int \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg} u + C = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{t}{\alpha} + C$$

$$\begin{aligned} u &= \tfrac{t}{\alpha} \\ du &= \tfrac{1}{\alpha}dt \end{aligned}$$

b)

$$\int \frac{t}{t^2+\alpha^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|t^2+\alpha^2| + C$$

$$\begin{aligned} u &= t^2+\alpha^2 \\ du &= 2tdt \end{aligned}$$

c)

$$\int \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^n}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^n}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{-1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(t^2+\alpha^2)^{n-1}} + C$$

$$\begin{aligned} u &= t^2+\alpha^2 \\ du &= 2tdt \end{aligned}$$

Elemi törtfüggvények integrálása

d)

$$\int \frac{1}{(t^2+\alpha^2)^n}dt = \int \frac{1}{(\alpha^2 \mathrm{tg}^2 u+\alpha^2)^n}\cdot\frac{\alpha}{\cos^2 u}du =$$

$$\begin{aligned} t &= \alpha\cdot\mathrm{tg} u \quad -\tfrac{\pi}{2}<u<\tfrac{\pi}{2} \\ dt &= \alpha\cdot\tfrac{1}{\cos^2 u}du \end{aligned}$$

$$= \int \frac{1}{\alpha^{2n-1}(1+\mathrm{tg}^2 u)^n}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}du = \frac{1}{\alpha^{2n-1}}\int \frac{1}{\left(\frac{\cos^2 u+\sin^2 u}{\cos^2 u}\right)^n}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}du =$$

$$= \frac{1}{\alpha^{2n-1}}\int \frac{\cos^{2n} u}{\cos^2 u}du = \frac{1}{\alpha^{2n-1}}\int \cos^{2(n-1)} u \, du$$

Az eljárás folytatására visszatérünk a trigonometrikus függvények integrálásakor.

Trigonometrikus függvények polinomjainak integrálása

I.) $\int \sin x \; dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x \; dx = \sin x + C$

II. $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \; dx \quad (n, m \in \mathbb{N})$

i) Az $n = m = 0$ eset érdektelen, hiszen ekkor valójában nem is trigonometrikus függvényről van szó.

ii) Ha n páratlan (m tetszőleges)
Legyen $n = 2k+1$, ahol $k \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x \; dx = \int \sin^{2k+1} x \cdot \cos^m x dx = \int \sin^{2k} x \cdot \cos^m x \cdot \sin x \; dx =$$

$$= \int (\sin^2 x)^k \cdot \cos^m x \cdot \sin x \; dx = \underset{\substack{t \;=\; \cos x \\ dt \;=\; -\sin x dx}}{\int (1 - \cos^2 x)^k \cdot \cos^m x \cdot \sin x dx} = -\int (1 - t^2)^k \cdot t^m dt$$

Ezzel a feladatot egy polinom integrálására vezettük vissza.

iii) Ha m páratlan (n tetszőleges)
Legyen $m = 2\ell + 1$, ahol $\ell \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x \; dx = \int \sin^n x \cdot \cos^{2\ell+1} x \; dx =$$

$$= \int \sin^n x \cdot \cos^{2\ell} x \cdot \cos x \; dx = \int \sin^n x \cdot (\cos^2 x)^\ell \cdot \cos x \; dx =$$

$$= \int \sin^n x \cdot (1 - \sin^2 x)^\ell \cdot \cos x \; dx = \int u^n \cdot (1 - u^2)^\ell du$$

$$\begin{aligned} u &= \sin x \\ du &= \cos x \; dx \end{aligned}$$

Ezzel a feladatot most is egy polinom integrálására vezettük vissza.

Trigonometrikus függvények polinomjainak integrálása

iv) Ha n és m mindegyike páros, azaz $n = 2k$ és $m = 2\ell$, ahol $k, \ell \in \mathbb{N}$ és nem mindegyik 0.
Ehhez a jól ismert addíciós képletből és a trigonometrikus Pitagorasz tételből ún. linearizáló formulák vezethetők le:

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ 1 &= \cos^2 x + \sin^2 x \end{aligned}$$

A fenti egyenletrendszerből $\cos^2 x$-t illetve $\sin^2 x$-t kifejezve:

Linearizáló formulák

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \qquad x \in \mathbb{R} \\ \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Trigonometrikus függvények polinomjainak integrálása

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x \; dx = \int \sin^{2k} x \cdot \cos^{2\ell} x \; dx = \int (\sin^2 x)^k \cdot (\cos^2 x)^\ell dx =$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^\ell dx = \dots$$

Megmutatható, hogy véges sok lépésben
$\int \cos^m ax \; dx \quad (a \in \mathbb{Z}^+, m \in \mathbb{N} \text{ páratlan})$ integrálására vezethető a probléma.

Megjegyzés

Parciális integrálással rekurziós formula adható erre az esetre.

Elméleti kérdések a témakör végén

Kalkulus II előadás

6. előadás
Speciális függvényosztályok integrálása II.

Király Balázs

Pécsi Tudományegyetem
Matematikai és Informatikai Intézet

2022

Trigonometrikus függvények racionális függvényeinek integrálása

III. $\int \frac{1}{\sin^n x}dx$ és $\int \frac{1}{\cos^n x}dx$ alakú integrálok

i) Ha $n = 2k \quad k \in \mathbb{N}^*$

$$\int \frac{1}{\sin^n x}dx = \int \frac{1}{\sin^{2k} x}dx = \int \frac{1}{\sin^{2k-2} x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}dx =$$

$$= \int (1 + \mathrm{ctg}^2 x)^{k-1} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\int (1 + t^2)^{k-1}dt.$$

$$\begin{aligned} t &= \mathrm{ctg} x \quad x \in (0,\pi) \\ dt &= \frac{-1}{\sin^2 x}dx \end{aligned}$$

Ezzel a feladatot egy polinom integrálására vezettük vissza.

Trigonometrikus függvények racionális függvényeinek integrálása

Hasonlóan járhatunk el $\int \frac{1}{\cos^n x} dx$ esetén is:

$$\int \frac{1}{\cos^n x} dx = \int \frac{1}{\cos^{2k} x} dx = \int \frac{1}{\cos^{2k-2} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)^{k-1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \right)^{k-1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \int \left(1 + \mathrm{tg}^2 x \right)^{k-1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + u^2)^{k-1} du.$$

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{tg} x \quad x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \\ du &= \tfrac{1}{\cos^2 x} dx \end{aligned}$$

Ezzel ezt a feladatot is egy polinom integrálására vezettük vissza.

Trigonometrikus függvények racionális függvényeinek integrálása

i) Ha $n = 2k+1 \quad k \in \mathbb{N}$

$$\int \frac{1}{\sin^n x} dx = \int \frac{1}{\sin^{2k+1} x} dx = \int \frac{\sin x}{(\sin^2 x)^{k+1}} dx = \int \frac{\sin x}{(1-\cos^2 x)^{k+1}} dx =$$

$$= -\int \frac{1}{(1-t^2)^{k+1}} dt \qquad \begin{aligned} t &= \cos x \\ dt &= -\sin x dx \end{aligned}$$

A feladatot ezzel egy racionális tört integrálására vezettük.

Hasonlóan:

$$\int \frac{1}{\cos^n x} dx = \int \frac{1}{\cos^{2k+1} x} dx = \int \frac{\cos x}{(\cos^2 x)^{k+1}} dx = \int \frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)^{k+1}} dx =$$

$$= \int \frac{1}{(1-t^2)^{k+1}} dt \qquad \begin{aligned} t &= \sin x \\ dt &= \cos x dx \end{aligned}$$

Ezzel ezt a feladatot is egy racionális tört integrálására vezettük.

Megjegyzés

Parciális integrálással rekurziós formula adható.

Trigonometrikus függvények racionális függvényeinek integrálása

IV) $\operatorname{tg}x$, vagy $\operatorname{ctg}x$ racionális tört-függvényeinek integrálása

$$\int \mathcal{R}(\operatorname{tg}x)dx = \int \mathcal{R}(t)\cdot\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$\begin{aligned} t &= \operatorname{tg}x \quad x\in\left(-\tfrac{\pi}{2},\ \tfrac{\pi}{2}\right) \\ x &= \operatorname{arctg}t \\ dx &= \tfrac{1}{1+t^2}dt \end{aligned}$$

Így egy racionális tört-függvényt kell integrálnunk.

$$\int \mathcal{R}(\operatorname{ctg}x)dx = \int \mathcal{R}(y)\cdot\frac{-1}{1+y^2}dy.$$

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{ctg}x \quad x\in(0,\pi) \\ x &= \operatorname{arcctg}y \\ dx &= \tfrac{-1}{1+y^2}dy \end{aligned}$$

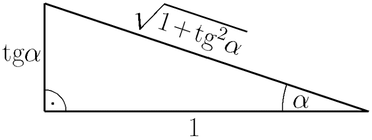
Így egy racionális tört-függvényt kell integrálnunk.

V) $\sin x$ és $\cos x$ racionális tört-függvényeinek integrálása

$$\int \mathcal{R}(\sin x,\ \cos x)dx = .$$

$$\begin{aligned} t &= \operatorname{tg}\frac{x}{2} \qquad x \in (-\pi, \pi) \\ x &= 2\operatorname{arctg} t \\ dx &= \frac{2}{1+t^2}dt \end{aligned}$$

$\sin x$ és $\cos x$ átírásához tekintsük a következő ábrát:



$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

Trigonometrikus függvények racionális függvényeinek integrálása

Az addíciós összefüggések alapján:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \tfrac{2\cdot \mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} \\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \tfrac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}. \end{aligned}$$

$\alpha = \frac{x}{2}$ esetén

$$\begin{aligned} \sin x &= \tfrac{2\cdot \mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \tfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \tfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \tfrac{1-t^2}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Így

$$\ominus \int \mathcal{R}\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}dt.$$

Azaz újfent elég egy racionális tört-függvényt integrálni.

Trigonometrikus függvények racionális függvényeinek integrálása

Ezeket az összefüggéseket megkaphatjuk pusztán az addíciós képletek és a négyzetes összefüggés (trigonometrikus Pitagorasz-tétel) alkalmazásával:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = 2\mathrm{tg}\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} =$$

$$= \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\frac{\sin^2 x2+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2} =$$

$$= \left(1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Trigonometrikus függvények racionális függvényeinek integrálása

Megjegyzés

Ezzel a módszerrel minden ilyen típusú integrál megoldható (a korábban tárgyalt esetek is), de nem mindig ez a célszerű út.

Összefoglalva $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$-es helyettesítés során az alábbiak igazak:

$$\begin{aligned} t &= \mathrm{tg}\frac{x}{2} \quad x \in (-\pi, \pi) \\ dx &= \frac{2}{1+t^2}dt \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

Trigonometrikus függvények racionális függvényeinek integrálása

VI) Az előző típusba tartozó integrálok esetén, ha $\mathcal{R}(\sin x,\ \cos x) = \mathcal{R}(-\sin x,\ -\cos x)$, akkor az $y = \mathrm{tg} x$-es helyettesítés is célravezető és egyszerűbb eredményt ad. Ilyenkor

$$\cos^2 x = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x = \mathrm{tg}^2 x \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1 + \mathrm{tg}^2 x} = \frac{y^2}{1 + y^2}$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = \mathrm{tg} x \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 x} = \frac{y}{1 + y^2}$$

Trigonometrikus függvények racionális függvényeinek integrálása

Összefoglalva, a helyettesítés során az alábbiak igazak:

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{tg} x \quad x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \\ dx &= \frac{1}{1+y^2} dy \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{y^2}{1+y^2} \\ \cos^2 x &= \frac{1}{1+y^2} \\ \sin x \cdot \cos x &= \frac{y}{1+y^2} \end{aligned}$$

Megjegyzés

A $\mathcal{R}(\sin x,\ \cos x) = \mathcal{R}(-\sin x,\ -\cos x)$ *feltétel a gyakorlatban annyit jelent, hogy mind a* $\sin x$*, mind pedig a* $\cos x$ *hatványai az integrandusban páros kitevősek és a vegyes szorzatok esetén a kitevők összege páros.*

Irracionális függvények integrálása

I.) x és $\sqrt[n]{x}$ racionális tört-függvényeinek integrálása

$$\int \mathcal{R}(x,\ \sqrt[n]{x})dx = \int \mathcal{R}(t^n,\ t)n \cdot t^{n-1}dt,$$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt[n]{x} \\ x &= t^n \\ dx &= n{\cdot}t^{n-1}dt \end{aligned}$$

Ezzel racionális tört integrálására vezettük vissza a problémát.

II.) Az $\int \mathcal{R}(x,\ \sqrt[n_1]{x},\ \sqrt[n_2]{x}, \dots,\ \sqrt[n_k]{x})dx$ alakú integrálok esetén legyen $n := [n_1; n_2; \dots; n_k]$, ahol $[a; b]$ az a és b számok legkisebb közös többszöröse, ekkor a $t = \sqrt[n]{x}$ helyettesítés célravezető.

Irracionális függvények integrálása

III. x és $\sqrt[n]{ax+b}$ racionális tört-függvényeinek integrálása

$$\int \mathcal{R}(x,\ \sqrt[n]{ax+b})dx = \int \mathcal{R}\left(\frac{t^n-b}{a},\ t\right)\cdot\frac{n}{a}\cdot t^{n-1}dt,$$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt[n]{ax+b} \\ t^n &= ax+b \\ \frac{t^n-b}{a} &= x \\ \frac{n}{a}\cdot t^{n-1}dt &= dx \end{aligned}$$

így most is egy racionális törtet kell integrálni.

IV. Az $\int \mathcal{R}(x,\ \sqrt[n_1]{ax+b},\ \sqrt[n_2]{ax+b},\dots,\ \sqrt[n_k]{ax+b})dx$ alakú integrálok esetén legyen $n := [n_1; n_2; \dots; n_k]$, ahol $[a; b]$ az a és b számok legkisebb közös többszöröse, ekkor a $t = \sqrt[n]{ax+b}$ helyettesítés célravezető.

Irracionális függvények integrálása

V.) x és $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ racionális tört-függvényeinek integrálása

$$\int \mathcal{R}\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \qquad ,$$

$$\begin{aligned}
t &= \sqrt[n]{\tfrac{ax+b}{cx+d}} \\
t^n \cdot (cx+d) &= ax+b \\
x \cdot (t^n c-a) &= b-dt^n \\
x &= \tfrac{b-dt^n}{t^n c-a} \\
dx &= \tfrac{-ndt^{n-1}\cdot(t^n c-a)-cnt^{n-1}\cdot(b-dt^n)}{(ct^n-a)^2} dt
\end{aligned}$$

$$= \int \mathcal{R}\left(\frac{b-dt^n}{t^n c-a},\ t\right) \cdot \frac{-ndt^{n-1}\cdot(t^n c-a)-cnt^{n-1}\cdot(b-dt^n)}{(ct^n-a)^2} dt$$

Azaz most is egy racionális törtfüggvényt kell integrálni.

Irracionális függvények integrálása

VI. Az $\int \mathcal{R}\left(x,\ \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ldots,\ \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ alakú integrálok esetén legyen legyen $n := [n_1; n_2; \ldots; n_k]$, ahol $[a; b]$ az a és b számok legkisebb közös többszöröse, ekkor a $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ helyettesítés célravezető.

VII Az $\int \mathcal{R}\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ alakú integrálok esetén a másodfokú kifejezés főegyűtthatójától és diszkriminánsától függően a teljes-négyzetté alakítás és helyettesítés után a következő három integrál valamelyikéhez jutunk.

a) $a < 0,\ D > 0$

$$\int \sqrt{1-t^2}dt \qquad = \int \sqrt{1-\sin^2 u} \cdot \cos u \ du =$$

$$\begin{aligned} t &= \sin u \qquad -\tfrac{\pi}{2} \leq u \leq \tfrac{\pi}{2} \\ dt &= \cos u \ du \end{aligned}$$

$$= \int \sqrt{\cos^2 u} \cdot \cos u \ du = \int |\cos u| \cdot \cos u \ du \quad =$$

$$-\tfrac{\pi}{2} \leq u \leq \tfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos u \geq 0$$

$$= \int \cos^2 u \ du = \ldots$$

Ezzel a feladatot egy korábban tárgyalt problémára vezettük vissza.

b) $a > 0,\ D < 0$

$$\int \sqrt{1+t^2}\,dt \quad = \int \sqrt{1+\mathrm{tg}^2 u} \cdot \frac{1}{\cos^2 u}\,du =$$

$$\begin{aligned} t &= \mathrm{tg} u \qquad -\tfrac{\pi}{2}<u<\tfrac{\pi}{2} \\ dt &= \tfrac{1}{\cos^2 u}\,du \end{aligned}$$

$$= \int \sqrt{\frac{1}{\cos^2 u}} \cdot \frac{1}{\cos^2 u}\,du = \int \frac{1}{|\cos u|} \cdot \frac{1}{\cos^2 u}\,du \quad =$$

$$-\tfrac{\pi}{2}<u<\tfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos u>0$$

$$= \int \frac{1}{\cos^3 u}\,du = \dots$$

Ezzel a feladatot egy korábban tárgyalt problémára vezettük vissza.

Irracionális függvények integrálása

c) Az $a > 0,\ D > 0$ esetben úgynevezett *Euler-helyettesítés*t használunk.

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{ax^2+bx+c} &= \sqrt{a}x+t \\
ax^2+bx+c &= ax^2+2\sqrt{a}xt+t^2 \\
x(b-2\sqrt{a}t) &= t^2-c \\
x &= \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t} \\
dx &= \frac{2t(b-2\sqrt{a}t)+(t^2-c)2\sqrt{a}}{(b-2\sqrt{a}t)^2}dt
\end{aligned}\right\}$$

Így

$$\begin{aligned}
\sqrt{ax^2+bx+c} &= \sqrt{a}\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}+t \\
x &= \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t} \\
dx &= \frac{2t(b-2\sqrt{a}t)+(t^2-c)2\sqrt{a}}{(b-2\sqrt{a}t)^2}dt
\end{aligned}$$

Ezzel a feladatot racionális tört integrálására vezettük.

Elméleti kérdések

1. Milyen függvényeket nevezünk elemi törtfüggvényeknek?
2. Írja le a racionális törtfüggvények integrálásának lépéseit!
3. Írja fel a trigonometrikus függvényekre vonatkozó linearizáló formulákat!
4. Írja fel a $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$-es helyettesítéshez szükséges összefüggéseket!
5. Írja fel a $\mathrm{tg}x$-es helyettesítéshez szükséges összefüggéseket és azt, mikor érdemes alkalmazni a módszert!

Kalkulus II előadás

7. előadás
Határozott integrál, improprius integrál
Integrálszámítás alkalmazásai

Király Balázs

Pécsi Tudományegyetem
Matematikai és Informatikai Intézet

2022

Intervallum felosztása

Legyen $\mathcal{I} := [a, b]$ véges, zárt intervallum.

Definíció

*A τ halmazt az $\mathcal{I} := [a, b]$ intervallum egy **felosztás**ának nevezzük, ha*

- i) $\tau \subseteq \mathcal{I}$,
- ii) τ *véges halmaz,*
- iii) $a, b \in \tau$.

Jelölés: $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$.

Az $\mathcal{I}$ intervallum felosztásainak halmazát $\mathcal{F}(\mathcal{I})$-vel jelöljük.

Felosztás finomsága

Definíció

*Legyen $\tau \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ az $\mathcal{I}$ intervallum egy felosztása. A τ felosztás **finomság**án a*

$$\|\tau\| := \max_{i=1}^{n}\{x_i - x_{i-1}\}$$

számot értjük.

Megjegyzés

A felosztás finomsága tehát a felosztással létrehozott $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumok hosszainak maximuma

Alsó- és felső- közelítő összeg

Definíció

Legyen $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ *egy korlátos függvény és* $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ *az* $\mathcal{I}$ *intervallum egy felosztása. Jelölje*

$$\begin{aligned} m_i &:= \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}, \quad i = 1, \ldots, n \\ M_i &:= \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}, \quad i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Ekkor a

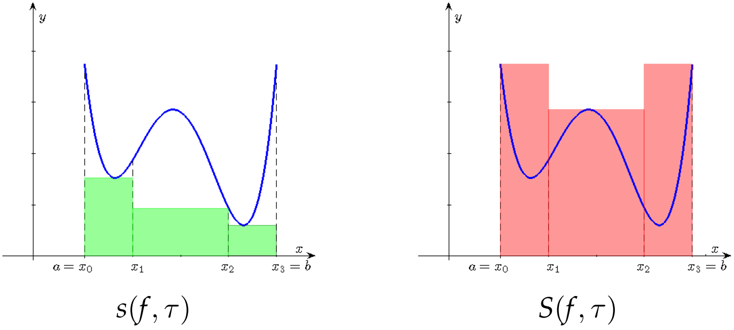
$$S(f, \tau) := \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

összeget a függvény, τ *felosztáshoz tartozó* ***felső közelítő összegének****, a*

$$s(f, \tau) := \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

összeget pedig a függvény, τ *felosztáshoz tartozó* ***alsó közelítő összegének*** *nevezzük.*

Alsó- és felső- közelítő összeg



Megjegyzés

Mivel $m_i \leq M_i$ minden i index esetén, ezért bármely τ felosztás mellett $s(f,\tau) \leq S(f,\tau)$.

Felosztás finomítása és a közelítő összegek

Definíció

*Legyen $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ugyanazon intervallum két felosztása. Akkor mondjuk, hogy a τ_2 felosztás a τ_1 felosztás **finomítása**, ha annak minden osztópontját tartalmazza, azaz ha $\tau_1 \subset \tau_2$.*

Tétel

a) *Ha $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ és $\tau_1 \subset \tau_2$, akkor*

$$s(f, \tau_1) \leq s(f, \tau_2) \quad \text{és} \quad S(f, \tau_1) \geq S(f, \tau_2),$$

azaz a felosztás finomításával az alsó közelítő összeg nem csökken, a felső közelítő összeg pedig nem növekszik.

b) *Bármely két $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ felosztás esetén*

$$s(f, \tau_1) \leq S(f, \tau_2).$$

Darboux-féle alsó- és felső integrál

Következmény

A $\{s(f,\tau),\ \tau \in \mathcal{F}(\mathcal{I})\}$ számhalmaz felülről korlátos, míg a $\{S(f,\tau),\ \tau \in \mathcal{F}(\mathcal{I})\}$ számhalmaz alulról korlátos.

Definíció

Legyen f az $\mathcal{I} = [a,b]$ zárt intervallumon korlátos függvény. Az

$$I_*(f) := \sup\{s(f,\tau) :\ \tau \in \mathcal{F}(\mathcal{I})\}$$

*értéket az f **Darboux-féle alsó integráljának**, az*

$$I^*(f) := \inf\{S(f,\tau) :\ \tau \in \mathcal{F}(\mathcal{I})\}$$

*értéket az f **Darboux-féle felső integráljának** nevezzük.*

Riemann-integrálhatóság, A Riemann integrál geometriai jelentése

Definíció

Akkor mondjuk, hogy az f függvény az $\mathcal{I} = [a, b]$ intervallumon ***Riemann-integrálható****, ha $I_*(f) = I^*(f) =: I$. Ekkor az I számot az f függvény* ***Riemann-integrál****jának nevezzük és $\int_a^b f(x)dx := I$ jelölést használjuk.*

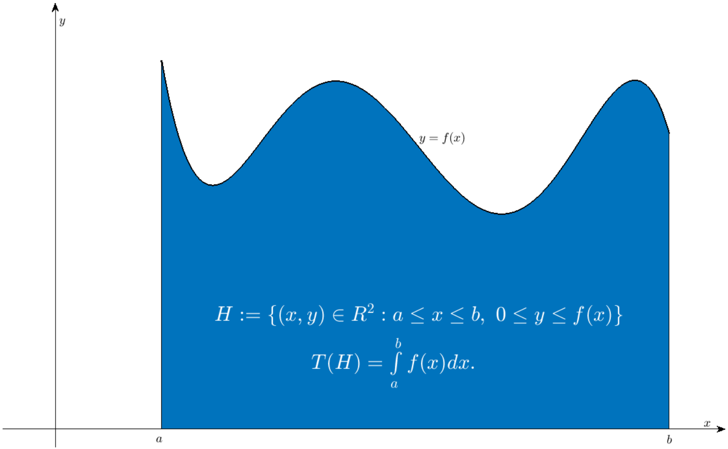
Definíció

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ és f Riemann integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor a

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

halmaznak létezik területe és $T(H) = \int_a^b f(x)dx$.

A Riemann integrál geometriai jelentése



$$H := \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

$$T(H) = \int_a^b f(x)dx.$$

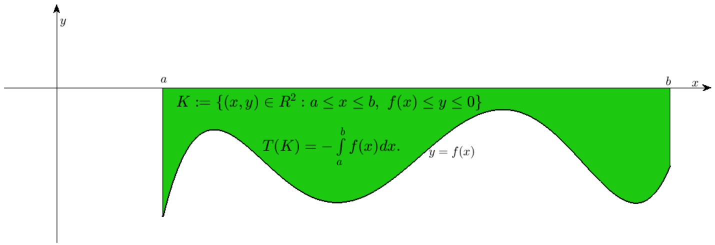
A Riemann integrál geometriai jelentése

Definíció

Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}_0^-$ *és* f *Riemann integrálható az* $[a,b]$ *intervallumon, akkor a*

$$K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ f(x) \le y \le 0\}$$

halmaznak létezik területe és $T(K) = -\int\limits_a^b f(x)dx$.



Riemann-közelítőösszeg

Definíció

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény és* $\tau \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ *az* $[a, b]$ *intervallum egy felosztása, amelyre* $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$*.*
Legyen továbbá

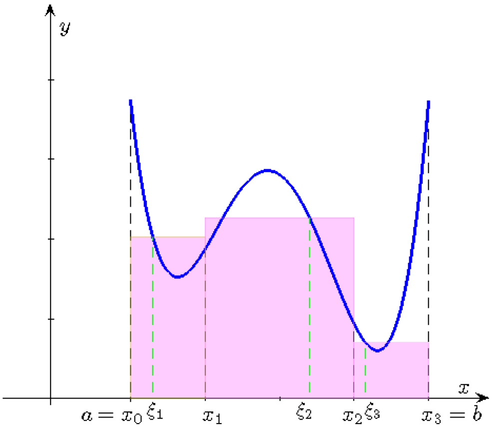
$$A_\tau := \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \mid x_{i-1} \le \xi_i \le x_i,\ i = 1,2,\ldots,n\}$$

úgynevezett ***közbeeső pontok rendszere****. Ekkor a*

$$\sigma(f, \tau, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}), \quad \tau \in \mathcal{F}(\mathcal{I}), \xi \in A_\tau$$

számot az f *függvény* τ, ξ *paraméterpárhoz tartozó* ***Riemann-közelítőösszegének*** *nevezzük.*

Riemann-közelítőösszeg



$$\sigma(f, \tau, \xi)$$

Riemann-közelítőösszeg

Definíció

Akkor mondjuk, hogy a $\tau_0 \subseteq \tau_1 \subseteq \ldots \subseteq \tau_k \subseteq \ldots$ *felosztás-sorozat minden határon túl finomodó, ha bármely* $\varepsilon > 0$ *esetén létezik* k_0 *index, hogy* $\|\tau_{k_0}\| < \varepsilon$.

Tétel

Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható, ha* $\sigma(f, \tau, \xi)$ *közelítő összegek sorozata a felosztás minden határon túl való finomítása mellett a* ξ *közbeeső pontok rendszer választásától függetlenül ugyanahhoz a* I *számhoz tart.*

A Riemann-integrálhatóság feltételei

Tétel (szükséges feltétel)

Ha f Riemann-integrálható, akkor korlátos.

Tétel (elégséges feltételek)

i) *A véges zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény Riemann-integrálható.*

ii) *A véges zárt intervallumon értelmezett korlátos függvény Riemann-integrálható, ha legfeljebb véges sok szakadása van.*

iii) *A véges zárt intervallumon értelmezett korlátos és monoton függvény Riemann-integrálható.*

A Riemann-integrálhatóság feltételei

Következmény

Ha az f függvény értékét az intervallumban véges sok helyen megváltoztatjuk, akkor az sem az integrálhatóságot, sem pedig az integrál értékét nem változtatja meg.

Megjegyzés

Például a Dirichlet-függvény nem integrálható a $[0,\ 1]$ intervallumon.

$$D(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,\ 1], \\ 0, & x \in [0,\ 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Mivel bármely részintervallumban van racionális szám, ezért minden $M_i = 1$ és mivel minden részintervallumban van irracionális szám, ezért minden $m_i = 0$. Így a felső Darboux-integrál 1, az alsó Darboux-integrál pedig 0. A függvény korlátos, de végtelen sok szakadási helye van.

A határozott integrál tulajdonságai

Tétel

Legyen az f függvény az $[a,b]$ intervallumon integrálható és c tetszőleges valós szám, ekkor a $c \cdot f$ függvény is integrálható az $[a,b]$ intervallumon és

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Tétel

Ha az f és a g függvények az $[a,b]$ intervallumon integrálhatók, akkor az $f+g$ függvény is integrálható az $[a,b]$ intervallumon és

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

A határozott integrál tulajdonságai

Tétel

Ha az f függvény az $[a,b]$ intervallumon integrálható, akkor annak bármely részintervallumán is integrálható.

Tétel (intervallum szerinti additivitás 1.)

Ha az f függvény az $[a,b]$ intervallumon integrálható és $a<c<b$, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Tétel (intervallum szerinti additivitás 2.)

Ha az f függvény az $[a,c]$ és $[c,b]$ intervallumokon integrálható, akkor integrálható az $[a,b]$ intervallumon és

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

A határozott integrál tulajdonságai

Tétel

Ha az f függvény az $[a, b]$ intervallumon integrálható és $f(x) \geq 0$ minden $x \in [a, b]$ esetén, akkor

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Tétel

Ha az f és a g függvények az $[a, b]$ intervallumon integrálhatók és $f(x) \leq g(x)$ minden $x \in [a, b]$ esetén, akkor

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

A határozott integrál tulajdonságai

Tétel

Legyen f függvény az $[a,b]$ intervallumon integrálható, ekkor

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Tétel

Legyen f függvény az $[a,b]$ intervallumon integrálható, továbbá $m := \inf\{f(x) |\ a \le x \le b\}$ és $M := \sup\{f(x) |\ a \le x \le b\}$, ekkor

$$m \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M \cdot (b-a).$$

Az integrálszámítás középérték-tétele

Tétel (Az integrálszámítás középérték-tétele)

Ha az f függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon, akkor létezik olyan $\xi \in [a,b]$ hely, hogy

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b-a).$$

Integrálfüggvény

Definíció

Legyen f függvény az $[a,b]$ intervallumon integrálható. Értelmezzük a F függvényt a következőképpen:

$$\mathcal{D}_F = [a,b], \quad F(x) := \int_a^x f(t)dt.$$

Ekkor a $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt a f függvény ***integrálfüggvényének*** *nevezzük.*

Tétel

Ha a f függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon, akkor a $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ integrálfüggvény az $[a,b]$ intervallumon differenciálható és $F' = f$.

Newton-Leibniz formula

Megjegyzés

Az előző tétel alapján nyilvánvaló, hogy az integrálfüggvény egy primitív függvény.

Tétel (Newton-Leibniz formula)

Legyen az f függvény integrálható az $[a,b]$ intervallumon. Ha az f függvénynek létezik az $[a,b]$ intervallumon F primitív függvénye, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Integrálási szabályok határozott integrálra

Tétel (Helyettesítéses integrálás szabálya határozott integrálra)

Legyen a $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a,b]$-n, differenciálható (a,b)-n és a φ' deriváltfüggvény legyen integrálható az [a,b]-n, továbbá f legyen folytonos a $\varphi([a,b])$ intervallumon. Ekkor

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du = \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx.$$

Integrálási szabályok határozott integrálra

Tétel (Parciális integrálás szabálya határozott integrálra)

Legyen f és g függvény az $[a,b]$ intervallumon differenciálható és f', g' függvények legyenek Riemann-integrálhatók az $[a,b]$-n. Ekkor

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)\cdot g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx.$$

Improprius integrál

A Riemann-integrálhatóság szükséges feltételein (véges intervallumon értelmezett, korlátos függvény) próbálunk lazítani. Így a következő esetekhez jutunk:

- Végtelen intervallumon értelmezett függvények integrálása
  - $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$
  - $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx$
  - $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$
- Nem korlátos függvény integrálása
  - A függvény nem korlátos a bal végpont közelében
  - A függvény nem korlátos a jobb végpont közelében
  - Az intervallum belsejében található egy pont, melynek környezetében a függvény nem korlátos

Improprius integrál

Definíció

Legyen $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *olyan függvény, amely integrálható minden* $[a, x]$ *intervallumon, ahol* $x > a$*. Azt mondjuk, hogy az*

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

improprius integrál konvergens*, ha létezik a*

$$\lim_{\beta\to\infty} \int_a^\beta f(x)dx$$

véges határérték. Ekkor definíció szerint

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{\beta\to\infty} \int_a^\beta f(x)dx.$$

Improprius integrál

Definíció

Legyen $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ *olyan függvény, amely integrálható minden* $[x, b]$ *intervallumon, ahol* $x < b$. *Azt mondjuk, hogy az*

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$$

improprius integrál konvergens*, ha létezik a*

$$\lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{b} f(x)dx$$

véges határérték. Ekkor definíció szerint

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx := \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{b} f(x)dx.$$

Improprius integrál

Definíció

Ha az f függvény integrálható minden véges $[x, y]$ intervallumon és létezik a véges

$$\lim_{\alpha \to -\infty} \lim_{\beta \to \infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

határérték, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{\alpha \to -\infty} \lim_{\beta \to \infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Improprius integrál

Definíció

Legyen $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ *nem korlátos függvény az* a *pont környezetében. Tegyük fel, hogy bármely* $x \in (a, b]$ *esetén* f *integrálható az [x,b] intervallumon. Akkor mondjuk, hogy az*

$$\int_a^b f(x)dx$$

improprius integrál konvergens*, ha létezik a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

véges határérték. Ekkor definíció szerint

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Improprius integrál

Definíció

Legyen $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ nem korlátos függvény a b pont környezetében. Tegyük fel, hogy bármely $x \in [a,b)$ esetén f integrálható az [a,x] intervallumon. Akkor mondjuk, hogy az

$$\int_a^b f(x)dx$$

***improprius integrál konvergens**, ha létezik a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

véges határérték. Ekkor definíció szerint

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Improprius integrál

Megjegyzés

Ha az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény valamely $c \in (a,b)$ belső pont környezetében nem korlátos, akkor az integrál intervallum szerinti additivitását kihasználva két, az előző definíciók alapján számolható improprius integrál összegére bontható az

$$\int_a^b f(x)dx$$

improprius integrál:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Területszámítás

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ és f Riemann integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor az f függvény $[a, b]$ intervallum fölé eső darabja, az x -tengely és az $x = a$ illetve az $x = b$ egyenesek által határolt síkidom területe, a korábbi definíció alapján:

$$T = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}_0^-$ és f Riemann integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor az f függvény $[a, b]$ intervallum fölé eső darabja, az x -tengely és az $x = a$ illetve az $x = b$ egyenesek által határolt síkidom területe, a korábbi definíció alapján:

$$T = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Területszámítás

Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény az $[a,b]$ intervallumban előjelet vált és f Riemann integrálható az $[a,b]$ intervallumon, akkor az f függvény $[a,b]$ intervallum fölé eső darabja, az x -tengely és az $x=a$ illetve $x=b$ egyenesek által határolt síkidom területe, az integrál intervallum szerinti additivitása alapján, kiszámítható az előző két típusba eső területek összegeként.

Ha $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvények az $[a,b]$ intervallumon Riemann integrálhatók és $f(x) \le g(x), \ (x \in [a,b])$, akkor a két függvény $[a,b]$ intervallum fölé eső darabja, az $x=a$ és az $x=b$ egyenesek által határolt síkidom területe:

$$T = \int_a^b g(x) - f(x) dx.$$

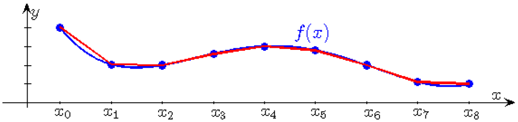
Görbe ívhossza

Definíció

*Folytonos görbe **ívhosszán** értjük a görbéhez írt törött vonalak hosszának szuprémumát, feltéve, hogy ez létezik. Legyen adott a görbe az $[a, b]$ intervallumon az $y = f(x)$ egyenlettel, ahol $f(x)$ folytonosan differenciálható $[a, b]$-n. Ekkor a görbe ívhossza:*

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

*Ha a görbének létezik ívhossza, akkor **rektifikálható**nak nevezzük.*



Forgástest térfogata

Tétel

Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ folytonos függvény grafikonjának x-tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogata:

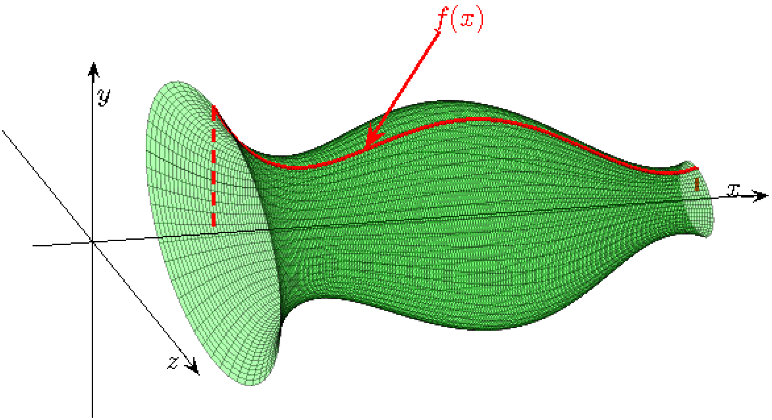
$$V_x = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)dx.$$

Tétel

Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}, \ (a,b > 0)$ kölcsönösen egyértelmű, folytonos függvény grafikonjának y-tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogata:

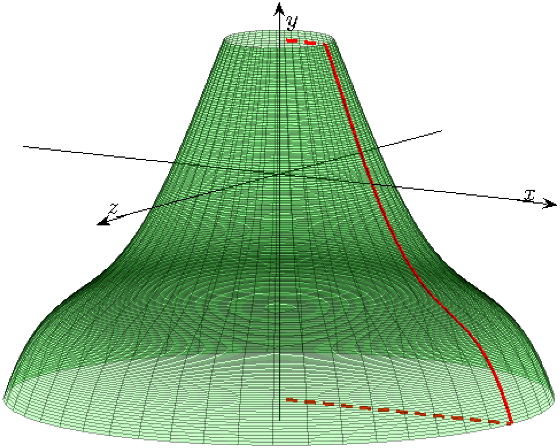
$$V_y = \pi \cdot \int_{f(a)}^{f(b)} \bar{f}^2(y)dy.$$

Forgástest térfogata



x-tengely körüli megforgatással nyert forgástest

Forgástest térfogata



y-tengely körüli megforgatással nyert forgástest

Forgásfelület felszíne

Tétel

Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ folytonosan differenciálható függvény grafikonjának x-tengely körüli megforgatásával nyert forgásfelület felszíne:

$$A = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Elméleti kérdések

1. Mit nevezünk egy intervallum felosztásának?
2. Mit ért egy egy intervallum felosztásának finomságán?
3. Mit nevezünk alsó közelítő összegnek?
4. Mit nevezünk felső közelítő összegnek?
5. Mit mondhatunk ugyanazon függvény alsó- és felső közelítő összegeinek viszonyáról?
6. Hogyan változik a felső közelítő összeg értéke, ha a felosztást finomítjuk?
7. Hogyan változik az alsó közelítő összeg értéke, ha a felosztást finomítjuk?
8. Mit nevezünk az f függvény Darboux-féle alsó integráljának?
9. Mit nevezünk az f függvény Darboux-féle felső integráljának?
10. Mikor mondjuk, hogy az f függvény Riemann-integrálható?

Elméleti kérdések II.

11. Mondjon példát olyan függvényre, amely Riemann szerint nem integrálható a [0,1]-intervallumon!
12. Definiálja az f nem-negatív függvény görbealatti területét!
13. Definiálja a g nem-pozitív függvény görbealatti területét!
14. Definiálja a Riemann-féle közelítő összeget!
15. Mikor mondjuk, hogy az intervallum egy felosztás-sorozata minden határon túl finomodó?
16. Milyen szükséges feltételt ismer függvények Riemann-integrálhatóságára?
17. Írja le a Riemann-integrálra vonatkozó műveleti tulajdonságokat!
18. Írjon 3 elégséges feltételt függvények Riemann-integrálhatóságára!
19. Mondja ki a határozott integrálra vonatkozó műveleti tulajdonságokat!

Elméleti kérdések III.

20 Mondja ki a Newton-Leibniz tételt!

21 Mit nevezünk integrálfüggvénynek?

22 Írja le az integrálfüggvényre vonatkozó tételt!

23 Mondja ki a parciális integrálás szabályát határozott integrál esetén!

24 Mondja ki a helyettesítéses integrálás szabályát határozott integrál esetén!

25 Mondja ki az integrálszámítás középérték tételét!

26 Definiálja az improprius integrál mindkét alapesetét!

27 Definiálja a rektifikálható görbe ívhosszát!

28 Mondja ki a forgástest térfogatára vonatkozó mindkét tételt!

29 Mondja ki a forgásfelület felszínére vonatkozó tételt!

Kalkulus II előadás

8. előadás
Differenciálegyenletek

Király Balázs

Pécsi Tudományegyetem
Matematikai és Informatikai Intézet

2022.

Differenciálegyenletek

Definíció

Az olyan egyenletet, melyben az ismeretlen egy függvény ***függvényegyenlet****nek nevezzük.*

Definíció

Az függvényegyenletet, melyben az ismeretlen függvény deriváltja, vagy deriváltjai szerepelnek ***differenciálegyenlet****nek nevezzük.*

Differenciálegyenletek osztályozása

Definíció

*Ha az ismeretlen függvény egyváltozós valós függvény, akkor a differenciálegyenletet **közönséges differenciálegyenlet**nek nevezzük.*

Definíció

*Ha az ismeretlen függvény többváltozós valós függvény, akkor a differenciálegyenletet **parciális differenciálegyenlet**nek nevezzük.*

Megjegyzés

A félév során csak közönséges differenciálegyenletekkel foglalkozunk.

Differenciálegyenletek osztályozása

Definíció

*A differenciálegyenletet **lineáris**nak nevezzük, ha az egyenletben mind az ismeretlen függvény, mind annak deriváltjai csak az első hatványon szerepelnek és sem ezek szorzatai sem pedig irracionális vagy transzcendens függvényei nem fordulnak elő.*

Megjegyzés

Azaz a DE nem-lineáris, ha következők közül bármelyik szerepel:

- *Az ismeretlen függvény, vagy bármely deriváltjának magasabb hatványa (például y^2)*
- *Az ismeretlen függvény és valamelyik deriváltjának szorzata (például $y \cdot y'$)*
- *Az ismeretlen függvény, vagy bármely deriváltjának irracionális vagy transzcendens függvénye (például $\sqrt{y}$ vagy $\sin y'$)*

Differenciálegyenletek osztályozása

Definíció

*A differenciálegyenletet n**-edrendűnek** nevezzük, ha az ismeretlen függvény deriváltjai közül az egyenletben az n-edik derivált a legmagasabbrendű.*

Definíció

*A differenciálegyenletet **homogénnak** nevezzük, ha nincs benne konstans illetve olyan tag, amely csak a független változótól függ. (Azaz a differenciál egyenlet minden tagja tartalmazza az ismeretlen függvényt, vagy annak valamelyik deriváltját.) Ha a differenciálegyenlet nem homogén, akkor **inhomogénnak** nevezzük.*

Differenciálegyenletek megoldásai

Definíció

A differenciálegyenlet ***megoldása*** *olyan függvény, amely a deriváltjaival együtt kielégíti a differenciálegyenletet.*

Definíció

Az n-edrendű differenciálegyenlet ***általános megoldása*** *olyan függvény, amely a deriváltjaival együtt kielégíti a differenciálegyenletet és pontosan n darab, egymástól független szabad paramétert tartalmaz.*

Definíció

Az n-edrendű differenciálegyenlet ***partikuláris megoldása*** *egy olyan függvény, amely a deriváltjaival együtt kielégíti a differenciálegyenletet és legfeljebb $n - 1$ darab, egymástól független szabad paramétert tartalmaz.*

Differenciálegyenletek megoldásai

Definíció

A differenciálegyenlet ***szinguláris megoldása*** *olyan függvény, amely a deriváltjaival együtt kielégíti a differenciálegyenletet, de nem része az általános megoldásnak.*

A kezdetiérték probléma

Definíció

*A **kezdetiérték probléma** (KÉP) egy differenciálegyenletből és egy vagy több **kezdeti feltételből** álló rendszer, melynek megoldása során a differenciálegyenlet azon partikuláris megoldásait keressük, melyek kielégítik a kezdeti feltételeket.*

Megjegyzés

A kezdeti feltételek általában megadják a keresett függvény illetve deriváltjainak értékét egy rögzített pontban. (Azaz olyan partikuláris megoldást keresünk, amely átmegy egy adott ponton. Esetleg olyat, amely a megadott pontban megadott meredekségű érintővel rendelkezik, stb.)

1. Feladat

1. Feladat

Osztályozzuk a korábban megismert szempontok alapján az alábbi differenciálegyenletet:

$$9y''' - 3y'' + 6y' + y = \frac{10}{3}\cos\frac{x}{3} + \frac{8}{3}\sin\frac{x}{3}$$

Igazoljuk, hogy az

$$y(x) = 2\sin\frac{x}{3}$$

függvény a differenciálegyenlet egyik megoldása.

1. Feladat

1. Feladat

A $9y''' - 3y'' + 6y' + y = \frac{10}{3}\cos\frac{x}{3} + \frac{8}{3}\sin\frac{x}{3}$ diff.egy.:

- Közönséges de., mert megoldásként az $y = y(x)$ egyváltozós valós függvényt keressük.
- harmadrendű, mert az y''' a szereplő legmagasabb rendű derivált.
- lineáris, mert az y ismeretlen függvénynek sem egynél magasabb kitevős hatványai, sem irracionális, vagy transzcendens függvényei **nem szerepelnek**, továbbá nem található az egyenletben az ismeretlen függvénynek és deriváltjainak egymással vett szorzatai.
- inhomogén, a $\frac{10}{3}\cos\frac{x}{3} + \frac{8}{3}\sin\frac{x}{3}$ tag miatt

1. Feladat

1. Feladat

Az $y(x) = 2\sin\dfrac{x}{3}$ függvény akkor megoldása a differenciálegyenletnek, ha deriváltjaival kielégíti azt.

Az egyenletben a függvény első, másod és harmadrendű deriváltja szerepel, így ezeket felírjuk:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \tfrac{2}{3}\cos\tfrac{x}{3} \\ y''(x) &= -\tfrac{2}{9}\sin\tfrac{x}{3} \\ y'''(x) &= -\tfrac{2}{27}\cos\tfrac{x}{3}, \end{aligned}$$

így valóban

$$9y''' - 3y'' + 6y' + y = -\frac{2}{3}\cos\frac{x}{3} + \frac{2}{3}\sin\frac{x}{3} + 4\cos\frac{x}{3} + 2\sin\frac{x}{3} = \frac{10}{3}\cos\frac{x}{3} + \frac{8}{3}\sin\frac{x}{3}$$

Elsőrendű szétválasztható változójú differenciálegyenletek

A következő megoldási módszereket egy-egy példán keresztül mutatjuk be.

Elsőrendű szétválasztható változójú differenciálegyenlet általános alakja

$y' = g(x) \cdot h(y)$, ahol g és h intervallumon értelmezett folytonos függvények.

$\Rightarrow \dfrac{y'}{h(y)} = g(x)$ (ha $h(y) \neq 0$)

2. Feladat

Oldjuk meg az $y' = x \cdot y$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

A differenciálegyenlet egy elsőrendű, homogén lineáris (közönséges) differenciálegyenlet, a megoldás módját tekintve pedig szétválasztható változójú.

Elsőrendű szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Megoldás :

A változók szétválasztásához y-nal kell osztanunk. Ezt csak akkor tehetjük meg, ha $y \neq 0$.

- ha $y = 0 \;\Leftrightarrow\; y' = 0 \Leftrightarrow\; y \equiv 0$ szinguláris megoldás.
- ha $y \neq 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{y'}{y} &= x \\
\int \frac{y'}{y}\,dx &= \int x\,dx \\
\int \frac{1}{y}\,dy &= \frac{1}{2}x^2 + C_1 \qquad (C_1 \in \mathbb{R}) \\
\ln|y| &= \frac{1}{2}x^2 + C_1 \\
|y| &= e^{\frac{1}{2}x^2 + C_1} = e^{C_1} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}
\end{aligned}
$$

Elsőrendű szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Láttuk tehát, hogy $|y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + C_1} = e^{C_1} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

Legyen $C := \begin{cases} \pm e^{C_1} \\ 0 \end{cases}$

Ekkor

$$y = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad (C \in \mathbb{R})$$

Az $y(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ $(C \in \mathbb{R})$ alakban adott függvénysereget nevezzük a fenti differenciálegyenlet általános megoldásának.

Könnyen látható, hogy a $C = 0$ esettel beépítettük az $y \equiv 0$ szinguláris megoldást is.

3. Feladat

3. Feladat

Adjuk meg az

$$\left.\begin{aligned} y'(x) &= x \cdot y(x) \\ y(0) &= 5 \end{aligned}\right\} \text{ kezdetiérték probléma megoldását!}$$

Megoldás:

Először megoldjuk az $y'(x) = x \cdot y(x)$ differenciálegyenletet.

Majd az általános megoldásból kiválasztjuk azt a partikuláris megoldást, amelyre teljesül a kezdeti feltétel.

A differenciálegyenlet általános megoldását az előző feladatban már felírtuk:

$$y(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}. \quad (C \in \mathbb{R})$$

3. Feladat

Az általános megoldás paraméterét a kezdeti feltétel felhasználásával kiküszöbölhetjük:

$$y(0) = C \cdot e^0 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad C = 5.$$

Így a kezdetiérték probléma megoldása az $y(x) = 5 \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ függvény.

Elsőrendű lineáris (inhomogén) differenciálegyenletek

Elsőrendű lineáris (inhomogén) differenciálegyenletek általános alakja

$$y' + p(x) \cdot y = q(x),$$

ahol p, q intervallumon értelmezett folytonos függvények.

A megoldás menete

- A homogén egyenlet ($Y' + p(x) \cdot Y = 0$) megoldása.$\Rightarrow$ $Y_{hom}^{\text{ált}}$ a homogén egyenlet általános megoldása
- Állandó variálásának módszere. $\Rightarrow$ y_{inh}^{part} az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása
- Belátható, hogy $y_{inh}^{\text{ált}} = Y_{hom}^{\text{ált}} + y_{inh}^{part}$

Elsőrendű lineáris (inhomogén) differenciálegyenletek

Állandó variálásának módszere.

- A homogén egyenlet általános megoldásában jelölje C a szabad paramétert.
- Minden $C \in \mathbb{R}$ választás mellett olyan függvényt kapunk, amely kielégíti a homogén egyenletet.
- Ha a $C \in \mathbb{R}$ paraméter helyett $C(x)$ x-től függő függvényt használunk, olyan függvényt kapunk, amelyre $y' + p(x) \cdot y \neq 0$
- Keressük azt a $C(x)$ függvényt, amelyre éppen $y' + p(x) \cdot y = q(x)$
- Így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását találtuk.

4. Feladat

4. Feladat

Oldjuk meg az $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$ differenciálegyenletet

Megoldás:

A homogén egyenlet: $Y' - \frac{Y}{x} = 0$.

Megoldása során a változók szétválasztásához Y-nal kell osztani.

Ezt csak akkor tehetjük meg, ha $Y \neq 0$.

Ha $Y = 0 \;\Leftrightarrow\; Y' = 0 \Leftrightarrow \underbrace{Y'}_{=0} - \underbrace{\dfrac{Y}{x}}_{=0} = 0$

Azaz az $Y \equiv 0$ függvény a homogén egyenlet szinguláris megoldása.

4. Feladat

$$\begin{aligned}
Y' - \frac{Y}{x} &= 0 \quad \text{Ha } Y \neq 0 \\
Y' &= \frac{Y}{x} \\
\frac{Y'}{Y} &= \frac{1}{x} \\
\int \frac{Y'}{Y}\, dx &= \int \frac{1}{x}\, dx \\
\int \frac{1}{Y}\, dY &= \ln|x| + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \\
\ln|Y| &= \ln|x| + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \\
|Y| &= e^{\ln|x| + C_1} = e^{C_1} \cdot e^{\ln|x|} = |x| \cdot e^{C_1}, \quad C := \pm e^{C_1} \\
Y &= C \cdot x \qquad (C \in \mathbb{R} \setminus \{0\})
\end{aligned}$$

A szinguláris megoldás a $C = 0$ eset megengedésével az általános megoldásba beolvasztható.

A homogén egyenlet általános megoldása: $Y_{\text{hom}}^{\text{ált}} = C \cdot x \quad (C \in \mathbb{R})$.

4. Feladat

Állandó variálásának módszere:

Keressük a megoldást $y = c(x) \cdot x$ alakban. Ekkor

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

Visszahelyettesítve az egyenletbe:

$$\begin{aligned}
\underbrace{c'(x) \cdot x + c(x)}_{y'} - \overbrace{c(x) \cdot x}^{y} \cdot \frac{1}{x} &= x^2 \\
c'(x) \cdot x &= x^2 \\
c'(x) &= x \\
c(x) = \int c'(x)\, dx &= \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + C
\end{aligned}$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{\text{inh}}^{\text{part}} = \frac{x^2}{2} \cdot x = \frac{x^3}{2} \quad \Rightarrow \quad y_{\text{inh}}^{\text{ált}} = y_{\text{inh}}^{\text{part}} + Y_{\text{hom}}^{\text{ált}} = \frac{x^3}{2} + C \cdot x \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Másodrendű lineáris homogén állandóegyütthatós differenciálegyenletek

Másodrendű lineáris homogén differenciálegyenletek általános alakja

$p(x) \cdot y'' + q(x) \cdot y' + r(x) \cdot y = 0$, ahol p, q, r intervallumon értelmezett folytonos függvények.

Másodrendű lineáris homogén **állandóegyütthatós** differenciálegyenletek általános alakja

$A \cdot y'' + B \cdot y' + C \cdot y = 0$, ahol $A, B, C \in \mathbb{R}$.

Megoldási ötlet

A megoldást $y = e^{\lambda x}$ alakban keressük. Ekkor

$$\begin{aligned} y' &= \lambda \cdot e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Másodrendű lineáris homogén állandóegyütthatós differenciálegyenletek

Megoldás

Visszahelyettesítve az egyenletbe:

$$\begin{aligned} A\cdot\lambda^2\cdot e^{\lambda x}+B\cdot\lambda\cdot e^{\lambda x}+Ce^{\lambda x} &= 0\\ e^{\lambda x}\cdot\left(A\cdot\lambda^2+B\cdot\lambda+C\right) &= 0\end{aligned}$$

Mivel $e^{\lambda x}\neq 0$, ezért $A\cdot\lambda^2+B\cdot\lambda+C=0$ egyenlethez jutunk.

A kapott egyenlet a de. **karakterisztikus egyenlete**.

Tétel

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van (λ_1 és λ_2), akkor a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y_{ált}=C_1\cdot y_1+C_2\cdot y_2=C_1\cdot e^{\lambda_1 x}+C_2\cdot e^{\lambda_2 x}\quad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

Másodrendű lineáris homogén állandóegyütthatós differenciálegyenletek

Tétel

Ha a karakterisztikus egyenletnek egyetlen valós megoldása van (λ), akkor a

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\lambda x} \\ y_2 &= x \cdot e^{\lambda x} \end{aligned}$$

két lineárisan független partikuláris megoldás és így a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y_{ált} = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 = C_1 \cdot e^{\lambda x} + C_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Másodrendű lineáris homogén állandóegyütthatós differenciálegyenletek

Tétel

Ha a karakterisztikus egyenletnek nincs valós megoldása (mert $D = B^2 - 4AC < 0$), legyen:

$$\alpha := \frac{-B}{2A}, \qquad \beta := \frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x \\ y_2 &= e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x \end{aligned}$$

két lineárisan független partikuláris megoldás és így a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y_{ált} = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 = C_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x + C_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

5. Feladat

5. Feladat

Oldjuk meg az $y'' + 2y' - 15y = 0$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

Keressük a megoldást $y = e^{\lambda x}$ alakban! Ekkor

$$\begin{aligned} y' &= \lambda \cdot e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve az egyenletbe:

$$\begin{aligned} \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + 2\lambda \cdot e^{\lambda x} - 15e^{\lambda x} &= 0 \\ \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} \cdot \left(\lambda^2 + 2\lambda - 15\right) &= 0 \\ \lambda^2 + 2\lambda - 15 &= 0 \quad \text{(Karakterisztikus egyenlet)} \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} = -1 \pm 4 = \begin{aligned} \lambda_1 &= -5 \\ \lambda_2 &= 3. \end{aligned}$$

5. Feladat

Tehát a két lineárisan független partikuláris megoldás:

$$y_1 = e^{-5x} \quad y_2 = e^{3x}.$$

Az általános megoldás ezen partikuláris megoldások lineáris kombinációiként kapható:

$$y = C_1 \cdot e^{-5x} + C_2 \cdot e^{3x}. \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Elméleti kérdések

1. Mit ért függvényegyenlet alatt?
2. Mi a differenciálegyenlet?
3. Mikor nevezzük a differenciálegyenletet közönségesnek?
4. Mikor beszélünk parciális differenciálegyenletről?
5. Definiálja a lineáris differenciálegyenletet!
6. Definiálja a homogén differenciálegyenletet!
7. Mit ért a differenciálegyenletet rendjén!
8. Mikor nevezzük a differenciálegyenletet homogénnek?
9. Mikor nevezzük a differenciálegyenletet inhomogénnek?
10. Definiálja a differenciálegyenlet megoldását!

Elméleti kérdések II.

11 Milyen típusú megoldásokról tanult a differenciálegyenleteknél?
12 Definiálja a differenciálegyenlet általános megoldását!
13 Definiálja a differenciálegyenlet partikuláris megoldását!
14 Definiálja a differenciálegyenlet szinguláris megoldását!
15 Definiálja a kezdetiérték problémát!