Mathematische Grundlagen der Informatik

Logik

Tautologie: allgemeingültige Aussage

Kontradiktion: unerfüllbare Aussage

Wirkungsbereich: Bereich in dem ein Quantor gilt

Umwandlungen:

- $A \to B \equiv \neg A \vee B \equiv (\neg B) \to (\neg A)$ } alternative Darstellung
- $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$
- $(A \vee B) \wedge A \equiv A$ } Absorptionsregel
- $(A \wedge B) \vee A \equiv A$
- $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$ } De Morgan'sche Regel
- $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$

Beweisregeln

- modus ponens: $(A \wedge (A \to B)) \to B$
- Fallunterscheidung: $((A \to B) \wedge (\neg A \to B)) \to B$
- Kettenschluss: $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to C$
- Kontraposition: $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
- indirekter Beweis: $((A \to B) \wedge (A \to \neg B)) \to \neg A$

  Substitution: ist $(\forall x)[A(x)]$ allg. gültig, so gilt $A(y)$, wenn y nicht im Wirkungsbereich eines Quantors in $A(t)$
- vollständige Induktion: Sind $A(n_0)$ und $A(n-1) \to A(n)$ allg. gültig für alle $n > n_0$, so ist $A(n)$ allg. gültig

Mengen – paarweise verschiedene Objekte

Darstellung: extensional – intensional

Kardinalität: $\|A\|$ → Anzahl der Elemente

Venn-Diagramm: Mengen-Diagramm, nicht als Beweis

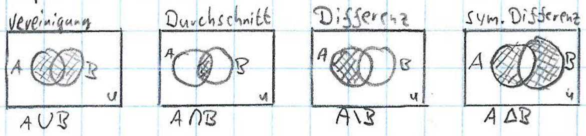
disjunkte Menge: $A \cap B \neq \emptyset$

Potenzmenge: $\mathcal{P}(A) := \{\mathcal{X} \mid \mathcal{X} \subseteq A\}$

Mengenfamilie: Teilmengen der Potenzmenge

Partition: Mengenfamilie, sodass Urmenge komplett abgebildet, aber Schnitt immer $\emptyset$

Komponente: Element der Partition



Potenzmenge

1. $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow \mathcal{X} \subseteq A$
2. $\emptyset, A \in \mathcal{P}(A)$
3. A endl $\Rightarrow \|\mathcal{P}(A)\| = 2^{\|A\|}$

Haubersches Theorem

$\{A_1, \dots, A_n\}$ und $\{B_1, \dots, B_n\}$ Partitionen von U. Gilt $A_i \subseteq B_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, so gilt $B_i \subseteq A_i$ (und somit $A_i = B_i$)

Relationen – Beziehungen zwischen Mengen

binäre Relation: $R \subseteq A_1 \times A_2$ $\quad xRy \Leftrightarrow (x,y) \in R$

Linkstotal: $(\forall x \in A)(\exists y \in B)[(x,y) \in B]$ (jedes x hat ein y)

rechtseindeutig: $(\forall x \in A)(\forall y,z \in B)[((x,y) \in R \wedge (x,z) \in R) \to y = z]$ (jedes vorkommende x, genau 1 y)

rechtstotal: $(\forall y \in A)(\exists x \in A)[(x,y) \in R]$ (jedes y hat ein x)

Linkseindeutig: $(\forall x,z \in A)(\forall y \in B)[((x,y) \in R \wedge (z,y) \in R) \to x = z]$ (jedes vorkommende x, genau 1 y)

Funktion (total): Linkstotal + rechtseindeutig

$f \subseteq A \times B$	$f: A \to B$	kompakt
$(a,b) \in f$	$f(a) = b$	$f: A \to B: a \mapsto f(a)$

partielle Funktion: rechtseindeutig

surjektiv: rechtstotal : "jedes y kommt vor"

injektiv: Linkseindeutig : "jedes vorkommende y hat genau ein x"

bijektiv: surjektiv + injektiv

gibt es ...		dann
... surjektive Funktion $f: A \to B$	$\Leftrightarrow$	$\|A\| \geq \|B\|$
... injektive Funktion $f: A \to B$	$\Leftrightarrow$	$\|A\| \leq \|B\|$
... bijektive Funktion $f: A \to B$	$\Leftrightarrow$	$\|A\| = \|B\|$

Bildmenge: $f(A_0)$ "Menge der Funktionswerte / y"

Urbildmenge: $f^{-1}(A_0)$ "Menge der x"

invertierbare Funktion: f^{-1} ist Funktion $\Leftrightarrow$ f ist bijektiv

Umkehrrelationen:

- R Linkstotal $\Leftrightarrow$ R^{-1} rechtstotal
- R rechtseindeutig $\Leftrightarrow$ R^{-1} Linkseindeutig
- R rechtstotal $\Leftrightarrow$ R^{-1} Linkstotal
- R linkseindeutig $\Leftrightarrow$ R^{-1} rechtseindeutig
- f bijektiv $\Leftrightarrow$ f^{-1} bijektiv

Hintereinanderausführung $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ (iA. $g \circ f \neq f \circ g$)

f und g injektiv $\Rightarrow$ $g \circ f$ injektiv

f und g surjektiv $\Rightarrow$ $g \circ f$ surjektiv

f und g bijektiv $\Rightarrow$ $g \circ f$ bijektiv

$f: A \to B$, $f^{-1} \circ f = id_A$, $f \circ f^{-1} = id_B$

Identitätsfunktion: $id_A: A \to A: x \mapsto x$

reflexiv: $(\forall a \in A)[(a,a) \in R]$

transitiv: $(\forall a,b,c \in A)[((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \to (a,c) \in R]$

symmetrisch: $(\forall a,b \in A)[(a,b) \in R \to (b,a) \in R]$

Äquivalenzklasse $R \subseteq A \times A$, $x \in A$, $[x]_R := \{y \mid (x,y) \in R\} \subseteq A$

- $(x,y) \in R \to [x]_R = [y]_R$
- $(x,y) \notin R \to [x]_R = [y]_R$

Äquivalenzrelation: reflexiv, transitiv, symmetrisch

Repräsentantensystem: $K \subseteq A$, $R \subseteq A \times A$ "Partition aus Äquivalenzklassen"

- für alle $k_1, k_2 \in K$ mit $k_1 \neq k_2$ gilt $(k_1, k_2) \in R$
- $A = \bigcup_{k \in K} [k]_R$

antisymmetrisch: $(\forall a,b \in A)[((a,b) \in A \wedge (b,a) \in R) \to a = b]$

Linear: $(\forall a,b \in A)[a \neq b \to ((a,b) \in R \vee (b,a) \in R)]$

Halbordnung: reflexiv, transitiv, antisymmetrisch

(totale) Ordnung: Halbordnung + linear

Minimum (Maximum) von K: $a \leq_R b$ $(a \geq_R b)$ für alle $a, b \in K$

untere (obere) Schranke von K: $a \leq_R b$ $(a \geq_R b)$ für alle $b \in K$

Infimum (Supremum): oberste untere (unterste obere) Schranke

minimales (maximales) Element: Menge der "untersten (obersten) Elemente"

HASSE-Diagramm: • Elemente durch Punkte dargestellt

- $(x,y) \in R$, $x \neq y$ $\Rightarrow$ x oberhalb von y
- verbinden, falls $(x,y) \in R$ und "kein Element dazwischen"

Graph: binäre Relation $G = (V, E)$ aus Knotenmenge V und Kantenmenge $E \subseteq V \times V$

Weg (der Länge k): Folge $(v_0, \dots, v_k)$ mit $v_i \in V$ und $(v_{i-1}, v_i) \in E$

Kreis (der Länge k): Weg $(v_0, \dots, v_k)$ in G mit $v_0 = v_k$

ungerichtete Kante: $(u,v) \in E \to (v,u) \in E$ ⇝ ungerichteter Graph

Zusammenhängend: für alle u, v exist. ein Weg mit $u = v_0$, $v = v_k$

Baum: zusammenhängend, keine Kreise $k \geq 1$

Ableitungsregeln

$(g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

$(g \cdot h)' = g' \cdot h + h' \cdot g$

$\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g' \cdot h - h' \cdot g}{h^2}$

$\left(\frac{1}{h}\right)' = \frac{-h'}{h^2}$

$(\ln(f))' = \frac{f'}{f}$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

strukturelle Induktion $T_f: \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ $k \geq 0$

$f: A^n \to A^n$ $T_f^0(B) := B$ $T^k: \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$

$T_f^k(B) := T_f^{k-1}(B) \cup \{ f(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in T_f^{k-1}(B) \}$

$T_f(B) := \bigcup_{k=0}^{\infty} T_f^k(B)$ ← Abschluss

B⊆A ist endlich erzeugt aus $B_0 \subseteq A$: existiert $f: A^n \to A$ mit $B = T_f(B_0)$

transitive join: $R \bowtie R := \{ (a,c) \mid (\exists b \in A)[(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R] \}$

$(a,b) \bowtie (b,c) := (a,c)$

transitive Hülle $R^+ := T_{\bowtie}(R)$

reflexive und transitive Hülle: $R^* := R^+ \cup \{ (a,a) \mid a \in A \}$

$\sim_R$: $x \sim_R y \overset{def}{\iff} (x,y) \in R^* \wedge (y,x) \in R^*$

gleichmächtig: bijektives $f: A \to B$

A abzählbar: surjektives $f: \mathbb{N} \to B$

A abzählbar unendlich: bijektives $f: \mathbb{N} \to B$

überabzählbar: nicht abzählbar

Analysis

Konvergenz: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)[|a_n - c| < \varepsilon]$

Reihe: $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$, a_k - Koeffizienten

absolut konvergent: $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ abs. konv, falls $\sum_{k=0}^{n} |a_k|$ konvergent

Majoranten-Kriterium:

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ abs. konv und $|a_n| \leq |b_n|$ für alle $n \geq n_0$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ abs. konv

Wurzel-Kriterium: $0 \leq q < 1$ $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für alle $n \geq n_0$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ abs konv

Quotienten-Kriterium: $0 \leq q < 1$ $|a_{n+1}| \leq q |a_n|$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ abs konv.

Leibnitz-Kriterium: s_n monoton fallende, relle Nullfolge

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konv.

oberer/unterer Grenzwert:

- $\liminf_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (\inf \{ a_m \mid m \geq n \})$
- $\limsup_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (\sup \{ a_m \mid m \geq n \})$
- Folge konvergent, falls $\liminf_{n \to \infty} = \limsup_{n \to \infty} = c$
- $\liminf (-a_n) = - \limsup a_n$
- $\liminf (a_n)^{-1} = (\limsup a_n)^{-1}$

Landau-Symbole

O: $(\exists c < 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)[f(n) \leq c \cdot g(n)]$

Ω: $(\exists c < 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)[f(n) \geq c \cdot g(n)]$

Θ: $f(n) \in \{ O(g(n)) \cap \Omega(g(n)) \}$

o: $(\forall c > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)[f(n) \leq c \cdot g(n)]$

ω: $(\forall c > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)[f(n) \geq c \cdot g(n)]$

- $f(n) \in o(g(n)) \iff \lim \frac{f(n)}{g(n)} = 0$
- $f(n) \in \omega(g(n)) \iff \lim \frac{g(n)}{f(n)} = 0$

Potenzreihe: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

Konvergenzradius: Potenzreihe konv., falls $|x - x_0| < R$; div, falls $|x - x_0| > R$

- $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ konv $\Rightarrow \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$ | konv → hier auch div. bestimmt
- $\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ konv $\Rightarrow \lim \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = R$ | also → ∞ od → -∞

Taylor-Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$, x_0: Entwicklungspunkt

Methoden zur Berechnung:

- Substitution (auf bekanntes)
- Addition (Aufspaltung der Summe)
- Multiplikation (Aufspalten in Produkt von Summen)
- Integration und Differentiation hintereinander

Regel von de L'Hôpital (eigtl Bernoulli)

$-\infty < a < b < \infty$, $f, g:]a,b[\to \mathbb{R}$, differenzierbar

$g(x) \neq 0 \neq g'(x)$ für alle $x \in]a,b[$ entweder:

- $f(x), g(x) \to 0$ für $x \to a$ bzw $x \to b$
- $f(x), g(x) \to \pm\infty$ für $x \to a$ bzw $x \to b$

dann gilt: $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Bekanntes

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$	$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n}$	
$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$	$\log_2(n+1) \leq n$	$\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \to \infty} 1$; $\tan 1 = \pi/4$
$\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{1}{1-q}$	$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$	$\tan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 1$		$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ → kein Grenzwert
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ f.a. $-1 < x < 1$		$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ f.a. $-1 < x < 1$

$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$	$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$	$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$
$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$	$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$	$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$