Universität Konstanz
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft
Stephan Heidinger

Theoretische Grundlagen der Informatik
Sommersemester 2012
22. Oktober 2012

Find any errors? Please send them back, I want to keep them!

Allgemeines

Definitionen

- $\mathbb{N}^0 = \{0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{N}^{\setminus\{0\}} = \{1, 2, \dots\}$

Alphabet: endliche Menge von Zeichen $\Sigma = \{a, b\}$

Wort Zeichenfolge $w = ababa \in \Sigma^*$

Σ^***:** Menge der Wörter

Σ^+**:** $\Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$ $\{\} \neq \varepsilon \neq \{\varepsilon\}$

Operator $\circ$**:** Konkatenation $\varepsilon \circ w = w, w \circ w = ww = w^2$

$w^n = \underbrace{www\dots w}_{n-mal}$ $n \in \mathbb{N}^0$

$|w_1|$**:** Wortlänge $|w| = 5$

$|w|_\sigma, \sigma \in \Sigma$ Anzahl σ in Σ $|w|_a = 3$

Seien A, B Mengen (Sprachen): $A = \{\varepsilon, a, bba, bbabb\} B = \{a, aa, aaa\}$

$|A|$ Mächtigkeit = Anzahl der Elemente

Sprache: Teilmenge von Σ^*

Vereinigung $A \cup B = \{x \in \Sigma^* | x \in A \vee x \in B\}$

Schnitt $A \cap B = \{c \in \Sigma^* | x \in A \wedge x \in B\}$

Komplement $\overline{A} = \{x \in \Sigma^* | x \notin A\} = \Sigma^* \setminus A$

Produkt $AB = \{xy \in \Sigma^* | x \in A \wedge y \in B\}$

De Morgan Regeln

$$\overline{A \cup B} = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$$

Klassen

Sei $\mathcal{C}$ eine Klasse von Sprachen. $\mathcal{C}$ heisst $\left|\begin{array}{c}\text{vereinigungs-}\\ \text{schnitt-}\\ \text{komplement-}\\ \text{produkt-}\end{array}\right|$ abgeschlossen $\Leftrightarrow A \in \mathcal{C} \wedge B \in \mathcal{C}$

$\left|\begin{array}{c} A \cup B \in \mathcal{C} \\ A \cap B \in \mathcal{C} \\ \overline{A} \in \mathcal{C} \\ AB \in \mathcal{C} \end{array}\right|$.

A ist abgeschlossen gegen Vereinigung und Komplement $\Leftrightarrow A$ ist abgeschlossen gegen Schnitt und Komplement.

$$
\begin{aligned}
A^0 &= \{\varepsilon\} \\
A^1 &= A \\
A^{n+q} &= A^n A \\
A^i A^j &= A^{i+j} \\
\left(A^i\right)^j &= A^{i \cdot j} \\
A^* &= \bigcup_{n \geq 0} A^n && = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \dots \\
A^+ &= \bigcup_{n > 0} A^n && = A^1 \cup A^2 \cup \dots \\
&= \bigcap_{n \geq 0} A^n && = A^0 \cap A^1 \cap A^2 \cap \dots \\
\text{Potenzmenge} &= 2^A = \{B | B \subseteq A\} \\
M_a &= \{x \in \Sigma^* | x = n^a\} \\
M_2 &= \{1, 4, 9, 16, \dots\} \\
M_3 &= \{1, 8, 27, 64, \dots\} \\
M_4 &= \{1, 16, 81 \dots\} \\
\bigcup_{i=2}^{4} M_i &= \{1, 4, 8, 9, 16, \dots\} \\
\bigcap_{i=2}^{4} M_i &= \{1^1 2, 2^1 2, 3^1 2, \dots\} \\
M &= \{1, 2, 3\} \\
2^M &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}
\end{aligned}
$$

Kreuzprodukt:
Seien A_i Mengen,

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \,|\, a_i \in A_i, i \in \mathbb{N}^n\}$$

$$\chi_i^n \leq 1 A_i = \begin{cases} \emptyset & i < 1 \\ A_1 & n = 1 \\ \chi_{i=1}^{n-1} A_i \times A_n & n > 1 \end{cases}$$

Relationen

Relationen, $\tau_{A_i} \subseteq \chi_{i=1}^{n} A_i$ setzen Elemente von Mengen zueinander in Beziehung.
Bsp:

$$\{a, b, \ldots, z\}\tau\{1, 2, \ldots, 26\} = \{(a, 1), (b, 2), \ldots, (z, 26)\}$$
$$\mathbb{N}^0 \leq \mathbb{N}^0 = \{(a, b) | a + c = b,\ a, b, c \in \mathbb{N}^0\}$$

Eigenschaften von Relationen auf gleichen Mengen A:

reflexiv: $\forall a \in A : a\tau a$

irreflexiv: $\forall a \in A : \overline{a\tau a}$

symmetrisch: $\forall a, b \in A : a\tau b \Rightarrow b\tau a$

antisymmetrisch: $\forall a, b \in A : (a\tau b \wedge b\tau a) \Rightarrow a = b$ (antisymmetrisch $\Rightarrow$ reflexiv)

asymmetrisch: $\forall a, b \in A : a\tau b \Rightarrow \overline{b\tau a}$

transitiv: $\forall a, b, c \in A : (a\tau b \wedge b\tau c) \Rightarrow a\tau c$

äquivalent: Wenn mir jemand sagen kann, was hier rein kommt, bitte zuschicken ist aber auch nicht so wichtig...

Ordnungsrelationen Typ „$\leq$“: reflexiv, transitiv, antisymmetrisch

Ordnungsrelationen Typ „$<$“: irreflexiv, transitiv, antisymmetrisch

τ^+ transitive Hülle

τ^* reflexive, transitive Hülle

Satz: τ^* ist die kleinste, reflexive und transitive Relation (Hülle), die τ selbst umfasst.

$geg\ A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$R, S \subseteq A \times A$$
$$R = \{(1, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (5, 4)\}$$
$$S = \{(1, 3), (3, 5), (5, 1)\}$$

$ges\ R^+, S^+, R^*, S^*$

$$R^+ = R \cup \{(1, 3), (1, 4), (2, 4), (1, 5)\}$$
$$R^* = R^+ \cup \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$$
$$S^+ = S^+ \cup \{(1, 5), (1, 1), (3, 1), (3, 3), (4, 5), (5, 3)\}$$
$$S^* = S^* \cup \{(2, 2), (4, 4)\}$$

Bsp

a „ist blutsverwandt“ auf Menge der Personen

b „x ist Teiler von y“, d.h. $\exists z$ mit $x \cdot z = y\ x, y, z \in \mathbb{Z}$

c $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $R = \{(x, y) | xy > 0\}$

d „w ist Präfix von v“, d.h. $\exists u$ mit $v = wu,\ \ u, v, w \in \Sigma^*,\ \Sigma$ sei Menge

	refl.	irrefl.	symm.	antiymm.	asymm.	trans.	äquiv.	„<“	„≤“
a	✔	✘	✔	✘	✘	✘	✘	✘	✘
b	✔	✘	✘	✔	✘	✔	✘	✘	✔
c	✔	✘	✔	✘	✘	✔	✘	✘	✘
d	✔	✘	✘	✔	✘	✔	✘	✔	✘

Äquivalenzklasse: Sei $R \subseteq A \times A$ eine ÄR, dann heissen für $a \in A$ die Mengen $[a]_R := \{b \in A | aRb\}$ Äquivalenzklassen von R.

Partitionierung: Menge aller ÄK $A/_R := \{[a]_R | a \in A\}$

Index Anzahl der ÄK $|A/_R|$
Bsp $R = \{(x,y) | x \mod 2 = y \mod 2\}$ partitioniert $\mathbb{N}^0$ in 2 ÄK:

- $[0]_a = \{0, 2, 3, \dots\}$
- $[1]_a = \{1, 3, 5, \dots\}$

Automatentheorie und formale Sprachen

Grammatik

Eine Grammatik ist ein 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$

V - Variblen

Σ - Terminalalphabet

P - Regeln/Produktionen

S - Startvariable

$$|V| < \infty$$
$$|\Sigma| < \infty$$
$$|P| < \infty$$

Chomsky-Hirarchie

Typ 0: (Phrasenstrukturgrammatik) - keine Einschränkungen

Typ 1: (kontextsensitiv) - $(w_1 \to w_2) \Rightarrow (|w_1| \leq |w_2|)$ (Wort wird nicht kürzer)

Typ 2: (kontextfrei) - $(w_1 \to w_2) \Rightarrow (w_1 \in V)$ w_1 ist einzelne Variable

Typ 3: (regulär) - $w_2 \in \Sigma \cup \Sigma V$ „rechte Seiten“ von Regeln Terminalsymbol oder Terminalsymbole gefolgt von Variablen

Alle Sprachen der Typen 1,2 und 3 sind *entscheidbar*.

ε-Sonderregelung (Zulassen des leeren Wortes ε in Typ 1,2 oder 3)

- Regel hinzufügen: $S \to \varepsilon$
- Verhindern von S auf rechter Seite von Regeln: Regel mit „$\to S$“ ersetzen durch „$\to S'$“
- Zulassen von $A \to \varepsilon$ (verändert Sprache nicht)
  Algorithmus:

1. Zerlege $V \to V_1, V_2$, $(A \Rightarrow^* \varepsilon) \in V_1$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
2. Entferne alle $A \to \varepsilon$, füge für $(B \to xAy)$ $(B \to xy)$ hinzu.

Wortproblem (Gehört ein Wort zu einer Sprache?)

$(\exists$Algorithmus$)[($Algo terminiert in endl. Zeit $\wedge$ (Algo entscheidet $(x \in \mathcal{L}(G)) \vee (x \notin \mathcal{L}(G)))]$
$\Rightarrow$ das Wortproblem ist für Typ 1,2 und 3 entscheidbar (aber NP-hart für Typ 1)

Syntaxbäume

Wurzel: S
Für $i = 1, 2, \ldots, n$ $A \to z \in P \Rightarrow |z|$ viele Söhne $\to$ „weitere Kette“

Linksableitung: Variable am weitesten links wird abgeleitet.

Rechtsableitung: Variable am weitesten rechts wird abgeleitet.

mehrdeutige Grammatik: für ein x verschiedene Syntaxbäume möglich

- Mehrdeutigkeit kann oft beseitigt werden.
- Ist dies nicht möglich $\Rightarrow$ *inhärent mehrdeutig*

Backus-Naur-Form Bnf (Typ 2 Grammatiken)

Metaregeln für selbe linke Seite

$$\left.\begin{array}{lcl} A & \to & \beta_1 \\ A & \to & \beta_2 \\ & \vdots & \\ A & \to & \beta_3 \end{array}\right\} A \to \beta_1 | \beta_2 | \ldots \beta_n$$

erweiterte Backus-Naur-Form Ebnf

$$A \to \alpha[\beta]\gamma \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} A & \to & \alpha\gamma \\ A & \to & \alpha\beta\gamma \end{array}\right.$$

$$A \to \alpha\{\beta\}\gamma \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} A & \to & \alpha\gamma \\ A & \to & \alpha B\gamma \\ B & \to & \beta \\ B & \to & \beta B \end{array}\right.$$

Reguläre Sprachen (Typ 3)

Endliche (deterministische) Automaten DFA

$M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$

Σ Eingabealphabet

z_0 Startzustand

$z \cap \Sigma = \emptyset$
$\to$ Zustandsgraphen

Z Menge der Zustände

$E \subseteq Z$ Menge der Endzustände

$\delta : z \times E \to z$
Überführungsfunktion

$|z| < \infty$, $|\Sigma| < \infty$

akzeptierte Sprache

Die von M akzeptierte Sprache ist:

$$T(M) = \{x \in \Sigma^* | \hat{\delta}(z, e)\}, \text{ wobei}$$

$$\hat{\delta}(z, \varepsilon) = z$$
$$\hat{\delta}(z, ax) = \hat{\delta}\left(\delta(z, a), x\right)$$

Jede durch Endliche Automaten erkennbare Sprache ist Regulär (Typ 3).
Jede Reguläre Sprache ist durch einen Endlichen Autoamten erkennbar.

Nichtdeterministische Automaten

Ein *nichtdeterministischer, endlicher Automat* (NFA) wird spezifiziert durch ein 5-Tupel:

$M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$	Z Menge der Zustände
Σ Eingabealphabet	$E \subseteq Z$ Menge der Endzustände
$S \subseteq Z$ Menge der Startzustände	$\delta : Z \times E \to \mathcal{P}(z)$ Überführungsfunktion
$z \cap \Sigma = \emptyset$	$\lvert z\rvert < \infty,\ \lvert\Sigma\rvert < \infty$

Jede durch einen NFA akzeptierbare Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Für jede Reguläre Grammatik G gibt es einen NFA M mit $L(G) = T(M)$.

regulärer Ausdruck

$\emptyset$ ist regulärer Ausdruck.

ε ist regulärer Audruck.

$a \in \Sigma$ ist regulärer Audruck.

$\alpha\beta, (\alpha|\beta), (\alpha)^*$ sind reguläre Ausdrücke, wenn α, β reguläre Ausrdücke sind.

$\gamma := \emptyset$	$\Rightarrow L(\gamma) = \emptyset$
$\gamma := \varepsilon$	$\Rightarrow L(\gamma) = \{\varepsilon\}$
$\gamma := \alpha$	$\Rightarrow L(\gamma) = \{\alpha\}$
$\gamma := \alpha\beta$	$\Rightarrow L(\gamma) = L\{\alpha\}L\{\beta\}$

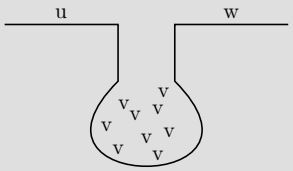
$\gamma := (\alpha\|\beta)$	$\Rightarrow L(\gamma) = L(\alpha) \cup L(\beta)$
$\gamma := (\alpha)^*$	$\Rightarrow L(\gamma) = L(\gamma)^*$
$\gamma := \alpha\alpha = \alpha^2$	

Die Menge der durch Reguläre Ausdrücke beschreibbaren Sprachen ist genau die Menge der Regulären Sprachen.

Pumping-Lemma Schleifenlemma, Iterationslemma, Lemma von Bar-Hillel, $uvw-$Theorem

Sei L eine Reguläre Sprache. Dann gibt es eine Zahl n so, dass sich alle Wörter $x \in L$ mit $|x| \geq n$ zerlegen lasen in $x = uvw$, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- $|v| \geq 1$
- $|uv| \leq n$
- $\forall i \in \{0, 1, \dots\}$ gilt: $uv^iw \in L$



$\rightarrow$ Zum Erkennen von nicht regulären Sprachen (geht nicht bei allen).

$\rightarrow$ v^i-Schleifen

Anwendung: Annehmen, L sei regulär $\Rightarrow$Wenn Widerspruch, L nicht regulär.

Äquivalenzrelationen und Minimalautomaten

xR_Ly gdw für alle $z \in \Sigma^* : xz \in L$

Satz von Myhill-Nerode
Eine Sprache L ist genau dann Regulär, wenn der Index von R_L endlich ist:

$$L \text{ regulär } \Leftrightarrow Index(R_L) < \infty$$

$Index$: Anzahl erzeugbarer Äquivalenzklassen

Äquivalenzklassenautomat $\equiv$ Minimalautomat (nur DFA!)
Minimalautomat $\rightarrow$ Automat mit min Zustandszahl

Algorithmus Minimalautomat $\mathcal{O}(n^2)$

Eingabe: DFA, alle Zustände erreichbar. **Ausgabe:** zu verschmelzende Zustände

1. Tabelle mit Zustandspaaren $\{z, z'\}, z \neq z'$
2. Markiere Paare $\{z, z'\}$ mit $z \in E$ und $z' \notin E$ und umgekehrt
3. unmarkierte Felder: Teste, ob $\underbrace{\{\delta(z, a), \delta(z', a)\}}_{\text{1 hop!}}$ markiert ist, wenn ja, markiere $\{z, z'\}$
4. Punkt 3 widerholen, bis keine Änderung mehr in der Tabelle passiert.
5. Verschmelze unmarkierte Paare.

Abschlusseigenschaften

Reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter:

- Vereinigung

- Schnitt
- Komplement
- Produkt
- Stern

Entscheidbarkeit

Wortproblem: Linearer Aufwand bei bekanntem DFA

Leerheitsproblem: Entscheidbar (DFA, kein Weg $S \to E$)

Endlichkeitsproblem: $T(M) = \infty \Leftrightarrow S \to \circlearrowright \to E$

Schnittproblem: $\to$ Leerheitsproblem

Äquivalenzproblem DFA $\to$ Minimalautomat $\to$ Isomorphie checken $\to \mathcal{O}(n)$

$$L_1 = L_2 \Leftrightarrow \left(L_1 \cap \overline{L_2}\right) \cup (L_2 \cap L_1) = \emptyset$$

$\to$ Leerheitsproblem $\to$ NP-hart

Kontextfreie Sprachen

korrekt geklammerte Ausdrücke

Normalformen

Chromsky-Normalform: (CNF) Alle Regeln haben die Form $A \to BC$ oder $A \to a$

Zu jeder Kontextfreien Grammatik G mit $\varepsilon \notin L(G)$ gibt es eine Chromsky-Normalform-Grammatik G' mit $L(G) = L(G')$.

Greibach-Normalform: (GNF) Alle Regeln haben die Form $A \to aB_1B_2 \dots B_k$ $(K \geq 0)$

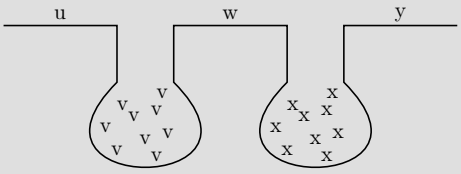
Erweiterung der Regulären Sprachen, hier nur $k = 0$ und $k = 1$

Zu jeder Kontextfreien Grammatik G mit $\varepsilon \notin L(G)$ gibt es eine Greibach-Normalform-Grammatik G' mit $L(G) = L(G')$.

Pumpinglemma

Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass sich alle Wörter $z \in L$ mit $|z| \geq n$ zerlegen lassen in $z = uvwxy$ mit folgenden Eigenschaften:

- $|vx| \geq 1$
- $|vwx| \leq n$
- $\forall i \geq 0$ gilt $uv^iwx^iy \in L$



Jede kontextfreie Sprache über einem einelementigen Alphabet ist bereits regulär.

Abschlusseigenschaften

Die Kontextfreien Sprachen sind...

...abgeschlossen unter

- Vereinigung
- Produkt
- Stern

...nicht abgeschlossen unter

- Schnitt
- Komplement

Der CYK-Algorithmus - Lösung des Wortproblems für kontextfreie Sprachen

Data: $x = a_1a_2 \dots a_n$
for $i := 1$ **to** n $_{(j=1)}$ **do**
  $T[i,1] := \{A \in V | A \to a_i \in P\}$
end
for $j := 2$ **to** n $_{(j>1)}$ **do**
  for $i := 1$ **to** $n + 1 - j$ **do**
    $T[i,j] := \emptyset$ **for** $k := 1$ **to** $j - 1$ **do**
      $T[i,j] := T[i,j] \cup \{A \in V | A \to BC \in P \wedge B \in T[i,k] \wedge C \in T[i+k, j-k]\}$
    end
  end
end
if $S \in T[1,n]$ **then**
  „x liegt in $L(G)$“
else
  „x liegt nicht in $L(G)$“
end

Algorithm 1: CYK

Bild

Kellerautomaten (PDA)

Ein *(nichtdeterministischer) Kellerautomat* (*pushdown automaton*) wird angegeben durch ein 6-Tupel: $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$

- Z - endliche Zustandsmenge
- Σ - Eingabealphabet
- Γ - Kelleralphabet
- $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}_e(Z \times \Gamma^*$ - die Überfühungsfunktion
- $z_0 \in Z$ Startzustand
- $\# \in \Gamma$ unterstes Kellerzeichen

Akzeptieren ist per leerem Keller oder Endzustand möglich.

Um Schreibarbeit zu sparen, schreibt man statt $(z', x) \in \delta(z, a, A)$ einfach $zaA \to z'x$.

Eine Sprache L ist kontextfrei genau dann, wenn L von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird.

Deterministisch kontextfreie Sprachen

Ein Kellerautomat M heisst *deterministisch*, falls für alle $z \in Z, a \in \Sigma, A \in \Gamma$ gilt: $|\delta(z, a, A)| + |\delta(z, \varepsilon, A| \leq 1$.
Hinzu kommt, dass deterministisch kontextfreie Kellerautomaten *per Endzustand* akzeptieren, nicht per leerem Keller.

Eine Sprache heisst *deterministisch kontextfrei*, falls sie von einem deterministischen Kellerautomaten erkannt wird.

Abgeschlossenheit

Deterministisch kontextfreie Sprachen sind...

...abgeschlossen unter:

- Komplement

...nicht abgeschlossen unter:

- Schnitt
- Vereinigung

Zudem ist der *Schnitt* einer deterministisch kontextfreien Sprache mit einer regulären Sprache wieder deterministisch kontextfrei.

Entscheidbarkeit

Wortproblem CYK

Leerheitsproblem CNF $\to$

1. Markiere Variablen, die auf Terminale ableiten $A \to a$
2. markiere sukzessive alle Variablen, die auf diese führen $A \to BC$ (B, C bereits markiert)
3. Wenn die Startvariable nicht markiert ist, ist die Sprache leer.

Endlichkeitsproblem Pumping Lemma

Äquivalenzproblem WAS MUSS HIER HIN

Kontextsensitive und Typ-0-Sprachen

Kuroda-Normalform

Vergleichbar mit *Chromsky-Normalform*

Eine Typ 1-Grammatik ist in *Kuroda-Normalform*, falls alle Regeln eine der 4 Formen haben:

$$A \to a, A \to B, A \to BC, AB \to CD$$

hierbei stehen A, B, C, D für Variablen und a für ein Terminalsymbol.

Für jede Typ-1 Grammatik G mit $\varepsilon \notin L(G)$ gibt es eine Grammatik G' in Kuroda-Normalform mit $L(G) = L(G')$.

Turingmaschine

Turingmaschinen sind grundsätzlich nichtdeterministisch.

Eine *Turingmaschine* ist gegeben durch ein 7-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$

- Z endliche Zustandsmenge
- Σ Eingabealphabet
- $\Gamma \supset \Sigma$ Arbeitsalphabet
- $\delta : Z \times \Gamma \to Z \times \Gamma \times \{L, R, N\}$ im deterministischen Fall (bzw. $\delta : Z \times \Gamma \to \mathcal{P}(Z \times \Gamma \times \{L, R, N\})$ im nichtdeterministischen Fall) die Überführungsfunktion
- $z_0 \in Z$ der Startzustand
- $\square \in \Gamma - \Sigma$ das Blank
- $E \subseteq Z$ Menge der Endzustände

Dabei bedeutet $\delta(z, a) = (z', b, x)$: Wenn sich M im Zustand z befindet und unter dem Schreib-Lesekopf das Zeichen a steht, so geht M im nächsten Schritt in den Zustand z' über, schreibt (auf den Platz von a) b auf das Band und führt danach die Kopfbewegeung $x \in \{\underset{left}{L}, \underset{right}{R}, \underset{nothing}{N}\}$ aus.

Eine *Konfiguration* einer Turingmaschine ist ein Wort $k \in \Gamma^* Z \Gamma^*$.

Konfiguration = Momentaufnahme $k = \alpha z \beta$ mit z aktueller Zustand.

Definieren auf Menge der Konfigurationen zweistellige Relation $\vdash$ $\vdash$ 1 Schritt

$\vdash^*$ mehrere Schritte

$$a_1 \dots a_m z b_1 \dots b_n \vdash \begin{cases} a_1 \dots a_m z' c b_2 \dots b_n, & \delta(z, b_1) = (z', c, N), m \geq 0, n \geq 1 \\ a_1 \dots a_m c z' b_2 \dots b_n, & \delta(z, b_1) = (z', c, R), m \geq 0, n \geq 2 \\ a_1 \dots a_m z' c b_2 \dots b_n, & \delta(z, b_1) = (z', c, L), m \geq 1, n \geq 1 \end{cases}$$

Die von einer Turingmascheine M *akzeptierte Sprache* ist wie folgt definiert:

$$T(M) = \{x \in \Sigma^* | z_0 x \vdash^* \alpha z \beta; \alpha, \beta \in \Gamma^*; z \in E\}$$

linear beschränkte Turingmaschine (LBA)

Eine nichtteterministische Turingmaschine heisst *linear beschränkt*, wenn für alle $a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n \in \Gamma^+$ und alle Konfigurationen $\alpha z \beta$ mit $z_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1} \hat{a_n} \vdash^* \alpha z \beta$ gilt $|\alpha\beta| = n$.
Die von einer linear beschränkten Turingmaschine m *akzeptierte Sprache* ist wie folgt definiert.

$$T(M) = \{a_1 a_2 \dots a_{n-1} \in \Sigma^* | z_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1} \hat{a_n} \vdash^* \alpha z \beta,\ \alpha, \beta \in \Gamma^*;\ z, \in E\}$$

Der Eingabebereich wird nicht verlassen.

Die von linear beschränkten, nichtdeterministischen Turingmaschine (LBAs) akzeptierten Sprachen sind genau die kontextsensitiven (TYP 1) Sprachen.

Die durch algemeine Turingmaschinen akzeptierbaren Sprachen sind genau die TYP 0-Sprachen.

Eine *Mehrband-Turingmaschine* ist eine Maschine mit $k \geq 1$ Bändern und k Schreib-Leseköpfen. Sie kann daher auf jedem Band unabhängig agieren.

Zu jeder Mehrbandturingmaschine M gibt es eine (Einband-)Turingmaschine M' mit $T(M) = T(M')$, bzw so, dass M' dieselbe Funktion berechnet wie M.

Überblick

Beschreibungsmittel

Typ 3	reguläre Grammatik DFA NFA regulärer Ausdruck
Deterministisch kontextfrei	deterministische Kellerautomaten (DPDA)
Typ 2	kontextfreie Gramatik Kellerautomat PDA
Typ 1	kontextsensitive Grammatik linear beschränkter Automat LBA
Typ 0	Typ 0-Grammatik Turingmaschine TM

Determinismus und Nichtdeterminismus

nichtdet. Automat	determ. Automat	äquivalent?
NFA	DFA	✔
PDA	DPDA	✘
LBA	DLBA	? LBA-Problem
TM	DTM	✔

Abschlusseigenschaften

	Schnitt	Vereinigung	Komplement	Produkt	Stern
Typ 3	✔	✔	✔	✔	✔
Det. kf.	✘	✘	✔	✘	✘
Typ 2	✘	✔	✘	✔	✔
Typ 1	✔	✔	✔	✔	✔
Typ 0	✔	✔	✘	✔	✔

Entscheidbarkeit

	Wort-	Leerheits-	Äquivalenz-	Schnitt-
Typ 3	✔	✔	✔	✔
Det. kf.	✔	✔	✔	✘
Typ 2	✔	✔	✘	✘
Typ 1	✔	✘	✘	✘
Typ 0	✘	✘	✘	✘

Wortproblem (Komplexität)

Typ 3 (DFA GEGEBEN)	lineare Komplexität
Det.kf.	lineare Komplexität
Typ 2 (CNF GEGEBEN)	$\mathcal{O}(n^3)$
Typ 1	exponentielle Komplexität, NP-hart
Typ 0	unlösbar

Berechenbarkeitstheorie

Churchse These
Die durch die formale Definition der *Turing-Berechenbarkeit* (äquivalent: WHILE-*Berechenbarkeit,* GOTO-*Berechenbarkeit,* μ-*Rekursivität*) erfasste Klasse von Funktionen stimmt genau mit der im intuitiven Sinne berechenbaren Funktionen überein.

Turing-Berechenbarkeit

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heisst *Turingberechenbar*, falls es eine (deterministische) Turingmaschine M gibt, so dass für alle $n_1, \ldots, n_k, m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(n_1, \ldots n_k) = m$$

genau dann, wenn

$$z_0 bin(n_1)\#bin(n_2)\# \ldots \#bin(n_k) \vdash^* \square \ldots \square z_e bin(m) \square \ldots \square$$

wobei $z_e \in E$, $bin(n)$ ist die binäre Darstellung der Zahl $n \in \mathbb{N}$.

Eine Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ heisst *Turingberechenbar*, falls es eine (deterministische) Turingmaschine M gibt, so dass für alle $x, y \in \Sigma^*$ gilt:

$$f(x) = y$$

genau dann wenn

$$z_0 x \vdash^* \square \ldots \square z_e \square \ldots \square$$

wobei $z_e \in E$

Man beachte, dass bei beiden Definitionen die Turingmaschine in eine Endlosschleife übergehen kann, wenn $f(x) = undefiniert$.

LOOP-, WHILE- und GOTO-Berechenbarkeit

LOOP-Programme

Variablen: $x_0\ x_1\ x_2\ \ldots$

Konstanten: 0 1 2 ...

Trennsymbole: ; :=

Operationszeichen $+\ -$

Schlüsselwörter: LOOP, DO, END

Bsp für Loop

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heisst LOOP-berechenbar, falls es ein LOOP-Programm P gibt, dass f in dem Sinne berechnet, dass P, gestartet mit $n_1, \ldots, n_k$ in den Variablen $x_1, \ldots, x_k$ (und 0 in den restlichen Variablen) stoppt mit dem Wert $f(n_1, \ldots, n_k)$ in der Variablen x_0.

WHILE-Programme

Wir erweitern LOOP-Programme durch das Konzept der WHILE-Schleife:

$$WHILE x_i \neq 0\ DO\ P\ END$$

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heisst WHILE-berechenbar, falls es ein WHILE-Programm gibt P gibt, das f in dem Sinne berechnet, dass P, gestartet mit $n_1, \ldots, n_k$ in den Variablen $x_1, \ldots, x_k$ (und 0 in den restlichen Fällen) stoppt mit dem Wert $f(n_1, \ldots, n_k)$ in der Variablen x_0, sofern $f(n_1, \ldots, n_k)$ definiert ist, ansonsten stoppt P nicht.

Turingmaschinen können WHILE-Programme simulieren. Dass heisst, jede WHILE-berechenbare Funktion ist auch Turing-berechenbar.

GOTO-Programme

GOTO-Programme bestehen aus Sequenzen von Anweisungen A_i, die jeweils durch eine Marke M_i eingeleitet werden:

$$M_1 : A_1;\ M_2 : A_2;\ \ldots;\ M_k : A_k$$

Als mögliche Anweisungen A_i sind zugelassen:

Wertzuweisungen: $x_i := x_j \pm c$

unbedingter Sprung: GOTO M_i

bedingter Sprung: IF $x_i = c$ THEN GOTO M_j

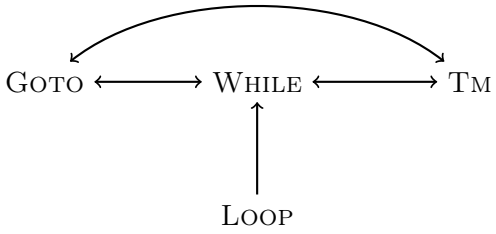
Stopanweisung HALT

Jedes WHILE-Programm kann durch ein GOTO-Programm simuliert werden. Das heisst, jede WHILE-berechenbare Funktion ist auch GOTO-berechenbar.

Jedes GOTO-Programm kann durch ein WHILE-Programm (mit nur einer WHILE-Schleife) simuliert werden. Also ist jede GOTO-berechenbare Funktion auch WHILE-berechenbar

Kleensche Normalform für WHILE-Programme
Jede WHILE-berechenbare Funktion kann durch ein WHILE-Programm mit nur einer WHILE-Schleife berechnet werden.

GOTO-Programme können Turingmaschinen simulieren. Also ist jede Turingberechenbare Funktion auch GOTO-berechenbar.



Primitiv und μ-rekursive Funktionen

Prüfungsrelevant?

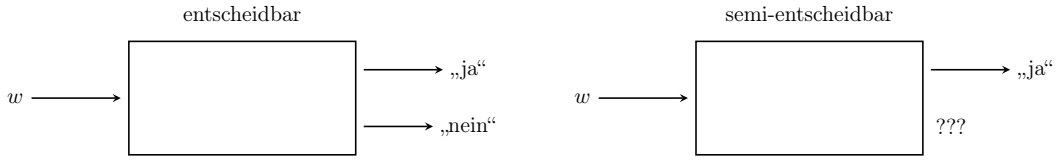
Halteproblem, Unentscheidbarkeit, Reduzierbarkeit

Eine Menge $A \subseteq \Sigma^*$ heisst *entscheidbar*, falls die *charakteristische Funktion* von A, nämlich $\chi_A : \Sigma^* \to \{0, 1\}$, berechenbar ist. Hierbei gilt für alle $w \in \Sigma^*$:

$$\chi_A(w) = \begin{cases} 1, & w \in A \\ 0, & w \notin A \end{cases}$$

Eine Menge $A \subseteq \Sigma^*$ heisst *semi-entscheidbar*, falls die *„halbe“ charakteristische Funktion* von A, nämlich $\chi_A : \Sigma^* \to \{0, 1\}$, berechenbar ist. Hierbei gilt für alle $w \in \Sigma^*$:

$$\chi_A(w) = \begin{cases} 1, & w \in A \\ undefiniert, & w \notin A \end{cases}$$



Eine Sprache A ist genau dann entscheidbar, wenn sowohl A, als auch $\overline{A}$ semi-entscheidbar sind.

Eine Sprache ist genau dann semi-entscheidbar, wenn sie rekursiv aufzählbar ist.

Äquivalente Aussagen:

- A ist rekursiv aufzählbar.
- A ist semi-entscheidbar.
- A ist vom Typ 0.
- $A = T(M)$ für Turingmaschine M
- χ'_A ist (Turing-, WHILE-, GOTO-) berechenbar.
- A ist Definitionsbereich einer berechenbaren Funktion.
- A ist Wertebereich einer berechenbaren Funktion.

Halteproblem

Turingmaschinen sind als Wort schreibbar. Dazu nummerieren wir Elemente von Γ und Z durch. Hierbei sei festgelegt, welche Nummern die Symbole $\square, 0, 1, \#$ sowie Start- und Endzustände erhalten.

$$\Gamma = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$$
$$Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_k\}$$

Jeder δ-Regel ordnen wir ein Wort zu

$$\delta(z_i, a_j) = (z_{i'}, a_{j'}, y) \Rightarrow w_{i,j,i',j',y} = \#\#bin(i)\#bin(j)\#bin(i')\#bin(j')\#bin(m)$$

wobei

$$m = \begin{cases} 0, & y = R \\ 1, & y = L \\ 2, & y = N \end{cases}$$

Somit erhalten wir einen Code für die Turingmaschine über dem Alphabet $\{0,1,\#\}$. Sei $\hat{M}$ eine beliebige, feste Turingmaschine. Dann können wir für jedes Wort $w \in \{0,1\}^*$ festlegen, dass M_w eine Turingmaschine bezeichnet:

$$M_w = \begin{cases} M, & \text{falls } w \text{ Codewort von } M \text{ ist} \\ \hat{M}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Unter dem *speziellen Halteproblem* oder *Selbstanwendbarkeitsproblem* verstehen wir die Sprache

$$K = \{w \in \{0,1\}^* | M_w \text{ angesetzt auf } w \text{ hält (im Endzustand)}\}$$

Das spezielle Halteproblem ist nicht entscheidbar.

Reduktion

Seien $A \subseteq \Sigma^*$ und $B \subseteq \Gamma^*$ Sprachen. Dann heisst A *auf* B *reduzierbar* - symbolisch mit $A \leq B$ bezeichnet - falls es eine totale und berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ gibt, so dass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:

$$x \in A \iff f(x) \in B$$

Falls $A \leq B$ und B entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar), dann ist auch A entscheidbar (bzw-semi-entscheidbar).

Das (allgemeine) Halteproblem ist die Sprache

$$H = \{w\#x | M_w \text{ angesetzt auf } w \text{ hält}\}$$

Das allgemeine Halteproblem H ist nicht entscheidbar.

$K \leq H$, da K Spezialfall von H

Das Halteproblem auf leerem Band ist die Sprache

$$H = \{w\#x | M_w \text{ angesetzt auf leerem Band hält}\}$$

Das Halteproblem auf leerem Band H_0 ist nicht entscheidbar.

$H \leq H_0$, da Turingmaschine einfach das nichtleere Band von H auf das leere Band von H_0 schreiben kann.

Satz von Rice
Sei $\mathcal{R}$ die Klasse aller Turing-berechenbaren Funktionen. Sei $\mathcal{S}$ eine *beliebige* Teilmenge hiervon (ausgenommen $\mathcal{S} = \emptyset$ und $\mathcal{S} = \mathcal{R}$). Dann ist die Sprache

$$C(\mathcal{S} = \{w | \text{ die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\}$$

unentscheidbar.

Das Postsche Korrespondenzproblem (PCP)

gegeben: Eine endliche Folge von Wortpaaren $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)$, wobei $x_i, y_i \in \Sigma^+$.

gefragt: Gibt es eine Folge von Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{1, 2, \ldots, k\}, n \geq 1$, mit $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n} = y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n}$?

Das PCP ist semi-entscheidbar Immer längere Indexfolgen daraufhin untersuchen, ob sie Lösung sind..

modifiziertes Postsches Korrespondenzproblem (MPCP)

gegeben: wie PCP

gefragt: Gibt es eine Lösung $i_1, i_2, \ldots, i_n$ mit $i_1 = 1$

MPCP $\leq$ PCP und $H \leq$ MPCP

Das Modifizierte Postsche Korrespondenzproblem ist untentscheidbar.

Das Postsche Korrespondenzproblem ist bereits untentscheidbar, wenn man sich auf das Eingabealphabet $\{0, 1\}$ beschränkt.

Unentscheidbare Grammatik-Probleme

nicht Prüfungsrelevant

Der Gödelsche Satz

nicht Prüfungsrelevant

Komplexitätstheorie

Komplexitätsklasse und P-NP-Problem

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion. Die Klasse $TIME(f(n))$ besteht aus allen Sprachen A, für die es eine deterministische Mehrbandturingmaschine M gibt mit $A = T(M)$ und $time_M(x) \leq f(|x|)$. Hierbei bedeutet $time_M : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ die Anzahl der Rechenschritte von M bei Eingabe x.

Ein *Polynom* ist eine Funktion $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ der Form

$$p(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0, a_i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$$

Die *Komplexitätsklasse* P ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathsf{P} &= \{A| \text{ es gibt eine Turingmaschine } M \text{ und ein Polynom } p \text{ mit } T(M) = A \text{ und } time_M(x) \leq p(|x|)\} \\ &= \bigcup_{p \text{ Polynom}} TIME(p(n)) \end{aligned}$$

Die Klasse P (ebenso wie größere Komplexitätsklassen wie $TIME(2^n)$ oder $TIME\left(2^{2^{\cdots^{2^2}}}\Big\}\, n\text{-mal}\right)$) sind immer noch in der Klasse der primitiv rekursiv bzw LOOP-berechenbaren Sprachen enthalten

Für nichtdeterministische Turingmaschinen M sei

$$ntime_M(x) = \begin{cases} min \text{ Länge einer akzeptierenden Rechnung von } M \text{ auf } x, & x \in T(M) \\ 0, & x \notin T(M) \end{cases}$$

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion. Die Klasse $NTIME(f(n))$ besteht aus allen Sprachen A, für die es eine *nichtdeterministische* Mehrband-Turingmaschine M gibt mit $A = T(M)$ und $ntime_M(x) \leq f(|x|)$.
Weiter definieren wir

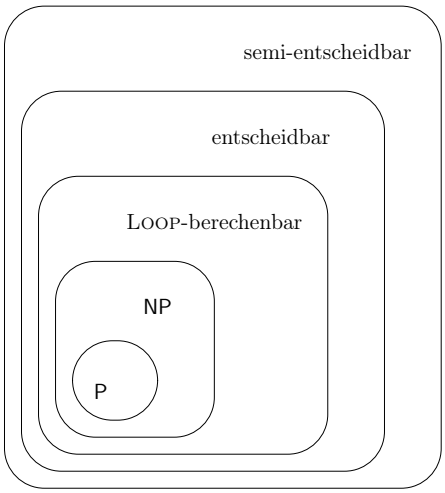
$$\mathsf{NP} = \bigcup_{p \text{ Polynom}} NTIME(p(n))$$

P-NP-Problem

bekannt: $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$

erhofft: $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$

vermutet: $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$



NP-Vollständigkeit

Seien $A \subseteq \Sigma^*$ und $B \subseteq \Gamma^*$ Sprachen. Dann heisst A *auf* B *polynomial reduzierbar* - symbolisch mit $A \leq_p B$ bezeichnet - falls es eine totale und mit polynomieller Komplexität berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ gibt, so dass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:

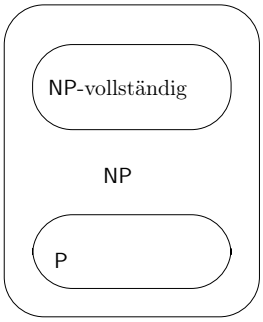
$$x \in A \Longleftrightarrow f(x) \in B$$

Falls $A \leq_p B$ und $B \in \mathsf{P}$ (bzw. $B \in \mathsf{NP}$), so ist auch $A \in \mathsf{P}$ (bzw. $A \in \mathsf{NP}$)

Eine Sprache A heisst *NP-hart*, falls für alle Sprachen $L \in \mathsf{NP}$ gilt: $L \leq_p A$.

Eine Sprache A heisst *NP-vollständig*, falls A NP-hart ist und $A \in \mathsf{NP}$ gilt.

Sei A NP vollständig. Dann gilt $A \in P \Leftrightarrow \mathsf{P} = \mathsf{NP}$. (falls es einnmal so wäre...)



NP-vollständige Probleme

Das *Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik*, kurz SAT, ist das Folgende:

gegeben: eine Formel F der Aussagenlogik

gefragt: Ist F erfüllbar, d.h. gibt es eine Belegung der Variablen mit Konstanten $\in \{0, 1\}$, so dass F den Wert 1 erhält?

$$\text{SAT} = \{code(F) \in \Sigma^* | F \text{ ist eine erfüllbare Formel der Aussagenlogik}\}$$

$$\Sigma = \{(,), \neg, \wedge, \vee, \times, 0, 1\}$$

Das Erfüllbarkeitsproblem derAussagenlogik, SAT , ist NP-vollständig.