

Table des matières

1	Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarités.	2
I	Oscillateurs harmoniques	3
I.1	Equation du mouvement d'un pendule pesant	3
I.2	Portrait de phase	4
II	Effets non linéaires	5
II.1	Etude des effets non linéaires du pendule pesant	5
II.2	Portrait de phase de l'oscillateur anharmonique	5
II.3	Approche énergétique (peut sauter)	5
III	Oscillateurs amortis et amplifié	5
III.1	Oscillateurs amortis	5
III.2	Oscillateurs entretenus : exemple du pont de Wien	6

Leçon 1

Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarités.

Bibliographie de la leçon :

Titre	Auteurs	Editeur (année)	ISBN
https://uhincelin.pagesperso-orange.fr/LP49_BUP_portrait_phase_oscil.pdf	H. Gié	BUP n°744	
https://www.lpens.ens.psl.eu/wp-content/uploads/2022/09/MecaniquePourChimistes-3.pdf	Jules Fillette		
Physique PSI/PSI*	Pascal Olive	Ellipses (2022)	
Mécanique : Fondement et applications	J.P. Pérez	Dunod (2014)	

Commentaires des années précédentes :

- **2017** : Les définitions d'un oscillateur et d'un portrait de phase sont attendues. La leçon doit présenter des systèmes comportant des non-linéarités,
- **2015** : L'intérêt de l'utilisation des portraits de phase doit ressortir de la leçon,
- **2013** : Les aspects non-linéaires doivent être abordés dans cette leçon sans

développement calculatoire excessif, en utilisant judicieusement la notion de portrait de phase. Une simulation numérique bien présentée peut enrichir cette leçon.

Plan détaillé

Niveau choisi pour la leçon : CPGE 2ème année

Prérequis :

- Mécanique newtonienne : TMC, énergie mécanique,
- Electrocinétique : schéma électrique, loi des mailles, résistance, condensateur, inductance,
- calcul fonction de transfert du filtre de Wien
- équation du second ordre avec amortissement, facteur de qualité, régime apériodique, critique, pseudo-périodique

Déroulé détaillé de la leçon :

Introduction

Messages à faire passer : définition d'un portait de phase, portait de phase amorti/non-amorti, stabilité des points fixes, centres attracteurs.

Le notion de portait de phase est un outil très riche pour l'analyse de nombreux systèmes mécaniques, en particulier pour les oscillateurs. C'est que nous allons essayer de montrer dans cette leçon à travers quelques exemples. On va commencer par un exemple très simple.

I Oscillateurs harmoniques

On va s'intéresser à des systèmes mécaniques ou électrocinétiques dont on va dans un premier temps négliger les phénomènes de dissipation. On va commencer par prendre l'exemple très simple du pendule pesant.

I.1 Equation du mouvement d'un pendule pesant

Exemple de la physique : pendule simple à petites oscillations. On applique le théorème du moment cinétique appliqué à la masse m dans le référentiel terrestre

qu'on suppose galiléen :

$$\frac{d\mathbf{L}_O(M)}{dt} = mL^2\ddot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_z = \mathbf{M}_O(\mathbf{P}) = -mgL\sin(\theta)\hat{\mathbf{u}}_z \quad (1.1)$$

On en déduit l'équation d'un oscillateur de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0 \quad (1.2)$$

Pour des petites oscillations ($\theta \ll 1 = 60^\circ$), on a :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (1.3)$$

On trouve l'équation d'un oscillateur harmonique. Tout oscillateur harmonique est régi par la même équation. **Analogies** : masse accrochée à un ressort sans frottements, l'évolution temporelle de la charge d'un condensateur d'un circuit LC.

I.2 Portrait de phase

Voir BUP. **Définition** : pour un système dont l'évolution au cours du temps t est décrit par la fonction à valeurs réelles $x(t)$, on appelle trajectoire de phase une représentation géométrique cartésienne dans laquelle on reporte les positions au cours du temps t d'un point représentatif M d'abscisse x et d'ordonnée $\frac{dx}{dt}$.

Portrait de phase pour l'oscillateur harmonique :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) \quad (1.4)$$

$$\dot{\theta}(t) = -\theta_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) \quad (1.5)$$

$$\left(\frac{\dot{\theta}(t)}{\omega_0}\right)^2 + \theta(t)^2 = \theta_0^2 \quad (1.6)$$

Toutes les trajectoires dans le portrait de phase $((\frac{\dot{\theta}(t)}{\omega_0}, \theta(t)))$ du pendule pesant (et en général d'un oscillateur harmonique dont la variable est $x(t)$) sont des cercles concentriques de rayon θ_0 qui dépendent des donc conditions initiales. A une CI correspond une trajectoire de phase.

Transition : Que se passe-t'il si on n'est plus dans l'approximation des petits angles ? On va voir qu'il y a des effets non linéaires qui apparaissent et que cela change le portrait de phase du système.

II Effets non linéaires

II.1 Etude des effets non linéaires du pendule pesant

Voir Pérez p170 pour un calcul simple. Montrer que la période dépend de l'amplitude des oscillations.

Manip quantitative : mettre en évidence non linéarités. Faire une acquisition à grand angle. Parler pendant l'acquisition du programme `bordaThomas.ipynb` (ou alors faire simple et prendre les points à la main et puis Qutiplo, mais réfléchir aux incertitudes).

Il y a un enrichissement spectral (voir Duffait/livre d'expérience agreg).

II.2 Portait de phase de l'oscillateur anharmonique

Montrer sur Python la simulation puis sur slide si on trace pleins de portait de phase.

En vérifiant sur un document graphique le caractère cyclique d'une trajectoire de phase, on dispose d'un test du caractère périodique de l'évolution beaucoup plus précis que l'observation de l'allure de la représentation $x(t)$.

II.3 Approche énergétique (peut sauter)

Montrer qu'il y a conservation de l'énergie mécanique, toutes les trajectoires fermées ou cycliques dans un portait de phase expriment la conservation de l'énergie mécanique du système!

Transition : on a vu dans l'expérience qu'il y a avait un amortissement dû principalement aux frottements de l'air sur le pendule. On va modéliser cela dans la partie suivante et montrer le portait de phase associé.

III Oscillateurs amortis et amplifié

III.1 Oscillateurs amortis

Donner l'équation. Montrer le portait de phase associé sous python ou sur slide (voir BUP). Définir un centre attracteur.

III.2 Oscillateurs entretenus : exemple du pont de Wien

Voir Pascal Olive p204.

Conclusion

Ouvrir sur les oscillateurs paramétriques ? Van der Pol, résistance négative, transition vers le chaos ?