

# 公平的席位分配

小组成员：樊一飞 曾子寒 史缘坤 李炳隆

## 一. 提出问题

席位分配在具体实践时常有不公平现象，怎样分配才是相对公平的？应按什么分配标准？

## 二. 符号释义

符号	释义
$i$	自然数列
$p_i$	第 $i$ 方的人数
$n_i$	第 $i$ 方的席位数
$r$	相对不公平度

## 三. 建立模型

	人数	席位
A方	$p_1$	$n_1$
B方	$p_2$	$n_2$

### 模型假设

- 席位分配以人数作为唯一影响因素进行分配
- 每一个个体对于席位分配的影响是完全等同的，即不存在群体之间的加权分配的情况

### 模型的建立

#### 1. 绝对不公平度定义

想要进行公平的分配，首先本文需要定义衡量公平的指标，在本文引入经典的绝对不公平度的定义：

若 $p_1/n_1 > p_2/n_2$ ,称为 $p_1/n_1 > p_2/n_2$ 对A的不公平度

#### 2. 相对不公平度定义

鉴于现实生活中公平往往是相对的，因而绝对公平度作为分配依据会因为数据的容量改变而产生偏颇，因此本文引入相对不公平度的定义。

选取主要分数法的定义：

当 $n_j/p_j > n_i/p_i$ 时，称为对 $i$ 的 $r_i(n_i, n_j) = \frac{n_j}{p_j} - \frac{n_i}{p_i}$ 相对不公平度。

#### 3. 分配原则

将席位逐一分配给各方，分配方式为将每个席位分给相对不确定度最大的一方。

## 4. 分配方法

考虑 $r_A(n_1, n_2 + 1)$ 与 $r_B(n_1 + 1, n_2)$

当 $r_A(n_1, n_2 + 1) < r_B(n_1 + 1, n_2)$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{n_2 + 1}{p_2} - \frac{n_1}{p_1} &< \frac{n_1 + 1}{p_1} - \frac{n_2}{p_2} \\ \frac{2n_2 + 1}{p_2} &< \frac{2n_1 + 1}{p_1} \\ \frac{p_1}{n_1 + 0.5} &< \frac{p_2}{n_2 + 0.5}\end{aligned}$$

此时应分配给B

同理，当 $r_A(n_1, n_2 + 1) > r_B(n_1 + 1, n_2)$ 时,

$$\frac{p_1}{n_1 + 0.5} > \frac{p_2}{n_2 + 0.5}$$

此时应分配给A

## 5. Q值的定义

鉴于上文推导，为了方便比较，本文定义Q值:

$$Q_k = \frac{p_k}{n_k + 0.5}$$

$k = 1, 2$

$Q_k$ 大者得到席位。

推广到 $m$ 方分配席位，计算 $Q_k = \frac{p_k}{n_k + 0.5}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, m$ ，该席位分给Q值大的一方。

## 四. 案例应用举例

任意取8个被分配方，人数分别为

被分配方	1	2	3	4	5	6	7	8
人数	42	45	33	12	35	80	67	34

将20个席位按照"主要除数法"公平分配给这个8个被分配方

下面我们写一个程序来模拟这个过程：

```
1 from numpy import argmax
2
3 # 总席位
4 s = 20
5 # 各方人数情况
6 ps = [42, 45, 33, 12, 35, 80, 67, 34]
7 # 初始化席位分配
8 ns = [0 for _ in ps]
9
10 # 定义Q函数
```

```

11 def Q(p,n):
12     return p/(n+.5)
13
14 print('下面将{}个席位分配给{}个方面'.format(s,len(ps)))
15 print('各方人数情况:',ps)
16 print('-----')
17
18 for r in range(s):
19     print('现在进行第{}个席位的分配'.format(r+1))
20     qs = [Q(*x) for x in zip(ps,ns)]
21     print('Q值: ',qs)
22     i = argmax(qs)
23     print('第{}方的Q值最大, 将席位分给第{}方'.format(i+1))
24     ns[i] += 1
25     print('目前各方的席位情况: ',ns)
26     print('-----')
27
28 '''
29 Distribution.py
30 用于公平指标分配问题的模拟脚本
31 Copyright 2020 by Algebra-FUN(樊一飞)
32 ALL RIGHTS RESERVED.
33 '''

```

程序模拟的输出结果:

```

1  下面将20个席位分配给8个方面
2  各方人数情况: [42, 45, 33, 12, 35, 80, 67, 34]
3  -----
4  现在进行第1个席位的分配
5  Q值: [84.0, 90.0, 66.0, 24.0, 70.0, 160.0, 134.0, 68.0]
6  第6方的Q值最大, 将席位分给第6方
7  目前各方的席位情况: [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
8  -----
9  现在进行第2个席位的分配
10 Q值: [84.0, 90.0, 66.0, 24.0, 70.0, 53.33333333333336, 134.0, 68.0]
11 第7方的Q值最大, 将席位分给第7方
12 目前各方的席位情况: [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0]
13 -----
14 现在进行第3个席位的分配
15 Q值: [84.0, 90.0, 66.0, 24.0, 70.0, 53.33333333333336,
16 44.666666666666664, 68.0]
17 第2方的Q值最大, 将席位分给第2方
18 目前各方的席位情况: [0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0]
19 -----
20 现在进行第4个席位的分配
21 Q值: [84.0, 30.0, 66.0, 24.0, 70.0, 53.33333333333336,
22 44.666666666666664, 68.0]
23 第1方的Q值最大, 将席位分给第1方
24 目前各方的席位情况: [1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0]
25 -----
26 现在进行第5个席位的分配
27 Q值: [28.0, 30.0, 66.0, 24.0, 70.0, 53.33333333333336,
28 44.666666666666664, 68.0]
29 第5方的Q值最大, 将席位分给第5方
30 目前各方的席位情况: [1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0]
31 -----

```

29 现在进行第6个席位的分配  
30 Q值: [28.0, 30.0, 66.0, 24.0, 23.33333333333332, 53.33333333333336,  
44.66666666666664, 68.0]  
31 第8方的Q值最大, 将席位分给第8方  
32 目前各方的席位情况: [1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1]  
33 -----  
34 现在进行第7个席位的分配  
35 Q值: [28.0, 30.0, 66.0, 24.0, 23.33333333333332, 53.33333333333336,  
44.66666666666664, 22.66666666666668]  
36 第3方的Q值最大, 将席位分给第3方  
37 目前各方的席位情况: [1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1]  
38 -----  
39 现在进行第8个席位的分配  
40 Q值: [28.0, 30.0, 22.0, 24.0, 23.33333333333332, 53.33333333333336,  
44.66666666666664, 22.66666666666668]  
41 第6方的Q值最大, 将席位分给第6方  
42 目前各方的席位情况: [1, 1, 1, 0, 1, 2, 1, 1]  
43 -----  
44 现在进行第9个席位的分配  
45 Q值: [28.0, 30.0, 22.0, 24.0, 23.33333333333332, 32.0,  
44.66666666666664, 22.66666666666668]  
46 第7方的Q值最大, 将席位分给第7方  
47 目前各方的席位情况: [1, 1, 1, 0, 1, 2, 2, 1]  
48 -----  
49 现在进行第10个席位的分配  
50 Q值: [28.0, 30.0, 22.0, 24.0, 23.33333333333332, 32.0, 26.8,  
22.66666666666668]  
51 第6方的Q值最大, 将席位分给第6方  
52 目前各方的席位情况: [1, 1, 1, 0, 1, 3, 2, 1]  
53 -----  
54 现在进行第11个席位的分配  
55 Q值: [28.0, 30.0, 22.0, 24.0, 23.33333333333332, 22.857142857142858,  
26.8, 22.66666666666668]  
56 第2方的Q值最大, 将席位分给第2方  
57 目前各方的席位情况: [1, 2, 1, 0, 1, 3, 2, 1]  
58 -----  
59 现在进行第12个席位的分配  
60 Q值: [28.0, 18.0, 22.0, 24.0, 23.33333333333332, 22.857142857142858,  
26.8, 22.66666666666668]  
61 第1方的Q值最大, 将席位分给第1方  
62 目前各方的席位情况: [2, 2, 1, 0, 1, 3, 2, 1]  
63 -----  
64 现在进行第13个席位的分配  
65 Q值: [16.8, 18.0, 22.0, 24.0, 23.33333333333332, 22.857142857142858,  
26.8, 22.66666666666668]  
66 第7方的Q值最大, 将席位分给第7方  
67 目前各方的席位情况: [2, 2, 1, 0, 1, 3, 3, 1]  
68 -----  
69 现在进行第14个席位的分配  
70 Q值: [16.8, 18.0, 22.0, 24.0, 23.33333333333332, 22.857142857142858,  
19.142857142857142, 22.66666666666668]  
71 第4方的Q值最大, 将席位分给第4方  
72 目前各方的席位情况: [2, 2, 1, 1, 1, 3, 3, 1]  
73 -----  
74 现在进行第15个席位的分配  
75 Q值: [16.8, 18.0, 22.0, 8.0, 23.33333333333332, 22.857142857142858,  
19.142857142857142, 22.66666666666668]  
76 第5方的Q值最大, 将席位分给第5方

```
77 目前各方的席位情况： [2, 2, 1, 1, 2, 3, 3, 1]
78 -----
79 现在进行第16个席位的分配
80 Q值： [16.8, 18.0, 22.0, 8.0, 14.0, 22.857142857142858, 19.142857142857142,
81 22.666666666666668]
82 第6方的Q值最大，将席位分给第6方
83 目前各方的席位情况： [2, 2, 1, 1, 2, 4, 3, 1]
84 -----
85 现在进行第17个席位的分配
86 Q值： [16.8, 18.0, 22.0, 8.0, 14.0, 17.77777777777778, 19.142857142857142,
87 22.666666666666668]
88 第8方的Q值最大，将席位分给第8方
89 目前各方的席位情况： [2, 2, 1, 1, 2, 4, 3, 2]
90 -----
91 现在进行第18个席位的分配
92 Q值： [16.8, 18.0, 22.0, 8.0, 14.0, 17.77777777777778, 19.142857142857142,
93 13.6]
94 第3方的Q值最大，将席位分给第3方
95 目前各方的席位情况： [2, 2, 2, 1, 2, 4, 3, 2]
96 -----
97 现在进行第19个席位的分配
98 Q值： [16.8, 18.0, 13.2, 8.0, 14.0, 17.77777777777778, 19.142857142857142,
99 13.6]
100 第7方的Q值最大，将席位分给第7方
101 目前各方的席位情况： [2, 2, 2, 1, 2, 4, 4, 2]
102 -----
103 现在进行第20个席位的分配
104 Q值： [16.8, 18.0, 13.2, 8.0, 14.0, 17.77777777777778, 14.88888888888889,
105 13.6]
106 第2方的Q值最大，将席位分给第2方
107 目前各方的席位情况： [2, 3, 2, 1, 2, 4, 4, 2]
108 -----
```

最终分配结果：

被分配方	1	2	3	4	5	6	7	8
人数	42	45	33	12	35	80	67	34
分配到的席位	2	3	2	1	2	4	4	2

因为分配过程的公平而实现分配结果的公平，这也是除法分配法严谨过程的体现。