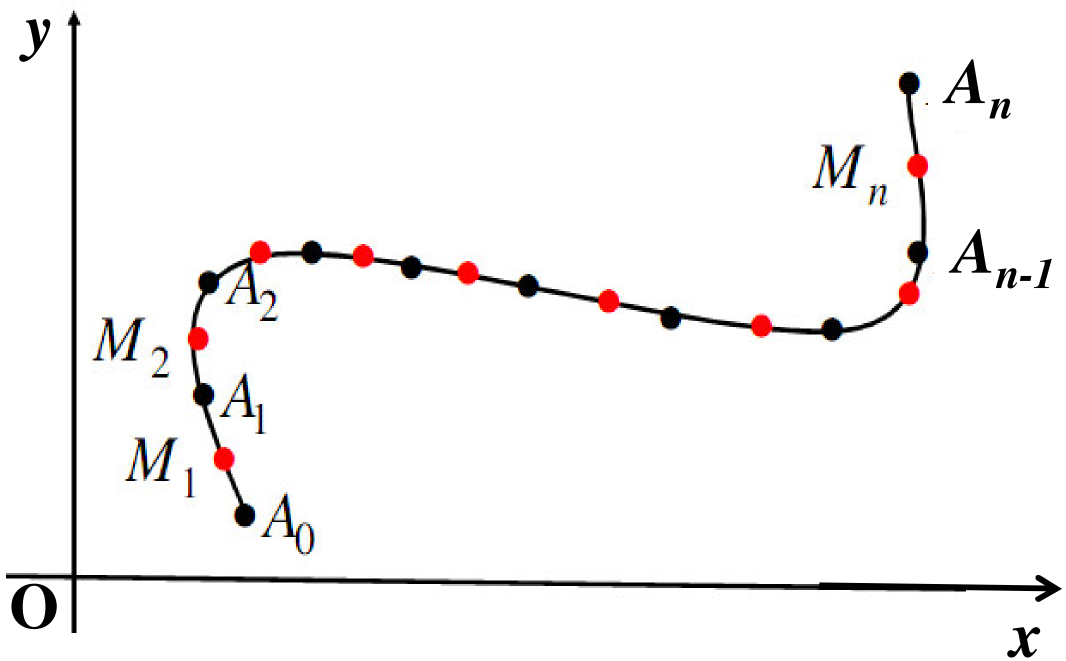
§4. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI MỘT

4.1. Định nghĩa.

Cho hàm số f(x, y) xác định trên đường cong L. Chia L một cách tùy ý thành n đường cong nhỏ bởi các điểm $A_o, A_1, \ldots, A_n$. Gọi độ dài cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ là Δl_i. Trên cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ lấy một điểm tùy ý M_i. Lập tổng:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i$$



Nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i = I$$ hữu hạn, không phụ thuộc vào

cách chia L và cách chọn điểm M_i thì giới hạn đó được gọi là *tích phân đường loại một* của hàm f trên L và được ký hiệu là:

$$\int_L f(x,y)dl \quad \text{hoặc} \quad \int_L f(x,y)ds$$

Khi đó ta nói hàm f khả tích trên L.

- Trong không gian Oxyz ta định nghĩa tương tự và ký hiệu là:

$$\int_L f(x,y,z)dl$$

- Tích phân đường loại một có các tính chất giống tích phân xác định.
- Tích phân đường loại một không phụ thuộc vào chiều lấy tích phân trên L.

4.2. Sự tồn tại tích phân đường loại một.

- Đường cong L cho bởi $y = y(x); x \in [a, b]$ được gọi là *trơn* nếu đạo hàm y'(x) tồn tại và liên tục trên [a, b].

- Đường cong L có phương trình tham số $x = x(t), y = y(t); t \in [a, b]$ được gọi là *trơn* nếu tồn tại các đạo hàm x'(t), y'(t) liên tục và không đồng thời bằng 0 trên [a, b].

- Đường cong L được gọi là *trơn từng khúc* nếu nó gồm một số hữu hạn đường cong trơn.

Định lý. ▪ Nếu đường cong L trơn và nếu hàm f liên tục trên L thì f khả tích trên L.

- Nếu đường cong L trơn từng khúc và nếu hàm f liên tục trên L thì f khả tích trên L.

4.3. Cách tính tích phân đường loại một

1) Nếu L cho bởi phương trình y = y(x); $a \le x \le b$ thì:

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}dx$$

Tương tự, nếu L cho bởi phương trình x = x(y); $a \le y \le b$ thì:

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(x(y), y)\sqrt{1 + x'^2(y)}dy$$

VD. Tính $I = \int_L (x + y)dl$ với L là ΔOAB có các đỉnh O(0, 0), A(1, 0), B(0, 1).

2) Nếu L cho bởi phương trình tham số x = x(t), y = y(t); $a \le t \le b$ thì:

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$

VD. Tính $I = \int_L (x - y)dl$ với L là cung tròn $\overset{\frown}{AB}$, tâm I(1; 3), bán kính 2 và A(1; 5), B(3; 3)

3) Nếu L cho bởi phương trình trong tọa độ cực r = r(φ); $\alpha \le \varphi \le \beta$ thì ta xem φ là tham số, ta có phương trình của L là:

x = r(φ)cosφ, y = r(φ)sinφ; $\alpha \le \varphi \le \beta$, suy ra

$$x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) = r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)$$

Vậy: $\int_L f(x, y)dl = \int_\alpha^\beta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi$

VD. Tính $I = \int_L (x^2 + y^2)dl$ với L là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$

4) Nếu đường cong L trong không gian cho bởi phương trình tham số x = x(t), y = y(t), z = z(t); $a \leq t \leq b$ thì:

$$\int_L f(x,y,z)dl = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

<u>VD.</u> Tính $I = \int_L z^2 dl$ với L có phương trình x = acost, y = asint, z = bt; $0 \leq t \leq 3$

4.4. Ứng dụng của tích phân đường loại một

- **Tính độ dài đường cong:** Độ dài của đường cong L là: $l = \int_L dl$

<u>VD.</u> Tính độ dài của đường cong L với L là nửa trên đường tròn đơn vị

§5. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI

5.1. Định nghĩa.

Cho hai hàm số P(x, y), Q(x, y) xác định trên đường cong L. Chia L một cách tùy ý thành n đường cong nhỏ bởi các điểm

$$A_o\left(x_o, y_o\right), A_1\left(x_1, y_1\right), \ldots, A_n\left(x_n, y_n\right)$$

Trên mỗi cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ lấy một điểm tùy ý $M_i\left(\overline{x}_i, \overline{y}_i\right)$. Lập tổng:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n}\left[P\left(M_i\right)\Delta x_i + Q\left(M_i\right)\Delta y_i\right] \text{ với } \begin{cases} \Delta x_i = x_{i+1} - x_i \\ \Delta y_i = y_{i+1} - y_i \end{cases}$$

Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max \Delta l_i \to 0$ (Δl_i là độ dài cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$), tổng I_n dần tới một giới hạn hữu hạn I, không phụ thuộc cách chia L và cách chọn điểm M_i thì giới hạn đó được gọi là *tích phân đường loại hai* của hai hàm P, Q trên L và được ký hiệu là:

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

- Trong không gian ta định nghĩa tương tự và ký hiệu là:

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Định lý. Nếu hai hàm P, Q liên tục trong miền mở chứa đường cong L trơn từng khúc thì tồn tại tích phân đường loại hai của P, Q dọc theo L.

- Tích phân đường loại hai có các tính chất như tích phân xác định.

- Tích phân đường loại hai phụ thuộc chiều lấy tích phân trên L.

Do đó, khi viết tích phân cần ghi rõ điểm đầu và cuối.

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = -\int_{\overset{\frown}{BA}} Pdx + Qdy$$

- Nếu L là đường cong kín, ta quy ước chiều dương của L là chiều mà khi đi dọc L theo chiều ấy sẽ thấy miền giới hạn bởi L nằm về phía bên trái. Tích phân theo hướng dương được ký hiệu:

$$\oint_L Pdx + Qdy$$

- Từ định nghĩa tổng tích phân ta có thể viết:

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_L Pdx + \int_L Qdy$$

5.2. Cách tính tích phân đường loại hai.

1) Nếu L cho bởi phương trình y = y(x); $x = x_1$ là hoành độ của điểm đầu, $x = x_2$ là hoành độ của điểm cuối thì:

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_1}^{x_2} \left[P\left(x,y(x)\right) + Q\left(x,y(x)\right)y'(x)\right]dx$$

Tương tự, nếu L cho bởi phương trình x = x(y); $y = y_1$ là tung độ của điểm đầu, $y = y_2$ là tung độ của điểm cuối thì :

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{y_1}^{y_2} \left[P\left(x(y),y\right)x'(y) + Q\left(x(y),y\right)\right]dy$$

VD 1. Tính $I = \int\limits_{L} (x - y)dx + (x + y)dy$, với L là đường nối điểm (0, 0) với điểm (1, 1), nếu L là:

1) đường $y = x$

2) đường $y = x^2$

VD 2. Tính $I = \int\limits_{L} (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$, với L là cung của đường parabol $y^2 = 1 - x$ từ điểm A(0, –1) đến điểm B(0, 1)

2) Nếu L cho bởi phương trình tham số x = x(t), y = y(t); t = a ứng với điểm đầu của L, t = b ứng với điểm cuối của L thì:

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right]dt$$

Tương tự trong không gian ta có:

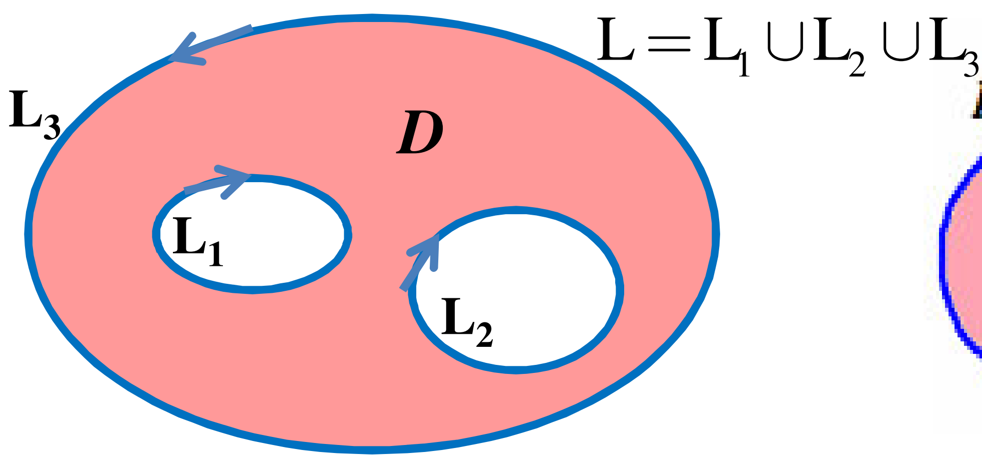
$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b \left[Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\right]dt$$

VD 1. Tính $I = \int_L (3x - 4y)dx + (2x + y)dy$, với L là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$

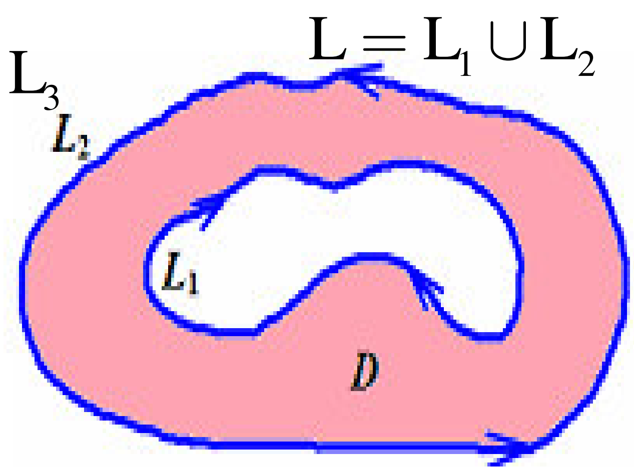
VD 2. Tính tích phân các hàm P = z, Q = x, R = y dọc theo cung L có phương trình: x = cost, y = sint, z = 3t; $0 \le t \le 2\pi$

5.3. Công thức Green.

- Xét miền phẳng D có biên là đường cong L. Khi đó, *chiều dương quy ước* trên L là chiều mà đi theo chiều này ta thấy miền D nằm phía bên tay trái.
- Miền D được gọi là *miền đơn liên* nếu các biên kín của D có thể co về một điểm P thuộc D mà không bị các biên khác cản trở. Ngược lại D được gọi là *miền đa liên*.



Miền đa liên



Miền đơn liên

Công thức Green.

Cho D là miền đóng, bị chặn trong mặt phẳng Oxy với biên L kín trơn từng khúc. P(x, y), Q(x, y) và các đạo hàm riêng cấp một liên tục trong miền mở chứa D. Khi đó:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \pm\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Dấu "+" nếu chiều lấy tích phân trùng chiều dương quy ước

Điều kiện để sử dụng công thức Green:

1) L là đường cong kín.

2) P(x, y), Q(x, y) và các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên miền D có biên L.

VD 1. Tính $I = \int\limits_L (x^2 + 3y)dx + 2ydy$, trong đó L là biên tam giác OAB với O(0; 0), A(1; 1), B(0; 2), ngược chiều kim đồng hồ.

VD 2. Tính $I = \int\limits_L (x - y)^2 dx + (x + y)^2 dy$, trong đó L là nửa trên đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$, cùng chiều kim đồng hồ.

VD 3. Tính $I = \int\limits_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, trong đó L là đường cong kín tùy ý không chứa gốc O, ngược chiều kim đồng hồ.

Ứng dụng công thức Green tính diện tích miền phẳng.

Trong công thức Green lấy P = –y, Q = x ta được:

$$\oint_L xdy - ydx = 2\iint_D dxdy = 2S_D$$

Vậy: $S_D = \dfrac{1}{2}\oint_L xdy - ydx$

VD. Tính diện tích hình elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$

5.4. Điều kiện để tích phân đường không phụ thuộc vào đường lấy tích phân.

Định lý. Giả sử hai hàm số P(x, y), Q(x, y) và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong miền mở đơn liên D chứa cung $\overset{\frown}{AB}$. Khi đó, bốn mệnh đề sau đây tương đương với nhau:

1) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x};\ \forall (x, y) \in D$

2) $\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = 0$ dọc theo mọi đường cong kín L nằm trong D

3) $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ chỉ phụ thuộc hai đầu mút A, B mà không phụ thuộc đường cong nối A, B

4) Biểu thức Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của một hàm số U(x, y) nào đó trong D, tức là: dU(x, y) = Pdx + Qdy

Cách tính tích phân dựa vào Định lý trên.

Giả sử P(x, y), Q(x, y) thỏa mãn Định lý trên, khi đó tích phân

$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ chỉ phụ thuộc hai điểm A, B nên có thể viết I

dưới dạng $I = \int_{A}^{B} Pdx + Qdy = \int_{(x_A, y_A)}^{(x_B, y_B)} Pdx + Qdy$. Ta thường tính

I theo đường đơn giản nhất là các đường gấp khúc song song với

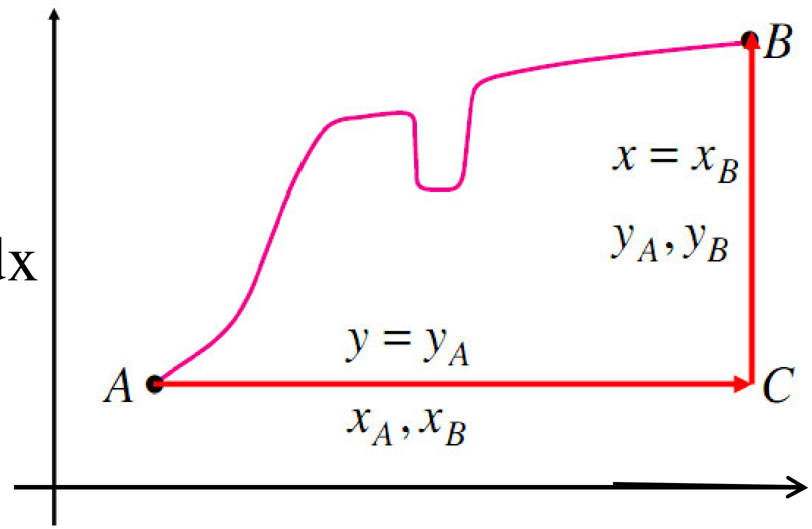
các trục tọa độ. Ta được:

$$I = \int_{AC} + \int_{CB} = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int\limits_{AC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$= \int\limits_{x_A}^{x_B} P(x,y_A)dx + Q(x,y_A).0dx$$

$$= \int\limits_{x_A}^{x_B} P(x,y_A)dx$$



$$I_2 = \int\limits_{CB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{y_A}^{y_B} P(x_B,y).0dy + Q(x_B,y)dy = \int\limits_{y_A}^{y_B} Q(x_B,y)dy$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_{x_A}^{x_B} P(x,y_A)dx + \int\limits_{y_A}^{y_B} Q(x_B,y)dy$$

Hệ quả. Nếu Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của hàm số U(x, y) nào đó trong miền mở đơn liên D thì

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = U(B) - U(A)$$

VD 1. Tính $I = \int_{(-1,2)}^{(2,3)} ydx + xdy$

VD 2. Tính $I = \int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$