§2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

2.1. Các khái niệm cơ bản.

Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp hai là

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad \text{hay} \quad y'' = f(x, y, y') \qquad (*)$$

- Nghiệm của phương trình vi phân cấp hai phụ thuộc hai hằng số.

Nghiệm tổng quát của phương trình (*) có dạng: $y = \varphi(x, C_1, C_2)$.

Nghiệm riêng là nghiệm thu được từ nghiệm tổng quát bằng cách cho C_1, C_2 những giá trị cụ thể.

2.2. Bài toán Cauchy.

Bài toán Cauchy là bài toán tìm nghiệm của phương trình (*) thỏa mãn điều kiện đầu

$$\begin{cases} y(x_o) = y_o \\ y'(x_o) = y'_o \end{cases}; \quad x_o, y_o, y'_o \text{ là những số cho trước}$$

2.3. Phương trình vi phân cấp hai giảm cấp được.

1. Phương trình khuyết y và y': $F(x, y'') = 0 \qquad (1)$

<u>Cách giải:</u>

Đặt $y' = z$ ta có phương trình vi phân cấp một $F(x, z') = 0$

<u>VD.</u> Giải phương trình: $y'' = x^2$

2. Phương trình khuyết y: $F(x, y', y'') = 0 \qquad (2)$

<u>Cách giải:</u>

Đặt $z = y'$ ta có phương trình vi phân cấp một $F(x, z, z') = 0$

<u>**VD.**</u> Giải phương trình: $xy'' + y' = x^2$

3. Phương trình khuyết x: $F(y, y', y'') = 0 \qquad (3)$

<u>Cách giải:</u>

Đặt $z = y'$ và coi y là biến còn z là hàm số theo biến y. Ta có:

$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}$. Khi đó (3) trở thành phương trình vi phân cấp một đối với z: $F\left(y, z, z\frac{dz}{dy}\right) = 0$

<u>**VD.**</u> Giải phương trình: $yy'' + y'^2 = 0$

với điều kiện $y(1) = 2; y'(1) = \frac{1}{2}$

2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai với hệ số hằng.

2.4.1. Định nghĩa.

- Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất hệ số hằng có dạng: $y'' + py' + qy = f(x) \qquad (1)$

trong đó: p, q là hằng số, f là hàm liên tục

- Phương trình: $y'' + py' + qy = 0 \qquad (2)$, với p, q là hằng số được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất hệ số hằng tương ứng của phương trình (1)

2.4.2. Phương pháp giải phương trình thuần nhất.

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng: $k^2 + pk + q = 0 \qquad (3)$

<u>TH1.</u> Phương trình (3) có hai nghiệm thực phân biệt k_1, k_2. Khi đó phương trình (2) có hai nghiệm riêng: $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}$ và nghiệm tổng quát là: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

<u>TH2.</u> Phương trình (3) có nghiệm kép thực $k_1 = k_2 = k$. Khi đó phương trình (2) có hai nghiệm riêng: $y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx}$ và nghiệm tổng quát là: $y = C_1 e^{kx} + C_2 xe^{kx}$

TH3. Phương trình (3) có hai nghiệm phức liên hợp: $k_1 = \alpha + ib$ $k_2 = \alpha - ib$. Khi đó phương trình (2) có hai nghiệm riêng:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

và nghiệm tổng quát là: $y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$

VD. Giải phương trình:

1) $y'' + 3y' - 4y = 0$

2) $y'' - 2y' + 5y = 0$

3) $y'' - 6y' + 9y = 0$

2.4.3. Phương pháp giải phương trình không thuần nhất.

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (1)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (1) có dạng

$$y = y_o + y_r$$

trong đó: y_o là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2)

y_r là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (1)

+ Ở trên, ta tìm được nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (2). Để tìm nghiệm tổng quát của (1) ta cần tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (1). Áp dụng phương pháp biến thiên hằng số:

B1. $y'' + py' + qy = 0 \;\Rightarrow\; y_o = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

B2. Xem C_1, C_2 là các hàm số của x, ta tìm nghiệm riêng của (1) có dạng: $y_r = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$

Giải hệ: $\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$

$$\Rightarrow C_1'(x), C_2'(x) \Rightarrow C_1(x), C_2(x) \Rightarrow y_r$$

Nghiệm tổng quát của (1) là: $y = y_o + y_r$

VD. Giải phương trình: $y'' - 2y' + y = x$

+ Đối với một số dạng đặc biệt của vế phải f(x), có thể tìm được nghiệm riêng của (1) mà không cần một phép tính tích phân nào – đó là phương pháp hệ số bất định.

Ta xét các trường hợp sau:

<u>TH1.</u> $f\left(x\right)=e^{\alpha x}P_n\left(x\right)$, trong đó: $P_n(x)$ là đa thức bậc n

Tìm nghiệm riêng của (1) dạng: $y_r = x^s e^{\alpha x} Q_n\left(x\right)$

$\left(Q_n\left(x\right)\right.$ là đa thức cùng bậc với $\left.P_n\left(x\right)\right)$

- s = 0 nếu α không là nghiệm của phương trình đặc trưng
- s = 1 nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng
- s = 2 nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng

Thế y_r vào (1) và đồng nhất thức ta được nghiệm riêng cần tìm.

TH2. $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x\right)$

trong đó: $P_m(x)$ là đa thức bậc m, $P_n(x)$ là đa thức bậc n

Tìm nghiệm riêng của (1) dạng:

$$y_r = x^s e^{\alpha x}\left(Q_k(x)\cos\beta x + R_k(x)\sin\beta x\right)$$

$$\left(Q_k(x), R_k(x) \text{ là các đa thức bậc } k = \max\{m, n\}\right)$$

- s = 0 nếu $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng
- s = 1 nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng

Thế y_r vào (1) và đồng nhất thức ta được nghiệm riêng cần tìm.

Chú ý.

1) $f(x) = P_n(x)$ thuộc trường hợp 1: $f(x) = e^{0x} P_n(x)$

2) $f(x) = P_n(x)\cos\beta x$ thuộc trường hợp 2:

$$f(x) = e^{0x}\left(P_n(x)\cos\beta x + 0.\sin\beta x\right)$$

Định lý. **(Nguyên lý chồng chất nghiệm)**

Cho phương trình: $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$ $\quad (*)$

Nếu y_{r_1} và y_{r_2} lần lượt là nghiệm riêng của

$$y'' + py' + qy = f_1(x); \qquad y'' + py' + qy = f_2(x)$$

thì nghiệm riêng của (*) là: $y_r = y_{r_1} + y_{r_2}$

VD 1. Giải phương trình:

1) $y'' - 5y' + 6y = e^{-x}$

2) $y'' + 2y' = 3x$

VD 2. Giải phương trình:

1) $y'' - 4y' + 3y = \sin 2x$

2) $y'' + y = \cos x$

3) $y'' - 4y' + 4y = x + e^{2x}$