§3. TÍCH PHÂN BỘI BA

3.1. Định nghĩa.

Cho hàm số z = f(x, y, z) xác định trong một miền đóng, bị chặn Ω của không gian Oxyz. Chia Ω một cách tùy ý thành n miền nhỏ Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n có thể tích lần lượt là $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$. Trong mỗi miền Ω_i, lấy một điểm bất kỳ $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Lập tổng:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$$

được gọi là tổng tích phân của hàm f trong miền Ω.

Ký hiệu: $d(\Omega_i)$ là đường kính của miền Ω_i. Nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{\max d(\Omega_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i = I$ hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia miền Ω và cách chọn điểm M_i thì giới hạn đó được gọi là *tích phân bội ba* của hàm f trên miền Ω và được ký hiệu là: $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dV$

Khi đó ta nói hàm f khả tích trên Ω.

Định lý. Nếu hàm f liên tục trên miền đóng, bị chặn thì nó khả tích trên miền đó.

- Tương tự như tích phân kép, ta có thể viết:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dV = \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz$$

- Tích phân bội ba cũng có các tính chất tương tự như tích phân kép.

3.2. Cách tính tích phân bội ba.

3.2.1. Tích phân bội ba trong hệ tọa độ Đềcác

Tương tự như khi tính tích phân kép, ta có thể đưa việc tính tích phân bội ba về việc tính ba tích phân đơn liên tiếp.

Nếu miền Ω giới hạn trên bởi mặt $z = z_2(x, y)$, giới hạn dưới bởi mặt $z = z_1(x, y)$, giới hạn xung quanh bởi những đường thẳng song song Oz, tựa trên biên D (D là hình chiếu của Ω xuống Oxy).

Ta có: $I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$

- Nếu miền $D = \{(x,y) : a \le x \le b;\, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$;

y_1, y_2 liên tục trên [a, b] thì:

$$I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

VD 1. Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} y\,dxdydz$; với Ω là miền giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng: x + y + z = 1

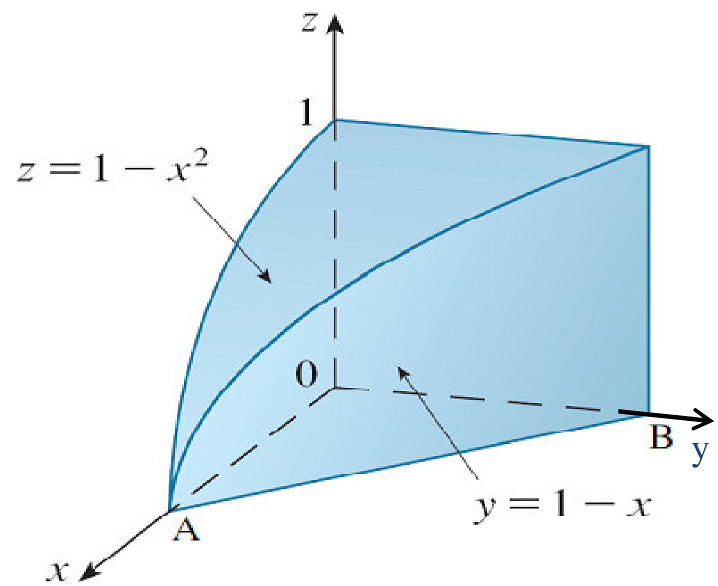
VD 2. Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$; với $\Omega : \begin{cases} y \le x \le y^2 \\ 1 \le y \le 2 \\ 0 \le z \le xy \end{cases}$

VD 3. Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$;

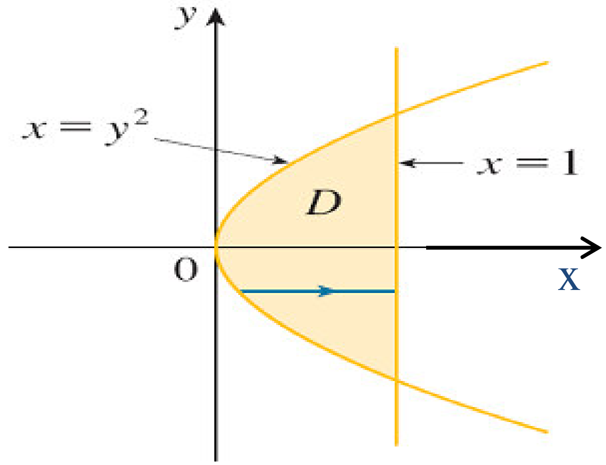
với Ω là vật thể giới hạn bởi:

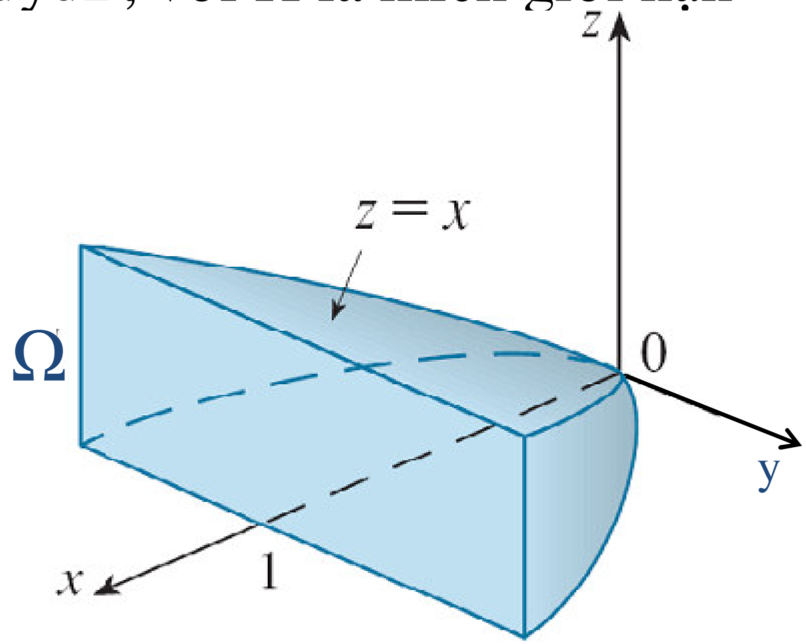
$y = 1 - x;\ z = 1 - x^2$ và các mặt tọa độ,

(phần $z \ge 0$).



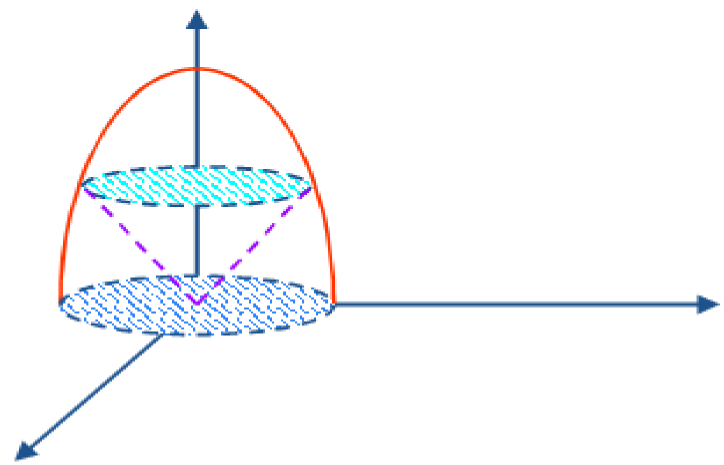
VD 4. Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} (z+1)\,dxdydz$; với Ω là miền giới hạn bởi $x = y^2;\ z = x;\ z = 0;\ x = 1$



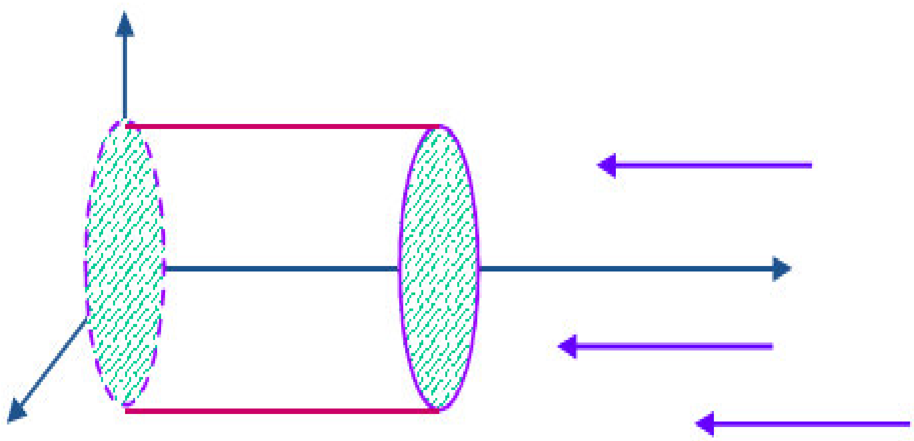


VD 5. Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$;

với $\Omega : \begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$



VD 6. Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + z^2}\,dxdydz$; với $\Omega : \begin{cases} x^2 + z^2 \le 4 \\ y = 0 \\ y = 2 \end{cases}$



3.2.2. Đổi biến trong tích phân bội ba.

1) Công thức đổi biến trong tích phân bội ba.

Xét tích phân bội ba: $I = \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,dxdydz$

Đặt: $\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$. Nếu $J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0$ thì ta có:

$$I = \iiint\limits_{\Omega'} f\left[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\right]\left|J\right| dudvdw$$

2) Tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ.

Ta xem các công thức: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ như một phép đổi biến số,

ta có định thức Jacobi:

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_z \\ y'_r & y'_\varphi & y'_z \\ z'_r & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \neq 0$$

trừ tại gốc O. Do đó:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,r\,dr\,d\varphi\,dz$$

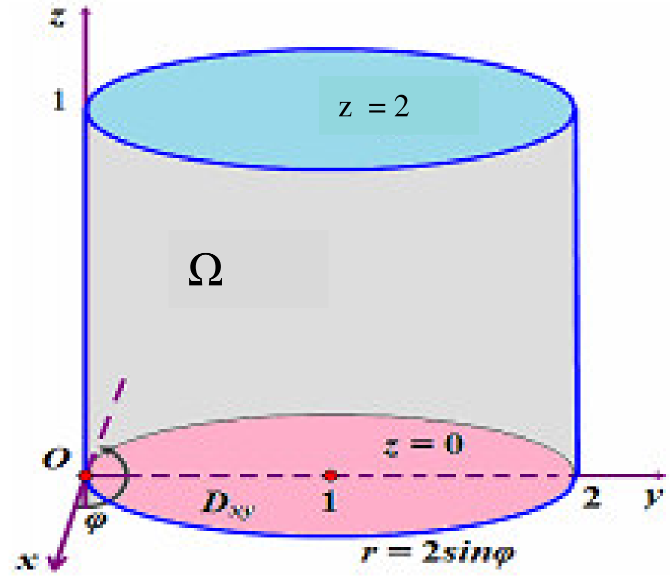
- Công thức trên vẫn đúng khi miền Ω chứa những điểm trên Oz.

VD 1.

Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz;$

với Ω là miền hình trụ giới hạn bởi

các mặt $x^2 + y^2 = 2y;\ z = 0;\ z = 2$

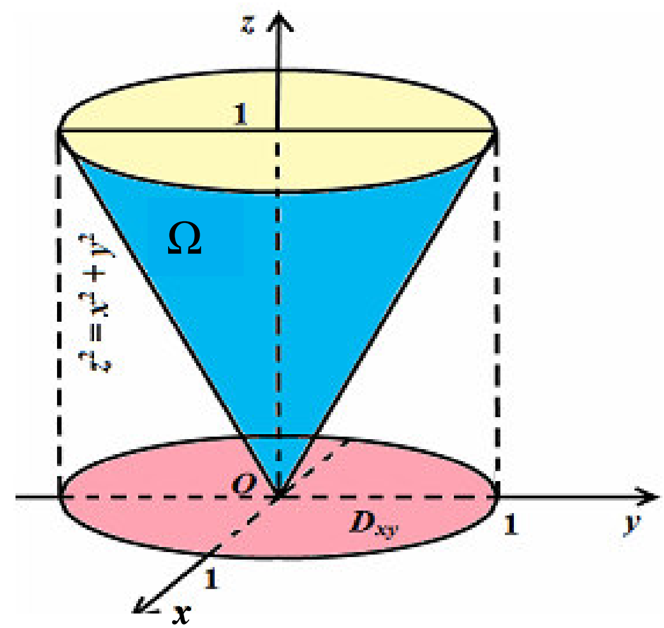


VD 2.

Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dxdydz\,;$

với Ω là miền hình nón giới hạn bởi

các mặt $z^2 = x^2 + y^2;\ z = 1$



3) Tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu.

Ta xem các công thức: $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ như một phép đổi biến

số, ta có định thức Jacobi:

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_r & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = r^2 \sin\theta \neq 0 \text{ với } \begin{cases} r \neq 0 \\ \sin\theta \neq 0 \end{cases}$$

Do đó:

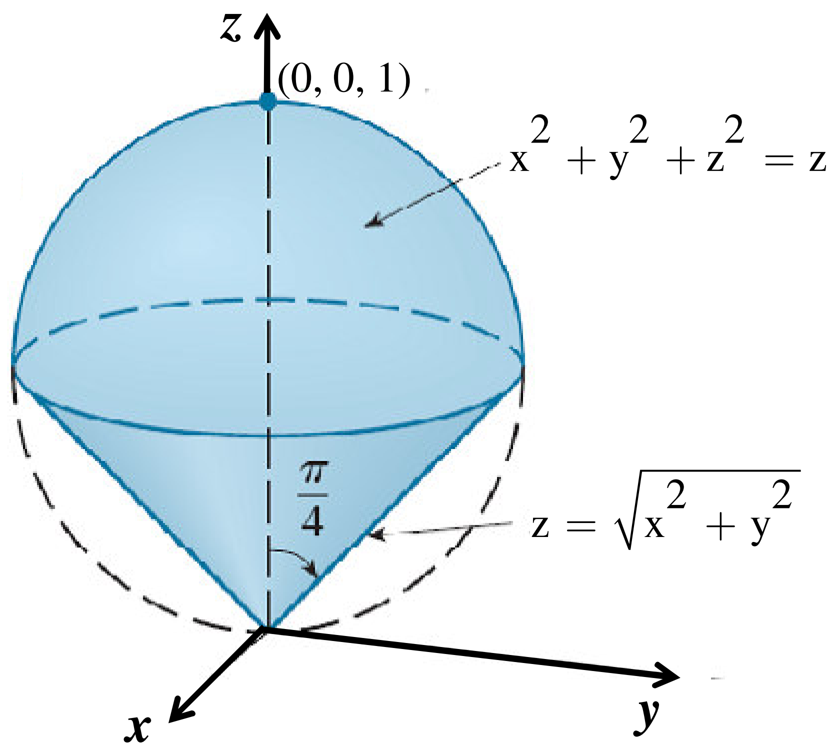
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta\, dr d\theta d\varphi$$

- Công thức trên vẫn đúng khi miền Ω chứa những điểm trên Oz.

VD 1.

Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$; với Ω là miền giới hạn bởi

$z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$; $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$



VD 2.

Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} (y+z)\,dxdydz$; với Ω là miền giới hạn bởi:

$z = 0;\ x^2 + y^2 + z^2 = 2y;\ (z \le 0)$

VD 3.

Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dxdydz$; với Ω là miền giới hạn bởi:

$z = 0;\ x^2 + y^2 + z^2 = 4;\ x^2 + y^2 \le 1;\ (z \ge 0)$

3.3. Ứng dụng của tích phân bội ba.

- **Tính thể tích vật thể**

Từ định nghĩa tích phân bội ba ta có công thức tính thể tích của vật thể Ω: $V_\Omega = \iiint\limits_\Omega dxdydz$

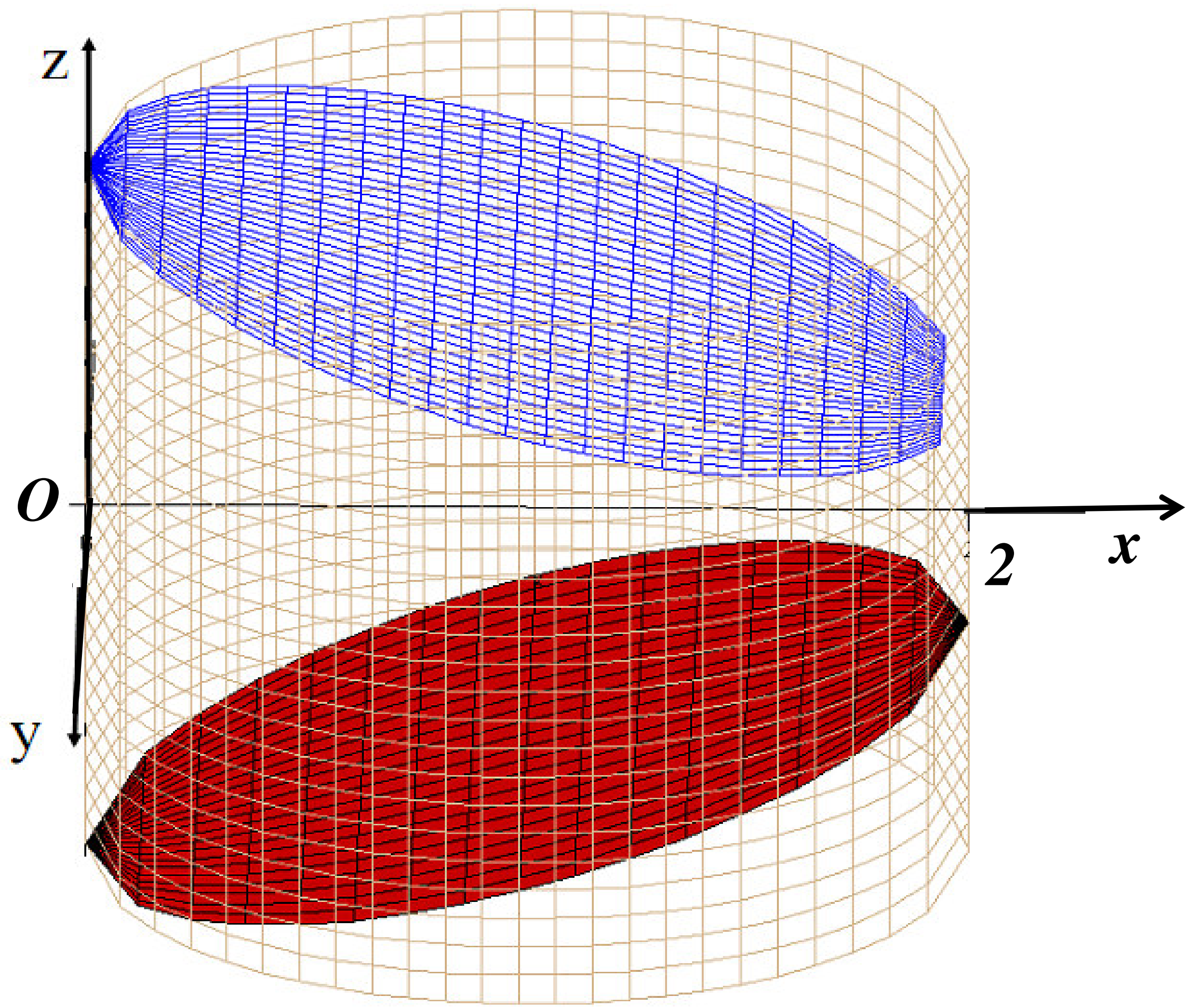
Chú ý. Có thể sử dụng tích phân kép để tính thể tích vật thể. Tuy nhiên trong một số trường hợp sử dụng tích phân bội ba tính nhanh hơn, vì tích phân bội ba có thể đổi sang tọa độ trụ hoặc tọa độ cầu.

VD 1. Tính thể tích vật thể Ω giới hạn bởi

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1;\ x^2 + y^2 + z^2 = 4;\ z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$$

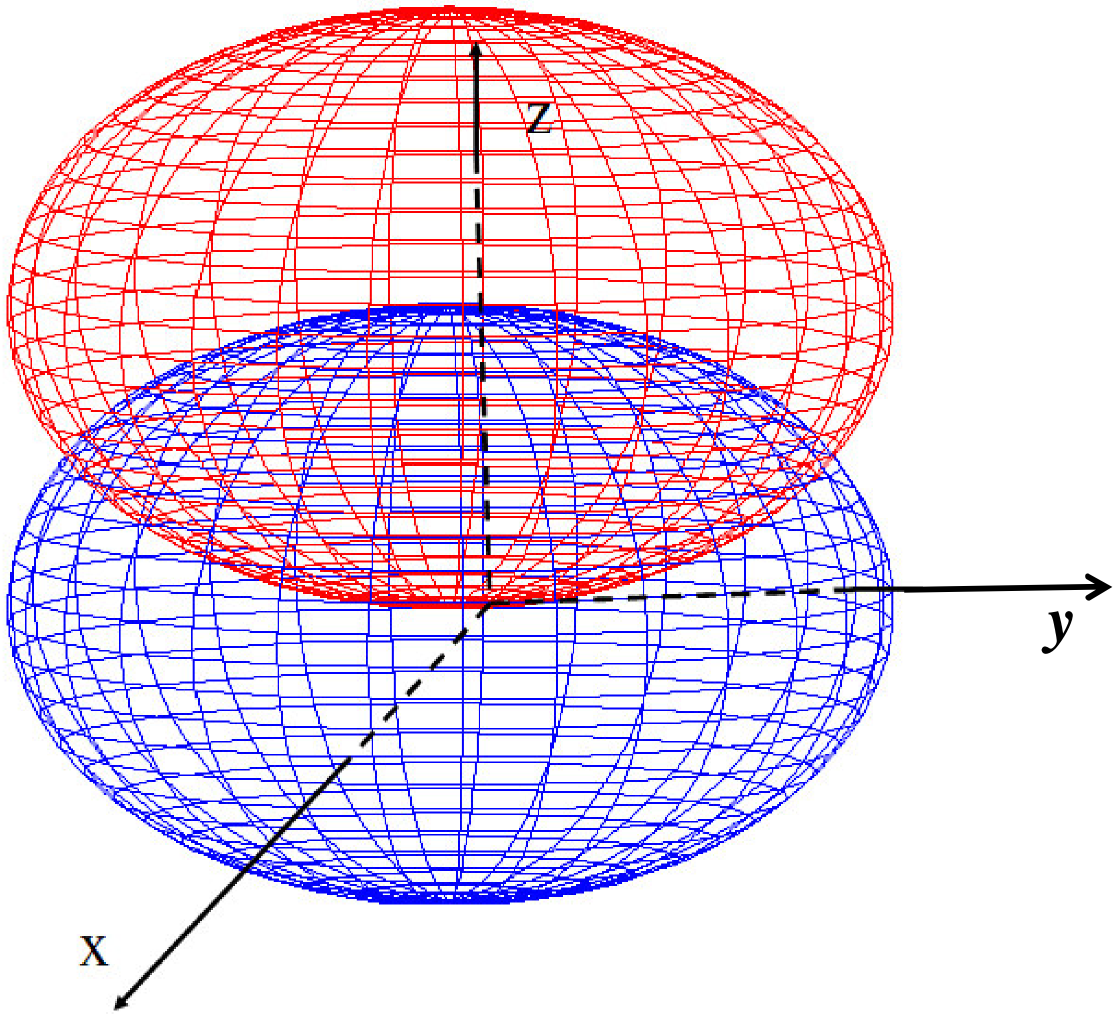
VD 2. Tính thể tích vật thể Ω giới hạn bởi

$$x^2 + y^2 = 2x;\ x + z = 3;\ x - z = 3$$



VD 3. Tính thể tích vật thể Ω giới hạn bởi

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4;\ x^2 + y^2 + z^2 = 4z$$



<u>VD 4.</u> Tính thể tích vật thể Ω giới hạn bởi

$$y = x^2;\ y + z = 1;\ z = 0$$