# Chương 2. Phương trình vi phân

- **Khái niệm về phương trình vi phân**

• *Phương trình vi phân* là biểu thức liên hệ giữa biến số độc lập, hàm số cần tìm và các đạo hàm của nó.

Dạng tổng quát:
$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1)$$

• Cấp cao nhất của đạo hàm của y trong (1) được gọi là *cấp* của phương trình.

**VD.** $y' + xy^2 - 2y = e^x$ là phương trình vi phân cấp một

$y'' + 4y = 0$ là phương trình vi phân cấp hai

$y''' + 3y'' = e^{2x}$ là phương trình vi phân cấp ba

- Nếu từ (1) ta giải được theo $y^{(n)}$ thì: $y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$
- Nghiệm của (1) trên khoảng I nào đó là hàm y = φ(x) xác định trên I sao cho khi thay vào (1) ta được đồng nhất thức.
- Phương trình vi phân nếu có nghiệm thì sẽ có vô số nghiệm sai khác nhau một hằng số C.
- Giải một phương trình vi phân là đi tìm tất cả các nghiệm của nó.
- Đồ thị nghiệm y = φ(x) của một phương trình vi phân được gọi là *đường cong tích phân*.

# §1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

## 1.1. Các khái niệm cơ bản.

Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp một là

$F(x, y, y') = 0 \qquad (2)$. Nếu giải ra được $y'$ thì: $y' = f(x, y)$

• Nghiệm của phương trình vi phân cấp một phụ thuộc hằng số C.

*Nghiệm tổng quát* của (2) có dạng: $y = \varphi(x, C)$. *Nghiệm riêng* của (2) là nghiệm thu được từ nghiệm tổng quát bằng cách cho C một giá trị cụ thể.

• *Nghiệm kì dị* của (2) là nghiệm thu được trực tiếp từ (2) và không thỏa nghiệm tổng quát cho dù C lấy bất kì giá trị nào.

## 1.2. Phương trình vi phân với biến số phân li (phương trình tách biến).

- Là phương trình có dạng: $f(x)dx+g(y)dy=0$

- Cách giải: Lấy tích phân hai vế ta được nghiệm tổng quát:

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$$

**VD.** Giải phương trình

$$\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0$$

- Xét phương trình có dạng: $f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$
- Cách giải: Có thể đưa về phương trình tách biến

Nếu $g_1(y) = 0$ tại $y = b$, thì $y = b$ là một nghiệm riêng

Nếu $f_2(x) = 0$ tại $x = a$, thì $x = a$ là một nghiệm riêng

Nếu $f_2(x)g_1(y) \neq 0$, chia hai vế cho $f_2(x)g_1(y)$ ta được phương trình tách biến $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=0$

**VD.** Giải phương trình: **1)** $(1+x)ydx+(1-y)xdy=0$

**2)** $\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)y'-y=0$

## 1.3. Phương trình vi phân đẳng cấp (phương trình thuần nhất).

- Là phương trình có dạng: $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$
- Cách giải:

Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u + xu'$

Do đó $u + xu' = f(u) \Rightarrow xu' = f(u) - u$

Nếu $f(u) - u = 0$ thì giải phương trình này ta có các nghiệm riêng

Nếu $f(u) - u \neq 0$: $x\dfrac{du}{dx} = f(u) - u \Rightarrow \dfrac{du}{f(u) - u} = \dfrac{dx}{x}$

(là phương trình tách biến)

**VD.** Giải phương trình: **1)** $y - xy' = y\ln\dfrac{x}{y}$

**2)** $xdy - ydx = ydy; \quad y(-1) = 1$

## Các dạng có thể đưa về phương trình đẳng cấp.

- Dạng: $y' = f(x, y)$ với f là hàm đẳng cấp bậc 0, tức

$$f(kx, ky) = k^{o} f(x, y)$$

( Hàm $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$ là hàm đẳng cấp bậc 0)

**VD.** Giải phương trình

$$\left(x^2 + y^2\right)dx - 2xydy = 0$$

- Dạng: $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$ $\qquad (3)$

**Trường hợp 1.** $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ hệ $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $\left(x_o, y_o\right)$

Đặt $X = x - x_o, Y = y - y_o \Rightarrow y' = Y'$

$$\Rightarrow Y' = f\left(\frac{a_1\left(X + x_o\right) + b_1\left(Y + y_o\right) + c_1}{a\left(X + x_o\right) + b\left(Y + y_o\right) + c}\right) = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{aX + bY}\right)$$

$\Rightarrow Y' = f\left(\dfrac{a_1 + b_1Y / X}{a + bY / X}\right)$ là phương trình đẳng cấp

**Trường hợp 2.** $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \dfrac{a_1}{a} = \dfrac{b_1}{b} = k$

Đặt $u = ax + by \Rightarrow u' = a + by'$

Từ (3) suy ra: $b.y' = b.f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right) \Rightarrow u' - a = b.f\left(\dfrac{ku + c_1}{u + c}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{du}{dx} = a + b.f\left(\dfrac{ku + c_1}{u + c}\right)$ là phương trình tách biến

**VD.** Giải phương trình

$$(1 - x + y)dy - (x + y - 3)dx = 0$$

## 1.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp một.

- Là phương trình có dạng: $y' + p(x)y = q(x) \qquad (4)$

trong đó: p, q là các hàm liên tục

Nếu q(x) = 0, ta có $y' + p(x)y = 0 \qquad (5)$

Phương trình (5) được gọi là phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất.

- <u>Cách giải</u>:

\+ Với phương trình (5) ta có: $\dfrac{dy}{dx} = -p(x)y \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = -p(x)dx$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -p(x)dx \Rightarrow \ln|y| = \int -p(x)dx + \ln C$$

$$\Rightarrow e^{\ln|y|} = e^{\int -p(x)dx + \ln C} \Rightarrow y = e^{-\int p(x)dx}.e^{\ln C} = Ce^{-\int p(x)dx}$$

**+** Với phương trình (4) ta giải bằng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange.

Ta xem C là hàm của x. Ta tìm C = C(x) sao cho $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ (6)

thỏa mãn (4). Lấy đạo hàm hai vế của (6) rồi thay vào (4) ta được:

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1$$

Vậy $y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right]$

**<u>VD.</u>** Giải phương trình:

**1)** $\left(x^2+1\right)y' - 4xy = 3$

**2)** $\left(1-x\right)\left(y'+y\right) = e^{-x};\ \ y\left(2\right) = 1$

**3)** $e^y dx + \left(xe^y - 1\right)dy = 0$

## 1.5. Phương trình Bernoulli.

- Là phương trình có dạng: $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}; \quad \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$
- <u>Cách giải</u>:

Chia hai vế cho $y^{\alpha}$, ta được $y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$

Đặt $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, phương trình trên trở thành:

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x) \text{ hay } z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$$

(đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp một đối với z)

**<u>VD.</u>** Giải phương trình:

$$xy' + y = y^2 \ln x; \quad y(1) = 1$$

## 1.6. Phương trình vi phân toàn phần.

- Là phương trình có dạng: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (7)$

trong đó: P, Q và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong một miền mở đơn liên D thỏa mãn điều kiện $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

- <u>Cách giải</u>:

Ta có: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ là vi phân toàn phần của hàm U(x, y), tức $dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

Từ (7) $\Rightarrow dU(x, y) = 0 \Rightarrow U(x, y) = C$ là nghiệm tổng quát của (7)

Ta đi tìm hàm U(x, y) như sau:

Ta có: $\begin{cases} U'_x = P(x,y) & \Rightarrow U(x,y) = \int P(x,y)dx + f(y) \\ U'_y = Q(x,y) & \text{Đạo hàm hai vế theo y ta được:} \end{cases}$

$$U'_y = \left(\int P(x,y)dx\right)'_y + f'(y) = Q(x,y)$$

$$\Rightarrow f'(y) \Rightarrow f(y) \Rightarrow U(x,y)$$

**<u>VD.</u>** Giải phương trình:

**1)** $ydx + (x + 2y + 1)dy = 0$

**2)** $(3e^{3x}y - 2x)dx + (e^{3x} + \sin y)dy = 0$