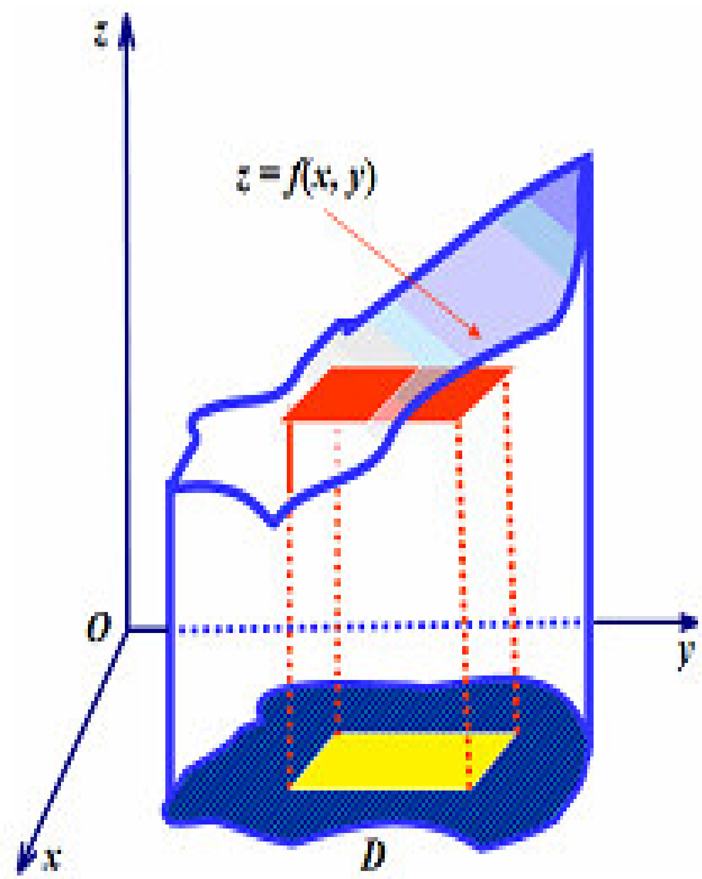
§2. TÍCH PHÂN KÉP

2.1. Khái niệm tích phân kép.

2.1.1. Bài toán mở đầu.

Giả sử z = f(x, y) là một hàm số xác định, liên tục, không âm trong một miền D đóng, bị chặn trong mặt phẳng Oxy. Hãy tính thể tích của vật thể hình trụ Ω giới hạn bởi mặt phẳng Oxy, mặt z = f(x,y) và mặt trụ có đường sinh song song với Oz tựa trên biên D.



- Chia miền D thành n mảnh rời nhau $D_1, D_2, ..., D_n$ có diện tích tương ứng là $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Như vậy Ω được chia thành n vật thể hình trụ nhỏ. Trong mỗi mảnh nhỏ D_i, lấy một điểm tùy ý $M_i(x_i, y_i)$, khi đó thể tích V của Ω được tính gần đúng bằng công thức sau: $V(\Omega) \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i = V_n$

Phép tính xấp xỉ này càng chính xác nếu n càng lớn và các mảnh D_i có đường kính càng nhỏ. Do đó thể tích của Ω được định nghĩa bằng giới hạn (nếu có) của V_n khi $n \to \infty$ sao cho $\max d(D_i) \to 0$; ($d(D_i)$: đường kính của D_i), giới hạn ấy không phụ thuộc cách chia miền D thành các mảnh nhỏ, cũng như cách chọn điểm M_i trong D_i.

2.1.2. Định nghĩa tích phân kép.

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong một miền đóng, bị chặn D trong mặt phẳng Oxy. Chia miền D thành n mảnh rời nhau $D_1, D_2, \dots, D_n$ có diện tích tương ứng là $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. Trong mỗi mảnh nhỏ D_i, lấy một điểm tùy ý $M_i(x_i, y_i)$. Lập tổng

$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$ được gọi là tổng tích phân của hàm f trong D.

Nếu tồn tại giới hạn $\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{\max d(D_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i = I$ hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia miền D và cách lấy điểm M_i thì giới hạn đó được gọi là *tích phân kép* của hàm f trong miền D và được ký hiệu là:

$\iint\limits_D f(x,y)dS$; <u>trong đó</u>: D được gọi là miền lấy tích phân

f được gọi là hàm dưới dấu tích phân

dS được gọi là yếu tố diện tích

Khi đó ta nói hàm f khả tích trên D.

Định lý. Nếu hàm số f liên tục trên miền đóng, bị chặn thì nó khả tích trên miền đó.

- Nếu f liên tục, không âm trên D thì tích phân kép của f trên D bằng thể tích của vật thể hình trụ xét ở trên. Vậy $V = \iint\limits_D f(x,y)dS$
- Nếu $f(x,y) = 1; \forall (x,y) \in D$ thì tích phân kép của f trên D bằng diện tích của D. Vậy $\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_D dS = S$

Chú ý. Vì tích phân kép không phụ thuộc vào cách chia miền D nên ta có thể chia D bởi các đường thẳng song song với các trục tọa độ ta được $\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$ hay dS = dxdy và có thể viết

$$\iint_D f(x,y)\,dS = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

2.2. Tính chất của tích phân kép.

1) $\iint_D [f(x,y) + g(x,y)]\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy + \iint_D g(x,y)\,dxdy$

2) $\iint_D kf(x,y)\,dxdy = k\iint_D f(x,y)\,dxdy$; (k: hằng số)

3) Nếu D có thể chia thành hai miền D_1, D_2 không dẫm lên nhau thì $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$

4) Nếu $f(x,y) \le g(x,y); \forall (x,y) \in D$ thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

5) Nếu $m \le f(x,y) \le M; \forall (x,y) \in D$; (m, M: hằng số), thì

$$mS_D \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le MS_D$$

2.3. Cách tính tích phân kép.

2.3.1. Đưa về tích phân lặp (Áp dụng Định lý Fubini)

1) Miền lấy tích phân là hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục tọa độ

Nếu hàm số z = f(x,y) liên tục trên $D = [a, b] \times [c, d]$ thì

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx$$

<u>Chú ý.</u> Nếu $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ thì

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b f_1(x)dx \int_c^d f_2(y)dy$$

VD. Tính $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$; $D = [1,2]^2$

2) Miền lấy tích phân là miền bất kỳ bị chặn

- Giả sử $D = \{(x,y): a \le x \le b; y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$; y_1 và y_2

liên tục trên [a, b]. Nếu f là hàm liên tục trên D thì ta có

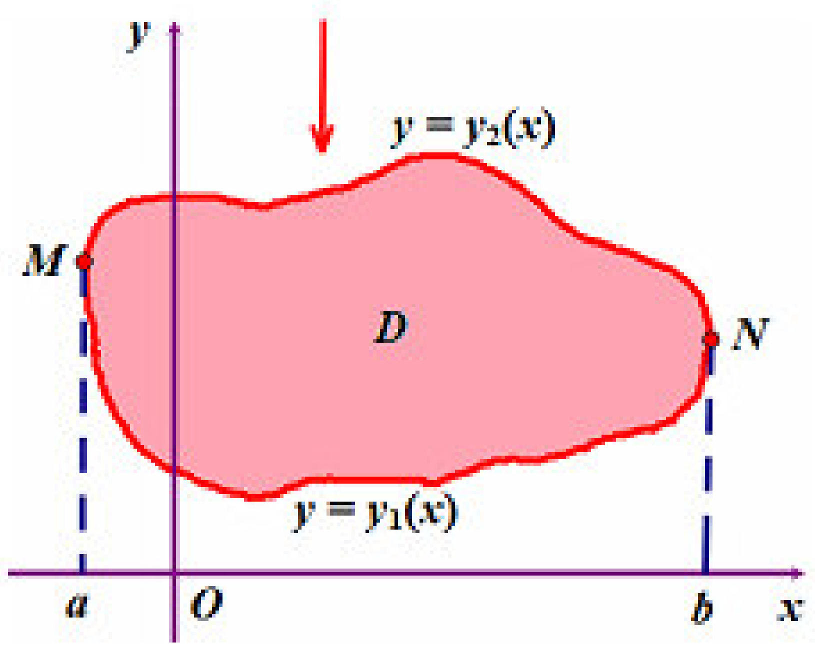
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

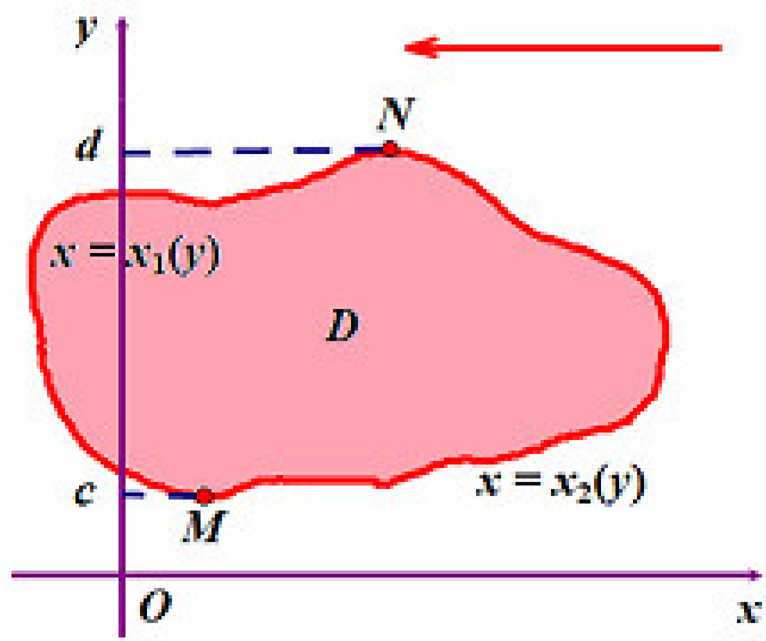
- Giả sử $D = \{(x,y): x_1(y) \le x \le x_2(y); c \le y \le d\}$; x_1 và x_2

liên tục trên [c, d]. Nếu f là hàm liên tục trên D thì ta có

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

- **Đổi thứ tự lấy tích phân.**





$$I = \int_{a}^{b} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

$$I = \int_{c}^{d} dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

VD 1. Xác định cận của tích phân $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$, với D là miền xác định bởi các đường sau

a) $y = 0;\ y = x;\ x = 2$

b) $y = 0;\ y = x^2; x + y = 2$

VD 2. Tính $I = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$; với D là miền giới hạn bởi các đường y = x; y = x + 1; y = 1; y = 3

VD 3. Đổi thứ tự lấy tích phân

$$I = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$$

2.3.2. Đổi biến trong tích phân kép

1) Công thức đổi biến tổng quát

Xét tích phân kép $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$; trong đó: f liên tục trên D. Thực hiện phép đổi biến số x = x(u, v); y = y(u, v), (*) với x(u, v), y(u, v) là các hàm liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong một miền đóng D’ của mặt phẳng O’uv; các công thức (*) xác định một song ánh từ D’ lên D của mặt phẳng Oxy. Nếu định thức Jacobi: $J = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$ trên D’ thì ta có công thức:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)|J|dudv$$

Chú ý. Công thức trên vẫn còn đúng khi định thức J = 0 tại một số điểm trong D.

VD 1. Tính $I = \iint\limits_D (x + y)dxdy$; D là miền giới hạn bởi các đường $y = -x;\ y = -x + 3;\ y = 2x - 1;\ y = 2x + 1$

VD 2. Tính $I = \iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$, D là miền xác định bởi $x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1$

2) Đổi biến trong tọa độ cực

Ta xem các công thức: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ như một phép đổi biến số,

ta có:

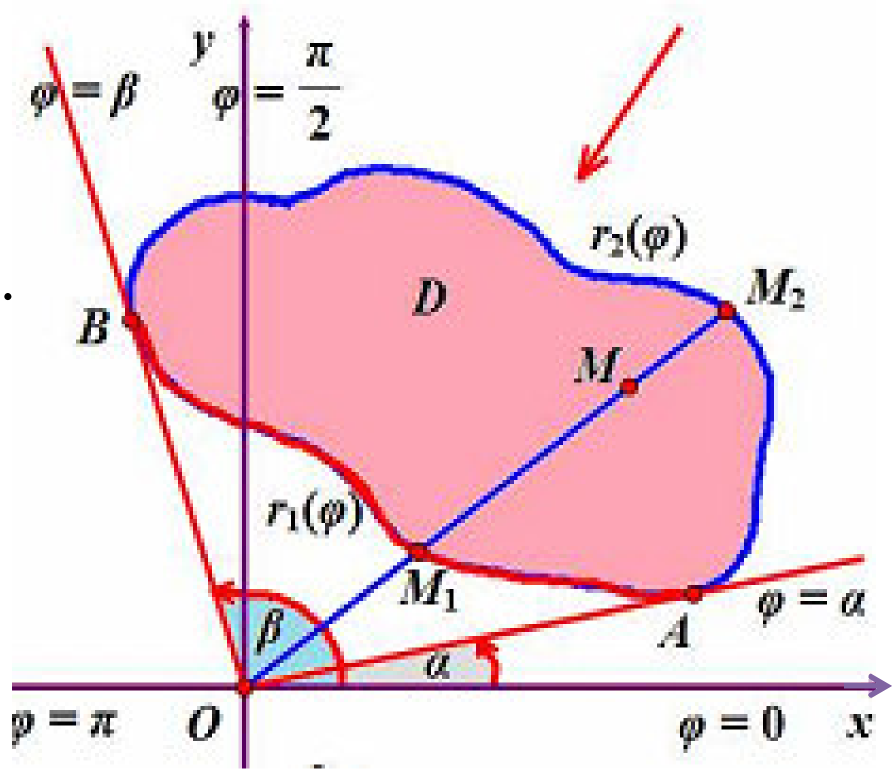
Định thức Jacobi:

$$J = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \neq 0$$

trừ tại gốc O. Do đó:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$$

- Theo chú ý trong mục 1), công thức trên vẫn đúng trong trường hợp miền D chứa gốc O.



- Nếu miền D được xác định bởi:

$\alpha \le \varphi \le \beta;\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)$

thì:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$$

- Nếu gốc O nằm trong miền D và biên của miền D là đường cong r = r(φ) bao gốc tọa độ O thì ta có:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr$$

<u>Chú ý.</u> Đổi biến trong tọa độ cực thường dùng khi miền D là hình tròn hoặc có liên quan đến hình tròn hoặc elip.

VD 1. Tính $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$; D là một phần tư hình tròn đơn vị nằm trong góc phần tư thứ nhất

VD 2. Tính $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$; với D giới hạn bởi $(x-1)^2 + y^2 \le 1;\ y \ge 0$

VD 3. Tính $I = \iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$; với D là miền xác định bởi

$$x^2 + y^2 - 2y \ge 0;\ x^2 + y^2 - 1 \le 0;\ x \ge 0;\ y \ge 0$$

- **<u>Tọa độ cực mở rộng.</u>**

a) **<u>Trường hợp 1.</u>** Miền phẳng D là hình tròn

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 \leq r^2$$

Dùng phép đổi biến $\begin{cases} x - x_o = r\cos\varphi \\ y - y_o = r\sin\varphi \end{cases}$

Khi đó định thức Jacobi

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \neq 0$$

Khi lấy cận của r và φ ta coi như gốc tọa độ là (x_o, y_o)

b) **<u>Trường hợp 2.</u>** Miền phẳng D là hình elip

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1;\ a>0,\ b>0$$

Dùng phép đổi biến: $\begin{cases} \dfrac{x}{a}=r\cos\varphi \\ \dfrac{y}{b}=r\sin\varphi \end{cases}$

Khi đó định thức Jacobi

$$J=\begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix}=abr\neq 0$$

Khi lấy cận của r và φ: $\begin{cases} 0\leq\varphi\leq 2\pi \\ 0\leq r\leq 1 \end{cases}$

VD 1. Tính $I = \iint\limits_D (2x + y)\,dxdy$; với D: $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 \le 4 \\ x \ge 1 \end{cases}$

VD 2. Tính $I = \iint\limits_D (x+1)\,dxdy$; với D là miền phẳng giới hạn bởi: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \le 1;\ x \ge 0;\ y \ge 0$

VD 3. Tính $I = \iint\limits_D x\,dxdy$; với D là miền phẳng giới hạn bởi: $\dfrac{x^2}{3} + y^2 \le 1;\ y \ge 0; y \le x$

2.4. Ứng dụng của tích phân kép.

2.4.1. Tính diện tích miền phẳng

$$S_D = \iint_D dxdy$$

VD. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi:

$$x^2 + y^2 = 2y;\ x^2 + y^2 = 6y;\ x \geq 0;\ y \geq x\sqrt{3}$$

2.4.2. Tính thể tích vật thể

- Thể tích hình trụ cong Ω được giới hạn trên bởi $z = f(x, y)$, giới hạn dưới bởi miền D, giới hạn xung quanh bởi những đường thẳng song song Oz, tựa trên biên D:

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy$$

- Thể tích hình trụ cong Ω được giới hạn trên bởi $z = f_2(x, y)$, giới hạn dưới bởi $z = f_1(x, y)$, giới hạn xung quanh bởi những đường thẳng song song với Oz, tựa trên biên D:

$$V = \iint_D \left(f_2(x, y) - f_1(x, y)\right)dxdy$$

- **Để tính thể tích khối Ω:**

1) Xác định mặt giới hạn bên trên: $z = f_2(x, y)$
2) Xác định mặt giới hạn bên dưới: $z = f_1(x, y)$
3) Xác định hình chiếu D của Ω xuống Oxy bằng cách khử z trong các phương trình của Ω

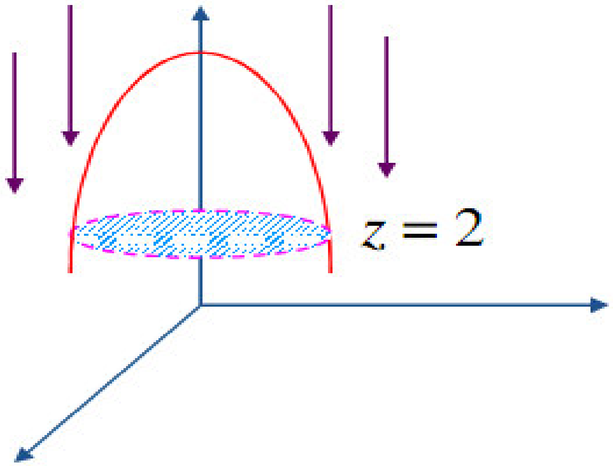
Chú ý. Có thể chiếu Ω xuống Oxz hoặc Oyz. Khi đó mặt phía trên, mặt phía dưới phải theo hướng chiếu xuống.

VD 1. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi:

$z = 2x^2 + y^2 + 1;\ x + y = 1$ và các mặt tọa độ

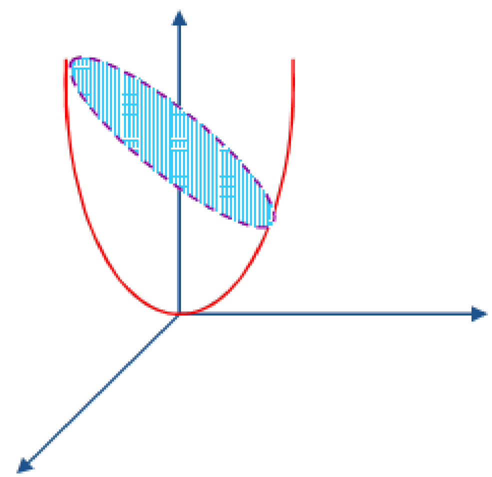
VD 2. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 4 \\ z = 2 \end{cases}$$



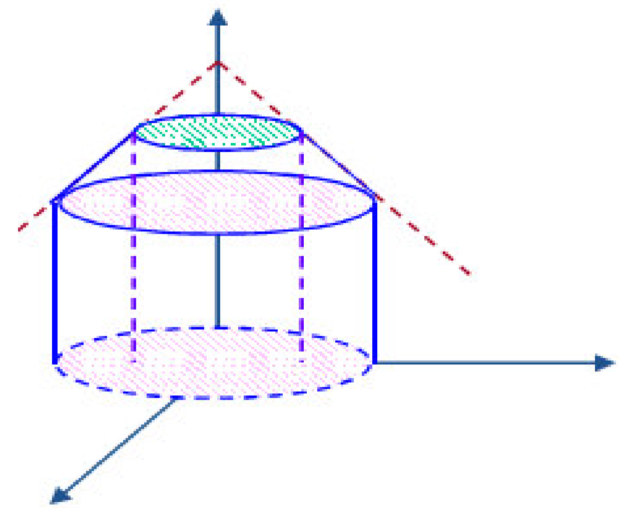
VD 3. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + z = 2 \end{cases}$$



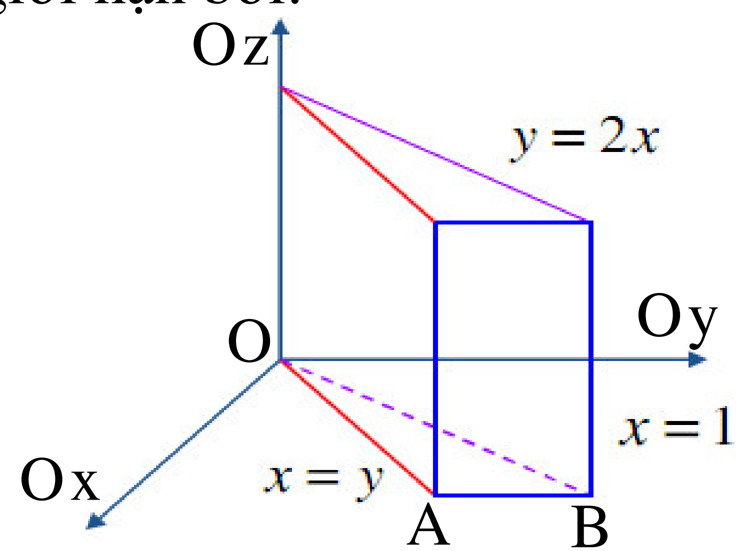
VD 4. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi:

$$\begin{cases} 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \\ z = 0 \\ z + \sqrt{x^2 + y^2} \le 4 \end{cases}$$



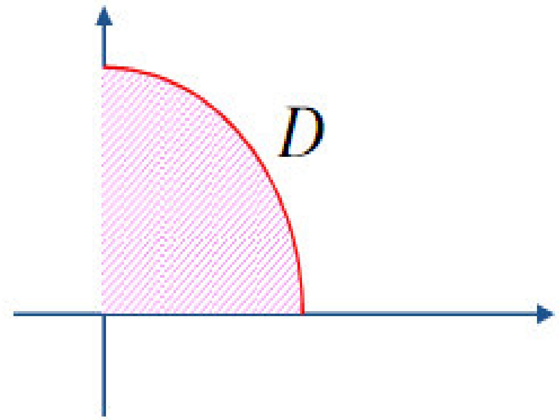
VD 5. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi:

$$\begin{cases} y = x;\ y = 2x;\ x = 1 \\ z = 0;\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$



VD 6. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 2 - x^2 \\ z \geq 0 \\ z = 3x \end{cases}$$



VD 7. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y = 0 \\ y = 2 + x^2 \end{cases}$$