

Семинар 8

Алексеев Василий

27 + 31 октября 🎃 2022

Содержание

1	Касательная к кривой второго порядка	1
1.1	# 8.2(3)	1
1.2	# 8.9(1)	2
1.3	# 8.24(1)	3
2	Приведение уравнения кривой к каноническому виду	4
2.1	Задача без номера # 1 (“поворот”)	5
2.2	# 9.1(3) (“параллельный перенос”)	6
2.3	# 9.4(1) (“поворот + перенос”/“перенос + поворот”)	8
3	Дополнение: Ещё задача про касательные	10
3.1	# 8.29(3)	10

1. Касательная к кривой второго порядка

Для эллипса, гиперболы и параболы, заданных в канонических системах координат уравнениями:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y^2 = 2px$$

уравнения касательных в точке (x_0, y_0) соответственно выражаются так:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

1.1. # 8.2(3)

Составить уравнение касательной к кривой

$$xy = k$$

Решение. Можно продифференцировать обе части уравнения кривой в некоторой точке (x_0, y_0) , принадлежащей кривой:

$$d(xy) \big|_{(x_0, y_0)} = d(k) \big|_{(x_0, y_0)}$$

Откуда

$$x_0 dy + y_0 dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} \bigg|_{(x_0, y_0)} = -\frac{y_0}{x_0}$$

То есть тангенс угла наклона касательной к кривой в точке (x_0, y_0) равен $-\frac{y_0}{x_0}$. С другой стороны, тот же тангенс для касательной можно посчитать просто как отношение приращений $(y - y_0)$ и $(x - x_0)$ для некоторой точки (x, y) касательной:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{y_0}{x_0}$$

Проводя упрощения и учитывая, что для исходной точки выполняется $x_0 y_0 = k$, получаем

$$y_0 x + x_0 y = 2k$$

□

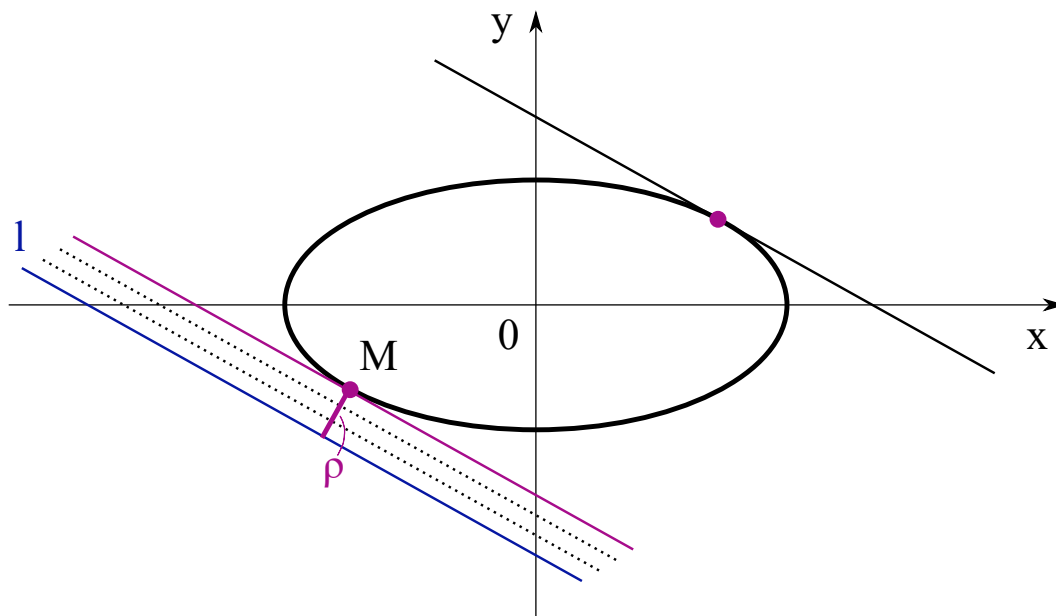


Рис. 1: Прямая l не пересекает эллипс.

1.2. # 8.9(1)

Какие точки на кривой второго порядка

$$\frac{27}{28}x^2 + \frac{9}{7}y^2 = 1$$

удалены на наименьшее расстояние от прямой

$$l: 3x + 4y + 5 = 0$$

Найти это расстояние.

Решение. Из рисунка (1) видно, что прямая l и эллипс не пересекаются, поэтому минимальное расстояние не нулевое. Также из рисунка понятно, что расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ эллипса до прямой l будет минимальным в том случае, когда касательная к эллипсу в точке M параллельна прямой l (в каждой точке эллипса существует касательная, включая ближайшую к прямой l точку). Но таких точек, очевидно, у эллипса две (при этом если расстояние от одной из них до прямой l будет минимальным, то от другой, наоборот, расстояние будет максимальным среди точек эллипса).

Уравнение касательной к эллипсу в точке $M(x_0, y_0)$:

$$\frac{27}{28}x_0x + \frac{9}{7}y_0y = 1$$

Сравнивая уравнение касательной с уравнением прямой, выводим условие параллельности касательной и прямой:

$$\frac{27/28x_0}{3} = \frac{9/7y_0}{4}$$

Откуда получаем $x_0 = y_0$. При этом (x_0, y_0) — точка эллипса:

$$\frac{27}{28}x_0^2 + \frac{9}{7}y_0^2 = 1$$

В итоге

$$\begin{cases} x_0 = \pm \frac{2}{3} \\ y_0 = \pm \frac{2}{3} \end{cases}$$

Из рисунка (1) видно, что подходит точка $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Расстояние от найденной точки до прямой l в канонической системе координат эллипса (которая прямоугольная) вычисляется по формуле:

$$\rho((x_0, y_0), l) = \frac{\left| 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 5 \right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dots = \frac{1}{15}$$

□

1.3. # 8.24(1)

Составить уравнения касательных к эллипсу, заданному в канонической системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$$

проходящих через точку $P(-6, 0)$.

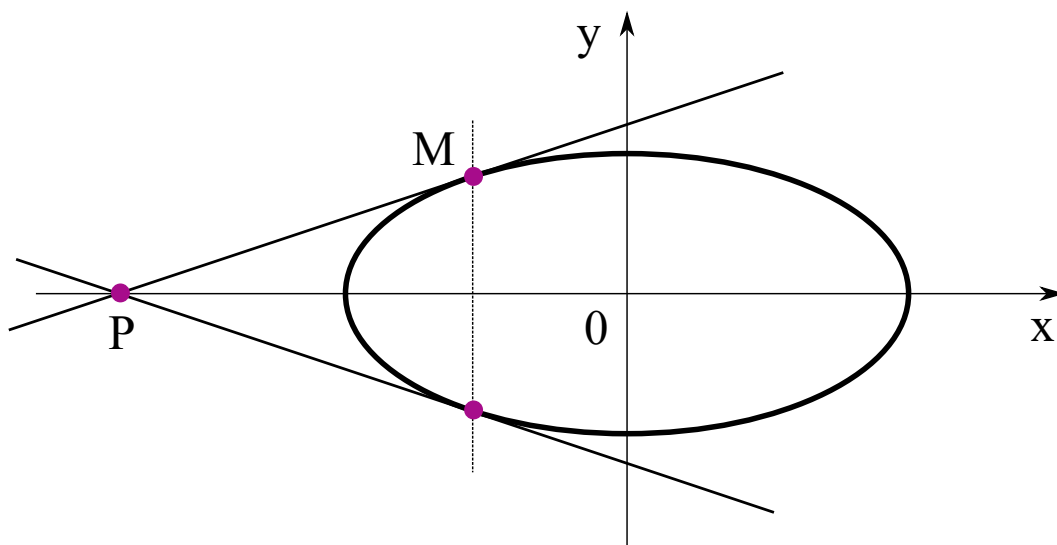


Рис. 2: Касательные к эллипсу, проходящие через одну точку на оси X в канонической системе координат эллипса.

Решение. Уравнение касательной к эллипсу в точке $M(x_0, y_0)$, которая проходит через точку $P(-6, 0)$ (2):

$$\frac{-6x_0}{18} + 0 = 1 \Rightarrow x_0 = -3$$

Подставляя найденную координату x_0 в уравнение эллипса, находим координаты y_0 :

$$\frac{(-3)^2}{18} + \frac{y_0^2}{8} = 1 \Rightarrow y_0 = \pm 2$$

И уравнения касательных

$$-2x \pm 3y - 12 = 0$$

□

2. Приведение уравнения кривой к каноническому виду

Общий вид уравнения кривой второго порядка:

$$\begin{cases} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \\ A^2 + B^2 + C^2 > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Всего есть девять канонических уравнений кривых второго порядка¹:

1. Эллипс

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ a \geq b > 0 \end{cases}$$

2. “Мнимый эллипс”

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad a \neq 0, b \neq 0$$

3. “Пара мнимых пересекающихся прямых”

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad a \neq 0, b \neq 0$$

4. Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, b > 0$$

5. Пара пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad a \neq 0, b \neq 0$$

6. Парабола

$$y^2 = 2px, \quad p > 0$$

7. Пара параллельных прямых

$$y^2 = a^2, \quad a \neq 0$$

8. “Пара мнимых параллельных прямых”

$$y^2 = -a^2, \quad a \neq 0$$

9. Пара совпавших прямых

$$y^2 = 0$$

Чтобы привести кривую к каноническому виду, можно придерживаться следующего алгоритма:

¹См., например книжку Беклемишева Д. В. или Задачник.

0. Перейти к прямоугольной системе координат (если она ещё не прямоугольная)².
1. *Повернуть* систему координат так, чтобы исчез член с произведением $xу$.
2. Далее, в зависимости от ситуации, надо *перенести начало* системы координат так, чтобы исчезли либо линейные члены, либо свободный член.
3. И в конце, опять же в зависимости от ситуации, может потребоваться ещё одно-два небольших действия, например изменение порядка координат (чего можно достичь поворотом на $\frac{\pi}{2}$, чтобы не менялась ориентация базиса).

Центром кривой второго порядка называется точка (x_0, y_0) , такая что

$$F(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) = F(x_0 - \alpha, y_0 - \beta)$$

где $F(\cdot, \cdot) = 0$ — уравнение кривой, а α и β — любые числа. Можно показать, что центр симметрии кривой — это почти то же самое, что и её центр (только центр в некоторых случаях может существовать, а центр симметрии — нет). Если подставить в уравнение (1) сдвинутые на $\pm\alpha$ и $\pm\beta$ координаты (x_0, y_0) и приравнять, как в определении центра, то получим

$$\alpha(Ax_0 + Bx_0 + D) + \beta(Bx_0 + Cy_0 + E) = 0$$

откуда система уравнений для нахождения координат центра:

$$\begin{cases} Ax_0 + Bx_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Центр существует и единствен, если определитель системы отличен от нуля:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$$

В этом случае кривая называется *центральной*.

При этом $\delta > 0$ соответствует кривым *эллиптического типа*: от эллипса до гиперболы в списке кривых (1), — $\delta < 0$ соответствует кривым *гиперболического типа*: от гиперболы до параболы в списке кривых (4), — и $\delta = 0$ соответствует кривым *параболического типа*: от параболы и далее (6).

2.1. Задача без номера # 1 (“поворот”)

Определить тип кривой второго порядка. Составить её каноническое уравнение и найти каноническую систему координат. Изначально кривая задана в некоторой *прямоугольной системе координат* уравнением:

$$y = \frac{1}{x} \quad (3)$$

Решение. Очевидно, чтобы от исходной системы координат перейти к канонической, надо выполнить поворот на 45° (3).

Формулы, задающие поворот базиса e_1, e_2 на угол ϕ :

$$(e'_1, e'_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

²В задачах изначально система координат будет считаться прямоугольной, если не сказано противное!

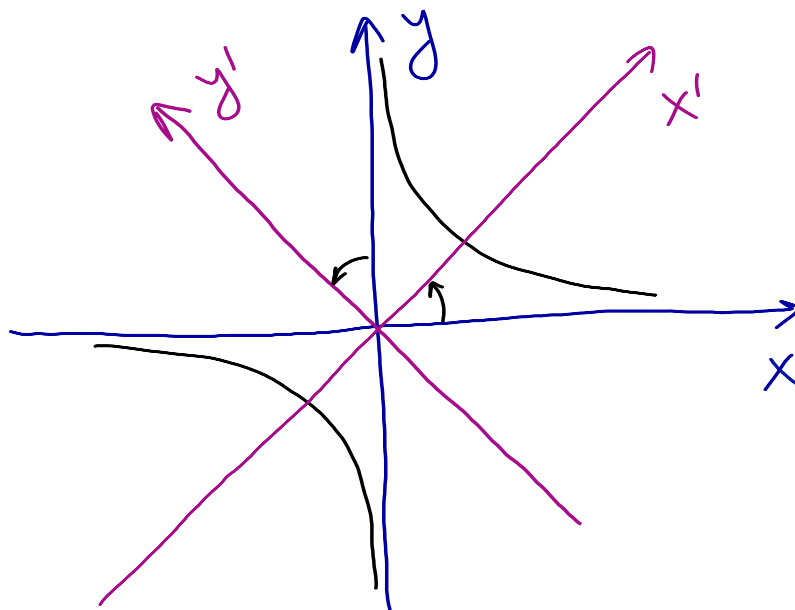


Рис. 3: Переход от “школьной” к “институтской” гиперболе.

Связь между координатами при этом (в данном случае — как между координатами векторов в базисах, так и между координатами точек в системах координат):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

И в данной задаче (поворот на 45°) замена координат выглядит так:

$$\begin{cases} x = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Получим уравнение кривой в новых координатах:

$$xy = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} \right) = 1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1}$$

□

2.2. # 9.1(3) (“параллельный перенос”)

Определить тип кривой второго порядка. Составить её каноническое уравнение и найти каноническую систему координат. Изначально кривая задана в некоторой *прямоугольной системе координат* уравнением:

$$9x^2 + 4y^2 + 6x - 4y - 2 = 0 \quad (4)$$

Решение. В уравнении нет члена с xy , поэтому поворот делать не придётся. Видно, что для приведения к каноническому виду надо выделять квадраты:

$$(9x^2 + 2 \cdot 3x + 1) - 1 + (4y^2 - 2 \cdot 2y + 1) - 1 - 2 = 0$$

$$(3x + 1)^2 + (2y - 1)^2 = 4$$

Нужная замена переменных уже “почти видна”. Остаётся только сделать так, чтобы переход к новой системе координат был именно *параллельным переносом* (без сжатия или растяжения, чтобы система координат оставалась прямоугольной):

$$9\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 4$$

Проводим теперь уже очевидную замену:

$$\begin{cases} x' = x + \frac{1}{3} \\ y' = y - \frac{1}{2} \end{cases}$$

И выписываем уравнение кривой в новых координатах:

$$9x'^2 + 4y'^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{(2/3)^2} + \frac{y'^2}{1^2} = 1$$

Это уравнение эллипса, но... снова не каноническое, потому что $2/3 < 1$. Забудем про замену x', y' . Замену координат стоило делать так (дополнительно ещё меняем оси местами³):

$$\begin{cases} x' = y - \frac{1}{2} \\ y' = x + \frac{1}{3} \end{cases}$$

И каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x'^2}{1^2} + \frac{y'^2}{(2/3)^2} = 1$$

Определим положение начала новой системы координат O' в старой и выражения новых базисных векторов e'_1, e'_2 через старые e_1, e_2 . Для этого надо вывести формулы для обратной замены:

$$\begin{cases} x = y' - \frac{1}{3} \\ y = x' + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Координаты O' :

$$\begin{cases} x = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \\ y = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Компоненты новых базисных в старом базисе:

$$e'_1 = (0, 1), \quad e'_2 = (1, 0)$$

(Поменяли оси, поэтому базисные тоже “поменялись”). □

³Стоит только иметь в виду, что при такой “перемене мест осей” меняется и ориентация базиса. Чтобы ориентация сохранилась, надо бы было выполнить *поворот* на $\pi/2$. Но решили в этой задаче обойтись без поворота, поэтому опустим)

2.3. # 9.4(1) (“поворот + перенос”/“перенос + поворот”)

Определить тип кривой второго порядка. Составить её каноническое уравнение и найти каноническую систему координат. Изначально кривая задана в некоторой *прямоугольной системе координат* уравнением:

$$F(x, y) = 2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0 \quad (5)$$

Решение.

Способ I (“канонический”).

Тип кривой можно определить либо сразу, либо в самом конце, когда получим каноническое уравнение. Давайте отложим на конец (а в другом варианте решения сделаем это сразу).

Первый шаг — надо повернуть систему координат так, чтобы исчез член со смешанным произведением переменных xy . Поворот системы координат:

$$\begin{cases} x = x' \cos \phi - y' \sin \phi \\ y = x' \sin \phi + y' \cos \phi \end{cases}$$

Подставляем в исходное уравнение и смотрим, что получается как коэффициент при $x'y'$:

$$\begin{aligned} F'(x', y') &= 2(x' \cos \phi - y' \sin \phi)^2 - 4(x' \cos \phi - y' \sin \phi)(x' \sin \phi + y' \cos \phi) \\ &\quad + 5(x' \sin \phi + y' \cos \phi)^2 + \dots = (6 \sin \phi \cos \phi - 4 \cos^2 \phi + 4 \sin^2 \phi)x'y' + \dots = 0 \end{aligned}$$

Откуда получаем условие на угол поворота ϕ , чтобы коэффициент при $x'y'$ обратился в ноль:

$$3 \sin 2\phi - 4 \cos 2\phi = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\phi = \frac{4}{3}$$

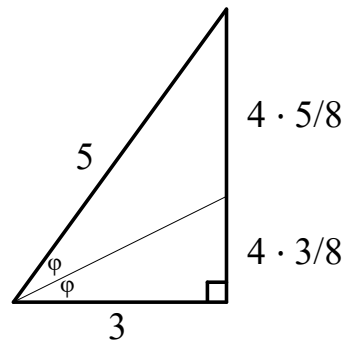


Рис. 4: К нахождению $\sin \phi$ и $\cos \phi$ по $\operatorname{tg} 2\phi$, если считать 2ϕ острым.

Из рисунка (4), например, можно найти синус и косинус для одинарного угла (*при условии, что 2ϕ острый*⁴):

$$\begin{cases} \sin \phi = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos \phi = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

⁴Но можно бы было выбрать и тупой 2ϕ ...

Тогда первая замена:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$$

Снова подставляем это представление x и y через x' и y' в исходное уравнение, но на этот раз выписываем все члены, кроме $x'y'$ (так как он должен занулиться):

$$F'(x', y') = \dots = x'^2 + 6y'^2 + \frac{14x'}{\sqrt{5}} - \frac{12y'}{\sqrt{5}} + 9 = 0$$

Далее можно выделить полные квадраты, чтобы избавиться от линейных членов

$$\left(x'^2 + 2 \cdot \frac{7}{\sqrt{5}}x' + \frac{49}{5}\right) - \frac{49}{5} + \left((\sqrt{6}y')^2 - 2 \cdot \sqrt{6}y' \cdot \frac{6}{\sqrt{30}} + \frac{36}{30}\right) - \frac{36}{30} + 9 = 0$$

$$\left(x' + \frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\sqrt{6}y' - \frac{6}{\sqrt{30}}\right)^2 = 2$$

$$\left(x' + \frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2 + 6\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2$$

Откуда видна следующая замена:

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{7}{\sqrt{5}} \\ y'' = y' - \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Уравнение при этом в переменных x'' , y'' примет вид:

$$x''^2 + 6y''^2 = 2$$

Или, уже каноническое:

$$\frac{x''^2}{2} + \frac{y''^2}{1/3} = 1$$

Видно, что кривая второго порядка — эллипс. Осталось задать каноническую систему координат, связав её с исходной. Можно вывести замену x и y сразу на x'' и y'' — тогда станет известна матрица перехода от исходного базиса к новому и положение новой (канонической) системы координат относительно исходной.

Выражая и подставляя из одной замены в другую, получаем

$$\begin{cases} x = \dots = \frac{2}{\sqrt{5}}x'' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'' - 3 \\ y = \dots = \frac{1}{\sqrt{5}}x'' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'' - 1 \end{cases}$$

Откуда видны компоненты новых базисных векторов в старом базисе и положение нового начала:

$$\begin{cases} O'(-3, -1) \\ e'_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \\ e'_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \end{cases}$$

Способ II (“через центр”).

Если у кривой есть центр, то удобнее начинать замены с переноса начала координат в этот центр. Из системы уравнений (2) можно понять, есть у кривой центр или нет. И, если есть, найти его координаты

$$\begin{cases} 2x_0 - 2y_0 + 4 = 0 \\ -2x_0 + 5y_0 - 1 = 0 \end{cases}$$

Определитель системы

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

(из того, что определитель больше нуля, сразу можно заключить, что кривая эллиптического типа). Решая далее, например, по методу Крамера, находим

$$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = -1 \end{cases}$$

И первая замена — перенос начала координат в центр:

$$\begin{cases} x = -3 + x' \\ y = -1 + y' \end{cases}$$

Подставляя в уравнение (5), получаем

$$2x'^2 + 5y'^2 - 4x'y' = 2$$

то есть линейные члены ушли. Осталось повернуть систему координат. Поворот должен быть таким же, как в первом способе решения. В итоге

$$x''^2 + 6y''^2 = 2$$

Получили то же самое, что и в первый раз, но вычислений пришлось проводить в разы меньше (и вероятность совершить какую-нибудь ошибку тоже была меньше). Координаты нового центра при этом стали известны уже на стадии первой замены переменных. □

3. Дополнение: Ещё задача про касательные

3.1. # 8.29(3)

Доказать, что пучок света, испущенный из фокуса параболы, отразившись от её стенок, пойдёт параллельно оси параболы.

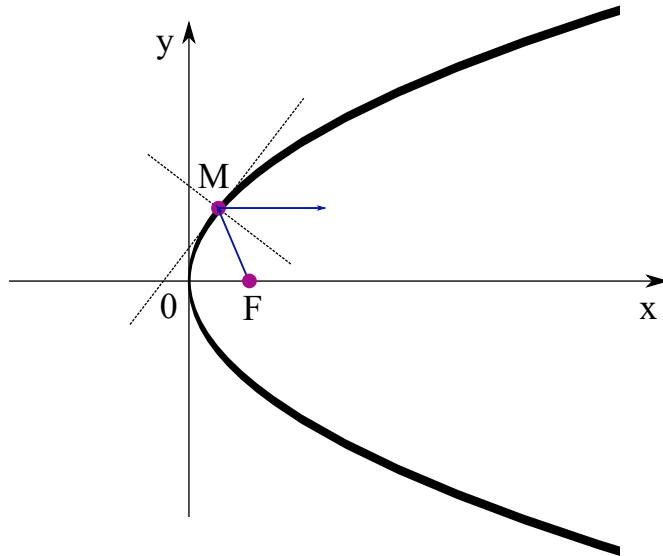


Рис. 5: Луч, исходящий из фокуса параболы и отражённый далее от её “стенки”.

Решение. Рассмотрим параболу в её канонической системе координат. Там она задаётся уравнением $y^2 = 2px$, и уравнение касательной в точке $M(x_0, y_0)$ будет $yy_0 = p(x + x_0)$, или, если раскрыть скобки и перенести всё в одну часть:

$$p \cdot x - y_0 \cdot y + px_0 = 0$$

Откуда получаем направляющий вектор касательной $\mathbf{a} = (y_0, p)$ и вектор нормали к касательной $\mathbf{n} = (p, -y_0)$.

Рассмотрим луч, исходящий из фокуса параболы F в точку M (5). По предположению, отражённый луч параллелен вектору $\mathbf{v}_{\parallel} = (1, 0)$ (параллелен оси параболы). Вектор же \mathbf{v} , вдоль которого идёт испущенный из фокуса луч, равен $(x_0 - \frac{p}{2}, y_0 - 0)$. Найдём углы $\angle(\mathbf{v}, \mathbf{n})$ и $\angle(\mathbf{n}, -\mathbf{v}_{\parallel})$. Если они окажутся равны, то мы докажем что требуется. Итак,

$$\cos \angle(\mathbf{n}, -\mathbf{v}_{\parallel}) = -\frac{p}{\sqrt{p^2 + y_0^2}}$$

$$\cos \angle(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = \frac{p \left(x_0 - \frac{p}{2}\right)^2 - y_0 y_0}{\sqrt{p^2 + y_0^2} \sqrt{\left(x_0 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_0^2}} = \dots = -\frac{p}{\sqrt{p^2 + y_0^2}}$$

Углы равны. □