Семинар 10

Алексеев Василий

14 + 18 апреля 2023

Содержание

1. Euclid

1.1. Скалярное произведение

Вещественное линейное пространство $\mathscr{E}$ называется *евклидовым*, если на множестве пар его векторов введена функция $(\cdot, \cdot): \mathscr{E} \times \mathscr{E} \to \mathbb{R}$, называемая *скалярным произведением*, которая обладает следующими свойствами:

- Линейность по первому аргументу:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) \\ (\alpha \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{cases} \tag{1}$$

- Симметричность:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \tag{2}$$

- Положительная определённость[1]:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0 \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0 \text{ при } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \tag{3}$$

(В первом и втором свойствах подразумевается, что они должны выполняться "для всего, что можно подставить", "для любых", то есть $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{E}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.) Скалярное произведение вида $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ из свойства (3) иногда называется *скалярным квадратом* вектора $\boldsymbol{x}$.

Пример. В аналитической геометрии уже работали со скалярным произведением, определённым для векторов геометрического пространства по формуле:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| \cos \alpha$$

где $|\boldsymbol{x}|$ и $|\boldsymbol{y}|$ есть *модули векторов* $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, а α означает *угол между векторами* $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Потом уже убедились, что такая операция обладает свойствами: симметричности (очевидно), положительной определённости (будет просто $|\boldsymbol{x}|^2$), и линейности по первому аргументу (следует из линейности ортогональной проекции на направление: проекция суммы равна сумме проекций).

А теперь (в линейной алгебре), оказывается, что *любая функция, возвращающая по двум векторам число, если удовлетворяет свойствам (1, 2, 3), может быть названа скалярным произведением*. Возвращаясь к векторам геометрического пространства, несложно проверить, что и такая функция от двух векторов:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2023|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| \cos \alpha$$

могла бы быть принята в качестве скалярного произведения. Однако, например, вот такая функция:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \big|[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]\big|$$

(то есть модуль векторного произведения) уже скалярным произведением быть не может. Потому что, например, не выполняется свойство (3): скалярный квадрат любого вектора будет нулём. □

[1] Представлены две немного разные, но равносильные формулировки.

Пример (# 25.1). Пусть $\boldsymbol{n}$ есть фиксированный ненулевой вектор в геометрическом пространстве. Можно ли принять за скалярное произведение функцию $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_1 \equiv (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$? Нет, потому что, опять, скалярный квадрат вектора в таком случае $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})_1 = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ равен нулю (объём параллелепипеда). Симметричность также "не работает". Однако линейность по первому аргументу есть.

А можно ли определить скалярное произведение как $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_2 \equiv (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{n})$? Снова нет, потому что, например при $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{n}$ получим $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})_2 = 0$. То есть нет положительной определённости. Линейности по первому аргументу также нет:

$$(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})_2 = \big((\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) + \boldsymbol{n}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{n}\big) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{n}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{n})$$

("не хватает" вектора $\boldsymbol{n}$ как слагаемого в первом аргументе у скобки справа, поэтому, "очевидно", в общем случае нелинейно — например, можно подставить $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{n}$ и получить $\big((\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2), \boldsymbol{y}\big)_2 = 6|\boldsymbol{n}|^2 \neq 8|\boldsymbol{n}|^2 = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y})_2 + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})_2$.)

Рассмотрим следующую функцию – "кандидат" в скалярное: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_3 \equiv (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{y})$. Которая тоже не будет скалярным произведением, потому что при $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{n}$ получается ноль: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})_3 = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}) = 0$.

Функция же $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_4 \equiv |\boldsymbol{n}|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ удовлетворяет всем свойствам скалярного.

А вариант $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_5 \equiv |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|$, отличающийся от "обычного скалярного" для векторов – направленных отрезков "всего лишь" тем, что нет косинуса угла, на самом деле вместе с этим "лишается" и свойства линейности. Например (при некоторых ненулевых $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$):

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_5 = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| = 0 \neq |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| + |-\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_5 + (-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_5$$

$\square$

1.2. Матрица Грама

Линейность по первому аргументу и симметричность (1, 2) по сути говорят о том, что *скалярное произведение — это симметричная билинейная функция*. Положительная же определённость (3) означает, что *соответствующая квадратичная функция положительно определена*. Поэтому все результаты, полученные ранее для симметричных билинейных и квадратичных функций переносятся и на скалярное произведение.

Так, скалярное тоже можно вычислять с помощью матрицы. Пусть в пространстве $\mathscr{E}$ выбран базис $e = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. Тогда любой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathscr{E}$ можно разложить по базису, а коэффициенты разложения собрать в столбец $x \in \mathbb{R}$ (координатный столбец):

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = ex$$

Тогда, если при вычислении скалярного $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ подставить вместо векторов их разложения по базису:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n, y_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)y_j = x^T\Gamma y$$

Матрица Γ билинейной функции $(\cdot, \cdot)$ также может быть названа *матрицей Грама системы векторов* $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) & \ldots & (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_1) & \ldots & (\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix}$$

Как матрица симметричной билинейной функции, матрица Γ, очевидно, симметрична: $\Gamma = \Gamma^T$. Помимо этого, так как Γ есть матрица положительно определённой квадратичной формы, то её определитель положителен $\det\Gamma > 0$. Более того, положительны все главные миноры: $\Delta_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ (критерий Сильвестра).

1.3. Модуль вектора

Определение 1.1. Модулем (длиной) $|\boldsymbol{x}|$ вектора $\boldsymbol{x}$ называется число:

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} \tag{4}$$

Так как $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$, то правая часть (4) определена при любом $\boldsymbol{x}$. Наличие корня также "оправдывает" название "длина" в том смысле, что если, например, длины базисных векторов $|\boldsymbol{e}_i|$ измеряются в сантиметрах, то выражение $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ будет иметь размерность сантиметров в квадрате, и после извлечения из этого корня как раз получится "длина".

С одной стороны, это очевидно, но, с другой, "неожиданно" и даже, может, "контринтуитивно", поэтому явно отметим, что *длина вектора зависит от скалярного произведения*. В линейном пространстве может быть много способов выбрать скалярное произведение. Однако евклидовым оно становится тогда, когда этот *выбор* каким-то образом сделан. Только после этого у каждого вектора "появляется" длина. При разных выборах скалярного и длина одного и того же вектора может быть разной.

Пока ничего "неожиданного" в определении вектора больше не видно. Но мы ещё вернёмся к этому понятию...

1.4. Угол между векторами

Определение 1.2. Углом между ненулевыми векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ называется угол α (лежащий в пределах от 0 до π), такой что:

$$\cos\alpha = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|} \tag{5}$$

Почему правая часть (5) в самом деле может быть принята за косинус угла? То есть почему верно, что:

$$-1 \leq \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|} \leq 1 \quad \leftrightarrow \quad \left|\frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}\right| \leq 1$$

Если $\boldsymbol{x} \parallel \boldsymbol{y}$, то $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. И поэтому

$$\frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|} = \frac{\alpha}{|\alpha|} \in \{-1, 1\}$$

Если же $\boldsymbol{x} \nparallel \boldsymbol{y}$, то систему векторов $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ можно принять в качестве базиса на плоскости $\mathscr{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ (плоскость, как раз таки натянутая на пару векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$). Матрица Грама $\Gamma_{\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\}}$ этого базиса:

$$\Gamma_{\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\}} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \end{pmatrix}$$

как и матрица Грама любого базиса, положительно определена. И поэтому, в частности:

$$0 < \det\Gamma_{\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\}} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^2|\boldsymbol{y}|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2$$

Перенося одно из двух слагаемых "налево" и извлекая квадрат, получаем:

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| < |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| \to \left|\frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}\right| < 1$$

Поэтому формула (5) в самом деле может служить определением косинуса угла.

1.5. Унитарное пространство

Этому в конспектах (почти) никогда не уделяли особого внимания, но линейные пространства на самом деле могут быть не только *вещественными* (те, с которыми всегда работали), но и *комплексными*. (И ещё разными, кроме вещественных и комплексных.) Разница между ними в операции умножения вектора на число (одна из двух операций, помимо сложения, которая лежит в основе определения понятия *линейное пространство*): что такое эти "числа", на которые можно умножать векторы. Так вот, если разрешается умножать векторы на комплексные числа, то пространство и называется комплексным[2].

Приведём же определение скалярного произведения для случая *комплексного линейного пространства*. (Далее идёт почти "Ctrl-C" – "Ctrl-V" определения скалярного произведения из самого начала конспекта. Чтоб не играть в "найди 10 отличий", ключевые места "подсвечены".)

Комплексное линейное пространство $\mathcal{U}$ называется *унитарным*, если на множестве пар его векторов введена функция $(\cdot,\cdot) : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{C}$, называемая *скалярным произведением*, которая обладает следующими свойствами:

- Линейность по первому аргументу:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) \\ (\beta \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{cases} \tag{6}$$

- "Симметричность" (Эрмитовость):

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} \tag{7}$$

- Положительная определённость[3]:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0 \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0 \text{ при } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \tag{8}$$

(В первом и втором свойствах подразумевается, что они должны выполняться "для всего, что можно подставить", "для любых", то есть $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{U}$, $\forall \beta \in \mathbb{C}$.)

В свойстве про положительную определённость (8), хоть ничего по сравнению с (3) как бы и не поменялось, но эта неизменность как раз и примечательна. То есть по сути свойство (8) неявно утверждает, что *скалярный квадрат вектора комплексного пространства всегда вещественен* (и при этом, да, ещё больше нуля).

Основное же, что явно поменялось — это свойство (7) про "симметричность". Почему "понадобилось" комплексное сопряжение при перестановке аргументов?

Пример. Пусть есть вектор $\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}$, $|\boldsymbol{x}| > 0$. Рассмотрим вектор $\beta \boldsymbol{x}$, $\beta \equiv (1 + i)$. Чему равна длина $|\beta \boldsymbol{x}|$ вектора $\beta \boldsymbol{x}$?

Посчитаем её "по-старому", пользуясь свойством (2):

$$|\beta \boldsymbol{x}|^2 = (\beta \boldsymbol{x}, \beta \boldsymbol{x}) \overset{(1)}{=} \beta(\boldsymbol{x}, \beta \boldsymbol{x}) \overset{(2)}{=} \beta(\beta \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \overset{(1)}{=} \beta^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$$

[2]Вообще в качестве "чисел" может выступать произвольное *поле*. Множество элементов с двумя операциями: сложения и умножения — каждая из которых удовлетворяет ряду аксиом: ассоциативность, коммутативность, существование *нейтрального* элемента ("ноль" для сложения и "единица" для умножения) и существование для каждого элемента *обратного* (для сложения такой ещё называется *противоположным*, а по умножению наличие обратного на самом деле требуется не для всех вообще элементов пространства, а для всех кроме нуля). Помимо перечисленных аксиом, операции ещё должны обладать свойством *дистрибутивности* ("раскрытие скобок" — "связь" между сложением и умножением).

[3]Представлены две немного разные, но равносильные формулировки.

Но $\beta^2 = (1+i)^2 = 2i$ — мнимое число! А длина вектора не может быть мнимой (на то она и “длина”). Теперь при вычислении $|\beta \boldsymbol{x}|$ применим правило (7):

$$|\beta \boldsymbol{x}|^2 = (\beta \boldsymbol{x}, \beta \boldsymbol{x}) \overset{(6)}{=} \beta(\boldsymbol{x}, \beta \boldsymbol{x}) \overset{(7)}{=} \beta\overline{(\beta \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} \overset{(6)}{=} \beta\overline{\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \beta\overline{\beta} \cdot \overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} \overset{(7)}{=} \beta\overline{\beta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$$

И теперь с длиной уже “всё в порядке”: $\beta\overline{\beta} \in \mathbb{R}$. □

Упражнение. Будет ли скалярное произведение в комплексном линейном пространстве линейным *по второму аргументу*?

1.6. Ортогональное дополнение

Определение 1.3. Пусть есть подпространство L евклидова пространства $\mathscr{E}$. *Ортогональным дополнением* L называется множество векторов $L^\perp$, перпендикулярных всем векторам L:

$$L^\perp = \{\boldsymbol{x} \in \mathscr{E} \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0,\ \forall \boldsymbol{y} \in L\}$$

Несложно убедиться, что *ортогональное дополнение является линейным подпространством*. В чём убедиться сложнее, так это в том, что...

Утверждение 1.1. *Пусть есть подпространство L евклидова пространства $\mathscr{E}$. Тогда*

$$L \oplus L^\perp = \mathscr{E}$$

То есть сумма подпространства и его ортогонального дополнения, во-первых, прямая и, во-вторых, даёт всё пространство. Почему?

Выберем базис в L. Пусть это система векторов $p = \{\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_l\}$, $l \equiv \dim L$, $1 \leq l < \dim \mathscr{E}$. (С нулевым L “всё и так понятно”: для такого ортогональным дополнением будет всё $\mathscr{E}$. Если же $L = \mathscr{E}$, то его ортогональным дополнением будет нулевое подпространство.) Ортогонализируем её — получим векторы $p' = \{\boldsymbol{p}'_1, \dots, \boldsymbol{p}'_l\}$, которые попарно ортогональны и по длине единичные. То есть соответствующая матрица Грама:

$$\Gamma_{p'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times l}$$

Достроим p' до базиса в $\mathscr{E}$: выберем “как-нибудь” оставшиеся $\dim \mathscr{E} - l \equiv r \geq 1$ векторов $q = \{\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_r\}$, так чтобы система $p' \cup q$ была бы базисом в $\mathscr{E}$ (должно быть очевидно, но отметим, что нумерация векторов в базисе такая: сначала векторы из p' по порядку, за ними векторы из q по порядку). Матрица Грама такого базиса:

$$\Gamma_{p' \cup q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(l+r) \times (l+r)}$$

то есть пока про неё вообще сложно сказать что-то кроме того, что первые l векторов (которые p') ортонормированы. Ортонормируем также и векторы q: сначала вычтем ортогональные проекции на векторы p', а потом ещё и “друг с другом” их повычитаем и отнормируем (“стандартная ортогонализация” системы векторов q). Получим векторы $q' = \{\boldsymbol{q}'_1, \dots, \boldsymbol{q}'_r\}$, и базис в $\mathscr{E}$ тогда будет $p' \cup q'$, матрица Грама которого:

$$\Gamma_{p' \cup q'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(l+r)\times(l+r)}$$

“Где же” $L^\perp$? Убедимся, что $L^\perp = \mathscr{L}(\boldsymbol{q}'_1, \dots, \boldsymbol{q}'_r)$. С одной стороны, очевидно включение: $\mathscr{L}(\boldsymbol{q}'_1, \dots, \boldsymbol{q}'_r) \subseteq L^\perp$ (любой вектор из линейной оболочки векторов q' ортогонален всем векторам L, потому что ортогонален базисным p'). С другой стороны… Пусть вектор $\boldsymbol{x} \in \in L^\perp$. Разложим его по базису $p' \cup q'$:

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{p}'_1 + \dots \alpha_l \boldsymbol{p}'_l + \beta_1 \boldsymbol{q}'_1 + \dots + \beta_r \boldsymbol{q}'_r$$

Что значит, что $\boldsymbol{x} \in L^\perp$? Это, в частности, значит, что:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}'_1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

Аналогично можно показать и $\alpha_2 = \dots = \alpha_l = 0$. А это означает, что $\boldsymbol{x} \in \mathscr{L}(\boldsymbol{q}'_1, \dots, \boldsymbol{q}'_r)$, то есть выполнено включение $L^\perp \subseteq \mathscr{L}(\boldsymbol{q}'_1, \dots, \boldsymbol{q}'_r)$.

Итого, $L^\perp = \mathscr{L}(\boldsymbol{q}'_1, \dots, \boldsymbol{q}'_r)$.

А по построению базисов p' и q' очевидно, что сумма

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{p}'_1, \dots, \boldsymbol{p}'_l) + \mathscr{L}(\boldsymbol{q}'_1, \dots, \boldsymbol{q}'_r) = L + L^\perp$$

прямая и даёт всё пространство $\mathscr{E}$ (объединение базисов $p' \cup q'$ есть базис в $\mathscr{E}$).

Определение 1.4. Пусть есть подпространство L евклидова пространства $\mathscr{E}$. Тогда $L \oplus \oplus L^\perp = \mathscr{E}$. Поэтому любой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathscr{E}$ может быть представлен как сумма:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}'', \quad \boldsymbol{x}' \in L,\ \boldsymbol{x}'' \in L^\perp$$

Слагаемое $\boldsymbol{x}'$ называется *ортогональной проекцией вектора $\boldsymbol{x}$ на подпространство L*.

2. Задачи

2.1. # 25.7

В линейном пространстве функций, непрерывных на отрезке $C[-1, 1]$, произвольной паре функций f и g сопоставлено число по правилу:

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

Надо доказать, что этим определено скалярное произведение.

Решение. Фактически надо просто проверить все свойства (1, 2, 3). Так, линейность:

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2, g) &= \int_{-1}^{1} (f_1 + f_2)(t)g(t)dt \\ &= \int_{-1}^{1} \big(f_1(t) + f_2(t)\big)g(t)dt = \int_{-1}^{1} f_1(t)g(t)dt + \int_{-1}^{1} f_2(t)g(t)dt = (f_1, g) + (f_2, g)\end{aligned} \tag{9}$$

Аналогично можно показать, что $(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Далее, симметричность:

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt = \int_{-1}^{1} g(t)f(t)dt = (g, f)$$

Осталось последнее — положительная определённость:

$$(f, f) = \int_{-1}^{1} f^2(t)dt \geq 0$$

но почему (f, f) обязательно больше нуля при $f \not\equiv 0$? Ноль в пространстве $C[-1, 1]$ есть, очевидно, функция – константный ноль. Раз $f \not\equiv 0$, то найдётся *хотя бы одна* точка $x_0 \in$ $\in [-1, 1]$, такая что $f(x_0) \neq 0$. Пусть, для определённости, $f(x_0) > 0$. (Но пока всё ещё не понятно, почему $(f, f) > 0$.) Так как функция f непрерывна, то вместе с x_0 функция f будет отлична от нуля и *в некоторой окрестности*[4] точки x_0 (отлична от нуля и того же знака, что и в x_0), то есть $\exists \varepsilon > 0 : \ f(x) > 0$ при $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ (1). За счёт этой окрестности интеграл в выражении (f, f) и будет больше нуля:

$$(f, f) = \int_{-1}^{1} f^2(t)dt \geq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f^2(t)dt > 0$$

□

2.2. # 26.13(4)

Подпространство L евклидова пространства $\mathscr{E}$ есть линейная оболочка векторов:

$$L = \mathscr{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3), \quad \begin{cases} a_1 = (4, 3, -3, 2)^T \\ a_2 = (-1, 3, 2, -3)^T \\ a_3 = (2, 9, 1, -4)^T \end{cases}$$

где координаты $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$ векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \in \mathscr{E}$ даны в некотором ортонормированном базисе.

Надо найти ортогональное дополнение $L^\perp$.

[4] Если уж быть совсем аккуратным, то надо бы было ещё сказать, что при $x_0 = 1$ или $x_0 = -1$ (граничные точки отрезка), окрестность знакопостоянства функции около точки x_0 была бы односторонней.

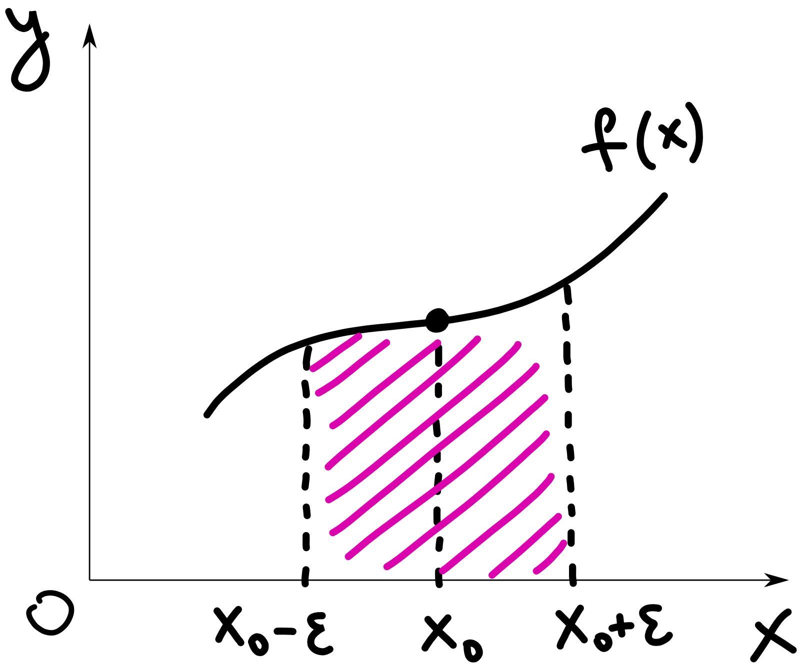

Рис. 1: Если непрерывная функция f больше нуля в точке x_0, то она больше нуля и в некоторой её окрестности.

Решение. “Заметим”, что $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2$ (и при этом $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ очевидно линейно независимы), поэтому в качестве базиса в L можно выбрать систему векторов $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$.

Далее, найти ортогональное дополнение $L^\perp$ — значит найти все вектора $\boldsymbol{x}$, такие что

$$\begin{cases} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1) = 0 \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_2) = 0 \end{cases} \overset{\text{ОНБ}}{\leftrightarrow} \begin{cases} a_1^T x = 0 \\ a_2^T x = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решая однородную систему, можем получить общее решение в виде:

$$x_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} t_2, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

где векторы $b_1 = (1, 0, 2, 1)^T$ и $b_2 = (3, -1, 3, 0)^T$ задают базис в пространстве решений.

И тогда ортогональное дополнение можно представить как $L^\perp = \mathscr{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$. □