Семинар 6

Алексеев Василий

11 марта + 12 марта 2021

Содержание

1. Линейные отображения 2. Линейные функции

2. Задачи

2.1. # 23.15(1)

Пусть линейное пространство $\mathscr{L}$ представимо как прямая сумма двух ненулевых подпространств: $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \oplus \mathscr{L}_2$.

Показать, что преобразование $\phi : \mathscr{L} \to \mathscr{L}$ проектирования на $\mathscr{L}_1$ параллельно $\mathscr{L}_2$ линейно. Найти ядро и множество значений ϕ. Найти матрицу преобразования ϕ в базисе $\mathscr{L}$, составленном из базисов подпространств $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$.

Решение. Раз $\mathscr{L}$ выражено прямой суммой $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$, то любой вектор $\boldsymbol{x}$ из $\mathscr{L}$ единственным образом раскладывается в сумму двух, один из которых в $\mathscr{L}_1$, а другой в $\mathscr{L}_2$:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \oplus \mathscr{L}_2 \Leftrightarrow \underbrace{\boldsymbol{x}}_{\in \mathscr{L}} = \underbrace{\boldsymbol{x}_1}_{\in \mathscr{L}_1} + \underbrace{\boldsymbol{x}_2}_{\in \mathscr{L}_2}$$

В таком представлении

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1$$

И можно проверить линейность преобразования:

$$\phi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \phi(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = \phi\big((\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2)\big) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1 = \phi(\boldsymbol{x}) + \phi(\boldsymbol{y})$$

Аналогично $\phi(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha \phi(\boldsymbol{x})$.

Ядро преобразования определяется как

$$\phi(\boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}_1 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 \in \mathscr{L}_2$$

то есть $\operatorname{Ker} \phi = \mathscr{L}_2$.

Множество значений — подмножество $\mathscr{L}$ векторов $\boldsymbol{y}$, которые могут быть получены с помощью преобразования ϕ. То есть рассматриваем $\boldsymbol{y} \in \mathscr{L}$ и проверяем, при каких условиях его можно получить с помощью ϕ. Очевидно, если существует $\boldsymbol{x}$, являющийся прообразом $\boldsymbol{y}$, то

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \Rightarrow \boldsymbol{y} \in \mathscr{L}_1$$

То есть $\operatorname{Im} \phi \subseteq \mathscr{L}_1$. Но верно и в другую сторону[1]:

$$\boldsymbol{y} \in \mathscr{L}_1 \Rightarrow \exists \boldsymbol{x} \in \mathscr{L} \,:\, \phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$$

Поэтому $\operatorname{Im} \phi = \mathscr{L}_1$.

Можно заметить, что выполняется тождество:

$$\underbrace{\dim \operatorname{Im} \phi}_{\operatorname{Rg} \phi} + \dim \operatorname{Ker} \phi = \dim \mathscr{L}$$

Пусть размерность $\mathscr{L}_1$ равна l, а размерность $\mathscr{L}_2$ равна k. Пусть $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_l)$ — базис в $\mathscr{L}_1$, а $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k)$ — базис в $\mathscr{L}$. Тогда за базис в $\mathscr{L}$ предлагается взять $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_l, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k)$[2].

[1] Например, при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

[2] Так можно сделать, потому что $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \oplus \mathscr{L}_2$.

В общем случае, столбцы матрицы отображения $\phi\colon\ X \to Y$ — это координатные столбцы базиса X в базисе Y. В случае преобразования, X и Y — одно и то же, и базис один. Поэтому столбцы матрицы преобразования ϕ — это координатные столбцы образов базисных векторов в том же базисе

$$A = \big(\phi(\boldsymbol{a}_1), \ldots, \phi(\boldsymbol{a}_l), \phi(\boldsymbol{b}_1), \ldots, \phi(\boldsymbol{b}_k)\big) = \begin{pmatrix} E_{l\times l} & 0_{l\times k} \\ 0_{k\times l} & 0_{k\times k} \end{pmatrix}$$

так как $\phi(\boldsymbol{a}_i) = 1 \cdot \boldsymbol{a}_i$, а $\phi(\boldsymbol{b}_i) = \boldsymbol{0}$.

Если бы ϕ рассматривалось не как преобразование, а как отображение $\phi\colon \mathscr{L} \to \mathscr{L}_1$, то в данном случае базисы в пространствах “из” и “куда” уже отличаются. Столбцов в матрице отображения останется $l+k$, но строк уже будет всего l (потому что базис в пространстве “куда” $\mathscr{L}_1$ есть $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_l)$). То есть матрица отображения $\phi\colon\ \mathscr{L} \to \mathscr{L}_1$ равна (индексом $\boldsymbol{a}$ обозначено, в каком базисе компоненты)

$$A = \big(\phi(\boldsymbol{a}_1)_{\boldsymbol{a}}, \ldots, \phi(\boldsymbol{a}_l)_{\boldsymbol{a}}, \phi(\boldsymbol{b}_1)_{\boldsymbol{a}}, \ldots, \phi(\boldsymbol{b}_k)_{\boldsymbol{a}}\big) = \begin{pmatrix} E_{l\times l} & 0_{l\times k} \end{pmatrix}$$

□

2.2. # 23.29(5)

Линейное отображение $\phi\colon\ X \to Y$ задано матрицей $A_{m\times n}$ в базисах $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ в X и $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m)$ в Y:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Надо найти ядро, множество значений отображения. Выяснить, является ли оно инъективным, сюръективным.

Решение. Из размера матрицы A видно, что $\dim X = 3$ и $\dim Y = 5$.

Найдём $\operatorname{Ker}\phi$ (за $x \in \mathbb{R}^3$ обозначен координатный столбец вектора $\boldsymbol{x} \in X$):

$$\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker}\phi \Leftrightarrow \phi(x) = Ax = 0$$

Надо решить однородную систему, упростив матрицу A:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Сразу видно, что ранг матрицы отображения (он же ранг самого отображения) $\operatorname{Rg}\phi = 2$. Ранг отображения — размерность множества значений. Поэтому $\dim \operatorname{Im}\phi = 2 < 5 = \dim Y$. Что означает, что отображение ϕ не сюръективно.

Произвольный вектор из ядра представим как

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что размерность ядра $\dim \operatorname{Ker} \phi = 1$. Ядро не нулевое. Это значит, что отображение не инъективно (можно подобрать два различных вектора (отличающихся на ненулевой вектор из ядра) которые ϕ переводит в один и тот же вектор).

Остаётся найти $\operatorname{Im}\phi$ (у которого размерность ,уже известно, равна двум):

$$y \in \operatorname{Im}\phi \Leftrightarrow \exists x \in X \,:\, Ax = y$$

Получается, надо рассмотреть расширенную матрицу $(A \mid y)$, упростить её, и выписать ограничения на y, чтобы система была совместна. Упрощение матрицы A уже проведено в (1). Остаётся проделать те же самые преобразования со столбцом y:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -y_1/2 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -y_1/2 \\ y_2 - y_1 \\ y_3 - 3y_1/2 \\ y_4 + 4y_1/2 \\ y_5 + 6y_1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -y_1/2 - \left(y_3 - 3y_1/2\right) \\ y_2 - y_1 \\ y_3 - 3y_1/2 \\ y_4 + 4y_1/2 + 5\left(y_3 - 3y_1/2\right) \\ y_5 + 6y_1/2 + \left(y_3 - 3y_1/2\right) \end{pmatrix}$$

Зануляем компоненты, соответствующие нулевым строкам в упрощённой A:

$$\begin{cases} y_2 - y_1 = 0 \\ y_4 + \dfrac{4y_1}{2} + 5\left(y_3 - \dfrac{3y_1}{2}\right) \\ y_5 + \dfrac{6y_1}{2} + \left(y_3 - \dfrac{3y_1}{2}\right) \end{cases}$$

Уравнений 3 (очевидно, линейно независимых). Переменных 5. Значит, какие-то три можно выразить через другие две. Например,

$$\begin{cases} y_2 = y_1 \\ y_4 = \dfrac{1}{2}(11y_1 - 10y_3) \\ y_5 = \dfrac{1}{2}(-3y_1 - 2y_3) \end{cases}$$

Поэтому общий вид y из множества значений ($y_1 = t_1 \in \mathbb{R}$, $y_3 = t_2 \in \mathbb{R}$):

$$y = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \\ t_2 \\ \frac{1}{2}(11t_1 - 10t_2) \\ \frac{1}{2}(-3t_1 - 2t_2) \end{pmatrix} = \underbrace{2t_1}_{\tilde{t}_1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix} + \underbrace{2t_2}_{\tilde{t}_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Базис в $\operatorname{Im}\phi$ “виден”. Векторов в нём, ожидаемо, два. □

2.3. # 23.40(1в)

Пусть $\mathscr{P}^{(m)}$ — линейное пространство линейных многочленов степени не выше m. Проверить, что дифференцирование, рассматриваемое как преобразование $D:\ \mathscr{P}^{(m)} \to \mathscr{P}^{(m)}$, линейно. Найти его ядро и множество значений. Вычислить матрицу в базисе

$$\left(1 \frac{t}{1!}, \ldots, \frac{t^m}{m!}\right)$$

Решение. Линейность ($p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m$ и $q(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m$):

$$\begin{aligned} D(p(t) + q(t)) =& D\big((a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m) + (b_0 + b_1 t + \ldots b_m t^m)\big) \\ =& a_1 + \ldots + a_m t^{m-1} + b_1 + \ldots + b_m t^{m-1} = D(p(t)) + D(q(t)) \end{aligned}$$

Аналогично с $D(\alpha p(t)) = \alpha D(t(t))$.

Ядро:

$$p(t) \in \operatorname{Ker} D \Leftrightarrow D(p(t)) = a_1 + \ldots + a_m t^{m-1} = 0 \Leftrightarrow a_1 = \ldots = a_m = 0$$

Поэтому $p(t) \in \operatorname{Ker} D \Leftrightarrow p(t) = a_0$. То есть ядро дифференцирования — все константные многочлены. Размерность ядра, очевидно, равно одному.

Множество значений — это $\mathscr{P}^{m-1}$. Потому что, с одной стороны, при дифференцировании многочлена степени не выше m получается многочлен степени не выше $m-1$. С другой стороны, для многочлена $h(t)$ степени не выше $m-1$ можно подобрать многочлен $p(t)$ степени не выше m, дифференцирование которого даёт данный (например, $p(t) = \int h(t)$).

Матрица преобразования? Стобцы её — координаты образов векторов пространства $\mathscr{P}^m$ в том же базисе. Так как

$$\begin{aligned} &D(1) = 0 \\ &D\left(\frac{1}{1!}t\right) = \mathbf{1} \cdot \frac{1}{1!} \\ &D\left(\frac{1}{2!}t^2\right) = \mathbf{1} \cdot \frac{1}{1!}t \\ &\ldots \\ &D\left(\frac{1}{m!}t^m\right) = \mathbf{1} \cdot \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1} \end{aligned}$$

то матрица преобразования получается равной

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Размер матрицы A равен $(m+1) \times (m+1)$.

Если бы дифференцирование рассматривалось бы как отображение $D: \mathscr{P}^m \to \mathscr{P}^{m-1}$ (и в $\mathscr{P}^{m-1}$ базис бы был такой же, как в $\mathscr{P}^m$, только без последнего вектора), то строк в матрице отображения стало бы меньше на одну (столбцов столько же, потому что базис исходного пространства такой же, строк же меньше, потому что меняется базис пространства, куда отображаем):

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

И размер матрицы A' равен $m \times (m+1)$. □

2.4. # 23.82(1)

Преобразование ϕ переводит векторы a_i в b_i. Преобразование ψ переводит векторы b_i в c_i. То есть

$$(a_1, a_2, a_3) \xrightarrow{\phi} (b_1, b_2, b_3)$$

$$(b_1, b_2, b_3) \xrightarrow{\phi} (c_1, c_2, c_3)$$

Надо найти матрицу $A_{\psi\phi}$ преобразования $\psi\phi$ в исходном базисе.

Решение. Пусть матрицы A_ϕ и A_ψ — матрицы преобразований ϕ и ψ соответсвенно. Тогда условие задачи можно переписать в виде

$$\begin{cases} A_\phi(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3) \\ A_\psi(b_1, b_2, b_3) = (c_1, c_2, c_3) \\ A_{\psi\phi}(a_1, a_2, a_3) = (c_1, c_2, c_3) \end{cases}$$

Если положить $A \equiv (a_1, a_2, a_3)$, $B \equiv (b_1, b_2, b_3)$ и $C \equiv (c_1, c_2, c_3)$, то условие можно переписать в ещё более сжатой форме:

$$\begin{cases} A_\phi A = B \\ A_\psi B = C \\ A_{\psi\phi} A = C \end{cases}$$

Отсюда (так как по условию существуют A^{-1} и B^{-1}):

$$\begin{cases} A_\phi = BA^{-1} \\ A_\psi = CB^{-1} \\ A_{\psi\phi} = CA^{-1} = CB^{-1} \cdot BA^{-1} = A_\psi A_\phi \end{cases}$$

А как бы, например, выглядела матрица преобразования ϕ в базисе (a_1, a_2, a_3)? На данном этапе известно, что

$$A_{\psi\phi}\xi_e = \nu_e$$

где индекс $\boldsymbol{e}$ показывает, в каком базисе даны компоненты. При замене старого базиса $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)$ на новый $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ векторы базисов связаны соотношением (коэффициенты разложения векторов нового базиса $\boldsymbol{a}$ по старому $\boldsymbol{e}$ образуют столбцы матрицы перехода S):

$$(a_1, a_2, a_3) = (e_1, e_2, e_3)S$$

Координатные же столбцы произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ в старом ξ_e и новом $\xi_{\boldsymbol{a}}$ базисах связаны следующим образом:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}\xi_e \\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}\xi_{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{e}S\xi_{\boldsymbol{a}} \end{cases} \Rightarrow \xi_e = S\xi_{\boldsymbol{a}}$$

Итак, пока известно, что в базисе $\boldsymbol{e}$:

$$A_{\psi\phi}\xi_e = \nu_e \tag{2}$$

Надо же найти матрицу $A'_{\psi\phi}$ преобразования в базисе $\boldsymbol{a}$:

$$A'_{\psi\phi}\xi_{\boldsymbol{a}} = \nu_{\boldsymbol{a}} \tag{3}$$

Чтобы найти $A'_{\psi\phi}$, можно выразить в формуле (2) координатные столбцы в старом базисе через столбцы соответствующих векторов в новом базисе (чтобы получить формулу, "похожую" на (3), только с $A_{\psi\phi}$ вместо $A'_{\psi\phi}$):

$$A_{\psi\phi} S \xi_{\boldsymbol{a}} = S \nu_{\boldsymbol{a}} \Leftrightarrow S^{-1} A_{\psi\phi} S \xi_{\boldsymbol{a}} = \nu_{\boldsymbol{a}} \tag{4}$$

Подставляя вместо $\xi_{\boldsymbol{a}}$ базисные столбцы в последнюю формулу (4) и в (3) получаем, что

$$S^{-1} A_{\psi\phi} S = A'_{\psi\phi}$$

Остаётся понять, чему равна матрица S перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{a}$. Столбцы матрицы A — координаты новых базисных векторов $\boldsymbol{a}$ в старом базисе $\boldsymbol{e}$. Поэтому A и есть S, и матрица преобразования в новом базисе в итоге выглядит так:

$$A'_{\psi\phi} = A^{-1} A_{\psi\phi} A$$

□

2.5. # 31.21

Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$ — фиксированное число.

Показать, что сопоставление f каждому многочлену степени не выше n его значения в t_0 есть линейная функция:

$$f : \mathscr{P}^n \ni p(t) \mapsto p(t_0) \in \mathbb{R}$$

Вычислить координатную строку функции в базисах $(1, t, \ldots, t^n)$ и $(1, t - t_0, \ldots, (t - t_0)^n)$.

Решение. Линейность:

$$\begin{aligned} f(p(t) + q(t)) =& f\left((a_{0p} + a_{1p} t + \ldots + a_{np} t^n) + (a_{0q} + a_{1q} t + \ldots + a_{nq} t^n)\right) \\ =& (a_{0p} + a_{1p} t_0 + \ldots + a_{np} t_0^n) + (a_{0q} + a_{1q} t_0 + \ldots + a_{nq} t_0^n) = f(p(t)) + f(q(t)) \end{aligned}$$

Аналогично и

$$f(\alpha p(t)) = f(\alpha a_{0p} + \alpha a_{1p} t + \ldots + \alpha a_{np} t^n) = \alpha a_{0p} + \alpha a_{1p} t_0 + \ldots + \alpha a_{np} t_0^n = \alpha f(p(t))$$

Координатная строка функции — как матрица отображения, только в случае с функцией $\phi : X \to \mathbb{R}$ она становится строкой. То есть надо вычислить образы базисных векторов и "разложить их по базису в $\mathbb{R}$" (который принимается равным просто 1[3]).

Итак, в случае, если в $\mathscr{P}^n$ выбран базис $(1, t, \ldots, t^n)$, то координатная строка функции f равна:

$$\left(f(1), f(t), \ldots, f(t^n)\right) = (1, t_0, \ldots, t_0^n)$$

Если же в $\mathscr{P}^n$ выбран базис $(1, t - t_0, \ldots, (t - t_0)^n)$, то координатная строка функции f будет равна:

$$\left(f(1), f(t), \ldots, f(t^n)\right) = (1, 0, \ldots, 0)$$

□

[3]Хотя в случае линейной функции (которая отображает в одномерное $\mathbb{R}$) на самом деле вообще не важно, какое число "принято за базис" в $\mathbb{R}$: просто строка из образов $(\phi(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \phi(\boldsymbol{e}_n))$ векторов базиса $\boldsymbol{e}$ пространства X уже однозначно определяет функцию ϕ, потому что пространство $\mathbb{R}$ одномерное и образы $\phi(\boldsymbol{e}_i)$ — уже и так числа.

2.6. # 31.35(1)

Пусть базису $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ пространства $\mathscr{L}$ биортогонален базис (f_1, f_2, f_3) сопряжённого пространства $\mathscr{L}^*$. Надо найти базис, биортогональный базису

$$\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_3' = \boldsymbol{e}_3$$

Решение. Биортогональный базис $\boldsymbol{f}$ — это такой базис в $\mathscr{L}^*$, функции f_i которого обладают следующим свойством:

$$f_i(\boldsymbol{e}_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

То есть для неизвестных пока линейных функций f_1', f_2', f_3' нового биортогонального базиса уже известно, что, во-первых (выписываем соотношения для f_1'):

$$\begin{cases} 1 = f_1'(\boldsymbol{e}_1') = f_1'(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = f_1'(\boldsymbol{e}_1) + f_1'(\boldsymbol{e}_2) \\ 0 = f_1'(\boldsymbol{e}_2') = f_1'(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = f_1'(\boldsymbol{e}_2) + f_1'(\boldsymbol{e}_3) \\ 0 = f_1'(\boldsymbol{e}_3') = f_1'(\boldsymbol{e}_3) \end{cases}$$

То есть f_1' в точности такая же, как f_1 (ведь линейная функция из $\mathscr{L}^*$ однозначно определяется значениями на векторах базиса $\mathscr{L}$).

Далее, аналогичные соотношения для f_2':

$$\begin{cases} 0 = f_2'(\boldsymbol{e}_1') = f_2'(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = f_2'(\boldsymbol{e}_1) + f_2'(\boldsymbol{e}_2) \\ 1 = f_2'(\boldsymbol{e}_2') = f_2'(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = f_2'(\boldsymbol{e}_2) + f_2'(\boldsymbol{e}_3) \\ 0 = f_2'(\boldsymbol{e}_3') = f_2'(\boldsymbol{e}_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_2'(\boldsymbol{e}_1) = -1 \\ f_2'(\boldsymbol{e}_2) = 1 \\ f_2'(\boldsymbol{e}_3) = 0 \end{cases}$$

И для f_3':

$$\begin{cases} 0 = f_3'(\boldsymbol{e}_1') = f_3'(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = f_3'(\boldsymbol{e}_1) + f_3'(\boldsymbol{e}_2) \\ 0 = f_3'(\boldsymbol{e}_2') = f_3'(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = f_3'(\boldsymbol{e}_2) + f_3'(\boldsymbol{e}_3) \\ 1 = f_3'(\boldsymbol{e}_3') = f_3'(\boldsymbol{e}_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_3'(\boldsymbol{e}_1) = 1 \\ f_3'(\boldsymbol{e}_2) = -1 \\ f_3'(\boldsymbol{e}_3) = 1 \end{cases}$$

Чему равны f_2' и f_3'? Линейные действия над функциями из $\mathscr{L}^*$ равносильны таким же линейным действиям над их координатными строками: пространство $\mathscr{L}^*$ изоморфно пространству строк размера $\dim \mathscr{L}$. Функции f_2', например, (при базисе $\boldsymbol{e}$ в $\mathscr{L}$) соответствует строка $(-1, 1, 0)$. Можно разложить эту строку в линейную комбинацию базисных строк (соответствующих функциям, из которого состоит биортогональный базис $\boldsymbol{f}$):

$$(-1, 1, 0) = -1 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0)$$

Это значит, что с самой функцией f_2' будет "то же самое":

$$f_2' = -1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2$$

Аналогично с f_3':

$$f_3' = 1 \cdot f_1 - 1 \cdot f_2 + 1 \cdot f_3$$

Итого, новый биортогональный базис:

$$\boldsymbol{f} = (f_1, -f_1 + f_2, f_1 - f_2 + f_3)$$

□