

# Семинар 1

Алексеев Василий

1 + 7 сентября 2020

## Содержание

<b>1</b>	<b>Матрицы и определители 2-го и 3-го порядков</b>	<b>1</b>
1.1	Матрицы . . . . .	1
1.1.1	Операции с матрицами . . . . .	1
1.2	Определитель матрицы . . . . .	3
1.2.1	Свойства определителя . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Системы линейных уравнений. Правило Крамера</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Дополнение</b>	<b>9</b>
3.1	Определения определителя . . . . .	9
3.2	Задача про определитель <code>np.arange(n * n).reshape(n, -1)</code> . . . . .	10

# 1. Матрицы и определители 2-го и 3-го порядков

## 1.1. Матрицы

Матрица  $A$  размера  $m \times n$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

### 1.1.1. Операции с матрицами

**Определение 1.1** (Сложение матриц). Пусть  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Суммой  $A + B$  называется матрица  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , такая что  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ .

**Определение 1.2** (Умножение матрицы на число). Пусть  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Произведением матрицы  $A$  на число  $\alpha$  называется матрица  $C$ , такая что  $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ .

*Замечание.* Матрицы  $\mathbb{R}^{n \times n}$  с введённой операцией сложения и умножения на числа из  $\mathbb{R}$  образуют линейное пространство<sup>1</sup>:

1.  $A + B = B + A$ ,  $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (коммутативность сложения).
2.  $A + (B + C) = (A + B) + C$ ,  $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (ассоциативность сложения).
3.  $\exists 0_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n} : 0_{n \times n} + A = A$ ,  $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .
4.  $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n} \exists -A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A + (-A) = 0_{n \times n}$ .
5.  $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (ассоциативность умножения на скаляр).
6.  $1 \cdot A = A$ ,  $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .
7.  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (дистрибутивность умножения матрицы на число относительно сложения чисел).
8.  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (дистрибутивность умножения матрицы на число относительно сложения матриц).

**Определение 1.3** (Умножение матриц). Пусть  $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ . Тогда матрица  $C$  называется произведением матриц  $A$  и  $B$ , если

$$\begin{cases} c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

и обозначается  $C = AB$ .

---

<sup>1</sup>[wikipedia.org/wiki/Vector\\_space](https://wikipedia.org/wiki/Vector_space)

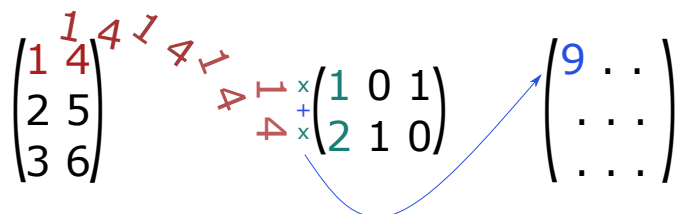


Рис. 1: Иллюстрация умножения матриц.

**Задача** (15.5(7)).

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

*Решение.*

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

**Задача** (T1\*). Для матриц  $A, B, C$  определены произведения  $AB, AC, BC$ . Всегда ли определено произведение  $BB = B^2$ ?

*Решение.* Обозначим размерности (число строк и число столбцов) в матрицах  $A, B, C$  за  $(m_a, n_a), (m_b, n_b), (m_c, n_c)$  соответственно. Тогда условие задачи (возможность умножения матриц) можно переписать так:

$$\begin{cases} m_a = n_b \\ m_a = n_c \\ m_b = n_c \end{cases}$$

И получаем

$$m_b = n_c = m_a = n_b \Rightarrow m_b = n_b$$

Поэтому произведение  $B^2$  также определено.

□

**Задача** (15.11(9)). Вычислить матрицу в степени (произведение нескольких одинаковых матриц)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^n$$

Решение. Начинаем умножать и видим закономерность:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \textcolor{violet}{1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \textcolor{violet}{1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \textcolor{violet}{1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \textcolor{violet}{1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \textcolor{violet}{1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \textcolor{violet}{1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^{n-3} \\
 &= \begin{pmatrix} \textcolor{violet}{1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \textcolor{violet}{1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcolor{violet}{1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \textcolor{violet}{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \textcolor{violet}{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^{n-n} = E_{n \times n}
 \end{aligned}$$

□

И ещё пара небесполезных концепций из мира матриц.

**Определение 1.4** (Транспонирование матрицы). Пусть  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Тогда транспонированной по отношению к матрице  $A$  матрицей называется такая матрица, что  $c_{ij} = a_{ji}$ . Транспонированная матрица обозначается  $A^T$ .

**Определение 1.5** (След матрицы). Следом матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  называется сумма элементов, находящихся на главной диагонали  $\{a_{ij} \mid i = j, i = 0, \dots, n\}$ :

$$\begin{cases} \text{Sp} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{Sp} : A \mapsto \sum_{i=1}^n a_{ii} \end{cases}$$

У следа есть несколько возможных обозначений. Например, можно ещё писать  $\text{Tr } A$ .

## 1.2. Определитель матрицы

Об определителе можно думать как о числовой функции на множестве матриц, обозначаемой  $\det$  или  $|\cdot|$

$$\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

и обладающей некоторыми свойствами. Конкретное определение  $\det$  можно вводить по-разному (через свойства функции, или даже через конкретную формулу вычисления по элементам матрицы 1). Мы пока опустим строгое определение  $\det$ . Так как мы делаем фокус на решении задач, то нам не так важно последовательное изложение теории. Поэтому будем считать, что определитель “просто есть”, как-то задан. И рассмотрим, как его вычислять для квадратных матриц размерности 2, 3, и пару свойств определителя (некоторые из которых следуют из определения, которое мы опускаем).

*Пример.* Определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

*Пример.* Определитель третьего порядка (разложение по первой строке):

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 \end{aligned}$$

**Задача (14.7(3)).**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

*Решение.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2)) - 2 \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2)) + 2 \cdot (2 \cdot (-2) - 2 \cdot 1) = -3 - 12 - 12 = -27$$

□

*Пример.* Определитель единичной матрицы:

$$\det E = 1^n = 1$$

**Теорема 1.1.** *Определитель транспонированной матрицы*

$$\det A^T = \det A$$

**Теорема 1.2.** *Определитель произведения двух квадратных матриц:*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

**Определение 1.6** (Вырожденная матрица<sup>2</sup>). Матрица  $A$  называется вырожденной, если  $\det A = 0$ . В противном случае матрица  $A$  называется невырожденной.

---

<sup>2</sup>Определение вырожденной матрицы можно вводить по-разному. Ещё возможный вариант: квадратная матрица называется вырожденной, если её строки  $\{a_i\}_{i=1}^n$  линейно зависимы. Строки линейно зависимы — когда существует нетривиальная линейная комбинация строк, которая даёт нулевую строку:  $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = \mathbf{0}$ ,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 > 0$ .

**Теорема 1.3.** *Определитель обратной к невырожденной матрице*

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

**Теорема 1.4** (Формула полного разложения определителя). Пусть  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Тогда определитель  $\det A$  матрицы равен

$$\det A = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} (-1)^{N(i_1, \dots, i_n)} a_{1i_1} \dots a_{ni_n} \quad (1)$$

где  $N(i_1, \dots, i_n)$  — число нарушений порядка в перестановке чисел  $i_1, \dots, i_n$ <sup>3</sup>. Сумма в формуле берётся по всем перестановкам чисел  $1, \dots, n$ <sup>4</sup>.

*Пример.* Вспомним формулу вычисления определителя для матрицы размера 3:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1$$

Элементы в каждом слагаемом упорядочены по номеру столбца. Поэтому посмотрим на число беспорядков по строкам (неважно, как считать беспорядки, по строкам или по столбцам, потому что  $\det A = \det A^T$ ). В первом слагаемом:  $N(1, 2, 3) = 0$ . Во втором:  $N(1, 3, 2) = 1$  (тройка и двойка). В третьем:  $N(2, 1, 3) = 1$  (двойка и единица). В четвертом:  $N(3, 1, 2) = 2$  (два беспорядка с тройкой и единицей и тройкой и двойкой). В пятом:  $N(2, 3, 1) = 1 + 1 = 2$  (для двойки и единицы и для тройки и единицы). В шестом:  $N(3, 2, 1) = 2 + 1 = 3$  (тройка-двойка, тройка-единица, двойка-единица).

### 1.2.1. Свойства определителя

**Теорема 1.5.** *Некоторые свойства определителя (матрицы в формулах ниже представляются столбцами  $a_i \in \mathbb{R}^n$ ):*

1. *Линейность по столбцу (строке) — полилинейность:*

$$\begin{cases} \det(a_1, \dots, \underbrace{p+q}_{a_i}, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, p, \dots, a_n) + \det(a_1, \dots, q, \dots, a_n) \\ \det(a_1, \dots, \underbrace{\alpha p}_{a_i}, \dots, a_n) = \alpha \det(a_1, \dots, p, \dots, a_n) \end{cases} \quad (2)$$

2. *При перестановке двух столбцов (строк) матрицы её определитель меняет знак (косимметричность, антисимметричность по столбцам/строкам):*

$$\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = -\det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n) \quad (3)$$

3. *Если два столбца (две строки) матрицы совпадают, то её определитель равен нулю:*

$$\det(a_1, \dots, p, \dots, p, \dots, a_n) = 0 \quad (4)$$

Свойства можно доказать как следствия теоремы 1.4.

И ещё пара более частных утверждений, которые следуют/являются подслучаями свойств выше:

<sup>3</sup>Нарушение порядка — когда правее большего элемента стоит меньший элемент:  $i_k > i_s$ , но  $k < s$ .

<sup>4</sup>Например, перестановки чисел 1, 2, 3: (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).

- Общий множитель элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя:

$$\det(a_1, \dots, \alpha p, \dots, a_n) = \alpha \cdot \det(a_1, \dots, p, \dots, a_n)$$

- К любой строке (столбцу) матрицы можно прибавлять линейную комбинацию других строк (столбцов) — определитель при этом не изменится:

$$\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \alpha_j a_j + a_i, \dots, a_n)$$

- При вычислении определителя матрицы вида  $\alpha A$  скаляр  $\alpha$  можно выносить за знак  $\det$  следующим образом:

$$\det \alpha A = \alpha^n \det A$$

**Задача (14.24(1)).** Вычислить определитель порядка  $n$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

**Решение.** Раскладываем определитель по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Рассмотрим первый из определителей во второй части равенства выше. Пользуясь свойствами определителя, его можно посчитать так:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1^{n-1} = 1$$

Если обозначит искомый определитель как  $\Delta_n$ , то второй из определителей в первой формуле есть просто  $\Delta_{n-1}$ . Итого,

$$\Delta_n = 1 - \Delta_{n-1}$$

Посмотрим на  $\Delta_n$  при  $n = 1, 2, \dots$ :

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= 1 \\ \Delta_2 &= 1 - 1 = 0 \\ \Delta_3 &= 1 - 0 = 1 \\ \Delta_4 &= 1 - 1 = 0 \\ \Delta_5 &= 1 - 0 = 1 \\ &\dots\end{aligned}$$

Очевидно<sup>5</sup>,

$$\Delta_n = \begin{cases} 1, 2 \nmid n \\ 0, 2 \mid n \end{cases} \equiv [2 \nmid n]^6$$

□

## 2. Системы линейных уравнений. Правило Крамера

Система  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

В матричном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Или так:

$$Ax = b$$

**Определение 2.1** (Решение системы).

$$\{x \in \mathbb{R}^N \mid Ax = b\}$$

**Определение 2.2.** Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если у неё нет решений.

**Определение 2.3.** Говорят, что система  $B$  следует из системы  $A$ , если множество решений  $B$  содержит множество решений  $A$  2.

**Теорема 2.1.** Пусть число уравнений в системе  $m$  равно числу неизвестных  $n$ . Тогда если  $\det A \neq 0$ , то система  $Ax = b$  имеет решение, и притом только одно.

**Теорема 2.2** (Правило Крамера). Пусть число уравнений в системе  $m$  равно числу неизвестных  $n$ . Тогда если  $\det A \neq 0$ , то

$$\begin{cases} x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \\ \Delta \equiv \det A \\ \Delta_i \equiv \det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n) \end{cases}$$

<sup>5</sup>  $a \div p \equiv p \mid a$

<sup>6</sup> Встречаются такие более короткие записи выражения индикатора (либо 0, либо 1 в зависимости от некоторого условия):  $[\cdot]$ ,  $I[\cdot]$ . Например, “ $b$  равно 3, если  $a$  равно 2; иначе  $b$  равно 17.5” можно записать так:  $b = 3 \cdot [a = 2] + 17.5 \cdot [a \neq 2]$ .



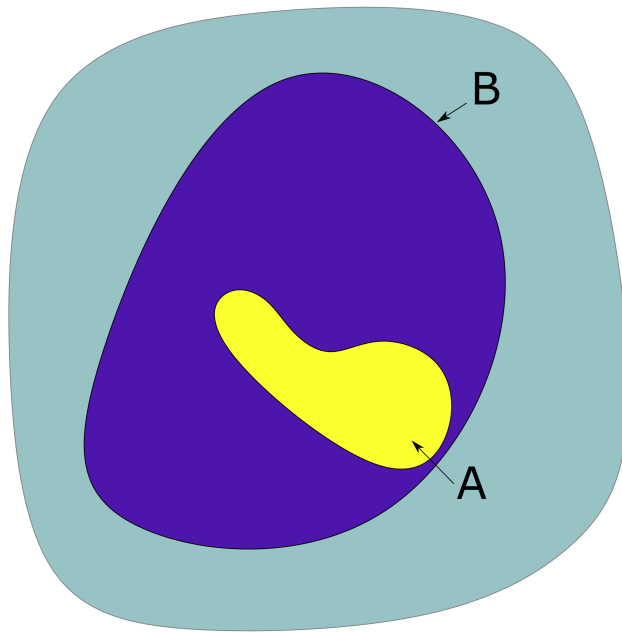


Рис. 2: Множество решений  $A$  содержится во множестве решений  $B$ .

**Задача** (17.2(4)).

$$\begin{cases} Ax = b \\ A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\ b = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} \end{cases}$$

*Решение.*

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} = -1$$

$$\Delta_1 = \det \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 \\ 10 & 7 & 2 \\ 9 & 2 & -4 \end{pmatrix} = -3 \Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -2 & 10 & 2 \\ 3 & 9 & -4 \end{pmatrix} = -2 \Rightarrow x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\Delta_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -2 & 7 & 10 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix} = -1 \Rightarrow x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

## 3. Дополнение

### 3.1. Определения определителя

Как отмечалось выше, существует несколько эквивалентных определений  $\det$ . Один из способов — с помощью формулы (1). Приведём далее ещё пару.

**Определение 3.1** (Через свойства<sup>7</sup>). Функция  $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  называется определителем (детерминантом) и обозначается  $\det$ , если

- Функция  $f$  является линейным однородным многочленом от элементов любой строки:

$$\begin{cases} f(A) = h_1 a_{i1} + \dots + h_n a_{in} \\ 1 \leq i \leq n \\ h_j = h_j(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n), 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

то есть коэффициенты в разложении по элементам строки не зависят от этой самой строки.

- Значение  $f$  на вырожденной матрице<sup>8</sup> равно нулю 0.
- Значение  $f$  на единичной матрице  $E_{n \times n}$  равно единице 1.

**Определение 3.2** (Через формулу, вариант 2: рекурсивный). Положим определитель матрицы из одного элемента равным этому самому элементу

$$\det(a) \equiv a$$

Пусть  $d_{ij}$  — определитель подматрицы  $D_{ij}$  матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , которая получается при вычёркивании  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца. Тогда

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} d_{ij}$$

где  $i$  — любая строка матрицы  $A$  (не важно, какая — значение функции  $\det$  не изменится).

**Определение 3.3** (Через свойства, вариант 2<sup>9</sup>). Функция  $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  называется определителем (детерминантом) и обозначается  $\det$ , если

- Функция  $f$  полилинейна по строкам матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (2).
- Функция  $f$  кососимметрична по строкам матрицы  $A$  (3).
- Значение  $f$  на единичной матрице  $E_{n \times n}$  равно единице 1.

**Определение 3.4** (Через свойства, вариант 3<sup>10</sup>). Функция  $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  называется определителем (детерминантом) и обозначается  $\det$ , если

- Функция  $f$  полилинейна по строкам матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (2).
- Значение  $f$  на матрице с двумя одинаковыми строками равно нулю 0 (4).
- Значение  $f$  на единичной матрице  $E_{n \times n}$  равно единице 1.

<sup>7</sup>Беклемишев Д. В. «Курс аналитической геометрии и линейной алгебры»

<sup>8</sup>У которой строки линейно зависимы

<sup>9</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Determinant>

<sup>10</sup>Hans Schneider, George Phillip Barker. «Matrices and Linear Algebra»

### 3.2. Задача про определитель `np.arange(n * n).reshape(n, -1)`

Посчитаем определитель матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \stackrel{(3)=(3)-(2)}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \stackrel{(2)=(2)-(1)}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

так как определитель матрицы с двумя одинаковыми строками равен нулю (4).

Рассмотрим более общий случай (для матрицы произвольной размерности):

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-2) \cdot n+1 & (n-2) \cdot n+2 & (n-2) \cdot n+3 & \dots & (n-1) \cdot n \\ (n-1) \cdot n+1 & (n-1) \cdot n+2 & (n-1) \cdot n+3 & \dots & n \cdot n \end{pmatrix} \\ & \stackrel{(n)=(n)-(n-1)}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-2) \cdot n+1 & (n-2) \cdot n+2 & (n-2) \cdot n+3 & \dots & (n-1) \cdot n \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix} \\ & \stackrel{(2)=(2)-(1)}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n & n & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-2) \cdot n+1 & (n-2) \cdot n+2 & (n-2) \cdot n+3 & \dots & (n-1) \cdot n \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix} \\ & = 0 \end{aligned}$$

И в общем случае определитель равен нулю!

При этом стоит отметить, что для  $n = 2$  и  $n = 1$  определитель всё-таки отличен от нуля:

$$\det(1) = 1$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$$

□