Семинар 2

Алексеев Василий

8 сентября 2020

Содержание

1. Вектора (-ы?)

Вектор — направленный отрезок (1). Вектор можно обозначать одной строчной буквой, например $\boldsymbol{a}$, или двумя: началом и концом, например $\overrightarrow{AB}$.

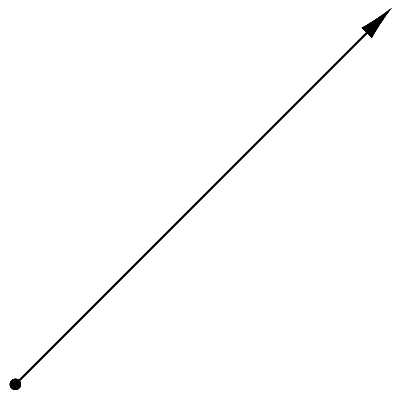

Рис. 1: Вектор характеризуется направлением и величиной.

Определение 1.1 (Коллинеарность)**.** Два ненулевых вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются *коллинеарными*, если существует прямая, которой они параллельны. Коллинеарность обозначается $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$. Если при этом $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ направлены в одну сторону, то можно писать $\boldsymbol{a} \upuparrows \boldsymbol{b}$, если в разные стороны — $\boldsymbol{a} \updownarrows \boldsymbol{b}$. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Определение 1.2 (Компланарность)**.** Три ненулевых вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны. Три вектора, два из которых ненулевые, а третий нулевой, всегда компланарны.

Определение 1.3 (Равенство векторов)**.** Будем считать два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равными, если они

- равны по длине $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$
- коллинеарны $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$
- одинаково направлены $\boldsymbol{a} \upuparrows \boldsymbol{b}$

Точка приложения при равенстве не учитывается[1].

На множестве векторов определены следующие операции:

- Сложение векторов:
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$
- Умножение вектора $\boldsymbol{a}$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$. Результирующий вектор обозначается как $\alpha\boldsymbol{a}$ и определяется свойствами:
$$\begin{cases} |\alpha\boldsymbol{a}| = |\alpha| \cdot |\boldsymbol{a}| \\ \alpha\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{a} \\ \begin{cases} \alpha\boldsymbol{a} \upuparrows \boldsymbol{a}, \alpha > 0 \\ \alpha\boldsymbol{a} \updownarrows \boldsymbol{a}, \alpha < 0 \end{cases} \end{cases}$$

[1] То есть получается, что можно нарисовать несколько несовпадающих, но равных векторов. Хотя в зависимости от конкретной задачи может быть важным различать векторы с разной точкой приложения. Например, в физике, при действии сил на тело.

Множество векторов в $\mathbb{R}^3$ с введёнными операциями сложения и умножения на число из $\mathbb{R}$ образуют линейное пространство. Но рассмотрим векторы на одной прямой: сложение и умножение на число не выводят с прямой. То же самое с векторами на плоскости: сложение и умножение на число даёт вектор, также лежащий в той же плоскости. Таким образом, не только векторы из всего $\mathbb{R}^3$ образуют линейное пространство, но и векторы, параллельные одной прямой, и векторы, параллельные одной плоскости. Множество векторов из одного нулевого вектора также образуют линейное пространство. Таким образом,

- нульмерное векторное пространство — нулевой вектор
- одномерное векторное пространство

$$\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{v} \parallel l\}, \quad l \text{ — прямая}$$

- двумерное векторное пространство

$$\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{v} \parallel \alpha\}, \quad \alpha \text{ — плоскость}$$

- трёхмерное векторное пространство — $\mathbb{R}^3$

Определение 1.4. Линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$:

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le n$$

Нетривиальная линейная комбинация — когда хотя бы один их коэффициентов α_i отличен от нуля: $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 0$.

Определение 1.5 (Линейно зависимая система векторов)**.** Система векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называется линейно зависимой, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору:

$$\begin{cases} \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0} \\ \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 > 0 \end{cases}$$

Пример. Система из одного нулевого вектора линейно зависима.

Теорема 1.1. *Система из $k > 1$ вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов системы представим как линейная комбинация остальных.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ — линейно зависимы. Это значит, что

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

и некоторый $\alpha_j \neq 0$. Поэтому

$$\alpha_j = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq j}} -\frac{\alpha_i}{\alpha_j} \boldsymbol{a}_i$$

И наоборот, пусть некоторый $\boldsymbol{a}_j$ представим как линейная комбинация остальных векторов из набора с коэффициентами α_i':

$$\boldsymbol{a}_j = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq j}} \alpha_i' \boldsymbol{a}_i$$

Тогда
$$\alpha_1'\boldsymbol{a}_1 + \ldots + (-1)\cdot\boldsymbol{a}_j + \ldots + \alpha_n'\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$
и по крайней мере один коэффициент -1 в линейной комбинации векторов $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1}^n$ не равен нулю. □

Теорема 1.2.
- *Один вектор линейно зависим ⇔ это нулевой вектор.*
- *Два вектора линейно зависимы ⇔ эти векоры коллинеарны.*
- *Три ветора линейно зависимы ⇔ эти векторы компланарны.*
- *Любые четыре вектора линейно зависимы*[2]

Определение 1.6 (Базис)**.** Базисом в пространстве называется

- упорядоченная
- линейно независимая
- полная[3]

система векторов.

Задача (1.6)**.**

Решение. □

Задача (1.11(1))**.**

Решение. □

Задача (1.24(1))**.**

Решение. □

Задача (1.51)**.**

Решение. □

Задача (1.39)**.**

Решение. □

Задача (1.37)**.**

Решение. □

Задача (1.36)**.**

Решение. □

2. Дополнение

2.1. Про центр масс

[2]Мы в $\mathbb{R}^3$.
[3]Любой вектор пространства модет быть разложен по системе.