Семинар 2

Алексеев Василий

18 февраля + 19 февраля 2020

Содержание

1. Линейные пространства: подпространства, базис

2. Задачи

2.1. # 20.3(4)

Выяснить, является ли линейным подпространством следующее множество векторов в n-мерном пространстве: множество векторов $\mathscr{V}$, сумма координат которых равна 1.

Решение. Пусть $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathscr{V}$. При этом $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$[1]. Тогда сумма векторов

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

И сумма координат у суммы:

$$\sum_i (a_i + b_i) = \sum_i a_i + \sum_i b_i = 1 + 1 = 2 \neq 1$$

$\mathscr{V}$ не замкнуто относительно суммы векторов (при умножении вектора на число тоже можно получить "не то"), поэтому не является подпространством. □

2.2. # 20.18

Доказать, что четыре матрицы

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \right\} \tag{1}$$

образуют базис в пространстве квадратных матриц порядка 2.

Далее найти компоненты матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$$

в этом базисе.

Решение. Покажем, что четыре матрицы (1) в самом деле можно взять в качестве базиса. Для этого можно просто проверить, как по системе раскладывается нулевая матрица (если единственной решение — тривиальное, то система линейно независима). Итак, составляем линейную комбинацию матриц (1) и приравниваем её нулевой:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = 0$$

□

Составляем систему:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma + 3\zeta = 0 \\ \alpha + \beta \qquad + 5\zeta = 0 \\ -\alpha + 5\beta + \gamma + 4\zeta = 0 \\ \alpha + 3\beta + \gamma + 7\zeta = 0 \end{cases}$$

[1]Как часто уже было и ещё будет, равенство между вектором и столбцом из компонент в данном случае — это не совсем "равенство". Это значит, что множество векторов изоморфно множеству столбцов, состоящих из компонент векторов в фиксированном базисе.

И решаем её методом Гаусса (на каждом шаге цветом выделен элемент, который используем для “устранения” других ненулевых в том же столбце[2]):

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \mathbf{-1} & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 21 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & 6 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Таким образом, векторы-матрицы линейно независимы[3]. Их четыре (в четырёхмерном пространстве), поэтому это — полная система. Поэтому их можно взять в качестве базиса.

Чтобы теперь разложить матрицу $\left(\begin{smallmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{smallmatrix}\right)$ по базису, надо представить её в виде их линейной комбинации (решение точно будет существовать, притом единственное, так как система матриц (1) — базис):

$$
\alpha \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}
$$

Расширенная матрица системы:

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & 6 \\ -1 & 5 & 1 & 4 & 14 \\ 1 & 3 & 1 & 7 & 13 \end{array}\right)
$$

Далее с расширенной матрице можно провести те же элементарные преобразования строк, что и в случае (2). При этом можно работать только с последним столбцом (так как для матрицы уже “всё сделано”):

$$
\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 19 \\ 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 26 \\ 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -19 \\ 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 19/9 \\ 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -37/9 \\ 4/9 \\ 19/9 \\ -33/9 \end{pmatrix}
$$

Поэтому коэффициенты в разложении

$$
(\alpha, \beta, \gamma, \zeta) = \left(-\frac{37}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{33}{9}, \frac{19}{9}\right)
$$

[2] И каждый раз такой элемент выбирается в новой строке.

[3] Можно бы было доказывать линейную независимость не “через матрицы”, а “через вектора” (если так приятнее). То есть каждую матрицу из (1) можно бы было “развернуть” в столбец. Например, первой матрице $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ можно бы было сопоставить столбец $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^T$ (и оставшимся матрицам — по такому же правилу). После этого, возможно, было бы немного “приятнее” составлять линейную комбинацию из векторов-столбцов и приравнивать её нулевому столбцу. В итоге же всё равно можно бы было прийти к системе линейных уравнений. Линейная же зависимость матриц и “развёрнутых столбцов” равносильны, потому что множества матриц второго порядка и столбцов размера четыре (которые сопоставляются матрицам по конкретному правилу) изоморфны.

2.3. # 20.22(3)

Найти размерность и базис подпространства[4]

$$\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\ 6 & -2 & 4\\ -15 & 5 & -10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = 0\right\}$$

Решение. Приводим матрицу к упрощённому виду, выражаем базисные переменные через свободные:

$$\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\ 6 & -2 & 4\\ -15 & 5 & -10\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \leftrightarrow -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 3x_1 + 2x_3$$

Таким образом, решение системы:

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ 3\alpha + 2\gamma\\ \gamma\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

Вектора базиса найдены, их два, поэтому размерность подпространства равна двум.

□

[4]Система $Ax = 0$ в самом деле определяет подпространство: можно проверить замкнутость относительно сложения векторов и умножения вектора на число.