Семинар 8

Алексеев Василий

31 марта + 4 апреля 2023

Содержание

1 Diag 1. Часть 2 **1**

1.1 Инвариантность характеристического многочлена 1

1.2 Собственные подпространства преобразования 1

1.3 Инвариантные подпространства преобразования 2

2 Задачи **3**

2.1 # 24.42(1) 3

2.2 # 24.70 5

2.3 # 24.55(1) 6

1. Diag 1. Часть 2

1.1. Инвариантность характеристического многочлена

Пусть $\phi\colon X \to X$ линейное преобразование вещественного линейного пространства X размерности n. Пусть в X выбран некоторый базис $e = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$, в котором матрица преобразования ϕ есть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Тогда собственные значения *преобразования* (то есть все числа $\lambda \in \mathbb{R}$, такие что $\phi(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$ для хотя бы одного ненулевого вектора $\boldsymbol{x}$) можно было искать как действительные корни характеристического уравнения *матрицы* этого преобразования:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \tag{1}$$

В этом месте стоило задаться вопросом: а корректен ли такой способ поиска собственных значений? В том смысле, не получится ли так, что у характеристического уравнения для матрицы A преобразования ϕ в базисе e будут одни корни, а у характеристического уравнения для матрицы A' *того же* преобразования ϕ, но уже в *другом* базисе e', корни будут другие? Пусть "старый" и "новый" базисы связаны матрицей перехода: $e' = eS$, $S \in \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det S \neq 0$. Тогда матрица A' в "новом" базисе e' так выражается через матрицу A в "старом" базисе e: $A' = S^{-1}AS$. Распишем характеристический многочлен матрицы A':

$$\begin{aligned}
\det(A' - \lambda E) &= \det(S^{-1}AS - \lambda S^{-1}S) \\
&= \det\big(S^{-1} \cdot (A - \lambda E) \cdot S\big) \\
&= \det S^{-1} \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det S = \det(A - \lambda E)
\end{aligned}$$

То есть характеристические многочлены матриц одного и того же преобразования в разных базисах совпадают! Получается, будут одинаковыми все коэффициенты в характеристических многочленах, стоящие при λ в одинаковых степенях:

$$(-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}\operatorname{Sp} A' + \ldots + \det A' = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}\operatorname{Sp} A + \ldots + \det A$$

То есть у матриц A и A' преобразования ϕ совпадают след и определитель. Эти величины являются *инвариантами*, связанными с преобразованием, то есть они не зависят от выбора базиса. А раз совпадают характеристические многочлены, то и корни характеристических уравнений матриц A и A' будут одинаковыми (вплоть до кратностей). Поэтому характеристическое уравнение *матрицы* (1) можно называть характеристическим уравнением *преобразования*.

1.2. Собственные подпространства преобразования

Пусть найдено собственное значение $\lambda \in \mathbb{R}$ преобразования. Рассмотрим множество всех векторов L_λ, каждый из которых под действием ϕ остаётся параллелен себе с коэффициентом λ:

$$L_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in X \mid \phi(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}\} \tag{2}$$

то есть L_λ состоит из собственных векторов, относящихся к собственному значению λ, а также из нулевого вектора (который по определению собственным вектором не является). Покажем, что *L_λ есть подпространство в X*. Пусть $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in L_\lambda$. Тогда для их суммы имеем:

$$\phi(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \phi(\boldsymbol{x}_1) + \phi(\boldsymbol{x}_2) = \lambda\boldsymbol{x}_1 + \lambda\boldsymbol{x}_2 = \lambda(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)$$

то есть сумма $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ тоже вектор из L_λ. Аналогично $\alpha\boldsymbol{x} \in L_\lambda$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in L_\lambda$. Получается, L_λ замкнуто относительно операций сложения векторов и умножения вектора на число, поэтому является подпространством X.

Подпространство L_λ называется *собственным подпространством, соответствующим собственному значению* λ. Собственные векторы, относящиеся к λ, являются ненулевыми векторами L_λ.

Раз λ собственное значение, то оно будет корнем характеристического уравнения преобразования (1)[1]. Пусть кратность λ как корня есть $p \geq 1$. Что можно сказать о *размерности собственного подпространства* L_λ*, соответствующего* λ? Очевидно, $\dim L_\lambda \geq 1$. Также очевидно, что $\dim L_\lambda \leq n = \dim X$. Можно ли указать более точную верхнюю границу для $\dim L_\lambda$? Допустим, $\dim L_\lambda \equiv d > p$. Тогда в подпространстве L_λ можно выбрать d линейно независимых векторов. Дополним эту систему векторов до базиса e' пространства X. Что можно сказать про матрицу A' преобразования ϕ в этом базисе? Так как первые d векторов базиса e' собственные, то:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_{d} & & & & & \underbrace{\cdot \quad \cdot \quad \dots \quad \cdot}_{n-d} \end{pmatrix}$$

Но характеристическое уравнение такой матрицы[2]:

$$\det(A' - lE) = (\lambda - l)^d \cdot (\dots) = 0$$

и у него λ, очевидно, корень кратности как минимум d. Но такого не может быть, потому что корни вплоть до кратностей инварианты, а изначальная кратность p по предположению меньше d. Поэтому верно следующее утверждение.

Утверждение 1.1. *Пусть* λ *есть корень характеристического уравнения преобразования* ϕ *(1) кратности* $p \geq 1$. *Тогда размерность соответствующего собственного подпространства* L_λ *не превосходит* p.

1.3. Инвариантные подпространства преобразования

Посмотрим ещё раз на собственное подпространство L_λ (2). Заметим, что если $\boldsymbol{x} \in L_\lambda$, то

$$\phi\big(\phi(\boldsymbol{x})\big) = \phi(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda \phi(\boldsymbol{x})$$

то есть образ $\phi(\boldsymbol{x})$ любого вектора $\boldsymbol{x}$ из L_λ также лежит в L_λ. Тогда про подпространство L_λ говорят, что оно является инвариантным относительно преобразования ϕ.

Определение 1.1. Подпространство L' линейного пространства L называется *инвариантным* относительно преобразования $\phi\colon L \to L$, если $\forall \boldsymbol{x} \in L' \to \phi(\boldsymbol{x}) \in L'$. Иными словами, если $\phi(L') \subseteq L'$.

[1] Почему это верно? То есть обычно как, находим корни, и они — собственные значения. Почему верно наоборот: что если собственное значение, то обязательно корень?

[2] Из-за небольшой коллизии обозначений в этом месте пришлось вместо “стандартного” $\det(A - \lambda E) = 0$ написать $\det(A - lE) = 0$, то есть *переменная в уравнении* есть l, потому что λ уже означает *некоторое собственное значение*.

Пусть вектор $\boldsymbol{x}_1$ собственный, соответствующий λ, то есть $\phi(\boldsymbol{x}_1) = \lambda\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_1$ ненулевой. Тогда множество векторов $L_{\boldsymbol{x}_1} = \{\boldsymbol{x} \in X \mid \boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}_1, \alpha \in \mathbb{R}\}$, очевидно, будет одномерным подпространством. Но оно также будет инвариантно относительно ϕ:

$$\phi(\alpha\boldsymbol{x}_1) = \alpha\phi(\boldsymbol{x}_1) = \underbrace{\alpha \cdot \lambda}_{\beta\in\mathbb{R}} \boldsymbol{x}_1 = \beta\boldsymbol{x}_1$$

(то есть образ любого вектора вида $\alpha\boldsymbol{x}_1$ также лежит в $L_{\boldsymbol{x}_1}$, более того, $\alpha\boldsymbol{x}_1$ будет собственным при $\alpha \neq 0$, так как $\phi(\alpha\boldsymbol{x}_1) = \alpha \cdot \lambda\boldsymbol{x}_1 = \lambda \cdot \alpha\boldsymbol{x}_1$). Итого, на каждый собственный вектор $\boldsymbol{x}_1$ преобразования натянуто одномерное инвариантное подпространство.

Ести ли какие-нибудь “другие” примеры инвариантных подпространств?

Пример. Для любого преобразования $\phi\colon X \to X$ инвариантными будут нулевое подпространство $\{\boldsymbol{0}\}$ и всё пространство X.

Пример. Если λ_1 и λ_2 есть два различных собственных значения преобразования ϕ, то инвариантной будет сумма соответствующих собственных подпространств: $L_{\lambda_1} + L_{\lambda_2}$.

Пример. Вспомним про номер, в котором рассматривается преобразование ϕ геометрического трёхмерного пространства векторов $\mathscr{L}$, суть которого — ортогональная проекция на прямую $\mathscr{L}_1\colon x = y = z$ (базис ортонормированный). Формула преобразования: $\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{a}^2|}\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}$ есть направляющий вектор прямой $\mathscr{L}_1$. Матрица преобразования: $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Какие подпространства будут инвариантны относительно ϕ?

Очевидно, нулевое подпространство $\{\boldsymbol{0}\}$ и всё пространство $\mathscr{L}$ инвариантны.

Найдутся ли *одномерные* инвариантные подпространства? Да — очевидно, это сама прямая $\mathscr{L}_1$.

Найдутся ли *двумерные* инвариантные подпространства? Да — очевидно, это плоскость, перпендикулярная $\mathscr{L}_1$. А также... любая плоскость, *содержащая* $\mathscr{L}_1$. То есть все плоскости вида $\{t_1\boldsymbol{a} + t_2\boldsymbol{b} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$, где $\boldsymbol{b}$ есть некоторый вектор, не параллельный $\boldsymbol{a}$.

Заметим, что $\phi(\boldsymbol{a}) = 1 \cdot \boldsymbol{a}$, то есть вектор $\boldsymbol{a}$ собственный, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$. И через него, как через собственный вектор, проходит одномерное инвариантное подпространство. Так и получилось: это подпространство и есть прямая $\mathscr{L}_1$.

2. Задачи

2.1. # 24.42(1)

Найти собственные значения и собственные векторы дифференцирования $D\colon \mathscr{P}^{(n)} \to \mathscr{P}^{(n)}$ как линейного преобразования пространства многочленов степени не выше n.

Решение.

Способ 1: “Из определения”.

Ищем собственный многочлен в виде:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_{n-1}t^{n-1} + a_n t^n \tag{3}$$

Его образ:

$$\big(D(p)\big)(t) = a_1 + 2a_2 t + \ldots + na_n t^{n-1}$$

Раз $p(t)$ собственный, то должно найтись число $\lambda \in \mathbb{R}$ (собственное значение):

$$\begin{aligned} D(p) = \lambda p \leftrightarrow a_1 + 2a_2 t + \ldots + na_n t^{n-1} \\ = \lambda a_0 + \lambda a_1 t + \ldots + \lambda a_{n-1}t^{n-1} + \lambda a_n t^n \end{aligned} \tag{4}$$

Приравнивая коэффициенты при t в одинаковых степенях у многочленов "слева" и "справа", получаем систему:

$$\begin{cases} a_1 = \lambda a_0 \\ 2a_2 = \lambda a_1 \\ \vdots \\ na_n = \lambda a_{n-1} \\ 0 = \lambda a_n \end{cases}$$

Из последнего уравнения следует две возможности: $\lambda \neq 0$ (и a_n обязательно ноль) и $\lambda = 0$ (тогда a_n любой). Если $\lambda \neq 0$, то из предпоследнего уравнения следует $a_{n-1} = 0$. И далее, все коэффициенты получаются нулевыми, вплоть до a_1 (второе уравнение системы) и a_0 (первое уравнение). То есть в рассматриваемом случае $p \equiv 0$. Но собственный по определению не нулевой. Поэтому выбор $\lambda \neq 0$ ни к чему не привёл.

Пусть теперь $\lambda = 0$. Из предпоследнего уравнения следует $a_n = 0$. И таким образом зануляются все коэффициенты вплоть до a_2 (второе уравнение системы) и a_1 (первое уравнение). Но… про a_0 так ничего и не известно! То есть a_0 может быть любым. Получается, любой многочлен вида $p(t) = a_0$, $a_0 \neq 0$ будет собственным для $\lambda = 0$. И если бы требовалось, например, найти максимальную по числу линейно независимую систему из собственных векторов преобразования D, то это была бы, например, система из одного вектора $\{-17.5\}$.

Способ 2: "Стандартная схема".

Введём базис в пространстве многочленов $\mathscr{P}^{(n)}$. Например:

$$e = (1, t, t^2, \dots, t^{n-1}, t^n)$$

В этом базисе у многочлена p (3) будет координатный столбец $\xi = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)^T$, а у его образа $D(p)$ будет столбец $\eta = (a_1, 2a_2, \dots, na_n, 0)$.

В базисе e у преобразования D будет матрица $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$:

$$A\xi = \eta \quad \leftrightarrow \quad A\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ \vdots \\ na_n \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение матрицы:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \quad (\text{кратность } n+1)$$

Собственные векторы для единственного найденного $\lambda = 0$:

$$(A - \lambda E)\xi = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_0 \in \mathbb{R} \\ a_1, a_2, \dots, a_n = 0 \end{cases}$$

То есть собственные векторы, соответствующие $\lambda = 0$, это константные ненулевые многочлены. Собственное подпространство, соответствующее $\lambda = 0$, это одномерное подпространство с базисом, например, $\{-17.5\}$. $\square$

2.2. # 24.70

Пусть $\phi\colon L \to L$ линейное преобразование линейного пространства X. Доказать, что любое подпространство $L' \subseteq L$, содержащее $\operatorname{Im}\phi$, инвариантно.

Решение. Проверим инвариантность подпространства L' просто по определению:

$$\boldsymbol{x} \in L' \Rightarrow \phi(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{Im}\phi \subseteq L'$$

То есть, да, инвариантно.

(Решение получилось до неприличия коротким, поэтому попробуем далее немного "раскрутить сюжет" и заметить "что-нибудь интересное".)

Так как $\operatorname{Im}\phi \subseteq L' \subseteq L$, то

$$\dim\operatorname{Im}\phi \le \dim L' \le \dim L$$

Минимальное по размерности подпространство L', удовлетворяющее условию задачи, это $\operatorname{Im}\phi$. Максимальное по размерности — это всё L.

Если $L' \ne L$, то существует ненулевое прямое дополнение L'' подпространства L':

$$L' \oplus L'' = L$$

Выберем теперь базисы в L' и L''. Пусть это будут базисы $p = (\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_k)$ и $q = (\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_l)$ соответственно ($k = \dim L'$, $l = \dim L''$, $k + l = \dim L \equiv n$). Тогда можно в качестве базиса в L взять объединение базисов p и q:

$$e = (\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_l)$$

Какой будет матрица A преобразования ϕ в этом базисе? Можно выписать её по столбцам. Так, первый столбец — это координаты $\phi(\boldsymbol{p}_1)$ в e. Единственное, что можно сказать про $\phi(\boldsymbol{p}_1)$ — это то, что $\phi(\boldsymbol{p}_1) \in \operatorname{Im}\phi$, а потому и $\phi(\boldsymbol{p}_1) \in L'$, и, значит, раскладывается по базису p. Аналогично и с образами остальных векторов базиса e. Поэтому матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Причём $\operatorname{Rg} A = \dim\operatorname{Im}\phi$, а потому из k ненулевых строк можно максимум выбрать $\dim\operatorname{Im}\phi$ линейно независимых.

Пусть в качестве L' выбрано просто $\operatorname{Im}\phi$ (один из "граничных случаев", минимальное по размерности L'). Тогда в матрице преобразования первые $\operatorname{Im}\phi$ строчек будут и ненулевыми, и линейно независимыми. Также можно заметить, что в этом случае размерность прямого дополнения L'' получается равной:

$$\dim L'' = \dim L - \dim L' = \dim L - \dim\operatorname{Im}\phi = \dim\operatorname{Ker}\phi$$

то есть равна размерности ядра преобразования $\operatorname{Ker}\phi$! Однако значит ли это, что L'' обязательно и есть ядро?.. На самом деле, нет, может, и не ядро. Потому что если $\operatorname{Ker}\phi \cap \cap \operatorname{Im}\phi \neq \{\mathbf{0}\}$, то их сумма не прямая и $\operatorname{Ker}\phi$ не будет прямым дополнением $\operatorname{Im}\phi$[3]. □

2.3. # 24.55(1)

Пусть $\phi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ есть линейное преобразование квадратных матриц второго порядка, заданное формулой:

$$\phi(X) = AX, \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Надо найти собственные значения и максимальную линейно независимую систему собственных векторов преобразования ϕ. В случае, если эта система из собственных векторов может быть выбрана в качестве базиса, записать в нём матрицу преобразования ϕ.

Решение. Пойдём по “стандартной схеме”: найдём собственные значения из характеристического уравнения $\det(A-\lambda E) = 0$, потом для каждого собственного значения λ_i будем искать собственные векторы как решения соответствующей однородной системы с матрицей $(A - \lambda_i E)$.

Характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases}$$

Собственные векторы для λ_1:

$$(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{x} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2023 \end{pmatrix}}$$

Собственные векторы можно либо просто подобрать, глядя на матрицу (и понимая при этом, сколько линейно независимых векторов должно получиться: в данном случае это всего один вектор $\boldsymbol{x}_1$, так как в системе $(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ одна параметрическая неизвестная — переменная x_2). Либо можно просто по-честному решить систему, получив базис в пространстве решений (фундаментальную матрицу) — этот базис и будет давать максимальную линейно независимую систему собственных векторов для λ_1 (базис в соответствующем собственном подпространстве).

Собственные векторы для λ_2:

$$(A - \lambda_2 E)\boldsymbol{x} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Снова всего один собственный вектор, который тоже несложно подобрать из по сути единственного уравнения системы $x_1 + 8x_2 = 0$.

[3] А у какого преобразования, например, ядро будет иметь ненулевое пересечение со множеством значений?

Получается, нашли собственные векторы $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$, их два. Можно взять в качестве базиса систему $e' = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$. В этом базисе из собственных векторов матрица A' преобразования будет иметь вид:

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

где на диагонали стоят собственные значения, которые соответствуют векторам базиса e' из собственных векторов, так как $\phi(\boldsymbol{x}_1) = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1$ и $\phi(\boldsymbol{x}_2) = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2$.

Нашли базис из собственных векторов, получили диагональный вид матрицы преобразования ϕ. Преобразования квадратных матриц второго порядка $\mathbb{R}^{2\times 2}$... размерности *четыре*... Но мы нашли базис $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ — в котором всего *два* вектора!?..

Какой сейчас год?.. Какой сейчас год?.. АААААААААААА! ■