Семинар 4

Алексеев Василий

28 февраля + 3 марта 2023

Содержание

1. Линейные пространства 2

1.1. Пересечение, сумма, прямая сумма, или “Объединение: Они не знают, что “подпространство” — это объединение слов “под” и “пространство”

Приведём сразу определения понятий, которым посвящён конспект.

Определение 1.1. *Пересечением* двух подпространств L_1 и L_2 линейного пространства L называется подпространство, вектора которого — пересечение множеств векторов подпространств L_1 и L_2:

$$L_1 \cap L_2 = \{\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in L_1, \boldsymbol{v} \in L_2\}$$

Не сложно убедиться в том, что пересечение подпространств — это в самом деле тоже подпространство:

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L_1 \cap L_2 \Rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in L_1 \cap L_2$$

$$\boldsymbol{x} \in L_1 \cap L_2, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\boldsymbol{x} \in L_1 \cap L_2$$

Определение 1.2 (Сумма)**.** *Суммой* двух подпространств L_1 и L_2 линейного пространства L называется линейная оболочка объединения векторов подпространств L_1 и L_2:

$$L_1 + L_2 = \mathscr{L}(L_1 \cup L_2)$$

Сумма подпространств — тоже подпространство. Потому что если $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ находятся в $L_1 + L_2$, то они каждый являются линейными комбинациями векторов $L_1 \cup L_2$. Очевидно, что и сумма $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, и результат умножения на число $\alpha\boldsymbol{x}$ — все тоже будут линейными комбинациями векторов объединения, а потому тоже лежат в сумме $L_1 + L_2$.

(“Подготовим почву” для следующего определения.) Пусть известны базисы в подпространствах L_1 и L_2: $p = (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_l)$ и $q = (\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_m)$ соответственно ($l, m \leq n$, где n — размерность всего пространства L). Тогда каждое подпространство можно представить как линейную оболочку векторов соответствующего базиса:

$$L_1 = \mathscr{L}(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_l), \quad L_2 = \mathscr{L}(\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_m)$$

Получается, L_1 — линейная оболочка, L_2 — линейная оболочка, их сумма $L_1 + L_2$ — тоже... Не сложно прийти к выводу, что сумму можно представить просто как совокупность линейных комбинаций объединения базисных векторов $p \cup q$ складываемых подпространств:

$$L_1 + L_2 = \mathscr{L}(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_l, \boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_m) \tag{1}$$

Система $p \cup q$ из $l + m$ векторов полная в $L_1 + L_2$. Поэтому $\dim(L_1 + L_2) \leq l + m$. Но объединение базисов $p \cup q$ может давать линейно зависимую систему, и тогда она не будет базисом в $L_1 + L_2$. Таким образом, в общем случае про размерность суммы известно:

$$\dim(L_1 + L_2) \leq \dim L_1 + \dim L_2$$

Однако может всё-таки оказаться и так, что “куча” из всех базисных векторов $p \cup q$ тоже представляет линейно независимую систему. В таком случае приходим к понятию...

Определение 1.3 (Прямая сумма)**.** *Прямой суммой* двух подпространств L_1 и L_2 линейного пространства L называется их сумма $L_1 + L_2$ в том случае, если $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$ (1). Обозначается прямая сумма как $L_1 \oplus L_2$[1].

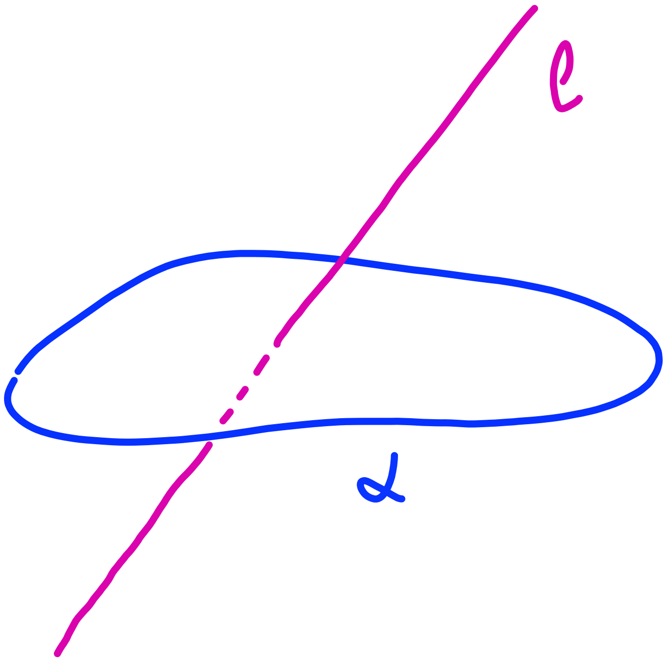

Рис. 1: Пример прямой суммы: $l + \alpha$, где l — прямая (одномерное векторное подпространство геометрического пространства векторов), а α — плоскость (двумерное подпространство). Стоит также отметить, что то, что нарисовано на картинке — это на самом деле не совсем описанные только что l и α. Нарисованные — это геометрические объекты “прямая” и “плоскость”, состоящие из точек. Векторные же подпространства (одномерное “прямая” и двумерное “плоскость”) — это множества векторов, которые “плавают”, у которых нет определённого “положения” (а потому и нарисовать такие подпространства вообще, по-честному, нельзя — по крайней мере оба на одной картинке).

Аналогично определяется и прямая сумма более двух подпространств.

Существует несколько критериев проверки того, что сумма подпространств прямая.

Утверждение 1.1 (Один из возможных “критериев прямоты”). *Сумма $S = L_1 + \ldots + L_m$ $m \geq 2$ прямая тогда и только тогда, когда для любого $\boldsymbol{x} \in S$ существует* единственное *представление*

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \boldsymbol{x}_m, \quad \begin{cases} \boldsymbol{x}_i \in L_i \\ i = 1, \ldots, m \end{cases} \tag{2}$$

В одну сторону “очевидно”: если сумма прямая, то базис суммы — объединение базисов. Раскладывая произвольный вектор суммы по такому объединённому базису и приходим к сумме вида (2):

$$\boldsymbol{x} = \overbrace{(\text{лин. к-я базисных из } L_1) + \ldots + (\text{лин. к-я базисных из } L_m)}^{\text{лин. к-я базисных суммы } S}$$

Чтобы доказать часть критерия, которая в другую сторону, можно показать, что базис суммы в самом деле можно получить объединением базисов слагаемых. Раз любой $\boldsymbol{x}$ из S можно единственным образом представить в виде (2), то так можно сделать и, например, с первым базисным вектором $\boldsymbol{p}_{11}$ подпространства L_1. Но вот его очевидное разложение

[1] Обозначение другое, хотя по сути это та же сумма $L_1 + L_2$. Можно провести аналогию с объединением множеств и *дизъюнктным* объединением.

вида (2):

$$\boldsymbol{p}_{11} = \underbrace{\boldsymbol{p}_{11}}_{L_1} + \overbrace{\boldsymbol{0} + \ldots + \boldsymbol{0}}^{L_2, \ldots, L_m}$$

и, получается, других подобных нет (при этом в рамках одного лишь подпространства L_1 у вектора $\boldsymbol{p}_{11}$ может быть и больше одного возможного разложения, но это не и не важно). Почему размерность суммы вообще может получиться меньше, чем сумма размерностей? Такое может произойти тогда, когда хотя бы один базисный вектор $\boldsymbol{p}_{ij}$ одного из подпространств L_i ($i \le m$, $j \le \dim L_i$) при объединении всех базисных становится “лишним”: то есть его можно представить как линейную комбинацию остальных базисных L_i и базисных векторов других подпространств суммы. Но это ещё одно разложение! отличное от очевидного $\boldsymbol{p}_{ij} = \boldsymbol{p}_{ij}$. А такого по условию быть не может. Значит, объединение базисов — линейно независимая система.

Определение 1.4. Если $S = L_1 \oplus L_2$, то *проекцией* $\pi_{L_1}(\boldsymbol{x})$ *вектора* $\boldsymbol{x} \in S$ *на подпространство* L_1 *параллельно* L_2 называется его составляющая при разложении (2), которая лежит в L_1:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_1 \in L_1, \boldsymbol{x}_2 \in L_2 \end{cases} \to \boxed{\boldsymbol{x}_1 = \pi_{L_1}(\boldsymbol{x})}$$

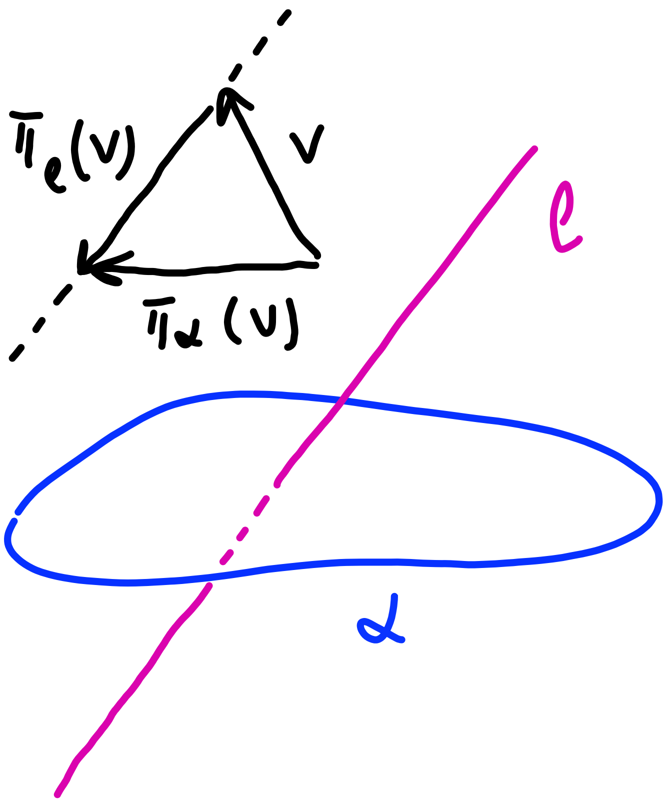

Рис. 2: Пример разложения вектора $\boldsymbol{x}$ в сумму $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, где $\boldsymbol{x}_1 \in l$ и $\boldsymbol{x}_2 \in \alpha$, а l — прямая (одномерное векторное подпространство геометрического пространства векторов) и α — плоскость (двумерное подпространство). Так как сумма приведённых прямой и плоскости прямая $l \oplus \alpha$, то, например, $\boldsymbol{x}_1$ будет проекцией $\boldsymbol{x}$ на l параллельно α.

Утверждение 1.2 (Ещё один “критерий прямоты”). *Сумма $S = L_1 + \ldots + L_m$ $m \geq 2$ прямая тогда и только тогда, когда пересечение каждого из подпростанств с суммой всех остальных даёт нулевое подпространство:*

$$\begin{cases} L_i \cap \sum_{j \neq i} L_j = \mathbf{0} \\ i = 1, \ldots, m \end{cases} \tag{3}$$

Этот критерий уже может показаться не таким очевидным (что в одну, что в другую сторону)... Но на самом деле понять его тоже не так сложно.

Если сумма прямая, то объединение базисных даёт базис. А это и значит, что не может оказаться так, что есть ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$ одновременно и в L_i (раскладывается по базисным L_i), и в $\sum_{j \neq i} L_j$ (раскладывается по объединению базисных $L_j, j \neq i$ — итого, получается уже как минимум *два разложения* вектора $\boldsymbol{x}$ из суммы *по базису* суммы).

В другую сторону... Вообще, почему может быть сложно сразу “принять” условие (3)? Потому что по аналогии со множествами кажется, что надо бы было потребовать равенства нулевому подпространству просто попарных пересечений $L_i \cap L_j$, $i \neq j$. Но одно из главных отличий суммы подпространств от объединения множеств (помимо того, что в одном случае участвуют “подпространства”, а в другом — “множества”) состоит в том, что в результате суммы могут получиться векторы, *которых до этого не было ни в одном из подпространств-слагаемых* (3)! Поэтому и мало требовать лишь $L_i \cap L_j = \mathbf{0}$, ведь в сумме $\sum_{j \neq i} L_j$ вполне может появиться “что-то новое”. И условие (3) по сути и обеспечивает то, что все базисные всех складываемых подпространств точно останутся “важными” и при объединении базисов.

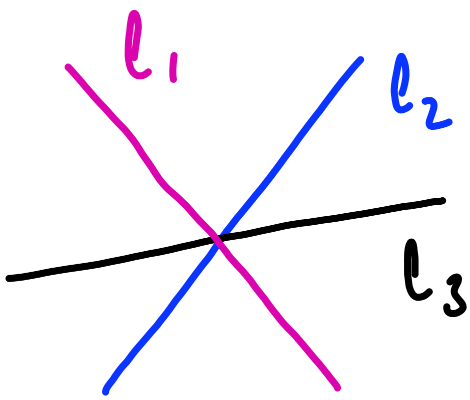

Рис. 3: Пример трёх одномерных подпространств: прямые l_1, l_2, l_3, лежащие в одной плоскости. Их сумма не прямая, хотя все попарные пересечения $l_i \cap l_j$, $i \neq j$ дают нулевое подпространство.

1.2. Пример на пересечение и сумму из аналитической геометрии, где от самой аналитической геометрии по сути лишь “художественное условие”, а после перехода к координатам природа объектов “отходит на второй план”

Возьмём трёхмерное пространство векторов — направленных отрезков. И рассмотрим в нём два подпространства: плоскость α (L_1) и не параллельную ей плоскость β (L_2). Очевидно, в этом случае плоскости *пересекаются* по прямой, то есть множество векторов, общих и для α, и для β, образует прямую (4). Как найти эту прямую?

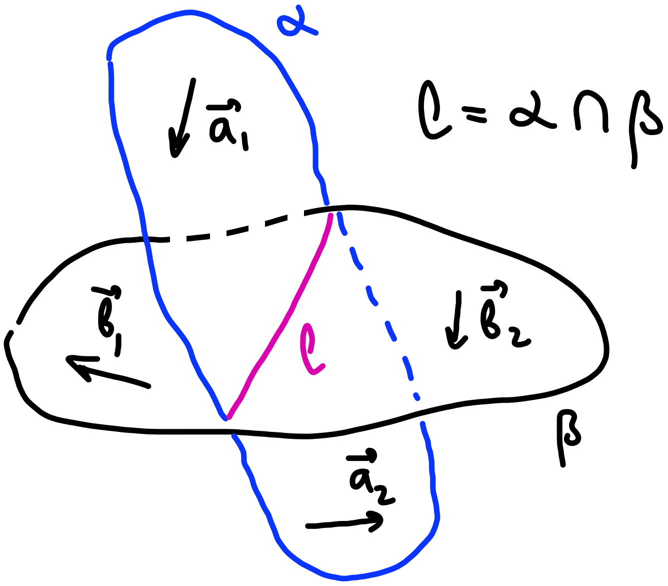

Рис. 4: Две плоскости α и β (двумерные подпространства геометрического пространства векторов) пересекаются по прямой l.

Пусть в пространстве выбран ортонормированный базис. И пусть известно, что вектор нормали плоскости α есть вектор $\boldsymbol{n}_1(0, 1, 0)$, а вектор нормали плоскости β есть $\boldsymbol{n}_2(1, 0, 0)$. Тогда на плоскости α можно выбрать базис $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ с векторами $\boldsymbol{a}_1(1, 0, 1)$ и $\boldsymbol{a}_2(1, 0, 0)$. А на плоскости β базисом может быть пара векторов $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$, где $\boldsymbol{b}_1(0, 1, 1)$ и $\boldsymbol{b}_2(0, 1, 0)$.

Зная базисы, подпространства можно описать следующим образом:

$$L_1 = \mathscr{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \{t_1\boldsymbol{a}_1 + t_2\boldsymbol{a}_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$L_2 = \mathscr{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = \{h_1\boldsymbol{b}_1 + h_2\boldsymbol{b}_2 \mid h_1, h_2 \in \mathbb{R}\}$$

Что есть пересечение $L_1 \cap L_2$? По определению это:

$$L_1 \cap L_2 = \{\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in L_1, \boldsymbol{v} \in L_2\}$$

При этом условия принадлежности вектора $\boldsymbol{v}$ из пересечения $L_1 \cap L_2$ каждому из подпространств L_1 и L_2 по отдельности можно представить так ($\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$):

$$\underbrace{\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2}_{\boldsymbol{v} \in L_1} = \boldsymbol{v} = \underbrace{\beta_1\boldsymbol{b}_1 + \beta_2\boldsymbol{b}_2}_{\boldsymbol{v} \in L_2} \tag{4}$$

Приравняв представления $\boldsymbol{v}$ через базисные из разных подпространств и собрав потом все слагаемые в одной части, получим:

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 - \beta_1\boldsymbol{b}_1 - \beta_2\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$$

Иными словами, то, что вектор $\boldsymbol{v}$ лежит в пересечении, равносильно существованию коэффициентов α_1, α_2, β_1 и β_2, при сложении с которыми векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $-\boldsymbol{b}_1$ и $-\boldsymbol{b}_2$ дают в сумме ноль. Найдя эти коэффициенты, найдём и пересечение. (При этом можно заметить, что если система $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ линейно независима, то только их тривиальная линейная комбинация равна нулю, и потому в пересечении $L_1 \cap L_2$ будет только нулевой вектор.)

Далее можно от работы с векторами (направленными отрезками) перейти к работе с их координатными столбцами:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Упростив матрицу полученной системы, получаем решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\beta_2 \\ \alpha_2 = \beta_2 \\ \beta_1 = -\beta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Вернёмся к "двоякому представлению" вектора из пересечения подпространств L_1 и L_2 (4), подставив найденные коэффициенты:

$$L_1 \ni -t\boldsymbol{a}_1 + t\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{v} = -t\boldsymbol{b}_1 + t\boldsymbol{b}_2 \in L_2$$

$$t(\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1) = t(\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1)$$

Левая и правая части равны, но вектор слева, натянутый на $\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1$, лежит в L_1, а вектор справа, натянутый на $\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1$, лежит в L_2. Подставляя координаты векторов, можно убедиться, что равенство в самом деле выполняется[2]:

$$\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1$$

Таким образом, пересечение, как и предполагалось изначально (из "геометрических соображений"), получилось одномерным. И в качестве базиса в нём можно выбрать, например, $\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1$.

Как искать сумму $L_1 + L_2$? Можно воспользоваться (1): чтобы найти базис в сумме, надо объединить базисы слагаемых $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ и убрать "лишние" векторы. Как понять, какие лишние? Можно составить матрицу из координатных столбцов векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ и упростить её методом Гаусса: элементарные преобразования строк не меняют линейной зависимости между столбцами, поэтому базисные столбцы в упрощённой матрице будут соответствовать векторам, которые и составляют базис в сумме $L_1 + L_2$.

Но матрица уже была упрощена ранее (см. (5), только в третьем и четвёртом столбцах стояли компоненты векторов $-\boldsymbol{b}_1$ и $-\boldsymbol{b}_2$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[2]Символ $\leftrightarrow$ в этой формуле, до этого, и далее в конспекте, если ещё встретится, означает "взаимно однозначное соответствие". В том смысле, который должен быть понятен из контекста. Например, векторы линейного пространства можно отождествлять с их координатными столбцами в выбранном базисе (в этом случае можно бы было вообще просто "равно" = использовать, но хотя бы один раз, "показательно", поставим именно "стрелку" $\leftrightarrow$).

Видно, что первые три столбца — базисные. Значит, базис суммы — это, например, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)$. Также видно, что последний столбец в упрощённой матрице раскладывается по базисным следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Можно убедиться, что точно такая же зависимость есть и между столбцами исходной матрицы:

$$(-\boldsymbol{b}_2) = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + (-\boldsymbol{b}_1)$$

Глядя на упрощённую матрицу (5), можно ещё заметить следующее. Столбцов в матрице всего $2 + 2$ — взяли базисные из L_1 и из L_2. При этом три столбца оказались базисными — базис в сумме. И один столбец, соответствующий “свободной” переменной в системе — именно количество параметрических переменных определило размерность пересечения. Приведённое наблюдение можно сформулировать в виде формулы:

$$\boxed{\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)}$$

2. Задачи

2.1. # 20.23(4)

Составить систему уравнений, определяющую линейную оболочку системы столбцов:

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) = \{\alpha \boldsymbol{c}_1 + \beta \boldsymbol{c}_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{c}_1 = (1, 1, 1, 1)^T \\ \boldsymbol{c}_2 = (1, 2, 1, 3)^T \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Переходим к системе скалярных уравнений (относительно α, β):

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = \alpha + 2\beta \\ x_3 = \alpha + \beta \\ x_4 = \alpha + 3\beta \end{cases} \tag{6}$$

Далее, чтобы найти условия на x_i из системы (6), можно взять расширенную матрицу системы, и после упрощения приравнять нулю компоненты в последнем столбце, соответствующие нулевым строкам в основной матрице[3]:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 1 & x_1 \\ 1 & 2 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 3 & x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & \mathbf{1} & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 2 & x_4 - x_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2x_1 - x_2 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & x_4 + x_1 - 2x_2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_3 - x_1 = 0 \\ x_4 + x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

□

[3] Теорема Кронекера-Капелли.

2.2. # 21.9

Найти размерность и базис суммы и пересечения подпространств L_1 и L_2 пространства многочленов степени не выше третьей:

$$L_1 = \mathscr{L}(1 + 2t + t^3, 1 + t + t^2, t - t^2 + t^3)$$

$$L_2 = \mathscr{L}(1 + t^2, 1 + 3t + t^3, 3t - t^2 + t^3)$$

Решение. Множество многочленов степени не выше третьей в самом деле образуют пространство (с "интуитивными" операциями сложения многочленов и умножения многочлена на число). Так, если есть многочлен $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ и многочлен $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$, то их сумма — тоже многочлен степени не выше третьей:

$$(p + q)(t) = p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + (a_3 + b_3)t^3$$

Аналогично с умножением многочлена на число: снова получается многочлен степени не выше третьей. Операции суммы и умножения на число при этом удовлетворяют всем "восьми свойствам" (нулевой многочлен — константный ноль). Размерность пространства многочленов степени не выше третьей равна 4, потому что можно выбрать базис из четырёх многочленов

$$e = (1, t, t^2, t^3)$$

Начать решение задачи кажется разумным с того, чтобы понять, а какие вообще размерности самих подпространств L_1 и L_2. Можно заметить[4], что

$$(t - t^2 + t^3) = (1 + 2t + t^3) - (1 + t + t^2)$$

и также что

$$(3t - t^2 + t^3) = (1 + 3t + t^3) - (1 + t^2)$$

То есть $\dim L_1 = \dim L_2 = 2$. Выберем в качестве базисов и в L_1, и в L_2 по первой паре векторов (многочленов) из трёх, на которые по условию были натянуты каждое из подпространств.

Далее, вместо того, чтобы продолжать работать с многочленами — можно перейти к их координатным столбцам в, например, том же "простом" базисе e:

$$L_1 = \mathscr{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}, \quad L_2 = \mathscr{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

А дальше... а дальше всё становится "очень похоже" на пример с "векторами из аналитической геометрии" (1.2)! Поэтому... перейдём к следующей задаче. □

2.3. # 15.94

Показать, что любую квадратную матрицу можно разложить в сумму симметрической и кососимметрической. Единственно ли такое разложение?

[4]Если не получилось заметить, то можно бы было по-честному искать "лишние" многочлены с помощью метода, как, например, при определении базиса в сумме подпространств.

Решение. Симметрическая матрица A — такая что $A = A^T$. Кососимметрическая матрица A — такая что $A = -A^T$.

Можно заметить, что множества симметрических и кососимметрических матриц образуют линейные подпространства в пространстве всех квадратных матриц. Покажем это, например, для случая симметрических матриц. При умножении на число, очевидно, свойство симметричности сохраняется:

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A$$

При сложении двух симметрических тоже получим симметрическую:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{ij} = (a_{ji} + b_{ji})_{ij} = (A + B)^T$$

Как теперь представить произвольную матрицу в виде суммы симметрической и кососимметрической?..

Способ 1 (“простой”)

В предыдущем номере задачника предлагают показать, что матрица $A + A^T$ симметрическая, а матрица $A - A^T$ кососимметрическая. Если это в самом деле так, то, очевидно:

$$A = \frac{1}{2}\big((A + A^T) + (A - A^T)\big) = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

То есть разложение произвольной матрицы A в виде суммы двух найдено.

Остаётся в таком случае проверить, что $A - A^T$ в самом деле кососимметрическая (а $A + A^T$ — симметрическая):

$$A - A^T = (a_{ij} - a_{ji})_{ij} = -(a_{ji} - a_{ij})_{ij} = -(A - A^T)^T$$

Аналогично и с симметричностью матрицы $A + A^T$.

Способ 2

Можно же по-честному записать, что хотим найти:

$$A = X + Y, \quad \begin{cases} X = X^T \\ Y = -Y^T \end{cases}$$

Представление матрицы A в виде суммы двух и ограничения на матрицы-слагаемые (симметричность одной и кососимметричность другой) можно объединить в одну систему:

$$\begin{cases} A = X + Y \\ X = X^T \\ Y = -Y^T \end{cases}$$

Пусть у матрицы A размер $n \times n$. Тогда сейчас в системе $2 \cdot n^2$ неизвестных (количество элементов в матрицах X и Y) и $3 \cdot n^2$ уравнений (каждое матричное уравнение равносильно n^2 скалярным уравнениям).

Рассмотрим сначала отдельно уравнение $X = X^T$. Соответствующая система скалярный уравнений:

$$\begin{cases} x_{11} = x_{11} \\ x_{12} = x_{21} \\ \ldots \\ x_{21} = x_{12} \\ x_{22} = x_{22} \\ \ldots \end{cases}$$

Таким образом, на самом деле n уравнений вообще ничего не дают (которые для диагональных элементов). Другие же позволяют сразу сократить число переменных x_{ij}: вместо n^2 их теперь (диагональные плюс в одной из половин)

$$n + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Теперь посмотрим на $Y = -Y^T$:

$$\begin{cases} y_{11} = -y_{11} \\ y_{12} = -y_{21} \\ \dots \\ y_{21} = -y_{12} \\ y_{22} = -y_{22} \\ \dots \end{cases}$$

В этот раз уравнения для диагональных элементов информативны и дают: $y_{11} = \ldots = y_{nn} = 0$. Число неизвестных в матрице Y после учёта уравнений $Y = -Y^T$ (половинка без диагонали):

$$\frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Остаётся посмотреть на уравнения, соответствующие $A = X + Y$:

$$\begin{cases} \begin{cases} a_{11} = x_{11} + y_{11} \\ a_{12} = x_{12} + y_{12} \\ \dots \\ a_{1n} = x_{1n} + y_{1n} \end{cases} \\ \begin{cases} a_{21} = x_{21} + y_{21} = x_{12} - y_{12} \\ a_{22} = x_{22} + y_{22} \\ \dots \\ a_{2n} = x_{2n} + y_{2n} \end{cases} \\ \dots \\ \begin{cases} a_{n1} = x_{n1} + y_{n1} \\ a_{n2} = x_{n2} + y_{n2} \\ \dots \\ a_{nn} = x_{nn} + y_{nn} \end{cases} \end{cases}$$

Сначала опять стоит обратить внимание на уравнения с диагональными элементами. С их помощью можно сразу найти диагональные элементы матрицы X! Например $a_{11} = x_{11} + y_{11} \Leftrightarrow a_{11} = x_{11}$. То есть $x_{ii} = a_{ii}$. Поэтому общее число неизвестных в матрице X становится равным тоже

$$\frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

И общее число неизвестных на данный момент (в обеих матрицах X и Y):

$$2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1)$$

И “неиспользованными” остались следующие уравнения (с недиагональными элементами матрицы A):

$$\begin{cases} \begin{cases} a_{12} = x_{12} + y_{12} \\ \ldots \\ a_{1n} = x_{1n} + y_{1n} \end{cases} \\ \begin{cases} a_{21} = x_{12} - y_{12} \\ \ldots \\ a_{2n} = x_{2n} + y_{2n} \end{cases} \\ \ldots \end{cases}$$

И их тоже всего $n(n-1)$.

Теперь можно заметить, что оставшаяся (до сих пор не очень маленькая) система на самом деле “распадается” на много систем из двух уравнений с двумя неизвестными. Например, объединяя уравнения с a_{12} и a_{21}, получаем:

$$\begin{cases} a_{12} = x_{12} + y_{12} \\ a_{21} = x_{12} - y_{12} \end{cases}$$

Откуда можно найти x_{12} и y_{12}:

$$x_{12} = \frac{a_{12} + a_{21}}{2}, \quad y_{12} = \frac{a_{12} - a_{21}}{2}$$

И аналогичным образом можно найти все недиагональные элементы в матрицах X и Y. На самом деле, формулы будут верны и для диагональных элементов. Таким образом,

$$x_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}, \quad y_{ij} = \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2}$$

Матрицы X и Y найдены. Решение единственное (потому что получено “по-честному” как решение системы).

Способ 3 (“простой Способ 2”)

Снова ищем матрицы X и Y из соотношения $A = X + Y$. Если же его ещё транспонировать, получим $A^T = X - Y$. Имея эти два матричных уравнения, несложно найти матрицы X и Y.

В рамках этого способа кажется ещё важным показать отдельно, что решение (пара матриц X, Y) единственное. Допустим, есть ещё одно разложение матрицы A в виде $X' + Y'$, где X' симметричная, Y' кососимметричная, и при этом хотя бы $X \neq X'$ или $Y \neq Y'$. Тогда имеем:

$$X + Y = A = X' + Y' \Rightarrow X - X' = Y' - Y$$

То есть симметричная равна кососимметричной, при этом хотя бы одна из них ненулевая. Противоречие. □

2.4. # 21.6(5)

Найти проекцию вектора $\boldsymbol{x}$ из $\mathbb{R}^4$ на подпространство $\mathscr{P}$ параллельно $\mathscr{Q}$[5]. Где $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ — линейные оболочки векторов:

$$\mathscr{P} = \mathscr{L}\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\} = \mathscr{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-5\\7\\2\end{pmatrix}\right\} \quad \mathscr{Q} = \mathscr{L}\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2\} = \mathscr{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$$

[5]То есть предполагается, что $\mathbb{R}^n = \mathscr{P} \oplus \mathscr{Q}$.

а сам вектор $\boldsymbol{x}$ равен

$$\boldsymbol{x} = (1, -7, 5, -2)^T$$

Решение. Если $\mathbb{R}^4 = \mathscr{P} \oplus \mathscr{Q}$ (что следует из условия задачи), то существует единственное представление вектора $\boldsymbol{x}$ как:

$$\boldsymbol{x} = \underbrace{\alpha \boldsymbol{p}_1 + \beta \boldsymbol{p}_2}_{\pi_{\mathscr{P}}(\boldsymbol{x})} + \underbrace{\gamma \boldsymbol{q}_1 + \zeta \boldsymbol{q}_2}_{\pi_{\mathscr{Q}}(\boldsymbol{x})}$$

где $\pi_{\mathscr{P}}(\boldsymbol{x})$ — искомая проекция вектора $\boldsymbol{x}$ на $\mathscr{P}$ параллельно $\mathscr{Q}$. Остаётся составить систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta + \gamma + \zeta = 1 \\ \alpha - 5\beta + \gamma + \zeta = -7 \\ \alpha + 7\beta + 2\gamma + \zeta = 5 \\ \alpha + 2\beta + 2\gamma + 3\zeta = -2 \end{cases}$$

И решить её методом Гаусса...

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & -7 \\ 1 & 7 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Поэтому искомая проекция $\pi_{\mathscr{P}}(\boldsymbol{x})$ равна:

$$\pi_{\mathscr{P}}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□