

# Семинар 5

Алексеев Василий

7 + 10 марта 2023

## Содержание

<b>1</b>	<b>Линейные отображения</b>	<b>1</b>
1.1	Отображение. Инъективность и сюръективность . . . . .	1
1.2	Линейное отображение. Ядро и множество значений . . . . .	2
1.3	Матрица линейного отображения . . . . .	4
1.4	Изменение матрицы линейного отображения . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Задачи</b>	<b>6</b>
2.1	# 23.8(2) . . . . .	6
2.2	# 23.9(2) . . . . .	7
2.3	# 23.15(1) . . . . .	8

# 1. Линейные отображения 2

## 1.1. Отображение. Инъективность и сюръективность

Об отображении  $\phi: X \rightarrow Y$  можно думать как о правиле, которое *каждому* элементу множества  $X$  ставит в соответствие *единственный* элемент множества  $Y$ <sup>1</sup> (1). Если отображение  $\phi$  переводит элемент  $x \in X$  в элемент  $y \in Y$ , то можно записать  $\phi(x) = y$ , при этом  $y$  называется *образом*  $x$ , а  $x$  — *прообразом*  $y$  (одним из возможных, если их несколько).

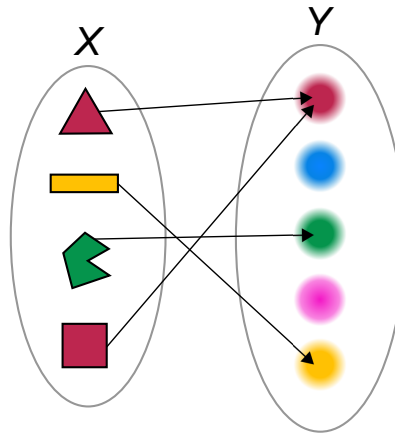


Рис. 1: Отображение: каждому элементу  $X$  соответствует единственный элемент  $Y$  (источник картинки: [Википедия](#)).

Можно отметить несколько свойств, которыми могут обладать произвольные отображения.

**Определение 1.1.** Отображение  $\phi$  называется *инъективным*, если разные элементы отображаются в разные (2a):  $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow \phi(x_1) \neq \phi(x_2)$ . Иными словами, если у элемента  $y \in Y$  есть прообраз, то он единственный.

**Определение 1.2.** Отображение  $\phi$  называется *сюръективным*, если у *любого* элемента  $y \in Y$  есть прообраз (2b):  $\forall y \in Y \exists x \in X: \phi(x) = y$ .

Факт наличия у отображения обоих приведённых выше свойств сразу выделяется в отдельное свойство.

**Определение 1.3.** Отображение  $\phi$  называется *биективным*, если у *любого* элемента  $y \in Y$  есть *единственный* прообраз:  $\forall y \in Y \exists! x \in X: \phi(x) = y$ .

Помимо множества  $X$  (области определения отображения  $\phi$ , или domain), и множества  $Y$  (для которого, похоже, в русском языке нет специального названия, а по-английски — codomain) можно выделить ещё одно “интересное” множество, связанное с отображением  $\phi$  — это *множество значений* отображения  $\text{Im } \phi \subseteq Y$ , которое определяется как совокупность всех элементов  $y \in Y$ , в которые в принципе “можно попасть” под действием отображения:

$$\text{Im } \phi = \{y \in Y \mid \exists x \in X: \phi(x) = y\}$$

<sup>1</sup>Множество  $X$  в таком случае называется *областью определения* отображения  $\phi$  (множество “допустимых” входов). Таким образом, область определения — это часть определения отображения (определённые области определения отображения — “тот самый  $X$ ” из определения отображения). Поэтому, когда в “школьных” номерах по математике просили “найти область определения функции”, то имели в виду найти “максимально возможное по количеству элементов множество, которое могло бы выступать в роли области определения функции” (если бы привели полноценное определение этой функции, а не просто формулу).

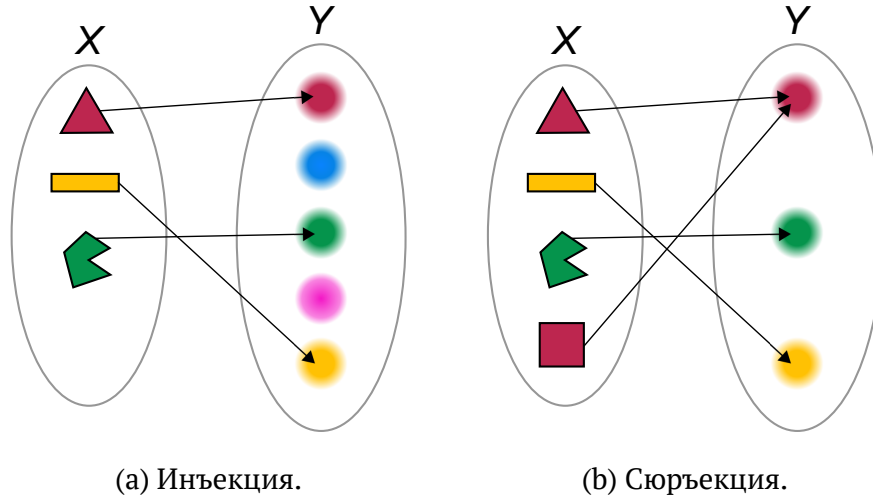


Рис. 2: Инъекция: “разные в разные”, или “если есть прообраз, то один”. Сюръекция: “у каждого есть хотя бы один прообраз”.

Тогда сюръективность означает, что  $\text{Im } \phi = Y$ .

## 1.2. Линейное отображение. Ядро и множество значений

**Определение 1.4.** Пусть  $X$  и  $Y$  — линейные пространства, размерностей  $n$  и  $m$  соответственно (возможно, разных). Тогда отображение<sup>2</sup>  $\phi: X \rightarrow Y$  называется *линейным*, если

- $\phi(x_1 + x_2) = \phi(x_1) + \phi(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in X$
- $\phi(\alpha x) = \alpha \phi(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in X$

Далее отметим несколько небезынтересных утверждений, связанных именно с линейными отображениями. Но сначала введём ещё одно понятие (которое можно ввести в виду того, что  $X$  и  $Y$  линейные пространства).

**Определение 1.5.** *Ядром* отображения<sup>3</sup>  $\phi$  называется подмножество элементов  $\text{Ker } \phi \subseteq X$ , которые в результате действия  $\phi$  отображаются в нулевой элемент пространства  $Y$ :

$$\text{Ker } \phi = \{x \in X \mid \phi(x) = \mathbf{0}\}$$

**Утверждение 1.1.** *Ker  $\phi$  есть линейное подпространство в  $X$ .*

*Доказательство.* Покажем это, проверив замкнутость относительно операций сложения и умножения на число (которые определены в линейном пространстве  $X$ ). Пусть  $x_1, x_2 \in \text{Ker } \phi$ , то есть  $\phi(x_1) = \mathbf{0}$  и  $\phi(x_2) = \mathbf{0}$ . Тогда, пользуясь линейностью  $\phi$ , можем расписать, чему равен образ суммы  $x_1 + x_2$ :

$$\phi(x_1 + x_2) = \phi(x_1) + \phi(x_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow x_1 + x_2 \in \text{Ker } \phi$$

Аналогично, образ вектора, полученного умножением произвольного вектора  $x$  из ядра на число  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\phi(\alpha x) = \alpha \phi(x) = \alpha \mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha x \in \text{Ker } \phi$$

□

<sup>2</sup>Начиная с этого определения и далее в конспекте векторы “абстрактных” пространств  $X$  и  $Y$  будут обозначаться жирным шрифтом, чтобы их проще было отличать от “обычных” числовых вектор-столбцов, которые далее ещё появятся.

<sup>3</sup>В этом разделе отображение иногда может упоминаться просто как “отображение  $\phi$ ” — имеется в виду именно  $\phi: X \rightarrow Y$ , то есть отображение из линейного пространства  $X$  в линейное пространство  $Y$ .

Раз ядро подпространство, то в нём как минимум есть нулевой вектор пространства  $X$ . (И это не сложно показать.) С ядром также связан возможный способ проверки инъективности отображения.

**Утверждение 1.2** (“Критерий инъективности”).

*Отображение  $\phi$  инъективно  $\Leftrightarrow$  его ядро нулевое:  $\text{Ker } \phi = \{0\}$ .*

*Доказательство.* “Слева-направо”. Пусть отображение инъективно. Покажем, что тогда обязательно ядро нулевое. Допустим, что это не так, то есть  $\exists x^* \in \text{Ker } \phi, x^* \neq 0$ . Как отсюда получить противоречие с инъективностью? Инъективно — “разные в разные”. Пусть  $x \in X$ . Тогда

$$\phi(x + x^*) = \phi(x) + \phi(x^*) = \phi(x)$$

то есть образы  $x + x^*$  и  $x$  совпадают, но сами векторы разные, так как  $x^*$  ненулевой. А при инъективном отображении такого не может быть.

“Справа-налево”. Пусть ядро отображения нулевое. Покажем, что при этом отображение обязательно инъективно. Снова предположим, что это не так, то есть найдутся  $x_1$  и  $x_2, x_1 \neq x_2$ , но  $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ . Раз так, то, пользуясь линейностью  $\phi$ , получаем:

$$0 = \phi(x_1) - \phi(x_2) = \phi(x_1 - x_2) \Rightarrow x_1 - x_2 \in \text{Ker } \phi$$

но  $x_1 - x_2 \neq 0$ , то есть нашли ненулевой элемент в ядре. А по условию такого не может быть. □

**Утверждение 1.3.**  *$\text{Im } \phi$  есть линейное подпространство в  $Y$ .*

*Доказательство.* Аналогично проверке того, что ядро подпространство — здесь тоже можно показать замкнутость множества значений, но уже в линейном пространстве  $Y$  (относительно операций сложения и умножения на число, определённых в  $Y$ ). Пусть есть векторы  $y_1, y_2 \in Y$ . Это значит, что у каждого из них есть прообраз (хотя бы один), то есть найдутся  $x_1, x_2 \in X$ , такие что  $\phi(x_1) = y_1$  и  $\phi(x_2) = y_2$ . Посмотрим на сумму  $y_1 + y_2$  — будет ли она в  $\text{Im } \phi$ ? Да, имея в виду линейность  $\phi$ , несложно найти её возможный прообраз:

$$\phi(x_1 + x_2) = \phi(x_1) + \phi(x_2) = y_1 + y_2 \Rightarrow y_1 + y_2 \in \text{Im } \phi$$

Точно так же с умножением на число  $\alpha \in \mathbb{R}$  произвольного вектора  $y \in \text{Im } \phi$ , в который отображается, например, вектор  $x \in X$ :

$$\phi(\alpha x) = \alpha \phi(x) = \alpha y \Rightarrow \alpha y \in \text{Im } \phi$$

□

Раз множество значений отображения является подпространством  $Y$ , то несложно прийти к такому способу проверки сюръективности.

**Утверждение 1.4** (“Критерий сюръективности”).

*Отображение  $\phi$  сюръективно  $\Leftrightarrow \dim \text{Im } \phi = \dim Y$ .*

Если размерность подпространства совпадает с размерностью всего пространства, то, очевидно, подпространство и есть пространство (например, трёхмерное “подпространство” в геометрическом пространстве векторов трёхмерного пространства). Но  $\text{Im } \phi = Y$  и есть суть сюръективности.

Сравнение размерностей в самом деле удобный способ, потому что как бы ещё можно было проверить сюръективность? Перебирать все  $y \in Y$  и искать прообраз? А так — можно выбрать базис в  $Y$ , найти базис в  $\text{Im } \phi$ , сравнить числа векторов в базисах, и из этого сразу будет понятно, сюръективно  $\phi$  или нет.

### 1.3. Матрица линейного отображения

Выберем базисы (3) в пространствах  $X$  и  $Y$ : строки из базисных векторов  $e = (e_1, \dots, e_n) \subset X$  и  $f = (f_1, \dots, f_m) \subset Y$  (считаем  $n > 0$  и  $m > 0$ ). Рассмотрим действие отображения  $\phi$  на вектор  $x \in X$ , столбец компонент которого в базисе  $e$  есть  $\xi = (x_1, \dots, x_n)^T$ :

$$\phi(x) = \phi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \phi(e_1) + \dots + x_n \phi(e_n) = \underbrace{(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n))}_{\substack{\text{строка} \\ \text{векторов}}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\substack{\text{столбец} \\ \text{координат}}}$$

Вектор, например,  $\phi(e_1) \in Y$  также можно разложить по базису, но уже по базису  $f$ :

$$\phi(e_1) = a_{11} f_1 + \dots + a_{m1} f_m = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Обозначим символом  $a_1 \in \mathbb{R}^m$  вектор-столбец  $(a_{11}, \dots, a_{m1})^T$  координат вектора  $\phi(e_1)$  в базисе  $f$ <sup>4</sup>.

Таким образом, возвращаясь к вычислению образа вектора  $x$ :

$$\phi(x) = (\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, \dots, f_m) \underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_{A \in \mathbb{R}^{m \times n}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = f A \xi$$

С другой стороны, так как вектор  $\phi(x) \in Y$ , то он раскладывается по базису  $f$  с некоторыми коэффициентами  $\eta = (y_1, \dots, y_m)^T$ :

$$\phi(x) = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = f \eta$$

Получили два представления одного и того же вектора  $\phi(x)$ :

$$f \eta = f A \xi \xrightarrow{f \text{ базис}} \boxed{\eta = A \xi} \quad (1)$$

Матрица  $A$  называется *матрицей линейного отображения* в паре базисов  $e$  и  $f$ .

### 1.4. Изменение матрицы линейного отображения

Пусть в пространстве  $X$  выбран новый базис  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ . Причём известна матрица  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  перехода от старого базиса  $e$  к новому  $e'$ :  $e' = eS$ . Пусть также в пространстве  $Y$  выбран новый базис  $f' = fP$ , где  $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$  есть матрица перехода.

Какой будет матрица  $A'$  отображения  $\phi$  в новой паре базисов  $e'$  и  $f'$ ?

При базисах  $e$  и  $f$  в прошлом разделе для произвольного  $x \in X$  было получено (1):

$$\phi(x) = f \eta = f A \xi$$

<sup>4</sup>В обозначениях рисунка (3)  $\phi(e_1)$  это  $\tilde{\phi}(h_X(e_1))$ .

$$\begin{array}{ccc}
X \ni x & \xrightarrow{\phi} & y \in Y \\
\downarrow h_X & & \downarrow h_Y \\
\mathbb{R}^n \ni \xi & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \eta \in \mathbb{R}^m
\end{array}$$

Рис. 3: Линейное отображение  $\phi: X \rightarrow Y$ , действующее из линейного пространства  $X$  размерности  $n$  в линейное пространство  $Y$  размерности  $m$ . Выбор базиса  $e = (e_1, \dots, e_n)$  в пространстве  $X$  порождает отображение  $h_X$ , переводящее вектор  $x \in X$  в его координатный столбец  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Аналогично, выбор базиса  $f = (f_1, \dots, f_m)$  в пространстве  $Y$  порождает отображение  $h_Y$ , переводящее вектор  $y \in Y$  в его координатный столбец  $\eta \in \mathbb{R}^m$ . (Можно заметить, что  $h_X$  и  $h_Y$  — биекции, причём такие, которые сохраняют линейные операции: суммы и умножения на число.) Таким образом, выбор пары базисов  $e$  и  $f$  в пространствах  $X$  и  $Y$  порождает отображение  $\tilde{\phi}$ , переводящее вектор-столбец  $\xi$  в вектор-столбец  $\eta$  (это отображение можно представить как композицию  $\tilde{\phi} = h_Y \phi h_X^{-1}$ ). При этом оказывается, что столбец координат образа вычисляется по правилу  $\eta = A\xi$ , где  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  — матрица линейного отображения  $\phi$ , которая определяется выбором базисов в пространствах  $X$  и  $Y$ .

Для того же  $x$  при выбранных базисах  $e'$  и  $f'$  точно так же можно получить ( $\eta' \in \mathbb{R}^m$  и  $\xi' \in \mathbb{R}^n$  — столбцы координат в новых базисах  $f'$  и  $e'$  соответственно):

$$\phi(x) = f'\eta' = f'A'\xi'$$

Итого, можем приравнять:

$$fA\xi = f'A'\xi'$$

Далее, учтём, что  $f' = fP$ . Также что  $e' = eS \Rightarrow \xi = S\xi' \Rightarrow \xi' = S^{-1}\xi$ . Подставим в формулу выше выражение  $f'$  через  $f$  и  $\xi'$  через  $\xi$ :

$$fA\xi = (fP)A'(S^{-1}\xi) \xrightarrow{f \text{ базис}} A\xi = PA'S^{-1}\xi \xrightarrow{\forall x \in X} A = PA'S^{-1} \Rightarrow \boxed{A' = P^{-1}AS}$$

Отдельно можно отметить случай *преобразования*  $\phi: X \rightarrow X$ . Так как пространства “откуда” и “куда” в этом случае одинаковы, то матрица преобразования при изменении базиса  $e' = eS$  вычисляется по формуле:

$$A' = S^{-1}AS$$

Ещё из “интересного” про преобразования можно отметить: ядро  $\text{Ker } \phi$  и множество значений  $\text{Im } \phi$  являются подпространствами одного и того же линейного пространства  $X$ , поэтому обретают смысл некоторые вопросы, которые раньше просто не могли быть заданы, например “какое будет пересечение ядра и множества значений?”

## 2. Задачи

### 2.1. # 23.8(2)

Пусть  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{n}$  — ненулевые векторы геометрического векторного пространства  $X$ , причём  $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0$ . Пусть  $\mathcal{L}_1$  — прямая с направляющим вектором  $\mathbf{a}$ , а  $\mathcal{L}_2$  — плоскость с вектором нормали  $\mathbf{n}$ .

Надо записать формулой преобразование  $\phi: X \rightarrow X$ , проверить его линейность, найти ядро, множество значений и ранг, если  $\phi$  — ортогональное проектирование на  $\mathcal{L}_1$ .

*Решение.* Из геометрических соображений,

$$\phi(\mathbf{x}) = \underbrace{|\mathbf{x}| \cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{a})}_{\text{скалярная проекция}} \cdot \underbrace{\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}}_{\text{единичный вектор}} = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|} \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

Поэтому линейность преобразования следует из линейности скалярного произведения. Например,  $\phi$  от суммы:

$$\phi(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{a}) = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{a}) + \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}(\mathbf{x}_2, \mathbf{a}) = \phi(\mathbf{x}_1) + \phi(\mathbf{x}_2)$$

Аналогично  $\phi(\alpha \mathbf{x}) = \alpha \phi(\mathbf{x})$ .

Ядро преобразования — все векторы, которые отображаются в ноль. Очевидно, ядро ортогонального проектирования на прямую — это плоскость, перпендикулярная этой прямой. Но можно это и “строго” показать:

$$\phi(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \perp \mathbf{a} \end{cases}$$

Из того, что ядро — плоскость, следует, что  $\dim \text{Ker } \phi = 2$ .

Множество значений ортогонального проектирования на прямую — это, очевидно, вся прямая (при проектировании получаем вектор на прямой, и обратно: любой вектор, параллельный прямой, можно получить проектированием некоторого вектора, хотя бы его же самого). Опять же, можно это и “строго” показать, через формулу:

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} = \underbrace{\mathbf{a} \cdot \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}}_{\phi(\mathbf{x}) \parallel \mathbf{a} \forall \mathbf{x} \in X \Rightarrow \text{Im } \phi \subseteq \mathcal{L}_1} \xrightarrow{\mathbf{x} = t\mathbf{a}} \underbrace{t\mathbf{a}}_{\mathbf{y} \in \text{Im } \phi \forall \mathbf{y} \in \mathcal{L}_1 \Rightarrow \mathcal{L}_1 \subseteq \text{Im } \phi}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Множество значений — прямая. Поэтому размерность множества значений (она же ранг преобразования):

$$\dim \text{Im } \phi = \text{Rg } \phi = 1$$

Видно, что выполняется следующее соотношение<sup>5</sup>:

$$\text{Rg } \phi + \dim \text{Ker } \phi = 1 + 2 = 3 = \dim X$$

□

<sup>5</sup>Которое на самом деле тождество, и говорит, фактически, про то, что число базисных переменных плюс число свободных переменных (количество столбцов в фундаментальной матрице) при решении однородной системы равно общему числу переменных.

## 2.2. # 23.9(2)

Найти матрицу следующего преобразования  $\phi: X \rightarrow X$  векторов трёхмерного геометрического пространства:  $\phi$  — ортогональное проектирование на прямую  $\mathcal{L}_1 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in X \mid x_1 = x_2 = x_3\}$  (координаты векторов даны в ортонормированном базисе  $e = (e_1, e_2, e_3)$ ).

*Решение.* Направляющий вектор прямой:

$$a = (1, 1, 1)^T$$

Формула, задающая преобразование:

$$\phi(x) = \frac{(x, a)}{|a|^2} a \in X$$

С одной стороны,  $\phi$  переводит вектор как направленный отрезок в другой вектор — направленный отрезок. С другой стороны, при заданном базисе, можно также думать о  $\phi$  как о преобразовании между столбцами координат в базисе. Преобразование “связывает” векторы, матрица преобразования — их координатные столбцы. Тогда, чтобы найти матрицу преобразования  $A$ , надо получить  $\phi$  в форме

$$\phi(\xi) = \eta = A\xi$$

то есть в виде матрицы  $A$ , умноженной на столбец  $\xi = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$  координат вектора  $x$  в базисе  $e$ , и чтоб при этом получался столбец  $\eta = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3$  координат образа  $\phi(x)$  в том же базисе (так как  $\phi$  — это преобразование).

Распишем координатный столбец  $\eta \in \mathbb{R}^3$  образа  $\phi(x)$ :

$$\eta = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Можно бы было искать по отдельности столбцы  $A$ :

$$A = (\phi(e_1)_e, \phi(e_2)_e, \phi(e_3)_e) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

где  $\phi(e_i)_e, i = 1, \dots, 3$  есть координатные столбцы образов базисных векторов  $e_i$  в том же базисе  $e$ . Можно заметить, что получилось так, что  $\dim \operatorname{Im} \phi = 1 = \operatorname{Rg} A$ ...

Если же бы  $\phi$  рассматривалось не как преобразование, а как отображение  $\tilde{\phi}: X \rightarrow \mathcal{L}_1$  (и пусть при этом за базис в  $\mathcal{L}_1$  “естественным образом” выбран вектор  $a$ ), то матрица  $\tilde{A}$  была бы такой (индексом  $a$  снова обозначен базис, в котором составлен координатный столбец):

$$\tilde{A} = (\phi(e_1)_a, \phi(e_2)_a, \phi(e_3)_a) = (1/3, 1/3, 1/3)$$

□



### 2.3. # 23.15(1)

Пусть линейное пространство  $\mathcal{L}$  представимо как прямая сумма двух ненулевых подпространств:  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ .

Показать, что преобразование  $\phi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  проектирования на  $\mathcal{L}_1$  параллельно  $\mathcal{L}_2$  линейно. Найти ядро и множество значений  $\phi$ . Найти матрицу преобразования  $\phi$  в базисе  $\mathcal{L}$ , составленном из базисов подпространств  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ .

**Решение. Линейность.** Раз  $\mathcal{L}$  выражено прямой суммой  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ , то любой вектор  $x$  из  $\mathcal{L}$  единственным образом раскладывается в сумму двух, один из которых в  $\mathcal{L}_1$ , а другой в  $\mathcal{L}_2$ :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow \underbrace{x}_{\mathcal{L}} = \underbrace{x_1}_{\mathcal{L}_1} + \underbrace{x_2}_{\mathcal{L}_2}$$

В таком представлении

$$\phi(x) = x_1$$

И можно несложно проверить линейность преобразования:

$$\phi(x + y) = \phi(x_1 + x_2 + y_1 + y_2) = \phi((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)) = x_1 + y_1 = \phi(x) + \phi(y)$$

Аналогично,  $\phi(\alpha x) = \alpha \phi(x)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Ядро** преобразования:

$$\phi(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \Leftrightarrow x = x_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \text{Ker } \phi = \mathcal{L}_2$$

**Множество значений** есть подмножество  $\mathcal{L}$  векторов  $y$ , которые могут быть получены с помощью преобразования  $\phi$ . То есть берём  $y \in \mathcal{L}$  и проверяем, при каких условиях его можно получить с помощью  $\phi$ . Очевидно, если существует  $x$ , являющийся прообразом некоторого  $y$ , то

$$\phi(x) = y \Rightarrow y \in \mathcal{L}_1$$

То есть  $\text{Im } \phi \subseteq \mathcal{L}_1$ . Но верно и в другую сторону:

$$y \in \mathcal{L}_1 \Rightarrow \exists x = y \in \mathcal{L} : \phi(x) = y$$

Поэтому  $\mathcal{L}_1 \subseteq \text{Im } \phi$ , и в итоге  $\text{Im } \phi = \mathcal{L}_1$ .

Снова можно заметить, что выполняется соотношение<sup>6</sup>:

$$\dim \text{Im } \phi + \dim \text{Ker } \phi = \dim X$$

**Матрица отображения.** Пусть размерность  $\mathcal{L}_1$  равна  $l$ , а размерность  $\mathcal{L}_2$  равна  $k$ . Пусть  $a = (a_1, \dots, a_l)$  — базис в  $\mathcal{L}_1$ , а  $b = (b_1, \dots, b_k)$  — базис в  $\mathcal{L}_2$ . Тогда за базис в  $\mathcal{L}$  предлагается взять  $a \cup b = (a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_k)$ <sup>7</sup>.

В общем случае, столбцы матрицы отображения  $\phi: X \rightarrow Y$  — это координатные столбцы базиса  $X$  в базисе  $Y$ . В случае преобразования,  $X$  и  $Y$  — одно и то же, и базис один.

<sup>6</sup>Верно и в общем случае для произвольного линейного отображения  $\phi: X \rightarrow Y$ . Доказательство можно свести к рассмотрению системы линейных уравнений  $\eta_m = A_{m \times n} \xi_n$ . В фундаментальной матрице соответствующей однородной системы будет  $n - r$  столбцов, где  $r = \text{Rg } A$ . По сути это и есть другая формулировка приведённого соотношения с размерностями.

<sup>7</sup>Так можно сделать, потому что  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ .

Поэтому столбцы матрицы преобразования  $\phi$  — это координатные столбцы образов базисных векторов в том же базисе (индексом  $a \cup b$  обозначено, в каком базисе компоненты)

$$A = (\phi(\mathbf{a}_1)_{a \cup b}, \dots, \phi(\mathbf{a}_l)_{a \cup b}, \phi(\mathbf{b}_1)_{a \cup b}, \dots, \phi(\mathbf{b}_k)_{a \cup b}) = \begin{pmatrix} E_{l \times l} & 0_{l \times k} \\ 0_{k \times l} & 0_{k \times k} \end{pmatrix}$$

так как  $\phi(\mathbf{a}_i) = 1 \cdot \mathbf{a}_i$ , а  $\phi(\mathbf{b}_i) = \mathbf{0}$ .

Если же рассмотреть  $\phi$  не как преобразование, а как отображение  $\tilde{\phi}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_1$ , то в данном случае базисы в пространствах “из” и “куда” уже отличаются. Столбцов в матрице отображения останется  $l + k$ , но строк уже будет всего  $l$  (потому что базис в пространстве “куда”  $\mathcal{L}_1$  есть  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l)$ ). То есть матрица отображения  $\phi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_1$  будет равна (индексом  $a$  обозначено, в каком базисе компоненты):

$$\tilde{A} = (\tilde{\phi}(\mathbf{a}_1)_a, \dots, \tilde{\phi}(\mathbf{a}_l)_a, \tilde{\phi}(\mathbf{b}_1)_a, \dots, \tilde{\phi}(\mathbf{b}_k)_a) = (E_{l \times l} \quad 0_{l \times k})$$

□