Семинар 8

Алексеев Василий

27 октября 2022

Содержание

1. Касательная к кривой второго порядка

Для эллипса, заданного в канонической системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

уравнение касательной в точке (x_0, y_0) эллипса выглядит так

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1}$$

Для гиперболы, заданной в канонической системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

уравнение касательной в точке (x_0, y_0) гиперболы выглядит так

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1}$$

И для параболы, заданной в канонической системе координат уравнением

$$y^2 = 2px$$

уравнение касательной в точке (x_0, y_0) параболы выглядит так

$$\boxed{yy_0 = p(x + x_0)}$$

1.1. # 8.2(3)

Составить уравнение касательной к кривой

$$xy = k$$

Решение. Можно продифференцировать обе части уравнения кривой в некоторой точке (x_0, y_0), принадлежащей кривой:

$$d(xy)\,\big|_{(x_0,y_0)} = d(k)\,\big|_{(x_0,y_0)}$$

Откуда

$$x_0 dy + y_0 dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y_0}{x_0}$$

То есть тангенс угла наклона касательной к кривой в точке (x_0, y_0) равен $-\frac{y_0}{x_0}$. С другой стороны, тот же тангенс для касательной можно посчитать просто как отношение приращений $(y - y_0)$ и $(x - x_0)$ для некоторой точки (x, y) касательной:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{y_0}{x_0}$$

Проводя упрощения и учитывая, что для исходной точки выполняется $x_0 y_0 = k$, получаем

$$y_0 x + x_0 y = 2k$$

□

1.2. # 8.9(1)

Какие точки на кривой второго порядка

$$\frac{27}{28}x^2 + \frac{9}{7}y^2 = 1$$

удалены на наименьшее расстояние от прямой

$$l:\ 3x + 4y + 5 = 0$$

Найти это расстояние.

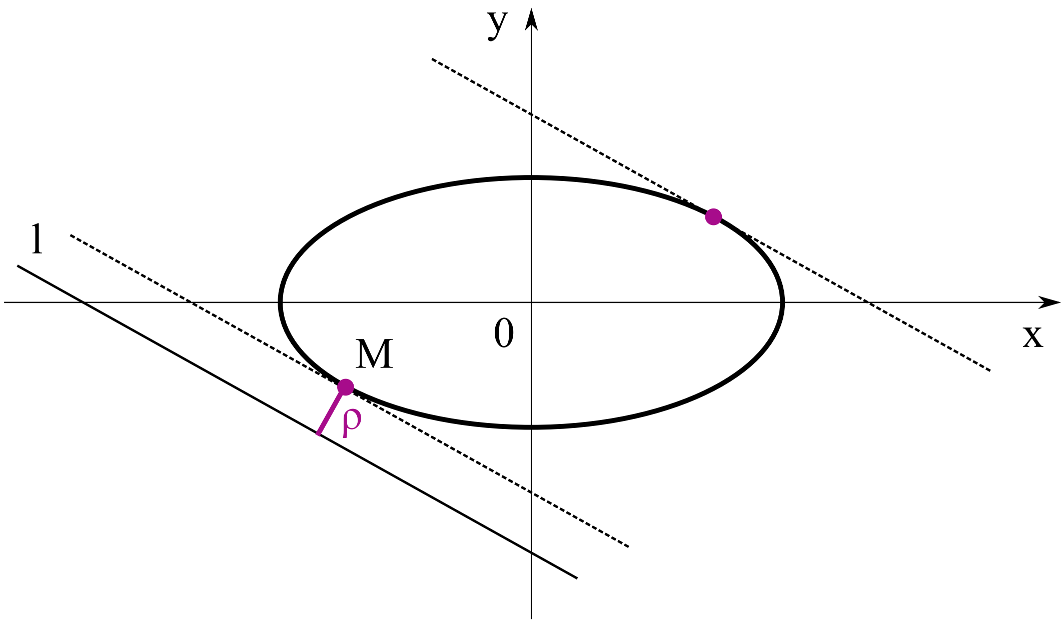

Рис. 1: Прямая l не пересекает эллипс.

Решение. Из рисунка (1) видно, что прямая l и эллипс не пересекаются, поэтому минимальное расстояние не нулевое. Также из рисунка понятно, что расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ эллипса до прямой l будет минимальным в том случае, когда касательная к эллипсу в точке M параллельна прямой l[1]. Но таких точек, очевидно, у эллипса две (при этом если расстояние от одной из них до прямой l будет минимальным, то от другой, наоборот, расстояние будет максимальным среди точек эллипса).

Уравнение касательной к эллипсу в точке $M(x_0, y_0)$:

$$\frac{27}{28}x_0 x + \frac{9}{7}y_0 y = 1$$

Сравнивая уравнение касательной с уравнением прямой, выводим условие параллельности касательной и прямой:

$$\frac{27/28 x_0}{3} = \frac{9/7 y_0}{4}$$

Откуда получаем $x_0 = y_0$. При этом (x_0, y_0) — точка эллипса:

$$\frac{27}{28}x_0^2 + \frac{9}{7}y_0^2 = 1$$

[1] "Очевидно". А вообще, потому что эллипс "хороший": выпуклый (отрезок, соединяющий любые две точки эллипса, лежит внутри эллипса) и угол наклона касательной от точки к точке эллипса меняется непрерывно (то есть нет "пропусков" углов).

В итоге

$$\begin{cases} x_0 = \pm\dfrac{2}{3} \\ y_0 = \pm\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Из рисунка (1) видно, что подходит точка $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Расстояние от найденной точки до прямой l в канонической системе координат эллипса (которая прямоугольная) вычисляется по формуле:

$$\rho\big((x_0, y_0), l\big) = \frac{\left|3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 5\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \ldots = \frac{1}{15}$$

□

1.3. # 8.24(1)

Составить уравнения касательных к эллипсу, заданному в канонической системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$$

проходящих через точку $P(-6, 0)$.

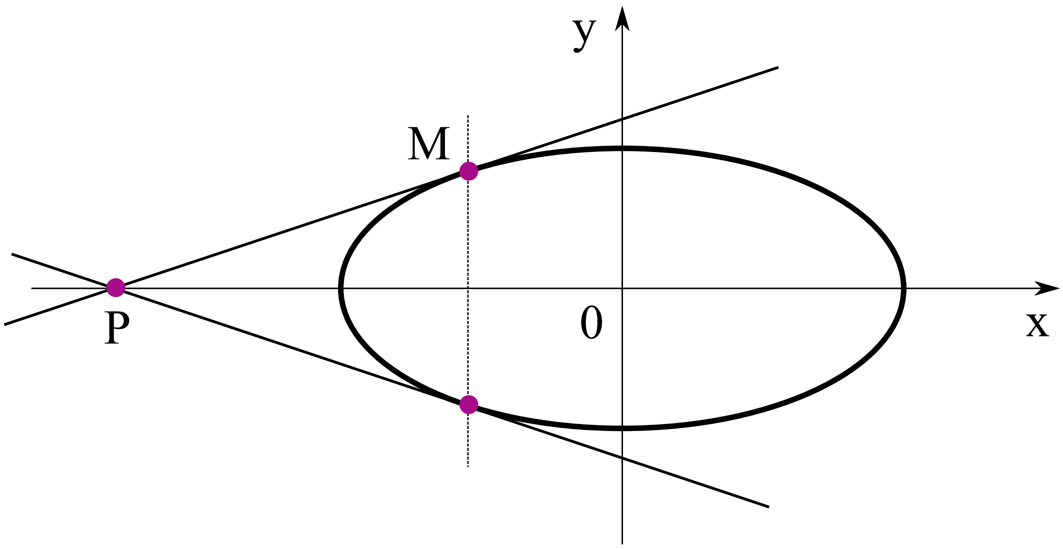

Рис. 2: Касательные к эллипсу, проходящие через одну точку на оси X в канонической системе координат эллипса.

Решение. Уравнение касательной к эллипсу в точке $M(x_0, y_0)$, которая проходит через точку $P(-6, 0)$ (2):

$$\frac{-6x_0}{18} + 0 = 1 \Rightarrow x_0 = -3$$

Подставляя найденную координату x_0 в уравнение эллипса, находим координаты y_0:

$$\frac{(-3)^2}{18} + \frac{y_0^2}{8} = 1 \Rightarrow y_0 = \pm 2$$

И уравнения касательных

$$-2x \pm 3y - 12 = 0$$

□

2. Приведение уравнения кривой к каноническому виду

Общий вид уравнения кривой второго порядка:

$$\begin{cases} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \\ A^2 + B^2 + C^2 > 0 \end{cases} \tag{1}$$

Всего есть девять канонических уравнений кривых второго порядка[2]:

1. Эллипс
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ a \geq b > 0 \end{cases}$$

2. “Мнимый эллипс”
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad a \neq 0,\ b \neq 0$$

3. “Пара мнимых пересекающихся прямых”
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad a \neq 0,\ b \neq 0$$

---

4. Гипербола
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0,\ b > 0$$

5. Пара пересекающихся прямых
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad a \neq 0,\ b \neq 0$$

---

6. Парабола
$$y^2 = 2px, \quad p > 0$$

7. Пара параллельных прямых
$$y^2 = a^2, \quad a \neq 0$$

8. “Пара мнимых параллельных прямых”
$$y^2 = -a^2, \quad a \neq 0$$

9. Пара совпавших прямых
$$y^2 = 0$$

Чтобы привести кривую к каноническому виду, можно придерживаться следующего алгоритма:

[2] См., например книжку Беклемишева Д. В. или Задачник.

0. Перейти к прямоугольной системе координат (если она ещё не прямоугольная)[3].

1. *Повернуть* систему координат так, чтобы исчез член с произведением xy.

2. Далее, в зависимости от ситуации, надо *перенести начало* системы координат так, чтобы исчезли либо линейные члены, либо свободный член.

3. И в конце, опять же в зависимости от ситуации, может потребоваться ещё одно-два небольших действия, например изменение порядка координат (чего можно достичь поворотом на $\frac{\pi}{2}$, чтобы не менялась ориентация базиса).

Центром кривой второго порядка называется точка (x_0, y_0), такая что

$$F(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) = F(x_0 - \alpha, y_0 - \beta)$$

где $F(\cdot, \cdot) = 0$ — уравнение кривой, а α и β — любые числа. Можно показать, что центр симметрии кривой — это почти то же самое, что и её центр (только центр в некоторых случая может существовать, а центр симметрии — нет). Если подставить в уравнение (1) сдвинутые на $\pm\alpha$ и $\pm\beta$ координаты (x_0, y_0) и приравнять, как в определении центра, то получим

$$\alpha(Ax_0 + Bx_0 + D) + \beta(Bx_0 + Cy_0 + E) = 0$$

откуда система уравнений для нахождения координат центра:

$$\begin{cases} Ax_0 + Bx_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Центр существует и единствен, если определитель системы отличен от нуля:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$$

В этом случае кривая называется *центральной*.

При этом $\delta > 0$ соответствует кривым *эллиптического типа*: от эллипса до гиперболы в списке кривых (1), — $\delta < 0$ соответствует кривым *гиперболического типа*: от гиперболы до параболы в списке кривых (4), — и $\delta = 0$ соответствует кривым *параболического типа*: от параболы и далее (6).

2.1. # 9.1(3)

Определить тип кривой второго порядка. Составить её каноническое уравнение и найти каноническую систему координат. Изначально кривая задана в некоторой *прямоугольной системе координат* уравнением:

$$9x^2 + 4y^2 + 6x - 4y - 2 = 0 \tag{3}$$

Решение. В уравнении нет члена с xy, поэтому поворот делать не придётся. Видно, что для приведения к каноническому виду надо выделять квадраты:

$$(9x^2 + 2 \cdot 3x + 1) - 1 + (4y^2 - 2 \cdot 2y + 1) - 1 - 2 = 0$$

[3] В задачах изначальная система координат будет считаться прямоугольной, если не сказано противное!

$$(3x+1)^2+(2y-1)^2=4$$

Нужная замена переменных уже "почти видна". Остаётся только сделать так, чтобы переход к новой системе координат был именно *параллельным переносом* (без сжатия или растяжения, чтобы система координат оставалась прямоугольной):

$$9\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+4\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=4$$

Проводим теперь уже очевидную замену:

$$\begin{cases} x' = x+\dfrac{1}{3} \\ y' = y-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

И выписываем уравнение кривой в новых координатах:

$$9x'^2+4y'^2=4 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{(2/3)^2}+\frac{y'^2}{1^2}=1$$

Это уравнение эллипса, но... снова не каноническое, потому что $2/3<1$. Забудем про замену x', y'. Замену координат стоило делать так (дополнительно ещё меняем оси местами[4]):

$$\begin{cases} x' = y-\dfrac{1}{2} \\ y' = x+\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

И каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x'^2}{1^2}+\frac{y'^2}{(2/3)^2}=1$$

Определим положение начала новой системы координат O' в старой и выражения новых базисных векторов $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$ через старые $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. Для этого надо вывести формулы для обратной замены:

$$\begin{cases} x = \phantom{x'+{}} y' - \dfrac{1}{3} \\ y = x' + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Координаты O':

$$\begin{cases} x = 0-\dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{3} \\ y = 0+\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Компоненты новых базисных в старом базисе:

$$\boldsymbol{e}'_1=(0,1), \quad \boldsymbol{e}'_2=(1,0)$$

(Поменяли оси, поэтому базисные тоже "поменялись".) □

[4]Стоит только иметь в виду, что при такой "перемене мест осей" меняется и ориентация базиса. Чтобы ориентация сохранилась, надо бы было выполнить *поворот* на $\pi/2$. Но решили в этой задаче обойтись без поворота, поэтому опустим)

2.2. # 9.4(1)

Определить тип кривой второго порядка. Составить её каноническое уравнение и найти каноническую систему координат. Изначально кривая задана в некоторой *прямоугольной системе координат* уравнением:

$$F(x, y) = 2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0 \tag{4}$$

Решение.

Способ I ("канонический").

Тип кривой можно определить либо сразу, либо в самом конце, когда получим каноническое уравнение. Давайте отложим на конец (а в другом варианте решения сделаем это сразу).

Первый шаг — надо повернуть систему координат так, чтобы исчез член со смешанным произведением переменных xy. Поворот системы координат:

$$\begin{cases} x = x' \cos\phi - y' \sin\phi \\ y = x' \sin\phi + y' \cos\phi \end{cases}$$

Подставляем в исходное уравнение и смотрим, что получается как коэффициент при $x'y'$:

$$\begin{aligned} F'(x', y') = 2(x' \cos\phi - y' \sin\phi)^2 - 4(x' \cos\phi - y' \sin\phi)(x' \sin\phi + y' \cos\phi) \\ + 5(x' \sin\phi + y' \cos\phi)^2 + \ldots = (6 \sin\phi \cos\phi - 4\cos^2\phi + 4\sin^2\phi)x'y' + \ldots = 0 \end{aligned}$$

Откуда получаем условие на угол поворота ϕ, чтобы коэффициент при $x'y'$ обратился в ноль:

$$3 \sin 2\phi - 4 \cos 2\phi = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\phi = \frac{4}{3}$$

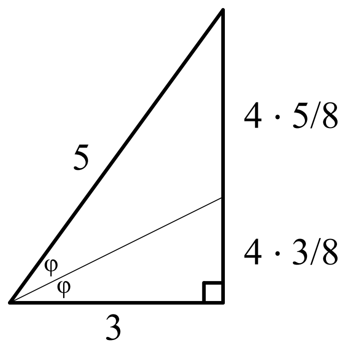

Рис. 3: К нахождению $\sin\phi$ и $\cos\phi$ по $\operatorname{tg} 2\phi$, *если считать* 2ϕ *острым*.

Из рисунка (3), например, можно найти синус и косинус для одинарного угла (*при условии, что* 2ϕ *острый*[5]):

$$\begin{cases} \sin\phi = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos\phi = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

[5]Но можно бы было выбрать и тупой 2ϕ…

Тогда первая замена:

$$\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y' \end{cases}}$$

Снова подставляем это представление x и y через x' и y' в исходное уравнение, но на этот раз выписываем все члены, кроме $x'y'$ (так как он должен занулиться):

$$F'(x', y') = \ldots = x'^2 + 6y'^2 + \frac{14x'}{\sqrt{5}} - \frac{12y'}{\sqrt{5}} + 9 = 0$$

Далее можно выделить полные квадраты, чтобы избавиться от линейных членов

$$\left(x'^2 + 2 \cdot \frac{7}{\sqrt{5}}x' + \frac{49}{5}\right) - \frac{49}{5} + \left(\left(\sqrt{6}y'\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{6}y \cdot \frac{6}{\sqrt{30}} + \frac{36}{30}\right) - \frac{36}{30} + 9 = 0$$

$$\left(x' + \frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\sqrt{6}y' - \frac{6}{\sqrt{30}}\right)^2 = 2$$

$$\left(x' + \frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2 + 6\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2$$

Откуда видна следующая замена:

$$\boxed{\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{7}{\sqrt{5}} \\ y'' = y' - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}}$$

Уравнение при этом в переменных x'', y'' примет вид:

$$x''^2 + 6y''^2 = 2$$

Или, уже каноническое:

$$\frac{x''^2}{2} + \frac{y''^2}{1/3} = 1$$

Видно, что крива второго порядка — эллипс. Осталось задать каноническую систему координат, связав её с исходной. Можно вывести замену x и y сразу на x'' и y'' — тогда станет известна матрица перехода от исходного базиса к новому и положение новой (канонической) системы координат относительно исходной.

Выражая и подставляя из одной замены в другую, получаем

$$\begin{cases} x = \ldots = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x'' - \dfrac{1}{\sqrt{5}}y'' - 3 \\ y = \ldots = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x'' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y'' - 1 \end{cases}$$

Откуда видны компоненты новых базисных векторов в старом базисе и положение нового начала:

$$\begin{cases} O'(-3,-1) \\ e'_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ e'_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \end{cases}$$

Способ II (“через центр”).

Если у кривой есть центр, то удобнее начинать замены с переноса начала координат в этот центр. Из системы уравнений (2) можно понять, есть у кривой центр или нет. И, если есть, найти его координаты

$$\begin{cases} 2x_0 - 2y_0 + 4 = 0 \\ -2x_0 + 5y_0 - 1 = 0 \end{cases}$$

Определитель системы

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

(из того, что определитель больше нуля, сразу можно заключить, что кривая эллиптического типа). Решая далее, например, по методу Крамера, находим

$$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = -1 \end{cases}$$

И первая замена — перенос начала координат в центр:

$$\begin{cases} x = -3 + x' \\ y = -1 + y' \end{cases}$$

Подставляя в уравнение (4), получаем

$$2x'^2 + 5y'^2 - 4x'y' = 2$$

то есть линейные члены ушли. Осталось повернуть систему координат. Поворот должен быть таким же, как в первом способе решения. В итоге

$$x''^2 + 6y''^2 = 2$$

Получили то же самое, что и в первый раз, но вычислений пришлось проводить в разы меньше (и вероятность совершить какую-нибудь ошибку тоже была меньше). Координаты нового центра при этом стали известны уже на стадии первой замены переменных. □

3. Дополнение: Ещё задача про касательные

3.1. # 8.29(3)

Доказать, что пучок света, испущенный из фокуса параболы, отразившись от её стенок, пойдёт параллельно оси параболы.

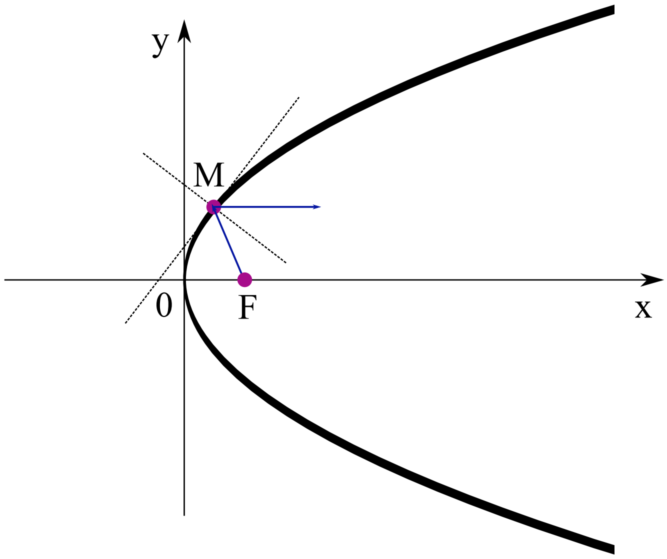

Рис. 4: Луч, исходящий из фокуса параболы и отражённый далее от её “стенки”.

Решение. Рассмотрим параболу в её канонической системе координат. Там она задаётся уравнением $y^2 = 2px$, и уравнение касательной в точке $M(x_0, y_0)$ будет $yy_0 = p(x + x_0)$, или, если раскрыть скобки и перенести всё в одну часть:

$$p \cdot x - y_0 \cdot y + px_0 = 0$$

Откуда получаем направляющий вектор касательной $\boldsymbol{a} = (y_0, p)$ и вектор нормали к касательной $\boldsymbol{n} = (p, -y_0)$.

Рассмотрим луч, исходящий из фокуса параболы F в точку M (4). По предположению, отражённый луч параллелен вектору $\boldsymbol{v}_\parallel = (1, 0)$ (параллелен оси параболы). Вектор же $\boldsymbol{v}$, вдоль которого идёт испущенный из фокуса луч, равен $\left(x_0 - \frac{p}{2}, y_0 - 0\right)$. Найдём углы $\angle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n})$ и $\angle\left(\boldsymbol{n}, -\boldsymbol{v}_\parallel\right)$. Если они окажутся равны, то мы докажем что требуется. Итак,

$$\cos\angle\left(\boldsymbol{n}, -\boldsymbol{v}_\parallel\right) = -\frac{p}{\sqrt{p^2 + y_0^2}}$$

$$\cos\angle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}) = \frac{p\left(x_0 - \frac{p}{2}\right)^2 - y_0 y_0}{\sqrt{p^2 + y_0^2}\sqrt{\left(x_0 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_0^2}} = \ldots = -\frac{p}{\sqrt{p^2 + y_0^2}}$$

Углы равны. □