

Семинар 1

Алексеев Василий

1 сентября 2020

Содержание

1	Матрицы и определители 2-го и 3-го порядков	1
1.1	Матрицы	1
1.1.1	Операции с матрицами	1
1.2	Определитель матрицы	3
1.2.1	Свойства определителя	5
2	Системы линейных уравнений. Правило Крамера	7

1. Матрицы и определители 2-го и 3-го порядков

1.1. Матрицы

Матрица A размера $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

1.1.1. Операции с матрицами

Определение 1.1 (Сложение матриц). Пусть $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Суммой $A + B$ называется матрица $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, такая что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Определение 1.2 (Умножение матрицы на число). Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Произведением матрицы A на число α называется матрица C , такая что $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Замечание. Матрицы $\mathbb{R}^{n \times n}$ с введённой операцией сложения и умножения на числа из \mathbb{R} образуют линейное пространство¹:

1. $A + B = B + A$, $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (коммутативность сложения).
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$, $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (ассоциативность сложения).
3. $\exists 0_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n} : 0_{n \times n} + A = A$, $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
4. $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n} \exists -A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A + (-A) = 0_{n \times n}$.
5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (ассоциативность умножения на скаляр).
6. $1 \cdot A = A$, $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
7. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (дистрибутивность умножения матрицы на число относительно сложения чисел).
8. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (дистрибутивность умножения матрицы на число относительно сложения матриц).

Определение 1.3 (Умножение матриц). Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Тогда матрица C называется произведением матриц A и B , если

$$\begin{cases} c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

и обозначается $C = AB$.

¹wikipedia.org/wiki/Vector_space

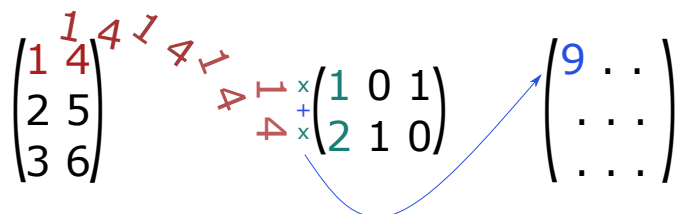


Рис. 1: Иллюстрация умножения матриц.

Задача (15.5(7)).

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Задача (T1*). Для матриц A, B, C определены произведения AB, AC, BC . Всегда ли определено произведение $BB = B^2$?

Решение. Обозначим размерности (число строк и число столбцов) в матрицах A, B, C за $(m_a, n_a), (m_b, n_b), (m_c, n_c)$ соответственно. Тогда условие задачи (возможность умножения матриц) можно переписать так:

$$\begin{cases} m_a = n_b \\ m_a = n_c \\ m_b = n_c \end{cases}$$

И получаем

$$m_b = n_c = m_a = n_b \Rightarrow m_b = n_b$$

Поэтому произведение B^2 также определено.

□

Задача (15.11(9)). Вычислить матрицу в степени (произведение нескольких одинаковых матриц)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^n$$

Решение. Начинаем умножать и видим закономерность:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \color{violet}{1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \color{violet}{1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \color{violet}{1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \color{violet}{1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \color{violet}{1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \color{violet}{1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^{n-3} \\
 &= \begin{pmatrix} \color{violet}{1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \color{violet}{1} & \dots & 0 & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \color{violet}{1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \color{violet}{1} \end{pmatrix} = E_{n \times n}
 \end{aligned}$$

□

И ещё пара небесполезных концепций из мира матриц.

Определение 1.4 (Транспонирование матрицы). Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Тогда транспонированной по отношению к матрице A матрицей называется такая матрица, что $c_{ij} = a_{ji}$. Транспонированная матрица обозначается A^T .

Определение 1.5 (След матрицы). Следом матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется сумма элементов, находящихся на главной диагонали $\{a_{ij} \mid i = j, i = 0, \dots, n\}$:

$$\begin{cases} \text{Sp} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{Sp} : A \mapsto \sum_{i=1}^n a_{ii} \end{cases}$$

У следа есть несколько возможных обозначений. Например, можно ещё писать $\text{Tr } A$.

1.2. Определитель матрицы

Об определителе можно думать как о числовой функции на множестве матриц, обозначаемой \det или $|\cdot|$

$$\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

и обладающей некоторыми свойствами. Конкретное определение \det можно вводить по-разному (через свойства функции, или даже через конкретную формулу вычисления по элементам матрицы 1). Мы пока опустим строгое определение \det . Так как мы делаем

фокус на решении задач, то нам не так важно последовательное изложение теории. Поэтому будем считать, что определитель “просто есть”, как-то задан. И рассмотрим, как его вычислять для квадратных матриц размерности 2, 3, и пару свойств определителя (некоторые из которых следуют из определения, которое мы опускаем).

Пример. Определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Пример. Определитель третьего порядка (разложение по первой строке):

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 \end{aligned}$$

Задача (14.7(3)).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2)) - 2 \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2)) + 2 \cdot (2 \cdot (-2) - 2 \cdot 1) = -3 - 12 - 12 = -27$$

□

Пример. Определитель единичной матрицы:

$$\det E = 1^n = 1$$

Теорема 1.1. *Определитель транспонированной матрицы*

$$\det A^T = \det A$$

Теорема 1.2. *Определитель произведения двух квадратных матриц:*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Определение 1.6 (Вырожденная матрица²). Матрица A называется вырожденной, если $\det A = 0$. В противном случае матрица A называется невырожденной.

Теорема 1.3. *Определитель обратной к невырожденной матрице*

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

²Определение вырожденной матрицы можно вводить по-разному. Ещё возможный вариант: квадратная матрица называется вырожденной, если её строки $\{a_i\}_{i=1}^n$ линейно зависимы. Строки линейно зависимы — когда существует нетривиальная линейная комбинация строк, которая даёт нулевую строку: $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = 0$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 > 0$.

Теорема 1.4 (Формула полного разложения определителя). Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Тогда определитель $\det A$ матрицы равен

$$\det A = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} (-1)^{N(i_1, \dots, i_n)} a_{1i_1} \dots a_{ni_n} \quad (1)$$

где $N(i_1, \dots, i_n)$ — число нарушений порядка в перестановке чисел i_1, \dots, i_n ³. Сумма в формуле берётся по всем перестановкам чисел $1, \dots, n$ ⁴.

Пример. Вспомним формулу вычисления определителя для матрицы размера 3:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1$$

Элементы в каждом слагаемом упорядочены по номеру столбца. Поэтому посмотрим на число беспорядков по строкам (неважно, как считать беспорядки, по строкам или по столбцам, потому что $\det A = \det A^T$). В первом слагаемом: $N(1, 2, 3) = 0$. Во втором: $N(1, 3, 2) = 1$ (тройка и двойка). В третьем: $N(2, 1, 3) = 1$ (двойка и единица). В четвёртом: $N(3, 1, 2) = 2$ (два беспорядка с тройкой и единицей и тройкой и двойкой). В пятом: $N(2, 3, 1) = 1 + 1 = 2$ (для двойки и единицы и для тройки и единицы). В шестом: $N(3, 2, 1) = 2 + 1 = 3$ (тройка-двойка, тройка-единица, двойка-единица).

1.2.1. Свойства определителя

Теорема 1.5. Некоторые свойства определителя (матрицы в формулах ниже представляются столбцами $a_i \in \mathbb{R}^n$):

1. *Линейность по столбцу (строке) — полилинейность:*

$$\begin{cases} \det(a_1, \dots, \underbrace{p+q}_{a_i}, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, p, \dots, a_n) + \det(a_1, \dots, q, \dots, a_n) \\ \det(a_1, \dots, \underbrace{\alpha p}_{a_i}, \dots, a_n) = \alpha \det(a_1, \dots, p, \dots, a_n) \end{cases}$$

2. *При перестановке двух столбцов (строк) матрицы её определитель меняет знак:*

$$\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = -\det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

3. *Если два столбца (две строки) матрицы совпадают, то её определитель равен нулю:*

$$\det(a_1, \dots, p, \dots, p, \dots, a_n) = 0$$

Свойства можно доказать как следствия теоремы 1.4.

И ещё пара более частных утверждений, которые следуют/являются подслучаями свойств выше:

- Общий множитель элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя:

$$\det(a_1, \dots, \alpha p, \dots, a_n) = \alpha \cdot \det(a_1, \dots, p, \dots, a_n)$$

³Нарушение порядка — когда правее большего элемента стоит меньший элемент: $i_k > i_s$, но $k < s$.

⁴Например, перестановки чисел 1, 2, 3: (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).

- К любой строке (столбцу) матрицы можно прибавлять линейную комбинацию других строк (столбцов) — определитель при этом не изменится:

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \alpha_j \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n)$$

- При вычислении определителя матрицы вида αA скаляр α можно выносить за знак \det следующим образом:

$$\det \alpha A = \alpha^n \det A$$

Задача (14.24(1)). Вычислить определитель порядка n

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

Решение. Раскладываем определитель по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Рассмотрим первый из определителей во второй части равенства выше. Пользуясь свойствами определителя, его можно посчитать так:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1^{n-1} = 1$$

Если обозначит искомый определитель как Δ_n , то второй из определителей в первой формуле есть просто Δ_{n-1} . Итого,

$$\Delta_n = 1 - \Delta_{n-1}$$

Посмотрим на Δ_n при $n = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= 1 \\ \Delta_2 &= 1 - 1 = 0 \\ \Delta_3 &= 1 - 0 = 1 \\ \Delta_4 &= 1 - 1 = 0 \\ \Delta_5 &= 1 - 0 = 1 \\ &\dots\end{aligned}$$

Очевидно⁵,

$$\Delta_n = \begin{cases} 1, 2 \nmid n \\ 0, 2 \mid n \end{cases} \equiv [2 \nmid n]^6$$

□

2. Системы линейных уравнений. Правило Крамера

Система m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

В матричном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Или так:

$$Ax = b$$

Определение 2.1 (Решение системы).

$$\{x \in \mathbb{R}^N \mid Ax = b\}$$

Определение 2.2. Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если у неё нет решений.

Определение 2.3. Говорят, что система B следует из системы A , если множество решений B содержит множество решений A 2.

Теорема 2.1. Пусть число уравнений в системе m равно числу неизвестных n . Тогда если $\det A \neq 0$, то система $Ax = b$ имеет решение, и притом только одно.

Теорема 2.2 (Правило Крамера). Пусть число уравнений в системе m равно числу неизвестных n . Тогда если $\det A \neq 0$, то

$$\begin{cases} x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \\ \Delta \equiv \det A \\ \Delta_i \equiv \det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n) \end{cases}$$

⁵ $a \div p \equiv p \mid a$

⁶ Встречаются такие более короткие записи выражения индикатора (либо 0, либо 1 в зависимости от некоторого условия): $[\cdot]$, $I[\cdot]$. Например, “ b равно 3, если a равно 2; иначе b равно 17.5” можно записать так: $b = 3 \cdot [a = 2] + 17.5 \cdot [a \neq 2]$.

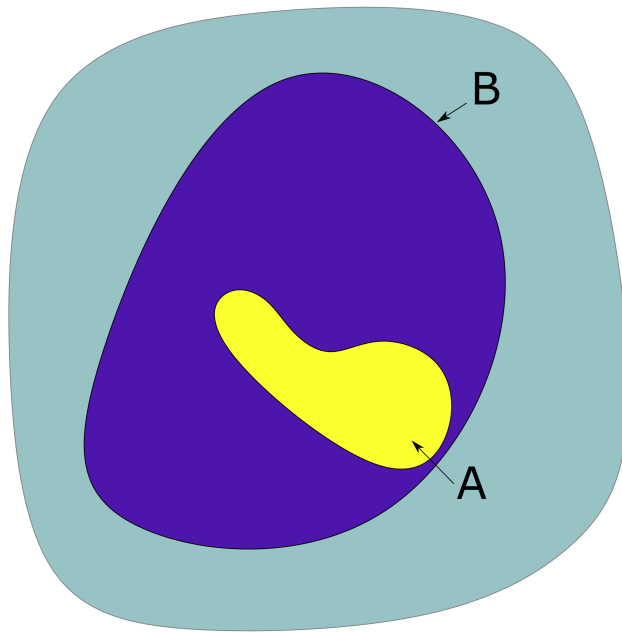


Рис. 2: Множество решений A содержится во множестве решений B .

Задача (17.2(4)).

$$\begin{cases} Ax = b \\ A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\ b = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} = -1$$

$$\Delta_1 = \det \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 \\ 10 & 7 & 2 \\ 9 & 2 & -4 \end{pmatrix} = -3 \Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -2 & 10 & 2 \\ 3 & 9 & -4 \end{pmatrix} = -2 \Rightarrow x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\Delta_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -2 & 7 & 10 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix} = -1 \Rightarrow x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□