Семинар 5

Алексеев Василий

7 + 10 марта 2023

Содержание

1. Линейные отображения 1

1.1. Отображение. Инъективность и сюръективность

Об *отображении* $\phi : X \to Y$ можно думать как о правиле, которое *каждому* элементу множества X ставит в соответствие *единственный* элемент множества Y[1] (1). Если отображение ϕ переводит элемент $x \in X$ в элемент $y \in Y$, то можно записать $\phi(x) = y$, при этом y называется *образом* x, а x — прообразом y (одним из возможных, если их несколько).

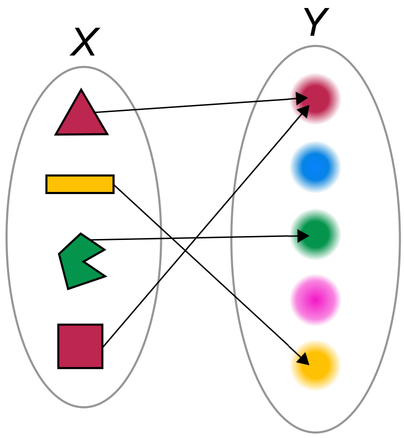


Рис. 1: Отображение: каждому элементу X соответствует единственный элемент Y (источник картинки: Википедия).

Можно отметить несколько свойств, которыми могут обладать произвольные отображения.

Определение 1.1. Отображение ϕ называется *инъективным*, если разные элементы отображаются в разные (2a): $x_1, x_2 \in X, \; x_1 \neq x_2 \Rightarrow \phi(x_1) \neq \phi(x_2)$. Иными словами, если у элемента $y \in Y$ есть прообраз, то он единственный.

Определение 1.2. Отображение ϕ называется *сюръективным*, если у *любого* элемента $y \in \in Y$ есть прообраз (2b): $\forall y \in Y \; \exists x \in X : \phi(x) = y$.

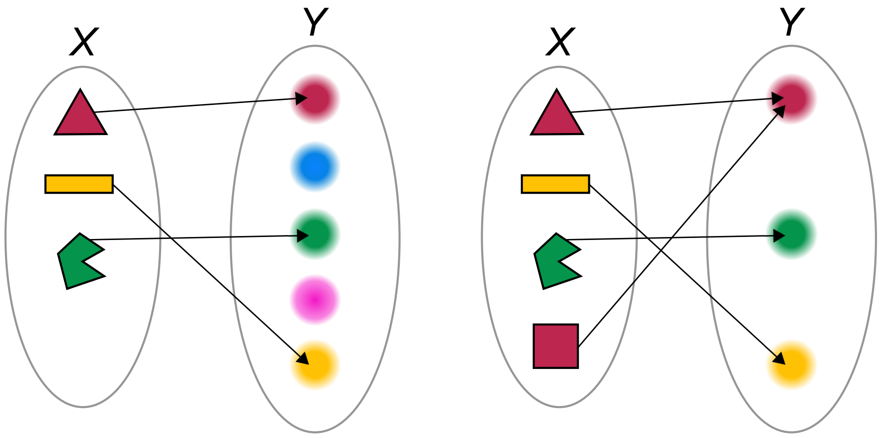
Факт наличия у отображения обоих приведённых выше свойств сразу выделяется в отдельное свойство.

Определение 1.3. Отображение ϕ называется *биективным*, если у *любого* элемента $y \in Y$ есть *единственный* прообраз: $\forall y \in Y \; \exists! x \in X : \phi(x) = y$.

Помимо множества X (области определения отображения ϕ, или domain), и множества Y (для которого, похоже, в русском языке нет специального названия, а по-английски — codomain) можно выделить ещё одно “интересное” множество, связанное с отображением ϕ — это *множество значений* отображения $\operatorname{Im} \phi \subseteq Y$, которое определяется как совокупность всех элементов $y \in Y$, в которые в принципе “можно попасть” под действием отображения:

$$\operatorname{Im} \phi = \{ y \in Y \mid \exists x \in X : \phi(x) = y \}$$

[1] Множество X в таком случае называется *областью определения* отображения ϕ (множество “допустимых” входов). Таким образом, область определения — это часть определения отображения (определение области определения отображения — “тот самый X” из определения отображения). Поэтому, когда в “школьных” номерах по математике просили “найти область определения функции”, то имели в виду найти “максимально возможное по количеству элементов множество, которое могло бы выступать в роли области определения функции” (если бы привели полноценное определение этой функции, а не просто формулу).



(a) Инъекция. (b) Сюръекция.

Рис. 2: Инъекция: “разные в разные”, или “если есть прообраз, то один”. Сюръекция: “у каждого есть хотя бы один прообраз”.

Тогда сюръективность означает, что $\operatorname{Im}\phi = Y$.

1.2. Линейное отображение. Ядро и множество значений

Определение 1.4. Пусть X и Y — линейные пространства, размерностей n и m соответственно (возможно, разных). Тогда отображение[2] $\phi\colon\ X \to Y$ называется *линейным*, если

- $\phi(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \phi(\boldsymbol{x}_1) + \phi(\boldsymbol{x}_2), \quad \forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X$
- $\phi(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\phi(\boldsymbol{x}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{x} \in X$

Далее отметим несколько небезынтересных утверждений, связанных именно с линейными отображениями. Но сначала введём ещё одно понятие (которое можно ввести в виду того, что X и Y линейные пространства).

Определение 1.5. *Ядром* отображения[3] ϕ называется подмножество элементов $\operatorname{Ker}\phi \subseteq X$, которые в результате действия ϕ отображаются в нулевой элемент пространства Y:

$$\operatorname{Ker}\phi = \{\boldsymbol{x} \in X \mid \phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$$

Утверждение 1.1. *$\operatorname{Ker}\phi$ есть линейное подпространство в X.*

Доказательство. Покажем это, проверив замкнутость относительно операций сложения и умножения на число (которые определены в линейном пространстве X). Пусть $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \operatorname{Ker}\phi$, то есть $\phi(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{0}$ и $\phi(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0}$. Тогда, пользуясь линейностью ϕ, можем расписать, чему равен образ суммы $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$:

$$\phi(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \phi(\boldsymbol{x}_1) + \phi(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in \operatorname{Ker}\phi$$

Аналогично, образ вектора, полученного умножением произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ из ядра на число $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\phi(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\phi(\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \alpha\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker}\phi$$

$\square$

[2] Начиная с этого определения и далее в конспекте векторы “абстрактных” пространств X и Y будут обозначаться жирным шрифтом, чтобы их проще было отличать от “обычных” числовых вектор-столбцов, которые далее ещё появятся.

[3] В этом разделе отображение иногда может упоминаться просто как “отображение ϕ” — имеется в виду именно $\phi\colon\ X \to Y$, то есть отображение из линейного пространства X в линейное пространство Y.

Раз ядро подпространство, то в нём как минимум есть нулевой вектор пространства X. (И это не сложно показать.) С ядром также связан возможный способ проверки инъективности отображения.

Утверждение 1.2 (“Критерий инъективности”).

Отображение ϕ инъективно $\Leftrightarrow$ его ядро нулевое: $\operatorname{Ker}\phi = \{\mathbf{0}\}$.

Доказательство. “Слева-направо”. Пусть отображение инъективно. Покажем, что тогда обязательно ядро нулевое. Допустим, что это не так, то есть $\exists \boldsymbol{x}^* \in \operatorname{Ker}\phi$, $\boldsymbol{x}^* \neq \mathbf{0}$. Как отсюда получить противоречие с инъективностью? Инъективно — “разные в разные”. Пусть $\boldsymbol{x} \in X$. Тогда

$$\phi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^*) = \phi(\boldsymbol{x}) + \phi(\boldsymbol{x}^*) = \phi(\boldsymbol{x})$$

то есть образы $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^*$ и $\boldsymbol{x}$ совпадают, но сами векторы разные, так как $\boldsymbol{x}^*$ ненулевой. А при инъективном отображении такого не может быть.

“Справа-налево”. Пусть ядро отображения нулевое. Покажем, что при этом отображение обязательно инъективно. Снова предположим, что это не так, то есть найдутся $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$, но $\phi(\boldsymbol{x}_1) = \phi(\boldsymbol{x}_2)$. Раз так, то, пользуясь линейностью ϕ, получаем:

$$\mathbf{0} = \phi(\boldsymbol{x}_1) - \phi(\boldsymbol{x}_2) = \phi(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \in \operatorname{Ker}\phi$$

но $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \neq \mathbf{0}$, то есть нашли ненулевой элемент в ядре. А по условию такого не может быть. □

Утверждение 1.3. $\operatorname{Im}\phi$ *есть линейное подпространство в Y.*

Доказательство. Аналогично проверке того, что ядро подпространство — здесь тоже можно показать замкнутость множества значений, но уже в линейном пространстве Y (относительно операций сложения и умножения на число, определённых в Y). Пусть есть векторы $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in Y$. Это значит, что у каждого из них есть прообраз (хотя бы один), то есть найдутся $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X$, такие что $\phi(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{y}_1$ и $\phi(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{y}_2$. Посмотрим на сумму $\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2$ — будет ли она в $\operatorname{Im}\phi$? Да, имея в виду линейность ϕ, несложно найти её возможный прообраз:

$$\phi(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \phi(\boldsymbol{x}_1) + \phi(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 \Rightarrow \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 \in \operatorname{Im}\phi$$

Точно так же с умножением на число $\alpha \in \mathbb{R}$ произвольного вектора $\boldsymbol{y} \in \operatorname{Im}\phi$, в который отображается, например, вектор $\boldsymbol{x} \in X$:

$$\phi(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\phi(\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{y} \Rightarrow \alpha\boldsymbol{y} \in \operatorname{Im}\phi$$

□

Раз множество значений отображения является подпространством Y, то несложно прийти к такому способу проверки сюръективности.

Утверждение 1.4 (“Критерий сюръективности”).

Отображение ϕ сюръективно $\Leftrightarrow \dim\operatorname{Im}\phi = \dim Y$.

Если размерность подпространства совпадает с размерностью всего пространства, то, очевидно, подпространство и есть пространство (например, трёхмерное “подпространство” в геометрическом пространстве векторов трёхмерного пространства). Но $\operatorname{Im}\phi = Y$ и есть суть сюръективности.

Сравнение размерностей в самом деле удобный способ, потому что как бы ещё можно было проверить сюръективность? Перебирать все $\boldsymbol{y} \in Y$ и искать прообраз? А так — можно выбрать базис в Y, найти базис в $\operatorname{Im}\phi$, сравнить числа векторов в базисах, и из этого сразу будет понятно, сюръективно ϕ или нет.

1.3. Матрица линейного отображения

Выберем базисы (3) в пространствах X и Y: строчки из базисных векторов $e = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n) \subset$ $\subset X$ и $f = (\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_m) \subset Y$ (считаем $n > 0$ и $m > 0$). Рассмотрим действие отображения ϕ на вектор $\boldsymbol{x} \in X$, столбец компонент которого в базисе e есть $\xi = (x_1, \dots, x_n)^T$:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \phi(x_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1\phi(\boldsymbol{e}_1) + \dots + x_n\phi(\boldsymbol{e}_n) = \underbrace{\big(\phi(\boldsymbol{e}_1), \dots, \phi(\boldsymbol{e}_n)\big)}_{\substack{\text{строка}\\\text{векторов}}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\substack{\text{столбец}\\\text{координат}}}$$

Вектор, например, $\phi(\boldsymbol{e}_1) \in Y$ также можно разложить по базису, но уже по базису f:

$$\phi(\boldsymbol{e}_1) = a_{11}\boldsymbol{f}_1 + \dots + a_{m1}\boldsymbol{f}_m = (\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_m)\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Обозначим символом $a_1 \in \mathbb{R}^m$ вектор-столбец $(a_{11}, \dots, a_{m1})^T$ координат вектора $\phi(\boldsymbol{e}_1)$ в базисе f[4].

Таким образом, возвращаясь к вычислению образа вектора $\boldsymbol{x}$:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \big(\phi(\boldsymbol{e}_1), \dots, \phi(\boldsymbol{e}_n)\big)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_m)\underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_{A \in \mathbb{R}^{m\times n}}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = fA\xi$$

С другой стороны, так как вектор $\phi(\boldsymbol{x}) \in Y$, то он раскладывается по базису f с некоторыми коэффициентами $\eta = (y_1, \dots, y_m)^T$:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_m)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = f\eta$$

Получили два представления одного и того же вектора $\phi(\boldsymbol{x})$:

$$f\eta = fA\xi \xrightarrow{f\ \text{базис}} \boxed{\eta = A\xi} \tag{1}$$

Матрица A называется *матрицей линейного отображения* в паре базисов e и f.

1.4. Изменение матрицы линейного отображения

Пусть в пространстве X выбран новый базис $e' = (\boldsymbol{e}'_1, \dots, \boldsymbol{e}'_n)$. Причём известна матрица $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ перехода от старого базиса e к новому e': $e' = eS$. Пусть также в пространстве Y выбран новый базис $f' = fP$, где $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$ есть матрица перехода.

Какой будет матрица A' отображения ϕ в новой паре базисов e' и f'?

При базисах e и f в прошлом разделе для произвольного $\boldsymbol{x} \in X$ было получено (1):

$$\phi(\boldsymbol{x}) = f\eta = fA\xi$$

[4] В обозначениях рисунка (3) $\phi(e_1)$ это $\widetilde{\phi}\big(h_X(\boldsymbol{e}_1)\big)$.

$$
\begin{tikzcd}
X \ni \boldsymbol{x} \arrow[r, mapsto, "\phi"] \arrow[d, mapsto, "h_X"'] & \boldsymbol{y} \in Y \arrow[d, mapsto, "h_Y"] \\
\mathbb{R}^n \ni \xi \arrow[r, mapsto, "\widetilde{\phi}"'] & \eta \in \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}
$$

Рис. 3: Линейное отображение $\phi\colon X \to Y$, действующее из линейного пространства X размерности n в линейное пространство Y размерности m. Выбор базиса $e = (e_1, \ldots, e_n)$ в пространстве X порождает отображение h_X, переводящее вектор $x \in X$ в его координатный столбец $\xi \in \mathbb{R}^n$. Аналогично, выбор базиса $f = (f_1, \ldots, f_m)$ в пространстве Y порождает отображение h_Y, переводящее вектор $y \in Y$ в его координатный столбец $\eta \in \mathbb{R}^m$. (Можно заметить, что h_X и h_Y — биекции, причём такие, которые сохраняют линейные операции: суммы и умножения на число.) Таким образом, выбор пары базисов e и f в пространствах X и Y порождает отображение $\widetilde{\phi}$, переводящее вектор-столбец ξ в вектор-столбец η (это отображение можно представить как композицию $\widetilde{\phi} = h_Y \phi h_X^{-1}$). При этом оказывается, что столбец координат образа вычисляется по правилу $\eta = A\xi$, где $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — *матрица линейного отображения* ϕ, которая определяется выбором базисов в пространствах X и Y.

Для того же $\boldsymbol{x}$ при выбранных базисах e' и f' точно так же можно получить ($\eta' \in \mathbb{R}^m$ и $\xi' \in \mathbb{R}^n$ — столбцы координат в новых базисах f' и e' соответственно):

$$\phi(\boldsymbol{x}) = f'\eta' = f'A'\xi'$$

Итого, можем приравнять:

$$fA\xi = f'A'\xi'$$

Далее, учтём, что $f' = fP$. Также что $e' = eS \Rightarrow \xi = S\xi' \Rightarrow \xi' = S^{-1}\xi$. Подставим в формулу выше выражение f' через f и ξ' через ξ:

$$fA\xi = (fP)A'(S^{-1}\xi) \xrightarrow{f\ \text{базис}} A\xi = PA'S^{-1}\xi \xrightarrow{\forall x \in X} A = PA'S^{-1} \Rightarrow \boxed{A' = P^{-1}AS}$$

Отдельно можно отметить случай *преобразования* $\phi\colon X \to X$. Так как пространства “откуда” и “куда” в этом случае одинаковы, то матрица преобразования при изменении базиса $e' = eS$ вычисляется по формуле:

$$A' = S^{-1}AS$$

Ещё из “интересного” про преобразования можно отметить: ядро $\operatorname{Ker}\phi$ и множество значений $\operatorname{Im}\phi$ являются подпространствами одного и того же линейного пространства X, поэтому обретают смысл некоторые вопросы, которые раньше просто не могли быть заданы, например “какое будет пересечение ядра и множества значений?”

2. Задачи

2.1. # 23.8(2)

Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{n}$ — ненулевые векторы геометрического векторного пространства X, причём $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) \neq 0$. Пусть $\mathscr{L}_1$ — прямая с направляющим вектором $\boldsymbol{a}$, а $\mathscr{L}_2$ — плоскость с вектором нормали $\boldsymbol{n}$.

Надо записать формулой преобразование $\phi: X \to X$, проверить его линейность, найти ядро, множество значений и ранг, если ϕ — ортогональное проектирование на $\mathscr{L}_1$.

Решение. Из геометрических соображений,

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \underbrace{|\boldsymbol{x}| \cos \angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})}_{\substack{\text{скалярная}\\ \text{проекция}}} \cdot \underbrace{\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}}_{\substack{\text{единичный}\\ \text{вектор}}} = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{a}|} \cdot \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

Поэтому линейность преобразования следует из линейности скалярного произведения. Например, ϕ от суммы:

$$\phi(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{a}) = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{a}) + \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{a}) = \phi(\boldsymbol{x}_1) + \phi(\boldsymbol{x}_2)$$

Аналогично $\phi(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha \phi(\boldsymbol{x})$.

Ядро преобразования — все векторы, которые отображаются в ноль. Очевидно, ядро ортогонального проектирования на прямую — это плоскость, перпендикулярная этой прямой. Но можно это и “строго” показать:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = 0 \Leftrightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ &\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{a} \end{aligned}\right.$$

Из того, что ядро — плоскость, следует, что $\dim \operatorname{Ker} \phi = 2$.

Множество значений ортогонального проектирования на прямую — это, очевидно, вся прямая (при проектировании получаем вектор на прямой, и обратно: любой вектор, параллельный прямой, можно получить проектированием некоторого вектора, хотя бы его же самого). Опять же, можно это и “строго” показать, через формулу:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = \underbrace{\boldsymbol{a} \cdot \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{a}|^2}}_{\phi(\boldsymbol{x}) \parallel \boldsymbol{a}\ \forall \boldsymbol{x} \in X \Rightarrow \operatorname{Im} \phi \subseteq \mathscr{L}_1} \xrightarrow{\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{a}} \underbrace{t\boldsymbol{a}, \quad t \in \mathbb{R}}_{\boldsymbol{y} \in \operatorname{Im} \phi\ \forall \boldsymbol{y} \in \mathscr{L}_1 \Rightarrow \mathscr{L}_1 \subseteq \operatorname{Im} \phi}$$

Множество значений — прямая. Поэтому размерность множества значений (она же ранг преобразования):

$$\dim \operatorname{Im} \phi = \operatorname{Rg} \phi = 1$$

Видно, что выполняется следующее соотношение[5]:

$$\operatorname{Rg} \phi + \dim \operatorname{Ker} \phi = 1 + 2 = 3 = \dim X$$

□

[5] Которое на самом деле тождество, и говорит, фактически, про то, что число базисных переменных плюс число свободных переменных (количество столбцов в фундаментальной матрице) при решении однородной системы равно общему числу переменных.

2.2. # 23.9(2)

Найти матрицу следующего преобразования $\phi\colon\ X \to X$ векторов трёхмерного геометрического пространства: ϕ — ортогональное проектирование на прямую $\mathscr{L}_1 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \in X \mid x_1 = x_2 = x_3\}$ (координаты векторов даны в ортонормированном базисе $e = = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$).

Решение. Направляющий вектор прямой:

$$\boldsymbol{a} = (1, 1, 1)^T$$

Формула, задающая преобразование:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a} \in X$$

С одной стороны, ϕ переводит вектор как направленный отрезок в другой вектор — направленный отрезок. С другой стороны, при заданном базисе, можно также думать о ϕ как о преобразовании между столбцами координат в базисе. Преобразование "связывает" векторы, матрица преобразования — их координатные столбцы. Тогда, чтобы найти матрицу преобразования A, надо получить ϕ в форме

$$\phi(\xi) = \eta = A\xi$$

то есть в виде матрицы A, умноженной на столбец $\xi = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ координат вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе e, и чтоб при этом получался столбец $\eta = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3$ координат образа $\phi(\boldsymbol{x})$ *в том же базисе* (так как ϕ — это преобразование).

Распишем координатный столбец $\eta \in \mathbb{R}^3$ образа $\phi(\boldsymbol{x})$:

$$\eta = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Можно бы было искать по отдельности столбцы A:

$$A = \big(\phi(\boldsymbol{e}_1)_e, \phi(\boldsymbol{e}_2)_e, \phi(\boldsymbol{e}_3)_e\big) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

где $\phi(\boldsymbol{e}_i)_e$, $i = 1, \ldots, 3$ есть координатные столбцы образов базисных векторов $\boldsymbol{e}_i$ в том же базисе e. Можно заметить, что получилось так, что $\dim \operatorname{Im} \phi = 1 = \operatorname{Rg} A$...

Если же бы ϕ рассматривалось не как преобразование, а как отображение $\widetilde{\phi}\colon\ X \to \widetilde{\mathscr{L}_1}$ (и пусть при этом за базис в $\mathscr{L}_1$ "естественным образом" выбран вектор $\boldsymbol{a}$), то матрица $\widetilde{A}$ была бы такой (индексом a снова обозначен базис, в котором составлен координатный столбец):

$$\widetilde{A} = \big(\phi(\boldsymbol{e}_1)_a, \phi(\boldsymbol{e}_2)_a, \phi(\boldsymbol{e}_3)_a\big) = (1/3, 1/3, 1/3)$$

$\square$

2.3. # 23.15(1)

Пусть линейное пространство $\mathscr{L}$ представимо как прямая сумма двух ненулевых подпространств: $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \oplus \mathscr{L}_2$.

Показать, что преобразование $\phi: \mathscr{L} \to \mathscr{L}$ проектирования на $\mathscr{L}_1$ параллельно $\mathscr{L}_2$ линейно. Найти ядро и множество значений ϕ. Найти матрицу преобразования ϕ в базисе $\mathscr{L}$, составленном из базисов подпространств $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$.

Решение. **Линейность.** Раз $\mathscr{L}$ выражено прямой суммой $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$, то любой вектор $\boldsymbol{x}$ из $\mathscr{L}$ единственным образом раскладывается в сумму двух, один из которых в $\mathscr{L}_1$, а другой в $\mathscr{L}_2$:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \oplus \mathscr{L}_2 \Leftrightarrow \underbrace{\boldsymbol{x}}_{\mathscr{L}} = \underbrace{\boldsymbol{x}_1}_{\mathscr{L}_1} + \underbrace{\boldsymbol{x}_2}_{\mathscr{L}_2}$$

В таком представлении

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1$$

И можно несложно проверить линейность преобразования:

$$\phi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \phi(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = \phi\big((\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2)\big) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1 = \phi(\boldsymbol{x}) + \phi(\boldsymbol{y})$$

Аналогично, $\phi(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha\phi(\boldsymbol{x})$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ядро преобразования:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}_1 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 \in \mathscr{L}_2 \Rightarrow \operatorname{Ker}\phi = \mathscr{L}_2$$

Множество значений есть подмножество $\mathscr{L}$ векторов $\boldsymbol{y}$, которые могут быть получены с помощью преобразования ϕ. То есть берём $\boldsymbol{y} \in \mathscr{L}$ и проверяем, при каких условиях его можно получить с помощью ϕ. Очевидно, если существует $\boldsymbol{x}$, являющийся прообразом некоторого $\boldsymbol{y}$, то

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \Rightarrow \boldsymbol{y} \in \mathscr{L}_1$$

То есть $\operatorname{Im}\phi \subseteq \mathscr{L}_1$. Но верно и в другую сторону:

$$\boldsymbol{y} \in \mathscr{L}_1 \Rightarrow \exists \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \in \mathscr{L} : \ \phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$$

Поэтому $\mathscr{L}_1 \subseteq \operatorname{Im}\phi$, и в итоге $\operatorname{Im}\phi = \mathscr{L}_1$.

Снова можно заметить, что выполняется соотношение[6]:

$$\boxed{\dim\operatorname{Im}\phi + \dim\operatorname{Ker}\phi = \dim X}$$

Матрица отображения. Пусть размерность $\mathscr{L}_1$ равна l, а размерность $\mathscr{L}_2$ равна k. Пусть $a = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_l)$ — базис в $\mathscr{L}_1$, а $b = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k)$ — базис в $\mathscr{L}$. Тогда за базис в $\mathscr{L}$ предлагается взять $a \cup b = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_l, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k)$[7].

В общем случае, столбцы матрицы отображения $\phi: X \to Y$ — это координатные столбцы базиса X в базисе Y. В случае преобразования, X и Y — одно и то же, и базис один.

[6] Верно и в общем случае для произвольного линейного отображения $\phi: X \to Y$. Доказательство можно свести к рассмотрению системы линейных уравнений $\eta_m = A_{m\times n}\xi_n$. В фундаментальной матрице соответствующей однородной системы будет $n - r$ столбцов, где $r = \operatorname{Rg} A$. По сути это и есть другая формулировка приведённого соотношения с размерностями.

[7] Так можно сделать, потому что $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \oplus \mathscr{L}_2$.

Поэтому столбцы матрицы преобразования ϕ — это координатные столбцы образов базисных векторов в том же базисе (индексом $a \cup b$ обозначено, в каком базисе компоненты)

$$A = \big(\phi(\boldsymbol{a}_1)_{a\cup b}, \dots, \phi(\boldsymbol{a}_l)_{a\cup b}, \phi(\boldsymbol{b}_1)_{a\cup b}, \dots, \phi(\boldsymbol{b}_k)_{a\cup b}\big) = \begin{pmatrix} E_{l\times l} & 0_{l\times k} \\ 0_{k\times l} & 0_{k\times k} \end{pmatrix}$$

так как $\phi(\boldsymbol{a}_i) = 1 \cdot \boldsymbol{a}_i$, а $\phi(\boldsymbol{b}_i) = \mathbf{0}$.

Если же рассмотреть ϕ не как преобразование, а как отображение $\widetilde{\phi}\colon \mathscr{L} \to \mathscr{L}_1$, то в данном случае базисы в пространствах "из" и "куда" уже отличаются. Столбцов в матрице отображения останется $l + k$, но строк уже будет всего l (потому что базис в пространстве "куда" $\mathscr{L}_1$ есть $(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_l)$). То есть матрица отображения $\phi\colon \mathscr{L} \to \mathscr{L}_1$ будет равна (индексом a обозначено, в каком базисе компоненты):

$$\widetilde{A} = \big(\widetilde{\phi}(\boldsymbol{a}_1)_a, \dots, \widetilde{\phi}(\boldsymbol{a}_l)_a, \widetilde{\phi}(\boldsymbol{b}_1)_a, \dots, \widetilde{\phi}(\boldsymbol{b}_k)_a\big) = \begin{pmatrix} E_{l\times l} & 0_{l\times k} \end{pmatrix}$$

□