

Семинар 4

Алексеев Василий

22 сентября 2021

Содержание

1	Замена системы координат (“флешбэк”)	1
2	Скалярное произведение	2
3	Смешанное и векторное произведения	5
3.1	Ориентированное пространство	5
3.2	Смешанное произведение	6
3.3	Векторное произведение	8
3.4	Задачи	10
4	Дополнение	13
4.1	Ещё задача про скалярное произведение	13
4.2	Ещё пара задач про векторное и смешанное произведения	14

1. Замена системы координат (“флешбэк”)

Задача (4.5). Есть две системы координат: $(O; e)$ и $(O'; e')$. Координаты произвольной точки в первой системе обозначаются за (x, y) , координаты той же точки, но во второй системе координат — (x', y') . Известна связь между (x, y) и (x', y') :

$$\begin{cases} x = 2x' - y' + 5 \\ y = 3x' + y' + 2 \end{cases}$$

Требуется найти

- Выражение (x', y') через (x, y) .
- Координаты точки O и компоненты векторов e_1, e_2 в системе $O'; e'$.
- Координаты точки O' и компоненты векторов e'_1, e'_2 в системе $O; e$.

Решение. Перепишем связь между координатами точки в разных системах в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}^S \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Перепишем как

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 5 \\ y - 2 \end{pmatrix}$$

И решим получившуюся систему относительно (x', y') с помощью метода Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$$

$$\Delta_{x'} = \begin{vmatrix} x - 5 & -1 \\ y - 2 & 1 \end{vmatrix} = x + y - 7$$

$$\Delta_{y'} = \begin{vmatrix} 2 & x - 5 \\ 3 & y - 2 \end{vmatrix} = -3x + 2y + 11$$

И сами координаты:

$$x' = \frac{\Delta_{x'}}{\Delta} = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y - \frac{7}{5}$$

$$y' = \frac{\Delta_{y'}}{\Delta} = -\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{11}{5}$$

Или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ -3/5 & 2/5 \end{pmatrix}}^{S'} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7/5 \\ 11/5 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Итак, теперь известны обе матрицы перехода S и S' : от базиса e к e' и наоборот¹.

¹Можно заметить, что $SS' = S'S = E$, то есть $S' = S^{-1}$.

Вспомогая соотношение для компонент радиусов-векторов точки в разных системах координат

$$\begin{cases} e' = eS \\ x_A = x_{O'} + Sx'_A \end{cases}$$

или просто подставляя нулевые векторы в соотношения для координат, получаем положения начал:

- Нулевой вектор в (1) $\Rightarrow x_O(O') = (5, 2)^T$
- Нулевой вектор в (2) $\Rightarrow x_{O'}(O) = \left(-\frac{7}{5}, \frac{11}{5}\right)^T$

Вспомогая, что столбцы матриц S и S' есть компоненты векторов одного базиса в другом, или просто умножая матрицы S и S' на векторы $(1, 0)^T$ и $(0, 1)^T$, получаем компоненты одних базисных векторов в другом базисе:

- Столбцы S' ($e = e'S'$)

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{5}e'_1 - \frac{3}{5}e'_2 \\ e_2 = \frac{1}{5}e'_1 + \frac{2}{5}e'_2 \end{cases}$$

- Столбцы S ($e' = eS$)

$$\begin{cases} e'_1 = 2e_1 + 3e_2 \\ e'_2 = -e_1 + e_2 \end{cases}$$

□

2. Скалярное произведение

Определение 2.1. Скалярное произведение (a, b) ненулевых векторов a и b определяется следующим образом:

$$(a, b) \equiv |a| \cdot |b| \cdot \cos \phi \quad (3)$$

где $|a|$ и $|b|$ — модули векторов a и b , а ϕ — угол между векторами a и b (не превосходящий π). В случае, если хотя бы один из пары векторов нулевой, скалярное произведение этих векторов полагается равным нулю.

Отметим несколько свойств скалярного произведения:

- $(a, a) \geq 0$. При этом $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
- $(a, b) = (b, a)$ — симметричность.
- Линейность по первому аргументу:

$$\begin{cases} (\alpha a, c) = \alpha(a, c), & \alpha \in \mathbb{R} \\ (a + b, c) = (a, c) + (b, c) \end{cases}$$

Первые свойства следуют из определения. Докажем последнее свойство.

Начнём с того, что при заданном направлении l любой вектор раскладывается в сумму двух (1):

$$r = r_{\parallel} + r_{\perp}$$

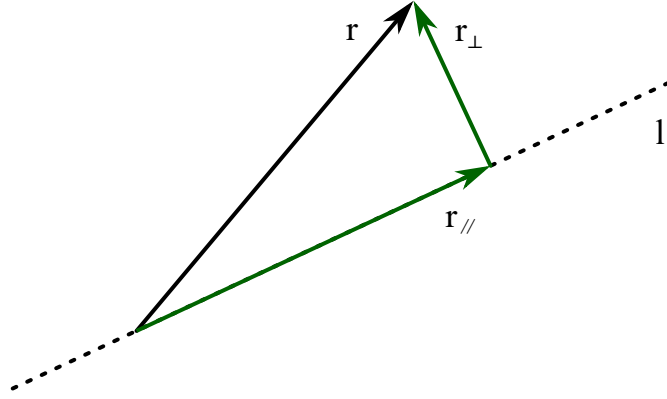


Рис. 1: Векторная проекция вектора \mathbf{r} на направление, определяемое вектором \mathbf{l} .

где \mathbf{r}_{\parallel} — вектор, параллельный \mathbf{l} , и \mathbf{r}_{\perp} — вектор, перпендикулярный \mathbf{l} . Компонента \mathbf{r}_{\parallel} называется *ортогональной векторной проекцией* вектора \mathbf{r} на направление, определяемое вектором \mathbf{l} , и может обозначаться так:

$$\pi_{\mathbf{l}}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{r}_{\parallel}$$

Кроме векторной проекции, есть ещё понятие скалярной проекции вектора \mathbf{r} на направление вектора \mathbf{l} :

$$\pi_{\mathbf{l}}(\mathbf{r}) \equiv |\mathbf{r}_{\parallel}| \cdot \begin{cases} +1 & \text{если } \mathbf{r}_{\parallel} \uparrow\uparrow \mathbf{l} \\ -1 & \text{если } \mathbf{r}_{\parallel} \downarrow\downarrow \mathbf{l} \end{cases}$$

Будем обозначать векторную и скалярную проекции одинаково. Из контекста должно быть понятно, какая имеется в виду.

Спроецируем теперь вектор $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ на направление, определяемое вектором \mathbf{c} :

$$\pi_{\mathbf{c}}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = |\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}| \cdot \cos \phi$$

где $\pi_{\mathbf{c}}(\cdot)$ — скалярная проекция на направление вектора \mathbf{c} , ϕ — угол между вектором $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ и вектором \mathbf{c} . Но проекция вектора, являющегося суммой нескольких векторов, равна сумме проекций этих векторов (в силу линейности скалярного произведения):

$$\pi_{\mathbf{c}}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \pi_{\mathbf{c}}(\alpha\mathbf{a}) + \pi_{\mathbf{c}}(\beta\mathbf{b})$$

поэтому

$$|\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}| \cdot \cos \phi = |\alpha\mathbf{a}| \cdot \cos \phi_1 + |\beta\mathbf{b}| \cdot \cos \phi_2$$

где ϕ_1 и ϕ_2 — углы, которые образуют векторы $\alpha\mathbf{a}$ и $\beta\mathbf{b}$ с вектором \mathbf{c} . Умножая обе части последнего равенства на модуль вектора \mathbf{c} , получаем то, что хотели доказать (при этом числовые множители можно вынести за знак модуля):

$$(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

□

Задача (2.22). Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ равны соответственно 1, 1 и 2. Углы между векторами: $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 90^\circ$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 60^\circ$.

Надо найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}(-1, 0, 2)$ и $\mathbf{b}(2, -1, 1)$.

Решение. Базис не ортонормированный, поэтому скалярные произведения надо будет считать “по-честному”.

Модуль вектора \mathbf{a} :

$$|\mathbf{a}|^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = (-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3)(-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) - 4(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) + 4(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = 1 - 4 + 16 = 13$$

Аналогично для вектора \mathbf{b} :

$$|\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{b}, \mathbf{b}) = (2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \dots = 11$$

Косинус угла между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} :

$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{(-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3) \cdot (2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{11}} = \dots = \frac{7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{11}}$$

Поэтому синус угла будет равен:

$$\sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{1 - \frac{49}{13 \cdot 11}}$$

И площадь параллелограмма:

$$S = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{13} \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt{1 - \frac{49}{13 \cdot 11}} = \sqrt{94}$$

□

В случае же **ортонормированного** базиса формулы с применением скалярных произведений упрощаются:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad (4)$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}}$$

Задача (2.24). Даны два вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} , причём $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Чему равна ортогональная проекция \mathbf{b} на направление, определяемое вектором \mathbf{a} ?

Решение.

$$\pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = |\mathbf{b}| \cos \angle(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

где левый множитель есть скалярная проекция вектора \mathbf{b} на направление \mathbf{a} , а правый — единичный вектор в направлении \mathbf{a} . Выражение можно записать по-другому, если домножить числитель и знаменатель на $|\mathbf{a}|$:

$$\pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a}$$

Векторная проекция \mathbf{b} сонаправлена с \mathbf{a} , если скалярное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) > 0$ и противоположно направлена \mathbf{a} в случае, если $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < 0$. Если $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, то векторная проекция — нулевой вектор. □

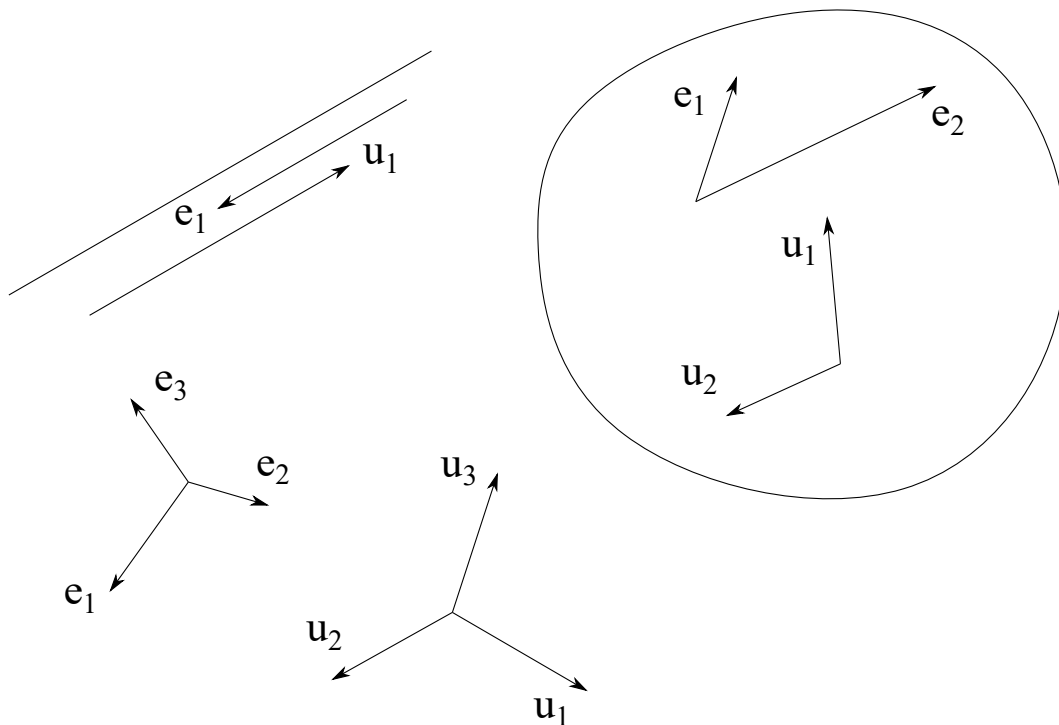


Рис. 2: Разные классы базисов в одно-, дву- и трёхмерном пространствах.

3. Смешанное и векторное произведения

3.1. Ориентированное пространство

На прямой все векторы делятся на два класса: направленные в одну сторону вдоль прямой и в противоположную (2). На плоскости все упорядоченные пары неколлинеарных векторов делятся на два класса: пары, где поворот от первого вектора ко второму по наименьшему углу совершается против часовой стрелки, и пары, где этот поворот совершается по часовой стрелке (2). И в трёхмерном пространстве все упорядоченные тройки некомпланарных векторов делятся на два класса: те, где поворот от первого базисного вектора ко второму по наименьшему углу происходит против часовой стрелки, если смотреть со стороны третьего базисного вектора (*правые* базисы), и те, где этот поворот происходит по часовой стрелке (*левые* базисы) (2).

Определение 3.1. Ориентированное пространство — пространство, в котором выбран класс базисов².

В ориентированном пространстве можно говорить о длине, площади и объёме со знаком.

Так, в одномерном пространстве, если рассматриваемый вектор направлен так же, как и базисы в выбранном классе, то его длина считается большей нуля. В противном случае — меньше нуля. В двумерном пространстве, если параллелограмм построен на упорядоченной паре векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , то его площадь со знаком S_{\pm} можно считать большей нуля, если \mathbf{a} и \mathbf{b} образуют базис, относящийся к выбранному (положительному) классу (3). Иначе — меньше нуля. И в трёхмерном пространстве, если параллелепипед построен на упорядоченной тройке векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , которые в таком же порядке образуют базис из выбранного (положительного) класса, то объём со знаком V_{\pm} такого параллелепипеда

²В общем случае пространства \mathbb{R}^n , $n \geq 1$ базисы тоже образуют два класса.

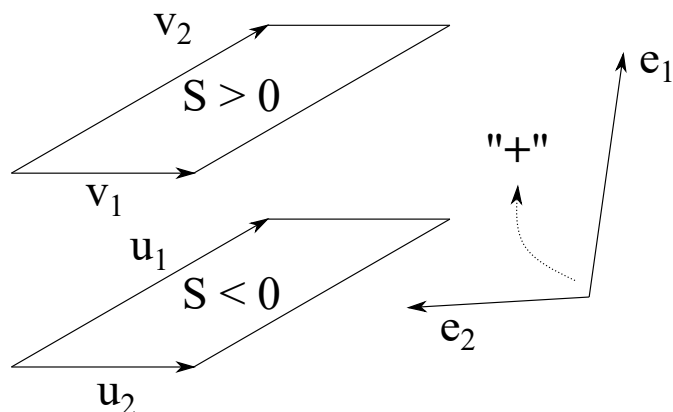


Рис. 3: Площадь ориентированного параллелограмма.

будет больше нуля. Иначе, если тройка $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ не принадлежит положительному классу базисов, то объём V_{\pm} параллелепипеда будет меньше нуля.

В трёхмерном пространстве положительными выбраны правые базисы.

Упомянув трёхмерное пространство, стоит ещё раз вернуться к вопросу об ориентации плоскости. Выбор ориентации в 3D ничего не говорит об ориентации на конкретной плоскости. Задать ориентацию на плоскости можно

- В 2D — просто сказав, в какую сторону поворот от \mathbf{e}_1 к \mathbf{e}_2 по наименьшему углу считается положительным.
- В 3D — выбрав вектор нормали \mathbf{n} к плоскости. Тогда положительный базис на плоскости — тот, который с выбранной нормалью составляет положительную тройку в пространстве (порядок $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$ или $\mathbf{n}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — не важно).
- Как в 2D, так и в 3D: просто выбрав упорядоченную пару неколлинеарных векторов и сказав, что этот базис положительный (тогда и все упорядоченные пары векторов из этого же класса — тоже положительные).

3.2. Смешанное произведение

Определение 3.2. В ориентированном пространстве смешанное произведение трёх некопланарных векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ полагается равным объёму ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \equiv V_{\pm}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

Если вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ компланарны, то их смешанное произведение полагается равным нулю.

Теорема 3.1 (О связи смешанного и скалярного произведения). *Для любой пары векторов \mathbf{b}, \mathbf{c} существует единственный вектор \mathbf{d} , такой что для любого вектора \mathbf{a}*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{d})$$

Доказательство. Найдём такой вектор \mathbf{d} для произвольной тройки векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и покажем, что он единственен и не зависит от \mathbf{a} .

Пусть \mathbf{b}, \mathbf{c} неколлинеарны. Пусть также \mathbf{a}, \mathbf{b} и \mathbf{c} некопланарны. Отложим вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ от одной точки (4).

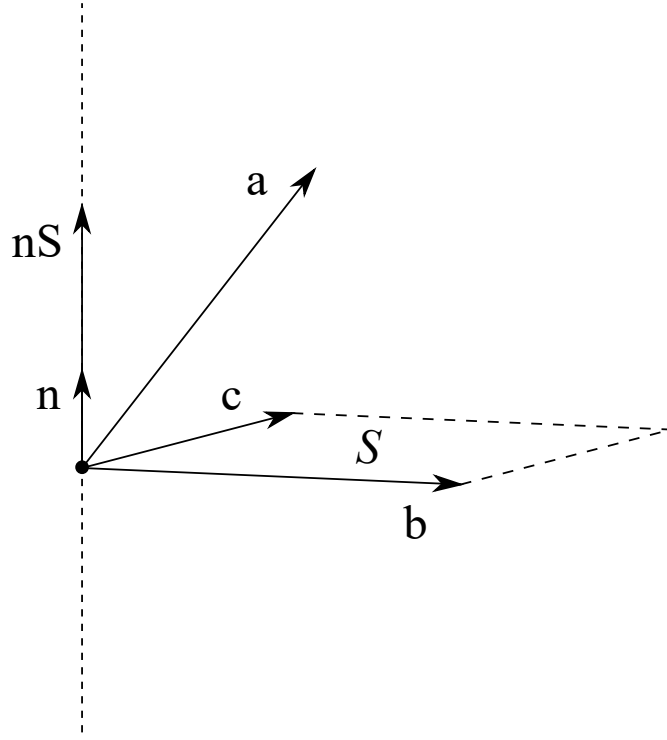


Рис. 4: Некомпланарные векторы a, b, c ; единичный вектор нормали n к плоскости векторов b и c , такой что тройка b, c, n положительная; S — площадь параллелограмма, построенного на b и c .

Рассмотрим пару векторов b, c . Отложим единичный вектор нормали n к плоскости векторов b, c так, чтобы тройка векторов b, c, n была бы положительной. Площадь параллелограмма, построенного на векторах b и c (площадь без знака) равна

$$S = |b| \cdot |c| \cdot \sin \alpha$$

где α — угол между векторами b и c . Тогда $d \equiv S \cdot n$ — вектор, направленный вдоль n и по модулю равный площади основания параллелепипеда, где лежат вектора b, c . При этом можно заметить, что скалярное произведение

$$(a, d) = V_{\pm}(a, b, c)$$

так как $|(a, d)| = |V_{\pm}|$ (площадь параллелепипеда равна произведению площади основания на высоту, проведённую к этому основанию) и от того, сонаправлены или противоположно направлены вектора a и d , зависит, будет ли V_{\pm} больше нуля или меньше нуля (тройка a, b, n по построению положительная; тройка a, b, c может быть как положительной, так и отрицательной). Таким образом, получаем, что

$$(a, b, c) = (a, d)$$

Если же векторы a, b и c компланарны, то объём параллелепипеда будет равен нулю, но тогда и $d \perp a$.

Если же вектора b, c коллинеарны, то смешанное произведение (a, b, c) также будет равно нулю, и вектор d можно взять равным нулю.

Покажем, что такой вектор d , что $(a, b, c) = (a, d)$, $\forall a$ единственен. Допустим противное: пусть существует вектор d_1 , такой что $(a, b, c) = (a, d)$ и $(a, b, c) = (a, d_1)$, $\forall a$. Но тогда $(a, d) = (a, d_1)$, и $(a, d - d_1) = 0$. То есть вектор $d - d_1$ перпендикулярен любому вектору пространства. Поэтому $d - d_1 = 0 \Rightarrow d = d_1$. \square

Введённый выше вектор d называется векторным произведением векторов b и c .

3.3. Векторное произведение

Определение 3.3. Векторным произведением неколлинеарных векторов \mathbf{b} и \mathbf{c} называется вектор \mathbf{d} , такой что

- Модуль вектора \mathbf{d} равен

$$|\mathbf{d}| = |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot \sin \alpha$$

где α — угол между векторами \mathbf{b} и \mathbf{c} .

- Вектор \mathbf{d} перпендикулярен как вектору \mathbf{b} , так и вектору \mathbf{c} :

$$\mathbf{d} \perp \mathbf{b}, \mathbf{d} \perp \mathbf{c}$$

- Вектор \mathbf{d} образует *положительную тройку* $(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ вместе с исходными \mathbf{b} и \mathbf{c} ³.

Если же векторы \mathbf{b} и \mathbf{c} коллинеарны, то их векторное произведение полагается равным нулю.

Векторное произведение \mathbf{b} и \mathbf{c} может обозначаться как $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ или $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

Таким образом,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) \quad (5)$$

Рассмотрим некоторые свойства векторного произведения.

Так, векторное произведение вектора \mathbf{a} на самого себя равно нулю, так как $\mathbf{a} \parallel \mathbf{a}$:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}] = \mathbf{0}$$

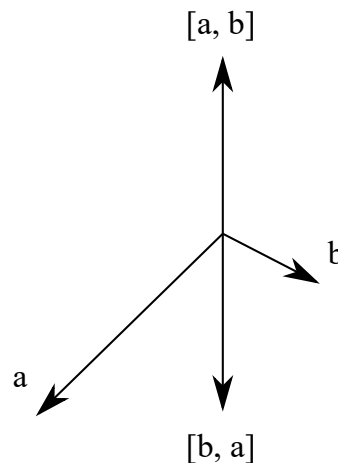


Рис. 5: Векторное произведение антикоммутативно.

Векторное произведение обладает свойством антикоммутативности. Так, для любых \mathbf{a} и \mathbf{b}

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$$

так как первый и второй вектора меняются местами, и направление поворота от первого вектора ко второму меняется на противоположное (5).

И, так же, как и скалярное произведение, векторное произведение линейно по первому аргументу:

$$[\beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2, \mathbf{c}] = \beta_1 [\mathbf{b}_1, \mathbf{c}] + \beta_2 [\mathbf{b}_2, \mathbf{c}]$$

Или, что то же самое:

$$\begin{cases} [\beta \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \beta [\mathbf{b}, \mathbf{c}] \\ [\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}_1, \mathbf{c}] + [\mathbf{b}_2, \mathbf{c}] \end{cases}$$

³При выбранной правой ориентации пространства тройка $(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ должна быть правой.

Доказательство. Докажем это свойство. Надо “в нужное время вставлять и убирать квадратные скобки” и пользоваться линейностью скалярного произведения:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a}, [\beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2, \mathbf{c}]) &\stackrel{(5)}{=} (\mathbf{a}, \beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2, \mathbf{c}) \\
 &\stackrel{(7)}{=} -(\beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2, \mathbf{a}, \mathbf{c}) \\
 &\stackrel{(5)}{=} -(\beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2, [\mathbf{a}, \mathbf{c}]) \\
 &= -\beta_1 (\mathbf{b}_1, [\mathbf{a}, \mathbf{c}]) - \beta_2 (\mathbf{b}_2, [\mathbf{a}, \mathbf{c}]) \\
 &\stackrel{(5)}{=} -\beta_1 (\mathbf{b}_1, \mathbf{a}, \mathbf{c}) - \beta_2 (\mathbf{b}_2, \mathbf{a}, \mathbf{c}) \\
 &\stackrel{(7)}{=} \beta_1 (\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}) + \beta_2 (\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}) \\
 &\stackrel{(5)}{=} \beta_1 (\mathbf{a}, [\mathbf{b}_1, \mathbf{c}]) + \beta_2 (\mathbf{a}, [\mathbf{b}_2, \mathbf{c}]) = (\mathbf{a}, \beta_1 [\mathbf{b}_1, \mathbf{c}] + \beta_2 [\mathbf{b}_2, \mathbf{c}])
 \end{aligned} \tag{6}$$

□

При этом в смешанном произведении сомножители тоже можно переставлять, и, если класс тройки меняется, то меняется и знак перед смешанным произведением:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = \dots = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \tag{7}$$

Теперь можно выразить векторное произведение между произвольными двумя векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} пространства, которые заданы компонентами в некотором базисе $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Пусть

$$\begin{cases} \mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{e}_1 + a_2 \cdot \mathbf{e}_2 + a_3 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b} = b_1 \cdot \mathbf{e}_1 + b_2 \cdot \mathbf{e}_2 + b_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1 \cdot \mathbf{e}_1 + a_2 \cdot \mathbf{e}_2 + a_3 \cdot \mathbf{e}_3) \times (b_1 \cdot \mathbf{e}_1 + b_2 \cdot \mathbf{e}_2 + b_3 \cdot \mathbf{e}_3) \\
 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] + (a_1 b_3 - a_3 b_1) [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] + (a_1 b_2 - a_2 b_1) [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]
 \end{aligned}$$

где в последнем переходе использовались свойство антикоммутативности векторного произведения и свойство равенства нулевому вектору векторного квадрата любого вектора. Полученное соотношение можно переписать в таком виде

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] & [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] & [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{8}$$

где, отметим ещё раз, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ — произвольный базис.

Если воспользоваться полученным представлением векторного произведения через компоненты векторов, подставив его в формулу (5), то получим

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \tag{9}$$

Если же базис \mathbf{e} **правый ортонормированный**, то формулы упрощаются. Для векторного произведения:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{10}$$

и для смешанного:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (11)$$

3.4. Задачи

Перед задачами параграфа 3 в сборнике сказано, что базис во всех задачах, если не оговорено противное, правый ортонормированный. Поэтому при решении можно будет пользоваться более простыми формулами: для векторного (10), смешанного (11) и скалярного (4) произведений.

Задача (3.1(2)). Найти $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(2, -1, 1)$ и $\mathbf{b}(-4, 2, -2)$.

Решение.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 0i - 0j + 0k$$

То есть $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. О чём можно бы было догадаться и сразу, просто внимательно посмотрев на координатные строки векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} (они пропорциональны, а значит векторы коллинеарны). \square

Задача (3.2(1)). Упростить выражение $[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}]$.

Решение. Упрощаем, пользуясь свойствами операции векторного произведения (перемени мест — со сменой знака!):

$$[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}] = [\mathbf{a}, \mathbf{a}] - [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{a}] - [\mathbf{b}, \mathbf{b}] = \mathbf{0} - [\mathbf{a}, \mathbf{b}] - [\mathbf{a}, \mathbf{b}] - \mathbf{0} = -2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

\square

Задача (3.19(3)). Найти смешанное произведение векторов $\mathbf{a}(2, 1, 0)$, $\mathbf{b}(3, 4, -1)$, $\mathbf{c}(-1, -3, 1)$.

Решение.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 2 - 2 + 0 = 0$$

То есть $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$. О чём можно бы было догадаться и сразу, просто внимательно посмотрев на координатные строки векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} (они линейно зависимы: $\mathbf{a} - \mathbf{c} = \mathbf{b}$ — а значит векторы компланарны). \square

Задача (3.13(1)). Доказать тождество

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{vmatrix}$$

Решение. Пусть α — угол между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} .

Распишем левую часть:

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2 = (|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \alpha)^2 = |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2 \cdot \sin^2 \alpha$$

И правую часть:

$$\begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{vmatrix} = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b}, \mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos^2 \alpha = |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2 \cdot (1 - \cos^2 \alpha)$$

Так как $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, то тождество можно считать доказанным. \square

Задача (3.13(2)). Доказать тождество (“бац минус цаб”):

$$[a, [b, c]] = b(a, c) - c(a, b)$$

Решение. Введём базис, посчитаем левую и правую часть через компоненты векторов a , b и c , и сравним.

Выберем “хороший” базис — ортонормированный. Пусть при этом базисный вектор e_3 параллелен вектору c : $c = \gamma_3 e_3$. Пусть базисный вектор e_2 лежит в плоскости векторов b и c (если они неколлинеарны, иначе — надо выбрать e_2 “просто как-нибудь”, чтоб e_3 и e_2 были неколлинеарны): $b = \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$. И последний вектор e_1 — такой, чтоб вместе с e_3 и e_2 образовывал правую тройку (в порядке нумерации): $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$.

Теперь, введя базис и координаты векторов a , b и c в этом базисе, можем начать выражать произведения между ними через их координаты:

$$[b, c] = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \beta_2 \gamma_3 e_1$$

$$[a, [b, c]] = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 \gamma_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \beta_2 \gamma_3 \cdot (\alpha_3 e_2 - \alpha_2 e_3)$$

И для правой части тождества, которое надо доказать:

$$(a, c) = 0 + 0 + \alpha_3 \gamma_3 = \alpha_3 \gamma_3$$

$$(a, b) = 0 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3$$

$$b(a, c) - c(a, b) = (\beta_2 e_2 + \beta_3 e_3) \cdot \alpha_3 \gamma_3 - \gamma_3 e_3 \cdot (\alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3) = \beta_2 \gamma_3 \cdot (\alpha_3 e_2 - \alpha_2 e_3)$$

Результаты для левой и правой частей доказываемого тождества получились одинаковыми, поэтому тождество доказано. \square

Задача (3.15). Даны векторы a и b , такие что

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ (a, b) = 0 \end{cases}$$

Надо выразить через a и b какой-нибудь вектор x , удовлетворяющий уравнению

$$[x, a] = b$$

Решение. Из условия следует, что либо $b \neq 0$ и $b \perp a$, либо $b = 0$. Будем пока считать, что b не равен нулю (6).

Так как $[x, a] = b$, то $x \perp a$ и $|x| \cdot |a| \cdot \sin \alpha = |b|$, где $\alpha = \angle(x, a)$. То есть

$$|x| \sin \alpha = \frac{|b|}{|a|}$$

Пусть решению x_0 соответствует угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то есть вектор x_0 перпендикулярен как b , так и a . Тогда x_0 сонаправлен $[a, b]$ (векторное произведение — именно в таком порядке) (6). И найти x_0 можно как

$$x_0 = \underbrace{\frac{[a, b]}{|[a, b]|}}_{\text{“направление”}} \cdot \underbrace{\frac{|b|}{|a|}}_{\text{модуль}} = \frac{[a, b]}{|a|^2}$$

Если $b = 0$, то по формуле получаем $x_0 = 0$, что тоже является решением уравнения. \square

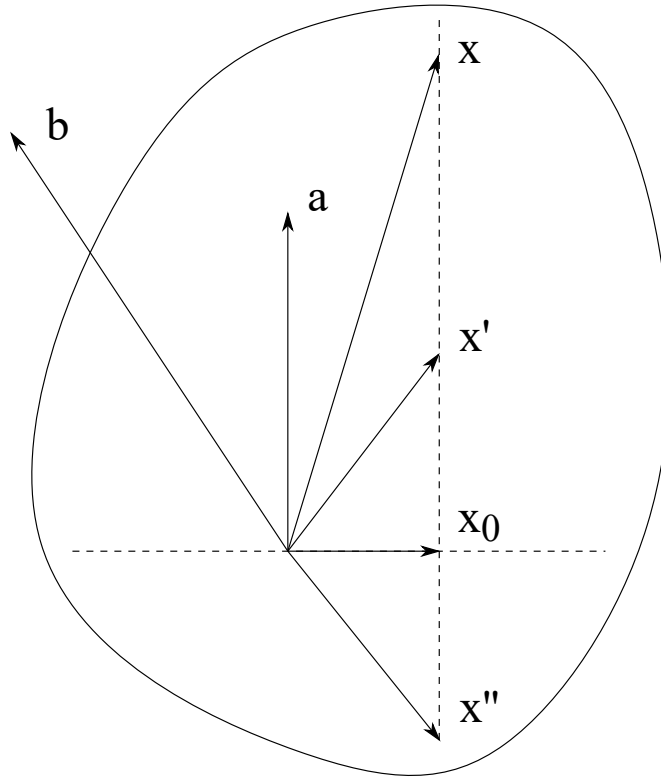


Рис. 6: $[x, a] = b$.

Задача (3.28(1)). Доказать, что если векторы $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, a]$ компланарны, то и векторы a , b , c тоже компланарны.

Решение. Рассмотрим два варианта решения.

“Словесный”.

Отложим векторы a , b , c от одной точки. Назовём плоскость, где лежат $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, a]$, плоскостью α (7).

Рассмотрим пару векторов a и b . Их векторное произведение $[a, b]$ лежит в α и перпендикулярно плоскости, где лежат a и b (пока считаем, что векторы a , b , c неколлинеарны). Таким образом, векторы a и b лежат в плоскости, перпендикулярной α . Аналогично и с парами векторов a , c и b , c . Все три такие плоскости попарно пересекаются хотя бы по одной прямой (например, плоскости векторов a , b и векторов a , c пересекаются хотя бы по прямой, содержащей вектор a : векторы a , b , c изначально отложены от одной точки). Таким образом, если все три описанные плоскости совпадают, то вектора a , b , c лежат в ней, а потому компланарны. Если же плоскости не совпадают, а пересекаются попарно по одной прямой, то все три вектора a , b , c оказываются перпендикулярными α , а потому параллельными. То есть в этом случае векторы a , b , c не только компланарны, но и коллинеарны. Но в процессе решения было сделано предположение о том, что a , b , c неколлинеарны, поэтому такой случай отпадает.

Пусть теперь хотя бы один вектор из тройки $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, a]$ равен нулевому вектору. Тогда либо хотя бы два вектора из трёх a , b , c коллинеарны, а потому все три они компланарны. Либо хотя бы один вектор из трёх a , b , c равен нулевому вектору, а потому все три снова компланарны.

“Формульный”.

Рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$$

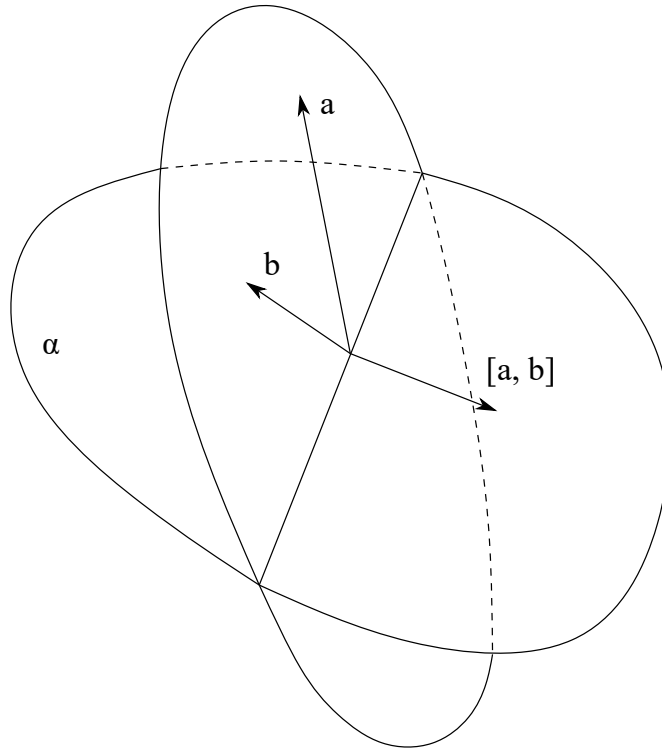


Рис. 7: α — плоскость, где лежат $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ и $[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$.

Умножим векторно обе части на \mathbf{a} слева. Получим

$$\beta \cdot [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + \gamma \cdot [\mathbf{a}, \mathbf{c}] = \mathbf{0}$$

Аналогично, при умножении векторно слева обеих частей исходного уравнения на \mathbf{b} и \mathbf{c} :

$$\begin{cases} \alpha \cdot [\mathbf{b}, \mathbf{a}] + \gamma \cdot [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{0} \\ \alpha \cdot [\mathbf{c}, \mathbf{a}] + \beta \cdot [\mathbf{c}, \mathbf{b}] = \mathbf{0} \end{cases}$$

Складывая все три полученных уравнения, получаем

$$(\beta - \alpha) \cdot [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + (\gamma - \beta) \cdot [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + (\gamma - \alpha) \cdot [\mathbf{a}, \mathbf{c}] = \mathbf{0}$$

Так как векторы $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ линейно зависимы, то хотя бы один из коэффициентов $(\beta - \alpha)$, $(\gamma - \beta)$, $(\gamma - \alpha)$ может быть отличен от нуля. Но в таком случае три коэффициента в исходном уравнении α , β , γ не совпадают, а потому все три не могут в данном случае быть равны нулю одновременно. То есть существует нетривиальная линейная комбинация $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}$, равная нулевому вектору. Поэтому три вектора \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} компланарны. \square

4. Дополнение

4.1. Ещё задача про скалярное произведение

Задача (Про точку пересечения высот в треугольнике). *Используя скалярное произведение, доказать, что в любом треугольнике высоты пересекаются в одной точке.*

Решение. Пусть в $\triangle ABC$ высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O (8). Тогда надо показать, что прямая $CO \perp AB$.

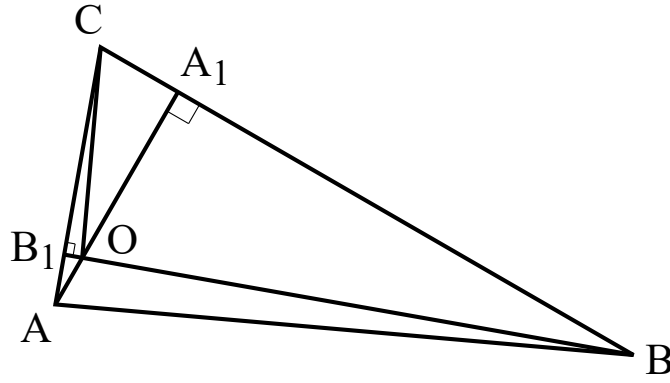


Рис. 8: Точка O пересечения двух высот AA_1 и BB_1 в $\triangle ABC$.

Так как $AO \perp BC$ и $BO \perp AC$, то

$$\begin{cases} \vec{OA} \cdot \vec{BC} = 0 \\ \vec{OB} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{OA} \cdot (\vec{OC} - \vec{OB}) = 0 \\ \vec{OB} \cdot (\vec{OC} - \vec{OA}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{OA} \cdot \vec{OC} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} \\ \vec{OB} \cdot \vec{OC} = \vec{OB} \cdot \vec{OA} \end{cases}$$

В то же время

$$\vec{OC} \cdot \vec{AB} = \vec{OC} \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) = \vec{OC} \cdot \vec{OB} - \vec{OC} \cdot \vec{OA} = \vec{OB} \cdot \vec{OA} - \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$$

Поэтому $\vec{OC} \perp \vec{AB}$. □

4.2. Ещё пара задач про векторное и смешанное произведения

Задача (2.22 (Другой способ)). Длины базисных векторов e_1, e_2, e_3 равны соответственно 1, 1 и 2. Углы между векторами: $\angle(e_1, e_2) = 90^\circ$, $\angle(e_1, e_3) = \angle(e_2, e_3) = 60^\circ$.

Надо найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $a(-1, 0, 2)$ и $b(2, -1, 1)$.

Решение. Площадь можно посчитать и с помощью векторного произведения. Только пользоваться надо общей формулой, потому что базис “кривой”:

$$\begin{aligned} S = |a \times b| &= \left| \det \begin{pmatrix} [e_2, e_3] & [e_3, e_1] & [e_1, e_2] \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| 2 \underbrace{\tilde{e}_1}_{[e_2, e_3]} + 5 \underbrace{\tilde{e}_2}_{[e_3, e_1]} + \underbrace{\tilde{e}_3}_{[e_1, e_2]} \right| \\ &= \sqrt{4\tilde{e}_1^2 + 25\tilde{e}_2^2 + \tilde{e}_3^2 + 4\tilde{e}_1\tilde{e}_3 + 20\tilde{e}_1\tilde{e}_2 + 10\tilde{e}_2\tilde{e}_3} \\ &= \sqrt{4 \cdot 3 + 25 \cdot 3 + 1 + 4 \cdot (-1) + 20 \cdot 1 + 10 \cdot (-1)} = \sqrt{94} \end{aligned}$$

При этом произведение $\tilde{e}_1\tilde{e}_2$, например, могло бы быть посчитано так⁴:

$$\tilde{e}_1\tilde{e}_2 = [e_2, e_3] \cdot [e_3, e_1] = \begin{pmatrix} e_2e_3 & e_2e_1 \\ e_3e_3 & e_3e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

□

⁴См. номер 3.13(3)

Задача (3.31). Решить систему векторных уравнений в пространстве

$$\begin{cases} (x, a) = p \\ (x, b) = q \\ (x, c) = s \end{cases}$$

где векторы a, b и c некопланарны.

Решение. Сначала покажем, что если a, b и c некопланарны, то и $[a, b]$, $[b, c]$ и $[a, c]$ некопланарны. Рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha[a, b] + \beta[b, c] + \gamma[c, a] = 0$$

Умножим обе части скалярно на b слева. Получим

$$\gamma(b, c, a) = 0$$

Откуда $\gamma = 0$, так как a, b и c некопланарны (и их смешанное произведение отлично от нуля). Аналогично $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Поэтому три вектора $[a, b]$, $[b, c]$ и $[a, c]$ также некопланарны.

Введём понятие *взаимного базиса*.

Определение 4.1. Пусть есть базис $e = (e_1, e_2, e_3)$. Тогда взаимный базис $e^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ определяется как

$$\begin{cases} e_1^* = \frac{[e_2, e_3]}{(e_1, e_2, e_3)} \\ e_2^* = \frac{[e_3, e_1]}{(e_1, e_2, e_3)} \\ e_3^* = \frac{[e_1, e_2]}{(e_1, e_2, e_3)} \end{cases} \quad (12)$$

По доказанному ранее, e^* в самом деле базис (три линейно независимых вектора в пространстве). Также можно заметить, что $(e_i, e_i^*) = 1$ и $(e_i, e_j^*) = 0$ при $i \neq j$ (поэтому базис e^* также называют биортогональным к базису e)⁵.

Возвращаясь к задаче, разложим вектор x по взаимному к $\{a, b, c\}$ базису $\{a^*, b^*, c^*\}$:

$$x = x_1^* a^* + x_2^* b^* + x_3^* c^*$$

Умножая скалярно по очереди на a, b, c и пользуясь свойством “биортогональности” взаимного базиса, получаем

$$\begin{cases} (x, a) = x_1^* \\ (x, b) = x_2^* \\ (x, c) = x_3^* \end{cases}$$

То есть числа p, q и s , данные в условии, есть компоненты вектора x во взаимном к $\{a, b, c\}$ базисе, векторы которого вычисляются по (12). \square

Задача (3.22(1)). Три некопланарных вектора a, b, c отложены из одной точки. Найти объём треугольной призмы, основание которой построено на a и b , а боковое ребро совпадает с вектором c .

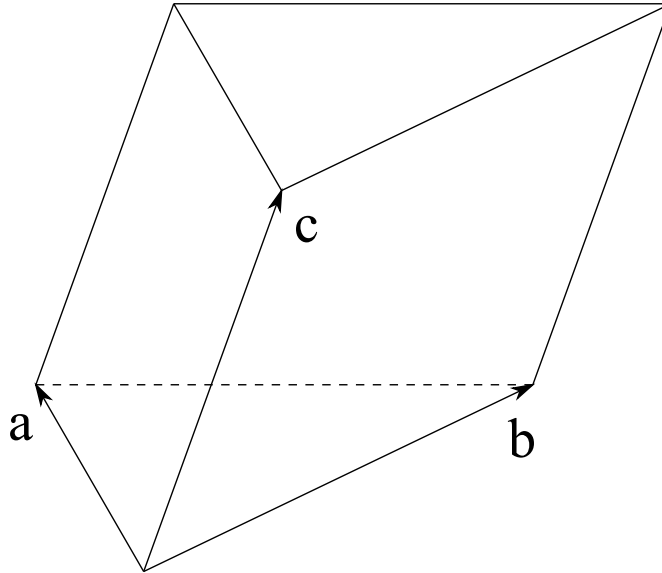


Рис. 9: Треугольная призма, построенная на a , b и c .

Решение. Объём призмы V' равен произведению площади основания на высоту (9). В основании треугольник — площадь которого в два раза меньше площади параллелограмма, построенного на тех же векторах a и b . То есть объём призмы ищется аналогично объёму V параллелепипеда, построенного на a , b , c , только площадь основания в два раза меньше. Поэтому и

$$V' = \frac{1}{2}V = \frac{|(a, b, c)|}{2}$$

Задача решена. Нашли объём, не находя ни высоты, ни площади основания.

Отступление.

Но как можно бы было найти вектор c_{\perp} , по модулю равный высоте призмы и перпендикулярный основаниям? Вектор c можно представить в виде суммы двух векторов, один из которых параллелен плоскости основания призмы, а другой перпендикулярен плоскости основания. В свою очередь, компоненту c , параллельную основаниям, можно разложить по векторам a и b (которые, как неколлинеарные вектора, образуют базис на плоскости). Получаем

$$c = \alpha a + \beta b + c_{\perp}$$

Если умножить полученное уравнение скалярно на a и на b (по очереди), то получим систему

$$\begin{cases} (c, a) = \alpha(a, a) + \beta(b, a) \\ (c, b) = \alpha(a, b) + \beta(b, b) \end{cases}$$

из которой уже можно найти α и β , например, по правилу Крамера, если определитель системы отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a, a) & (a, b) \\ (a, b) & (b, b) \end{vmatrix} = |a|^2|b|^2 - |a|^2|b|^2 \cos^2 \angle(a, b) = |[a, b]|^2 \neq 0$$

так как векторы a и b неколлинеарны. А вообще, определитель

$$\begin{vmatrix} (a, a) & (a, b) \\ (a, b) & (b, b) \end{vmatrix}$$

⁵Эти свойства на самом деле и определяют взаимный базис в общем случае \mathbb{R}^n (en.wikipedia.org/wiki/Dual_basis).

называется *определителем Грама*⁶ системы векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} . Из решения видно, что отличие от нуля определителя Грама системы векторов является *критерием линейной независимости* этой системы векторов (чтобы коэффициенты разложения любого вектора по этой системе определялись однозначно — в нашем случае коэффициенты разложения компоненты \mathbf{c} , параллельной основанию призмы, по векторам \mathbf{a} и \mathbf{b}).

Возвращаясь к вектору \mathbf{c}_\perp , то при найденных α и β он получается равным

$$\mathbf{c}_\perp = \mathbf{c} - \alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}$$

□

⁶en.wikipedia.org/wiki/Gramian_matrix.