Семинар 10

Алексеев Василий

14 + 18 апреля 2023

Содержание

1. Euclid

1.1. Скалярное произведение

Вещественное линейное пространство $\mathscr{E}$ называется *евклидовым*, если на множестве пар его векторов введена функция $(\cdot,\cdot)\colon\ \mathscr{E}\times\mathscr{E}\ \to\mathbb{R}$, называемая *скалярным произведением*, которая обладает следующими свойствами.

- Линейность по первому аргументу:

$$\begin{cases}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})\\(\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\end{cases}\tag{1}$$

- Симметричность:

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\tag{2}$$

- Положительная определённость[1]:

$$\begin{cases}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geq 0\\(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0\leftrightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\end{cases}\quad\leftrightarrow\quad(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})>0\text{ при }\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}\tag{3}$$

(В первом и втором свойствах подразумевается, что они должны выполняться “для всего, что можно подставить”, “для любых”, то есть $\forall\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathscr{E}$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.) Скалярное произведение вида $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ из свойства (3) иногда называется *скалярным квадратом* вектора $\boldsymbol{x}$.

Пример. В аналитической геометрии уже работали со скалярным произведением, определённым для векторов геометрического пространства по формуле:

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\cos\alpha$$

где $|\boldsymbol{x}|$ и $|\boldsymbol{y}|$ есть *модули векторов* $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, а под α (ради краткости обозначений, и потому что “и так понятно”) имеется в виду *угол между векторами* $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Потом уже убедились, что такая операция обладает свойствами: симметричности (очевидно), положительной определённости (будет просто $|\boldsymbol{x}|^2$), и линейности по первому аргументу (следует из линейности проекции на направление: проекция суммы равна сумме проекций).

А теперь (в линейной алгебре), оказывается, что *любая функция, возвращающая по двум векторам число, если удовлетворяет свойствам (1, 2, 3), может быть названа скалярным произведением*. Возвращаясь к векторам геометрического пространства, несложно проверить, что и такая функция от двух векторов:

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=2023|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\cos\alpha$$

могла бы быть принята в качестве скалярного произведения. Однако, например, вот такая функция:

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\big|[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]\big|$$

(то есть модуль векторного произведения) уже скалярным произведением быть не может. Потому что, например, не выполняется свойство (3): скалярный квадрат любого вектора (в том числе ненулевого) будет нулём. □

[1] Представлены две немного разные, но равносильные формулировки.

Пример (# 25.1). Пусть n есть фиксированный ненулевой вектор в геометрическом пространстве. Можно ли принять за скалярное произведение функцию $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_1 \equiv (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$? Нет, потому что, опять, скалярный квадрат вектора в таком случае $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})_1 = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ равен нулю (объём параллелепипеда). Симметричность также “не работает”. Однако линейность по первому аргументу есть.

А можно ли определить скалярное произведение как $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_2 \equiv (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{n})$? Снова нет, потому что, например при $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{n}$ получим $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})_2 = 0$. То есть нет положительной определённости. Линейности по первому аргументу также нет:

$$\big((\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) + \boldsymbol{n}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{n}\big) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{n}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{n})$$

(“не хватает” вектора $\boldsymbol{n}$ как слагаемого в первом аргументе у скобки справа, поэтому, “очевидно”, в общем случае нелинейно — например, можно подставить $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{n}$ и получить $\big((\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2), \boldsymbol{y}\big)_2 = 6 \neq 8 = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y})_2 + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})_2$.)

Рассмотрим следующую функцию – “кандидат” в скалярное: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_3 \equiv (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{y})$. Которая тоже не будет скалярным произведением, потому что при $\boldsymbol{x} \perp n$ получается ноль: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})_3 = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}) = 0$.

Функция же $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_4 \equiv |\boldsymbol{n}|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ удовлетворяет всем свойствам скалярного.

А вариант $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_5 \equiv |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|$, отличающийся от “обычного скалярного” для векторов “всего лишь” тем, что нет косинуса угла, на самом деле вместе с этим “лишается” и свойства линейности. Например (при некоторых ненулевых $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$):

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_5 = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| = 0 \neq |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| + |-\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_5 + (-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_5$$

□

1.2. Матрица Грама

Линейность по первому аргументу и симметричность (1, 2) по сути говорят о том, что *скалярное произведение — это симметричная билинейная функция*. Положительная же определённость (3) означает, что *соответствующая квадратичная функция положительно определена*. Поэтому все результаты, полученные для симметричных билинейных функций, переносятся и на скалярное произведение.

Так, скалярное тоже можно вычислять с помощью матрицы. Пусть в пространстве $\mathscr{E}$ выбран базис $e = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. Тогда любой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathscr{E}$ можно разложить по базису, а коэффициенты разложения собрать в столбец $x \in \mathbb{R}$ (координатный столбец):

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = ex$$

Тогда, если при вычислении скалярного $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ подставить вместо векторов их разложения по базису:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n, y_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)y_j = x^T\Gamma y$$

Матрица Γ билинейной функции $(\cdot, \cdot)$ также может быть названа как *матрица Грама системы векторов* $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) & \ldots & (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_1) & \ldots & (\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix}$$

Как матрица симметричной билинейной функции, матрица Γ, очевидно, симметрична: $\Gamma = \Gamma^T$. Помимо этого, так как Γ есть матрица положительно определённой квадратичной формы, то $\det \Gamma > 0$. Более того, все главные миноры $\Delta_i > 0$.

1.3. Модуль вектора

Определение 1.1. Модулем (длиной) $|\boldsymbol{x}|$ вектора $\boldsymbol{x}$ называется число:

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} \tag{4}$$

Так как $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$, то правая часть (4) определена при любом $\boldsymbol{x}$. Наличие корня также "оправдывает" название "длина" в том смысле, что если, например, длины базисных векторов $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i)$ измеряются в сантиметрах, то выражение $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ будет иметь размерность сантиметров в квадрате, и после извлечения из этого корня как раз получится "длина".

С одной стороны, очевидно, но, тем не менее, в то же время "неожиданно" и даже, может, "контринтуитивно", и поэтому отметим тот факт, что *длина вектора зависит от скалярного произведения*. В линейном пространстве может быть много способов выбрать скалярное произведение. Однако евклидовым оно становится тогда, когда этот *выбор* каким-то образом сделан. Только после этого у каждого вектора "появляется" длина. При другом выборе скалярного и длина вектора могла бы оказаться другой.

Пока ничего "неожиданного" в определении вектора больше не видно. Но мы ещё вернёмся в этому понятию...

1.4. Угол между векторами

Определение 1.2. Углом α между ненулевыми векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ называется угол (от 0 до π), такой что:

$$\cos\alpha = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|} \tag{5}$$

Почему правая часть 5 в самом деле может быть принята за косинус угла? То есть почему верно, что:

$$-1 \leq \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|} \leq 1$$

Если $\boldsymbol{x} \parallel \boldsymbol{y}$, то $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. И поэтому

$$\frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|} = \frac{\alpha}{|\alpha|} \in \{-1, 1\}$$

Если же $\boldsymbol{x} \nparallel \boldsymbol{y}$, то систему векторов $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ можно принять в качестве базиса на плоскости $\mathscr{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ (плоскость, как раз таки натянутая на пару векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$). Матрица Грама $\Gamma_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}$ этого базиса:

$$\Gamma_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \end{pmatrix}$$

как и матрица Грама любого базиса, положительно определена. И поэтому, в частности:

$$0 < \det \Gamma_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^2|\boldsymbol{y}|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2$$

Перенося одно из двух слагаемых "налево" и извлекая квадрат, получаем:

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| < |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|$$

Поэтому формула 5 в самом деле может служить определением косинуса угла.

1.5. Унитарное пространство

Этому в конспектах (почти) никогда не уделяли особого внимания, но линейные пространства на самом деле могут быть не только *вещественными* (те, с которыми всегда работали), но и *комплексными*. (И ещё разными, кроме вещественных и комплексных.) Разница между ними в операции умножения вектора на число (одна из двух операций, помимо сложения, которая лежит в основе определения понятия *линейное пространство*): что такое эти "числа", на которые можно умножать векторы. Так вот, если разрешается умножать векторы на комплексные числа, то пространство и называется комплексным [2].

Приведём определение скалярного произведения для случая комплексного линейного пространства. (Далее идёт почти "Ctrl-C" – "Ctrl-V" определения скалярного произведения из самого начала конспекта. Чтоб не играть в "найди 10 отличий", ключевые места "подсвечены".)

Комплексное линейное пространство $\mathcal{U}$ называется *унитарным*, если на множестве пар его векторов введена функция $(\cdot,\cdot)\colon \mathcal{U}\times\mathcal{U}\to\mathbb{C}$, называемая *скалярным произведением*, которая обладает следующими свойствами.

- Линейность по первому аргументу:

$$\begin{cases}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})\\(\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\end{cases}\tag{6}$$

- "Симметричность" (Эрмитовость):

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\overline{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}\tag{7}$$

- Положительная определённость [3]:

$$\begin{cases}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geq 0\\(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0\leftrightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\end{cases}\quad\leftrightarrow\quad(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})>0\text{ при }\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}\tag{8}$$

(В первом и втором свойствах подразумевается, что они должны выполняться "для всего, что можно подставить", "для любых", то есть $\forall\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathcal{U}$, $\forall\alpha\in\mathbb{C}$.)

В свойстве про положительную определённость (8), хоть ничего по сравнению с (3) как бы и не поменялось, но эта неизменность как раз и примечательна. То есть по сути свойство (8) неявно утверждает, что *скалярный квадрат вектора комплексного пространства всегда вещественен* (и при этом, да, ещё больше нуля).

[2] Вообще в качестве "чисел" может выступать произвольное *поле*. Множество элементов с двумя операциями: сложения и умножения — каждая из которых удовлетворяет ряду аксиом: ассоциативность, коммутативность, существование *нейтрального* элемента (ноль для сложения и единица для умножения) и существование для каждого элемента *обратного* (для сложения такой ещё называется *противоположным*, а по умножению наличие обратного на самом деле требуется не для всех вообще элементов пространства, а для всех кроме нуля). Помимо перечисленных аксиом, операции ещё должны обладать свойством дистрибутивности ("раскрытие скобок" — "связь" между сложением и умножением).

[3] Представлены две немного разные, но равносильные формулировки.

2. Задачи

2.1. # 25.7

В линейном пространстве функций, непрерывных на отрезке $C[-1,1]$, паре функций сопоставлено число:

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

Надо доказать, что этим определено скалярное произведение.

Решение. Фактически надо просто проверить все свойства (1, 2, 3). Так, линейность:

$$\begin{aligned}(f_1+f_2,g) &= \int_{-1}^{1}(f_1+f_2)(t)g(t)dt \\ &= \int_{-1}^{1}\big(f_1(t)+f_2(t)\big)g(t)dt = \int_{-1}^{1} f_1(t)g(t)dt + \int_{-1}^{1} f_2(t)g(t)dt = (f_1,g)+(f_2,g)\end{aligned} \tag{9}$$

Аналогично можно показать, что $(\alpha f,g) = \alpha(f,g)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Далее, симметричность:

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt = \int_{-1}^{1} g(t)f(t)dt = (g,f)$$

Осталось последнее — положительная определённость:

$$(f,f) = \int_{-1}^{1} f^2(t)dt \geq 0$$

но почему (f,f) обязательно больше нуля при $f \not\equiv 0$? Ноль в пространстве $C[-1,1]$ есть, очевидно, функция – константный ноль. Раз $f \not\equiv 0$, то найдётся *хотя бы одна* точка $x_0 \in$ $\in [-1,1]$, такая что $f(x_0) \neq 0$. Пусть, для определённости, $f(x_0) > 0$. (Но пока всё ещё не понятно, почему $(f,f) > 0$.) Но так как функция f непрерывна, то вместе с x_0 функция f будет отлична от нуля и *в некоторой окрестности*[4] точки x_0 (отлична от нуля и того же знака, что и в x_0): $\exists \varepsilon > 0 :\ f(x) > 0$ при $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$. За счёт этой окрестности интеграл в выражении (f,f) и будет больше нуля:

$$(f,f) = \int_{-1}^{1} f^2(t)dt \geq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f^2(t)dt > 0$$

$\square$

[4] Если уж быть совсем аккуратным, то надо бы было ещё сказать, что при $x_0 = 1$ или $x_0 = -1$ (граничные точки отрезка), окрестность знакопостоянства функции около точки x_0 была бы односторонней.