Семинар 1

Алексеев Василий

1 сентября 2020

Содержание

1. Матрицы и определители 2-го и 3-го порядков

1.1. Матрицы

Матрица A размера $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

1.1.1. Операции с матрицами

Определение 1.1 (Сложение матриц)**.** Пусть $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Суммой $A + B$ называется матрица $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, такая что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Определение 1.2 (Умножение матрицы на число)**.** Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Произведением матрицы A на число α называется матрица C, такая что $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Замечание. Матрицы $\mathbb{R}^{n\times n}$ с введённой операцией сложения и умножения на числа из $\mathbb{R}$ образуют линейное пространство[1]:

1. $A + B = B + A, \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (коммутативность сложения).
2. $A + (B + C) = (A + B) + C, \forall A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (ассоциативность сложения).
3. $\exists 0_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n} \,:\, 0_{n\times n} + A = A, \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
4. $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,\exists -A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,:\, A + (-A) = 0_{n\times n}$.
5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (ассоциативность умножения на скаляр).
6. $1 \cdot A = A, \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
7. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (дистрибутивность умножения матрицы на число относительно сложения чисел).
8. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, \forall \alpha \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (дистрибутивность умножения матрицы на число относительно сложения матриц).

Определение 1.3 (Умножение матриц)**.** Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$. Тогда матрица C называется произведением матриц A и B, если

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

и обозначается $C = AB$.

Задача (15.5(7))**.**

$$\begin{cases} A_{110} A_{12} = ? \\ A_{110} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

[1] wikipedia.org/wiki/Vector_space

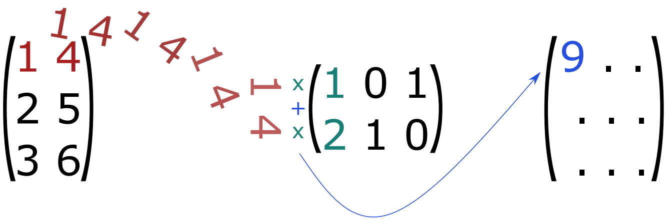

Рис. 1: Иллюстрация умножения матриц.

Решение

$$A_{110}A_{12} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 1\cdot 1 & 3\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 1 & 2\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Определение 1.4 (Транспонирование матрицы)**.** Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Тогда транспонированной по отношению к матрице A матрицей называется такая матрица , что $c_{ij} = a_{ji}$. Транспонированная матрица обозначается A^T.

Определение 1.5 (След матрицы)**.** Следом матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется сумма элементов, находящихся на главной диагонали $\{a_{ij} \mid i = j, i = 0, \dots, n\}$:

$$\operatorname{Sp} A \equiv \operatorname{Tr} A \equiv \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

1.2. Определитель матрицы

Пример. Определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Пример. Определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Задача (14.7(3))**.**

$$\begin{cases} \det A_{202} = ? \\ A_{202} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Решение

$$\det A_{202} = 1 \cdot \Big(1\cdot 1 - (-2)\cdot(-2)\Big) - 2 \cdot \Big(2\cdot 1 - 2\cdot(-2)\Big) + 2 \cdot \Big(2\cdot(-2) - 2\cdot 1\Big) = -3 - 12 - 12 = -27$$

□

Пример. Определитель единичной матрицы:

$$\det E = 1^n = 1$$

Определение 1.6 (Вырожденная матрица)**.** Матрица A называется вырожденной, если $\det A = 0$. В противном случае матрица A называется невырожденной.

Теорема 1.1 (Формула полного разложения определителя)**.** *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*. Тогда определитель* $\det A$ *матрицы равен*

$$\det A \equiv |A| \equiv \sum_{(i_1,\ldots,i_n)} (-1)^{N(i_1,\ldots,i_n)} a_{1i_1} \ldots a_{ni_n}$$

Теорема 1.2. *Определитель транспонированной матрицы*

$$\det A^T = \det A$$

Теорема 1.3. *Определитель произведения двух квадратных матриц:*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

1.2.1. Свойства определителя

Теорема 1.4 (Линейность по столбцу (строке))**.**

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \underbrace{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{a}_i}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{p}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) + \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{q}, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \underbrace{\alpha\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{a}_i}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \alpha \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{p}, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

Теорема 1.5. *При перестановке двух (строк или столбцов) матрицы её определитель меняет знак.*

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = -\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

Теорема 1.6. *Если две строки (два столбца) матрицы совпадают, то её определитель равен нулю.*

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{p}, \ldots, \boldsymbol{p}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = 0$$

Свойства можно доказать как следствия теоремы 1.1.

2. Системы линейных уравнений. Правило Крамера

Система m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_n \end{cases}$$

В матричном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Или так:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Определение 2.1 (Решение системы).

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$$

Определение 2.2. Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если у неё нет решений.

Определение 2.3. Говорят, что система B следует из системы A, если множество решений B содержит множество решений A 2.

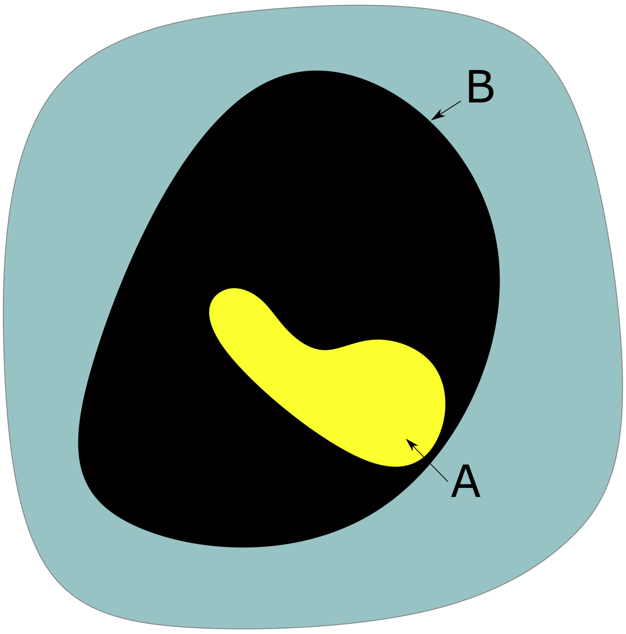

Рис. 2: Множество решений A содержится во множестве решений B.

Теорема 2.1. *Пусть число уравнений в системе m равно числу неизвестных n. Тогда если $\det A \neq 0$, то система $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ имеет решение, и притом только одно.*

Теорема 2.2 (Правило Крамера). *Пусть число уравнений в системе m равно числу неизвестных n. Тогда если $\det A \neq 0$, то*

$$\begin{cases} x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta} \\ \Delta \equiv \det A \\ \Delta_i \equiv \det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{a}_n) \end{cases}$$

Задача (17.2(4)).

$$\begin{cases} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Решение

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} = -1$$

$$\Delta_1 = \det\begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 \\ 10 & 7 & 2 \\ 9 & 2 & -4 \end{pmatrix} = -3 \Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -2 & 10 & 2 \\ 3 & 9 & -4 \end{pmatrix} = -2 \Rightarrow x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\Delta_3 = \det\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -2 & 7 & 10 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix} = -1 \Rightarrow x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□