Семинар 9

Алексеев Василий

10 ноября 2022

Содержание

1. Поверхности второго порядка

Любую поверхность второго порядка, как и кривую второго порядка на плоскости, можно задать в некоторой общей декартовой системе координат уравнением второй степени от координат точки. Но в случае поверхностей переменных в уравнении будет три: x, y и z.

Так же, как и для кривой второго порядка на плоскости, общее уравнение поверхности второго порядка с помощью ряда замен переменных можно привести к одному из нескольких канонических видов. Более того, некоторые поверхности второго порядка можно получить вращением вокруг оси симметрии соответствующей кривой второго порядка.

Далее в основном рассмотрим некоторые из таких поверхностей вращения.

1.1. Эллипсоид

Пусть на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат OXZ эллипс задан уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Перейдём в пространство. Выберем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $OXYZ$ (пусть ось OY проведена, например, так, чтобы система координат в пространстве была правой). И будем вращать указанный ранее эллипс вокруг оси OZ (1).

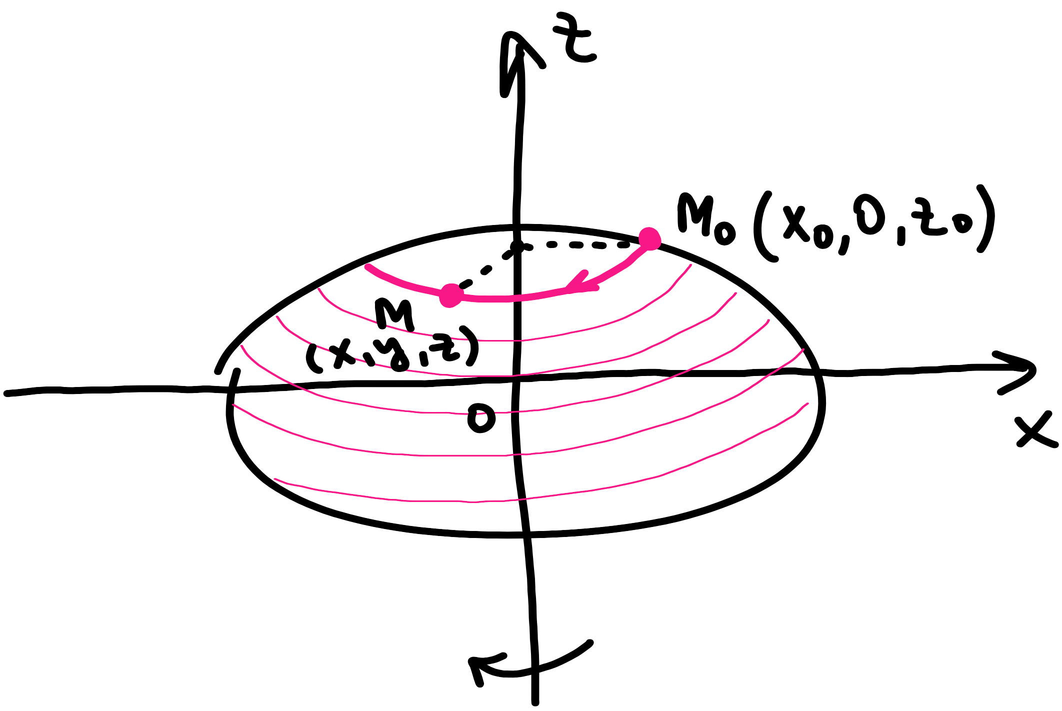

Рис. 1: Вращение эллипса вокруг оси OZ.

Все точки эллипса будут вращаться по окружностям, “нанизанным” на ось OZ. Рассмотрим точку $M_0(x_0, 0, z_0)$ эллипса. При вращении она в какой-то момент “перейдёт” в точку M с координатами (x, y, z). Точки M_0 и M, очевидно, лежат на одной и той же плоскости, перпендикулярной оси OZ, то есть $z = z_0$. Расстояние до оси вращения как от точки M_0, так и от точки M, одинаково:

$$\sqrt{x_0^2 + 0^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

При этом точка M_0 лежит на эллипсе:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

Если мы теперь заменим x_0^2 в равенстве выше на $x^2 + y^2$, то получим *уравнение эллипса, образованного при вращении точки M_0 вокруг оси OZ* (координаты x, y — координаты *некоторой* точки):

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

Для получения уравнения эллипсоида (соотношения от координат x, y, z) надо теперь ещё "заменить" z_0^2 на z^2 (чтобы координата z тоже могла "варьироваться"):

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Итак, каждая точка эллипса при вращении будет двигаться по окружности. Уравнению выше удовлетворяет *любая* точка *любой* такой окружности — траектории вращения точки эллипса. По построению, только из таких точек и состоит описанный эллипсоид. Другие точки, не с окружностей, уравнению не удовлетворяют. Поэтому полученное уравнение — уравнение эллипсоида.

Если дополнительно провести сжатие вдоль оси OY[1], то можно прийти к общему уравнению эллипсоида:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1} \tag{1}$$

Если исходный эллипс вращать вокруг оси OX, а не OZ (2), то эллипсоид получится другой:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2 + y^2}{c^2} = 1$$

но после сжатия вдоль OY его уравнение всё равно будет вида (1).

1.2. Гиперболоид

1.2.1. Однополостный

Теперь рассмотрим гиперболу в её канонической системе координат и будем вращать её вокруг какой-нибудь оси симметрии. Пусть гипербола задана в плоскости XOZ уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Если вращать её вокруг оси OZ (3), то, по аналогии с эллипсом и эллипсоидом, получаем:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

[1]Здесь имеется в виду не сжатие самой оси OY системы координат $OXYZ$. Ведь если система координат $OXYZ$ была прямоугольной, то сжимать её ось будет, скорее всего, "не очень хорошо". Имеется в виду именно сжатие эллипсоида вдоль оси OY: каждая точка (x, y, z) исходного эллипсоида переходит в точку (x, ky, z), где $k > 0$ (например, $k = a/b$, $b > 0$).

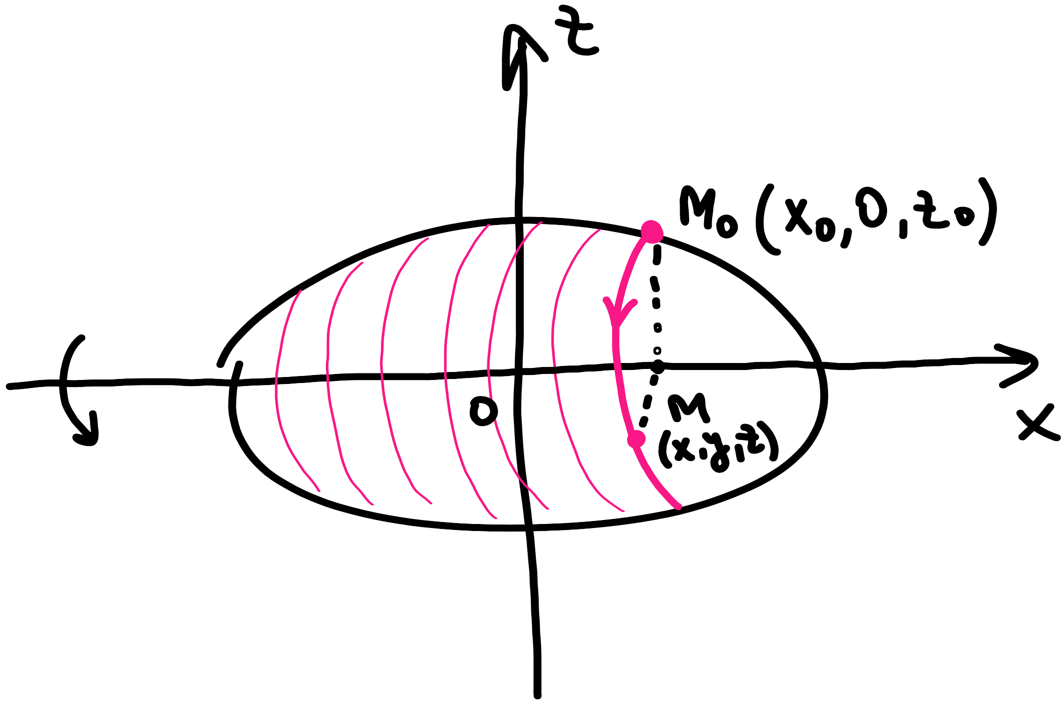

Рис. 2: Вращение эллипса вокруг оси OX.

И после сжатия вдоль оси OY:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1} \qquad (2)$$

Полученная поверхность, которую в некоторой прямоугольной декартовой системе координат можно описать уравнением вида (2), называется *однополостным гиперболоидом* ("однополостным" — потому что одна полость посередине, "гиперболоидом" — потому что получен вращением гиперболы).

Но у гиперболы, как и у эллипса (отличного от окружности), две оси симметрии. И можно бы было вращать гиперболу вокруг оси OX (4)...

1.2.2. Двуполостный

...В таком случае уравнение поверхности вращения получилось бы таким:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$$

И после сжатия, опять вдоль оси OY:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1} \qquad (3)$$

Полученная поверхность вращения называется *двуполостным гиперболоидом* (потому что уже две полости).

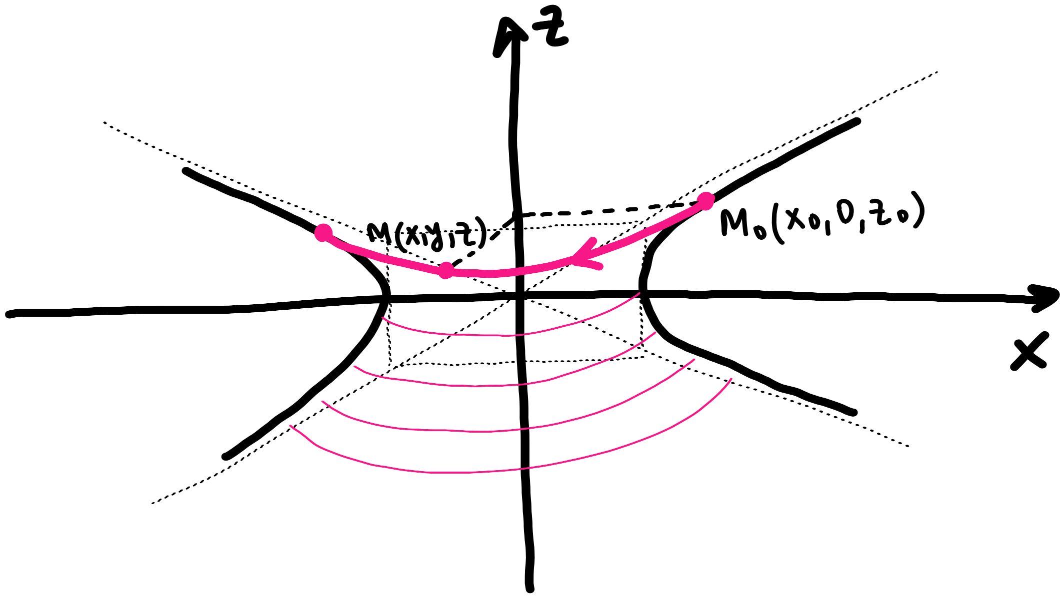

Рис. 3: Вращение гиперболы вокруг оси OZ.

1.3. Параболоид

1.3.1. Эллиптический

Перейдём в вращению параболы вокруг оси симметрии. Пусть парабола задана в канонической системе координат уравнением

$$x^2 = 2pz$$

При вращении вокруг оси OZ (5) получим поверхность

$$x^2 + y^2 = 2pz$$

Или, после сжатия-растяжения вдоль осей OX и OY, можно прийти к уравнению вида:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z} \tag{4}$$

Поверхность называется *эллиптическим параболоидом* (“эллиптическим” — потому что в сечении плоскостями вида $z = C$ получаются эллипсы).

В полученном уравнении (4) можно поменять знак с “плюса” на “минус”, и тогда получится...

1.3.2. Гиперболический

...следующее уравнение:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z} \tag{5}$$

Поверхность, описываемая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат уравнением (5) называется *гиперболическим параболоидом* (“гиперболическим” — потому что в сечении плоскостями вида $z = C$ получаются гиперболы).

Гиперболический параболоид — не поверхность вращения.

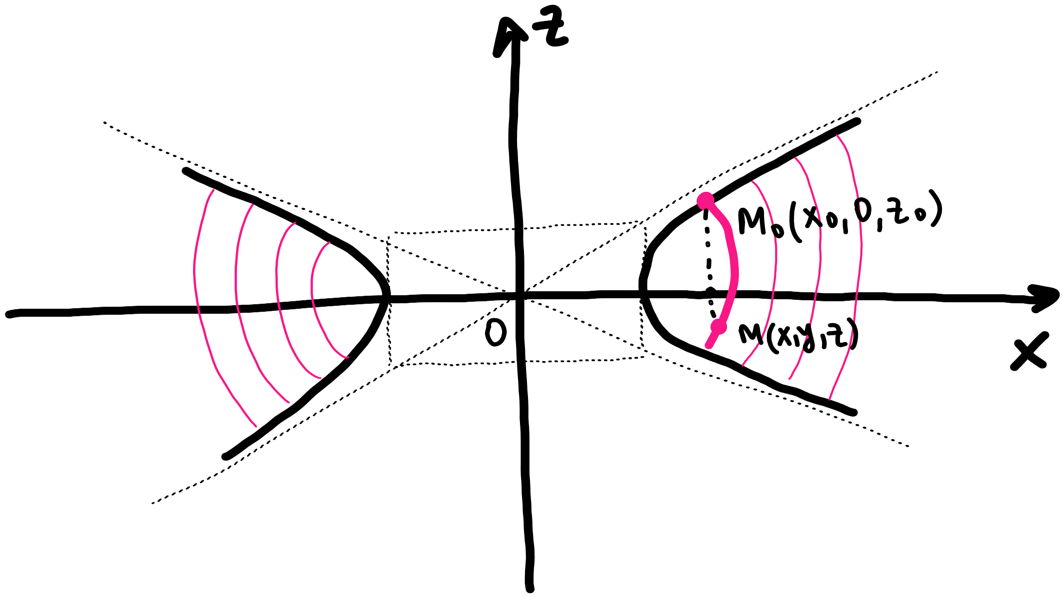

Рис. 4: Вращение гиперболы вокруг оси OX.

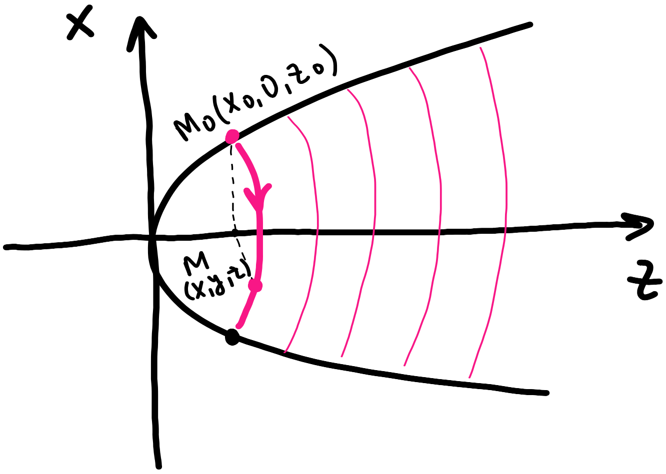

Рис. 5: Вращение параболы вокруг оси OZ.

Как же его нарисовать?

При $y = 0$ имеем $x^2/a^2 = 2z$. Это — парабола (в плоскости $y = 0$). Назовём её параболой $\Pi_{y=0}$, или Π_1.

При $x = 0$ получаем $-y^2/b^2 = 2z$. Это тоже парабола. Назовём её $\Pi_{x=0}$, или Π_2.

Очевидно, вершины парабол Π_1 и Π_2 совпадают. Оси обеих парабол идут вдоль оси OZ. Но парабола Π_1 направлена “вверх” по оси OZ. А парабола Π_2 направлена “вниз”. Ещё из интересного можно отметить, что параболы Π_1 и Π_2 лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

“Нарисуем” обе параболы Π_1 и Π_2 (см. рисунок 6).

Далее, чтобы построить гиперболический параболоид, можно поступить следующим образом. Положим $x = 1$. Сечение параболоида этой плоскостью описывается уравнением $-y^2/b^2 + 1/a^2 = 2z$. Это парабола $\Pi_{x=1}$. Но при том же самом $x = 1$ для параболы Π_1 имеем $1/a^2 = 2z$. Очевидно, вершина параболы $\Pi_{x=1}$ лежит на параболе Π_1 ($\Pi_{y=0}$). Парабола $\Pi_{x=1}$ как бы получается из параболы Π_2 ($\Pi_{x=0}$) “скольжением” вдоль Π_1. Таким образом, на гиперболический параболоид можно смотреть как на поверхность второго порядка, полученную “скольжением одной параболы по другой” (6). Как на следующее семейство

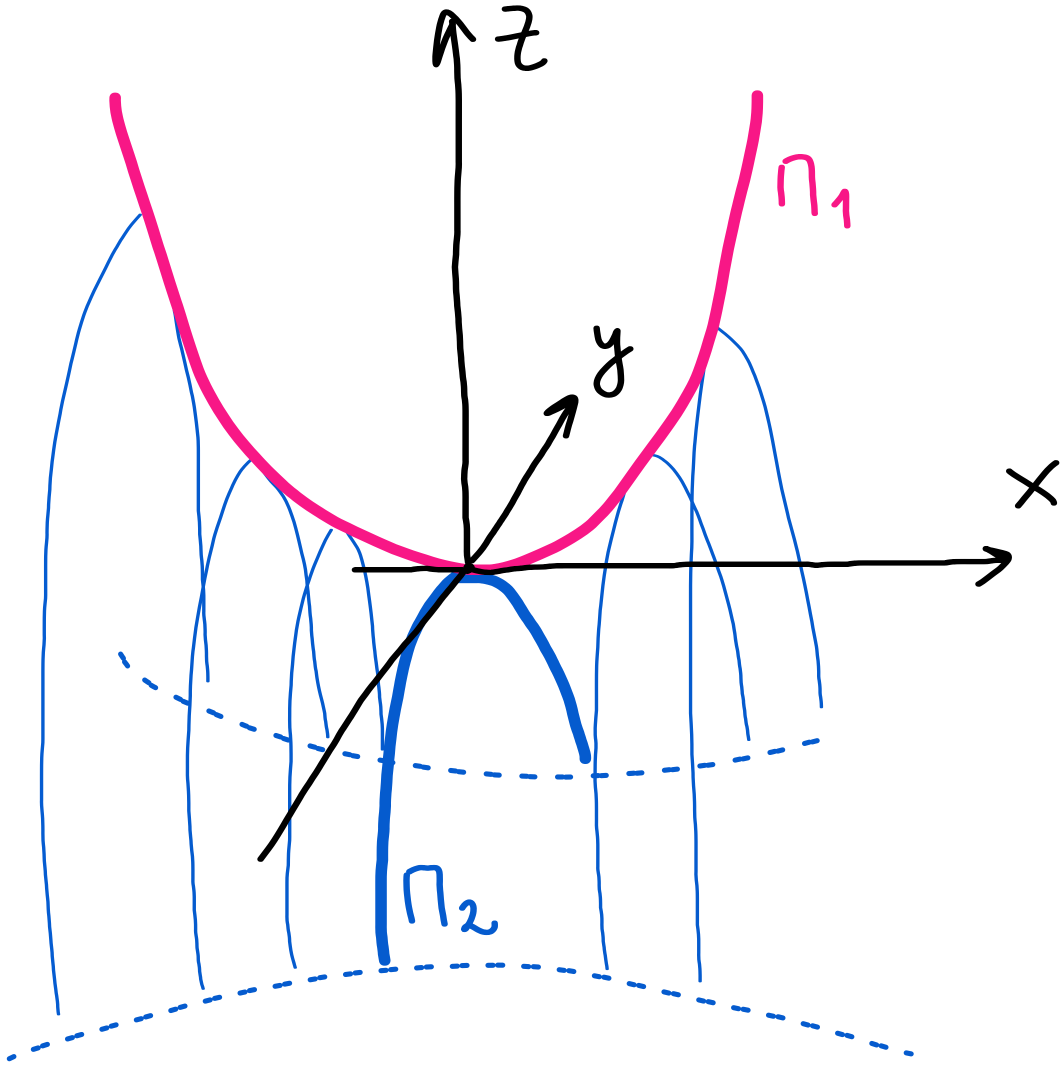

Рис. 6: Взгляд на гиперболический параболоид как на параболу, вершина которой “скользит” по другой параболе.

парабол, параметризуемых $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \begin{cases} -\dfrac{y^2}{b^2} + 2z_0 = 2z & (\text{“скользящая” парабола, в данный момент напротив } x_0) \\ x = x_0 \end{cases} \\ \dfrac{x_0^2}{a^2} = 2z_0 \quad (\text{фиксированная парабола, по которой “двигается” вершина “скользящей”}) \\ x_0 \in \mathbb{R} \quad (\text{семейство “скользящих” парабол}) \end{cases}$$

Можно бы было смотреть на параболоид немного по-другому. Положим $y = 1$. В сечении параболоида этой плоскостью получаем кривую, описываемую уравнением $x^2/a^2 - 1/b^2 = 2z$. Следуя введённым обозначениям, эту параболу можно назвать $\Pi_{y=1}$. Но при $y = 1$ для параболы Π_2 имеем $-1/b^2 = 2z$. Таким образом, гиперболический параболоид может быть получен и как объединение ещё одного семейства парабол. Которые в этот раз скользят уже по параболе Π_2:

$$\begin{cases} \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + 2z_0 = 2z & \text{(“скользящая” парабола, в данный момент напротив } y_0\text{)} \\ y = y_0 \end{cases} \\ -\dfrac{y_0^2}{b^2} = 2z_0 \quad \text{(фиксированная парабола, по которой “двигается” вершина “скользящей”)} \\ y_0 \in \mathbb{R} \quad \text{(семейство “скользящих” парабол)} \end{cases}$$

Гиперболический параболоид построен. Теперь можно заметить ещё одно “интересное”. Вспомним уравнение параболоида (5):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

Разобьём на множители левую и правую часть:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1 \cdot 2z$$

И составим такую систему (приравняв по одному множителю слева и справа):

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 1 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2z \end{cases}$$

Это пересечение двух плоскостей. То есть прямая. Но... из системы, задающей прямую, *следует* уравнение параболоида (перемножив левые и правые части уравнений системы, получаем уравнение параболоида). Это значит, что прямая *содержится* в гиперболическом параболоиде. Таким образом, описанная прямая — пример *прямолинейной образующей* гиперболического параболоида.

Но мы бы могли рассмотреть и такую систему:

$$\boxed{\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = \beta \cdot 1 \\ \beta\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = \alpha \cdot 2z \end{cases}}$$

при $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Такая система тоже задаёт прямую, которая тоже целиком лежит на параболоиде. Получаем целое *семейство прямолинейных образующих*.

Если же мы теперь приравняем другие множители из уравнения параболоида, и снова “подключим” α и β, совместно не равные нулю, то получим ещё одно семейство прямолинейных образующих:

$$\boxed{\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = \beta \cdot 2z \\ \beta\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = \alpha \cdot 1 \end{cases}}$$

В случае *однополостного гиперболоида* (2) тоже можно бы было разложить левую и правую часть уравнения на множители (перенеся перед этим член с y направо). И тоже можно бы было выписать две системы, задающие два семейства прямолинейных образующих.

2. Задачи

2.1. # 10.3(6)

Определить тип поверхности при разных λ:

$$x^2 + \lambda(y^2 + z^2) = 1$$

Решение. Рассмотрим случай $\lambda = 0$:

$$x^2 = 1 \leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= -1 \\ x &= 1 \end{aligned}\right.$$

Получается две параллельных плоскости.

Пусть теперь $\lambda > 0$. Тогда можно считать $\lambda = 1/p^2$, $p > 0$:

$$x^2 + \frac{y^2}{p^2} + \frac{z^2}{p^2} = 1$$

Очевидно, это эллипсоид. Причём можно считать этот эллипсоид полученным в результате вращения эллипса $x^2 + z^2/p^2 = 1$, $y = 0$ вокруг оси OX.

Пусть теперь $\lambda < 0$. В таком случае можно положить $\lambda = -1/p^2$, $p > 0$:

$$x^2 - \frac{y^2}{p^2} - \frac{z^2}{p^2} = 1$$

Это — двуполостный гиперболоид. Его можно бы было получить вращением гиперболы $x^2 - z^2/p^2 = 1$, $y = 0$ вокруг оси OX. □

2.2. # 10.38 + 10.26

Составить уравнение прямого кругового цилиндра, проходящего через точку $M_0(1, 1, 2)$, и ось которого задана системой уравнений $l:\ x = 1 + t,\ y = 2 + t,\ z = 3 + t,\ t \in \mathbb{R}$.

Решение.

Способ 1: "излишне подробный". Очевидно, данных в задаче достаточно для задания цилиндра. И первым шагом хотелось бы найти его радиус...

Направляющий вектор прямой – оси цилиндра $\boldsymbol{a}$ и начальная точка A на оси цилиндра: $\boldsymbol{a} = (1, 1, 1)$, $A(1, 2, 3)$.

Из определения цилиндра следует, что в сечении кругового цилиндра плоскостями, параллельными основанию, будут получаться окружности. Каждой точке M на поверхности цилиндра соответствует плоскость α, перпендикулярная оси l и при сечении цилиндра дающая окружность, на которой лежит эта точка. Общей же точкой для секущей плоскости α и оси цилиндра l будет некоторая точка P (см. рисунок 7)...

Найдём точку P_0 на оси цилиндра, соответствующую точке M_0, данной в условии. Зная координаты точки P_0, можно будет найти радиус цилиндра как расстояние ρ между точками P_0 и M_0: $R = \rho(P_0, M_0)$.

Направляющий вектор оси $\boldsymbol{a}$ является и вектором нормали плоскостей, перпендикулярных оси цилиндра. Поэтому всё семейство таких плоскостей, перпендикулярных оси, задаётся параметрическим уравнением

$$x + y + z + D = 0, \quad D \in \mathbb{R} \tag{6}$$

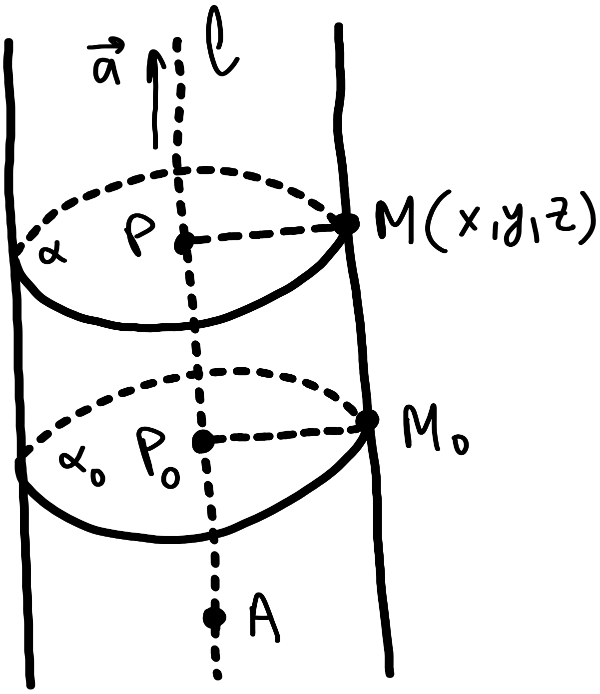

Рис. 7: Точки цилиндра удалены от оси на одинаковое расстояние.

Плоскость α_0 для точки $M_0(1,1,2)$:

$$1 + 1 + 2 + D_0 = 0 \Leftrightarrow D_0 = -4$$

Пусть точке P_0 на оси соответствует значение параметра t, равное τ_0. Тогда то, что P_0 лежит на той же плоскости, что и M_0, означает:

$$(1+\tau_0) + (2+\tau_0) + (3+\tau_0) - 4 = 0 \Leftrightarrow \tau_0 = \frac{-6-(-4)}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$P_0: \begin{cases} x = 1 + \tau_0 = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} \\ y = 2 + \tau_0 = 2 - \dfrac{2}{3} = 1\dfrac{1}{3} \\ z = 3 + \tau_0 = 3 - \dfrac{2}{3} = 2\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

И можно найти радиус цилиндра:

$$R = \rho(P_0, M_0) = \ldots = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Теперь рассмотрим некоторую точку $M(x,y,z)$ на цилиндре. Ей, как и точке M_0, соответствует некоторая плоскость α из семейства (6) и точка P на оси цилиндра. Пусть этой точке P на оси соответствует значение параметра t, равное τ. Тогда мы можем записать:

$$\alpha: \ x + y + z + D = 0 \Leftrightarrow D = -(x+y+z)$$

$$P \in \alpha \Leftrightarrow (1+\tau) + (2+\tau) + (3+\tau) + D = 0 \Leftrightarrow \tau = \frac{-6-D}{3} \tag{7}$$

Поэтому

$$\tau = \frac{-6+x+y+z}{3} \tag{8}$$

И снова выписываем выражение для расстояния от точки M (которая произвольная на цилиндре) до соответствующей ей точки P:

$$\rho(M,P) = \sqrt{\big(x-(1+\tau)\big)^2 + \big(y-(2+\tau)\big)^2 + \big(z-(3+\tau)\big)^2} = R$$

Заменяя далее τ его представлением через координаты x, y, z точки M (8), вспоминая найденный ранее R и начиная "варьировать координаты" (далее x, y и z уже не фиксированные координаты некоторой случайно выбранной, но конкретной точки M, а "координаты в уравнении") получаем уравнение цилиндра:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz + 3x - 3z + 2 = 0$$

Способ 2: "чересчур компактный". На самом деле для определения расстояния от точки M до оси не обязательно было искать соответствующую точке M точку P на оси l.

Пусть ϕ — угол между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\boldsymbol{a}$. Тогда расстояние от M до оси l можно вычислить следующим образом:

$$\rho(M,l) = |\overrightarrow{AM}|\sin\phi = \frac{\big|[\overrightarrow{AM}, \boldsymbol{a}]\big|}{|\boldsymbol{a}|}$$

Точка лежит на цилиндрической поверхности в том и только в том случае, если она удалена от оси цилиндра на расстояние, равное радиусу. А радиус можно вычислить, используя данную в условии точку M_0. Итого:

$$M \in \text{Цилиндр} \Leftrightarrow \rho(M,l) = R = \rho(M_0,l)$$

$$\frac{\big|[\overrightarrow{AM}, \boldsymbol{a}]\big|}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{\big|[\overrightarrow{AM_0}, \boldsymbol{a}]\big|}{|\boldsymbol{a}|}$$

При этом:

$$[\overrightarrow{AM}, \boldsymbol{a}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$[\overrightarrow{AM_0}, \boldsymbol{a}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1-1 & 1-2 & 2-3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

И потому уравнение цилиндра (необходимое и достаточное условие на координаты точки M для того, чтоб она лежала на цилиндре):

$$(y-z+1)^2 + (-x+z-2)^2 + (x-y+1)^2 = 0 + (-1)^2 + 1^2$$

После упрощений:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz + 3x - 3z + 2 = 0$$

$\square$

2.3. # 10.41

Найти уравнение и определить тип поверхности, образованной вращением прямой l, заданной уравнениями $x = 0$, $y - z + 1 = 0$, вокруг оси OZ.

Решение. Что может получаться при вращении одной прямой вокруг другой? Если прямые параллельны, то будет цилиндр (см. предыдущий номер). Если пересекаются — конус (см. далее). Если скрещиваются, то... см. задачу 10.40.

Проверим, как расположены друг относительно друга две данные в условии прямые. Но сначала найдём направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ и начальную точку $\boldsymbol{r}_0$ вращаемой прямой l:

$$\boldsymbol{a} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 1, 1)$$

$$\boldsymbol{r}_0 = (0, 0, 1)$$

Поэтому прямую l можно задать в виде системы скалярных параметрических уравнений так:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Направляющий вектор и начальная точка для оси OZ:

$$\boldsymbol{a}_1 = (0, 0, 1),\ \boldsymbol{r}_1 = (0, 0, 1)$$

Очевидно, что вращаемая прямая l и ось вращения OZ пересекаются в одной точке — в точке $(0, 0, 1)$. Поэтому поверхность вращения — конус.

Рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z)$ на конусе. Этой точке соответствует точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, находящаяся на том же "уровне" по оси OZ, что и точка M, и лежащая на вращаемой прямой l. Расстояния от обеих точек до оси вращения одинаковы. Запишем же в виде формул перечисленные свойства:

$$\begin{cases} z = z_0 \\ x_0 = 0,\ y_0 = t_0,\ z_0 = 1 + t_0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \end{cases}$$

Откуда, исключая из последнего уравнения "нулевые" координаты и оставляя только x, y и z некоторой точки M, получаем уравнение конуса (координаты x, y и z удовлетворяют уравнению в том и только в том случае, когда M лежит на конусе):

$$x^2 + y^2 - (z - 1)^2 = 0$$

□

2.4. # 10.65(1)

Найти центр сечения эллипсоида $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 40$ плоскостью $x + y + 2z = 5$.

Решение. Выразим x из уравнения плоскости через y и z (то есть "перейдём" в секущую плоскость):

$$x = 5 - y - 2z$$

и подставим в уравнение эллипсоида, чтобы получить уравнение сечения:

$$\begin{cases} (5 - y - 2z)^2 + 2y^2 + 4z^2 = 40 \\ x = 5 - y - 2z \end{cases}$$

После приведения подобных членов получаем:

$$\begin{cases} 3y^2 + 4yz + 8z^2 - 10y - 20z - 15 = 0 \\ x = 5 - y - 2z \end{cases}$$

Это уравнение кривой второго порядка. Как теперь найти координаты центра? Координаты центра (если он существует) можно найти из системы уравнений[2]:

$$\begin{cases} 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2y + 8z - 10 = 0 \end{cases}$$

Определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 4 = 20 \neq 0$$

Таким образом, центр существует. И его можно найти, например, с помощью метода Крамера:

$$\begin{cases} y = \dfrac{40 - 20}{20} = 1 \\ z = \dfrac{30 - 10}{20} = 1 \end{cases}$$

И первая компонента:

$$x = 5 - 1 - 2 = 2$$

Поэтому центр — точка $(2, 1, 1)$. □

3. "Рукомахания" о поиске центра кривой 2-го порядка

Рассмотрим общий случай кривой второго порядка на плоскости.

$$\underbrace{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F}_{\Phi(x,y)} = 0$$

Центром кривой второго порядка называется точка (x_0, y_0), такая что:

$$\Phi(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) = \Phi(x_0 - \alpha, y_0 - \beta), \quad \forall \alpha, \beta \tag{9}$$

Расписывая условие выше (подставляя координаты в уравнение и приравнивая), можно прийти к такой системе для поиска координат центра:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases}$$

Можно заметить, что первое уравнение есть фактически частная производная $\partial\Phi(x, y)/\partial x$ в точке (x_0, y_0). Второе уравнение — частная производная $\partial\Phi(x, y)/\partial y$ в той же точке (x_0, y_0). Совпадение? Или...

[2]Подробнее о способах поиска центра см. дополнение 3.

“Первое немного рукомахательное пояснение, почему работает способ нахождения координат центра с помощью частных производных”.

Вспомним ещё раз уравнение (9), которое лежит в основе определения центра:

$$\Phi(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) = \Phi(x_0 - \alpha, y_0 - \beta), \quad \forall \alpha, \beta$$

То есть, “двигаясь в противоположные стороны” от точки-центра, получаем “одно и то же”... Из этого наблюдения “не сложно” прийти к заключению, что в центре дифференциал функции $\Phi(x, y)$ равен нулю. Действительно, дифференциал в точке (x_0, y_0):

$$d\Phi(x_0, y_0) = \Phi(x_0 + dx, y_0 + dy) - \Phi(x_0, y_0)$$

С другой стороны, можно на него смотреть и так:

$$d\Phi(x_0, y_0) = \Phi(x_0, y_0) - \Phi(x_0 - dx, y_0 - dy)$$

Выходит, дифференциал в точке (x_0, y_0) можно считать по такой формуле:

$$d\Phi(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\Big(\Phi(x_0 + dx, y_0 + dy) - \Phi(x_0 - dx, y_0 - dy)\Big)$$

А для центра кривой второго порядка (x_0, y_0) правая часть есть ноль. Потому и дифференциал равен нулю $d\Phi(x_0, y_0) = 0$. Но дифференциал можно представить таким образом:

$$d\Phi(x_0, y_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0)dy$$

Поэтому из равенства нулю дифференциала $d\Phi(x_0, y_0)$ в точке (x_0, y_0) получаем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

“Второе немного рукомахательное пояснение, почему работает способ нахождения координат центра с помощью частных производных”[3].

Уравнение кривой второго порядка: $\Phi(x, y) = 0$. Пусть кривая — это эллипс либо гипербола (пара “нормальных” кривых, у которых есть центр). Рассмотрим уравнение *поверхности* второго порядка вида:

$$\Phi(x, y) = z$$

Эта поверхность — либо эллиптический параболоид (если исходная кривая была эллипсом), либо гиперболический параболоид (если кривая описывала гиперболу).

В случае эллиптического параболоида, сечения плоскостями $z = c$, $c \in \mathbb{R}$ дают семейство концентрических эллипсов (8). Их центры лежат на оси параболоида. Поэтому координаты центра исходного эллипса (x_0, y_0) — это координаты точки минимума параболоида $z = \Phi(x, y)$. В которой $\nabla\Phi(x_0, y_0) = 0$.

Если же поверхность — гиперболический параболоид, то сечения плоскостями $z = c$, $c \in \mathbb{R}$ дают семейство концентрических гипербол (9). Их центры снова лежат на одной прямой. Которая проходит через седловую точку параболоида. Таким образом, снова координаты центра исходной кривой (гиперболы) можно искать из соотношения $\nabla\Phi(x_0, y_0) = 0$.

[3] Вольный перевод избранных моментов из math.stackexchange.com/a/1941944/451127 (англ.).

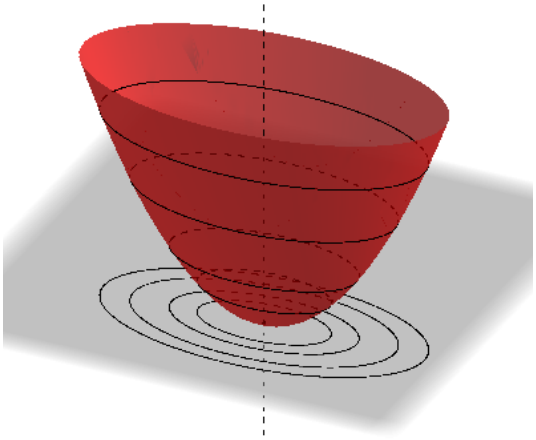

Рис. 8: Центры эллипсов-сечений — на оси эллиптического параболоида.

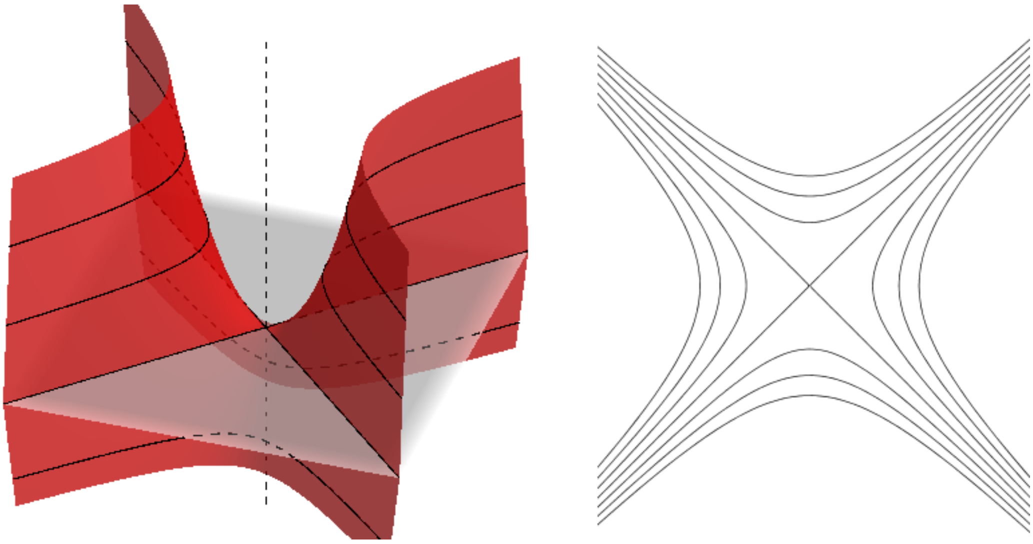

Рис. 9: Центры гипербол-сечений — на той же оси, что и седловая точка гиперболического параболоида.

Ещё один "строгий" вывод формул для поиска координат центра — но в матричном виде[4].

Уравнение кривой второго порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

можно переписать в матричном виде. Для этого введём обозначения:

$$\widetilde{A} \equiv \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} \equiv \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

После этого уравнение кривой можно переписать следующим образом:

$$\boldsymbol{x}\widetilde{A}\boldsymbol{x}^T + 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{b}^T + F = 0$$

Если ввести обозначение $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha, \beta)^T$, то условие (9) на поиск координат центра $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)^T$ в матричном виде будет выглядет так:

$$(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\alpha})\widetilde{A}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\alpha})^T + 2(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{b}^T + F = (\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{\alpha})\widetilde{A}(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{\alpha})^T + 2(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{b}^T + F$$

[4] Идея вывода взята из math.stackexchange.com/a/1287530/451127 (англ.).

Раскрывая скобки и упрощая, приходим к условию:

$$\widetilde{A}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{b} = 0$$

Иными словами (в скалярном виде):

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases}$$