# Семинар 2

Алексеев Василий

11 февраля + 12 февраля 2020

## Содержание

# 1. Системы линейных уравнений

# 2. Задачи

## 2.1. # 17.1(4)

Выписать расширенную матрицу. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y + 3z = -1 \\ 2x + 3y + 5z = 3 \\ 3x + 5y + 7z = 6 \end{cases}$$

*Решение.*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[]{\substack{(2)=(2)-3\cdot(1) \\ (3)=(3)-5\cdot(1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \\ 3 & 0 & -8 & 11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)=(2)/2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -8 & 11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3)=(3)-3\cdot(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3)=-1/2\cdot(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[]{\substack{(1)=(1)-3\cdot(3) \\ (2)=(2)+2\cdot(3)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Упрощённой матрице соответствует система

$$\begin{cases} \quad y \quad = 2 \\ x \qquad = 1 \\ \qquad z = -1 \end{cases}$$

решение которой, очевидно, $(2, 1, -1)^T$. □

## 2.2. # 19.6(20)

Решить систему с расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & -3 & -3 \\ -5 & 4 & 63 & 29 & 71 \\ 5 & 24 & -7 & -1 & 41 \end{array}\right)$$

*Решение.* Расширенной матрице соответсвует система:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -3 \\ -5x_1 + 4x_2 + 63x_3 + 29x_4 = 71 \\ 5x_1 + 24x_2 - 7x_3 - x_4 = 41 \end{cases}$$

Для её решения снова воспользуемся методом Гаусса приведения расширенной матрицы к упрощённому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & -3 & -3 \\ -5 & 4 & 63 & 29 & 71 \\ 5 & 24 & -7 & -1 & 41 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[]{\substack{(2)=(2)+5\cdot(1)\\(3)=(3)-5\cdot(1)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & -3 & -3 \\ 0 & 14 & 28 & 14 & 56 \\ 0 & 14 & 28 & 14 & 56 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[]{\substack{(3)=(3)-(2)\\(2)=(2)/14}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(1)=(1)-2\cdot(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -11 & -5 & -11 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Упрощённой матрице соответствует система

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 11x_3 - 5x_4 = -11 \\ \qquad x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

Базисные переменные — которым соответствовали базисные столбцы в упрощённой матрице — можно выразить через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = 11x_3 + 5x_4 - 11 \\ x_2 = -2x_3 - x_4 + 4 \end{cases}$$

То есть при произвольных $x_3$ и $x_4$ рассчитанные по формулам выше $x_1$ и $x_2$ дадут в совокупности с $x_3$ и $x_4$ решение системы. Общий вид решения ($x_3 \equiv t_1 \in \mathbb{R}$, $x_4 \equiv t_2 \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 11t_1 + 5t_2 - 11 \\ -2t_1 - t_2 + 4 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_2}_{\substack{\text{Общее решение однородной системы} \\ \text{(решение при нулевом столбце свободных членов)}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Частное решение неоднородной системы} \\ \text{(решение при нулевых свободных переменных)}}} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} 11 & 5 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Фундаментальная матрица} \\ \text{(её столбцы — базис в пространстве} \\ \text{решений однородной системы)}}} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

## 2.3. # 18.17(2)

Найти однородную систему, для которой фундаментальной является матрица Φ следующего вида:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

*Решение.*

*Способ 1*

При данной фундаментальной матрице общее решение однородной системы выражается как линейная комбинация её столбцов:

$$x = \Phi h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = h_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + h_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad h_1, h_2 \in \mathbb{R}$$

Если переписать выражение для общего решения выше в виде системы:

$$\begin{cases} x_1 = h_1 \\ x_2 = h_1 - h_2 \\ x_3 = h_2 \\ x_4 = -4h_1 + h_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = h_1 \\ x_2 = x_1 - x_3 \\ x_3 = h_2 \\ x_4 = -4x_1 + x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 - x_3 \\ x_4 = -4x_1 + x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \phantom{{}+x_4} = 0 \\ 4x_1 \phantom{{}-x_2} - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Очевидно, ответ не однозначен: к одной из строчек можно прибавить другую, и получится формально другая система.

*Способ 2*

В условии дана фундаментальная матрица. То есть её столбцы — решения однородной системы. Это значит, что в уравнение $Ax = 0$ можно подставить вместо $x$ поочерёдно столбцы Φ, и это будет давать верные числовые равенства. Пусть в матрице $A$ всего $m$ строк (и 4 столбца). Тогда $Ax = 0$ в виде системы можно записать так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + a_{m4}x_4 = 0 \end{cases}$$

Подставляем сюда вместо $x_1, \dots, x_4$ компоненты первого столбца Φ:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} \qquad - 4a_{14} = 0 \\ a_{21} + a_{22} \qquad - 4a_{24} = 0 \\ \dots \end{cases}$$

И компоненты второго столбца Φ:

$$\begin{cases} \qquad - a_{12} + a_{13} + a_{14} = 0 \\ \qquad - a_{22} + a_{23} + a_{24} = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Отсюда надо найти коэффициенты $a_{ij}$, составляющие матрицу $A$. Чтобы это сделать, можно сгруппировать уравнения из двух систем по строчкам:

$$\begin{cases} \begin{cases} a_{11} + a_{12} \qquad - 4a_{14} = 0 \\ \qquad - a_{12} + a_{13} + a_{14} = 0 \end{cases} \\ \dots \end{cases}$$

В каждой такой паре уравнений можно принять первую и третью переменную за базисные (выразить через вторую и четвёртую). В итоге строки матрицы $A$ должны выглядеть так:

$$A = \begin{pmatrix} (-a_{12} + 4a_{14}) + a_{12} + (a_{12} - a_{14}) + a_{14} \\ (-a_{22} + 4a_{24}) + a_{22} + (a_{22} - a_{24}) + a_{24} \\ \dots \end{pmatrix}$$

Четыре столбца линейно зависимы: первый и третий выражаются через второй и четвёртый. Поэтому максимальное число линейно независимых строк в матрице $A$ равно двум. Меньше двух строк (одной) быть не может, так как число столбцов в фундаментальной матрице $2 = 4 - \operatorname{Rg} A$. Поэтому остаётся составить две линейно независимые строки коэффициентов, удовлетворяющие соотношениям выше. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

И тогда система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \qquad = 0 \\ 4x_1 \qquad - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

□