

Семинар 6

Алексеев Василий

14 + 17 марта 2023

Содержание

1	Линейные отображения	2	1
1.1	О размерности ядра и множества значений отображения		1
1.2	Пространство отображений из пространства в пространство		2
1.3	Изоморфизм между отображениями и матрицами		3
1.4	Линейные функции — отображения на числовую прямую		3
2	Задачи		4
2.1	# 23.69		4
2.2	# 23.40(1в)		5
2.3	# 31.19(2)		6
2.4	# 31.5		7
3	Дополнение		7
3.1	# 23.82(1)		7
3.2	# 31.35(1)		9

1. Линейные отображения 2

1.1. О размерности ядра и множества значений отображения

Линейное отображение $\phi: X \rightarrow Y$ задано матрицей $A_{m \times n}$ в базисах $e = (e_1, \dots, e_n)$ в X и $f = (f_1, \dots, f_m)$ в Y :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 12 & -8 \\ 4 & -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Надо найти ядро, множество значений отображения. Выяснить, является ли оно инъективным, сюръективным.

Решение. Из размера матрицы A видно, что $\dim X = 4$ и $\dim Y = 3$.

Найдём **ядро** ϕ :

$$x \in \text{Ker } \phi \Leftrightarrow \phi(x) = 0 \Leftrightarrow A\xi = 0$$

где $\xi \in \mathbb{R}^4$ есть координатный столбец вектора $x \in X$. Получается, для нахождения ядра надо просто решить однородную систему. Сделаем это, упростив матрицу A :

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 12 & -8 \\ 4 & -2 & -6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Произвольный вектор из ядра представим как

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ -3t_1 + 2t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = t_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Видно, что в базисе $\text{Ker } \phi$ два вектора. Ядро не нулевое, а потому отображение ϕ не инъективно.

Остаётся найти **множество значений** ϕ :

$$y \in \text{Im } \phi \Leftrightarrow \exists x \in X: \phi(x) = y \Leftrightarrow A\xi = \eta$$

где $\xi \in \mathbb{R}^4$ и $\eta \in \mathbb{R}^3$ есть координатные столбцы векторов x и y соответственно. Получается, можно взять расширенную матрицу $(A \mid \eta)$, упростить её и выписать ограничения на η , так чтобы система была совместна. Упрощение матрицы A уже проведено в (1). Остаётся проделать те же самые преобразования со столбцом η :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2/4 \\ y_3/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2/4 + y_1 \\ y_3/2 + y_1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ y_3/2 + y_1 \end{pmatrix}$$

Доводить по-честному до конца упрощение вектора η было не обязательно: чтобы решение $A\xi = \eta$ существовало (то есть чтобы η был во множестве значений), главное занулить те компоненты, которые будут соответствовать нулевым строкам упрощённой матрицы системы A :

$$y_3/2 + y_1 = 0 \Leftrightarrow y_3 = -2y_1 \Leftrightarrow \eta = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ -2t_1 \end{pmatrix} = t_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Базис в $\text{Im } \phi$ “виден”, векторов в нём также два. Так как $\dim Y = 3 \neq 2 = \dim \text{Im } \phi$, то отображение не сюръективно.

“Наблюдение”.

В упрощённой матрице A (1) первые два столбца оказались базисными. Так как элементарные преобразования строк не меняют линейной зависимости между столбцами, то и первые два столбца $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^3$ в исходной матрице $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ можно взять в качестве базисных. Что вообще есть $A\xi$? На это произведение можно смотреть как на линейную комбинацию столбцов A с коэффициентами, записанными в столбце ξ :

$$A\xi = (a_1, a_2, a_3, a_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 \xrightarrow[\text{базисные}]{a_1, a_2} \alpha a_1 + \beta a_2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Получается, что множество значений преобразования — это линейная оболочка базисных столбцов матрицы A !

$$\text{Im } \phi = \{\alpha a_1 + \beta a_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(a_1, a_2)$$

То есть эти базисные столбцы и можно было взять в качестве базиса в $\text{Im } \phi$. С одной стороны, число базисных столбцов — это ранг A . С другой, получается, это же — и число базисных в $\text{Im } \phi$, то есть $\dim \text{Im } \phi$, или $\text{Rg } \phi$. Приходим к следующему соотношению:

$$\boxed{\text{Rg } \phi = \text{Rg } A}$$

Из интересного тут: матрица отображения A зависит от выбора базисов в X и Y . То есть разные базисы — разные матрицы одного и того же отображения. Однако ранги всех этих матриц оказываются одинаковыми и равны рангу отображения. Таким образом, ранг матрицы отображения — это *инвариант* относительно выбора базисов.

Посмотрим ещё раз на упрощённую матрицу A (1). Всего четыре столбца. Первые два — базисные. Их число, как только что поняли, определяет размерность множества значений. Вторые два столбца соответствуют свободным переменным в системе $A\xi = \eta$, а потому определяют размерность ядра отображения. Иными словами, получаем:

$$\boxed{\text{Rg } \phi + \dim \text{Ker } \phi = \dim X}$$

Единственное, про что стоит ещё, по-хорошему, сказать отдельно: $\mathcal{L}(a_1, a_2)$ формально вообще не является $\text{Im } \phi$, потому что $\text{Im } \phi \subseteq Y$, а $\mathcal{L}(a_1, a_2) \subseteq \mathbb{R}^3$. Однако соответствие между векторами и их координатными столбцами *взаимно однозначное*. Более того, и $\text{Im } \phi$, и $\mathcal{L}(a_1, a_2)$ оба являются линейными подпространствами, причём их размерности совпадают, потому что сумма векторов y_1 и y_2 из $\text{Im } \phi$ есть вектор, координатный столбец которого есть сумма координатных столбцов векторов y_1 и y_2 . Аналогично с умножением на число. То есть *линейные операции “проходят одинаково”*: между векторами в $\text{Im } \phi$ и их координатными столбцами в \mathbb{R}^3 . В таком случае говорят, что линейные пространства $\text{Im } \phi$ и $\mathcal{L}(a_1, a_2)$ *изоморфны*. \square

1.2. Пространство отображений из пространства в пространство

Рассмотрим множество всех линейных отображений из X в Y :

$$\mathcal{F} = \{\phi: X \rightarrow Y \mid \phi \text{ — линейное}\}$$

где линейность ϕ обозначает выполнение следующих двух свойств:

- $\phi(x_1 + x_2) = \phi(x_1) + \phi(x_2), \quad x_1, x_2 \in X$
- $\phi(\alpha x_1) = \alpha \phi(x_1), \quad \alpha \in \mathbb{R}, x_1 \in X$

Введём на \mathcal{F} операции сложения отображений и умножения отображения на число. За сумму $\phi_1 + \phi_2$ двух линейных отображений ϕ_1 и ϕ_2 будем считать отображение из X в Y , которое действует на произвольный $x \in X$ как:

$$(\phi_1 + \phi_2)(x) \equiv \phi_1(x) + \phi_2(x)$$

За отображение $\alpha\phi$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\phi \in \mathcal{F}$, будем считать отображение из X в Y , действующее на произвольный $x \in X$ по правилу:

$$(\alpha\phi)(x) \equiv \alpha\phi(x)$$

Проверим, что сумма линейных отображений — это тоже линейное отображение:

$$\begin{aligned} (\phi_1 + \phi_2)(x_1 + x_2) &= \phi_1(x_1 + x_2) + \phi_2(x_1 + x_2) = \phi_1(x_1) + \phi_1(x_2) + \phi_2(x_1) + \phi_2(x_2) \\ &= (\phi_1(x_1) + \phi_2(x_1)) + (\phi_1(x_2) + \phi_2(x_2)) = (\phi_1 + \phi_2)(x_1) + (\phi_1 + \phi_2)(x_2) \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что $(\phi_1 + \phi_2)(\alpha x) = \alpha(\phi_1 + \phi_2)(x)$. Таким образом, линейные операции над линейными отображениями из \mathcal{F} дают также линейные отображения из \mathcal{F} , то есть "+" : $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ и "." : $\mathbb{R} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$.

Множество \mathcal{F} с введёнными операциями "+" и "." образует линейное пространство. Чтобы в этом убедиться, можно проверить выполнение "8 свойств", связанных с операциями сложения и умножения на число. Например, коммутативность: $(\phi_1 + \phi_2)(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x) = \phi_2(x) + \phi_1(x) = (\phi_2 + \phi_1)(x)$ для произвольного $x \in X$. Нулевым же, очевидно, будет отображение $\phi_0 : x \mapsto 0 \in Y$.

1.3. Изоморфизм между отображениями и матрицами

В выбранной паре базисов пространств X и Y устанавливается взаимно однозначное соответствие $h_{\mathcal{F}}$ между линейными отображениями \mathcal{F} и матрицами $\mathbb{R}^{m \times n}$. Множество матриц $\mathbb{R}^{m \times n}$ — очевидно, линейное пространство (размерности mn). Множество линейных отображений \mathcal{F} — также линейное пространство (см. Раздел 1.2). При этом сумме отображений ϕ_1 и ϕ_2 из \mathcal{F} с матрицами соответственно A_1 и A_2 соответствует отображение, матрица которого является суммой $A_1 + A_2$. Умножению отображения ϕ с матрицей A на число α соответствует отображение с матрицей αA . Таким образом, отображение $h_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ линейно, *сохраняет линейные операции*. Взаимно однозначное линейное отображение называется *изоморфизмом*¹. Про пространства \mathcal{F} и $\mathbb{R}^{m \times n}$ в таком случае говорят, что они *изоморфны*. Из изоморфности \mathcal{F} и $\mathbb{R}^{m \times n}$, в частности, следует, что размерность \mathcal{F} равна также mn .

1.4. Линейные функции — отображения на числовую прямую

Пусть $Y \equiv \mathbb{R}$. То есть будем теперь рассматривать линейные отображения, действующие из X в \mathbb{R} :

$$\mathcal{F}_1 = \{\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \phi \text{ — линейное}\}$$

¹В общем случае изоморфизм — биекция, *сохраняющая структуру*. В случае отображений между линейными пространствами изоморфизм должен сохранять линейные зависимости между векторами: сумма прообразов — сумма образов, аналогично с умножением на число.

Такие отображения ещё называют *линейными функциями*.

С выбранным базисом в X^2 каждой линейной функции из \mathcal{F}_1 ставится в соответствие матрица отображения A размера $1 \times n$, то есть матрица отображения в случае линейной функции — это одна строка. Эта строка ещё называется *координатной строкой* линейной функции.

Пространство линейных функций \mathcal{F}_1 изоморфно пространству строк \mathbb{R}^n длины n (см. Раздел 1.3). В пространстве строк можно очевидным образом выбрать базис: $(1, 0, \dots, 0, 0); \dots; (0, 0, \dots, 0, 1)$. Пусть базисной строчке из \mathbb{R}^n с единицей на i -ой позиции соответствует функция $\phi_i \in \mathcal{F}_1$:

$$\mathbb{R}^n \ni \left\{ \begin{array}{ll} (1, 0, \dots, 0, 0) & \leftrightarrow \phi_1 \\ (0, 1, \dots, 0, 0) & \leftrightarrow \phi_2 \\ & \dots \\ (0, 0, \dots, 1, 0) & \leftrightarrow \phi_{n-1} \\ (0, 0, \dots, 0, 1) & \leftrightarrow \phi_n \end{array} \right\} \in \mathcal{F}_1$$

В совокупности функции $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ дадут базис в \mathcal{F}_1 . Этот базис называется базисом, *взаимным* к базису e пространства X . Само пространство линейных функций, действующих на пространстве X , называется пространством, *сопряжённым* к X , и может обозначаться как X^* . Таким образом, $\dim X^* = \dim X$, а смысл *координатной строки* функции ϕ также в том, что она — это коэффициенты разложения ϕ по взаимному базису.

2. Задачи

2.1. # 23.69

Как изменится матрица A линейного отображения $\phi: X \rightarrow Y$, заданная в паре базисов $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_m)$?

1. при смене мест $e_i \leftrightarrow e_j$
2. при смене мест $f_k \leftrightarrow f_l$
3. при замене $e_i \rightarrow \lambda e_i$ и $f_k \rightarrow \mu f_k$ ($\lambda, \mu \neq 0$)
4. при замене $e_i \rightarrow e_i + e_j$ и $f_k \rightarrow f_k - f_l$

Решение. Столбцы матрицы отображения A — координаты векторов базиса e в базисе f . Поэтому если поменять местами два вектора в e , то в матрице поменяются местами соответствующие столбцы. Если же поменять местами векторы в f , то аналогичная смена мест произойдёт для строк матрицы A .

Если новый i -ый базисный в e будет равен λe_i , то $\phi(\lambda e_i) = \lambda \phi(e_i)$, то есть i -ый столбец увеличится в λ раз. Если же новый k -ый базисный в f станет μf_k , то со всеми компонентами в разложении векторов e по базису f произойдёт следующее (на примере e_1):

$$\phi(e_1) = \dots + a_k f_k + \dots = \dots + \frac{a_k}{\mu} \mu f_k + \dots$$

где “точками” обозначены все слагаемые в разложении по базису f , кроме f_k . Видно, что компоненты по f_k уменьшаются в μ раз. То есть k -ая строка матрицы отображения станет меньше в μ раз.

²В $Y = \mathbb{R}$ тоже можно бы было “выбрать” базис, но обычно базисом в \mathbb{R} по умолчанию считают единицу.

Если положить новый i -ый в e равным $e_i + e_j$, то к i -му столбцу матрицы прибавится j -ый столбец. Если же вместо f_k взять $f_k - f_l$, то компоненты изменятся следующим образом (снова на примере e_1):

$$\phi(e_1) = \dots + a_k f_k + a_l f_l = \dots + a_k f_k - a_k f_l + a_k f_l + a_l f_l = \dots + a_k \underbrace{(f_k - f_l)}_{f'_k} + \underbrace{(a_k + a_l)}_{a'_l} f_l$$

где “точками” снова скрыто всё “неважное”. Видно, что в матрице меняется l -ая строка: к ней прибавляется k -ая. \square

2.2. # 23.40(1в)

Пусть $\mathcal{P}^{(m)}$ — линейное пространство линейных многочленов степени не выше m ³. Проверить, что дифференцирование, рассматриваемое как преобразование $D: \mathcal{P}^{(m)} \rightarrow \mathcal{P}^{(m)}$, линейно. Найти его ядро и множество значений. Вычислить матрицу в базисе

$$\left(1, \frac{t}{1!}, \dots, \frac{t^m}{m!}\right)$$

Решение. Линейность. Пусть $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m$ и $q(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m$. Тогда:

$$\begin{aligned} D(p(t) + q(t)) &= D((a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m) + (b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m)) \\ &= a_1 + \dots + a_m t^{m-1} + b_1 + \dots + b_m t^{m-1} = D(p(t)) + D(q(t)) \end{aligned}$$

Аналогично с $D(\alpha p(t)) = \alpha D(p(t))$.

Ядро преобразования:

$$p(t) \in \text{Ker } D \Leftrightarrow D(p(t)) = a_1 + \dots + a_m t^{m-1} = 0 \Leftrightarrow a_1 = \dots = a_m = 0$$

Поэтому $p(t) \in \text{Ker } D \Leftrightarrow p(t) = a_0$. То есть ядро дифференцирования — все константные многочлены. Размерность ядра, очевидно, равно одному.

Множество значений — это $\mathcal{P}^{(m-1)}$. Потому что, с одной стороны, при дифференцировании многочлена степени не выше m получается многочлен степени не выше $m - 1$. С другой стороны, для многочлена $h(t)$ степени не выше $m - 1$ можно подобрать многочлен $p(t)$ степени не выше m , дифференцирование которого даёт данный (например, $p(t) = \int h(t)$).

Матрица преобразования. Столбцы матрицы — координаты образов векторов пространства $\mathcal{P}^{(m)}$ в том же базисе. Так как

$$\begin{aligned} D(1) &= 0 \\ D\left(\frac{1}{1!}t\right) &= 1 \cdot \frac{1}{1!} \\ D\left(\frac{1}{2!}t^2\right) &= 1 \cdot \frac{1}{1!}t \\ &\dots \\ D\left(\frac{1}{m!}t^m\right) &= 1 \cdot \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1} \end{aligned}$$

³Какая степень у нулевого многочлена?

то матрица преобразования получается равной

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Размер матрицы A равен $(m+1) \times (m+1)$.

Если бы дифференцирование рассматривалось как отображение $D: \mathcal{P}^{(m)} \rightarrow \mathcal{P}^{(m-1)}$ (и в $\mathcal{P}^{(m-1)}$ базис бы был такой же, как в $\mathcal{P}^{(m)}$, только без последнего вектора), то строк в матрице отображения стало бы меньше на одну (столбцов столько же, потому что базис исходного пространства такой же, строк же меньше, потому что меняется базис пространства, куда отображаем):

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

И размер матрицы A' равен $m \times (m+1)$. □

2.3. # 31.19(2)

Показать, что сопоставление f каждому многочлену степени не выше 3 числа по правилу:

$$f: \mathcal{P}^{(3)} \ni p(t) \mapsto \int_0^1 p(t^2) dt \in \mathbb{R}$$

есть линейная функция. Вычислить координатную строку функции f в базисе $(1, t, t^2, t^3)$.

Решение. Пусть $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ и $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$. Тогда их сумма:

$$(p+q)(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + (a_3 + b_3)t^3$$

Образ суммы:

$$\begin{aligned} f(p(t) + q(t)) &= \int_0^1 (p+q)(t^2) dt \\ &= \int_0^1 ((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)h + (a_2 + b_2)h^2 + (a_3 + b_3)h^3) \big|_{h=t^2} dt \\ &= \int_0^1 ((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t^2 + (a_2 + b_2)t^4 + (a_3 + b_3)t^6) dt \\ &= \int_0^1 ((a_0 + a_1 t^2 + a_2 t^4 + a_3 t^6) + (b_0 + b_1 t^2 + b_2 t^4 + b_3 t^6)) dt \\ &= \int_0^1 (a_0 + a_1 t^2 + a_2 t^4 + a_3 t^6) dt + \int_0^1 (b_0 + b_1 t^2 + b_2 t^4 + b_3 t^6) dt = f(p(t)) + f(q(t)) \end{aligned}$$

Аналогично и

$$f(\alpha p(t)) = \alpha \int_0^1 (a_0 + a_1 t^2 + a_2 t^4 + a_3 t^6) dt = \alpha f(p(t))$$

Координатная строка функции — как матрица отображения, только в случае с функцией $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ она становится строкой. И чтобы найти эту строку, можно воспользоваться тем, что образ многочлена должен быть равен произведению координатной строки функции на координатный столбец многочлена:

$$f(p(t)) = \int_0^1 (a_0 + a_1 t^2 + a_2 t^4 + a_3 t^6) dt = a_0 + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{5} + \frac{a_3}{7} = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}\right) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Таким образом, координатная строка функции:

$$A = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}\right)$$

Можно было сделать по-другому: вычислить образы базисных векторов (это будут просто числа) и собрать их в строчку:

$$A = (f(1), f(t), f(t^2), f(t^3)) = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}\right)$$

□

2.4. # 31.5

Может ли для линейной функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ при всех $x \in X$ выполняться условие?

1. $f(x) > 0$
2. $f(x) \geq 0$
3. $f(x) = \alpha$

Решение. Очевидно, раз X линейное пространство, то оно не пустое и содержит как минимум нулевой вектор. Но тогда

$$f(\mathbf{0}) = f(0 \cdot \mathbf{0}) = 0 \cdot f(\mathbf{0}) = 0 \Rightarrow \text{пункт 1}$$

Если же найдётся $x^* \in X$, такой что $f(x^*) > 0$, то

$$f(-x^*) = f(-1 \cdot x^*) = -1 \cdot f(x^*) < 0 \Rightarrow \text{пункт 2, только если не } f(x) \equiv 0$$

Поэтому и третий пункт верен только при $\alpha = 0$.

□

3. Дополнение

3.1. # 23.82(1)

Преобразование ϕ переводит линейно независимые векторы a_i в b_i . Преобразование ψ переводит линейно независимые векторы b_i в c_i . То есть

$$(a_1, a_2, a_3) \xrightarrow{\phi} (b_1, b_2, b_3)$$

$$(b_1, b_2, b_3) \xrightarrow{\psi} (c_1, c_2, c_3)$$

Надо найти матрицу $A_{\psi\phi}$ преобразования $\psi\phi$ в исходном базисе.

Решение. Пусть матрицы A_ϕ и A_ψ — матрицы преобразований ϕ и ψ соответственно. Тогда условие задачи можно переписать в виде

$$\begin{cases} A_\phi(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3) \\ A_\psi(b_1, b_2, b_3) = (c_1, c_2, c_3) \\ A_{\psi\phi}(a_1, a_2, a_3) = (c_1, c_2, c_3) \end{cases}$$

Если положить $A \equiv (a_1, a_2, a_3)$, $B \equiv (b_1, b_2, b_3)$ и $C \equiv (c_1, c_2, c_3)$, то условие можно переписать в ещё более сжатой форме:

$$\begin{cases} A_\phi A = B \\ A_\psi B = C \\ A_{\psi\phi} A = C \end{cases}$$

Отсюда (так как по условию существуют A^{-1} и B^{-1}):

$$\begin{cases} A_\phi = BA^{-1} \\ A_\psi = CB^{-1} \\ A_{\psi\phi} = CA^{-1} = CB^{-1} \cdot BA^{-1} = A_\psi A_\phi \end{cases}$$

А как бы, например, выглядела матрица преобразования ϕ в базисе (a_1, a_2, a_3) ? На данном этапе известно, что

$$A_{\psi\phi}\xi_e = v_e$$

где индекс e показывает, в каком базисе даны компоненты. При замене старого базиса $e = (e_1, e_2, e_3)$ на новый $a = (a_1, a_2, a_3)$ векторы базисов связаны соотношением (коэффициенты разложения векторов нового базиса a по старому e образуют столбцы матрицы перехода S):

$$(a_1, a_2, a_3) = (e_1, e_2, e_3)S$$

Координатные же столбцы произвольного вектора x в старом ξ_e и новом ξ_a базисах связаны следующим образом:

$$\begin{cases} x = e\xi_e \\ x = a\xi_a = eS\xi_a \end{cases} \Rightarrow \xi_e = S\xi_a$$

Итак, пока известно, что в базисе e :

$$A_{\psi\phi}\xi_e = v_e \quad (2)$$

Надо же найти матрицу $A'_{\psi\phi}$ преобразования в базисе a :

$$A'_{\psi\phi}\xi_a = v_a \quad (3)$$

Чтобы найти $A'_{\psi\phi}$, можно выразить в формуле (2) координатные столбцы в старом базисе через столбцы соответствующих векторов в новом базисе (чтобы получить формулу, “похожую” на (3), только с $A_{\psi\phi}$ вместо $A'_{\psi\phi}$):

$$A_{\psi\phi}S\xi_a = Sv_a \Leftrightarrow S^{-1}A_{\psi\phi}S\xi_a = v_a \quad (4)$$

Подставляя вместо ξ_a базисные столбцы в последнюю формулу (4) и в (3) получаем, что

$$S^{-1}A_{\psi\phi}S = A'_{\psi\phi}$$

Остаётся понять, чему равна матрица S перехода от базиса e к базису a . Столбцы матрицы A — координаты новых базисных векторов a в старом базисе e . Поэтому A и есть S , и матрица преобразования в новом базисе в итоге выглядит так:

$$A'_{\psi\phi} = A^{-1} A_{\psi\phi} A$$

□

3.2. # 31.35(1)

Пусть базису (e_1, e_2, e_3) пространства \mathcal{L} биортогонален базис (f_1, f_2, f_3) сопряжённого пространства \mathcal{L}^* . Надо найти базис, биортогональный базису

$$e'_1 = e_1 + e_2, \quad e'_2 = e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_3$$

Решение. Биортогональный базис f — это такой базис в \mathcal{L}^* , функции f_i которого обладают следующим свойством:

$$f_i(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

То есть для неизвестных пока линейных функций f'_1, f'_2, f'_3 нового биортогонального базиса уже известно, что, во-первых (выписываем соотношения для f'_1):

$$\begin{cases} 1 = f'_1(e'_1) = f'_1(e_1 + e_2) = f'_1(e_1) + f'_1(e_2) \\ 0 = f'_1(e'_2) = f'_1(e_2 + e_3) = f'_1(e_2) + f'_1(e_3) \\ 0 = f'_1(e'_3) = f'_1(e_3) \end{cases}$$

То есть f'_1 в точности такая же, как f_1 (ведь линейная функция из \mathcal{L}^* однозначно определяется значениями на векторах базиса \mathcal{L}).

Далее, аналогичные соотношения для f'_2 :

$$\begin{cases} 0 = f'_2(e'_1) = f'_2(e_1 + e_2) = f'_2(e_1) + f'_2(e_2) \\ 1 = f'_2(e'_2) = f'_2(e_2 + e_3) = f'_2(e_2) + f'_2(e_3) \\ 0 = f'_2(e'_3) = f'_2(e_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_2(e_1) = -1 \\ f'_2(e_2) = 1 \\ f'_2(e_3) = 0 \end{cases}$$

И для f'_3 :

$$\begin{cases} 0 = f'_3(e'_1) = f'_3(e_1 + e_2) = f'_3(e_1) + f'_3(e_2) \\ 0 = f'_3(e'_2) = f'_3(e_2 + e_3) = f'_3(e_2) + f'_3(e_3) \\ 1 = f'_3(e'_3) = f'_3(e_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_3(e_1) = 1 \\ f'_3(e_2) = -1 \\ f'_3(e_3) = 1 \end{cases}$$

Чему равны f'_2 и f'_3 ? Линейные действия над функциями из \mathcal{L}^* равносильны таким же линейным действиям над их координатными строками: пространство \mathcal{L}^* изоморфно пространству строк размера $\dim \mathcal{L}$. Функции f'_2 , например, (при базисе e в \mathcal{L}) соответствует строка $(-1, 1, 0)$. Можно разложить эту строку в линейную комбинацию базисных строк (соответствующих функциям, из которого состоит биортогональный базис f):

$$(-1, 1, 0) = -1 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0)$$

Это значит, что с самой функцией f'_2 будет “то же самое”:

$$f'_2 = -1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2$$

Аналогично с f'_3 :

$$f'_3 = 1 \cdot f_1 - 1 \cdot f_2 + 1 \cdot f_3$$

Итого, новый биортогональный базис:

$$f = (f_1, -f_1 + f_2, f_1 - f_2 + f_3)$$

□