

Семинар 6

Алексеев Василий

11 марта + 12 марта 2021

Содержание

1	Линейные отображения	1
2	Задачи	1
2.1	# 23.15(1)	1
2.2	# 23.29(5)	2
2.3	# 23.40(1в)	3
2.4	# 23.82(1)	5
2.5	# 31.21	6
2.6	# 31.35(1)	7

1. Линейные отображения 2. Линейные функции

2. Задачи

2.1. # 23.15(1)

Пусть линейное пространство \mathcal{L} представимо как прямая сумма двух ненулевых подпространств: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$.

Показать, что преобразование $\phi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ проектирования на \mathcal{L}_1 параллельно \mathcal{L}_2 линейно. Найти ядро и множество значений ϕ . Найти матрицу преобразования ϕ в базисе \mathcal{L} , составленном из базисов подпространств \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 .

Решение. Раз \mathcal{L} выражено прямой суммой \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 , то любой вектор x из \mathcal{L} единственным образом раскладывается в сумму двух, один из которых в \mathcal{L}_1 , а другой в \mathcal{L}_2 :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow \underbrace{x}_{\in \mathcal{L}} = \underbrace{x_1}_{\in \mathcal{L}_1} + \underbrace{x_2}_{\in \mathcal{L}_2}$$

В таком представлении

$$\phi(x) = x_1$$

И можно проверить линейность преобразования:

$$\phi(x + y) = \phi(x_1 + x_2 + y_1 + y_2) = \phi((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)) = x_1 + y_1 = \phi(x) + \phi(y)$$

Аналогично $\phi(\alpha x) = \alpha \phi(x)$.

Ядро преобразования определяется как

$$\phi(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \Leftrightarrow x = x_2 \in \mathcal{L}_2$$

то есть $\text{Ker } \phi = \mathcal{L}_2$.

Множество значений — подмножество \mathcal{L} векторов y , которые могут быть получены с помощью преобразования ϕ . То есть рассматриваем $y \in \mathcal{L}$ и проверяем, при каких условиях его можно получить с помощью ϕ . Очевидно, если существует x , являющийся прообразом y , то

$$\phi(x) = y \Rightarrow y \in \mathcal{L}_1$$

То есть $\text{Im } \phi \subseteq \mathcal{L}_1$. Но верно и в другую сторону¹:

$$y \in \mathcal{L}_1 \Rightarrow \exists x \in \mathcal{L} : \phi(x) = y$$

Поэтому $\text{Im } \phi = \mathcal{L}_1$.

Можно заметить, что выполняется тождество:

$$\underbrace{\dim \text{Im } \phi}_{\text{Rg } \phi} + \dim \text{Ker } \phi = \dim \mathcal{L}$$

Пусть размерность \mathcal{L}_1 равна l , а размерность \mathcal{L}_2 равна k . Пусть (a_1, \dots, a_l) — базис в \mathcal{L}_1 , а (b_1, \dots, b_k) — базис в \mathcal{L}_2 . Тогда за базис в \mathcal{L} предлагается взять $(a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_k)$ ².

¹Например, при $x = y$.

²Так можно сделать, потому что $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$.

В общем случае, столбцы матрицы отображения $\phi: X \rightarrow Y$ — это координатные столбцы базиса X в базисе Y . В случае преобразования, X и Y — одно и то же, и базис один. Поэтому столбцы матрицы преобразования ϕ — это координатные столбцы образов базисных векторов в том же базисе

$$A = (\phi(a_1), \dots, \phi(a_l), \phi(b_1), \dots, \phi(b_k)) = \begin{pmatrix} E_{l \times l} & 0_{l \times k} \\ 0_{k \times l} & 0_{k \times k} \end{pmatrix}$$

так как $\phi(a_i) = 1 \cdot a_i$, а $\phi(b_i) = 0$.

Если бы ϕ рассматривалось не как преобразование, а как отображение $\phi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_1$, то в данном случае базисы в пространствах “из” и “куда” уже отличаются. Столбцов в матрице отображения останется $l + k$, но строк уже будет всего l (потому что базис в пространстве “куда” \mathcal{L}_1 есть (a_1, \dots, a_l)). То есть матрица отображения $\phi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_1$ равна (индексом a обозначено, в каком базисе компоненты)

$$A = (\phi(a_1)_a, \dots, \phi(a_l)_a, \phi(b_1)_a, \dots, \phi(b_k)_a) = (E_{l \times l} \quad 0_{l \times k})$$

□

2.2. # 23.29(5)

Линейное отображение $\phi: X \rightarrow Y$ задано матрицей $A_{m \times n}$ в базисах $e = (e_1, \dots, e_n)$ в X и $f = (f_1, \dots, f_m)$ в Y :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Надо найти ядро, множество значений отображения. Выяснить, является ли оно инъективным, сюръективным.

Решение. Из размера матрицы A видно, что $\dim X = 3$ и $\dim Y = 5$.

Найдём $\text{Ker } \phi$ (за $x \in \mathbb{R}^3$ обозначен координатный столбец вектора $x \in X$):

$$x \in \text{Ker } \phi \Leftrightarrow \phi(x) = Ax = 0$$

Надо решить однородную систему, упростив матрицу A :

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Сразу видно, что ранг матрицы отображения (он же ранг самого отображения) $\text{Rg } \phi = 2$. Ранг отображения — размерность множества значений. Поэтому $\dim \text{Im } \phi = 2 < 5 = \dim Y$. Что означает, что отображение ϕ не сюръективно.

Произвольный вектор из ядра представим как

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что размерность ядра $\dim \text{Ker } \phi = 1$. Ядро не нулевое. Это значит, что отображение не инъективно (можно подобрать два различных вектора (отличающихся на ненулевой вектор из ядра) которые ϕ переводит в один и тот же вектор).

Остаётся найти $\text{Im } \phi$ (у которого размерность уже известно, равна двум):

$$y \in \text{Im } \phi \Leftrightarrow \exists x \in X : Ax = y$$

Получается, надо рассмотреть расширенную матрицу $(A | y)$, упростить её, и выписать ограничения на y , чтобы система была совместна. Упрощение матрицы A уже проведено в (2.2). Остаётся проделать те же самые преобразования со столбцом y :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -y_1/2 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -y_1/2 \\ y_2 - y_1 \\ y_3 - 3y_1/2 \\ y_4 + 4y_1/2 \\ y_5 + 6y_1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -y_1/2 - (y_3 - 3y_1/2) \\ y_2 - y_1 \\ y_3 - 3y_1/2 \\ y_4 + 4y_1/2 + 5(y_3 - 3y_1/2) \\ y_5 + 6y_1/2 + (y_3 - 3y_1/2) \end{pmatrix}$$

Зануляем компоненты, соответствующие нулевым строкам в упрощённой A :

$$\begin{cases} y_2 - y_1 = 0 \\ y_4 + \frac{4y_1}{2} + 5\left(y_3 - \frac{3y_1}{2}\right) \\ y_5 + \frac{6y_1}{2} + \left(y_3 - \frac{3y_1}{2}\right) \end{cases}$$

Уравнений 3 (очевидно, линейно независимых). Переменных 5. Значит, какие-то три можно выразить через другие две. Например,

$$\begin{cases} y_2 = y_1 \\ y_4 = \frac{1}{2}(11y_1 - 10y_3) \\ y_5 = \frac{1}{2}(-3y_1 - 2y_3) \end{cases}$$

Поэтому общий вид y из множества значений ($y_1 = t_1 \in \mathbb{R}$, $y_3 = t_2 \in \mathbb{R}$):

$$y = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \\ t_2 \\ \frac{1}{2}(11t_1 - 10t_2) \\ \frac{1}{2}(-3t_1 - 2t_2) \end{pmatrix} = 2t_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\tilde{i}_1} + 2t_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\tilde{i}_2}$$

Базис в $\text{Im } \phi$ “виден”. Векторов в нём, ожидаемо, два. □

2.3. # 23.40(1в)

Пусть $\mathcal{P}^{(m)}$ — линейное пространство линейных многочленов степени не выше m . Проверить, что дифференцирование, рассматриваемое как преобразование $D: \mathcal{P}^{(m)} \rightarrow \mathcal{P}^{(m)}$, линейно. Найти его ядро и множество значений. Вычислить матрицу в базисе

$$\left(1, \frac{t}{1!}, \dots, \frac{t^m}{m!}\right)$$

Решение. Линейность ($p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m$ и $q(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m$):

$$\begin{aligned} D(p(t) + q(t)) &= D((a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m) + (b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m)) \\ &= a_1 + \dots + a_m t^{m-1} + b_1 + \dots + b_m t^{m-1} = D(p(t)) + D(q(t)) \end{aligned}$$

Аналогично с $D(\alpha p(t)) = \alpha D(p(t))$.

Ядро:

$$p(t) \in \text{Ker } D \Leftrightarrow D(p(t)) = a_1 + \dots + a_m t^{m-1} = 0 \Leftrightarrow a_1 = \dots = a_m = 0$$

Поэтому $p(t) \in \text{Ker } D \Leftrightarrow p(t) = a_0$. То есть ядро дифференцирования — все константные многочлены. Размерность ядра, очевидно, равно одному.

Множество значений — это \mathcal{P}^{m-1} . Потому что, с одной стороны, при дифференцировании многочлена степени не выше m получается многочлен степени не выше $m-1$. С другой стороны, для многочлена $h(t)$ степени не выше $m-1$ можно подобрать многочлен $p(t)$ степени не выше m , дифференцирование которого даёт данный (например, $p(t) = \int h(t)$).

Матрица преобразования? Стобцы её — координаты образов векторов пространства \mathcal{P}^m в том же базисе. Так как

$$\begin{aligned} D(1) &= 0 \\ D\left(\frac{1}{1!}t\right) &= 1 \cdot \frac{1}{1!} \\ D\left(\frac{1}{2!}t^2\right) &= 1 \cdot \frac{1}{1!}t \\ &\dots \\ D\left(\frac{1}{m!}t^m\right) &= 1 \cdot \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1} \end{aligned}$$

то матрица преобразования получается равной

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Размер матрицы A равен $(m+1) \times (m+1)$.

Если бы дифференцирование рассматривалось бы как отображение $D: \mathcal{P}^m \rightarrow \mathcal{P}^{m-1}$ (и в \mathcal{P}^{m-1} базис бы был такой же, как в \mathcal{P}^m , только без последнего вектора), то строк в матрице отображения стало бы меньше на одну (столбцов столько же, потому что базис исходного пространства такой же, строк же меньше, потому что меняется базис пространства, куда отображаем):

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

И размер матрицы A' равен $m \times (m+1)$.

□

2.4. # 23.82(1)

Преобразование ϕ переводит векторы a_i в b_i . Преобразование ψ переводит векторы b_i в c_i . То есть

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, a_3) &\xrightarrow{\phi} (b_1, b_2, b_3) \\ (b_1, b_2, b_3) &\xrightarrow{\psi} (c_1, c_2, c_3)\end{aligned}$$

Надо найти матрицу $A_{\psi\phi}$ преобразования $\psi\phi$ в исходном базисе.

Решение. Пусть матрицы A_ϕ и A_ψ — матрицы преобразований ϕ и ψ соответственно. Тогда условие задачи можно переписать в виде

$$\begin{cases} A_\phi(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3) \\ A_\psi(b_1, b_2, b_3) = (c_1, c_2, c_3) \\ A_{\psi\phi}(a_1, a_2, a_3) = (c_1, c_2, c_3) \end{cases}$$

Если положить $A \equiv (a_1, a_2, a_3)$, $B \equiv (b_1, b_2, b_3)$ и $C \equiv (c_1, c_2, c_3)$, то условие можно переписать в ещё более сжатой форме:

$$\begin{cases} A_\phi A = B \\ A_\psi B = C \\ A_{\psi\phi} A = C \end{cases}$$

Отсюда (так как по условию существуют A^{-1} и B^{-1}):

$$\begin{cases} A_\phi = BA^{-1} \\ A_\psi = CB^{-1} \\ A_{\psi\phi} = CA^{-1} = CB^{-1} \cdot BA^{-1} = A_\psi A_\phi \end{cases}$$

А как бы, например, выглядела матрица преобразования ϕ в базисе (a_1, a_2, a_3) ? На данном этапе известно, что

$$A_{\psi\phi}\xi_e = \nu_e$$

где индекс e показывает, в каком базисе даны компоненты. При замене старого базиса $e = (e_1, e_2, e_3)$ на новый $a = (a_1, a_2, a_3)$ векторы базисов связаны соотношением (коэффициенты разложения векторов старого базиса e по новому a образуют столбцы матрицы перехода S):

$$(e_1, e_2, e_3) = (a_1, a_2, a_3)S$$

Координатные же столбцы произвольного вектора x в старом ξ_e и новом ξ_a базисах связаны следующим образом:

$$\begin{cases} x = e\xi_e = aS\xi_e \\ x = a\xi_a \end{cases} \Rightarrow \xi_a = S\xi_e$$

Итак, пока известно, что в базисе e :

$$A_{\psi\phi}\xi_e = \nu_e$$

Надо же найти матрицу $A'_{\psi\phi}$ преобразования в базисе a :

$$A'_{\psi\phi}\xi_a = \nu_a$$

Чтобы найти $A'_{\psi\phi}$, можно выразить в формуле (2.4) координатные столбцы в новом базисе через столбцы соответствующих векторов в старом базисе (чтобы получить формулу, “похожую” на (2.4), только с $A'_{\psi\phi}$ вместо $A_{\psi\phi}$):

$$A'_{\psi\phi} S \xi_e = S v_e \Leftrightarrow S^{-1} A'_{\psi\phi} S \xi_e = v_e$$

Подставляя вместо ξ_e базисные столбцы в последнюю формулу (2.4) и в (2.4) получаем, что

$$S^{-1} A'_{\psi\phi} S = A_{\psi\phi}$$

Или, иначе:

$$A'_{\psi\phi} = S A_{\psi\phi} S^{-1}$$

Остаётся найти матрицу S перехода от базиса e к базису a . Столбцы матрицы A — координаты новых базисных векторов a в старом базисе e . Чтобы получить S , надо, наоборот, разложить векторы e по базису a . В результате матрицей перехода окажется A^{-1} :

$$a = eA \Leftrightarrow e = aA^{-1}$$

Поэтому матрица преобразования в новом базисе в итоге выглядит так:

$$A'_{\psi\phi} = A^{-1} A_{\psi\phi} A$$

□

2.5. # 31.21

Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$ — фиксированное число.

Показать, что сопоставление f каждому многочлену степени не выше n его значения в t_0 есть линейная функция:

$$f : \mathcal{P}^n \ni p(t) \mapsto p(t_0) \in \mathbb{R}$$

Вычислить координатную строку функции в базисах $(1, t, \dots, t^n)$ и $(1, t - t_0, \dots, (t - t_0)^n)$.

Решение. Линейность:

$$\begin{aligned} f(p(t) + q(t)) &= f((a_{0p} + a_{1p}t + \dots + a_{np}t^n) + (a_{0q} + a_{1q}t + \dots + a_{nq}t^n)) \\ &= (a_{0p} + a_{1p}t_0 + \dots + a_{np}t_0^n) + (a_{0q} + a_{1q}t_0 + \dots + a_{nq}t_0^n) = f(p(t)) + f(q(t)) \end{aligned}$$

Аналогично и

$$f(\alpha p(t)) = f(\alpha a_{0p} + \alpha a_{1p}t + \dots + \alpha a_{np}t^n) = \alpha a_{0p} + \alpha a_{1p}t_0 + \dots + \alpha a_{np}t_0^n = \alpha f(p(t))$$

Координатная строка функции — как матрица отображения, только в случае с функцией $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ она становится строкой. То есть надо вычислить образы базисных векторов и “разложить их по базису в \mathbb{R} ” (который принимается равным просто 1³).

Итак, в случае, если в \mathcal{P}^n выбран базис $(1, t, \dots, t^n)$, то координатная строка функции f равна:

$$(f(1), f(t), \dots, f(t^n)) = (1, t_0, \dots, t_0^n)$$

Если же в \mathcal{P}^n выбран базис $(1, t - t_0, \dots, (t - t_0)^n)$, то координатная строка функции f будет равна:

$$(f(1), f(t), \dots, f(t^n)) = (1, 0, \dots, 0)$$

□

³Хотя в случае линейной функции (которая отображает в одномерное \mathbb{R}) на самом деле вообще не важно, какое число “принято за базис” в \mathbb{R} : просто строка из образов $(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n))$ векторов базиса e пространства X уже однозначно определяет функцию ϕ , потому что пространство \mathbb{R} одномерное и образы $\phi(e_i)$ — уже и так числа.

2.6. # 31.35(1)

Пусть базису (e_1, e_2, e_3) пространства \mathcal{L} биортогонален базис (f_1, f_2, f_3) сопряжённого пространства \mathcal{L}^* . Надо найти базис, биортогональный базису

$$e'_1 = e_1 + e_2, \quad e'_2 = e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_3$$

Решение. Биортогональный базис f — это такой базис в \mathcal{L}^* , функции f_i которого обладают следующим свойством:

$$f_i(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

То есть для неизвестных пока линейных функций f'_1, f'_2, f'_3 нового биортогонального базиса уже известно, что, во-первых (выписываем соотношения для f'_1):

$$\begin{cases} 1 = f'_1(e'_1) = f'_1(e_1 + e_2) = f'_1(e_1) + f'_1(e_2) \\ 0 = f'_1(e'_2) = f'_1(e_2 + e_3) = f'_1(e_2) + f'_1(e_3) \\ 0 = f'_1(e'_3) = f'_1(e_3) \end{cases}$$

То есть f'_1 в точности такая же, как f_1 (ведь линейная функция из \mathcal{L}^* однозначно определяется значениями на векторах базиса \mathcal{L}).

Далее, аналогичные соотношения для f'_2 :

$$\begin{cases} 0 = f'_2(e'_1) = f'_2(e_1 + e_2) = f'_2(e_1) + f'_2(e_2) \\ 1 = f'_2(e'_2) = f'_2(e_2 + e_3) = f'_2(e_2) + f'_2(e_3) \\ 0 = f'_2(e'_3) = f'_2(e_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_2(e_1) = -1 \\ f'_2(e_2) = 1 \\ f'_2(e_3) = 0 \end{cases}$$

И для f'_3 :

$$\begin{cases} 0 = f'_3(e'_1) = f'_3(e_1 + e_2) = f'_3(e_1) + f'_3(e_2) \\ 0 = f'_3(e'_2) = f'_3(e_2 + e_3) = f'_3(e_2) + f'_3(e_3) \\ 1 = f'_3(e'_3) = f'_3(e_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_3(e_1) = 1 \\ f'_3(e_2) = -1 \\ f'_3(e_3) = 1 \end{cases}$$

Чему равны f'_2 и f'_3 ? Линейные действия над функциями из \mathcal{L}^* равносильны таким же линейным действиям над их координатными строками: пространство \mathcal{L}^* изоморфно пространству строк размера $\dim \mathcal{L}$. Функции f'_2 , например, (при базисе e в \mathcal{L}) соответствует строка $(-1, 1, 0)$. Можно разложить эту строку в линейную комбинацию базисных строк (соответствующих функциям, из которого состоит биортогональный базис f):

$$(-1, 1, 0) = -1 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0)$$

Это значит, что с самой функцией f'_2 будет “то же самое”:

$$f'_2 = -1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2$$

Аналогично с f'_3 :

$$f'_3 = 1 \cdot f_1 - 1 \cdot f_2 + 1 \cdot f_3$$

Итого, новый биортогональный базис:

$$f = (f_1, -f_1 + f_2, f_1 - f_2 + f_3)$$

□