Семинар 6

Алексеев Василий

14 + 17 марта 2023

Содержание

1 Линейные отображения 2 **1**

1.1 О размерности ядра и множества значений отображения 1

1.2 Пространство отображений из пространства в пространство 2

1.3 Изоморфизм между отображениями и матрицами 3

1.4 Линейные функции — отображения на числовую прямую 3

2 Задачи **4**

2.1 # 23.69 4

2.2 # 23.40(1в) 5

2.3 # 31.19(2) 6

2.4 # 31.5 7

3 Дополнение **7**

3.1 # 23.82(1) 7

3.2 # 31.35(1) 9

1. Линейные отображения 2

1.1. О размерности ядра и множества значений отображения

Линейное отображение $\phi\colon\ X \to Y$ задано матрицей $A_{m\times n}$ в базисах $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ в X и $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m)$ в Y:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 12 & -8 \\ 4 & -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Надо найти ядро, множество значений отображения. Выяснить, является ли оно инъективным, сюръективным.

Решение. Из размера матрицы A видно, что $\dim X = 4$ и $\dim Y = 3$.

Найдём **ядро** ϕ:

$$\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker}\phi \Leftrightarrow \phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow A\xi = 0$$

где $\xi \in \mathbb{R}^4$ есть координатный столбец вектора $\boldsymbol{x} \in X$ Получается, для нахождения ядра надо просто решить однородную систему. Сделаем это, упростив матрицу A:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 12 & -8 \\ 4 & -2 & -6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Произвольный вектор из ядра представим как

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ -3t_1 + 2t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = t_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Видно, что в базисе $\operatorname{Ker}\phi$ два вектора. Ядро не нулевое, а потому отображение ϕ не инъективно.

Остаётся найти **множество значений** ϕ:

$$\boldsymbol{y} \in \operatorname{Im}\phi \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{x} \in X:\ \phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \Leftrightarrow A\xi = \eta$$

где $\xi \in \mathbb{R}^4$ и $\eta \in \mathbb{R}^3$ есть координатные столбцы векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ соответственно. Получается, можно взять расширенную матрицу $(A \mid \eta)$, упростить её и выписать ограничения на η, так чтобы система была совместна. Упрощение матрицы A уже проведено в (1). Остаётся проделать те же самые преобразования со столбцом η:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2/4 \\ y_3/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2/4 + y_1 \\ y_3/2 + y_1 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \boxed{y_3/2 + y_1} \end{pmatrix}$$

Доводить по-честному до конца упрощение вектора η было не обязательно: чтобы решение $A\xi = \eta$ существовало (то есть чтобы η был во множестве значений), главное занулить те компоненты, которые будут соответствовать нулевым строкам упрошённой матрицы системы A:

$$y_3/2 + y_1 = 0 \Leftrightarrow y_3 = -2y_1 \Leftrightarrow \eta = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ -2t_1 \end{pmatrix} = t_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Базис в $\operatorname{Im}\phi$ "виден", векторов в нём также два. Так как $\dim Y = 3 \neq 2 = \dim \operatorname{Im}\phi$, то отображение не сюръективно.

"Наблюдение".

В упрощённой матрице A (1) первые два столбца оказались базисными. Так как элементарные преобразования строк не меняют линейной зависимости между столбцами, то и первые два столбца $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^3$ в исходной матрице $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ можно взять в качестве базисных. Что вообще есть $A\xi$? На это произведение можно смотреть как на *линейную комбинацию столбцов A с коэффициентами, записанными в столбец ξ*:

$$A\xi = (a_1, a_2, a_3, a_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 \xrightarrow[\text{базисные}]{a_1, a_2} \alpha a_1 + \beta a_2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Получается, что множество значений преобразования — это линейная оболочка базисных столбцов матрицы A!

$$\operatorname{Im}\phi = \{\alpha a_1 + \beta a_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathscr{L}(a_1, a_2)$$

То есть эти базисные столбцы и можно было взять в качестве базиса в $\operatorname{Im}\phi$. С одной стороны, число базисных столбцов — это ранг A. С другой, получается, это же — и число базисных в $\operatorname{Im}\phi$, то есть $\dim \operatorname{Im}\phi$, или $\operatorname{Rg}\phi$. Приходим к следующему соотношению:

$$\boxed{\operatorname{Rg}\phi = \operatorname{Rg} A}$$

Из интересного тут: матрица отображения A зависит от выбора базисов в X и Y. То есть разные базисы — разные матрицы одного и того же отображения. Однако ранги всех этих матриц оказываются одинаковыми и равны рангу отображения. Таким образом, ранг матрицы отображения — это *инвариант* относительно выбора базисов.

Посмотрим ещё раз на упрощённую матрицу A (1). Всего четыре столбца. Первые два — базисные. Их число, как только что поняли, определяет размерность множества значений. Вторые два столбца соответствуют свободным переменным в системе $A\xi = \eta$, а потому определяют размерность ядра отображения. Иными словами, получаем:

$$\boxed{\operatorname{Rg}\phi + \dim \operatorname{Ker}\phi = \dim X}$$

Единственное, про что стоит ещё, по-хорошему, сказать отдельно: $\mathscr{L}(a_1, a_2)$ формально вообще не является $\operatorname{Im}\phi$, потому что $\operatorname{Im}\phi \subseteq Y$, а $\mathscr{L}(a_1, a_2) \subseteq \mathbb{R}^3$. Однако соответствие между векторами и их координатными столбцами *взаимно однозначное*. Более того, и $\operatorname{Im}\phi$, и $\mathscr{L}(a_1, a_2)$ оба являются линейными подпространствами, причём их размерности совпадают, потому что сумма векторов $\boldsymbol{y}_1$ и $\boldsymbol{y}_2$ из $\operatorname{Im}\phi$ есть вектор, координатный столбец которого есть сумма координатных столбцов векторов $\boldsymbol{y}_1$ и $\boldsymbol{y}_2$. Аналогично с умножением на число. То есть *линейные операции "проходят одинаково"*: между векторами в $\operatorname{Im}\phi$ и их координатными столбцами в $\mathbb{R}^3$. В таком случае говорят, что линейные пространства $\operatorname{Im}\phi$ и $\mathscr{L}(a_1, a_2)$ *изоморфны*. □

1.2. Пространство отображений из пространства в пространство

Рассмотрим множество всех линейных отображений из X в Y:

$$\mathscr{F} = \{\phi\colon\ X \to Y \mid \phi \text{ — линейное}\}$$

где линейность ϕ обозначает выполнение следующих двух свойств:

- $\phi(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \phi(\boldsymbol{x}_1) + \phi(\boldsymbol{x}_2), \quad \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X$
- $\phi(\alpha \boldsymbol{x}_1) = \alpha\phi(\boldsymbol{x}_1), \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{x}_1 \in X$

Введём на $\mathscr{F}$ операции сложения отображений и умножения отображения на число. За сумму $\phi_1 + \phi_2$ двух линейных отображений ϕ_1 и ϕ_2 будем считать отображение из X в Y, которое действует на произвольный $\boldsymbol{x} \in X$ как:

$$(\phi_1 + \phi_2)(\boldsymbol{x}) \equiv \phi_1(\boldsymbol{x}) + \phi_2(\boldsymbol{x})$$

За отображение $\alpha\phi$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\phi \in \mathscr{F}$, будет считать отображение из X в Y, действующее на произвольный $\boldsymbol{x} \in X$ по правилу:

$$(\alpha\phi)(\boldsymbol{x}) \equiv \alpha\phi(\boldsymbol{x})$$

Проверим, что сумма линейных отображений — это тоже линейное отображение:

$$\begin{aligned}(\phi_1 + \phi_2)(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) &= \phi_1(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) + \phi_2(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \phi_1(\boldsymbol{x}_1) + \phi_1(\boldsymbol{x}_2) + \phi_2(\boldsymbol{x}_1) + \phi_2(\boldsymbol{x}_2) \\ &= \big(\phi_1(\boldsymbol{x}_1) + \phi_2(\boldsymbol{x}_1)\big) + \big(\phi_1(\boldsymbol{x}_2) + \phi_2(\boldsymbol{x}_2)\big) = (\phi_1 + \phi_2)(\boldsymbol{x}_1) + (\phi_1 + \phi_2)(\boldsymbol{x}_2)\end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что $(\phi_1 + \phi_2)(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha(\phi_1 + \phi_2)(\boldsymbol{x})$. Таким образом, линейные операции над линейными отображениями из $\mathscr{F}$ дают также линейные отображения из $\mathscr{F}$, то есть "$+$" $: \mathscr{F} \times \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ и "$\cdot$"$:\ \mathbb{R} \times \mathscr{F} \to \mathscr{F}$.

Множество $\mathscr{F}$ с введёнными операциями "$+$" и "$\cdot$" образует линейное пространство. Чтобы в этом убедиться, можно проверить выполнение "8 свойств", связанных с операциями сложения и умножения на число. Например, коммутативность: $(\phi_1 + \phi_2)(\boldsymbol{x}) = \phi_1(\boldsymbol{x}) + \phi_2(\boldsymbol{x}) = \phi_2(\boldsymbol{x}) + \phi_1(\boldsymbol{x}) = (\phi_2 + \phi_1)(\boldsymbol{x})$ для произвольного $\boldsymbol{x} \in X$. Нулевым же, очевидно, будет отображение $\phi_0 :\ \boldsymbol{x} \mapsto \mathbf{0} \in Y$.

1.3. Изоморфизм между отображениями и матрицами

В выбранной паре базисов пространств X и Y устанавливается взаимно однозначное соответствие $h_{\mathscr{F}}$ между линейными отображениями $\mathscr{F}$ и матрицами $\mathbb{R}^{m\times n}$. Множество матриц $\mathbb{R}^{m\times n}$ — очевидно, линейное пространство (размерности mn). Множество линейных отображений $\mathscr{F}$ — также линейное пространство (см. Раздел 1.2). При этом сумме отображений ϕ_1 и ϕ_2 из $\mathscr{F}$ с матрицами соответственно A_1 и A_2 соответствует отображение, матрица которого является суммой $A_1 + A_2$. Умножению отображения ϕ с матрицей A на число α соответствует отображение с матрицей αA. Таким образом, отображение $h_{\mathscr{F}} :\ \mathscr{F} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ линейно, *сохраняет линейные операции*. Взаимно однозначное линейное отображение называется *изоморфизмом*[1]. Про пространства $\mathscr{F}$ и $\mathbb{R}^{m\times n}$ в таком случае говорят, что они *изоморфны*. Из изоморфности $\mathscr{F}$ и $\mathbb{R}^{m\times n}$, в частности, следует, что размерность $\mathscr{F}$ равна также mn.

1.4. Линейные функции — отображения на числовую прямую

Пусть $Y \equiv \mathbb{R}$. То есть будем теперь рассматривать линейные отображения, действующие из X в $\mathbb{R}$:

$$\mathscr{F}_1 = \{\phi :\ X \to \mathbb{R} \mid \phi \text{ — линейное}\}$$

[1] В общем случае изоморфизм — биекция, *сохраняющая структуру*. В случае отображений между линейными пространствами изоморфизм должен сохранять линейные зависимости между векторами: сумма прообразов — сумма образов, аналогично с умножением на число.

Такие отображения ещё называют *линейными функциями*.

С выбранным базисом в X[2] каждой линейной функции из $\mathscr{F}_1$ ставится в соответствие матрица отображения A размера $1 \times n$, то есть матрица отображения в случае линейной функции — это одна строка. Эта строка ещё называется *координатной строкой* линейной функции.

Пространство линейных функций $\mathscr{F}_1$ изоморфно пространству строк $\mathbb{R}^n$ длины n (см. Раздел 1.3). В пространстве строк можно очевидным образом выбрать базис: $(1, 0, \ldots, 0, 0)$; ...; $(0, 0, \ldots, 0, 1)$. Пусть базисной строчке из $\mathbb{R}^n$ с единицей на i-ой позиции соотвествует функция $\phi_i \in \mathscr{F}_1$:

$$\mathbb{R}^n \ni \left\{ \begin{array}{ccc} (1, 0, \ldots, 0, 0) & \leftrightarrow & \phi_1 \\ (0, 1, \ldots, 0, 0) & \leftrightarrow & \phi_2 \\ & \ldots & \\ (0, 0, \ldots, 1, 0) & \leftrightarrow & \phi_{n-1} \\ (0, 0, \ldots, 0, 1) & \leftrightarrow & \phi_n \end{array} \right\} \in \mathscr{F}_1$$

В совокупности функции $(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ дадут базис в $\mathscr{F}_1$. Этот базис называется базисом, *взаимным* к базису e пространства X. Само пространство линейных функций, действующих на пространстве X, называется пространством, *сопряжённым* к X, и может обозначаться как X^*. Таким образом, $\dim X^* = \dim X$, а смысл *координатной строки* функции ϕ также в том, что она — это коэффициенты разложения ϕ по взаимному базису.

2. Задачи

2.1. # 23.69

Как изменится матрица A линейного отображения $\phi\colon X \to Y$, заданная в паре базисов $e = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ и $f = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m)$?

1. при смене мест $\boldsymbol{e}_i \leftrightarrow \boldsymbol{e}_j$
2. при смене мест $\boldsymbol{f}_k \leftrightarrow \boldsymbol{f}_l$
3. при замене $\boldsymbol{e}_i \to \lambda \boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{f}_k \to \mu \boldsymbol{f}_k$ $(\lambda, \mu \neq 0)$
4. при замене $\boldsymbol{e}_i \to \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j$ и $\boldsymbol{f}_k \to \boldsymbol{f}_k - \boldsymbol{f}_l$

Решение. Столбцы матрицы отображения A — координаты векторов базиса e в базисе f. Поэтому если поменять местами два вектора в e, то в матрице поменяются местами соответствующие столбцы. Если же поменять местами векторы в f, то аналогичная смена мест произойдёт для строк матрицы A.

Если новый i-ый базисный в e будет равен $\lambda \boldsymbol{e}_i$, то $\phi(\lambda \boldsymbol{e}_i) = \lambda \phi(\boldsymbol{e}_i)$, то есть i-ый столбец увеличится в λ раз. Если же новый k-ый базисный в f станет $\mu \boldsymbol{f}_k$, то со всеми компонентами в разложении векторов e по базису f произойдёт следующее (на примере $\boldsymbol{e}_1$):

$$\phi(\boldsymbol{e}_1) = \ldots + a_k \boldsymbol{f}_k + \ldots = \ldots + \frac{a_k}{\mu} \mu \boldsymbol{f}_k + \ldots$$

где “точками” обозначены все слагаемые в разложении по базису f, кроме $\boldsymbol{f}_k$. Видно, что компоненты по $\boldsymbol{f}_k$ уменьшаются в μ раз. То есть k-ая строка матрица отображения станет меньше в μ раз.

[2] В $Y = \mathbb{R}$ тоже можно бы было “выбрать” базис, но обычно базисом в $\mathbb{R}$ по умолчанию считают единицу.

Если положить новый i-ый в e равным $\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j$, то к i-му столбцу матрицы прибавится j-ый столбец. Если же вместо $\boldsymbol{f}_k$ взять $\boldsymbol{f}_k - \boldsymbol{f}_l$, то компоненты изменятся следующим образом (снова на примере $\boldsymbol{e}_1$):

$$\phi(\boldsymbol{e}_1) = \ldots + a_k \boldsymbol{f}_k + a_l \boldsymbol{f}_l = \ldots + a_k \boldsymbol{f}_k - a_k \boldsymbol{f}_l + a_k \boldsymbol{f}_l + a_l \boldsymbol{f}_l = \ldots + a_k \underbrace{(\boldsymbol{f}_k - \boldsymbol{f}_l)}_{\boldsymbol{f}'_k} + \underbrace{(a_k + a_l)}_{a'_l} \boldsymbol{f}_l$$

где "точками" снова скрыто всё "неважное". Видно, что в матрице меняется *l-ая строка*: к ней прибавляется k-ая. $\square$

2.2. # 23.40(1в)

Пусть $\mathscr{P}^{(m)}$ — линейное пространство линейных многочленов степени не выше m[3]. Проверить, что дифференцирование, рассматриваемое как преобразование $D: \mathscr{P}^{(m)} \to \mathscr{P}^{(m)}$, линейно. Найти его ядро и множество значений. Вычислить матрицу в базисе

$$\left(1, \frac{t}{1!}, \ldots, \frac{t^m}{m!}\right)$$

Решение. **Линейность.** Пусть $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m$ и $q(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m$. Тогда:

$$\begin{aligned} D\big(p(t) + q(t)\big) &= D\big((a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m) + (b_0 + b_1 t + \ldots b_m t^m)\big) \\ &= a_1 + \ldots + a_m t^{m-1} + b_1 + \ldots + b_m t^{m-1} = D\big(p(t)\big) + D\big(q(t)\big) \end{aligned}$$

Аналогично с $D\big(\alpha p(t)\big) = \alpha D\big(p(t)\big)$.

Ядро преобразования:

$$p(t) \in \operatorname{Ker} D \Leftrightarrow D\big(p(t)\big) = a_1 + \ldots + a_m t^{m-1} = 0 \Leftrightarrow a_1 = \ldots = a_m = 0$$

Поэтому $p(t) \in \operatorname{Ker} D \Leftrightarrow p(t) = a_0$. То есть ядро дифференцирования — все константные многочлены. Размерность ядра, очевидно, равно одному.

Множество значений — это $\mathscr{P}^{(m-1)}$. Потому что, с одной стороны, при дифференцировании многочлена степени не выше m получается многочлен степени не выше $m-1$. С другой стороны, для многочлена $h(t)$ степени не выше $m-1$ можно подобрать многочлен $p(t)$ степени не выше m, дифференцирование которого даёт данный (например, $p(t) = \int h(t)$).

Матрица преобразования. Столбцы матрицы — координаты образов векторов пространства $\mathscr{P}^{(m)}$ в том же базисе. Так как

$$\begin{aligned} &D(1) = 0 \\ &D\left(\frac{1}{1!}t\right) = \mathbf{1} \cdot \frac{1}{1!} \\ &D\left(\frac{1}{2!}t^2\right) = \mathbf{1} \cdot \frac{1}{1!}t \\ &\ldots \\ &D\left(\frac{1}{m!}t^m\right) = \mathbf{1} \cdot \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1} \end{aligned}$$

[3]Какая степень у нулевого многочлена?

то матрица преобразования получается равной

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Размер матрицы A равен $(m+1) \times (m+1)$.

Если бы дифференцирование рассматривалось как отображение $D : \mathscr{P}^{(m)} \to \mathscr{P}^{(m-1)}$ (и в $\mathscr{P}^{(m-1)}$ базис бы был такой же, как в $\mathscr{P}^{(m)}$, только без последнего вектора), то строк в матрице отображения стало бы меньше на одну (столбцов столько же, потому что базис исходного пространства такой же, строк же меньше, потому что меняется базис пространства, куда отображаем):

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

И размер матрицы A' равен $m \times (m+1)$. $\square$

2.3. # 31.19(2)

Показать, что сопоставление f каждому многочлену степени не выше 3 числа по правилу:

$$f : \mathscr{P}^{(3)} \ni p(t) \mapsto \int_0^1 p(t^2)dt \in \mathbb{R}$$

есть линейная функция. Вычислить координатную строку функции f в базисе $(1, t, t^2, t^3)$.

Решение. Пусть $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 y^2 + a_3 t^3$ и $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$. Тогда их сумма:

$$(p+q)(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + (a_3 + b_3)t^3$$

Образ суммы:

$$\begin{aligned} f\left(p(t) + q(t)\right) &= \int_0^1 (p+q)(t^2)dt \\ &= \int_0^1 \left((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)h + (a_2 + b_2)h^2 + (a_3 + b_3)h^3\right)\Big|_{h=t^2} dt \\ &= \int_0^1 \left((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t^2 + (a_2 + b_2)t^4 + (a_3 + b_3)t^6\right)dt \\ &= \int_0^1 \left((a_0 + a_1 t^2 + a_2 t^4 + a_3 t^6) + (b_0 + b_1 t^2 + b_2 t^4 + b_3 t^6)\right)dt \\ &= \int_0^1 (a_0 + a_1 t^2 + a_2 t^4 + a_3 t^6)dt + \int_0^1 (b_0 + b_1 t^2 + b_2 t^4 + b_3 t^6)dt = f\left(p(t)\right) + f\left(q(t)\right) \end{aligned}$$

Аналогично и

$$f\left(\alpha p(t)\right) = \alpha \int_0^1 (a_0 + a_1 t^2 + a_2 t^4 + a_3 t^6)dt = \alpha f\left(p(t)\right)$$

Координатная строка функции — как матрица отображения, только в случае с функцией $\phi: X \to \mathbb{R}$ она становится строкой. И чтобы найти эту строку, можно воспользоваться тем, что образ многочлена должен быть равен произведению координатной строки функции на координатный столбец многочлена:

$$f\big(p(t)\big) = \int_0^1 (a_0 + a_1t^2 + a_2t^4 + a_3t^6)dt = a_0 + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{5} + \frac{a_3}{7} = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}\right)\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Таким образом, координатная строка функции:

$$A = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}\right)$$

Можно было сделать по-другому: вычислить образы базисных векторов (это будут просто числа) и собрать их в строчку:

$$A = \big(f(1), f(t), f(t^2), f(t^3)\big) = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}\right)$$

□

2.4. # 31.5

Может ли для линейной функции $f: X \to \mathbb{R}$ при всех $\boldsymbol{x} \in X$ выполняться условие?

1. $f(\boldsymbol{x}) > 0$
2. $f(\boldsymbol{x}) \geq 0$
3. $f(\boldsymbol{x}) = \alpha$

Решение. Очевидно, раз X линейное пространство, то оно не пустое и содержит как минимум нулевой вектор. Но тогда

$$f(\mathbf{0}) = f(0 \cdot \mathbf{0}) = 0 \cdot f(\mathbf{0}) = 0 \Rightarrow \text{~~пункт 1~~}$$

Если же найдётся $\boldsymbol{x}^* \in X$, такой что $f(\boldsymbol{x}^*) > 0$, то

$$f(-\boldsymbol{x}^*) = f(-1 \cdot \boldsymbol{x}^*) = -1 \cdot f(\boldsymbol{x}^*) < 0 \Rightarrow \cancel{\text{пункт 2}}, \text{ только если не } f(\boldsymbol{x}) \equiv 0$$

Поэтому и третий пункт верен только при $\alpha = 0$. □

3. Дополнение

3.1. # 23.82(1)

Преобразование ϕ переводит линейно независимые векторы a_i в b_i. Преобразование ψ переводит линейно независимые векторы b_i в c_i. То есть

$$(a_1, a_2, a_3) \xrightarrow{\phi} (b_1, b_2, b_3)$$
$$(b_1, b_2, b_3) \xrightarrow{\psi} (c_1, c_2, c_3)$$

Надо найти матрицу $A_{\psi\phi}$ преобразования $\psi\phi$ в исходном базисе.

Решение. Пусть матрицы A_ϕ и A_ψ — матрицы преобразований ϕ и ψ соответсвенно. Тогда условие задачи можно переписать в виде

$$\begin{cases} A_\phi(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3) \\ A_\psi(b_1, b_2, b_3) = (c_1, c_2, c_3) \\ A_{\psi\phi}(a_1, a_2, a_3) = (c_1, c_2, c_3) \end{cases}$$

Если положить $A \equiv (a_1, a_2, a_3)$, $B \equiv (b_1, b_2, b_3)$ и $C \equiv (c_1, c_2, c_3)$, то условие можно переписать в ещё более сжатой форме:

$$\begin{cases} A_\phi A = B \\ A_\psi B = C \\ A_{\psi\phi} A = C \end{cases}$$

Отсюда (так как по условию существуют A^{-1} и B^{-1}):

$$\begin{cases} A_\phi = BA^{-1} \\ A_\psi = CB^{-1} \\ A_{\psi\phi} = CA^{-1} = CB^{-1} \cdot BA^{-1} = A_\psi A_\phi \end{cases}$$

А как бы, например, выглядела матрица преобразования ϕ в базисе (a_1, a_2, a_3)? На данном этапе известно, что

$$A_{\psi\phi}\xi_{\boldsymbol{e}} = \nu_{\boldsymbol{e}}$$

где индекс $\boldsymbol{e}$ показывает, в каком базисе даны компоненты. При замене старого базиса $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)$ на новый $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ векторы базисов связаны соотношением (коэффициенты разложения векторов нового базиса $\boldsymbol{a}$ по старому $\boldsymbol{e}$ образуют столбцы матрицы перехода S):

$$(a_1, a_2, a_3) = (e_1, e_2, e_3)S$$

Координатные же столбцы произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ в старом $\xi_{\boldsymbol{e}}$ и новом $\xi_{\boldsymbol{a}}$ базисах связаны следующим образом:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}\xi_{\boldsymbol{e}} \\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}\xi_{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{e}S\xi_{\boldsymbol{a}} \end{cases} \Rightarrow \xi_{\boldsymbol{e}} = S\xi_{\boldsymbol{a}}$$

Итак, пока известно, что в базисе $\boldsymbol{e}$:

$$A_{\psi\phi}\xi_{\boldsymbol{e}} = \nu_{\boldsymbol{e}} \tag{2}$$

Надо же найти матрицу $A'_{\psi\phi}$ преобразования в базисе $\boldsymbol{a}$:

$$A'_{\psi\phi}\xi_{\boldsymbol{a}} = \nu_{\boldsymbol{a}} \tag{3}$$

Чтобы найти $A'_{\psi\phi}$, можно выразить в формуле (2) координатные столбцы в старом базисе через столбцы соответствующих векторов в новом базисе (чтобы получить формулу, “похожую” на (3), только с $A_{\psi\phi}$ вместо $A'_{\psi\phi}$):

$$A_{\psi\phi}S\xi_{\boldsymbol{a}} = S\nu_{\boldsymbol{a}} \Leftrightarrow S^{-1}A_{\psi\phi}S\xi_{\boldsymbol{a}} = \nu_{\boldsymbol{a}} \tag{4}$$

Подставляя вместо $\xi_{\boldsymbol{a}}$ базисные столбцы в последнюю формулу (4) и в (3) получаем, что

$$S^{-1}A_{\psi\phi}S = A'_{\psi\phi}$$

Остаётся понять, чему равна матрица S перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{a}$. Столбцы матрицы A — координаты новых базисных векторов $\boldsymbol{a}$ в старом базисе $\boldsymbol{e}$. Поэтому A и есть S, и матрица преобразования в новом базисе в итоге выглядит так:

$$A'_{\psi\phi} = A^{-1} A_{\psi\phi} A$$

□

3.2. # 31.35(1)

Пусть базису $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ пространства $\mathscr{L}$ биортогонален базис (f_1, f_2, f_3) сопряжённого пространства $\mathscr{L}^*$. Надо найти базис, биортогональный базису

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_3$$

Решение. Биортогональный базис f — это такой базис в $\mathscr{L}^*$, функции f_i которого обладают следующим свойством:

$$f_i(\boldsymbol{e}_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

То есть для неизвестных пока линейных функций f'_1, f'_2, f'_3 нового биортогонального базиса уже известно, что, во-первых (выписываем соотношения для f'_1):

$$\begin{cases} 1 = f'_1(\boldsymbol{e}'_1) = f'_1(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = f'_1(\boldsymbol{e}_1) + f'_1(\boldsymbol{e}_2) \\ 0 = f'_1(\boldsymbol{e}'_2) = f'_1(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = f'_1(\boldsymbol{e}_2) + f'_1(\boldsymbol{e}_3) \\ 0 = f'_1(\boldsymbol{e}'_3) = f'_1(\boldsymbol{e}_3) \end{cases}$$

То есть f'_1 в точности такая же, как f_1 (ведь линейная функция из $\mathscr{L}^*$ однозначно определяется значениями на векторах базиса $\mathscr{L}$).

Далее, аналогичные соотношения для f'_2:

$$\begin{cases} 0 = f'_2(\boldsymbol{e}'_1) = f'_2(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = f'_2(\boldsymbol{e}_1) + f'_2(\boldsymbol{e}_2) \\ 1 = f'_2(\boldsymbol{e}'_2) = f'_2(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = f'_2(\boldsymbol{e}_2) + f'_2(\boldsymbol{e}_3) \\ 0 = f'_2(\boldsymbol{e}'_3) = f'_2(\boldsymbol{e}_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_2(\boldsymbol{e}_1) = -1 \\ f'_2(\boldsymbol{e}_2) = 1 \\ f'_2(\boldsymbol{e}_3) = 0 \end{cases}$$

И для f'_3:

$$\begin{cases} 0 = f'_3(\boldsymbol{e}'_1) = f'_3(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = f'_3(\boldsymbol{e}_1) + f'_3(\boldsymbol{e}_2) \\ 0 = f'_3(\boldsymbol{e}'_2) = f'_3(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = f'_3(\boldsymbol{e}_2) + f'_3(\boldsymbol{e}_3) \\ 1 = f'_3(\boldsymbol{e}'_3) = f'_3(\boldsymbol{e}_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_3(\boldsymbol{e}_1) = 1 \\ f'_3(\boldsymbol{e}_2) = -1 \\ f'_3(\boldsymbol{e}_3) = 1 \end{cases}$$

Чему равны f'_2 и f'_3? Линейные действия над функциями из $\mathscr{L}^*$ равносильны таким же линейным действиям над их координатными строками: пространство $\mathscr{L}^*$ изоморфно пространству строк размера $\dim \mathscr{L}$. Функции f'_2, например, (при базисе $\boldsymbol{e}$ в $\mathscr{L}$) соответствует строка $(-1, 1, 0)$. Можно разложить эту строку в линейную комбинацию базисных строк (соответствующих функциям, из которого состоит биортогональный базис f):

$$(-1, 1, 0) = -1 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0)$$

Это значит, что с самой функцией f'_2 будет “то же самое”:

$$f'_2 = -1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2$$

Аналогично с f_3':

$$f_3' = 1 \cdot f_1 - 1 \cdot f_2 + 1 \cdot f_3$$

Итого, новый биортогональный базис:

$$f = (f_1, -f_1 + f_2, f_1 - f_2 + f_3)$$

$\square$