Семинар 7

Алексеев Василий

24 + 28 марта 2023

Содержание

1. Diag 1. Часть 1

1.1. Диагонализируемость отображения

Пусть есть линейное преобразование $\phi\colon X \to Y$, где X и Y есть линейные пространства размерностей n и m соответственно. Выберем базисы в пространствах X и Y: $e = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ в X и $f = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m)$ в Y. В паре базисов e и f линейному преобразованию ϕ соответствует матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Если выбрать другие базисы: $e' = (\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n)$ и $f' = (\boldsymbol{f}'_1, \ldots, \boldsymbol{f}'_m)$ — то матрица A' *того же самого* преобразования ϕ в этой паре базисов будет *другой*. Можно ли выбрать базисы e' и f' так, чтобы матрица A' оказалась "хорошей"? Например, чтобы она была *диагональной*?

Попробуем найти такие базисы e' и f'. Пусть $\boldsymbol{e}'_1$ — просто какой-нибудь ненулевой вектор. Посмотрим на его образ $\phi(\boldsymbol{e}'_1)$. Если $\phi(\boldsymbol{e}'_1) = \boldsymbol{0}$, то первый столбец A' будет нулевым (это хорошо, пока матрица получается диагональной). Если же $\phi(\boldsymbol{e}'_1) \neq \boldsymbol{0}$, то положим $\boldsymbol{f}'_1 \equiv \phi(\boldsymbol{e}'_1)$. В таком случае первый столбец A' будет первым столбцом единичной матрицы. В любом случае, первый столбец A' можно сделать "хорошим".

Далее, выберем $\boldsymbol{e}'_2$ — какой-нибудь такой, чтоб система $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$ была линейно независимой (считаем $n \geq 2$). И снова смотрим на образ $\phi(\boldsymbol{e}'_2)$. Если $\phi(\boldsymbol{e}'_2) = \boldsymbol{0}$, то опять больше ничего делать не надо: второй столбец A' нулевой. Если же $\phi(\boldsymbol{e}'_2) \neq \boldsymbol{0}$, то… можно ли этот образ выбрать вторым базисным $\boldsymbol{f}'_2$? Можно, но только если $(\boldsymbol{f}'_1, \boldsymbol{f}'_2)$ будут линейно независимыми! Итого, имеем две возможности при ненулевом $\phi(\boldsymbol{e}'_2)$: он линейно независим с выбранным ранее $\boldsymbol{f}'_1$ (или если на предыдущем шаге первого нового базисного в Y вообще выбрано не было) или же раскладывается по нему (то есть коллинеарен). Если $\phi(\boldsymbol{e}'_2)$ и $\boldsymbol{f}'_1$ линейно независимы, то поступаем как в прошлый раз при ненулевом $\phi(\boldsymbol{e}'_1)$: берём $\boldsymbol{f}'_2 \equiv \phi(\boldsymbol{e}'_2)$ и получаем второй столбец A' как у единичной матрицы. Если $\phi(\boldsymbol{e}'_2)$ и $\boldsymbol{f}'_1$ линейно зависимы, то это значит, что найдётся $\alpha \in \mathbb{R}$, такой что:

$$\phi(\boldsymbol{e}'_2) = \alpha \boldsymbol{f}'_1 \leftrightarrow \phi(\boldsymbol{e}'_2) = \alpha\phi(\boldsymbol{e}'_1)$$

"Несложно заметить", что можно "поправить" вектор $\boldsymbol{e}'_2$. Поправить так, чтобы занулить его образ:

$$\boldsymbol{e}''_2 \equiv \boldsymbol{e}'_2 - \alpha\boldsymbol{e}'_1 \Rightarrow \phi(\boldsymbol{e}''_2) = \phi(\boldsymbol{e}'_2 - \alpha\boldsymbol{e}'_1) = \phi(\boldsymbol{e}'_2) - \alpha\phi(\boldsymbol{e}'_1) = \boldsymbol{0}$$

При этом векторы $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}''_2)$, очевидно, линейно независимы (так как получены невырожденной заменой из пары линейно независимых векторов $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$). А второй столбец A' получается нулевым. (Чтобы не усложнять обозначения, далее будем называть второй вектор просто $\boldsymbol{e}'_2$, то есть с одним "штрихом" — вне зависимости от того, пришлось ли вносить "правку" или нет.) В любом случае — удалось продолжить поиск базисов в X и Y так, чтобы матрица A' получалась диагональной (первые два столбца уже "хорошие").

Несложно увидеть, что далее процесс поиска базисных векторов e' и f' продолжается точно так же, как с вектором $\boldsymbol{e}'_2$ (1). Например, далее надо бы было взять $\boldsymbol{e}'_3$ такой, чтоб он был линейно независим с $\boldsymbol{e}'_1$ и $\boldsymbol{e}'_2$. Его образ $\phi(\boldsymbol{e}'_3)$ либо нулевой, либо ненулевой и **не** раскладывается по уже выбранным первым базисным f' (в таком случае $\phi(\boldsymbol{e}'_3)$ можно взять в качестве следующего базисного в Y), либо он ненулевой и раскладывается по имеющимся первым базисным f' (в этом случае, пользуясь линейностью ϕ, можно "поправить" $\boldsymbol{e}'_3$, сделав его образ нулевым).

В результате описанного процесса получаем базис $e' = (\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n)$ в X и… возможно, "недостроенный" базис $(\boldsymbol{f}'_1, \ldots, \boldsymbol{f}'_r)$, $r \leq m$. Возможно, недостроенный — хотя бы потому, что не при любом исходе удавалось выбрать вектор в f' при выборе очередного вектора в e' (могло бы в принципе получиться и так, что ни одного f' вообще не было выбрано — если всегда оказывались нулевые столбцы в A'). Но линейно независимую систему

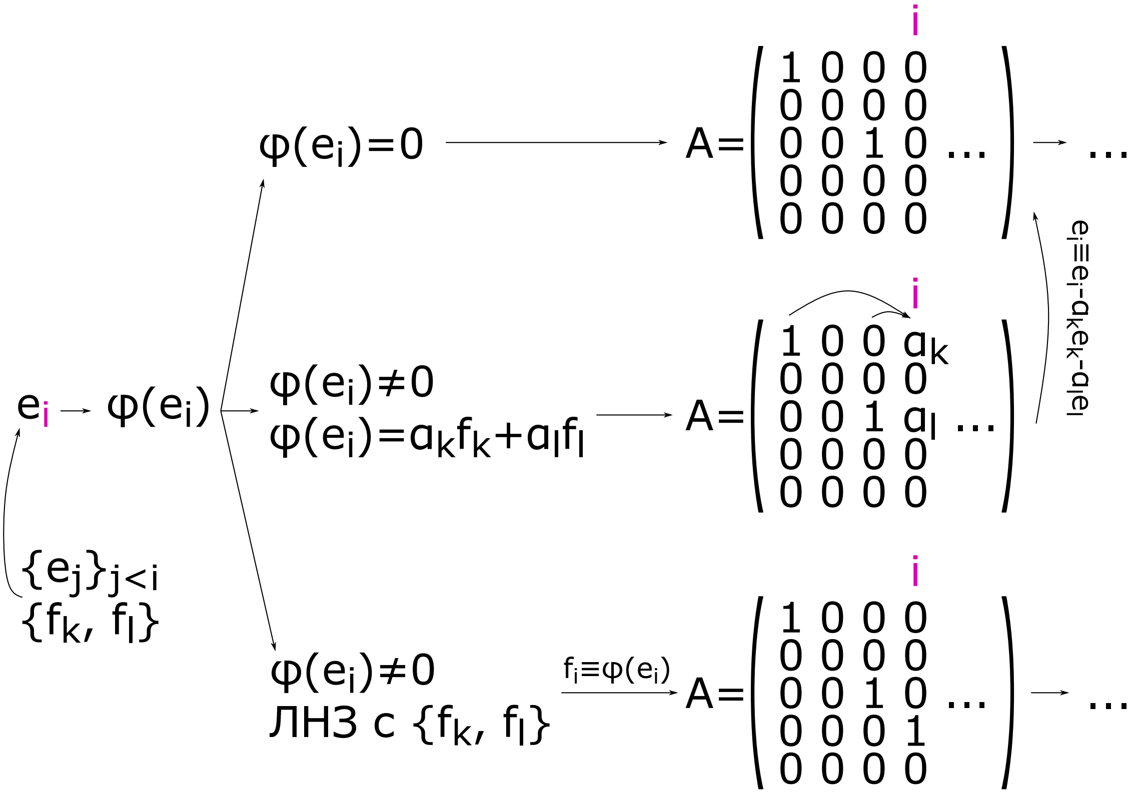

Рис. 1: Выбор очередного вектора $\boldsymbol{e}_i$ для базиса e в X (и, возможно, также $\boldsymbol{f}_i$ для базиса f в Y), так чтобы матрица A отображения $\phi:\ X \to Y$ была диагональной.

$(\boldsymbol{f}'_1, \ldots, \boldsymbol{f}'_r)$, если в ней недостаточно векторов, всегда можно достроить до базиса в Y, выбрав "как-нибудь" оставшиеся $m - r$ векторов (так, чтобы система из уже m векторов тоже была линейно независимой).

Итого, нашли базисы e' и f' в X и Y, такие что матрица A' отображения $\phi:\ X \to Y$ в них имеет диагональный вид: только на её главной диагонали $\{a_{ii} \mid i = 1, \ldots, \min(m, n)\}$, возможно, стоят ненулевые значения (причём даже если $a_{ii} \neq 0$, то обязательно $a_{ii} = 1$). Сколько будет единиц на диагонали A'? Их число определяет количество линейно независимых столбцов A'. Эти столбцы (точнее, соответствующие им векторы в Y) составляют базис в $\operatorname{Im}\phi$. Таким образом, единиц на диагонали A' всего $\dim\operatorname{Im}\phi$ штук. Далее, перенумеровкой векторов e' можно добиться того, чтоб единицы на диагонали A' шли подряд начиная с начала. В итоге A' будет иметь вид:

$$A' = (a'_{ij})_{\substack{1\le i\le m,\\ 1\le j\le n}} \quad \begin{cases} a'_{ij} = 1, & 1 \le i = j \le \dim\operatorname{Im}\phi \\ a'_{ij} = 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{1}$$

Раз в X и Y фактически прошла замена базисов — от "старых" e и f к "новым" e' и f' — то можно ввести ещё матрицы перехода $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$:

$$e' = eS, \quad f' = fP$$

где e' и e это строчки, каждая из n векторов пространства X, то есть $e, e' \in X^{1\times n}$, — а f и f' это строчки $Y^{1\times m}$. Но тогда связь между "старой" и "новой" матрицами отображения ϕ есть:

$$A' = P^{-1}AS \tag{2}$$

Всё выше описанное выливается в такие два утверждения.

Теорема 1.1. *Для любого линейного преобразования $\phi: X \to Y$ найдётся пара базисов e' и f' в пространствах X и Y соответственно, такая что матрица преобразования A' будет диагональной вида (1).*

Теорема 1.2. *Для любой матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ найдётся пара невырожденных квадратных матриц $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$, таких что матрица $A' = P^{-1}AS$ будет диагональной вида (1).*

1.2. Собственные векторы и собственные значения

Пусть теперь есть *преобразование* $\phi: X \to X$. Если в n-мерном пространстве X выбран базис e, то преобразованию будет соответствовать матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Можно ли выбрать базис e' так, чтобы матрица преобразования в нём A' была диагональной? Изменение матрицы преобразования при смене базиса $e' = eS$ описывается формулой:

$$A' = S^{-1}AS \tag{3}$$

Сравнивая с формулой изменения матрицы отображения (2), несложно заметить, что в случае преобразования *возможностей для изменения матрицы меньше*: вместо двух матриц S и P теперь всего одна S. Поэтому кажется, что *подходящий базис e' для приведения матрицы преобразования ϕ к диагональному виду получится найти не всегда*.

Когда его можно будет найти? И как его найти? Попробуем выяснить, какими свойствами должны обладать векторы подходящего базиса. Пусть найден базис e', в котором матрица преобразования A' диагональна: $A' = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (даже не требуем только единиц на диагонали — просто диагональный вид). Но в таком случае:

$$\begin{cases} \phi(\boldsymbol{e}'_i) = \lambda_i \boldsymbol{e}'_i \\ i = 1, \dots, n \end{cases} \tag{4}$$

то есть *образ $\phi(\boldsymbol{e}'_i)$ каждого базисного вектора $\boldsymbol{e}'_i$ оказывается параллелен этому же $\boldsymbol{e}'_i$*!

Можно ли вообще для преобразования ϕ найти векторы, обладающие свойством (4)? То есть найдутся ли число $\lambda \in \mathbb{R}$, вектор $\boldsymbol{x} \in X$, такие что

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x} \tag{5}$$

Определение 1.1. Вектор $\boldsymbol{x} \in X$ называется *собственным вектором* преобразования $\phi: X \to X$, соответствующим *собственному значению* $\lambda \in \mathbb{R}$, если 1) вектор $\boldsymbol{x}$ ненулевой и 2) $\phi(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$.

Перепишем выражение (5) в терминах матриц и вектор-столбцов (матрица A есть матрица преобразования ϕ в "старом" базисе e, а $x \in \mathbb{R}^n$ есть координатный столбец вектора $\boldsymbol{x} \in X$):

$$Ax = \lambda x \leftrightarrow \boxed{(A - \lambda E)x = 0} \tag{6}$$

Когда будет иметь **нетривиальное** решение уравнение (6)? В том случае, если определитель системы отличен от нуля:

$$\boxed{\det(A - \lambda E) = 0} \tag{7}$$

Уравнение (7) называется *характеристическим уравнением* матрицы A. Из него можно найти собственные значения, а далее из системы (6) найти собственные вектора.

Заметим "что-нибудь интересное" в уравнении (7). Начнём по-честному его расписывать. И воспользуемся для этого формулой полного разложения определителя. Итак, пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Тогда уравнение (7) можно расписать так:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = \sum_{(j_1, \dots, j_n)} (-1)^{N(j_1, \dots, j_n)} a_{1j_1} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$$
$$= (a_{11} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda) + \ldots = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} \operatorname{Sp} A + \ldots + \det A \tag{8}$$

то есть это уравнение степени n относительно λ (а потому у него не более n вещественных корней), причём в коэффициенте при λ^{n-1} есть *след матрицы* $\operatorname{Sp} A$, а свободный член равен просто $\det A$ (то, что получается из (7) в случае, если λ "нет").

Вернёмся к задаче, чего вообще хотим найти: линейно независимую систему из n векторов, обладающих свойством (4). Заметим следующее:

Утверждение 1.1. *Собственные векторы* $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k$*, соответствующие* различным *собственным значениям* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, линейно независимы.

Доказательство. Допустим противное: что векторы на самом деле линейно зависимы:

$$\begin{cases} \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0} \\ \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_k^2 > 0 \end{cases}$$

Заметим, что если вектор x собственный, соответствующий собственному значению λ, то и вектор $\alpha \boldsymbol{x}$ собственный ($\alpha \neq 0$), соответствующий тому же собственному значению λ:

$$Ax = \lambda x \Rightarrow A(\alpha x) = \lambda(\alpha x)$$

Поэтому можно считать, что "от противного" означает просто следующее:

$$\boldsymbol{x}_1 + \ldots + \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$$

Разберём доказательство на примере $k = 3$. (Для произвольного k всё будет аналогично, но, возможно, ещё менее наглядно.)

$$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$$

Иначе это можно переписать, выразив, например, $\boldsymbol{x}_3$ через $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$:

$$\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \tag{9}$$

(справа нет "минусов", потому что если $\boldsymbol{x}_1$ собственный, то $-\boldsymbol{x}_1$ тоже собственный с тем же λ — а для сути доказываемого не важно, собственный вектор с минусом или с плюсом). Подействуем преобразованием ϕ на обе части представленного выше соотношения (9):

$$\phi(\boldsymbol{x}_3) = \phi(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \leftrightarrow \lambda_3 \boldsymbol{x}_3 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2$$

Теперь подставим $\boldsymbol{x}_3$ из соотношения (9):

$$\lambda_3(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_3)\boldsymbol{x}_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$$

Коэффициенты $\lambda_1 - \lambda_3$ и $\lambda_2 - \lambda_3$ отличны от нуля, поэтому новое соотношение "по сути" получается таким:

$$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0} \leftrightarrow \boldsymbol{x}_2 = -\boldsymbol{x}_1$$

(“убрали” коэффициенты, потому что если, например, $\boldsymbol{x}_1$ собственный, то и $k\boldsymbol{x}$ при $k \neq 0$ тоже собственный — а для доказываемого важно лишь, что вектор собственный). Но тогда вектор $-\boldsymbol{x}_1$ должен быть собственным, соответствующим тому же собственному значению, как у $\boldsymbol{x}_2$, то есть λ_2, хотя в то же время $-\boldsymbol{x}_1$ собственный, соответствующий λ_3. Так как все собственные значения по условию были различными, получаем противоречие.

Рассмотрен случай трёх собственных векторов. Если же их больше трёх, то придётся просто несколько раз применять преобразование, постепенно уменьшая число участвуемых собственных векторов до двух. □

Если есть собственное значение λ, то для него найдётся хотя бы один собственный вектор (как нетривиальное решение системы (6)).

Приходим к следующему положению.

Теорема 1.3 (Достаточное условие диагонализуемости преобразования).

Если у линейного преобразования ϕ n-мерного пространства X есть n различных собственных значений, то найдётся базис из собственных векторов преобразования ϕ. (В котором матрица преобразования будет иметь диагональный вид.)

Доказательство. Можно будет найти n собственных векторов, относящихся к различным собственным значениям. И по предложению (1.1) они будут линейно независимы. □

Пример. Пусть есть преобразование $\phi\colon X \to X$ двумерного пространства X, заданное в некотором базисе матрицей $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Надо найти собственные значения преобразования и максимальную по количеству линейно независимую систему из собственных векторов. И, если из собственных векторов можно составить базис, надо выписать матрицу преобразования в этом базисе.

Характеристическое уравнение матрицы (для поиска собственных значений):

$$\det(A - \lambda E) = 0 \leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Собственные векторы:

$$(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{x} = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 E)\boldsymbol{x} = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Получилось найти базис из собственных векторов $e' = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$. Матрица преобразования в нём: $A' = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$.

Пример. Всё точно так же, как в прошлом примере, только теперь считаем, что матрица преобразования $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Характеристическое уравнение матрицы:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow \lambda = 2, \quad \text{(кратность 2)}$$

Собственные векторы:

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Достаточное условие для диагоналазируемости преобразования (1.3) не выполнялось: единственное собственное значение было кратным корнем характеристического уравнения. Найти базис из собственных векторов не получилось. Тем не менее, даже если есть кратные корни, это ещё *не значит, что базиса из собственных векторов точно нет...*

2. Задачи

2.1. # 24.20(2)

Найти собственные значения, привести к диагональному виду матрицу преобразования ϕ, если ϕ есть ортогональное проектирование трёхмерного геометрического пространства векторов $\mathscr{L}$ на прямую $\mathscr{L}_1$, заданную в некотором ортонормированном базисе e уравнением $\mathscr{L}_1 :\ x = y = z$.

Решение. Формула преобразования ϕ, полученная в номере 23.8(2):

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}$$

Матрица преобразования ϕ, полученная в номере 23.9(2) (в том же базисе e) с помощью формулы, полученной в номере 23.8(2):

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь найдём собственные значения этой матрицы A, полученной в номере 23.9(2) с помощью формулы, полученной в номере 23.8(2). Её характеристическое уравнение (7):

$$\begin{gathered}\det(A - \lambda E) = 0 \leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^3 \begin{vmatrix} 1-3\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-3\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-3\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ \leftrightarrow \lambda^2(1-\lambda) = 0 \leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0, & \text{(кратность 2)} \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}\end{gathered} \tag{10}$$

Теперь можно искать собственные векторы, соответствующие полученным собственным значениям λ_1[1] и λ_2.

$$(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{x} = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Несложно сразу выписать решение системы $(A - \lambda_1 E)x = 0$[2]:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} t_2, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

[1]То, что ноль должен быть собственным значением, можно было заметить сразу: $\det(A - \lambda E)|_{\lambda=0} = 0 \leftrightarrow$ $\leftrightarrow \det A = 0$ — то есть наличие нулевого собственного значения равносильно тому, что матрица A вырожденная. Что и было видно.

[2]Видно, что в системе по сути всего одна строчка. Переменных три. Таким образом, одна переменная базисная и две свободных. То есть пространство решений системы двумерное. Поэтому достаточно хоть как-нибудь найти (хотя бы подобрать) два линейно независимых частных решения, чтобы выписать решение в общем виде.

Видно, что собственные векторы, соответствующие $\lambda_1 = 0$, образуют плоскость. Поэтому для $\lambda_1 = 0$ можно выбрать два линейно независимых собственных вектора. Например:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Перейдём к $\lambda_2 = 1$:

$$(A - \lambda_2 E)\boldsymbol{x} = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Сумма строчек матрицы $A - \lambda_2 E$ даёт нулевую. А две строчки из трёх очевидно линейно независимы. Поэтому для того, чтобы выписать общее решение системы $(A - \lambda_2 E)x = 0$, достаточно подобрать всего одно нетривиальное решение. То есть максимальная по количеству линейно независимая совокупность собственных векторов, соответствующих λ_2, состоит из одного вектора. Например:

$$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Можно проверить, можно вспомнить (1.1), но получается, что три вектора $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)$ образуют линейно независимую систему — нашли базис e' из собственных векторов. В этом базисе матрица преобразования ϕ примет вид:

$$A' = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Именно такой — потому, что, например:

$$\phi(\boldsymbol{x}_3) = 1 \cdot \boldsymbol{x}_3 = 0 \cdot \boldsymbol{x}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{x}_2 + 1 \cdot \boldsymbol{x}_3 = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

то есть в столбцы матрицы A' преобразования ϕ в базисе $e' = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)$ записаны координаты образов $(\phi(\boldsymbol{x}_1), \phi(\boldsymbol{x}_2), \phi(\boldsymbol{x}_3))$ векторов базиса e' в том же базисе e'. А так как базис e' состоит из собственных векторов, то матрица A' диагональная с соответствующими собственными значениями на диагонали.

Можно и “по-честному” пересчитать матрицу преобразования в новом базисе:

$$e' = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = eS$$

$$A' = S^{-1}AS = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□