Семинар 11

Алексеев Василий

21 + 25 апреля 2023

Содержание

Жирным шрифтом обозначаются как векторы линейного пространства, так и их координатные столбцы в выбранном базисе. При этом и векторы, и их координатные столбцы обозначаются, как правило, одинаковыми буквами. Например, $\boldsymbol{x} \in X$ *(вектор) и* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\dim X}$ *(его координатный столбец). Таким образом, смысл зависит от контекста* ¯_(ツ)_/¯

1. Adjo & Ortho (Diag E1)

1.1. Самосопряжённые преобразования

1.1.1. Собственные + ортогонализация, или # 29.19(7)

Преобразование $\phi\colon\ \mathscr{E} \to \mathscr{E}$, где $\mathscr{E}$ — евклидово пространство, задано в некотором *ортонормированном базисе* $e = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -4 & 16 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Надо найти *ортонормированный базис из собственных векторов* преобразования ϕ, матрицу перехода S к этому базису, и матрицу A' преобразования ϕ в этом базисе.

Решение. Найдём **собственные значения** преобразования ϕ. Характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & 1 \\ -4 & 16-\lambda & -4 \\ 1 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = \lambda^2(18 - \lambda) = 0 \Rightarrow \left[\begin{aligned} &\lambda = 0 \quad \text{(кратность 2)} \\ &\lambda = 18 \end{aligned}\right.$$

Видно, что *все корни характеристического уравнения вещественные*, поэтому они же — и собственные значения преобразования ϕ.

При этом то, что $\lambda = 0$ — собственное значение, можно бы было заметить и в самом начале, ведь у матрицы A строки уже линейно зависимы (первая и третья совпадают), то есть $\det(A - \lambda E)|_{\lambda=0} = 0$.

Найдём **собственные векторы** преобразования ϕ (максимальную линейно независимую систему собственных векторов). При $\lambda = 0$ получаем следующее уравнение для поиска собственных векторов:

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -4 & 16 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

Последнее матричное уравнение равносильно одному скалярному уравнению

$$x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$$

Из которого можно, например, выразить x_1 через x_2 и x_3:

$$x_1 = 4t_1 - t_2, \quad x_2 = t_1 \in \mathbb{R}, \quad x_3 = t_2 \in \mathbb{R}$$

Тогда общее решение $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (произвольный вектор из собственного подпространства $\operatorname{Ker}(A - \lambda E)|_{\lambda=0}$) можно выписать в виде:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4t_1 - t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = t_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Видно, что в качестве базиса в собственном подпространстве ϕ, соответствующем собственному значению $\lambda = 0$ (максимальная линейно независимая система собственных векторов для $\lambda = 0$) можно взять векторы:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Не лишним будет на всякий случай убедиться, что в самом деле $A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$ и $A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$.)

Теперь найдём собственные векторы для $\lambda = 18$. Уравнение, определяющее соответствующее собственное подпространство:

$$\begin{pmatrix} -17 & -4 & 1 \\ -4 & -2 & -4 \\ 1 & -4 & -17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

Упростим матрицу полученной однородной системы:

$$\begin{pmatrix} -17 & -4 & 1 \\ -4 & -2 & -4 \\ \boldsymbol{1} & -4 & -17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -72 & -288 \\ 0 & -18 & -72 \\ 1 & -4 & -17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & \boldsymbol{1} & 4 \\ 1 & -4 & -17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Упрощённая система будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \quad x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 \qquad - \ \ x_3 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \quad \begin{cases} x_2 = -4x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$$

Общее решение:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} t \\ -4t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Базис в собственном подпространстве (один вектор):

$$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(На всякий случай убеждаемся, что $A\boldsymbol{x}_3 = 18\boldsymbol{x}_3$.)

Таким образом, мы нашли *базис из собственных векторов* преобразования ϕ:

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{1}$$

Теперь проведём **ортогонализацию** системы векторов (1). Исходный базис e ортонормированный, поэтому скалярное произведение между векторами $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ считается “по-простому”[1]:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

[1]Кстати, похоже, что в англоязычных источниках “скалярным произведением” называется именно эта “простая формула” скалярного произведения: сумма произведений соответствующих координат. Именуется как *dot product* или *scalar product*. Термином же *inner product* обозначается скалярное произведение вообще. То есть, ещё раз: наше “скалярное произведение” — их “inner product”, наше “скалярное произведение в ортонормированном базисе” — их “dot product” или “scalar product”. Something like this... Looks like... Anyway.

Видно, что $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3) = 4 - 4 + 0 = 0$. Так же, как и $(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = -1 + 0 + 1 = 0$. То есть *собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям преобразования ϕ, ортогональны.*

Остаётся "поправить" подсистему $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$, потому что $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = -4 \neq 0$. Вычтем, например, из $\boldsymbol{x}_1$ его ортогональную проекцию на $\boldsymbol{x}_2$:

$$\boldsymbol{x}_1' \equiv \boldsymbol{x}_1 - \frac{(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)}{|\boldsymbol{x}_2|} \cdot \frac{\boldsymbol{x}_2}{|\boldsymbol{x}_2|} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

где было использовано, что $|\boldsymbol{x}_2|^2 = 1 + 0 + 1 = 2$.

Убеждаемся, что $(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2) = -2 + 0 + 2 = 0$. Так как мы считали $\boldsymbol{x}_1'$ как линейную комбинацию $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$, то должно получиться $(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_3) = 0$ (то есть можно не проверять ортогональность с $\boldsymbol{x}_3$; ну, или можно проверить, но стоит понимать, что ничего удивительного в сохранении ортогональности $\boldsymbol{x}_1'$ и $\boldsymbol{x}_3$ нет). Получили ортогональную систему $\{\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$ из собственных векторов преобразования ϕ?.. А остался ли вектор $\boldsymbol{x}_1'$ собственным для $\lambda = 0$? Да, ведь он получен как линейная комбинация $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ — векторов из собственного подпространства $\operatorname{Ker}(A - \lambda E)|_{\lambda=0}$, а потому $\boldsymbol{x}_1'$ тоже лежит в указанном собственном подпространстве:

$$\phi(\boldsymbol{x}_1') = \phi(\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2) = \phi(\boldsymbol{x}_1) + \phi(2\boldsymbol{x}_2) = \ldots = \lambda(\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2) = \lambda \boldsymbol{x}_1'$$

Итого, помимо просто базиса из собственных векторов, для преобразования ϕ *существует ортогональный базис из собственных векторов* (ради однообразия обозначений положим $\boldsymbol{x}_2' \equiv \boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3' \equiv \boldsymbol{x}_3$):

$$\{\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2', \boldsymbol{x}_3'\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{2}$$

Можно ещё **нормировать** базис — поделив все векторы (2) на их модули:

$$\begin{cases} |\boldsymbol{x}_1'| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3 \\ |\boldsymbol{x}_2'| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \\ |\boldsymbol{x}_3'| = \sqrt{1 + 16 + 1} = 3\sqrt{2} \end{cases}$$

Получим следующий *ортонормированный базис из собственных векторов*:

$$\{\boldsymbol{x}_1'', \boldsymbol{x}_2'', \boldsymbol{x}_3''\} = \left\{ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{3}$$

Матрица перехода S от старого ортонормированного базиса e в новому $\{\boldsymbol{x}_1'', \boldsymbol{x}_2'', \boldsymbol{x}_3''\}$ — это матрица, столбцы которой есть компоненты новых базисных векторов в старом базисе. То есть матрица S получается просто объединением столбцов (3) в матрицу:

$$S = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/\sqrt{2} & 1/\left(3\sqrt{2}\right) \\ 1/3 & 0 & -4/\left(3\sqrt{2}\right) \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/\left(3\sqrt{2}\right) \end{pmatrix}$$

Можно заметить, что $S^T S = E$, то есть матрица перехода S ортогональная. Это потому, что S — матрица перехода от *одного ортонормированного* базиса к *другому ортонормированному* базису. Например, чему равен элемент в матрице $S^T S$ в первой строчке и втором столбце:

$$(S^T S)_{12} = \boldsymbol{x}_1''^T \boldsymbol{x}_2'' \xlongequal{\text{старый ОНБ}} (\boldsymbol{x}_1'', \boldsymbol{x}_2'') \xlongequal{\text{новый ОНБ}} 0$$

Чтобы найти матрицу A' преобразования ϕ в новом базисе, можно воспользоваться либо тем, что новый базис — это базис из собственных векторов (например, в новом базисе $\boldsymbol{x}_1''$ имеет координаты $(1,0,0)^T$, поэтому образ $\boldsymbol{x}_1''$ будет просто первым столбцом A', а это $\lambda \boldsymbol{x}_1''|_{\lambda=0}$, так как вектор $\boldsymbol{x}_1''$ — собственный, соответствующий $\lambda = 0$), то есть

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

Либо тем, что уже известна матрица S перехода от старого базиса к новому:

$$A' = S^{-1} A S \xlongequal{S^T S = E} S^T A S = \ldots = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

Первый способ, очевидно, побыстрее :) Но вторым, с матрицей S, можно хотя бы проверить, что всё в порядке. Если только не ошибиться в процессе самой проверки :) $\square$

1.1.2. Кусочек теории, или Попытка принять

Пусть есть линейное преобразование $\phi : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ *евклидова* пространства $\mathscr{E}$ (то есть пространство, в котором *выбрано* скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$). Тогда преобразованием, *сопряжённым* преобразованию ϕ, называется преобразование $\phi^* : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$, такое что

$$\boxed{\big(\phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}\big) = \big(\boldsymbol{x}, \phi^*(\boldsymbol{y})\big), \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{E}} \tag{4}$$

Существует ли вообще для данного ϕ сопряжённое ему ϕ^*? Пусть e — базис в $\mathscr{E}$. Пусть матрица Γ — матрица Грама базиса e, A — матрица преобразования ϕ в базисе e, и A^* — матрица сопряжённого преобразования ϕ^* (предполагаем, что оно существует). Тогда левую часть соотношения (4) можно переписать в таком виде:

$$(\phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x})^T \Gamma \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T \cdot A^T \Gamma \cdot \boldsymbol{y}$$

А правая часть (4) будет выглядеть как

$$(\boldsymbol{x}, \phi^*(\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{x}^T \Gamma (A^* \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \cdot \Gamma A^* \cdot \boldsymbol{y}$$

Так как (4) верно для произвольной пары $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, то равны "матрицы посередине":

$$\boxed{A^T \Gamma = \Gamma A^*} \tag{5}$$

Так как Γ — матрица Грама (обязательно $\det \Gamma \neq 0$), то можно соотношение между матрицами исходного и сопряжённого преобразований переписать в таком виде:

$$A^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma$$

Получается, *для произвольного преобразования ϕ евклидова пространства существует, причём единственное, сопряжённое преобразование ϕ^*.*

Матрица сопряжённого преобразования в *ортонормированном базисе*:

$$A^* = A^T \quad (\text{ОНБ})$$

Преобразование ϕ евклидова пространства $\mathscr{E}$ называется *самосопряжённым*, если оно совпадает со своим сопряжённым ϕ^*, то есть $\phi(\boldsymbol{x}) = \phi^*(\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathscr{E}$, или:

$$\boxed{\big(\phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}\big) = \big(\boldsymbol{x}, \phi(\boldsymbol{y})\big), \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{E}} \tag{6}$$

Матрица A самосопряжённого преобразования удовлетворяет соотношению:

$$A^T \Gamma = \Gamma A \tag{7}$$

В ортонормированном базисе:

$$\boxed{A = A^T \quad (\text{ОНБ})} \tag{8}$$

Утверждение 1.1 (“Матричный критерий самосопряжённости”)**.** *Если преобразование самосопряжённое, то его матрица в любом ортонормированном базисе симметричная. Обратно, если в некотором ортонормированном базисе матрица преобразования симметричная, то оно обязательно самосопряжённое.*

Оказывается, что с самосопряжёнными преобразованиями связано несколько “интересных” утверждений в контексте собственных значений и собственных векторов...

Теорема 1.1. *Все корни характеристического уравнения самосопряжённого преобразования вещественные*[2].

Пример. Убедимся в этом на примере самосопряжённого преобразования двумерного пространства, заданного матрицей в ортонормированном базисе (симметричной). Пусть матрица преобразования $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$. Тогда характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + (b^2 + ac) = 0$$

Дискриминант $(a + c)^2 - 4(b^2 + ac) = (a - c)^2 + b^2 \geq 0$, поэтому оба корня $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$. □

Хорошо, с самосопряжённым преобразованием двумерного пространства понятно. А что же в случае n-мерного пространства? Как быть там? Логика-то для двумерного на n-мерное как-то “не очень” распространяется...

[2]При этом интересно, что корни характеристического уравнения — это характеристика именно преобразования, а свойство самосопряжённости связано с выбором скалярного произведения...

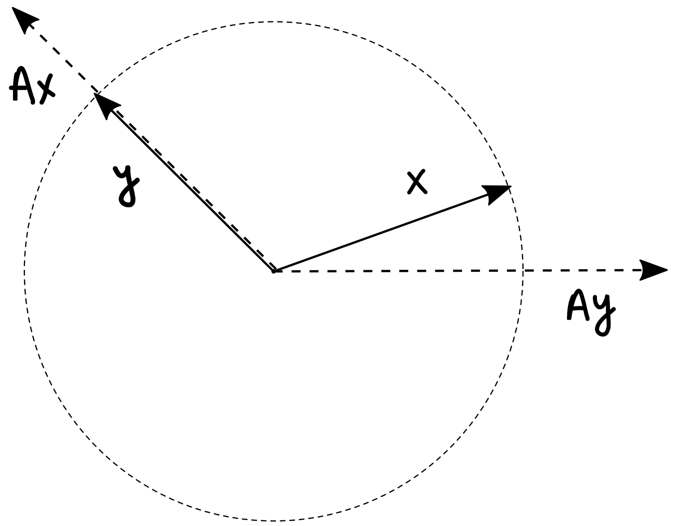

Рис. 1: Из самосопряжённости преобразования с матрицей A следует, что при фиксированном векторе $\boldsymbol{x}$ из всех векторов $\boldsymbol{y}$ единичной длины $|\boldsymbol{y}| = 1$ именно при $\boldsymbol{y} \upuparrows A\boldsymbol{x}$ максимально скалярное произведение $(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$. Но будет ли при этом вектор $A\boldsymbol{y}$ параллелен вектору $\boldsymbol{x}$?..

"Попытка принять"[3]

Пусть есть самосопряжённое преобразование ϕ с матрицей A (в выбранном базисе пространства $\mathscr{E}$). "Посмотрим" на него внимательнее.

Для некоторых (произвольно выбранных) векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ выполнено:

$$(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{9}$$

Будем считать, что $|\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{y}| = 1$ (для определённости рассматриваем только нормированные векторы). Заметим, что при фиксированном $\boldsymbol{x}$ скалярное произведение $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ достигает максимума, очевидно, при $\boldsymbol{y} \upuparrows A\boldsymbol{x}$. Но в силу сопряжённости преобразования ϕ имеем соотношение (9). Таким образом:

$$\begin{cases} \max\limits_{|\boldsymbol{y}|=1}(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \boldsymbol{y} \upuparrows A\boldsymbol{x} \\ \min\limits_{|\boldsymbol{y}|=1}(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \boldsymbol{y} \updownarrows A\boldsymbol{x} \end{cases} \tag{10}$$

то есть при любом $\boldsymbol{x}$, $|\boldsymbol{x}| = 1$ существует и единствен вектор $\boldsymbol{y}$, $|\boldsymbol{y}| = 1$, на котором достигает максимум функция от $\boldsymbol{y}$ вида $(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$ (кроме случая, когда $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ — тогда при любом $\boldsymbol{y}$ будет получаться ноль): это вектор $\boldsymbol{y} \upuparrows A\boldsymbol{x}$ (1).

Будет ли вектор $A\boldsymbol{y}$ параллелен $\boldsymbol{x}$? Нет, гарантировать такого нельзя. (Пока нельзя?) *А что, если окажется $A\boldsymbol{y} \parallel \boldsymbol{x}$?* Тогда получится, что под действием ϕ вектор $\boldsymbol{x}$ переходит в $A\boldsymbol{x}$, который, в свою очередь, в результате применения к нему ϕ снова пойдёт по направлению вектора $\boldsymbol{x}$. То есть как бы переход "туда-обратно". И вследствие линейности преобразования ϕ *можно предположить, что "посередине" между $\boldsymbol{x}$ и $A\boldsymbol{x}$ окажется вектор $\boldsymbol{z}$, который не ходит "туда-сюда" при действии ϕ, а "стоит на месте", то есть его образ $A\boldsymbol{z}$ не "отклоняется" от исходного $\boldsymbol{z}$, а остаётся ему параллелен: $A\boldsymbol{z} \parallel \boldsymbol{z}$ — этот вектор $\boldsymbol{z}$ и будет собственным* (2)!

Из того, что при фиксированном $\boldsymbol{x}$ максимум и минимум скалярных произведений из обеих частей соотношения (9) достигается на том единичном векторе $\boldsymbol{y}$, $|\boldsymbol{y}| = 1$, который

[3] На основе joisino.net/2021/03/18/spectral.

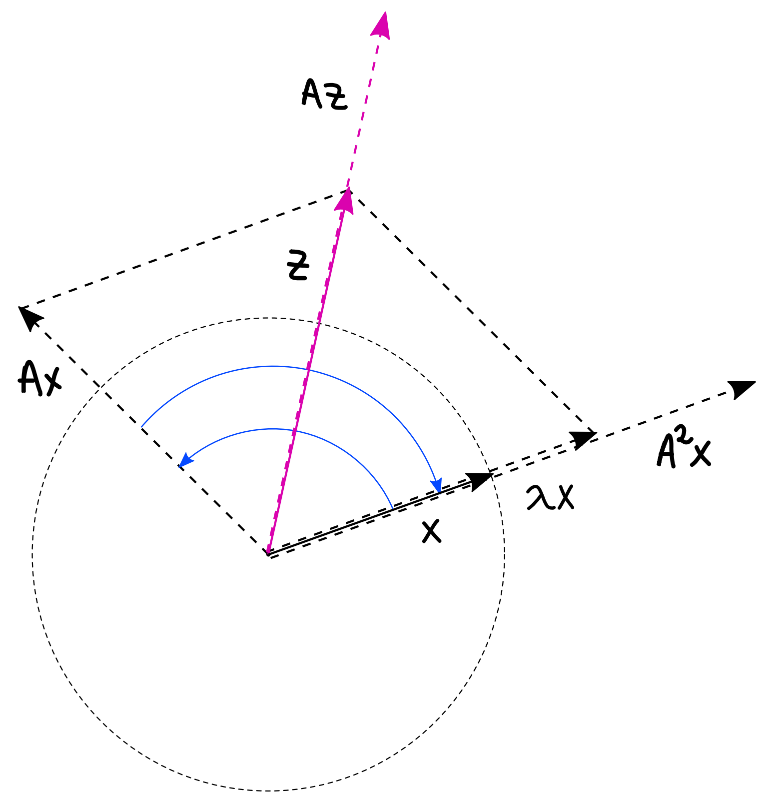

Рис. 2: Если после действия ϕ вектор $A\boldsymbol{x}$ станет параллелен исходному вектору $\boldsymbol{x}$, то можно ожидать, что “посередине” найдётся собственный вектор $\boldsymbol{z}$ (который в результате действия ϕ вообще “не отклоняется” от первоначального направления). Посередине — значит, его можно выразить как $\boldsymbol{z} = A\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{x}$, где $\lambda = |A\boldsymbol{x}|$.

параллелен $A\boldsymbol{x}$, можно положить:

$$\underline{A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{y}}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{11}$$

где коэффициент пропорциональности λ больше нуля, если ищем максимизирующий $\boldsymbol{y}$ (10), меньше нуля — если минимизирующий. (Также разрешено значение $\lambda = 0$, чтобы учесть случай, когда оказывается, что $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.) Отсюда, так как рассматриваются векторы единичной длины $|\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{y}| = 1$, то получаем:

$$\underline{|A\boldsymbol{x}| = |\lambda|} \tag{12}$$

Вернёмся к скалярным произведениям (9) и распишем их, имея в виду полученную связь между векторами $\boldsymbol{y}$ и $A\boldsymbol{x}$ (11):

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\lambda\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = \lambda$$

$$(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) \overset{\lambda \neq 0}{=\!=\!=} \left(\boldsymbol{x}, A \cdot \frac{1}{\lambda} A\boldsymbol{x}\right) = \frac{1}{\lambda}(\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x})$$

где в одном из переходов, чтоб выразить $\boldsymbol{y}$ через $A\boldsymbol{x}$, пока “приняли”, что $\lambda \neq 0$. Теперь можем приравнять (9) полученные выражения для скалярных:

$$\frac{1}{\lambda}(\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x}) = \lambda \quad \leftrightarrow \quad \boxed{(\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x}) = \lambda^2} \tag{13}$$

(Теперь снова можно считать $\lambda \in \mathbb{R}$, то есть включая ноль, потому и для $\lambda = 0$ выражение “в коробочке” (13) тоже “работает” и согласуется с (11).) Пользуясь самосопряжённостью преобразования ϕ, из последнего соотношения можем получить следующее:

$$\lambda^2 = (\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = |A\boldsymbol{x}|^2 \Rightarrow |A\boldsymbol{x}| = |\lambda|$$

но это ничего нового не говорит — длина вектора $A\boldsymbol{x}$ уже была известна (12). Что же ещё даёт формула (13)?.. Следует ли из неё, что $|A^2\boldsymbol{x}| = \lambda^2$? То есть *правда ли, что параллельны* $A^2\boldsymbol{x}$ *и* $\boldsymbol{x}$? Нет, *пока* такого утверждать нельзя...

Пример. Пусть $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{x} = (1, 0)^T$. Тогда:

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}$$

□

Вплоть до данного момента про выбор вектора $\boldsymbol{x}$ мы ничего не говорили: он был произвольным единичной длины. Выберем же вектор $\boldsymbol{x}$ "неслучайно"! Выберем его следующим образом:

$$|A\boldsymbol{x}| \to \max_{|\boldsymbol{x}|=1}$$

то есть *из всех векторов* $\boldsymbol{x}$ *единичной длины выберем тот* $\boldsymbol{x}^*$*, длина образа* $|A\boldsymbol{x}^*|$ *которого максимальна*. (Такой вектор в самом деле найдётся, так как подмножество $\{\boldsymbol{x} \mid |\boldsymbol{x}| = 1\} \subset \subset \mathbb{R}^n$ ограничено и замкнуто, а потому *компактно*[4], и функция $f : \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \mapsto |A\boldsymbol{x}| \in \mathbb{R}$ непрерывна[5].) Положим длину образа найденного $\boldsymbol{x}^*$ равной:

$$|A\boldsymbol{x}^*| \equiv |\lambda^*|$$

Вернёмся к соотношению (13):

$$(\boldsymbol{x}^*, A^2\boldsymbol{x}^*) = \lambda^{*2}$$

Следует ли теперь, что $A^2\boldsymbol{x}^* \parallel \boldsymbol{x}^*$? Да! Потому что

$$|A^2\boldsymbol{x}^*| = |A \cdot A\boldsymbol{x}^*| \le |\lambda^*||A\boldsymbol{x}^*| \le \lambda^{*2}$$

$$\lambda^{*2} = (\boldsymbol{x}^*, A^2\boldsymbol{x}^*) = |\boldsymbol{x}^*| \cdot |A^2\boldsymbol{x}^*| \cdot \cos\angle(\boldsymbol{x}^*, A^2\boldsymbol{x}^*) \le 1 \cdot \lambda^{*2} \cdot 1$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \begin{cases} |A^2\boldsymbol{x}^*| = \lambda^{*2} \\ |A\boldsymbol{x}^*| = |\lambda^*| \end{cases} \Rightarrow \underline{A^2\boldsymbol{x}^* = \lambda^{*2}\boldsymbol{x}^*} \\ A^2\boldsymbol{x}^* \upuparrows \boldsymbol{x}^* \end{cases} \tag{14}$$

Что это значит? Получается, что вектор $\boldsymbol{x}^*$ под действием преобразования ϕ переходит в вектор $A\boldsymbol{x}^*$, который переходит в вектор $A^2\boldsymbol{x}^*$, параллельный исходному $\boldsymbol{x}^*$:

$$\boldsymbol{x}^* \mapsto A\boldsymbol{x}^* \mapsto A^2\boldsymbol{x}^* \parallel \boldsymbol{x}^*$$

Если $\boldsymbol{x}^* \parallel A\boldsymbol{x}^*$, то $A\boldsymbol{x}^* = \lambda^*\boldsymbol{x}^*$ и вектор $\boldsymbol{z} \equiv \boldsymbol{x}^*$ уже и есть собственный (и тогда автоматически и $A^2\boldsymbol{x}^* = \lambda^{*2}\boldsymbol{x}^*$). Соответствующий собственному значению $\lambda^* \in \mathbb{R}$.

Если же $\boldsymbol{x}^* \nparallel A\boldsymbol{x}^*$, то посмотрим на вектор "посередине" между $\boldsymbol{x}^*$ и $A\boldsymbol{x}^*$, то есть на вектор $A\boldsymbol{x}^* + \lambda^*\boldsymbol{x}^*$ (который в данном случае точно отличен от нуля). А точнее, посмотрим на его образ:

$$\underline{A(A\boldsymbol{x}^* + \lambda^*\boldsymbol{x}^*)} = A^2\boldsymbol{x}^* + \lambda^* A\boldsymbol{x}^* = \lambda^{*2}\boldsymbol{x}^* + \lambda^* A\boldsymbol{x}^* = \underline{\lambda^*(\lambda^*\boldsymbol{x}^* + A\boldsymbol{x}^*)}$$

[4]См. лемму Гейне – Бореля о связи ограниченности и замкнутости с "настоящим" определением компакта.

[5]См. теорему Вейерштрасса о достижении непрерывной на компакте функцией своих точных верхней и нижней граней.

То есть вектор $z \equiv Ax^* + \lambda^* x^*$ собственный, и $\lambda^* \in \mathbb{R}$ — это соответствующее собственное значение[6]!

Итак, *для самосопряжённого преобразования ϕ удалось найти собственное значение λ^* и соответствующий собственный вектор z*. Но что делать дальше? Найдётся ли базис из собственных векторов? Один собственный вектор z — одномерное подпространство $L = \mathscr{L}(z)$, натянутое на этот собственный вектор z. Останется $(n-1)$-мерное подпространство $\mathscr{E}'$ (до суммы со всем $\mathscr{E} = L \oplus \mathscr{E}'$). Получится ли в нём найти собственный вектор? Если *вдруг окажется, что подпространство $\mathscr{E}'$ будет инвариантным относительно ϕ*, то мы сможем просто перейти к ограничению ϕ на этом $\mathscr{E}'$, которое, очевидно, тоже будет самосопряжённым, и у которого, таким образом, обязательно найдётся собственное значение и собственный вектор (лежащий в $\mathscr{E}'$). И далее процесс можно будет повторять — до тех пор, пока не соберётся базис из собственных векторов. Остаётся один вопрос: будет ли $\mathscr{E}'$ инвариантно относительно ϕ? Или, точнее: *можно ли подобрать $\mathscr{E}'$*, такое что $L \oplus \mathscr{E}' = \mathscr{E}$ и при этом $\mathscr{E}'$ инвариантно?..

Представим всё пространство $\mathscr{E}$ как сумму:

$$\mathscr{E} = L \oplus L^{\perp}$$

то есть как сумму одномерного подпространства L, натянутого на уже найденный собственный вектор z, и его *ортогонального дополнения* $L^{\perp}$.

Утверждение 1.2. *Если подпространство L инвариантно относительно самосопряжённого преобразования ϕ, то и его ортогональное дополнение $L^{\perp}$ тоже будет инвариантным относительно ϕ.*

Доказательство. Подпространство L инвариантно:

$$y \in L \to \phi(y) \in L$$

Ортогональное дополнение $L^{\perp}$:

$$x \in L^{\perp} \leftrightarrow x \perp y, \forall y \in L \leftrightarrow (x, y) = 0$$

Посмотрим на образ $\phi(x)$ вектора $x \in L^{\perp}$. Точнее — на его скалярное произведение с произвольным вектором $y \in L$:

$$(\phi(x), y) = (x, \phi(y)) = 0$$

так как ϕ самосопряжённое и $\phi(y) \in L$, так как L инвариантно относительно ϕ. Получили, что образ $\phi(x)$ произвольного вектора $x \in L^{\perp}$ перпендикулярен любому вектору $y \in L$. Иными словами, $\phi(x) \in L^{\perp}$, что и означает инвариантность $L^{\perp}$ относительно ϕ. □

Получается, L инвариантно, так как натянуто на собственный вектор. Значит, $L^{\perp}$ тоже инвариантно. И можно рассмотреть *ограничение ϕ на подпространстве $\mathscr{E}' \equiv L^{\perp}$*, то есть преобразование вида:

$$\tilde{\phi} \colon \mathscr{E}' \to \mathscr{E}'$$

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(x), \ \forall x \in \mathscr{E}'$$

[6]Вспомним, что число λ^* вводилось следующим образом: $|\lambda^*| \equiv |Ax^*|$. То есть о знаке λ^* ничего не известно! Нам был важен лишь его модуль. Поэтому то, что λ^* (при условии $\lambda^* \neq 0$) оказалось собственным значением — означает на самом деле, что собственных значений *целых два*: $|\lambda^*|$ и $-|\lambda^*|$!.. Что это значит? Хороший вопрос) Но такая ситуация в принципе возможна. Например, $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$, собственные значения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, собственные векторы $x_1 = (1, 0)^T$, $x_2 = (0, 1)^T$. И каждый из них можно представить как сумму вида "$Ax^* + \lambda^* x^*$": $x_1 = Ax + 2x$, $x_2 = Ax - 2x$, где $x = (1/4, -1/4)^T$ и $Ax = (1/2, 1/2)^T$.

Очевидно, оно также будет самосопряжённым. То есть для него, по уже показанному ранее, найдётся собственное значение и собственный вектор. Далее можно будет перейти к ещё одному ограничению ϕ, на подпространстве размерности $(n-2)$, найти собственный вектор там, и так далее. В итоге найдётся базис из собственных векторов.

Теорема 1.2. *Для самосопряжённого преобразования ϕ найдётся* базис из собственных векторов.

Но мало того, что найдётся базис из собственных векторов — оказывается, вектора базиса ещё можно будет ортогонализировать... (Так, что базис при этом останется базисом из собственных векторов.)

Покажем это. Пусть λ_1 и λ_2 — *различные* собственные значения самосопряжённого преобразования ϕ. И векторы $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ — соответствующие этим собственным значениям собственные векторы. Тогда, с одной стороны,

$$(\phi(\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{x}_2) = (\lambda_1 \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \lambda_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$$

С другой стороны,

$$(\phi(\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1, \phi(\boldsymbol{x}_2)) = (\boldsymbol{x}_1, \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) = \lambda_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$$

Отсюда получаем, что

$$\lambda_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \lambda_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \Leftrightarrow (\lambda_2 - \lambda_1)(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$$

Но собственные значения по условию различны, поэтому $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$. То есть *собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям самосопряжённого преобразования, ортогональны*[7].

Теорема 1.3. *Для самосопряжённого преобразования ϕ найдётся* ортонормированный *базис из собственных векторов.*

То есть, с одной стороны, по уже показанному ранее (1.2) найдётся базис из собственных векторов (даже если у характеристического уравнения будут кратные корни — каждому собственному значению будет соответствовать собственное подпространство той же размерности, что и кратность собственного значения как корня характеристического уравнения). С другой стороны, согласно (1.3) базис можно будет ортогонализировать.

Пример. Преобразование, рассмотренное в (1.1.1), было задано симметричной матрицей в ортонормированном базисе. То есть преобразование было самосопряжённым. Поэтому для него точно можно было найти ортонормированный базис из собственных векторов.

Итак, свойство самосопряжённости связано со скалярным произведением, выбранным в пространстве $\mathscr{E}$. Проверим, что матричное соотношение (7), хотя матрицы и зависит от выбора базиса, выполняется и при *смене базиса* (очевидно, должно выполняться, ведь в определении самосопряжённого преобразования (6) никакой конкретный базис не участвовал). Пусть e — "старый" базис, а $e' = eS$ — "новый" базис. Тогда матрица преобразования в новом базисе $A' = S^{-1}AS$, матрица Грама нового базиса[8] $\Gamma' = S^T \Gamma S$, и соотношение (7), которое хотим проверить для новых матриц:

$$\begin{aligned} A'^T \Gamma' = \Gamma' A' &\Leftrightarrow (S^{-1}AS)^T (S^T \Gamma S) = (S^T \Gamma S)(S^{-1}AS) \\ &\Leftrightarrow S^T A^T \Gamma S = S^T \Gamma A S \Leftrightarrow A^T \Gamma = \Gamma A \end{aligned}$$

То есть, да, от выбора базиса самосопряжённость не зависит.

[7] Собственные векторы ненулевые по определению, поэтому можно говорить именно об ортогональности ("угол между векторами равен 90°").

[8] Матрица Грама меняется, потому что базис другой. Скалярное же произведение как билинейная функция $(\cdot, \cdot)$ остаётся прежним.

1.1.3. The symms are not what they seem, или # 29.14(1, 2, 3)

Может ли самосопряжённое преобразование в каком-то базисе иметь матрицу A_1, A_2 или A_3, где матрицы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$$

Решение. “Может ли иметь матрицу” — то есть может ли быть такое скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$, при котором матрица A_i была бы матрицей самосопряжённого преобразования.

Матрица A_1 симметричная — поэтому, да, в ортонормированном базисе это будет матрица самосопряжённого преобразования (8).

Рассмотрим матрицу A_2. Её характеристическое уравнение:

$$\det(A_2 - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

Очевидно, нет действительных корней. Поэтому преобразование с матрицей A_2 не может быть самосопряжённым (1.1).

Характеристическое уравнение для матрицы A_3:

$$\det(A_3 - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 14 \\ 6 & 13-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 18\lambda - 19 = 0 \Rightarrow \left[\begin{aligned} &\lambda = -1 \\ &\lambda = 19 \end{aligned}\right.$$

То есть у преобразования ϕ с матрицей A_3 точно есть базис из собственных векторов. *Если* получится найти *ортонормированный* базис из собственных векторов, то в этом базисе матрица ϕ будет диагональной, а потому преобразование ϕ будет самосопряжённым (как преобразование с симметричной матрицей в ортонормированном базисе).

Будут ли собственные векторы ортогональны или нет — очевидно, как раз зависит от выбора базиса (или, точнее, от выбора скалярного произведения… от того, как скалярное произведение считается для базисных векторов). Найдём собственные векторы:

$$A_3\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}|_{\lambda=-1} \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 = (7, -3)^T$$

$$A_3\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}|_{\lambda=19} \Rightarrow \boldsymbol{x}_2 = (1, 1)^T$$

Пусть матрица Грама искомого базиса равна $\Gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$, $a > 0$, $ac - b^2 > 0$. Тогда скалярное произведение собственных векторов будет равно

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{x}_1^T \Gamma \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Хотим найти базис, такой что $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$. Приходим к условию:

$$7a + 7b - 3b - 3c = 7a + 4b - 3c = 0$$

Итого, объединяя это с условиями-неравенствами, связанными с положительной определённостью матрицы Грама, сводим поиск базиса к поиску решения следующей системы с ограничениями:

$$\begin{cases} 7a + 4b - 3c = 0 \\ a > 0 \\ ac - b^2 > 0 \end{cases}$$

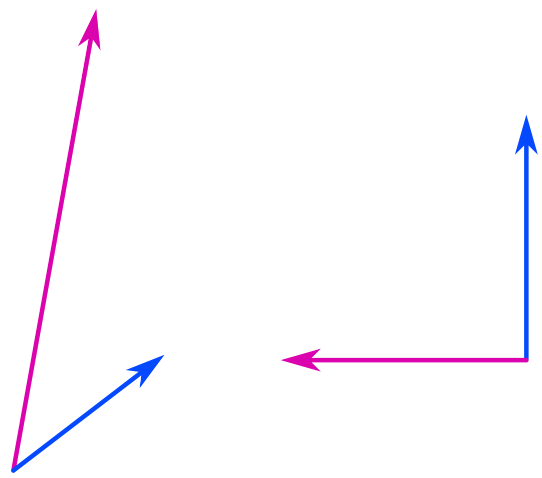

Рис. 3: Два вектора с координатами $(1, 0)$ и $(0, 1)$: не перпендикулярны в одном базисе (слева), но перпендикулярны в другом базисе (справа).

Равенство задаёт плоскость в пространстве (a, b, c), первое неравенство — полупространство, второе — "внутренность" конуса. В качестве решения можно взять, например, следующее:

$$a = 3, \quad b = 0, \quad c = 7$$

То есть искомый базис — такой, матрица Грама которого равна, например, $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{smallmatrix}\right)$. (Вернее, искомое скалярное произведение — такое, которое в том же базисе, в котором дана матрица A_3, имеет указанную матрицу Грама.)

Для поиска матрицы Грама базиса можно бы было идти другим путём. Матрица самосопряжённого преобразования удовлетворяет условию (7):

$$A_3^T \Gamma = \Gamma A_3$$

Если снова обозначить матрицу Грама как $\Gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$, $a > 0$, $ac - b^2 > 0$, то получаем

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 14 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5a + 6b & 5b + 6c \\ 14a + 13b & 14b + 13c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a + 6b & 14a + 13b \\ 5b + 6c & 14b + 13c \end{pmatrix}$$

Что равносильно

$$14a + 13b = 5b + 6c \Leftrightarrow 7a + 4b - 3c = 0$$

Получили то же, что и в прошлый раз (когда требовали ортогональность собственных векторов).

P.S. ("Объяснение")

Итого, мы проверили на конкретном примере, что если на плоскости даны в координатах два неколлинеарных вектора, то можно найти базис, в котором векторы с такими координатами будут перпендикулярны (при фиксированном заранее выбранном скалярном произведении). Можно себе это представить как "преобразование плоскости": если два вектора неколлинеарны, то можно немного "сжать-растянуть" ("повернуть") всё так, чтоб стали перпендикулярны (3).

А можно было на задачу смотреть и так: векторы базиса фиксированы ("стрелки"(3) выбраны в самом начале задачи и больше не меняются), и мы просто "строим" по ним скалярное произведение, то есть матрицу Грама Γ... Интерпретация выходит не такой наглядной, но, тем не менее, можно было думать и так. Хотя формулировка задачи ("может ли самосопряжённое в каком-то базисе иметь матрицу"), скорее подразумевает, что скалярное произведение как раз уже выбрано (то есть что пространство евклидово, раз говорят о "самосопряжённом" преобразовании), а про базис как раз не понятно, есть ли подходящий. □

1.2. Ортогональные преобразования

1.2.1. Кусочек теории, или Многоликая ортогональность

Преобразование ϕ евклидова пространства $\mathscr{E}$ называется *ортогональным*, если оно сохраняет скалярное произведение. То есть если

$$\boxed{\big(\phi(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{y})\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{E}} \tag{15}$$

Так как скалярное произведение, как симметричная билинейная форма, выражается через соответствующую квадратичную форму:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\big((\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})\big)$$

$$\big(\phi(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{y})\big) = \frac{1}{2}\Big(\big(\phi(\boldsymbol{x})+\phi(\boldsymbol{y}), \phi(\boldsymbol{x})+\phi(\boldsymbol{y})\big) - \big(\phi(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{x})\big) - \big(\phi(\boldsymbol{y}), \phi(\boldsymbol{y})\big)\Big)$$

то сохранение скалярного произведения равносильно *сохранению длины*[9]. То есть преобразование ортогональное, если сохраняет длины:

$$\boxed{\big(\phi(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{x})\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathscr{E}}$$

Пусть в $\mathscr{E}$ выбран базис $e = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. Пусть матрица A — матрица ортогонального преобразования ϕ в этом базисе, а Γ — матрица Грама базиса. Тогда левую часть (15) можно расписать так:

$$(\phi(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{y})) = (A\boldsymbol{x})^T \Gamma (A\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \cdot A^T \Gamma A \cdot \boldsymbol{y}$$

Правая часть (15):

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \Gamma \boldsymbol{y}$$

Соотношение (15) выполнено при произвольных $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, поэтому получаем следующий критерий ортогональности преобразования в матричном виде:

$$\boxed{A^T \Gamma A = \Gamma}$$

В ортонормированном базисе:

$$A^T A = E \quad \text{(ОНБ)} \tag{16}$$

То есть *матрица ортогонального преобразования в ортонормированном базисе ортогональна*.

[9] Сохранение длины из сохранения скалярного *следует* очевидным образом. В приведённом утверждении важно, что верно и *наоборот*: из сохранения длин следует и сохранение скалярного вообще.

Вернёмся к определению ортогонального преобразования (15). Ещё один вариант переписать то же самое — представив векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ как линейные комбинации базисных. Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — координатный столбец вектора $\boldsymbol{x}$, и $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$ — координатный столбец вектора $\boldsymbol{y}$. Тогда:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= (x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n, y_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n)\\
&= x_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)y_1 + x_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)y_2 + \ldots + x_n(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_n)y_n\\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_i(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)y_j
\end{aligned}
$$

В то же время:

$$
\begin{aligned}
(\phi(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{y})) &= \big(\phi(x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n), \phi(y_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n)\big)\\
&= \big(x_1\phi(\boldsymbol{e}_1) + \ldots + x_n\phi(\boldsymbol{e}_n), y_1\phi(\boldsymbol{e}_1) + \ldots + y_n\phi(\boldsymbol{e}_n)\big)\\
&= x_1\big(\phi(\boldsymbol{e}_1), \phi(\boldsymbol{e}_1)\big)y_1 + x_1\big(\phi(\boldsymbol{e}_1), \phi(\boldsymbol{e}_2)\big)y_2 + \ldots + x_n\big(\phi(\boldsymbol{e}_n), \phi(\boldsymbol{e}_n)\big)y_n\\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_i\big(\phi(\boldsymbol{e}_i), \phi(\boldsymbol{e}_j)\big)y_j
\end{aligned}
$$

Получаем, что

$$
\sum_{i,j=1}^{n} x_i(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)y_j = \sum_{i,j=1}^{n} x_i\big(\phi(\boldsymbol{e}_i), \phi(\boldsymbol{e}_j)\big)y_j, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{E}
$$

Это значит, что ортогональность преобразования ϕ равносильна также следующему условию:

$$
\boxed{\begin{cases} \big(\phi(\boldsymbol{e}_i), \phi(\boldsymbol{e}_j)\big) = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)\\ i = 1 \ldots n, \quad j = 1 \ldots n \end{cases}} \tag{17}
$$

(которое, в свою очередь, можно заметить, приводит к уже полученному ранее $A^T \Gamma A = \Gamma$). То есть сохранение ортогональным преобразованием скалярного произведения для *любой* пары векторов — это то же самое, что сохранение скалярного произведения *лишь для* $n(n-1)/2$ *пар* базисных векторов.

Отметим одно свойство собственных значений ортогонального преобразования ϕ. Пусть λ — собственное значение ϕ, и $\boldsymbol{x}$ — соответствующий собственный вектор. Тогда

$$
(\phi(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{x})) = (\lambda\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}) = \lambda^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \xlongequal{\phi \text{ ортогональное}} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})
$$

То есть $\lambda^2 = 1$. Иными словами, *собственные значения ортогонального преобразования (*если они для данного преобразования вообще существуют*) по модулю обязательно равны единице*.

1.2.2. Просто задача на ортогональные, или # 29.47(1)

В евклидовом пространстве $\mathscr{E}$ выбран ортонормированный базис. Дано преобразование ϕ, про которое известно, что оно переводит столбцы матрицы Q в столбцы матрицы P, где

$$
Q = \begin{pmatrix} 4 & 2\\ 7 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 8 & 2\\ 1 & -1 \end{pmatrix}
$$

Является ли преобразование ϕ ортогональным?

Решение. Будем считать, что ϕ переводит первый столбец Q в первый столбец P, и второй столбец Q во второй столбец P (видимо, так предполагается по условию, хотя вообще это не важно, какой столбец в какой переходит).

Видно, что столбцы Q не пропорциональны (так же, как и столбцы P). Поэтому можно взять векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ с координатными столбцами, совпадающими со столбцами матрицы Q, в качестве базиса в $\mathscr{E}$. Тогда столбцы P будут совпадать с координатными столбцами $\phi(\boldsymbol{x})$ и $\phi(\boldsymbol{y})$. И для проверки ортогональности ϕ достаточно проверить (17), то есть

$$\begin{cases} \big(\phi(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{x})\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \\ \big(\phi(\boldsymbol{y}), \phi(\boldsymbol{y})\big) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \\ \big(\phi(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{y})\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{cases}$$

Подставляя числа из матриц Q и P (и учитывая, что исходный базис ортонормированный), получаем:

$$\begin{cases} 16 + 49 = 65 = 64 + 1 \\ 4 + 1 = 5 = 4 + 1 \\ 8 + 7 = 15 = 16 - 1 \end{cases}$$

То есть, да, преобразование ϕ является ортогональным.

Можно бы было действовать по-другому. Пусть A — матрица преобразования ϕ. Преобразование будет ортогональным, если матрица A ортогональна (16) (исходный базис ОНБ). По условию сказано, что

$$\begin{cases} \phi: \ (4, 7)^T \mapsto (8, 1)^T \\ \phi: \ (2, 1)^T \mapsto (2, -1)^T \end{cases}$$

Это можно переписать как

$$\begin{cases} A \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Далее компактнее это можно записать просто как

$$AQ = P$$

Откуда получаем, что

$$A = PQ^{-1}$$

(Уже отметили, что столбцы Q не пропорциональны, поэтому точно существует Q^{-1}). Подставляя числа, находим матрицу преобразования:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Очевидно[10], что $AA^T = E$, то есть, да, ϕ ортогонально. ❀

[10]Матрица A из “косинусов и синусов”.