Семинар 4

Алексеев Василий

22 + 28 сентября 2020

Содержание

1. Смешанное и векторное произведения

1.1. Ориентированное пространство

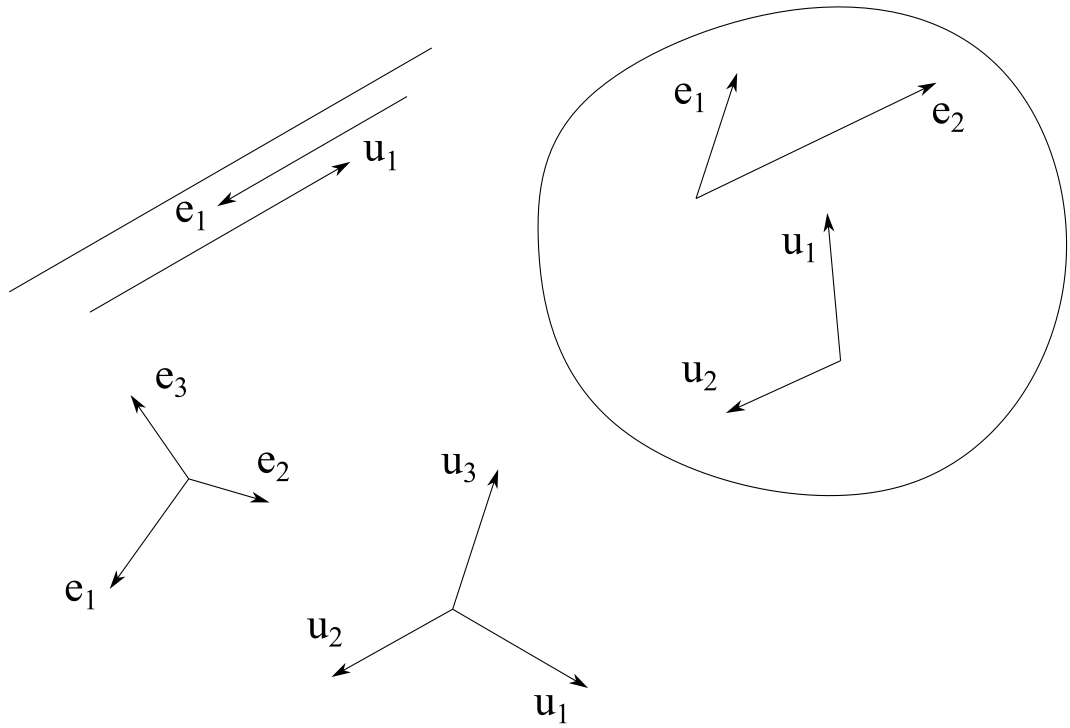

Рис. 1: Разные классы базисов в одно-, дву- и трёхмерном пространствах.

На прямой все векторы делятся на два класса: направленные в одну сторону вдоль прямой и в противоположную (1). На плоскости все упорядоченные пары неколлинеарных векторов делятся на два класса: пары, где поворот от первого вектора ко второму по наименьшему углу совершается против часовой стрелки, и пары, где этот поворот совершается по часовой стрелке (1). И в трёхмерном пространстве все упорядоченные тройки некомпланарных векторов делятся на два класса: те, где поворот от первого базисного вектора ко второму по наименьшему углу происходит против часовой стрелки, если смотреть со стороны третьего базисного вектора (*правые* базисы), и те, где этот поворот происходит по часовой стрелке (*левые* базисы) (1).

Определение 1.1. Ориентированное пространство — пространство, в котором выбран класс базисов[1].

В ориентированном пространстве можно говорить о длине, площади и объёме со знаком.

Так, в одномерном пространстве, если рассматриваемый вектор направлен так же, как и базисы в выбранном классе, то его длина считается большей нуля. В противном случае — меньше нуля. В двумерном пространстве, если параллелограмм построен на *упорядоченной* паре векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то его площадь со знаком $S_\pm$ можно считать большей нуля, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют базис, относящийся к выбранному (положительному) классу (2). Иначе — меньше нуля. И в трёхмерном пространстве, если параллелепипед построен на *упорядоченной* тройке векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, которые в таком же порядке образуют базис из выбранного (положительного) класса, то объём со знаком $V_\pm$ такого параллелепипеда

[1] В общем случае пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ базисы тоже образуют два класса.

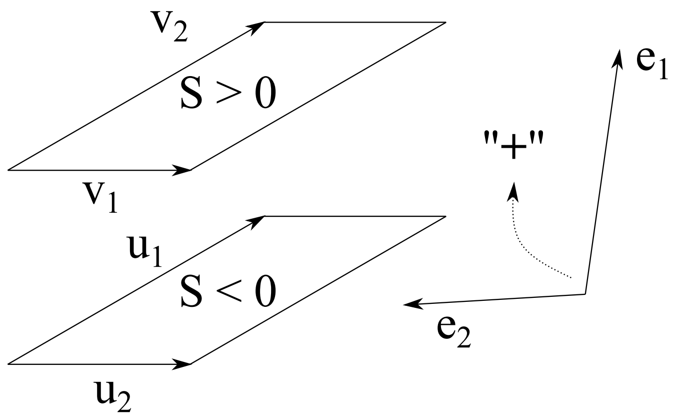

Рис. 2: Площадь ориентированного параллелограмма.

будет больше нуля. Иначе, если тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ не принадлежит положительному классу базисов, то объём $V_{\pm}$ параллелепипеда будет меньше нуля.

В трёхмерном пространстве положительными выбраны правые базисы.

Упомянув трёхмерное пространство, стоит ещё раз вернуться к вопросу об ориентации плоскости. Выбор ориентации в 3D ничего не говорит об ориентации на конкретной плоскости. Задать ориентацию на плоскости можно

- В 2D — просто сказав, в какую сторону поворот от $\boldsymbol{e}_1$ к $\boldsymbol{e}_2$ по наименьшему углу считается положительным.
- В 3D — выбрав вектор нормали $\boldsymbol{n}$ к плоскости. Тогда положительный базис на плоскости — тот, который с выбранной нормалью составляет положительную тройку в пространстве (порядок $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{n}$ или $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ — не важно).
- Как в 2D, так и в 3D: просто выбрав упорядоченную пару неколлинеарных векторов и сказав, что этот базис положительный (тогда и все упорядоченные пары векторов из этого же класса — тоже положительные).

1.2. Смешанное произведение

Определение 1.2. В ориентированном пространстве смешанное произведение трёх некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ полагается равным объёму ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \equiv V_{\pm}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

Если вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны, то их смешанное произведение полагается равным нулю.

Теорема 1.1 (О связи смешанного и скалярного произведения)**.** *Для любой пары векторов* $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *существует единственный вектор* $\boldsymbol{d}$*, такой что для любого вектора* $\boldsymbol{a}$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})$$

Доказательство. Найдём такой вектор $\boldsymbol{d}$ для произвольной тройки векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и покажем, что он единственен и не зависит от $\boldsymbol{a}$.

Пусть $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ неколлинеарны. Пусть также $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ некомпланарны. Отложим вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ от одной точки (3).

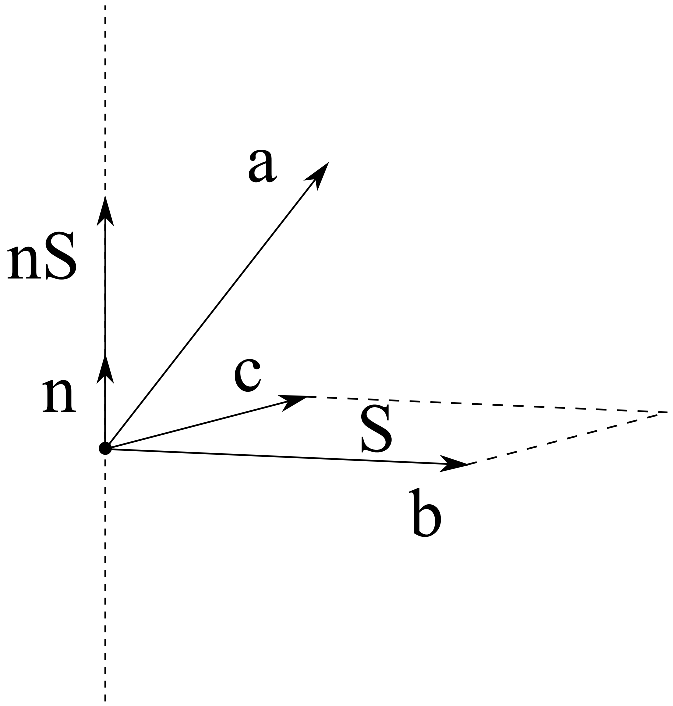

Рис. 3: Некомпланарные векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$; единичный вектор нормали $\boldsymbol{n}$ к плоскости векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, такой что тройка $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{n}$ положительная; S — площадь параллелограмма, построенного на $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

Рассмотрим пару векторов $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Отложим единичный вектор нормали $\boldsymbol{n}$ к плоскости векторов $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ так, чтобы тройка векторов $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{n}$ была бы положительной. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ (площадь без знака) равна

$$S = |\boldsymbol{b}| \cdot |\boldsymbol{c}| \cdot \sin\alpha$$

где α — угол между векторами $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Тогда $\boldsymbol{d} \equiv S \cdot \boldsymbol{n}$ — вектор, направленный вдоль $\boldsymbol{n}$ и по модулю равный площади основания параллелепипеда, где лежат вектора $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. При этом можно заметить, что скалярное произведение

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) = V_{\pm}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

так как $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})| = |V_{\pm}|$ (площадь параллелепипеда равна произведению площади основания на высоту, проведённую к этому основанию) и от того, сонаправлены или противоположно направлены вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{d}$, зависит, будет ли $V_{\pm}$ больше нуля или меньше нуля (тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}$ по построению положительная; тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ может быть как положительной, так и отрицательной). Таким образом, получаем, что

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})$$

Если же векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны, то объём параллелепипеда будет равен нулю, но тогда и $\boldsymbol{d} \perp \boldsymbol{a}$.

Если же вектора $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ коллинеарны, то смешанное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ также будет равно нулю, и вектор $\boldsymbol{d}$ можно взять равным нулю.

Покажем, что такой вектор $\boldsymbol{d}$, что $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})$, $\forall \boldsymbol{a}$ единственен. Допустим противное: пусть существует вектор $\boldsymbol{d}_1$, такой что $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})$ и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}_1)$, $\forall \boldsymbol{a}$. Но тогда $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}_1)$, и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d} - \boldsymbol{d}_1) = 0$. То есть вектор $\boldsymbol{d} - \boldsymbol{d}_1$ перпендикулярен любому вектору пространства. Поэтому $\boldsymbol{d} - \boldsymbol{d}_1 = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_1$. $\square$

Введённый выше вектор $\boldsymbol{d}$ называется векторным произведением векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

1.3. Векторное произведение

Определение 1.3. Векторным произведением неколлинеарных векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называется вектор $\boldsymbol{d}$, такой что

- Модуль вектора $\boldsymbol{d}$ равен
$$|\boldsymbol{d}| = |\boldsymbol{b}| \cdot |\boldsymbol{c}| \cdot \sin\alpha$$
где α — угол между векторами $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

- Вектор $\boldsymbol{d}$ перпендикулярен как вектору $\boldsymbol{b}$, так и вектору $\boldsymbol{c}$:
$$\boldsymbol{d} \perp \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{d} \perp \boldsymbol{c}$$

- Вектор $\boldsymbol{d}$ образует *положительную тройку* $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ вместе с исходными $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$[2].

Если же векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ коллинеарны, то их векторное произведение полагается равным нулю.

Векторное произведение $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ может обозначаться как $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ или $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$.

Таким образом,
$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]) \tag{1}$$

Рассмотрим некоторые свойства векторного произведения.

Так, векторное произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на самого себя равно нулю, так как $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{a}$:
$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{0}$$

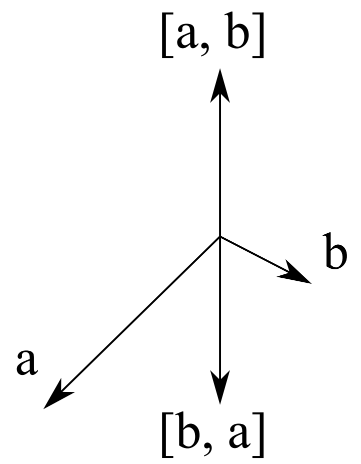

Рис. 4: Векторное произведение антикоммутативно.

Для любых $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$
$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$$
так как первый и второй вектора меняются местами, и направление поворота от первого вектора ко второму меняется на противоположное (4).

При этом в смешанном произведении сомножители тоже можно переставлять, и, если класс тройки меняется, то меняется и знак перед смешанным произведением:
$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = \ldots = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \tag{2}$$

И свойство линейности векторного произведения по первому аргументу:
$$[\beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}] = \beta_1 [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}] + \beta_2 [\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}]$$

[2] При выбранной правой ориентации пространства тройка $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ должна быть правой.

Доказательство. Докажем это свойство. Надо "в нужное время вставлять и убирать квадратные скобки" и пользоваться линейность скалярного произведения:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}, [\beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}]) &\overset{(1)}{=} (\boldsymbol{a}, \beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}) \\
&\overset{(2)}{=} -(\beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \\
&\overset{(1)}{=} -(\beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]) \\
&= -\beta_1(\boldsymbol{b}_1, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]) - \beta_2(\boldsymbol{b}_2, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]) \\
&\overset{(1)}{=} -\beta_1(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \beta_2(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \\
&\overset{(2)}{=} \beta_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}) + \beta_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}) \\
&\overset{(1)}{=} \beta_1(\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}]) + \beta_2(\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}]) = (\boldsymbol{a}, \beta_1[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}] + \beta_2[\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}])
\end{aligned}
\tag{3}
$$

□

Теперь можно выразить векторное произведение между произвольными двумя векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ пространства, которые заданы компонентами в некотором базисе $e = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Пусть

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{a} = a_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + a_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + a_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\
\boldsymbol{b} = b_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + b_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + b_3 \cdot \boldsymbol{e}_3
\end{cases}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + a_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + a_3 \cdot \boldsymbol{e}_3) \times (b_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + b_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + b_3 \cdot \boldsymbol{e}_3) \\
&= (a_2 b_3 - a_3 b_2)[\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] + (a_1 b_3 - a_3 b_1)[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3] + (a_1 b_2 - a_2 b_1)[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]
\end{aligned}
$$

где в последнем переходе использовались свойство антикоммутативности векторного произведения и свойство равенства нулевому вектору векторного квадрата любого вектора. Полученное соотношение можно переписать в таком виде

$$
[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] & [\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1] & [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2] \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{4}
$$

где, отметим ещё раз, $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ — произвольный базис.

Если воспользоваться полученным представлением векторного произведения через компоненты векторов, подставив его в формулу (1), то получим

$$
(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \tag{5}
$$

Если же базис e **правый ортонормированный**, то формулы упрощаются. Для векторного произведения:

$$
[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{6}
$$

и для смешанного:

$$
(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{7}
$$

1.4. Задачи

Перед задачами параграфа 3 в сборнике сказано, что базис во всех задачах, если не оговорено противное, правый ортонормированный. Поэтому при решении можно будет пользоваться более простыми формулами (6) и (7) (а также более простыми формулами, связанными с вычислениями скалярных произведений).

Задача (3.8(1))**.** *На векторах $\boldsymbol{a} = (2, 3, 1)$ и $\boldsymbol{b} = (-1, 1, 2)$, отложенных из одной точки, построен треугольник. Надо найти площадь этого треугольника.*

Решение. Обозначим за α угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Тогда

$$\begin{aligned} S_{\triangle} &= \frac{1}{2}|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\big|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\big| \\ &= \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}|5\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}| = \frac{1}{2}\sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

□

Задача (3.13(1))**.** *Доказать тождество*

$$\big|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\big|^2 = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{vmatrix}$$

Решение. Пусть α — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Распишем левую часть:

$$\big|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\big|^2 = \big(|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin\alpha\big)^2 = |\boldsymbol{a}|^2 \cdot |\boldsymbol{b}|^2 \cdot \sin^2\alpha$$

И правую часть:

$$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{vmatrix} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|^2 \cdot |\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos^2\alpha = |\boldsymbol{a}|^2 \cdot |\boldsymbol{b}|^2 \cdot (1 - \cos^2\alpha)$$

Так как $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, то тождество можно считать доказанным. □

Задача (3.15 (близкая к 3.16))**.** *Даны векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, такие что*

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0} \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \end{cases}$$

Надо выразить через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ какой-нибудь вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий уравнению

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$$

Решение. Из условия следует, что либо $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}$, либо $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$. Будем пока считать, что $\boldsymbol{b}$ не равен нулю (5).

Так как $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{b}$ и $|\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{a}| \cdot \sin\alpha = |\boldsymbol{b}|$, где $\alpha = \angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$. То есть

$$|\boldsymbol{x}| \sin\alpha = \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$$

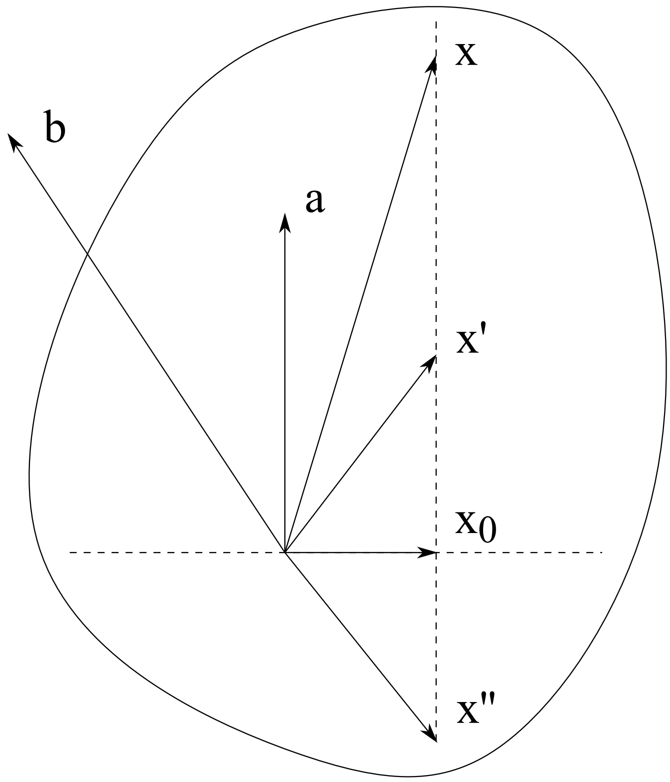

Рис. 5: $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$.

Пусть решению $\boldsymbol{x}_0$ соответствует угол $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, то есть вектор $\boldsymbol{x}_0$ перпендикулярен как $\boldsymbol{b}$, так и $\boldsymbol{a}$. Тогда $\boldsymbol{x}_0$ сонаправлен $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ (векторное произведение — именно в таком порядке) (5). И найти $\boldsymbol{x}_0$ можно как

$$\boldsymbol{x}_0 = \underbrace{\frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{\big|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\big|}}_{\text{“направление”}} \cdot \underbrace{\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}}_{\text{модуль}} = \frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{|\boldsymbol{a}|^2}$$

Если $\boldsymbol{b} = 0$, то по формуле получаем $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$, что тоже является решением уравнения.

□

Задача (3.28(1))**.** *Доказать, что если векторы* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$ *компланарны, то и векторы* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *тоже компланарны.*

Решение. Рассмотрим два варианта решения.

“Словесный”.

Отложим векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ от одной точки. Назовём плоскость, где лежат $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$, плоскостью α (6).

Рассмотрим пару векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Их векторное произведение $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ лежит в α и перпендикулярно плоскости, где лежат $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (пока считаем, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ неколлинеарны). Таким образом, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ лежат в плоскости, перпендикулярной α. Аналогично и с парами векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Все три такие плоскости попарно пересекаются хотя бы по одной прямой (например, плоскости векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ пересекаются хотя бы по прямой, содержащей вектор $\boldsymbol{a}$: векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ изначально отложены от одной точки). Таким образом, если все три описанные плоскости совпадают, то вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ лежат в ней, а потому компланарны. Если же плоскости не совпадают, а пересекаются попарно

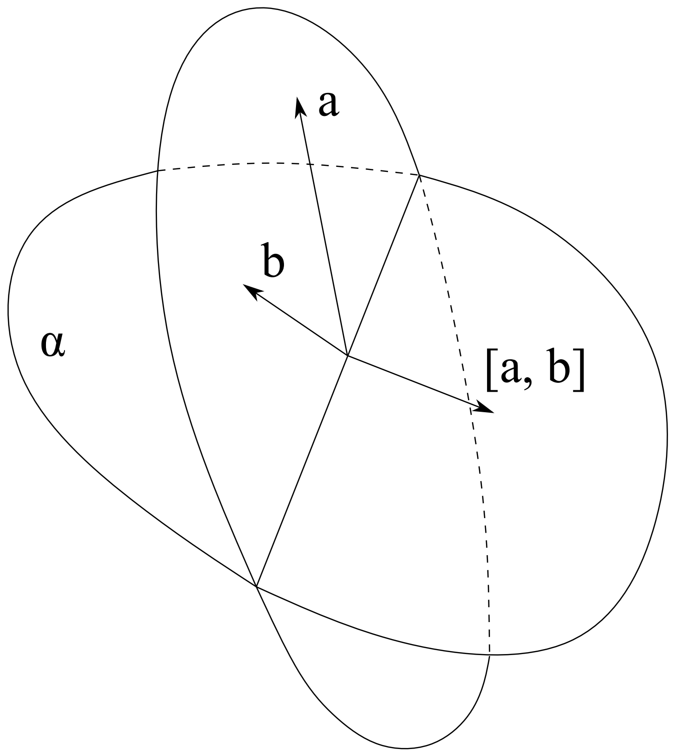

Рис. 6: α — плоскость, где лежат $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ и $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$.

по одной прямой, то все три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ оказываются перпендикулярными α, а потому параллельными. То есть в этом случае векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ не только компланарны, но и коллинеарны. Но в процессе решения было сделано предположение о том, что $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ неколлинеарны, поэтому такой случай отпадает.

Пусть теперь хотя бы один вектор из тройки $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$ равен нулевому вектору. Тогда либо хотя бы два вектора из трёх $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ коллинеарны, а потому все три они компланарны. Либо хотя бы один вектор из трёх $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ равен нулевому вектору, а потому все три снова компланарны.

“Формульный”.

Рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

Умножим векторно обе части на $\boldsymbol{a}$ слева. Получим

$$\beta \cdot [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + \gamma \cdot [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{0}$$

Аналогично, при умножении векторно слева обеих частей исходного уравнения на $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$:

$$\begin{cases} \alpha \cdot [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] + \gamma \cdot [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{0} \\ \alpha \cdot [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] + \beta \cdot [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

Складывая все три полученных уравнения, получаем

$$(\beta - \alpha) \cdot [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + (\gamma - \beta) \cdot [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] + (\gamma - \alpha) \cdot [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{0}$$

Так как векторы $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$ линейно зависимы, то хотя бы один из коэффициентов $(\beta - \alpha)$, $(\gamma - \beta)$, $(\gamma - \alpha)$ может быть отличен от нуля. Но в таком случае три коэффициента в исходном уравнении α, β, γ не совпадают, а потому все три не могут в данном случае быть равны нулю одновременно. То есть существует нетривиальная линейная комбинация $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$, равная нулевому вектору. Поэтому три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны. $\square$

Задача (3.27)**.** *Доказать, что проекция* $\boldsymbol{b}_\perp$ *вектора* $\boldsymbol{b}$ *на плоскость, перпендикулярную вектору* $\boldsymbol{a}$*, равна*

$$\boldsymbol{b}_\perp = \frac{\big[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]\big]}{|\boldsymbol{a}|^2}$$

Решение. Пусть $\boldsymbol{b}_\parallel$ — составляющая вектора $\boldsymbol{b}$, параллельная вектору $\boldsymbol{a}$. Тогда

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_\parallel + \boldsymbol{b}_\perp$$

$$\boldsymbol{b}_\perp = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}_\parallel = \boldsymbol{b} - \frac{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a} = \frac{|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2} \xrightarrow{\text{“бац минус цаб”}} \frac{\big[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]\big]}{|\boldsymbol{a}|^2}$$

□

Задача (3.33*)**.** *Доказать, что площадь треугольника, составленного из медиан треугольника* ABC*, равна* 3/4 *площади самого треугольника* ABC.

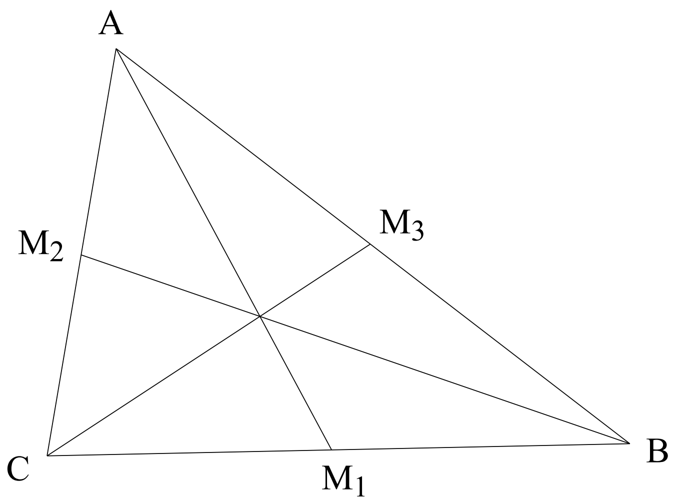

Рис. 7: Медианы AM_1, BM_2 и CM_3 в $\triangle ABC$.

Решение. Пусть в треугольнике ABC проведены медианы AM_1, BM_2, CM_3 (7). Проверим сначала, что из медиан в самом деле можно составить треугольник:

$$\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{BM_2} + \overrightarrow{CM_3} \stackrel{?}{=} \mathbf{0}$$

Выразим векторы медиан через векторы сторон треугольника ABC:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ \overrightarrow{BM_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) \\ \overrightarrow{CM_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}) \end{cases}$$

Складывая левые и правые части равенств, получаем

$$\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{BM_2} + \overrightarrow{CM_3} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Теперь найдём площадь S' треугольника, образованного медианами (за S обозначим площадь треугольника ABC):

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{BM_2}]\right| = \frac{1}{2}\left|\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})\right]\right| \\ &= \frac{1}{8}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BA}\right| = \frac{1}{8} \cdot 3 \cdot 2S = \frac{3}{4}S \end{aligned}$$

так как $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BA}$ сонаправлены и по модулю равны удвоенной площади треугольника ABC, а $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BA} = \mathbf{0}$. □

Задача (3.31)**.** *Решить систему векторных уравнений в пространстве*

$$\begin{cases} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = p \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = q \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) = s \end{cases}$$

где векторы ***a*, *b*** *и* ***c*** *некомпланарны.*

Решение. Сначала покажем, что если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ некомпланарны, то и $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ и $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ некомпланарны. Рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + \beta[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] + \gamma[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] = \mathbf{0}$$

Умножим обе части скалярно на $\boldsymbol{b}$ слева. Получим

$$\gamma(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$$

Откуда $\gamma = 0$, так как $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ некомпланарны (и их смешанное произведение отлично от нуля). Аналогично $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Поэтому три вектора $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ и $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ также некомпланарны.

Введём понятие *взаимного базиса*.

Определение 1.4. Пусть есть базис $e = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Тогда взаимный базис $e^* = (\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*)$ определяется как

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1^* = \dfrac{[\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)} \\ \boldsymbol{e}_2^* = \dfrac{[\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1]}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)} \\ \boldsymbol{e}_3^* = \dfrac{[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)} \end{cases} \tag{8}$$

По доказанному ранее, e^* в самом деле базис (три линейно независимых вектора в пространстве). Также можно заметить, что $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i^*) = 1$ и $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j^*) = 0$ при $i \neq j$ (поэтому базис e^* также называют биортогональным к базису e)[3].

Возвращаясь к задаче, разложим вектор $\boldsymbol{x}$ по взаимному к $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ базису $\{\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*\}$:

$$\boldsymbol{x} = x_1^*\boldsymbol{a}^* + x_2^*\boldsymbol{b}^* + x_3^*\boldsymbol{c}^*$$

[3]Эти свойства на самом деле определяют взаимный базис в общем случае $\mathbb{R}^n$ (en.wikipedia.org/wiki/Dual_basis).

Умножая скалярно по очереди на $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и пользуясь свойством “биортогональности” взаимного базиса, получаем

$$\begin{cases}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = x_1^* \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = x_2^* \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) = x_3^*\end{cases}$$

То есть числа p, q и s, данные в условии, есть компоненты вектора $\boldsymbol{x}$ во взаимном к $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ базисе, векторы которого вычисляются по (8). □

Задача (3.22(1))**.** *Три некомпланарных вектора* **a**, **b**, **c** *отложены из одной точки. Найти объём треугольной призмы, основание которой построено на* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, *а боковое ребро совпадает с вектором* $\boldsymbol{c}$.

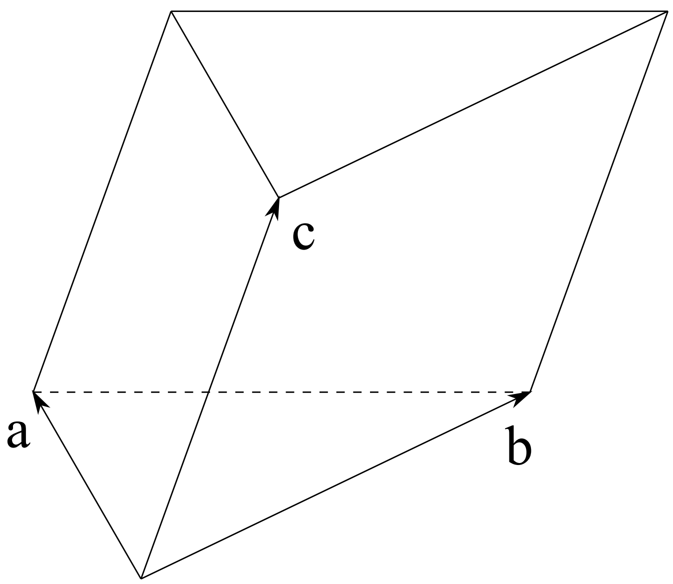

Рис. 8: Треугольная призма, построенная на $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

Решение. Объём призмы V' равен произведению площади основания на высоту (8). В основании треугольник — площадь которого в два раза меньше площади параллелограмма, построенного на тех же векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. То есть объём призмы ищется аналогично объёму V параллелепипеда, построенного на $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, только площадь основания в два раза меньше. Поэтому и

$$V' = \frac{1}{2}V = \frac{\big|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\big|}{2}$$

Задача решена. Нашли объём, не находя ни высоты, ни площади основания.

Отступление.

Но как можно бы было найти вектор $\boldsymbol{c}_\perp$, по модулю равный высоте призмы и перпендикулярный основаниям? Вектор $\boldsymbol{c}$ можно представить в виде суммы двух векторов, один из которых параллелен плоскости основания призмы, а другой перпендикулярен плоскости основания. В свою очередь, компоненту $\boldsymbol{c}$, параллельную основаниям, можно разложить по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (которые, как неколлинеарные вектора, образуют базис на плоскости). Получаем

$$\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}_\perp$$

Если умножить полученное уравнение скалярно на $\boldsymbol{a}$ и на $\boldsymbol{b}$ (по очереди), то получим систему

$$\begin{cases} (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + \beta(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \\ (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \beta(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{cases}$$

из которой уже можно найти α и β, например, по правилу Крамера, если определитель системы отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{vmatrix} = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 \cos^2 \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \left|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\right|^2 \neq 0$$

так как векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны. А вообще, определитель

$$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{vmatrix}$$

называется *определителем Грама*[4] системы векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Из решения видно, что отличие от нуля определителя Грама системы векторов является *критерием линейной независимости* этой системы векторов (чтобы коэффициенты разложения любого вектора по этой системе определялись однозначно — в нашем случае коэффициенты разложения компоненты $\boldsymbol{c}$, параллельной основанию призмы, по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$).

Возвращаясь к вектору $\boldsymbol{c}_\perp$, то при найденных α и β он получается равным

$$\boldsymbol{c}_\perp = \boldsymbol{c} - \alpha\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{b}$$

□

[4] en.wikipedia.org/wiki/Gramian_matrix.