

Семинар 12

Алексеев Василий

1 + 5 декабря 2022

Содержание

1	Матрицы: “Вспомнить всё”	1
1.1	Операции с матрицами	1
1.2	Определитель матрицы	3
1.2.1	Свойства	4
1.3	Обратная матрица	6
2	Задачи	7
2.1	# 14.23(11)	7
2.2	# 14.24(1)	8
2.3	# 14.24(7)	9
2.4	# 15.11(7)	12
2.5	# 15.45(1)	12
2.6	# 15.48(1)	12
2.7	# 15.48(6)	13
2.8	# 15.65(1)	13
3	Дополнение	14
3.1	“Время определить определитель ещё раз — Yes honey”	14
3.2	# 14.23(16) (“Решение, о котором никто не просил”)	15
3.3	# 15.45(2) (“Для всех, кроме потока И. А. Чубарова”)	16

1. Матрицы: “Вспомнить всё”

С матрицами мы уже [познакомились на самом первом семинаре](#). Вспомним же, “что там было”, и обсудим ещё кое-что сверх.

Вещественная матрица A размера $m \times n$ — это “таблица” из чисел размера m строк на n столбцов $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ($i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

1.1. Операции с матрицами

Определение 1.1 (Сложение матриц). Пусть $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Суммой $A + B$ называется матрица $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, такая что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$).

Определение 1.2 (Умножение матрицы на число). Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \alpha \in \mathbb{R}$. Произведением матрицы A на число α называется матрица $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, такая что $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ ($i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$).

Замечание. Множество матриц одного размера с введёнными операциями сложения и умножения на число образуют *линейное пространство*.

Определение 1.3 (Умножение матриц). Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times p}, B \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Тогда матрица $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ называется произведением матриц A и B , если

$$\begin{cases} c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

и обозначается $C = AB$.

Замечание. Почему матричное умножение введено именно так?

$$C_{m \times n} = A_{m \times p} B_{p \times n}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kn}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Пусть есть ортонормированный базис e_1, e_2 . То есть базис, в котором вектора взаимно перпендикулярны и по длине равны единице 1. Повернём вектор v с компонентами $(1, 0)$ на угол 45 градусов против часовой стрелки (1).

Получим вектор $\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$. Проверим, что матрица $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ как раз задаёт нужное преобразование (умноженная на исходный вектор даёт вектор — результат поворота):

$$v' = Av = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

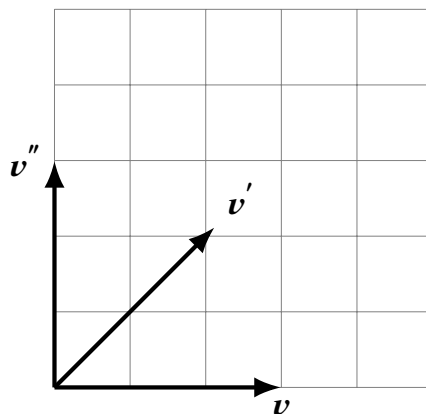


Рис. 1: Несколько поворотов вектора v на 45 градусов против часовой стрелки.

Снова повернём вектор на угол 45 градусов против часовой стрелки. Должны получить вектор с компонентами $(0, 1)$:

$$v'' = Av' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Какой матрицей задаётся поворот сразу на 90 градусов против часовой стрелки? Как из вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ сразу получить вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Возведём матрицу, задающую поворот на 45 против часовой стрелки, в квадрат:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

и умножим её на исходный вектор v :

$$A^2 v = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, благодаря введённому матричному умножению, матрица композиции линейных преобразований получилась равна произведению матриц этих преобразований.

Приведём ещё пару небесполезных определений, связанных с матрицами.

Определение 1.4 (Единичная матрица). Матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется единичной, если она нулевая, кроме главной диагонали ($\{a_{ij} \mid i = j\}$), на которой стоят единицы. То есть $a_{ij} = 1$ при $i = j$ и $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица обычно обозначается E или I .

Определение 1.5 (Транспонирование матрицы). Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Тогда транспонированной по отношению к матрице A называется матрица $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$, такая что $c_{ij} = a_{ji}$ ($i = 1 \dots n, j = 1 \dots m$). Транспонированная матрица обозначается A^T .

Пример. О транспонировании можно думать как о замене строк матрицы на столбцы и наоборот. Либо как об отражении элементов матрицы относительно главной диагонали:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}^T$$

Определение 1.6 (След матрицы). Следом квадратной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется сумма элементов, находящихся на главной диагонали $\{a_{ij} \mid i = j, i = 0 \dots n\}$:

$$\begin{cases} \text{Sp} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{Sp} : A \mapsto \sum_{i=1}^n a_{ii} \end{cases}$$

У следа есть несколько возможных обозначений. Ещё одно, например, $\text{Tr } A$.

1.2. Определитель матрицы

Об определителе можно думать как об особой числовой функции на множестве квадратных матриц, обозначаемой \det или $|\cdot|$

$$\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

Существует несколько эквивалентных способов определения \det : через свойства функции, конкретную формулу вычисления по элементам матрицы (4) при произвольном n . Мы пока опустим строгое определение \det и просто посмотрим, как его можно вычислять для квадратных матриц размерностей 2 и 3.

Определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Определитель третьего порядка. Способ вычисления “разложением по первой строке” (перебираем элементы первой строки; чередуем знаки начиная с плюса; домножаем на определитель матрицы, остающейся после вычёркивания строчки и столбца, где стоит текущий элемент первой строки):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad (2)$$

$$= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1$$

Но и при более высоких порядках (четыре и далее) можно использовать тот же алгоритм разложения по первой строке, сводя вычисление определителя порядка n к вычислению нескольких определителей порядка $n - 1$. Даже если мы ещё раз посмотрим на определитель второго порядка, то увидим, что он тоже может быть посчитан разложением по первой строке, если положить определитель матрицы размера 1×1 из одного элемента равным этому самому элементу:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot |d| - b \cdot |c| \xrightarrow{|x| \equiv x} ad - cb$$

Таким образом, мы уже фактически пришли к следующему варианту определить функцию \det :

Определение 1.7 (Определитель (рекурсивный вариант определения через разложение по первой строке)). Положим определитель матрицы из одного элемента равным этому самому элементу

$$\det(a) \equiv a$$

Пусть M_{ij} — определитель подматрицы матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, которая получается при вычёркивании i -ой строки и j -го столбца. Тогда

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{1j}(-1)^{1+j} M_{1j} \quad (3)$$

Определение 1.8 (Вырожденная матрица (возможный вариант определения)). Матрица A называется вырожденной, если её строки линейно зависимы.¹ В противном случае матрица A называется невырожденной.

Утверждение 1.1. Матрица A вырождена тогда и только тогда, когда $\det A = 0$.

“Другой взгляд” на определитель даёт следующая теорема (можно бы было взять утверждение этой теоремы в качестве определения детерминанта, но тогда рекурсивное определение до этого было бы “теоремой” — суть в том, что детерминант получается “одинаковый”, каким бы способом его ни считать).

Теорема 1.1 (Формула полного разложения определителя). Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Тогда определитель $\det A$ матрицы равен

$$\det A = \sum_{(j_1, \dots, j_n)} (-1)^{N(j_1, \dots, j_n)} a_{1j_1} \dots a_{nj_n} \quad (4)$$

где $N(j_1, \dots, j_n)$ — число нарушений порядка в перестановке чисел j_1, \dots, j_n .² Сумма в формуле берётся по всем перестановкам чисел $1, \dots, n$.³

Пример. Вспомним формулу вычисления определителя для матрицы размера 3:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1$$

Элементы в каждом слагаемом упорядочены по номеру столбца. Поэтому посмотрим на число беспорядков по строкам (неважно, как считать беспорядки, по строкам или по столбцам, потому что $\det A = \det A^T$). В первом слагаемом: $N(1, 2, 3) = 0$. Во втором: $N(1, 3, 2) = 1$ (тройка и двойка). В третьем: $N(2, 1, 3) = 1$ (двойка и единица). В четвёртом: $N(3, 1, 2) = 2$ (два беспорядка с тройкой и единицей и тройкой и двойкой). В пятом: $N(2, 3, 1) = 1+1 = 2$ (для двойки и единицы и для тройки и единицы). В шестом: $N(3, 2, 1) = 2 + 1 = 3$ (тройка-двойка, тройка-единица, двойка-единица).

1.2.1. Свойства

Теорема 1.2. Некоторые свойства определителя (матрицы в формулах ниже представляются столбцами $a_i \in \mathbb{R}^n$):

¹Можно сложить с не равными нулю одновременно коэффициентами так, чтобы получилась нулевая строка.

²Нарушение порядка — когда правее большего элемента стоит меньший элемент: $j_k > j_s$, но $k < s$.

³Например, перестановки чисел 1, 2, 3: (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).

1. *Линейность по столбцу (строке) — полилинейность:*

$$\begin{cases} \det(a_1, \dots, \underbrace{p+q}_{a_i}, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, p, \dots, a_n) + \det(a_1, \dots, q, \dots, a_n) \\ \det(a_1, \dots, \underbrace{\alpha p}_{a_i}, \dots, a_n) = \alpha \det(a_1, \dots, p, \dots, a_n) \end{cases} \quad (5)$$

2. *При перестановке двух столбцов (строк) матрицы её определитель меняет знак (косимметричность, антисимметричность по столбцам/строкам):*

$$\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = -\det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n) \quad (6)$$

3. *Если два столбца (две строки) матрицы совпадают, то её определитель равен нулю:*

$$\det(a_1, \dots, p, \dots, p, \dots, a_n) = 0 \quad (7)$$

Свойство (5) очевидным образом следует из формулы полного разложения (4). Свойство (7) несложно вывести из свойства (6). Свойство же (6)... тоже следует из (4). Поймём же, почему. Пусть между столбцами i и j было ещё $k \geq 0$ столбцов. Среди этих k столбцов было $k_{>i}$ тех, номера которых больше i , а также $k_{<i}$ с номерами меньше i (то есть $k_{<i} = k - k_{>i}$). Аналогично, было $k_{>j}$ и $k_{<j} = k - k_{>j}$ столбцов среди тех же k , номера которых были соответственно больше и меньше j . Число беспорядков до перестановки столбцов i и j было равно $k_{<i} + k_{>j}$ плюс, возможно, ещё один беспорядок, если $j < i$. После же интересующей нас перестановки столбцов беспорядков станет $k_{>i} + k_{<j} = 2k - (k_{<i} + k_{>j})$ и минус тот возможный беспорядок, который был при $j < i$. Несложно видеть, что именно беспорядок из-за пары i и j (или возникающий, или пропадающий) и меняет знак определителя при перемене мест столбцов i и j .

И ещё пара более частных утверждений, которые следуют из/являются подслучаями свойств выше:

- Общий множитель элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя:

$$\det(a_1, \dots, \alpha p, \dots, a_n) = \alpha \cdot \det(a_1, \dots, p, \dots, a_n) \quad (8)$$

- К любой строке (столбцу) матрицы можно прибавлять линейную комбинацию других строк (столбцов) — определитель при этом не изменится:

$$\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \alpha_j a_j + a_i, \dots, a_n) \quad (9)$$

- При вычислении определителя матрицы вида αA скаляр α можно выносить за знак \det следующим образом:

$$\det \alpha A = \alpha^n \det A \quad (10)$$

Пример. Определитель единичной матрицы:

$$\det E = 1^n = 1$$

Теорема 1.3. *Определитель транспонированной матрицы*

$$\det A^T = \det A$$

Теорема 1.4. *Определитель произведения двух квадратных матриц:*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B \quad (11)$$

1.3. Обратная матрица

Определение 1.9. Для невырожденной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *обратной* называется матрица $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, такая что

$$AB = BA = E$$

Обратная к матрице A обозначается как A^{-1} .

Замечание. На самом деле для того, чтобы B была обратной к A , достаточно выполнения лишь одного из условий $AB = E$ или $BA = E$ (и тогда второе будет выполнено автоматически). При желании можно это проверить :)

Утверждение 1.2. Определитель матрицы, обратной к невырожденной матрице

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

Доказательство. Из определения обратной матрицы:

$$AA^{-1} = E$$

Возьмём определитель от обеих частей равенства, и преобразуем левую часть, пользуясь свойством (11) определителя:

$$\det(AA^{-1}) = \det(E) \Leftrightarrow \det A \det A^{-1} = 1 \Leftrightarrow \det A^{-1} = 1/\det A$$

□

Оказывается, что для данной невырожденной матрицы обратную можно сразу найти по специальной формуле. Придём же к этой формуле, например, для матрицы размера 3×3 в общем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Будем искать обратную в виде:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Мы знаем, что, раз B обратная к A , то верно, например, следующее:

$$AB = E$$

Это выражение можно рассматривать как матричное уравнение для поиска B . Чему равносильно одно такое матричное уравнение? Девяти скалярным. Девять уравнений, девять неизвестных (составляющие B)... Получится решить? Может быть, но иметь дело с системой 9 на 9 “не очень хочется”...

Посмотрим ещё раз, внимательнее, что происходит в точке $AB = E$. Каждый элемент на позиции ij матрицы – результата произведения AB вычисляется с помощью i -ой строки A и j -го столбца B . Таким образом, элементы первого столбца B участвуют при “составлении” только первого столбца матрицы E . Аналогичная ситуация — и со всеми оставшимися столбцами (в нашем случае это, очевидно, второй и третий столбцы, а вообще, если бы матрица A была порядка n , то это бы были все столбцы вплоть до n -го).

Выходит, выражение $AB = E$ на самом деле приводит нас не просто к “какой-то” системе 9 на 9, а к системе, состоящей из трёх подсистем 3×3 ! Которые, стоит надеяться, мы уже сможем решить...

Рассмотрим такую подсистему для поиска первого столбца b_1 матрицы B :

$$Ab_1 = e_1$$

где e_1 означает первый столбец единичной матрицы E . Система в “развёрнутом виде”:

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = 0 \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} = 0 \end{cases}$$

Определитель этой системы есть просто определитель исходной матрицы $\det A$! Причём, так как A невырожденная, то $\det A \neq 0$. Поэтому систему можно решить методом Крамера:

$$b_{11} = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{1+1} M_{11}}{\det A}$$

$$b_{21} = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{1+2} M_{12}}{\det A}$$

$$b_{31} = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{1+3} M_{13}}{\det A}$$

Где при вычислении определителей пользовались разложением по “нужному” столбцу (тому, где всего одна единица). Также использовано обозначение M_{ij} для *дополнительного минора* элемента a_{ij} матрицы A (определитель подматрицы, получающейся из A вычёркиванием строки и столбца, где стоит a_{ij} , то есть вычёркиванием i -ой строки и j -го столбца).

Не сложно заметить закономерность, верную для всех элементов первого столбца B ($i = 1, 2, 3, j = 1$). А также и для всех столбцов B ($j = 1, 2, 3$). То есть получаем формулу для нахождения элементов обратной матрицы:

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{j+i} M_{ji}}{\det A} \quad (12)$$

Упражнение. Какие формулы для вычисления элементов b_{ij} получатся, если “отталкиваться” от соотношения $BA = E$?

2. Задачи

2.1. # 14.23(11)

Вычислить определитель порядка n :

$$\Delta_n = \det A_n$$

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.

После 100 грамм Можно “увидеть”, что суммы элементов матрицы A_n по строкам и по столбцам одинаковы...

Но в таком случае сразу понятно, что стоит попробовать сделать: прибавим к одной строке, например, к первой, все остальные. Получим строку из одинаковых элементов. Определитель при этом не изменится (9). Далее вынесем общий множитель элементов первой строки “за определитель” (8) — получим строку из единиц. И потом попытаемся “упростить” все остальные строки, используя эту первую.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix} &= (2(n-1) + 1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (2(n-1) + 1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} (2n-1) \end{aligned}$$

□

2.2. # 14.24(1)

Вычислить определитель порядка n (полезно получить рекуррентную формулу):

$$\Delta_n = \det A_n$$

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. По первой строчке, очевидно, раскладывать не стоит. Но по первому столбцу — вполне можно попробовать:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Первый из определителей справа уже “считается” (его самого можно разложить по первой строке, потом тот, который останется после него и т.д.). А второй, очевидно, “со-
всем как” исходный, только на порядок меньше. Итого, получаем формулу:

$$\Delta_n = 1 - \Delta_{n-1}$$

Но как теперь вычислить Δ_n ?.. Сразу из формулы это не совсем очевидно. Поэтому по-
смотрим на определители меньших порядков и попытаемся “увидеть” закономерность
(помня про полученную формулу):

$$\Delta_1 = |1| = 1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 = 1 - \Delta_1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 = 1 - \Delta_2$$

Кажется, теперь должно быть понятно, “что происходит”. “Прыжки” с единицы на
ноль и обратно. Таким образом, приходим к формуле (не рекуррентной) для определителя
порядка n :

$$\Delta_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 0 \pmod{2} \\ 1, & \text{если } n = 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Или так:

$$\Delta_n = \frac{1 - (-1)^n}{2}$$

А можно и так:

$$\Delta_n = \left| \sin \frac{n\pi}{2} \right|$$

Или даже так:

$$\Delta_n = 1 - D\left(\sqrt{2^{|2022-n|}}\right)$$

где $D(x)$ — функция Дирихле (“индикатор” множества рациональных чисел). □

2.3. # 14.24(7)

Вычислить определитель Вандермонда порядка n (полезно получить рекуррентную фор-
мулу):

$$\Delta_n = \det V_n$$

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Решение. Решим задачу несколькими способами.

Способ 1: “рассуждающий”.

Вспомним формулу полного разложения (4). В случае определителя Вандермонда она
примет вид:

$$\det V_n = \sum_{(j_1, \dots, j_n)} (-1)^{N(j_1, \dots, j_n)} 1 \cdot \lambda_{j_2}^1 \cdot \dots \cdot \lambda_{j_n}^{n-1} \quad (13)$$

Иными словами, сумма слагаемых, каждое из которых есть произведение элементов из разных строк и столбцов. А потому обязательно будет множитель 1 (элемент из первой строки), “какой-то λ ” в первой степени (вторая строка) “какой-то λ ” во второй и т.д. Суммарная степень всех лямбд в каждом из слагаемых одинакова и равна:

$$0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2}$$

Таким образом, на $\det V_n$ можно смотреть как на многочлен от лямбд $p(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ степени $n(n - 1)/2$.

Что ещё можно заметить “интересного”? Лямбды (n штук) — это как параметры, выбор которых определяет конкретное значение детерминанта. И если окажется так, что какая-то пара лямбд одинаковы (например, $\lambda_1 = \lambda_2$), то определитель в таком случае, по свойству (7), будет равен нулю! Сколько всего есть пар лямбд с разными номерами? Их всего

$$C_n^2 \equiv \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n - 2)!} = \frac{n(n - 1)}{2}$$

Получается, что определитель как многочлен от лямбд $\det V_n = p(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ должен быть кратен разностям $(\lambda_j - \lambda_i)$ при $j \neq i$:

$$p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \underbrace{(\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_{n-1} - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot (\lambda_n - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda_{n-1})}_{\prod_{j>i} (\lambda_j - \lambda_i)} \cdot q(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

где $q(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — какой-то другой многочлен от лямбд. Что можно сказать про этот многочлен? Произведение “скобок” $\prod_{j>i} (\lambda_j - \lambda_i)$ уже даёт многочлен степени $n(n - 1)/2$. Поэтому многочлен q не может быть ничем иным, кроме как константой $q(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = C \in \mathbb{R}$. Чему равна эта константа? Чтобы это понять, можно либо посмотреть на определители V_n при небольших n :

$$D_1 = \det V_1 = 1$$

$$D_2 = \det V_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot 1$$

(Уже “создаётся впечатление”, что $C = 1$. Хотя, возможно, C просто как-то не очевидно зависит от n ...)

Либо начать раскрывать скобки в выражении для $p(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, и посмотреть на член, получающийся при перемножении всех уменьшаемых:

$$p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = C \cdot \lambda_n^{n-1} \cdot \dots \cdot \lambda_3^2 \lambda_2 + \dots$$

Но ведь это произведение $\lambda_n^{n-1} \cdot \dots \cdot \lambda_3^2 \lambda_2$ — это ведь одно из слагаемых в формуле полного разложения (13)! Причём такое, в котором совсем нет беспорядков. Значит, $C = 1$. Итого, определитель Вандермонда порядка n :

$$D_n = \det V_n = \prod_{j>i} (\lambda_j - \lambda_i) \quad (14)$$

Способ 2: “догадавшийся и потом преобразующий”.

Попробуем “по-честному” вычислить D_n . Но перед тем, как вычислять, надо как-то упростить... Можно, например, попробовать занулить как можно больше элементов в

первом столбце (чтоб потом по нему разложить). Это можно сделать следующим образом. Будем из каждой строчки, начиная с последней и вплоть до второй, вычитать предыдущую, умноженную на λ_1 . Определитель не поменяется (9), но первый столбец станет “проще”:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \dots & \lambda_n - \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2^2 - \lambda_2 \lambda_1 & \lambda_3^2 - \lambda_3 \lambda_1 & \dots & \lambda_n^2 - \lambda_n \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda_2^{n-1} - \lambda_2^{n-2} \lambda_1 & \lambda_3^{n-1} - \lambda_3^{n-2} \lambda_1 & \dots & \lambda_n^{n-1} - \lambda_n^{n-2} \lambda_1 \end{vmatrix}$$

Теперь можно разложить по первому столбцу (упрощённому в результате преобразований) получившийся определитель, а потом вынести общий множитель из каждого столбца:

$$D_n = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_2^{n-2} & \lambda_3^{n-2} & \dots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Но ведь оставшийся определитель — он “почти как исходный”, только без λ_1 (и порядок на единицу меньше). Значит, его можно преобразовать точно так же, “исключив” в результате λ_2 . И так далее, до конца, пока не останется определитель два на два $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_{n-1} & \lambda_n \end{vmatrix}$. Очевидно, итоговая формула получается такая же, как раньше (14).

Способ 3: “взявший что-то от второго (некоторая догадка в начале) и от первого (рассуждения)”.

Считая все лямбды параметрами, заменим λ_n на λ (почему бы и нет). И рассмотрим следующий многочлен от λ :

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda^{n-1} \end{vmatrix}$$

Как и раньше, замечаем, что при $\lambda = \lambda_1$ получается ноль, при $\lambda = \lambda_2$ — тоже, и т.д. Значит, многочлен $p(\lambda)$ имеет корни в точках $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то есть представим как

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_{n-1}) \cdot q(\lambda)$$

где $q(\lambda)$ — какой-то другой многочлен. Какой? Мы ведь ещё точно знаем, что в точке λ_n многочлен p равен значению определителя D_n :

$$p(\lambda_n) = (\lambda_n - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \cdot q(\lambda_n) = D_n$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$D_n = \lambda_n^{n-1} q(\lambda_n) + \dots$$

где выделено слагаемое с λ_n в степени $n - 1$. На что оно умножается? Вспоминая формулу полного разложения (13), понимаем, что если собрать все слагаемые со множителем λ_n^{n-1} и вынести его за скобку, то в скобках останется ровно D_{n-1} ! То есть сумма всех возможных комбинаций произведений элементов по одному из каждой строчки и столбца, кроме последних строчки и столбца (где стоит как раз λ_n^{n-1}). Итого, получаем рекуррентную формулу:

$$D_n = (\lambda_n - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \cdot D_{n-1}$$

которая в результате “раскручивания” даёт то же, что получали ранее. □

2.4. # 15.11(7)

Вычислить матрицу в степени:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n$$

Решение.

Способ 1: “в лоб”.

Приведём лишь общий план вполне рабочего, но “не очень интересного” способа решения. Можно найти ответ для $n = 2$, $n = 3$. И увидеть некоторую “закономерность”. Которую далее по индукции можно будет строго обосновать.

Способ 2: “интересный”.

Матрица, которую просят возвести в степень — это матрица поворота. То есть в некоторой прямоугольной системе координат она задаёт поворот вокруг начала на угол α . Но возведение этой матрицы в степень n есть матрица преобразования, являющегося композицией n последовательных поворотов (1)! Таким образом, можно сразу выписать ответ:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$$

□

2.5. # 15.45(1)

Вычислить:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}^{-1}$$

Решение. Исходная матрица A , очевидно, невырожденная. И её определитель равен:

$$\det A = 3 \cdot 9 - 5 \cdot 5 = 2$$

Значит, обратная матрица B существует. Её можно найти, просто пользуясь формулами (12):

$$\begin{cases} b_{11} = \frac{9}{2}, & b_{12} = \frac{-5}{2} \\ b_{21} = \frac{-5}{2}, & b_{22} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Итого:

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Проверяя, убеждаемся, что B — в самом деле обратная к A :

$$AB = BA = E$$

□

2.6. # 15.48(1)

Проверить, справедливо ли тождество:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Решение. Можно, пользуясь формулами (12), вычислить обратные и сравнить поэлементно матрицу слева и справа.

А можно пойти от определения. Что значит, что $(A^{-1})^T$ — обратная для A^T ? (Ведь именно это по сути просят проверить.)

$$\begin{cases} A^T \cdot (A^{-1})^T \stackrel{?}{=} E \\ (A^{-1})^T \cdot A^T \stackrel{?}{=} E \end{cases}$$

Не сложно убедиться, что, да, так и есть. Значит, $(A^{-1})^T$ — обратная для A^T . □

2.7. # 15.48(6)

Проверить, справедливо ли тождество:

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$$

Решение. Кажется, что это просто не может быть верно. (Иначе, скорее всего, это бы уже обсудили при разговоре об обратной матрице.) Значит, стоит думать о том, какой бы контрпример привести. Но такой придумать не очень сложно. Например:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Хорошо, если всё-таки считать, что на вход (тождеству!) надо обязательно подавать такие матрицы, чтоб левая и правая части как минимум существовали, то можно взять, например:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

□

2.8. # 15.65(1)

Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Очевидно, матрица X состоит из 2 строк и 2 столбцов.

Можно бы было ввести обозначения для элементов матрицы X , переписать матричное уравнение в виде системы скалярных и решить (решить точно получится, причём единственным образом, потому что матрица системы невырождена). А можно поступить иначе.

Раз матрица – левый множитель невырождена, значит, для неё существует обратная. Домножим на неё слева обе части уравнения:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_E X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Упражнение. Что можно бы было сделать, чтоб найти X , если бы в уравнении матрица – известный множитель была вырожденной?

$$A_{2 \times 2} X = B_{2 \times 2}, \quad \det A = 0$$

□

3. Дополнение

3.1. “Время определить определитель ещё раз — Yes honey”

Есть ещё пара способов ввести определитель, которые основаны на *перечислении свойств, которыми должна обладать функция \det* .⁴ (Это всё даёт “тот же самый” определитель, что и рекурсивная формула (3), и формула полного разложения (4).)

Определение 3.1 (Вариант 1⁵). Функция $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ называется определителем (детерминантом) и обозначается \det , если

- Функция f является линейным однородным многочленом от элементов любой строки:

$$\begin{cases} f(A) = h_1 a_{i1} + \dots + h_n a_{in} \\ 1 \leq i \leq n \\ h_j = h_j(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

то есть коэффициенты в разложении по элементам строки не зависят от этой самой строки.

- Значение f на вырожденной матрице⁶ равно нулю 0.
- Значение f на единичной матрице $E_{n \times n}$ равно единице 1.

Определение 3.2 (Вариант 2⁷). Функция $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ называется определителем (детерминантом) и обозначается \det , если

- Функция f полилинейна по строкам матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (5).
- Функция f кососимметрична по строкам матрицы A (6).
- Значение f на единичной матрице $E_{n \times n}$ равно единице 1.

Определение 3.3 (Вариант 3⁸). Функция $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ называется определителем (детерминантом) и обозначается \det , если

- Функция f полилинейна по строкам матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (5).
- Значение f на матрице с двумя одинаковыми строками равно нулю 0 (7).
- Значение f на единичной матрице $E_{n \times n}$ равно единице 1.

⁴Да, про это уже было в дополнении к [самому первому семинару](#), но вспомним ещё раз в дополнении и здесь, раз снова тема определителя.

⁵Беклемишев Д. В. «Курс аналитической геометрии и линейной алгебры».

⁶Если определять вырожденную матрицу как такую, у которой строки линейно зависимы.

⁷<https://en.wikipedia.org/wiki/Determinant>.

⁸Hans Schneider, George Phillip Barker. «Matrices and Linear Algebra».

3.2. # 14.23(16) (“Решение, о котором никто не просил”)

Вычислить определитель порядка n :

$$\Delta_n = \det A_n$$

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение.

“Скетч” способа 1: “не хватающего звёзд с неба, но честного; рабоче-крестьянского”.

Знаем, как считать определитель треугольной матрицы. Но A_n не треугольная. Однако до треугольной ей не хватает “немного”. Так, видно, что смежные строки матрицы отличаются “не сильно”, и можно попытаться “поправить” матрицу, вычитая, например, с некоторым коэффициентом из данной строки предыдущую...

Способ 2: “где вначале всё стандартно, а потом следует не самый очевидный выкрутас и аналитическая геометрия отходит на второй план”.

В первой строчке всего два ненулевых элемента — попробуем же разложить по ней определитель:

$$\Delta_n = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Второй определитель справа можно разложить по первому столбцу (там всего одна единица и все нули):

$$\Delta_n = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Иными словами:

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \quad (15)$$

Получили некоторое рекуррентное соотношение. Его решение можно искать в следующем виде:

$$\Delta_n = C\lambda^n$$

где C — константа (ненулевая, иначе все Δ_n нули, что не так), а λ — корень характеристического уравнения, которое можно получить, подставив выражение для Δ_n в соотношение (15). Получим:

$$C\lambda^n = 2C\lambda^{n-1} - C\lambda^{n-2}$$

Откуда характеристическое уравнение:

$$\boxed{\lambda^2 = 2\lambda - 1} \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 1$$

Два совпавших корня. Значит, общее решение Δ_n надо искать в виде:

$$\Delta_n = (C_1 n + C_2) \lambda^n \xrightarrow{\lambda=1} C_1 n + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

(можно подставить в соотношение (15) и убедиться, что “работает”; но если бы корни характеристического уравнения были разные, то решение надо бы было искать в другом виде).

Чтобы найти константы, можно выписать *начальные условия*:

$$\begin{cases} \Delta_1 = |2| = 2 = C_1 + C_2 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 = 2C_1 + C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Таким образом,

$$\Delta_n = n + 1$$

□

3.3. # 15.45(2) (“Для всех, кроме потока И. А. Чубарова”)

Вычислить обратную для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Найдём обратную с помощью метода Гаусса. В основе метода лежит следующее понятие и связанные с ним “наблюдения”.

Определение 3.4. Элементарные преобразования строк матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

- умножение строки на число, отличное от нуля;
- прибавление к строке другой строки.

Утверждение 3.1. Каждое элементарное преобразование строк матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ можно задать в виде невырожденной матрицы $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$, которую надо умножить слева на A , чтобы провести преобразование. При этом матрица S не зависит от A .

Утверждение 3.2. “Более сложные” преобразования, которые сводятся к последовательности элементарных:

- перестановка строк;
- прибавление к строке другой строки, умноженной на число;
- прибавление к строке линейной комбинации других строк.

Утверждение 3.3. Если строки матрицы были линейно зависимы (независимы), то после элементарного преобразования строк они останутся линейно зависимы (независимы).

Утверждение 3.4. Для любой невырожденной матрицы A существует последовательность элементарных преобразований строк $\{S_i\}_{i=1}^N$, такая что она переводит матрицу A в единичную:

$$S_N \dots S_1 A = E$$

Вернёмся к решению задачи. Далее **фиолетовым** цветом будем выделять элемент в столбце, с помощью которого будем занулять другие элементы в том же столбце. Те, которые зануляем на данном шаге, будем отмечать **красным** цветом. Когда столбец “готов” (остался один ненулевой — фиолетовый), переходим к другому столбцу и снова выбираем ненулевой элемент для “зачищения столбца”, но *из строчек, откуда ещё не выбирали*. Сначала можно занулять все элементы ниже главной диагонали (*прямой ход* метода Гаусса), а потом — выше главной диагонали (*обратный ход* метода Гаусса).

$$\begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 \widetilde{(1) \leftrightarrow (3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \textcolor{violet}{-1} & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \textcolor{red}{0} & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \textcolor{red}{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 \widetilde{(3) = (3) + 2 \cdot (1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \\
 \widetilde{(2) = (2)/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcolor{violet}{1} & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & \textcolor{red}{-3} & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \\
 \widetilde{(3) = (3) + 3 \cdot (2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & \textcolor{red}{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \textcolor{red}{-1/2} & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \textcolor{violet}{1/2} & 1 & 3/2 & 2 \end{array} \right) \\
 \widetilde{\begin{array}{l} (1) = (1) - 2 \cdot (3) \\ (2) = (2) + (3) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & \textcolor{red}{-1} & 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & \textcolor{violet}{1} & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 3/2 & 2 \end{array} \right) \\
 \widetilde{\begin{array}{l} (1) = (1) + (2) \\ (3) = 2 \cdot (3) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \\
 \widetilde{(1) = -1 \cdot (1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Можно (стоит) проверить:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Почему преобразования строк у “сдвоенной” матрицы позволило найти A^{-1} ? Каждый шаг метода Гаусса можно рассматривать как умножение слева на некоторую невырожденную матрицу S_i , задающую соответствующее элементарное преобразование строк:

$$(A \mid E) \rightarrow (S_1 A \mid S_1 E) \rightarrow \dots \rightarrow (\overbrace{S_N \dots S_1 A}^E \mid \overbrace{S_N \dots S_1 E}^B)$$

где единичная матрица $E = S_N \dots S_1 A$ — то, что стремимся получить слева, справа же получается матрица $B = S_N \dots S_1 E = S_N \dots S_1$. Выходит, $E = BA$, что равносильно⁹ тому, что $B = A^{-1}$.

Найдём ещё интереса ради какую-нибудь S_i . Например, S_1 , которая задаёт перестановку строк. Правда, перестановка строк — не совсем элементарное преобразование. Разложим его сначала на элементарные.

Мы хотим задать преобразование перестановки строк (первой и третьей):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Это преобразование можно представить как композицию преобразований (над-под каждой стрелочкой обозначено элементарное преобразование и его матрица¹⁰):

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[\text{(3)=(3)+(1)}]{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[\text{(1)=(1)-(3)}]{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[\text{(3)=(3)+(1)}]{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[\text{(1)=-1·(1)}]{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

И в итоге, S_1 , задающая первую перестановку строк:

$$S_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \dots$$

□

⁹Можно показать, что при $BA = E$ обязательно выполняется также и $AB = E$.

¹⁰Матрица, которую можно получить, например, из единичной, проведя над её строками аналогичное преобразование.