# Семинар 3

Алексеев Василий

15 сентября 2021

## Содержание

# 1. Замена базиса

**Задача** (4.7)**.** *Есть два базиса на плоскости (которые заданы компонентами в каком-то третьем базисе). Первый:* $\boldsymbol{e}_1(2,3)$ *и* $\boldsymbol{e}_2(3,4)$*. Второй:* $\boldsymbol{e}'_1(1,-1)$ *и* $\boldsymbol{e}'_2(2,-3)$*.*

*Надо выразить координаты произвольного вектора* $\boldsymbol{a}$ *в базисе* $\boldsymbol{e}$ *по его координатам* $(\alpha'_1, \alpha'_2)$ *в базисе* $\boldsymbol{e}'$*.*

*Решение.* Обозначим векторы того “третьего” базиса (в котором заданы векторы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$) за $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$. Занесём в табличку известные координаты участвующих в задаче векторов в разных базисах (1).

| | $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ | $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ | $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$ |
|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{e}_1$ | $(2,3)$ | $(1,0)$ | |
| $\boldsymbol{e}_2$ | $(3,4)$ | $(0,1)$ | |
| $\boldsymbol{e}'_1$ | $(1,-1)$ | | $(1,0)$ |
| $\boldsymbol{e}'_2$ | $(2,-3)$ | | $(0,1)$ |
| $\boldsymbol{a}$ | | $(\alpha_1, \alpha_2)$ | $(\alpha'_1, \alpha'_2)$ |

Таблица 1: Координаты векторов (по вектора в строке) в разных базисах (в столбце — координаты векторов в одном базисе). В задаче надо найти такие координаты.

Теперь посмотрим на вектор $\boldsymbol{a}$ в разных базисах:

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \alpha'_1 \cdot \boldsymbol{e}'_1 + \alpha'_2 \cdot \boldsymbol{e}'_2$$

Чтобы найти $\alpha_1$ и $\alpha_2$, можно выразить все $\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{e}'_i$ через $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$:

$$\alpha_1 \cdot (2\boldsymbol{p} + 3\boldsymbol{q}) + \alpha_2 \cdot (3\boldsymbol{p} + 4\boldsymbol{q}) = \alpha'_1 \cdot (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) + \alpha'_2 \cdot (2\boldsymbol{p} - 3\boldsymbol{q})$$

Тогда после привидения получится, что

$$(2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha'_1 - 2\alpha'_2)\boldsymbol{p} + (3\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha'_1 + 3\alpha'_2)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$$

линейная комбинация векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ равна нулю. Но, так как они линейно независимые, отсюда можно заключить, что нулю равны коэффициенты при $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha'_1 - 2\alpha'_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha'_1 + 3\alpha'_2 = 0 \end{cases}$$

Решая полученную систему (например, с помощью правила Крамера), получаем:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -7\alpha'_1 - 17\alpha'_2 \\ \alpha_2 = 5\alpha'_1 + 12\alpha'_2 \end{cases}$$

□

Решённая задача — пример перехода от одного базиса к другому. Рассмотрим этот вопрос в более общем виде. Будем обозначать векторы базиса в виде строки. Например:

$$\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$$

для случая базиса во всём пространстве $\mathbb{R}^3$. Аналогично и для базисов на плоскости и на прямой (в $\mathbb{R}^2$ и в $\mathbb{R}$).

При заданном базисе $\boldsymbol{e}$ любой вектор $\boldsymbol{a}$ пространства однозначно определяется его компонентами в базисе:

$$\boldsymbol{a} = x_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + x_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + x_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \Rightarrow \boldsymbol{a} \leftrightarrow \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$$

поэтому, говоря о векторе — направленном отрезке, часто имеют в виду его компоненты в базисе (то есть понятия вектора как направленного отрезка и вектора как столбца из чисел при фиксированном базисе взаимозаменяемы).

В пространстве существует больше одного базиса: любая тройка некомпланарных векторов в $\mathbb{R}^3$ образует базис. Встаёт вопрос о том, как связаны компоненты одного и того же вектора в разных базисах.

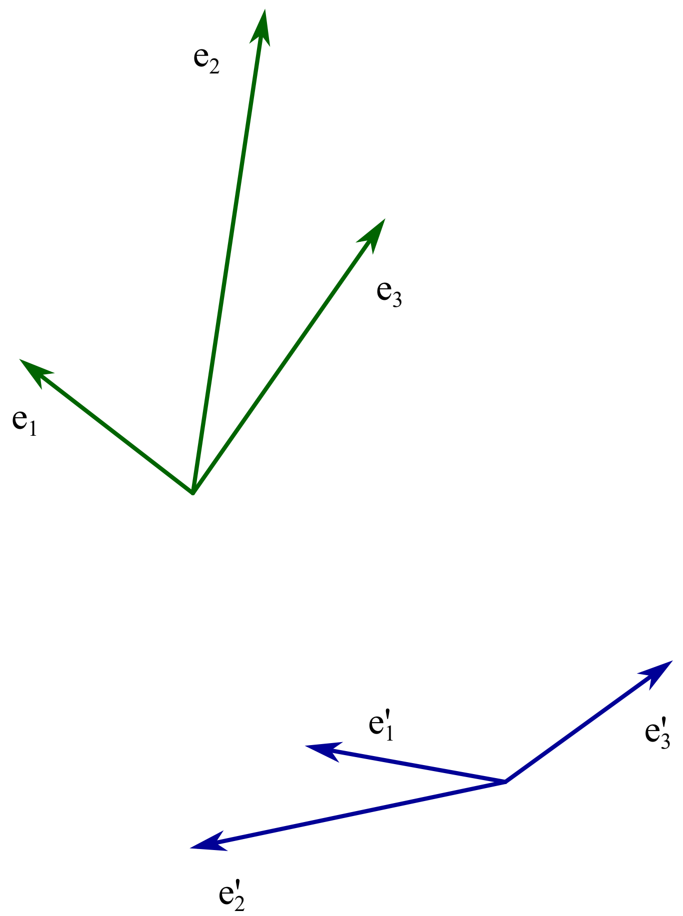


Рис. 1: Два разных базиса в пространстве.

Пусть есть два базиса: $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$ (1). Тогда векторы базиса $\boldsymbol{e}'$ можно разложить по $\boldsymbol{e}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = a_{11} \cdot \boldsymbol{e}_1 + a_{12} \cdot \boldsymbol{e}_2 + a_{13} \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 = a_{21} \cdot \boldsymbol{e}_1 + a_{22} \cdot \boldsymbol{e}_2 + a_{23} \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 = a_{31} \cdot \boldsymbol{e}_1 + a_{32} \cdot \boldsymbol{e}_2 + a_{33} \cdot \boldsymbol{e}_3 \end{cases} \tag{1}$$

Запись можно представить более компактно[1]:

$$\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S$$

[1] Под результатом умножения строки из векторов $\boldsymbol{e}$ на матрицу из чисел $S$ будем иметь в виду такую строку $\boldsymbol{e}'$ из векторов, где каждый элемент равен линейной комбинации векторов умножаемой строки $\boldsymbol{e}$ с коэффициентами, равными элементам соответственного столбца матрицы $S$. То есть по правилу умножения числовых матриц.

где $S$ называется *матрицей перехода* от базиса $\boldsymbol{e}$ ("старого") к базису $\boldsymbol{e}'$ ("новому"):

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

во введённых ранее обозначениях (1). Столбцы матрицы перехода $S$ — это координаты векторов нового базиса в старом базисе ("переход от $\boldsymbol{e}$ к $\boldsymbol{e}'$": зная векторы $\boldsymbol{e}$, надо получить векторы $\boldsymbol{e}'$).

Посмотрим теперь, как выражаются компоненты некоторого вектора $\boldsymbol{a}$ в одном базисе через его же компоненты, но в другом базисе. Имеем

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}'\boldsymbol{x}' \tag{2}$$

где $\boldsymbol{a}$ — вектор как направленный отрезок, $\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{x}_e$ — вектор-столбец, соответствующий $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{x}' \equiv \boldsymbol{x}_{e'}$ — вектор-столбец, соответствующий $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}'$.

Теперь воспользуемся тем, что нам известно представление базиса $\boldsymbol{e}'$ через вектора базиса $\boldsymbol{e}$:

$$\boldsymbol{e}'\boldsymbol{x}' = (\boldsymbol{e}S)\boldsymbol{x}' \overset{(2)}{=} \boldsymbol{e}\boldsymbol{x}$$

Так как умножение матриц ассоциативно, а также дистрибутивно относительно матричного сложения, мы можем перенести $\boldsymbol{e}\boldsymbol{x}$ влево и перегруппировать слагаемые:

$$\boldsymbol{e} \cdot (S\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$

Из линейной независимости системы векторов $\boldsymbol{e}$ получаем:

$$S\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = S\boldsymbol{x}'$$

Итак, в двух базисах компоненты векторов связаны так:

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S \\ \boldsymbol{x} = S\boldsymbol{x}' \end{cases}} \tag{3}$$

При этом, при переходе, наоборот, от базиса $\boldsymbol{e}'$ к базису $\boldsymbol{e}$ можно написать аналогичное соотношение, но уже с другой матрицей перехода, которую обозначим за $S'$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}'S' \\ \boldsymbol{x}' = S'\boldsymbol{x} \end{cases}$$

## 1.1. Поворот базиса

Рассмотрим отдельно преобразование поворота правого[2] ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ на плоскости на угол $\phi$ против часовой стрелки (2).

Имеем для компонент векторов $\boldsymbol{e}'$ в базисе $\boldsymbol{e}$[3]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1' = |\boldsymbol{e}_1'| \cdot \cos\phi \cdot \boldsymbol{e}_1 + |\boldsymbol{e}_1'| \cdot \sin\phi \cdot \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_2' = |\boldsymbol{e}_2'| \cdot \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \boldsymbol{e}_1 + |\boldsymbol{e}_2'| \cdot \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \boldsymbol{e}_2 \end{cases}$$

[2]Поворот от первого базисного вектора ко второму по наименьшему углу происходит против часовой стрелки.

[3]Угол именно $\phi + \frac{\pi}{2}$! чтобы при умножении на cos/sin получить скалярные проекции на направления базисных векторов.

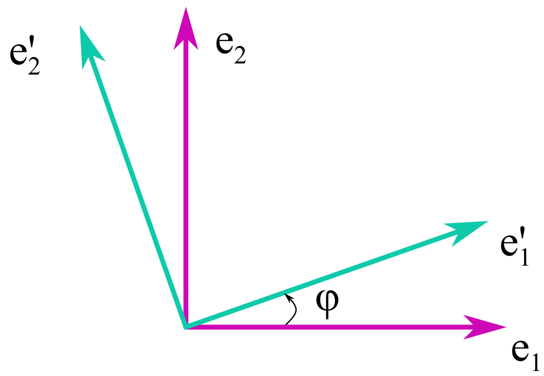


Рис. 2: Базис $\boldsymbol{e}'$ повёрнут на угол $\phi$ относительно базиса $\boldsymbol{e}$.

Так как модули векторов единичные:

$$\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}\begin{pmatrix} \cos\phi & \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\phi & \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

То есть матрица перехода:

$$S' = \begin{pmatrix} \cos\phi & \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\phi & \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Таким образом, получили матрицу, задающую поворот правого ортонормированного базиса на угол $\phi$ против часовой стрелки. Аналогично можно получить матрицу перехода, когда базис $\boldsymbol{e}'$ не только повёрнут относительно $\boldsymbol{e}$, но если второй вектор ещё отражён относительно первого (то есть базис $\boldsymbol{e}'$ левый). В этом случае при нахождении $\boldsymbol{e}'_2$ будет использоваться угол не $\phi + \dfrac{\pi}{2}$, а $\phi - \dfrac{\pi}{2}$.

## 2. Система координат + Замена

Имея базис в пространстве, можно описать любой вектор с помощью столбца из чисел — его координат в базисе. Но как описать просто точку? Ведь у неё нет ни “длины”, ни “направления”… Один из способов — зафиксировать некоторую точку $O$, и строить векторы с началом в $O$ и концом в интересующей точке пространства (*радиусы-векторы*). Тогда за описание точки можно принять координаты соответствующего ей радиуса-вектора (при выбранном базисе и выбранной точке $O$). Описанный способ задания точек называется *общей декартовой системой координат*[4] (3).

**Определение 2.1.** Общей декартовой системой координат называется совокупность точки $O$ (*начала системы координат*) и базиса: $(O; \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$

**Определение 2.2.** Прямоугольной декартовой системой координат называется такая общая декартова система координат, в которой базисные векторы перпендикулярны и по длине равны единице.

[4]Помимо декартовой, есть и другие системы координат. Например полярная, когда положение точки на плоскости определяется по расстоянию $r$ от начала координат $O$ и по углу $\phi$, которое направление из начала координат на точку образует с выбранным направлением $\boldsymbol{l}$: $\boldsymbol{a} \leftrightarrow (r, \phi)$.

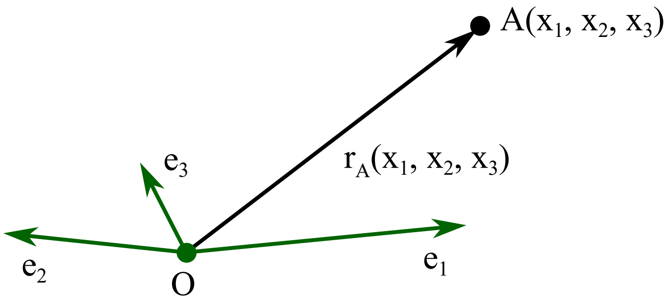


Рис. 3: Общая декартова система координат (совокупность точки и базиса) — способ описания точек в пространстве.

*Замечание.* При заданной системе координат $O; \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ каждой точке $A$ можно поставить в соответствие набор чисел — компонент радиуса-вектора точки в базисе $\overrightarrow{OA} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{e}_n$:

$$A \leftrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$$

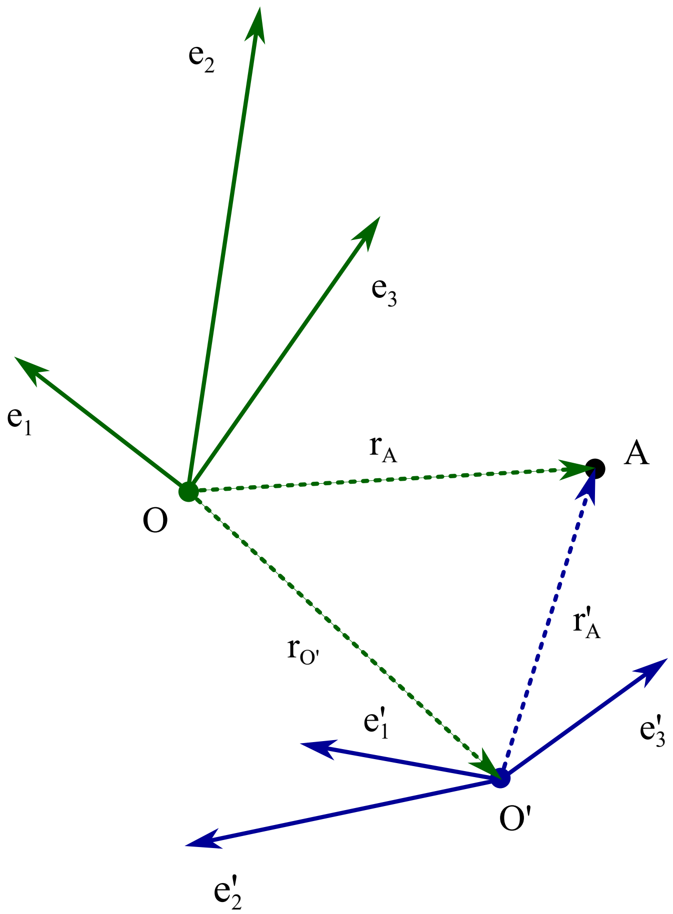


Рис. 4: Две системы координат в пространстве.

Аналогично с заменой базиса, может возникнуть вопрос, как меняются координаты точек при смене системы координат (4). Пусть есть две системы координат: “старая” $(O; \boldsymbol{e})$ и “новая” $(O'; \boldsymbol{e}')$. Пусть нам известно положение точки $A$ относительно новой системы координат. Также пусть нам известно, как выражаются базисные векторы новой системы $\boldsymbol{e}'$ через векторы старой $\boldsymbol{e}$ и как расположено начало новой системы $O'$ в старой системе. Очевидно, по этой информации мы должны уметь найти, как расположена точка $A$ в старой системе координат $(O; \boldsymbol{e})$...

Введём обозначения: пусть $\boldsymbol{r}_A \equiv \boldsymbol{r}_O(A)$ — радиус-вектор точки $A$ в системе $(O;\boldsymbol{e})$, $\boldsymbol{r}'_A \equiv \equiv \boldsymbol{r}_{O'}(A)$ — радиус-вектор точки $A$ в системе $(O';\boldsymbol{e}')$, и $\boldsymbol{r}_{O'} \equiv \boldsymbol{r}_O(O')$ — радиус-вектор, определяющий положение начала отсчёта $O'$ в системе $(O;\boldsymbol{e})$. Очевидно, что

$$\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_{O'} + \boldsymbol{r}'_A$$

В системе $(O';\boldsymbol{e}')$ известно координатное представление вектора $\boldsymbol{r}'_A$. Для вектора $\boldsymbol{r}_{O'}$ известны компоненты в базисе $(O;\boldsymbol{e})$. Как записать соотношение выше через вектор-столбцы компонент векторов в базисах? Для этого *надо все векторы представить в одном базисе*. Из соотношений (3) мы можем найти вектор-столбец радиуса-вектора $\boldsymbol{r}'_A$ в базисе $\boldsymbol{e}$ по его координатному столбцу $\boldsymbol{x}'_A$ в базисе $\boldsymbol{e}'$. Он будет равен $S\boldsymbol{x}'_A$. Итого, получаем соотношение для компонент радиусов-векторов точки в разных системах координат:

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S \\ \boldsymbol{x}_A = \boldsymbol{x}_{O'} + S\boldsymbol{x}'_A \end{cases}} \tag{4}$$

то есть для нахождения координат точки в “старой” системе по её координатам в “новой” системе координат надо знать, как выражаются векторы “новой” системы в базисе “старой” и как расположено начало координат “новой” системы в “старой”.

**Задача** (4.19)**.** *Треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (5). Точка $M$ — точка пересечения медиан грани $A_1B_1C_1$. Требуется, зная координаты точки $(x', y', z')$ в системе $A_1; \overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1M}$, найти её координаты $(x, y, z)$ в системе $A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}$*[5].

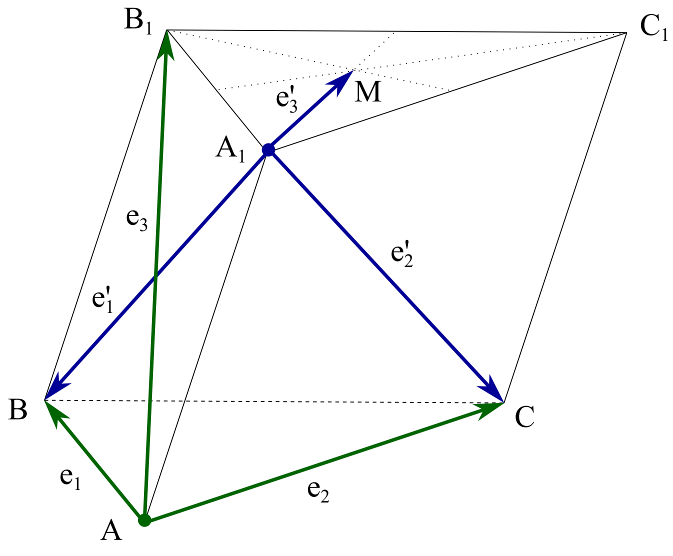


Рис. 5: Призма $ABCA_1B_1C_1$.

*Решение.* Что нам надо найти? Вспоминая формулы (3) или (4), получаем, что если векторы базиса связаны соотношением $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S$, то компоненты векторов связаны соотношением $\boldsymbol{x} = S\boldsymbol{x}'$ и координаты точек связаны соотношением $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{O'} + S\boldsymbol{x}'$. Таким образом, чтобы решить задачу, надо найти матрицу $S$, столбцы которой — компоненты

[5]Порядок базисных векторов важен!

базиса $\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1M}$ в базисе $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}$, и координаты начала $A_1$ в системе с началом $A$. Обозначим $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}$ за $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ и разложим $\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1M}$ по этой системе:

$$\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_1$$

$$\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_2$$

$$\overrightarrow{A_1M} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1C_1}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)$$

Итого,

$$(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Положение $A_1$ в системе $(A; \boldsymbol{e})$:

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} = \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_1$$

Поэтому связь между координатами точек в разных системах:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}' + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

# 3. Дополнение

## 3.1. Скалярное произведение

**Определение 3.1.** Скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ определяется следующим образом:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \equiv |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi \tag{5}$$

где $|\boldsymbol{a}|$ и $|\boldsymbol{b}|$ — модули векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а $\phi$ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (не превосходящий $\pi$). В случае, если хотя бы один из пары векторов нулевой, скалярное произведение этих векторов полагается равным нулю.

Отметим несколько свойств скалярного произведения:

- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ — симметричность
- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|^2$ — скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины
- О равенстве нулю скалярного произведения:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = 0 \text{ или } \boldsymbol{b} = 0 \text{ или } \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$$

- Линейность по первому аргументу:

$$(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \beta(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

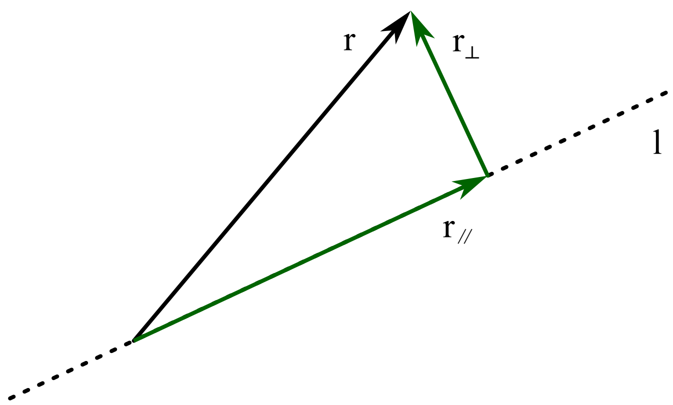


Рис. 6: Векторная проекция вектора $\boldsymbol{r}$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{l}$.

Первые три свойства следуют из определения. Докажем последнее свойство.

Начнём с того, что при заданном направлении $\boldsymbol{l}$ любой вектор раскладывается в сумму двух (6):

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{\parallel} + \boldsymbol{r}_{\perp}$$

где $\boldsymbol{r}_{\parallel}$ — вектор, параллельный $\boldsymbol{l}$, и $\boldsymbol{r}_{\perp}$ — вектор, перпендикулярный $\boldsymbol{l}$. Компонента $\boldsymbol{r}_{\parallel}$ называется *ортогональной векторной проекцией* вектора $\boldsymbol{r}$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{l}$, и может обозначаться так:

$$\pi_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{r}_{\parallel}$$

Кроме векторной проекции, есть ещё понятие скалярное проекции вектора $\boldsymbol{r}$ на направление вектора $\boldsymbol{l}$:

$$\pi_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{r}) \equiv |\boldsymbol{r}_{\parallel}| \cdot \begin{cases} +1 & \text{если } \boldsymbol{r}_{\parallel} \upuparrows \boldsymbol{l} \\ -1 & \text{если } \boldsymbol{r}_{\parallel} \updownarrows \boldsymbol{l} \end{cases}$$

Будем обозначать векторную и скалярную проекции одинаково. Но из контекста будет понятно, какая имеется в виду.

Спроецируем теперь вектор $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{c}$:

$$\pi_{\boldsymbol{c}}(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = |\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi$$

где $\pi_{\boldsymbol{c}}(\cdot)$ — скалярная проекция на направление вектора $\boldsymbol{c}$, $\phi$ — угол между вектором $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ и вектором $\boldsymbol{c}$. Но проекция вектора, являющегося суммой нескольких векторов, равна сумме проекций этих векторов[6]:

$$\pi_{\boldsymbol{c}}(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = \pi_{\boldsymbol{c}}(\alpha\boldsymbol{a}) + \pi_{\boldsymbol{c}}(\beta\boldsymbol{b})$$

поэтому

$$|\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi = |\alpha\boldsymbol{a}| \cdot \cos\phi_1 + |\beta\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi_2$$

где $\phi_1$ и $\phi_2$ — углы, которые образуют векторы $\alpha\boldsymbol{a}$ и $\beta\boldsymbol{b}$ с вектором $\boldsymbol{c}$. Умножая обе части последнего равенства на модуль вектора $\boldsymbol{c}$, получаем то, что хотели доказать (при этом числовые множители можно вынести за знак модуля):

$$(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \beta(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

□

[6]В силу линейности скалярного произведения.

**Задача** (2.21). *Длины базисных векторов* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ *равны соответственно* 3, $\sqrt{2}$ *и* 4. *Углы между векторами* $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \angle(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 45°$, $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = 60°$.

*Надо найти длины сторон и углы параллелограмма, построенного на векторах с координатами* $(1, -3, 0)$ *и* $(-1, 2, 1)$ *в указанном базисе.*

*Решение.* Обозначим данные нам векторы за $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = (1, -3, 0) \\ \boldsymbol{b} = (-1, 2, 1) \end{cases}$$

Базис не ортонормированный, поэтому скалярные произведения надо будет считать "по-честному".

Модуль вектора $\boldsymbol{a}$:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \sqrt{(\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2)} = \sqrt{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) - 6(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + 9(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)} = \sqrt{9 - 18 + 18} = 3$$

Аналогично для вектора $\boldsymbol{b}$:

$$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})} = \sqrt{(-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)(-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)} = \ldots = 5$$

Косинус угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} = \frac{(\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2) \cdot (-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)}{3 \cdot 5} = \ldots = -\frac{12}{15} = -\frac{4}{5}$$

И острый угол параллелограмма можно найти как $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$. □

В случае же **ортонормированного** базиса формулы с применением скалярных произведений упрощаются:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

$$\cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}$$

## 3.2. Ещё пара задач про несколько систем координат

**Задача** (4.23). *Пусть* $(x, y)$ *— координаты точки в некоторой прямоугольной системе координат* $(O; \boldsymbol{e})$, *а* $(x', y')$ *— координаты той же точки в некоторой другой системе координат* $(O'; \boldsymbol{e}')$. *При этом*

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{10} \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{20} \end{cases}$$

*При каком необходимом и достаточном условии вторая система координат* $(O'; \boldsymbol{e}')$ *также будет прямоугольной?*

*Решение.* Итак, если переписать связь между координатами точки в разных системах координат в матричном виде

$$\boldsymbol{x} = S\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}_{O'}$$

где

$$\begin{cases} S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{x}_{O'} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Тогда связь между базисами

$$\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S$$

$$(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2') = \begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 & a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix}$$

То, что $\boldsymbol{e}$ прямоугольный, означает, что

$$\begin{cases} (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) = 1 \\ (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 0, \ i \neq j \end{cases}$$

Выпишем аналогичные условия для базиса $\boldsymbol{e}'$:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_1') = a_{11}^2\boldsymbol{e}_1^2 + a_{21}^2\boldsymbol{e}_2^2 = 1 \\ (\boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_2') = a_{12}^2\boldsymbol{e}_1^2 + a_{22}^2\boldsymbol{e}_2^2 = 1 \\ (\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2') = a_{11}a_{12}\boldsymbol{e}_1^2 + a_{21}a_{22}\boldsymbol{e}_2^2 = 0 \end{cases}$$

И в итоге:

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases}$$

Можно заметить, что матрицы $S$ вида

$$S = \begin{pmatrix} \cos\phi & \mp\sin\phi \\ \sin\phi & \pm\cos\phi \end{pmatrix}$$

удовлетворяют полученным соотношениям. Действительно, так как базисы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$ оба прямоугольные, то один переводится в другой с помощью поворота или отражения[7]. □

**Задача** (4.30)**.** *Пусть $(O; \boldsymbol{e})$ и $(O'; \boldsymbol{e}')$ — две прямоугольные системы координат в пространстве $\mathbb{R}^3$. При этом точки $O$ и $O'$ различны, а концы векторов $\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{e}_i'$, отложенных из точек $O$ и $O'$ соответственно, совпадают ($i = 1, 2, 3$). Найти координаты точки $(x, y, z)$ в первой системе, зная её координаты во второй системе $(x', y', z')$.*

*Решение.* Условие о том, что концы базисных векторов совпадают (при условии, что векторы отложены из начал систем координат), можно записать так (7)

$$\boldsymbol{e}_i = \overrightarrow{OO'} + \boldsymbol{e}_i'$$

[7]По знаку определителя матрицы $S$ можно сказать о том, какое именно преобразование связывает два базиса: только поворот (при котором направление поворота от $\boldsymbol{e}_1'$ к $\boldsymbol{e}_2'$ по наименьшему углу совпадает с направлением поворота по наименьшему углу от $\boldsymbol{e}_1$ к $\boldsymbol{e}_2$) или ещё и отражение одного базисного вектора относительно другого (когда меняется *класс базиса*).

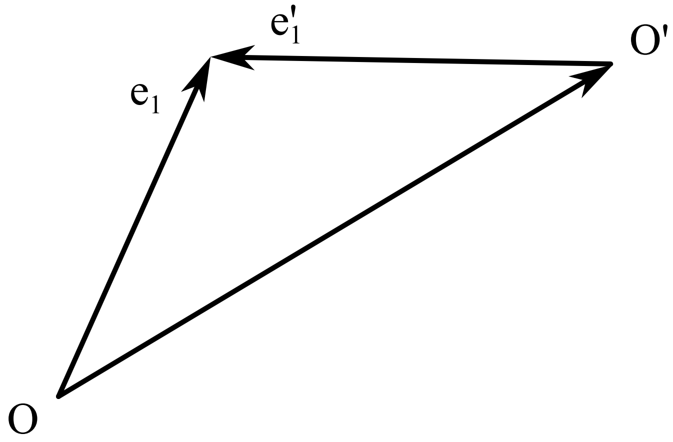


Рис. 7: Концы соответственных базисных векторов, отложенных от соответствующих начал координат, совпадают.

Нужно найти преобразование

$$\boldsymbol{x} = S\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}_{O'}$$

В то же время

$$\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S$$

Поэтому матрицу $S$ можно записать так

$$S = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \overrightarrow{OO'}_{\boldsymbol{e}} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \overrightarrow{OO'}_{\boldsymbol{e}} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \overrightarrow{OO'}_{\boldsymbol{e}} \right)$$

где $\overrightarrow{OO'}_{\boldsymbol{e}}$ — компоненты вектора $\overrightarrow{OO'}$ в базисе $\boldsymbol{e}$ (то же самое, что и $\boldsymbol{x}_{O'}$ в формуле, связывающей координаты точек).

Получается, осталось лишь найти $\overrightarrow{OO'}$ в базисе $\boldsymbol{e}$. Это можно сделать, потому что мы учли ещё не всю информацию о взаимном расположении систем координат. На самом деле тот факт, что обе системы координат прямоугольные и концы соответственных векторов, отложенных из начал соответствующих систем координат, совпадают, означает, что у нас есть “два поставленных друг на друга прямоугольных тетраэдра” (8).

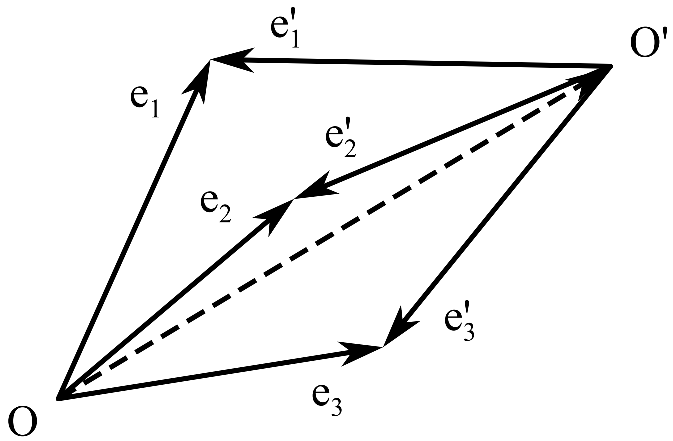


Рис. 8: Базисы, отложенные от соответствующих начал координат — прямоугольные тетраэдры.

Поэтому вектор $\overrightarrow{OO'}$ можно найти как

$$\overrightarrow{OO'} = 2 \cdot \left( \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_3 \right)$$

(так как проекция точки пересечения $OO'$ с плоскостью концов базисных векторов на грани векторов $\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j$ совпадает с точкой пересечения медиан треугольников соответствующих граней[8]).

Тогда матрица $S$ равна

$$\begin{aligned}
S &= \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix}1/3\\-2/3\\-2/3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-2/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-2/3\\-2/3\\1/3\end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix}1/3 & -2/3 & -2/3\\ -2/3 & 1/3 & -2/3\\ -2/3 & -2/3 & 1/3\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6}$$

□

[8]Точка $P$ пересечения $OO'$ с плоскостью концов базисных векторов $E_1E_2E_3$ — очевидно, точка пересечения медиан $\triangle E_1E_2E_3$. То есть его центр масс. Если "двигать" одну из вершин $\triangle E_1E_2E_3$ по нормали до пересечения с гранью тетраэдра, скажем, двигать $E_3$ по нормали к плоскости $OE_1E_2$, то она окажется вершиной $O$ при прямом угле в $\triangle OE_1E_2$, а $P$ перейдёт в центр масс прямоугольного треугольника $OE_1E_2$. Но положение проекции $P$ на грань $OE_1E_2$ не менялось при сдвиге вершины $E_3$ по нормали к $OE_1E_2$.