

Семинар 3

Алексеев Василий

15 + 21 сентября 2020

Содержание

1	Замена базиса и системы координат	1
2	Скалярное произведение	4

1. Замена базиса и системы координат

Будем обозначать векторы базиса в виде строки:

$$e = (e_1, e_2, e_3)$$

для случая базиса в \mathbb{R}^3 . Аналогично и для базисов в \mathbb{R}^2 , \mathbb{R} .

При заданном базисе e любой вектор пространства x однозначно определяется его компонентами в базисе:

$$x = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3 \Rightarrow x \leftrightarrow (x_1, x_2, x_3)^T$$

поэтому, говоря о векторе, часто имеют в виду его компоненты в базисе (то понятия вектора как направленного отрезка и вектора как столбца из чисел взаимозаменяемы). Но это при фиксированном базисе.

В пространстве существует больше одного базиса: любая тройка некомпланарных векторов в \mathbb{R}^3 образует базис. Встаёт вопрос о том, как связаны компоненты одного и того же вектора в разных базисах¹

Пусть есть два базиса: e и e' . Тогда векторы любого базиса можно разложить по системе векторов другого базиса. Разложим, например, векторы e по e' :

$$\begin{cases} e_1 = a_{11} \cdot e'_1 + a_{12} \cdot e'_2 + a_{13} \cdot e'_3 \\ e_2 = a_{21} \cdot e'_1 + a_{22} \cdot e'_2 + a_{23} \cdot e'_3 \\ e_3 = a_{31} \cdot e'_1 + a_{32} \cdot e'_2 + a_{33} \cdot e'_3 \end{cases} \quad (1)$$

Запись можно представить более компактно²:

$$e = e' S$$

где S называется *матрицей перехода* от базиса e' к базису e :

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

во введённых ранее обозначениях (1).

Посмотрим теперь, как выражаются компоненты некоторого вектора x в одном базисе через его же компоненты, но в другом базисе. Имеем

$$x = e x_e = e' x_{e'} \quad (2)$$

где x — вектор как направленный отрезок, x_e — вектор-столбец, соответствующий x в базисе e , $x_{e'}$ — вектор-столбец, соответствующий x' в базисе e' .

Теперь воспользуемся тем, что нам известно представление базиса e через вектора базиса e' :

$$e x_e = (e' S) x_e \stackrel{(2)}{=} e' x_{e'}$$

¹В приложениях бывает нужно переводить координаты радиусов-векторов точек из одной системы координат в другую.

²Под результатом умножения строки из векторов e' на матрицу из чисел S будем иметь в виду такую строку e из векторов, где каждый элемент равен линейной комбинации векторов умножаемой строки e' с коэффициентами, равными элементам соответственного столбца матрицы S . То есть по правилу умножения числовых матриц.

Так как умножение матриц ассоциативно, а также дистрибутивно относительно матричного сложения, мы можем перенести $e'x_{e'}$ влево и перегруппировать слагаемые:

$$e' \cdot (Sx_e - x_{e'}) = 0$$

Из линейной независимости системы векторов e' получаем:

$$Sx_e - x_{e'} = 0 \Leftrightarrow x_{e'} = Sx_e$$

Итак, в двух базисах компоненты векторов связаны так:

$$\boxed{\begin{cases} e = e'S \\ x_{e'} = Sx_e \end{cases}} \quad (3)$$

При этом, при переходе, наоборот, от базиса e к базису e' можно написать аналогичное соотношение, но уже с другой матрицей перехода, которую обозначим за S' :

$$\begin{cases} e' = eS' \\ x_e = S'x_{e'} \end{cases}$$

Последний вопрос: как изменяются радиусы-векторы точек при смене системы координат? Очевидно,

$$r_O(A) = r_O(O') + r_{O'}(A)$$

где $r_O(A)$ — радиус-вектор точки A в системе $O; e$, $r_{O'}(A)$ — радиус-вектор точки A в системе $O'; e'$, и $r_O(O')$ — радиус-вектор, определяющий положение начала отсчёта O' в системе $O; e$. В системе $O'; e'$ известно координатное представление вектора $r_{O'}(A)$. Для других же двух векторов $r_O(A)$ и $r_O(O')$ известны компоненты в базисе $O; e$. Как записать соотношение выше через вектор-столбцы компонент векторов в базисах? Для этого надо все векторы представить в одном базисе. Из соотношения (3) мы можем выразить вектор $r_{O'}(A)$ в базисе e :

$$r_{O'}(A) = S'x_{O'}(A)$$

где $x_{O'}(A)$ — компоненты радиус-вектора точки A в $O'; e'$ и $S'x_{O'}(A)$ — компоненты того же вектора в системе $O; e$. Итого, получаем соотношение для компонент радиусов-векторов точки в разных системах координат:

$$\boxed{\begin{cases} e' = eS' \\ x_O(A) = x_O(O') + S'x_{O'}(A) \end{cases}} \quad (4)$$

то есть для нахождения координат точки в одной системе по её координатам в другой системе координат надо знать связь между векторами базисов и положение начала координат одной системы относительно другой.

Задача (4.5). *Есть две системы координат: $O; e$ и $O'; e'$. Координаты произвольной точки в первой системе обозначаются за (x, y) , координаты той же точки, но во второй системе координат — (x', y') . Известна связь между (x, y) и (x', y') :*

$$\begin{cases} x = 2x' - y' + 5 \\ y = 3x' + y' + 2 \end{cases}$$

Требуется найти

- Выражение (x', y') через (x, y) .
- Координаты точки O и компоненты векторов e_1, e_2 в системе $O'; e'$.
- Координаты точки O' и компоненты векторов e'_1, e'_2 в системе $O; e$.

Решение. Перепишем связь между координатами точки в разных системах в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}^{S'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Перепишем как

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 5 \\ y - 2 \end{pmatrix}$$

И решим получившуюся систему относительно (x', y') с помощью метода Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$$

$$\Delta_{x'} = \begin{vmatrix} x - 5 & -1 \\ y - 2 & 1 \end{vmatrix} = x + y - 7$$

$$\Delta_{y'} = \begin{vmatrix} 2 & x - 5 \\ 3 & y - 2 \end{vmatrix} = -3x + 2y + 11$$

И сами координаты:

$$x' = \frac{\Delta_{x'}}{\Delta} = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y - \frac{7}{5}$$

$$y' = \frac{\Delta_{y'}}{\Delta} = -\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{11}{5}$$

Или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ -3/5 & 2/5 \end{pmatrix}}^S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7/5 \\ 11/5 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Вспоминая (4) или просто подставляя нулевые векторы в соотношения для координат, получаем положения начал отсчёта:

- Нулевой вектор в (5) $\Rightarrow x_O(O') = (5, 2)^T$
- Нулевой вектор в (6) $\Rightarrow x_{O'}(O) = \left(-\frac{7}{5}, \frac{11}{5}\right)^T$

Вспоминая, что столбцы матриц S и S' есть компоненты векторов одного базиса в другом, или просто умножая матрицы S и S' на векторы $(1, 0)^T$ и $(0, 1)^T$, получаем компоненты одних базисных векторов в другом базисе:

- Столбцы S ($e = e' S$)

$$\Rightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{5}e'_1 - \frac{3}{5}e'_2 \\ e_2 = \frac{1}{5}e'_1 + \frac{2}{5}e'_2 \end{cases}$$

- Столбцы S' ($e' = eS'$)

$$\Rightarrow \begin{cases} e'_1 = 2e_1 + 3e_2 \\ e'_2 = -e_1 + e_2 \end{cases}$$

□

Задача (4.19). Треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точка M — точка пересечения медиан грани $A_1B_1C_1$. Требуется, зная координаты точки x', y', z' в системе $A_1; \overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1M}$, найти её координаты (x, y, z) в системе $A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}$.

Решение. Что нам надо найти? Вспоминая формулы (3) или (4), получаем, что если векторы базиса связаны соотношением $e' = eS'$, то компоненты векторов связаны соотношением $x = S'x'$ и координаты точек связаны соотношением $x_O = x_O(O') + S'x_{O'}$. Таким образом, чтобы решить задачу, надо найти матрицу S' , столбцы которой — компоненты базиса $\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1M}$ в $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}$ и координаты начала отсчёта A_1 в системе с началом отсчёта A .

Базисные векторы упорядочены. Разложим их по порядку:

$$\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} = 2e_1 - e_3$$

$$\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AC} = e_1 + e_2 - e_3$$

$$\overrightarrow{A_1M} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1C_1}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(e_1 + e_2)$$

Итого,

$$(e'_1, e'_2, e'_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Положение A_1 в системе $A; e$:

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} = -e_1 + e_3$$

Поэтому связь между координатами точек в разных системах:

$$x = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x' + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

2. Скалярное произведение

Определение 2.1. Скалярное произведение (a, b) ненулевых векторов a и b определяется следующим образом:

$$(a, b) \equiv |a| \cdot |b| \cdot \cos \phi \quad (7)$$

где $|a|$ и $|b|$ — модули векторов a и b , а ϕ — угол между векторами a и b (не превосходящий π). В случае, если хотя бы один из пары векторов нулевой, скалярное произведение этих векторов полагается равным нулю.

Отметим несколько свойств скалярного произведения:

- $(a, b) = (b, a)$ — симметричность

- $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2$ — скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины
- О равенстве нулю скалярного произведения:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = 0 \text{ или } \mathbf{b} = 0 \text{ или } \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$$

- Линейность по первому аргументу:

$$(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

Первые три свойства следуют из определения. Докажем последнее свойство. Начнём с того, что при заданном направлении l любой вектор раскладывается в сумму двух:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$$

где \mathbf{r}_{\parallel} — вектор, параллельный l , и \mathbf{r}_{\perp} — вектор, перпендикулярный l . Компонента \mathbf{r}_{\parallel} называется *ортогональной векторной проекцией* вектора \mathbf{r} на направление, определяемое вектором l , и может обозначаться так:

$$\pi_l(\mathbf{r}) = \mathbf{r}_{\parallel}$$

Спроецируем теперь вектор $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$ на направление, определяемое вектором \mathbf{c} :

$$\pi_c(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = |\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}| \cdot \cos \phi$$

где $\pi_c(\cdot)$ — скалярная проекция на направление вектора \mathbf{c} , ϕ — угол между вектором $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$ и вектором \mathbf{c} . Но проекция вектора, являющегося суммой нескольких векторов, равна сумме проекций этих векторов:

$$\pi_c(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = \pi_c(\alpha \mathbf{a}) + \pi_c(\beta \mathbf{b})$$

поэтому

$$|\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}| \cdot \cos \phi = |\alpha \mathbf{a}| \cdot \cos \phi_1 + |\beta \mathbf{b}| \cdot \cos \phi_2$$

где ϕ_1 и ϕ_2 — углы, которые образуют векторы $\alpha \mathbf{a}$ и $\beta \mathbf{b}$ с вектором \mathbf{c} . Умножая обе части последнего равенства на модуль вектора \mathbf{c} , получаем то, что хотели доказать (при этом числовые множители можно вынести за знак модуля):

$$(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

□

Задача (2.21). Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ равны соответственно 3, $\sqrt{2}$ и 4. Углы между векторами $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 45^\circ$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 60^\circ$.

Надо найти длины сторон и углы параллелограмма, построенного на векторах с координатами $(1, -3, 0)$ и $(-1, 2, 1)$ в указанном базисе.

Решение. Обозначим данные нам векторы за \mathbf{a} и \mathbf{b} :

$$\begin{cases} \mathbf{a} = (1, -3, 0) \\ \mathbf{b} = (-1, 2, 1) \end{cases}$$

Базис не ортонормированный, поэтому скалярные произведения надо будет считать “по-честному”.

Модули вектора \mathbf{a} :

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = \sqrt{(e_1 - 3e_2)(e_1 - 3e_2)} = \sqrt{(e_1, e_1) - 6(e_1, e_2) + 9(e_2, e_2)} = \sqrt{9 - 18 + 18} = 3$$

Аналогично для вектора \mathbf{b} :

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{(\mathbf{b}, \mathbf{b})} = \sqrt{(-e_1 + 2e_2 + e_3)(-e_1 + 2e_2 + e_3)} = \dots = 5$$

Косинус угла между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} :

$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{(e_1 - 3e_2) \cdot (-e_1 + 2e_2 + e_3)}{3 \cdot 5} = \dots = -\frac{12}{15} = -\frac{4}{5}$$

И острый угол параллелограмма можно найти как $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$. □

В случае же **ортонормированного** базиса формулы с применением скалярных произведений упрощаются:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}}$$

Задача (2.24). Даны два вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} , причём $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Чему равна ортогональная проекция \mathbf{b} на направление, определяемое вектором \mathbf{a} ?

Решение.

$$\pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = |\mathbf{b}| \cos \angle(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

где левый множитель есть скалярная проекция вектора \mathbf{b} на направление \mathbf{a} , а правый — единичный вектор в направлении \mathbf{a} . Выражение можно записать по-другому, если домножить числитель и знаменатель на $|\mathbf{a}|$:

$$\pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a}$$

□