Семинар 12

Алексеев Василий

28 апреля + 2 мая 2023

Содержание

Некоторые “договорённости” (предварительные уточнения):

- *Жирным шрифтом обозначаются как векторы линейного пространства, так и их координатные столбцы в выбранном базисе. При этом и векторы, и их координатные столбцы обозначаются, как правило, одинаковыми буквами. Например,* $\boldsymbol{x} \in X$ *(вектор) и* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\dim X}$ *(его координатный столбец). Таким образом, смысл зависит от контекста* ¯_(ツ)_/¯

- *Билинейная функция называется именно “билинейной функцией”. Хотя общепринятым синонимом является также термин “билинейная форма”. Квадратичная же функция иногда в конспекте именуется и “квадратичной формой” (общепринятый синоним), и даже просто “формой” (немного неряшливое короткое обозначение, которое, однако, можно считать корректным, но только в рамках конспекта — неопределённости возникнуть не должно, потому что билинейная функция “формой” именоваться не будет).*

1. Inn + Li = Bili (Diag E2)

1.1. Карта диагонализаций

Вспомним кратко рассмотренные ранее “сюжеты о диагонализации” (1). Распишем тезисно о каждом основные моменты: “где”, “что”, “когда” и “как”.

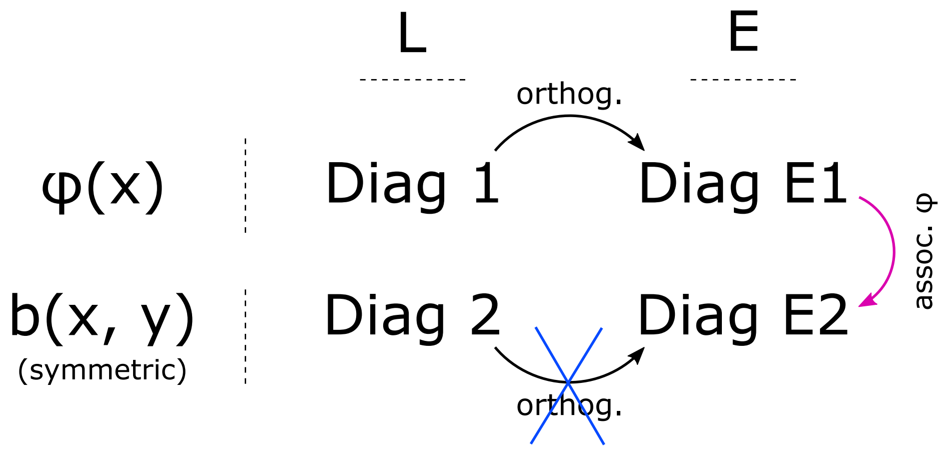

Рис. 1: “Карта диагонализаций” в виде таблицы. По строкам — “что” (линейное преобразование или симметричная билинейная функция), по столбцам — “где” (“просто” линейное пространство или евклидово). В ячейках — заголовки соответствующих конспектов. *Diag 1*, *Diag 2*, *Diag E1* — пройденные, *Diag E2* — текущий. Подписи стрелок: *orthog.* означает “orthogonalization” (ортогонализация системы векторов по Граму – Шмидту), *assoc. ϕ* означает “associated ϕ” (присоединённое преобразование — подробнее о нём будет далее в конспекте).

Diag 1. Линейное пространство $\mathscr{L}$, в нём выбран базис $e = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. Линейное преобразование $\phi(\cdot)$ с матрицей A в базисе e. *Если* найдётся базис $e' = eS$ из собственных векторов преобразования $\phi(\cdot)$, то матрица A' преобразования в этом базисе будет диагональной (с собственными значениями λ_i на диагонали):

$$A' = S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \tag{1}$$

Базис из собственных векторов обязательно найдётся, если у преобразования ϕ есть n *различных* собственных значений. (Это достаточное условие, но не необходимое.)

Diag 2. Линейное пространство $\mathscr{L}$, в нём выбран базис e. Билинейная симметричная функция $b(\cdot, \cdot)$ с матрицей B в базисе e. *Всегда* найдётся базис $e' = eS$, в котором матрица B' билинейной функции будет диагональной, более того — будет иметь канонический вид (когда на диагонали стоят только числа $\varepsilon_i \in \{\pm 1, 0\}$):

$$B' = S^T BS = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \tag{2}$$

Для нахождения базиса e' можно либо проводить попеременные одинаковые элементарные преобразования столбцов и строк матрицы билинейной функции, либо использовать *метод Лагранжа* выделения квадратов в формуле квадратичной функции и последующих замен переменных.

Diag E1. Евклидово пространство $\mathscr{E}$, в нём выбран базис e. *Самосопряжённое* преобразование $\phi(\cdot)$ с матрицей A в базисе e. *Всегда* найдётся *ортонормированный* базис $e' = eS$ из собственных векторов преобразования $\phi(\cdot)$ (и матрица A' преобразования в этом базисе будет диагональной с собственными значениями λ_i на диагонали, и при смене базиса меняется как (1)). Для того чтобы получить этот ортонормированный базис, достаточно просто провести *ортогонализацию* и нормировку базиса из собственных векторов.

И тема текущего конспекта ("последний "сюжет о диагонализациях").

Diag E2. Евклидово пространство $\mathscr{E}$, в нём выбран базис $\boldsymbol{e}$. Билинейная симметричная функция $b(\cdot,\cdot)$ с матрицей $\boldsymbol{B}$ в базисе $\boldsymbol{e}$. Найдётся ли *ортонормированный* базис $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S$, в котором матрица $\boldsymbol{B}'$ билинейной функции будет диагональной?

Ответ — да, найдётся, причём *всегда*. Однако способ поиска этого ортонормированного базиса, как ни странно это могло бы показаться, никак не будет связан с базисом в линейном пространстве, где матрица квадратичной формы имела канонический вид (2).

Пример (Иллюстрация того, что ортогонализация в случае квадратичных форм "не помогает"). Пусть $b(\cdot,\cdot)$ есть симметричная билинейная функция на двумерном евклидовом пространстве. Пусть удалось найти базис $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, в котором $b(\cdot,\cdot)$ имеет канонический вид, и пусть её матрица $\boldsymbol{B}$ при этом есть:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Допустим, что для того, чтобы из базиса $\boldsymbol{e}$ получить ортогональный $\boldsymbol{e}'$, надо выполнить следующее преобразование:

$$\boldsymbol{e}' = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}S,\ S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Вычитание из одного вектора его ортогональной проекции на другой — совершенно "обычное" преобразование при ортогонализации системы векторов по Граму – Шмидту.)

Как при этом изменится матрица $\boldsymbol{B}'$ билинейной функции?

$$\boldsymbol{B}' = S^T \boldsymbol{B} S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Диагональность "потеряна". (И при нормировке векторов $\boldsymbol{e}'$ она тоже не вернётся.) Таким образом, то, что получилось с преобразованиями (найти ОНБ путём ортогонализации базиса), с квадратичными формами "не проходит"... □

Оказывается, что для того, чтобы найти ОНБ для диагонального вида симметричной билинейной функции, надо снова искать собственные значения и собственные векторы... Собственные векторы — но какого линейного преобразования?

1.2. Присоединённое преобразование

Определение 1.1. Пусть есть евклидово пространство $\mathscr{E}$ и симметричная билинейная функция $b(\cdot,\cdot)\colon \mathscr{E}\times\mathscr{E} \to \mathbb{R}$. Тогда *присоединённым к* $b(\cdot,\cdot)$ *преобразованием*[1] называется линейное преобразование $\phi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}$, такое что:

$$b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \phi(\boldsymbol{y})), \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{E} \tag{3}$$

[1]Автору конспекта не удалось найти аналог этого термина в англоязычных ресурсах... Встречалось название "associated" (см. McIntosh, A. (1968). *Representation of bilinear forms in Hilbert space by linear operators*. Transactions of the American Mathematical Society). Но есть сомнения, что это "общепринятый" термин. (На самом деле те же сомнения есть и относительно самого термина "присоединённое преобразование".) Anyway... А вообще, не только к *симметричной* билинейной функции можно "присоединить" преобразование. Если есть произвольная билинейная функция $b(\cdot,\cdot)$, то можно и её представить в виде $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \phi(\boldsymbol{y}))$, где $\phi(\cdot)$ есть линейное преобразование (если $b(\cdot,\cdot)$ симметричная, то ϕ как раз называется присоединённым). Подробнее см. лекции Ершова А. В., глава 10.4. *Связь между линейными операторами и билинейными функциями на евклидовом пространстве*. Более того, билинейной функции можно сопоставить

Так как билинейная функция $b(\cdot, \cdot)$ предполагается симметричной, и так как скалярное произведение симметрично, можно из (3) можно получить:

$$(\boldsymbol{x}, \phi(\boldsymbol{y})) = b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}, \phi(\boldsymbol{x})) = (\phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) \Rightarrow \underline{(\phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \phi(\boldsymbol{y}))}$$

Утверждение 1.1. *Преобразование, присоединённое к симметричной билинейной функции, является самосопряжённым.*

Но найдётся ли вообще для данной симметричной билинейной функции $b(\cdot, \cdot)$ присоединённое преобразование?[2] Если оно есть, то обязательно ли единственное? или может быть несколько присоединённых?

Пусть $e = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ это базис в $\mathscr{E}$. Пусть матрица Γ это матрица Грама базиса e, матрица B это матрица билинейной функции $b(\cdot, \cdot)$, а матрица A — матрица присоединённого к $b(\cdot, \cdot)$ преобразования $\phi(\cdot)$ (предполагаем, что оно существует, и тогда A есть его матрица).

Перепишем (3) в терминах матриц и вектор-столбцов:

$$\boldsymbol{x}^T B \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T \Gamma (A \boldsymbol{y}) \leftrightarrow \boldsymbol{x}^T B \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T (\Gamma A) \boldsymbol{y}$$

Соотношение выше верно для любой пары векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$. Это значит, что должны быть равны матрицы "посередине":

$$B = \Gamma A \Rightarrow \boxed{A = \Gamma^{-1} B} \tag{4}$$

(где было использовано, что матрица Грама базиса невырождена, поэтому обязательно существует её обратная Γ^{-1}).

Утверждение 1.2. *Для любой симметричной билинейной функции в евклидовом пространстве существует и единственно присоединённое к ней преобразование.*

Если базис в $\mathscr{E}$ выбран ортонормированным, то связь между матрицами билинейной функции и присоединённого к ней преобразовния (4) станет:

$$\boxed{A = B \quad \text{(ОНБ)}} \tag{5}$$

то есть *в ортонормированном базисе матрицы билинейной функции и присоединённого к ней пребразования совпадают*.

Хорошо, присоединённое преобразование самосопряжённое, и потому у него есть ортонормированный базис из собственных векторов, где его матрица диагональная... Но как это помогает в поиске ортонормированного базиса, в котором диагональна *квадратичная форма*?

линейное *отображение* (не преобразование) и просто в линейном пространстве, не только в евклидовом! Так, пусть $\boldsymbol{x}_0$ — некоторый фиксированный вектор линейного пространства $\mathscr{L}$. Тогда, имея билинейную функцию $b(\cdot, \cdot)$ на этом пространстве $\mathscr{L}$, можно определить следующие линейные отображения: "левое" $f_l : \mathscr{L} \ni \boldsymbol{x} \mapsto b(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ и "правое" $f_r : \mathscr{L} \ni \boldsymbol{x} \mapsto b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) \in \mathbb{R}$. Что получается: выбираем один вектор $\boldsymbol{x}_0$, и можем с помощью билинейной функции получить два линейных отображения ("левое" и "правое"), выбираем другой вектор $\boldsymbol{x}_0'$ — и получаем другие линейные отображения. То есть имеем два соответствия между векторами $\mathscr{L}$ и линейными функциями на $\mathscr{L}$ (составляющими *сопряжённое* пространство $\mathscr{L}^*$): "левое" $\phi_l : \mathscr{L} \ni \boldsymbol{x} \mapsto f_l \in \mathscr{L}^*$ и "правое" $\phi_r : \mathscr{L} \ni \boldsymbol{x} \mapsto f_r \in \mathscr{L}^*$. Итого, каждой билинейной функции $b(\cdot, \cdot)$ можно поставить в соответствие отображения ϕ_l и ϕ_r. Подробнее см. *листочек Кейта Конрада (Keith Conrad) по билинейным формам* (конец первого раздела и начало второго).

[2]Иначе "не очень хорошо" получается: обсуждать свойства того, чего нет.

1.3. Последняя глава о диагонализациях

Исходный ОНБ (“хороший случай”)

Пусть в $\mathscr{E}$ выбран *ортонормированный* базис $e = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. (То есть матрица Грама базиса $\Gamma = E$.) Пусть $b(\cdot, \cdot)$ есть симметричная билинейная функция, а $\phi(\cdot)$ — это присоединённое к ней преобразование. (Тогда матрица A преобразования совпадает с матрицей B билинейной функции.)

Так как присоединённое преобразование ϕ самосопряжённое (1.1), то для него *обязательно найдётся ортонормированный базис из собственных векторов*. Пусть e' есть этот базис, и S — матрица перехода от исходного *ортонормированного базиса* e к этому новому (*тоже ортонормированному*) базису e':

$$e' = eS \tag{6}$$

Что значит, что базис e' ортонормированный? Это значит, что, например:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_1) = \boldsymbol{e}'^T_1 \boldsymbol{e}'_1 = 1 \\ (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2) = \boldsymbol{e}'^T_1 \boldsymbol{e}'_2 = 0 \\ \ldots \\ (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_n) = \boldsymbol{e}'^T_1 \boldsymbol{e}'_n = 0 \end{cases} \tag{7}$$

То есть *если записать координаты вектора $\boldsymbol{e}'_1$ в базисе e в строчку, и умножить эту строчку на матрицу из координатных столбцов векторов e' в базисе e, то получится первый столбец единичной матрицы*. Аналогично можно рассмотреть скалярные произведения вектора $\boldsymbol{e}'_2$ на все векторы базиса e' и так далее. Приходим к соотношению:

$$S^T S = E \Rightarrow \underline{S^{-1} = S^T} \tag{8}$$

то есть *матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису ортогональна*.

Раз e' это ортонормированный базис из собственных векторов присоединённого преобразования ϕ, то матрица A' преобразования ϕ в этом базисе будет равна:

$$A' = S^{-1} A S = D$$

где D означает диагональную матрицу, на диагонали которой стоят собственные значения преобразования ϕ, соответствующие векторам базиса e'.

С другой стороны, матрица B' билинейной функции b при смене базиса:

$$B' = S^T B S \overset{S^{-1} = S^T}{\underset{B = A}{=\!=\!=}} S^{-1} A S = D \tag{9}$$

то есть матрица B' тоже диагональная! и такая же, как матрица A', то есть на её диагонали стоят собственные значения присоединённого преобразования ϕ.

Исходный не ОНБ (“общий случай”)

Пусть в $\mathscr{E}$ выбран *некоторый* базис $e = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. (То есть матрица Грама базиса Γ не обязательно единичная.) Пусть $b(\cdot, \cdot)$ есть симметричная билинейная функция. (С симметричной матрицей B в базисе e.)

Можно ли в этом случае найти ортонормированный базис, где бы матрица билинейной функции была диагональна? Да, можно.

Способ 1: сначала к ОНБ, потом "по-простому".

Раз в случае ОНБ базиса всё понятно, то можно просто сначала перейти к какому-нибудь ОНБ. Пусть e' — это некоторый ортонормированный базис:

$$e' = eS_1$$

При переходе от исходного (не факт, что ортонормированного) базиса e к новому e' матрица билинейной функции b изменяется:

$$B' = S_1^T B S_1$$

Теперь, находясь в ортонормированном базисе e', можем сделать всё так же, как раньше (9): перейти к ортонормированному базису e'' из собственных векторов присоединённого к билинейной функции b преобразования ϕ (с матрицей $A' = B'$ в базисе e'):

$$e'' = e' S_2,\ S_2^{-1} = S_2^T, \quad A'' = B'' = D$$

Итого, матрица перехода S от исходного базиса e к ортонормированному e'', где матрица билинейной функции диагональная:

$$e'' = e' S_2 = eS_1 S_2 \Rightarrow \underline{S = S_1 S_2}$$

Способ 2: сразу "как надо".

Пусть ϕ — это присоединённое к билинейной функции b преобразование. (Тогда матрица преобразования есть $\underline{A = \Gamma^{-1} B}$.)

Присоединённое к билинейной — обязательно самосопряжённое (1.1)[3]. Поэтому найдётся ортонормированный базис e' из собственных векторов ϕ:

$$e' = eS$$

В чём "подвох", в чём разница по сравнению с (6)? Разница в том, что базис e' ортонормированный, но *относительно скалярного произведения с матрицей Грама* Γ! То есть, если выписывать скалярные между базисными e' по аналогии с (7):

$$\begin{cases} (\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_1') = \boldsymbol{e}_1'^T \Gamma \boldsymbol{e}_1' = 1 \\ (\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2') = \boldsymbol{e}_1'^T \Gamma \boldsymbol{e}_2' = 0 \\ \dots \\ (\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_n') = \boldsymbol{e}_1'^T \Gamma \boldsymbol{e}_n' = 0 \end{cases}$$

то станет понятно, что матрица перехода S должна обладать следующим свойством:

$$\underline{S^T \Gamma S = E}$$

В базисе из собственных векторов для матрицы преобразования A' имеем:

$$A' = S^{-1} A S = D$$

Что будет с матрицей билинейной функции B'? Она тоже будет диагональной! Это видно из "связки" между матрицами билинейной функции и присоединённого преобразования (Γ_e есть та же Γ в обозначениях выше):

$$B = \Gamma_e A \xrightarrow{e'=eS} B' = \Gamma_{e'} A' = A' = D$$

так как базис e' ортонормированный, то есть его матрица Грама $\Gamma_{e'}$ единичная.

Но можно и "строго" показать диагональность B':

$$B' = S^T B S = S^T (\Gamma A) S = S^T \Gamma (S S^{-1}) A S = (\underbrace{S^T \Gamma S}_{\Gamma_{e'}})(S^{-1} A S) = E A' = D$$

[3] Можно в этом убедиться и в общем базисе: $\big(\phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}\big) = (A\boldsymbol{x})^T \Gamma \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T A^T \Gamma \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T (\Gamma^{-1} B)^T \Gamma \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T B^T (\Gamma^{-1})^T \Gamma \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T B^T (\Gamma^{-1} \Gamma) \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T B^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T B \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T (\Gamma A) \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T \Gamma (A \boldsymbol{y}) = \big(\boldsymbol{x}, \phi(\boldsymbol{y})\big)$.

1.4. Одна форма в евклидовом, или # 32.27(13)

Квадратичная функция $k(\cdot)$ задана в *ортонормированном* базисе e трёхмерного евклидова пространства $\mathscr{E}$:

$$k(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2$$

Надо найти ортонормированный базис, в котором $k(\cdot)$ имеет диагональный вид (и сам этот диагональный вид).

Решение. (Раз надо найти *ортонормированный* базис, где форма диагональна, то использовать надо не метод Лагранжа выделения квадратов, а собственные векторы присоединённого преобразования.)

Матрица соответствующей билинейной $b(\cdot,\cdot)$ функции:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Так как базис e ортонормированный, то у присоединённого к $b(\cdot,\cdot)$ преобразования $\phi(\cdot)$ будет такая же матрица:

$$A = B$$

Найдём собственные значения ϕ. (Можно заметить, что разность третьей и второй строчки A даёт первую, поэтому $\lambda = 0$ точно будет собственным значением.)

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 3/2, \quad \text{(кр-ть 2)} \end{array}\right.$$

Найдём собственные векторы ϕ. (Так как $\lambda = 3/2$ это корень кратности 2, а у преобразования ϕ, как у самосопряжённого, должен найтись базис из собственных векторов, то ожидается, что для $\lambda = 3/2$ получится найти *два* линейно независимых собственных вектора, то есть размерность соответствующего собственного подпространства обязательно также будет равна 2.)

При $\lambda_1 = 0$:

$$(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

При $\lambda_2 = 3/2$:

$$(A - \lambda_2 E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Имеем базис из собственных векторов:

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\} = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Но нужен ортонормированный базис из собственных векторов. Поэтому получим далее сначала ортогональный базис, а потом отнормируем базисные векторы. Видно, что $\boldsymbol{x}_1 \perp \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$. (Этого стоило ожидать, потому что $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ (а также $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_3$) это собственные векторы самосопряжённого преобразования, относящиеся к разным собственным значениям.) Остаётся “поправить” пару $\boldsymbol{x}_2$ и $\boldsymbol{x}_3$, так как пока $(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = -1 \neq 0$. Вычтем, например, из вектора $\boldsymbol{x}_2$ его ортогональную проекцию на вектор $\boldsymbol{x}_3$:

$$\boldsymbol{x}_2' = \boldsymbol{x}_2 - \frac{(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)}{|\boldsymbol{x}_3|} \cdot \frac{\boldsymbol{x}_3}{|\boldsymbol{x}_3|} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

(Можно убедиться, что вектор $\boldsymbol{x}_2'$ при этом также собственный, соответствующий λ_2 — ведь он получен как линейная комбинация векторов $\boldsymbol{x}_2$ и $\boldsymbol{x}_3$, лежащих в соответствующем собственном подпространстве.)

Ортогональный базис из собственных векторов:

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2', \boldsymbol{x}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Далее, несложно получить ортонормированный базис из собственных векторов:

$$e' = \left\{ \frac{\boldsymbol{x}_1}{|\boldsymbol{x}_1|}, \frac{\boldsymbol{x}_2'}{|\boldsymbol{x}_2'|}, \frac{\boldsymbol{x}_3}{|\boldsymbol{x}_3|} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\} \tag{10}$$

Матрица перехода S от исходного e к новому e' — это матрица, столбцы которой есть координаты векторов базиса e' в базисе e (по сути матрица S как раз и была выписана выше (10).) Видно, что S ортогональная: $S^T S = E$ (так как базис e' ортонормированный относительно стандартного скалярного произведения).

Далее, матрица A' преобразования ϕ в базисе e' — очевидно, диагональная, с собственными значениями на диагонали (первый элемент на диагонали — собственное значение, соответствующее первому базисному вектору, и так далее):

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Но такой же будет и матрица B' квадратичной формы! Потому что:

$$B' = S^T B S = S^{-1} A S = A'$$

(Хотя “в процессе” перехода к e', на “промежуточных этапах”, матрица билинейной функции могла и отличаться от матрицы присоединённого преобразования. Имеется в виду, что, например, в базисе из собственных векторов $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$ матрица ϕ уже была диагональной, однако $b(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = -3/2 \neq 0$, то есть матрица b диагональной не была.) □

1.5. Две формы в линейном, или # 32.36(4)

В линейном двумерном пространстве $\mathscr{L}$ в базисе e заданы две квадратичные формы $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$:

$$f(\boldsymbol{x}) = 2x_1x_2 - x_2^2, \quad g(\boldsymbol{x}) = 9x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2$$

Надо проверить, что хотя бы одна из форм является знакоопределённой. И найти базис, в котором *обе* формы имели бы диагональный вид (и записать формы в этом базисе).

Решение. Какая из форма знакоопределённая? Очевидно, не $f(\cdot)$: при $\boldsymbol{x} = (1,0)^T \neq \mathbf{0}$ получаем $f(\boldsymbol{x}) = 0$. (Также можно подобрать векторы, на которых форма принимает значения разных знаков, например: $\boldsymbol{x} = (0,1) \to f(\boldsymbol{x}) < 0$ и $\boldsymbol{x} = (1,1) \to f(\boldsymbol{x}) > 0$.)

Остаётся проверить, что знакопостоянна форма $g(\cdot)$:

$$g(\boldsymbol{x}) = \left[(3x_1)^2 - 2\cdot 3x_1 \cdot \frac{10}{6}x_2 + \left(\frac{5x_2}{3}\right)^2\right] - \left(\frac{5x_2}{3}\right)^2 + 3x_2^2 = \left(3x_1 - \frac{5x_2}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}x_2^2 \geq 0 \quad (11)$$

и при этом $g(\boldsymbol{x}) = 0 \leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. То есть форма $g(\cdot)$ положительно определена. (Положительную определённость можно бы было проверить и с помощью матрицы формы и критерия Сильвестра.)

Как теперь найти базис, в котором *обе* формы были бы диагональны?

Способ 1: сначала к ОНБ, потом "по-простому".

"План": приведём форму $g(\cdot)$ к каноническому виду, определим скалярное произведение с помощью формы[4] $g(\cdot)$ (оно будет "стандартным"), и потом перейдём к ортонормированному базису из собственных векторов присоединённого к форме $f(\cdot)$ преобразования (в этом базисе $f(\cdot)$ станет диагональной, а $g(\cdot)$ останется диагональной, так как $g(\cdot)$ задаёт скалярное произведение, а новый базис тоже ортонормированный).

Проводим "очевидную" (11) замену:

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - \dfrac{5x_2}{3} \\ x_2' = \dfrac{\sqrt{2}}{3}x_2 \end{cases}$$

В новых переменных форма $g(\cdot)$ имеет канонический вид:

$$g(\boldsymbol{x}) = x_1'^2 + x_2'^2$$

Обратная замена (нужна, чтобы получить матрицу перехода S_1 от исходного базиса e к новому e'):

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_1'}{3} + \dfrac{5}{3\sqrt{2}}x_2' \\ x_2 = \dfrac{3}{\sqrt{2}}x_2' \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = S_1\boldsymbol{x}',\ S_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 5/3\sqrt{2} \\ 0 & 3/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Можно убедиться, что при такой замене матрица формы $g(\cdot)$ из исходной $G = \left(\begin{smallmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ станет единичной $G' = E$:

$$G' = S_1^T G S_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 5/3\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 5/3\sqrt{2} \\ 0 & 3/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Если с матрицей G' было понятно, что она единичная, то матрицу F' формы $f(\cdot)$ в новом базисе остаётся только "по-честному" найти. (В исходном базисе $F = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.)

$$F' = S_1^T F S_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 5/3\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 5/3\sqrt{2} \\ 0 & 3/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}$$

[4] Точнее, с помощью симметричной билинейной функции, порождающей квадратичную форму $g(\cdot)$.

Теперь можно ввести скалярное произведение с помощью формы $g(\cdot)$ (оно будет "стандартным", сумма произведений координат, то есть базис e' получается ортонормированным):

$$(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}')_g = \boldsymbol{x}'^T G' \boldsymbol{y}' = x_1' y_1' + x_2' y_2'$$

пространство $\mathscr{L}$ становится евклидовым[5] $\mathscr{E}$, и можно рассмотреть присоединённое к форме[6] $f(\cdot)$ преобразование $\phi(\cdot)$: в ортонормированном базисе матрица присоединённого преобразования будет совпадать с матрицей F' формы. Найдём ортонормированный базис из собственных векторов $\phi(\cdot)$.

Собственные значения:

$$\det(F' - \lambda E) = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1/2 \end{cases}$$

Собственные векторы:

$$(F' - \lambda_1 E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 = \left(1, \sqrt{2}\right)^T$$

$$(F' - \lambda_2 E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boldsymbol{x}_2 = \left(\sqrt{2}, -1\right)^T$$

Матрица перехода от базиса e' к базису из собственных векторов $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$: $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$. Матрица S_2 перехода от базиса e' к *ортонормированному* базису из собственных векторов $e'' = \left\{ \frac{\boldsymbol{x}_1}{|\boldsymbol{x}_1|}, \frac{\boldsymbol{x}_2}{|\boldsymbol{x}_2|} \right\}$:

$$S_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/3 & -\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$$

(Видно, что S_2 ортогональная — как матрица перехода от одного ОНБ к другому ОНБ.)

В базисе e'' матрица F'' формы $f(\cdot)$ должна быть диагональной: $F'' = \operatorname{diag}(1, -1/2)$. Проверим это по формуле "пересчёта" матрицы формы при смене базиса:

$$F'' = S_2^T F' S_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/3 & -\sqrt{3}/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/3 & -\sqrt{3}/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Матрица S перехода от начального базиса e к "нужному" e'':

$$S = S_1 S_2 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}/3 & -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{6}/2 \end{pmatrix}$$

Способ 2: сразу "как надо".

"План": определим скалярное произведение с помощью формы $g(\cdot)$ (оно **не будет** "стандартным"), и потом перейдём к ортонормированному базису из собственных векторов присоединённого к форме $f(\cdot)$ преобразования (в этом базисе и $f(\cdot)$ станет диагональной, и $g(\cdot)$, так как $g(\cdot)$ задаёт скалярное произведение, а базис ортонормированный).

(Далее идёт "практически" "Ctrl-C – Ctrl-V" части решения из Способа 1 начиная с введения скалярного произведения. Вся разница в том, что скалярное будет считаться "не так просто"...)

[5] Начиная с этого момента и до конца решение задачи по сути повторяет (1.4).

[6] Точнее, присоединённое к билинейной функции, порождающей квадратичную форму f.

Итак, введём в $\mathscr{L}$ скалярное произведение с помощью породившей форму $g(\cdot)$ билинейной функции (базис e **не будет** ортонормированным):

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_g = \boldsymbol{x}^T G \boldsymbol{y} = 9x_1y_1 - 5x_1y_2 - 5x_2y_1 + 3x_2y_2$$

пространство $\mathscr{L}$ становится евклидовым $\mathscr{E}$, и можно рассмотреть присоединённое к породившей форму f билинейной функции преобразование ϕ. Его матрица A будет равна:

$$A = G^{-1}F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/2 & -1\\ 9/2 & -2\end{pmatrix}$$

Найдём ортонормированный базис из собственных векторов ϕ.

Собственные значения:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1 = 1\\ \lambda_2 = -1/2\end{cases}$$

Собственные векторы:

$$(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 = (2, 3)^T$$

$$(A - \lambda_2 E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boldsymbol{x}_2 = (1, 3)^T$$

Матрица перехода от базиса e к базису из собственных векторов $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$: $\left(\begin{smallmatrix}2 & 1\\ 3 & 3\end{smallmatrix}\right)$. Матрица S перехода от базиса e к *ортонормированному* базису из собственных векторов $e' = \left\{\frac{\boldsymbol{x}_1}{|\boldsymbol{x}_1|}, \frac{\boldsymbol{x}_2}{|\boldsymbol{x}_2|}\right\}$… Сходу выписать её не так просто. Сначала надо посчитать модули:

$$|\boldsymbol{x}_1| = \sqrt{(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1)_g} = \sqrt{\boldsymbol{x}_1^T G \boldsymbol{x}_1} = \ldots = \sqrt{3}$$

$$|\boldsymbol{x}_2| = \sqrt{(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2)_g} = \sqrt{\boldsymbol{x}_2^T G \boldsymbol{x}_2} = \ldots = \sqrt{6}$$

(На всякий случай можно убидеться и в том, что собственные векторы ортогональны, а то это тоже "не очевидно": $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)_g = \boldsymbol{x}_1^T G \boldsymbol{x}_2 = \ldots = 0$.)

Итак, матрица перехода:

$$S = \begin{pmatrix}2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6}\\ 3/\sqrt{3} & 3/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

В базисе e' матрица F' формы $f(\cdot)$ должна быть диагональной: $F' = \mathrm{diag}(1, -1/2)$. Проверим по формуле "пересчёта" матрицы формы при смене базиса:

$$F' = S^T F S = \begin{pmatrix}2/\sqrt{3} & 3/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{6} & 3/\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6}\\ 3/\sqrt{3} & 3/\sqrt{6}\end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}$$

Также проверим, что матрица G' формы $g(\cdot)$ будет единичной (а это должно быть так, потому что $g(\cdot)$ задаёт скалярное произведение, а базис e' ортонормированный):

$$G' = S^T G S = \begin{pmatrix}2/\sqrt{3} & 3/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{6} & 3/\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & -5\\ -5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6}\\ 3/\sqrt{3} & 3/\sqrt{6}\end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Две формы приведены к диагональному виду.

Конспект семинаров по курсу закончен.

А домик долетел до водопада.