

# Семинар 6

Алексеев Василий

13 + 17 октября 2022

## Содержание

<b>1</b>	<b>Прямая и плоскость в пространстве</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Задачи</b>	<b>4</b>
2.1	# 6.15 . . . . .	4
2.2	# 6.3 . . . . .	4
2.3	# 6.10(1) . . . . .	6
2.4	# 6.10(4) + # 6.11(8) . . . . .	7
2.5	# 6.18(1) . . . . .	9
2.6	# 6.17(1) . . . . .	10

# 1. Прямая и плоскость в пространстве

Линейное уравнение от координат точки на плоскости

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A^{2022} + B^{2022} > 0 \end{cases}$$

задавало прямую (на плоскости). Плоскость — двумерное пространство, одно линейное уравнение — одна “связь” между координатами, в итоге — прямая, одномерное подпространство.

Если же мы рассмотрим линейное уравнение от координат точки в общей декартовой системе координат (ОДСК) *в пространстве*

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ |A| + (e^{|B|} - 1) + 17.5C^2 > 0 \end{cases} \quad (1)$$

то оно будет описывать плоскость. Пространство трёхмерное, снова одно линейное уравнение, получается плоскость — двумерное подпространство...

Рассмотрим ещё несколько способов задать плоскость. Например, векторный. Будем считать, что мы знаем радиус-вектор  $\mathbf{r}_0$  некоторой точки плоскости. А также два вектора  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ , параллельных плоскости (направляющие векторы плоскости), но неколлинеарных. Тогда можно заметить, что для радиусов-векторов  $\mathbf{r}$  точек плоскости и только таких точек верно, что разность  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  раскладывается по  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  (1):

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t_1 \mathbf{p} + t_2 \mathbf{q}$$

для некоторых  $t_1 \in \mathbb{R}$  и  $t_2 \in \mathbb{R}$  (то есть для любой точки плоскости найдутся подходящие коэффициенты  $t_1$  и  $t_2$ , и в то же время, какие бы  $t_1$  и  $t_2$  ни подставили в формулу, получим радиус-вектор именно какой-то точки плоскости). Или, если перенести  $\mathbf{r}_0$  направо и начать “варьировать”  $t_1$  и  $t_2$ , получим *векторное параметрическое уравнение плоскости*:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t_1 \mathbf{p} + t_2 \mathbf{q}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Одно векторное уравнение равносильно системе из трёх скалярных уравнений:

$$\begin{cases} x = x_0 + t_1 p_x + t_2 q_x \\ y = y_0 + t_1 p_y + t_2 q_y \\ z = z_0 + t_1 p_z + t_2 q_z \end{cases}$$

где введены обозначения  $x, y, z$  для компонент  $\mathbf{r}$ ;  $x_0, y_0, z_0$  для компонент  $\mathbf{r}_0$ ; и  $p_x, p_y, p_z$  и  $q_x, q_y, q_z$  для компонент векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  соответственно.

Ещё один вариант переписать уравнение (2) исходит из того, что векторы  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  компланарны. То есть объём параллелепипеда, построенного на них, равен нулю. То есть:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$$

Как и для прямой на плоскости, для плоскости в пространстве, из аналогичных рассуждений, можно выписать *нормальное векторное уравнение*:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0 \quad (3)$$

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D, \quad D \in \mathbb{R}$$

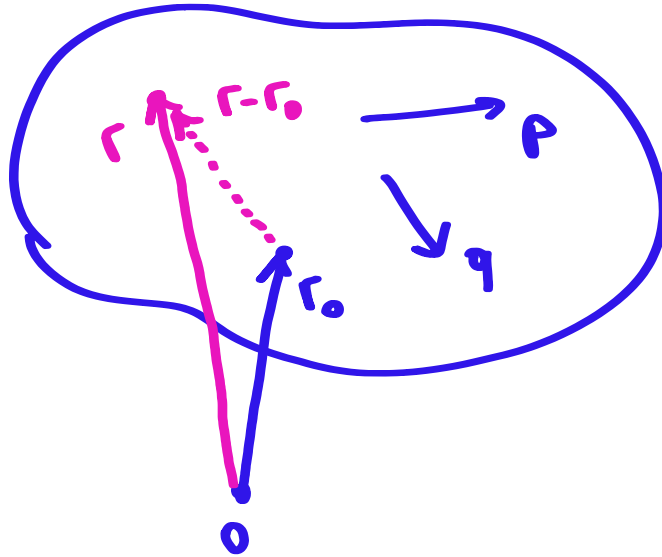


Рис. 1: Два направляющих вектора  $p$  и  $q$ , таких что  $p \nparallel q$ , и начальная точка  $r_0$  однозначно задают плоскость.

где  $n$  — нормальный вектор плоскости, то есть вектор, перпендикулярный плоскости.

От нормального векторного уравнения можно перейти к “популярной задачке” на нахождение расстояния от точки до плоскости. Пусть есть точка  $M(x, y)$  и плоскость  $\alpha$ , заданная нормальным векторным уравнением (3). Тогда расстояние  $\rho(M, \alpha)$ , находится точно так же, как в прошлый раз для случая точки и прямой:

$$\rho(M, \alpha) = \left| \frac{(r - r_0, n)}{|n|} \right| \quad (4)$$

Если система координат декартова прямоугольная (ПДСК) и известно уравнение плоскости  $\alpha$  в виде (1), то, точно так же, как и в прошлый раз, формула для вычисления расстояния преобразуется в следующую:

$$\rho(M, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Зададимся теперь вопросом о связи разных представлений одной и той же плоскости в пространстве. Так, если, например, известно уравнение плоскости вида (1), то как из него получить направляющие векторы, необходимые, например, для уравнения (2)? Это можно сделать так же, как в прошлый раз для прямой. Пусть есть две различные точки на плоскости:  $P(x_1, y_1)$  и  $Q(x_2, y_2)$ . Тогда направляющий вектор можно выбрать в виде  $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ . Запишем, что значит, что точки  $P$  и  $Q$  лежат на плоскости — их координаты удовлетворяют уравнению плоскости:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \end{cases}$$

Нам нужны разности координат — тогда вычтем из второго уравнения первое. Получим:

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0$$

Но нам не нужны сами точки  $P$  и  $Q$ . Мы хотим найти только направляющий вектор плоскости. Допустим, у искомого направляющего вектора координаты  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Тогда для поиска этих координат можно использовать уравнение:

$$\boxed{A\alpha + B\beta + C\gamma = 0} \quad (5)$$

По виду это уравнение напоминает полученное в прошлый раз для поиска компонент направляющего вектора прямой (что в принципе не удивительно, ведь рассуждения были проведены те же самые). В прошлый раз получилось довольно быстро подобрать направляющий вектор прямой — подошёл вектор вида  $(-B, A)$ . Здесь же... всё уже не так очевидно, поэтому обычно направляющие векторы плоскости ищут отдельно в каждой конкретной задаче, просто “внимательно вглядываясь” в соотношение (5). Но вообще... можно попытаться найти направляющие векторы и в общем виде. Сделаем же это (почему бы и нет)!

(...Внимательно смотрим на (5), при этом понимая, что хотя бы одна компонента у направляющего вектора обязана быть отлична от нуля.)

Не сложно видеть, что направляющие векторы плоскости могут быть выбраны в общем случае как следующие векторы:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} B + C \\ -A - C \\ -A + B \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} B - C \\ -A + C \\ A - B \end{pmatrix} \quad (6)$$

Но запоминать эти формулы не стоит) Проще каждый раз “подбирать”.

Теперь вернёмся ещё раз к прямой. Как на прямую “можно смотреть” в пространстве? Векторное параметрическое уравнение

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t, \quad t \in \mathbb{R}} \quad (7)$$

и в пространстве, очевидно, описывает прямую (“сдвиг в  $\mathbf{r}_0$ ”, а потом “сдвиг вдоль  $\mathbf{a}$ ”). Правда, в скалярном виде получается система из трёх уравнений:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t \\ y = y_0 + a_y t \\ z = z_0 + a_z t \end{cases}$$

Выражая из каждого уравнения системы параметр  $t$  и приравнявая, получаем каноническое уравнение прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$$

Уравнение (7) фактически говорит о том, что для точек прямой и только для них верно, что  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \parallel \mathbf{a}$ . В пространстве условие коллинеарности двух векторов можно записать таким образом:

$$[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = 0$$

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = b$$

В пространстве также появляется ещё один, совершенно новый, способ описать прямую. Как пересечение двух непараллельных плоскостей (2):

$$\boxed{\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}} \quad (8)$$

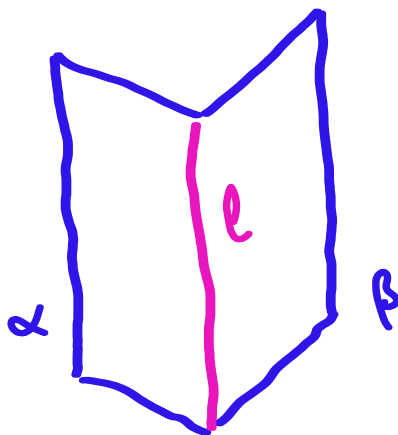


Рис. 2: Две непараллельных плоскости пересекаются по прямой.

## 2. Задачи

Последний рассмотренный сюжет (про прямую как пересечение плоскостей) плавно перетекает в номер

### 2.1. # 6.15

**Задача.** Доказать, что направляющий вектор  $\mathbf{a}$  прямой, заданной системой (8), может быть найден по формуле<sup>1</sup>:

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \quad (9)$$

*Решение.* Распишем компоненты вектора:

$$\mathbf{a} = \{B_1 C_2 - C_1 B_2, C_1 A_2 - A_1 C_2, A_1 B_2 - B_1 A_2\}$$

Можно теперь просто подставить эти компоненты в соотношения (5), выписанные для обеих плоскостей, и убедиться, что  $\mathbf{a}$  в самом деле им обеим параллелен. А значит, параллелен и прямой, по которой плоскости пересекаются. То есть может быть выбран её направляющим вектором.

Проверить было несложно. Сложнее... понять, как вообще дошли до того, чтобы искать  $\mathbf{a}$  в описанном виде) Некоторую интуицию за всем этим можно подметить из того, что “разности” между коэффициентами, соответствующими одной и той же плоскости, стоят в компонентах  $\mathbf{a}$  в целом так же, по “такой же схеме”, как мы получили в (6)...  $\square$

### 2.2. # 6.3

**Задача.** Выписать необходимое и достаточное условие, при котором прямые  $l_1: \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$  и  $l_2: \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$

- пересекаются в одной точке
- скрещиваются

<sup>1</sup>В общей декартовой системе это **не** векторное произведение. На формулу надо смотреть именно так, как она написана: определитель некоторой матрицы.

- параллельны, но не совпадают
- совпадают

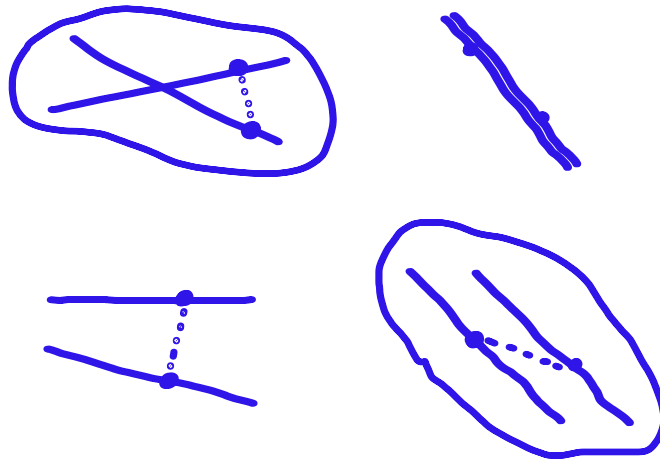


Рис. 3: Возможные случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве.

*Решение.* Для пересечения надо потребовать  $\mathbf{a}_1 \nparallel \mathbf{a}_2$  (3).

На плоскости этого было достаточно. В пространстве же это условие подходит ещё и для скрещивания. Надо как-то “разделить” пересечение и скрещивание. Прямые скрещиваются, если не лежат в одной плоскости. Отсюда можно заметить, что для скрещивающихся прямых векторы  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  будут некопланарны. И наоборот: если указанные векторы компланарны, то прямые будут лежать в одной плоскости. Итого, условие скрещивания:

$$\begin{cases} [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \neq \mathbf{0} \\ (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \neq 0 \end{cases}$$

где воспользовались тем, что условие  $\mathbf{a}_1 \nparallel \mathbf{a}_2$  можно переписать в пространстве как  $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \neq \mathbf{0}$ .

Пересечение в одной точке определяется такими условиями:

$$\begin{cases} [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \neq \mathbf{0} \\ (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0 \end{cases}$$

Чтобы перейти к следующим случаям взаимного расположения прямых в пространстве (параллельность и совпадение), можно сразу обратить условие неколлинеарности направляющих векторов. То есть в оставшихся случаях имеем  $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \mathbf{0}$ . На самом деле мы уже как бы перешли в плоскость, а с плоскостью уже разобрались в прошлый раз. Поэтому можно сразу написать, что параллельность, но не совпадение — это

$$\begin{cases} [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \mathbf{0} \\ [\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1] \neq \mathbf{0} \end{cases}$$

И совпадение:

$$\begin{cases} [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \mathbf{0} \\ [\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1] = \mathbf{0} \end{cases}$$

□

### 2.3. # 6.10(1)

**Задача.** Составить уравнение проекции  $l'$  прямой  $l: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + at$  ( $t \in \mathbb{R}$ ), не перпендикулярной плоскости  $\alpha: (\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$ , на эту плоскость.

**Решение.** Раз прямая  $l$  и плоскость  $\alpha$  не перпендикулярны, то проекцией  $l$  на  $\alpha$  также будет прямая (а не точка).

**Случай 1: пересечение.** Допустим, прямая  $l$  и плоскость  $\alpha$  пересекаются в некоторой точке  $M(\mathbf{r}_1)$  (см. рисунок 4). Найдём её:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + at_1 \\ (\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) = D \end{cases}$$

$$(\mathbf{r}_0 + at_1, \mathbf{n}) = D \Rightarrow t_1 = \frac{D - (\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}$$

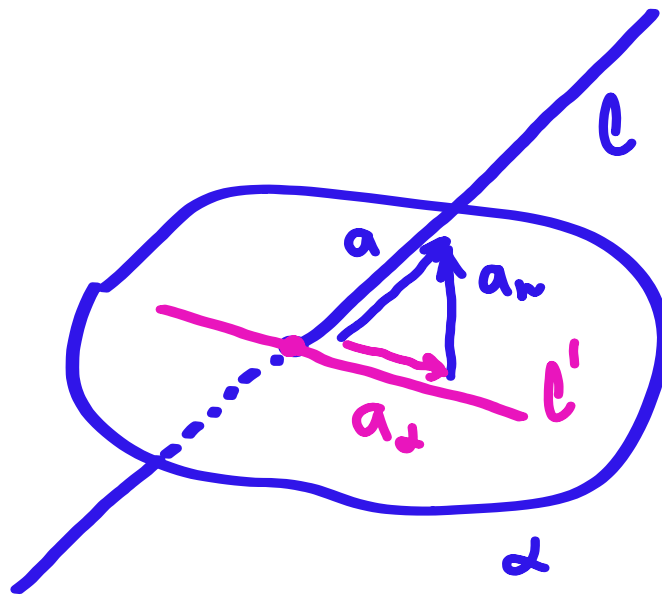


Рис. 4: Проекция прямой на плоскость в случае пересечения прямой и плоскости.

Чем определяется прямая  $l'$ ? Точка  $M$  принадлежит также и  $l'$ . Таким образом, для “полного понимания”  $l'$  не хватает только направляющего вектора. Но его можно найти, зная направляющий вектор  $\mathbf{a}$  прямой  $l$ . Действительно, упомянутый  $\mathbf{a}$  можно представить как сумму двух векторов:  $\mathbf{a}_n$ , параллельного  $\mathbf{n}$ , и  $\mathbf{a}_\alpha$ , перпендикулярного ему (то есть лежащего в плоскости  $\alpha$ ):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\alpha, \quad \mathbf{a}_n \parallel \mathbf{n}, \mathbf{a}_\alpha \perp \mathbf{n}$$

Но составляющая  $\mathbf{a}_\alpha$  — и есть направляющий вектор  $l'$ :

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n}$$

И тогда уравнение прямой  $l'$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_\alpha t, \quad t \in \mathbb{R}$$

**Случай 2: нет пересечения.** Но возможен и такой случай, когда прямая  $l$  параллельна плоскости  $\alpha$  (5). В этом случае уже нет никакой “особой” точки, за которую можно бы

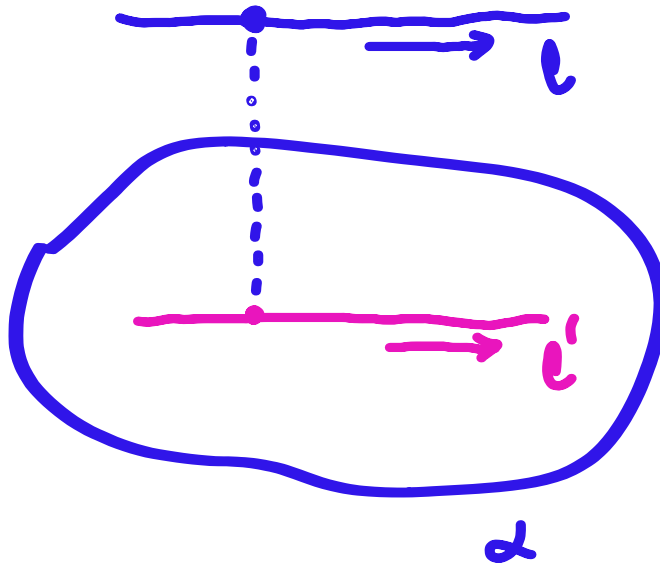


Рис. 5: Проекция прямой на плоскость в случае, когда прямая и плоскость не пересекаются.

было “зацепиться”. Но можно... просто взять некоторую случайную точку с прямой  $l$  и спроецировать её на  $\alpha$ . Получим точку с  $l'$ . А направляющий вектор  $l'$  будем таким же, как у  $l$ .

Спроецируем на  $\alpha$  точку  $r_0$ . Пусть радиус-вектор ортогональной проекции есть  $r'_0$ . Тогда условия, однозначно задающие  $r'_0$ :

$$\begin{cases} (r_0 - r'_0) \parallel n \\ r'_0 \in \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_0 - r'_0 = kn \\ (r'_0, n) = D \end{cases}$$

$$(r_0 - kn, n) = D \Rightarrow k = \frac{(r_0, n) - D}{|n|^2}$$

Уравнение проекции  $l'$ :

$$r = r'_0 + at, \quad t \in \mathbb{R}$$

□

## 2.4. # 6.10(4) + # 6.11(8)

**Задача.** Составить уравнение прямой, пересекающей две скрещивающиеся прямые

$$l_1 : r = r_1 + a_1 t$$

$$l_2 : r = r_2 + a_2 t$$

под прямыми углами (общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым). Найти расстояние между прямыми  $l_1$  и  $l_2$ .

**Решение.**

**Способ 1:** “понятный, но долгий”. Пусть прямая – общий перпендикуляр пересекает прямые  $l_1$  и  $l_2$  в точках  $P(r_p)$  и  $Q(r_q)$  соответственно. Эти точки можно найти. Они одно-



значно определяются следующим набором условий:

$$\begin{cases} P \in l_1 \\ Q \in l_2 \\ \overrightarrow{PQ} \perp \mathbf{a}_1 \\ \overrightarrow{PQ} \perp \mathbf{a}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{r}_p = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t_p \\ \mathbf{r}_q = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t_q \\ (\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_p, \mathbf{a}_1) = 0 \\ (\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_p, \mathbf{a}_2) = 0 \end{cases}$$

При подстановке  $\mathbf{r}_p$  и  $\mathbf{r}_q$  из первого и второго уравнений в третье и четвёртое, получаем систему линейных уравнений  $2 \times 2$  относительно  $t_p$  и  $t_q$ . Её точно можно будет решить (в процессе решения должно будет “вылезти” условие того, что прямые должны скрещиваться). Найдя  $t_p$  и  $t_q$ , можно будет вычислить  $\mathbf{r}_p$  и  $\mathbf{r}_q$ . А далее можно уже получить и уравнение общего перпендикуляра (на тот момент будем знать и начальную точку, и направляющий вектор), и длину  $PQ = |\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_p|$  — расстояние между прямыми  $l_1$  и  $l_2$ . Но... есть способ решения покороче.

*Способ 2 (перпендикуляр): “непонятный, но покороче”, или “а так вообще... можно?..”* Найдём уравнение общего перпендикуляра как прямой, являющейся пересечением двух плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  (6). Первая плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $l_1$  и общий перпендикуляр. Вторая плоскость  $\beta$  проходит через прямую  $l_2$  и общий перпендикуляр. (Очевидно, плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по искомому перпендикуляру.) Какие уравнения описывают указанные плоскости?

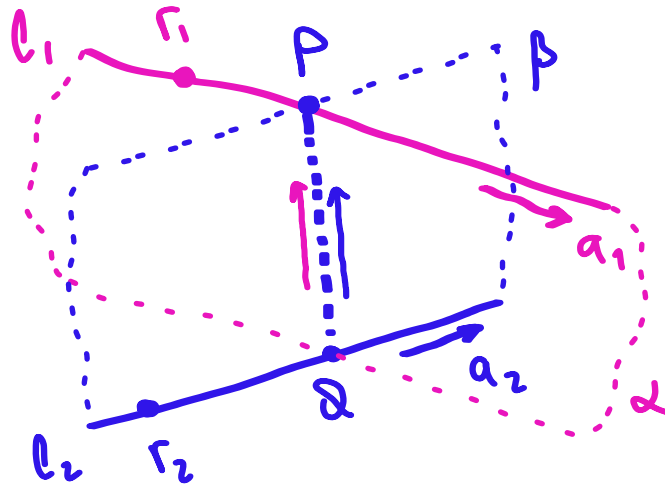


Рис. 6: К поиску общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым.

Ещё раз посмотрим на  $\alpha$ . Раз  $l_1 \subset \alpha$ , то и точка с радиусом-вектором  $\mathbf{r}_1$  (начальная точка прямой  $l_1$ ) лежит на  $\alpha$ . В то же время  $\mathbf{a}_1$  и направляющий вектор общего перпендикуляра будут направляющими векторами плоскости  $\alpha$  (неколлинеарными). Направляющий вектор общего перпендикуляра можно выбрать как  $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$ . Таким образом, для точки плоскости  $\alpha$  с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  и только для такой точки верно, что векторы  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{a}_1$ ,  $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$  оказываются компланарны. Аналогично, компланарны будут векторы  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{a}_2$  и  $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$  для любой точки с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  на плоскости  $\beta$ . Объединяя уравнения описанных плоскостей в систему, получаем... “уравнение” общего перпендикуляра:

$$\begin{cases} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]) = 0 \\ (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_2, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]) = 0 \end{cases}$$

*Способ 2 (расстояние).*

Перейдём к вопросу о расстоянии между скрещивающимися прямыми. Один возможный вариант решения уже разобрали (через поиск радиусов-векторов  $r_p$  и  $r_q$ ). Рассмотрим ещё один несложный способ.

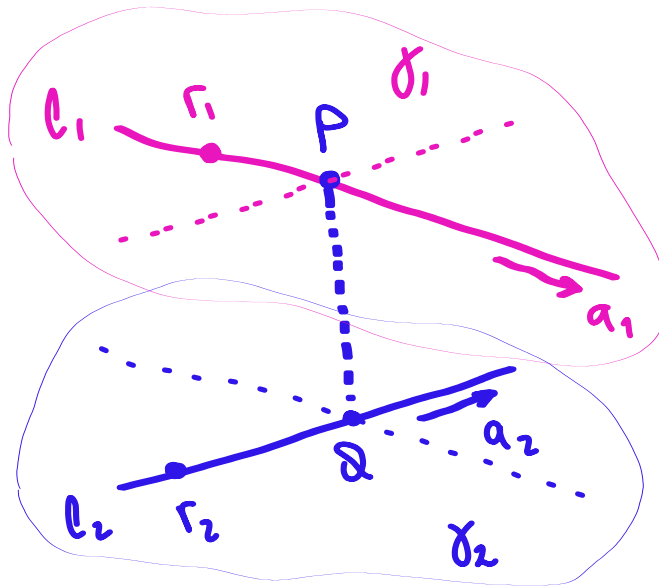


Рис. 7: К поиску расстояния между скрещивающимися прямыми.

Перенесём параллельно прямую  $l_2$  до пересечения с  $l_1$ . Получим плоскость  $\gamma_1$ , проходящую через  $l_1$  и параллельную также  $l_2$  (7). Перенесём также параллельно  $l_1$  до пересечения с  $l_2$ , получим плоскость  $\gamma_2$ . Не сложно видеть, что расстояние между  $l_1$  и  $l_2$  есть расстояние между  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Которое равно расстоянию от некоторой точки плоскости  $\gamma_2$  (например, точки  $r_2$ ) до плоскости  $\gamma_1$ . Но это просто “расстояние от точки до плоскости”, которое можно посчитать по формуле (4). При этом точка, от которой считаем расстояние — это  $r_2$ ; начальная точка плоскости  $\gamma_1$  — это  $r_1$ ; а вектор нормали к плоскости  $\gamma_1$  можно взять как  $[a_1, a_2]$ :

$$\rho(l_1, l_2) = \left| \frac{(r_2 - r_1, [a_1, a_2])}{|[a_1, a_2]|} \right|$$

Если посмотреть теперь внимательнее на полученную формулу, то можно увидеть за ней ещё такой смысл. Искомое расстояние — это высота параллелепипеда, построенного на векторах  $(r_2 - r_1)$ ,  $a_1$  и  $a_2$ . Высота, проведённая к основанию, соответствующему векторам  $a_1$  и  $a_2$ .  $\square$

## 2.5. # 6.18(1)

**Задача.** Составить уравнение прямой  $l$ , проходящей через точку  $A(1, 3, 1)$  и параллельной прямой  $l_2$ , заданной как пересечение плоскостей:

$$l_2: \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

**Решение.** Уже дана начальная точка  $r_0$  прямой  $l$ . Не хватает только, например, направляющего вектора. Который, очевидно, надо искать из условия параллельности  $l$  и  $l_2$ .

Раз прямые параллельны, то в качестве направляющего  $l$  можно взять направляющий  $l_2$ . Его же можно найти по формуле (9):

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (4, -3, 1)$$

Итого, уравнение прямой  $l$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Или в каноническом виде:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-1}{1}$$

□

## 2.6. # 6.17(1)

**Задача.** Составить уравнение плоскости  $\alpha$ , проходящей через точку  $A(1, -1, 2)$  и параллельной плоскости  $\alpha_2$ , заданной уравнением в общей декартовой системе координат:

$$\alpha_2: x - 3y + 2z + 1 = 0$$

**Решение.** Раз плоскости параллельны, то должны быть пропорциональны коэффициенты  $A, B, C$  в их уравнениях вида (1). Почему так — можно понять из такого наблюдения. Если известен нормальный вектор плоскости  $\mathbf{n}$ , то её можно описать уравнением:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0$$

Разложим радиус-вектор точки плоскости  $\mathbf{r}$  по базису:

$$\mathbf{r} = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

Теперь подставим в нормальное уравнение плоскости:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{n})x + (\mathbf{e}_2, \mathbf{n})y + (\mathbf{e}_3, \mathbf{n})z - (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0$$

Видно, что в общей декартовой системе координат коэффициенты  $A, B, C$  — не компоненты вектора нормали, а скалярные произведения вида  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{n})$ . Но в любом случае коэффициенты пропорциональны компонентам вектора  $\mathbf{n}$ .

Если же плоскости параллельны, то вектора нормали для них можно выбрать одинаковыми. Что и даст вообще одинаковые коэффициенты  $A, B, C$ . В общем случае у параллельных плоскостей нормали параллельны, поэтому коэффициенты перед переменными в уравнении должны быть пропорциональны.

Итак, уравнение плоскости  $\alpha$  можно искать в виде:

$$x - 3y + 2z + D = 0$$

Подставляя координаты точки  $A$ , находим  $D$ :

$$1 - 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow D = -8$$

Итоговое уравнение:

$$x - 3y + 2z - 8 = 0$$

□