Семинар 7

Алексеев Василий

20 + 24 октября 2022

Содержание

1. Кривые второго порядка

Прямая в общей декартовой системе координат (ОДСК) на плоскости задавалась линейным уравнением:

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0$$

Кривая *второго* порядка в ОДСК на плоскости задаётся уравнением вида:

$$\boxed{\begin{cases} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \\ A^2 + B^2 + C^2 > 0 \end{cases}}$$

Всего существует несколько “типов” кривых второго порядка. Рассмотрим далее самые “популярные”.

1.1. Эллипс

Определение 1.1. *Эллипсом* называется такая кривая второго порядка, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат (ДПСК) может быть задана уравнением вида:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ a \geq b > 0 \end{cases}} \tag{1}$$

Указанная система координат называется *канонической системой координат*, а уравнение эллипса (1) в этой системе координат — *каноническим уравнением* эллипса.

По уравнению (1) можно видеть, что эллипс ограничен. Причём “крайние” точки — это точки с координатами $(\pm a, 0)$ и $(0, \pm b)$. Эти точки называются *вершинами* эллипса. Величины a и b — это *большая и малая полуоси* эллипса соответственно (см. рисунок (1)). С эллипсом связаны ещё две особые точки — *фокусы* эллипса. Фокусы — это точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$, где c —*фокальное расстояние* и считается для эллипса по формуле:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \tag{2}$$

Эксцентриситетом эллипса ε называется следующая величина:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \tag{3}$$

Из (2) видно, что $\varepsilon < 1$. Также очевидно, что $\varepsilon > 0$. При этом возможен и случай $\varepsilon = 0$, когда $a = b$, то есть для окружности.

Выделяются две прямые, называемые *директрисами* эллипса:

$$d_1 : x = \frac{a}{\varepsilon}, \quad d_2 : x = -\frac{a}{\varepsilon}$$

Выясним, что “интересного” связано с введёнными “буквами” и понятиями.

Оказывается, что *сумма расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов постоянна*. Проверим это. Пусть точка $M(x_0, y_0)$ лежит на эллипсе, то есть её координаты удовлетворяют соотношению:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

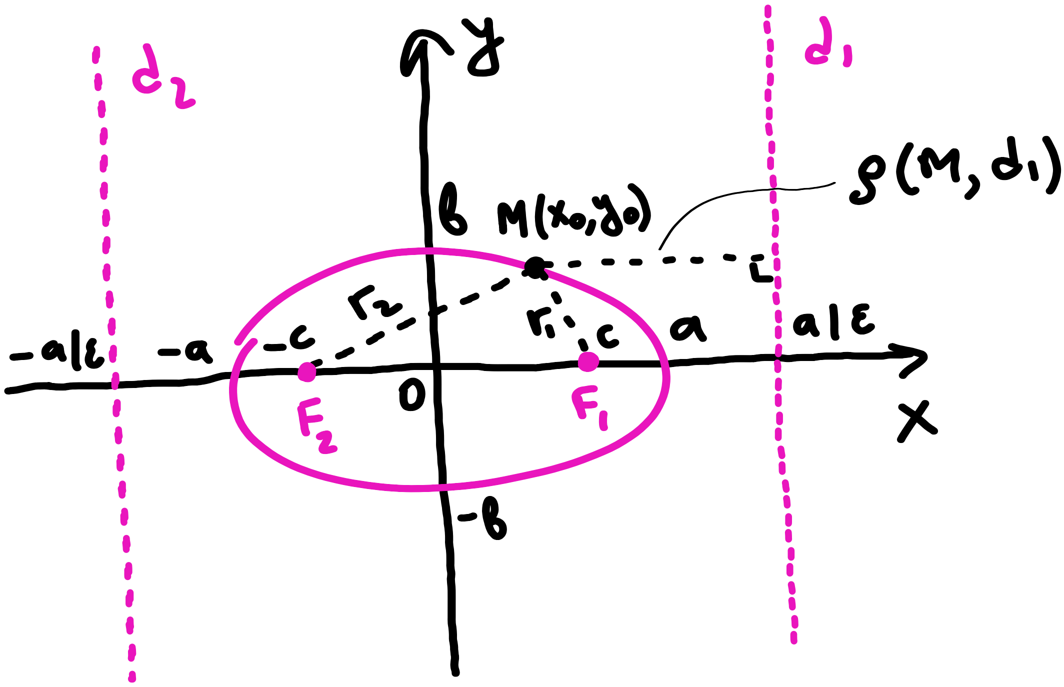

Рис. 1: Эллипс и “всё основное”, что с ним связано.

Найдём расстояние $|MF_1|$ от точки M до фокуса F_1. Обозначим это расстояние как r_1 — один из двух *фокальных радиусов* точки M. Так как система координат прямоугольная, то r_1 можно посчитать по формуле:

$$r_1 = \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2}$$

Выразим y_0 из соотношения для координат точки M (4), подставим в формулу для r_1 и проведём ещё несколько несложных преобразований и “переименований”:

$$r_1 = \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_0 - c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right)} = \ldots = a - \varepsilon x_0 \tag{5}$$

Аналогичным образом можно получить, что расстояние $|MF_2|$ от точки M до второго фокуса F_2 выражается как:

$$r_2 = a + \varepsilon x_0$$

Складывая фокальные радиусы, получаем:

$$\boxed{r_1 + r_2 = 2a} \tag{6}$$

То есть сумма расстояний от точки эллипса до фокусов в самом деле постоянна, причём равна $2a$. Но верно также и *обратное* свойство. Пусть даны $a \geq b > 0$. Пусть выбраны две точки с координатами $(\pm c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Тогда если про некоторое множество точек $\mathscr{P}$ известно, что для точек из $\mathscr{P}$ и только для таких точек верно, что сумма расстояний от точки до двух заранее выбранных $(\pm c, 0)$ постоянна и равна $2a$, то $\mathscr{P}$ есть эллипс.

Проверим. Выберем точку $M(x_0, y_0)$ из описанного множества точек $\mathscr{P}$ и распишем сумму расстояний от неё до двух фиксированных точек:

$$\sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2} + \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2} = 2a$$

Избавляясь от корней (например, возводя два раза в квадрат обе части равенства), получаем соотношение:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

То есть произвольная точка из $\mathscr{P}$ лежит на эллипсе с большой полуосью a, малой b и фокусами $(\pm c, 0)$. И при этом нет таких точек, которые бы были на указанном эллипсе, но не были бы в $\mathscr{P}$. Таким образом, $\mathscr{P}$ и есть эллипс. □

С директрисами связано следующее свойство. *Отношение расстояния от точки $M(x_0, y_0)$ эллипса до фокуса к расстоянию от M до соответственной директрисы равно эксцентриситету ε.* Например, для расстояний до фокуса F_1 и директрисы d_1:

$$\frac{r_1}{\rho(M, d_1)} = \frac{a - \varepsilon x}{a/\varepsilon - x} = \varepsilon$$

1.2. # 7.25(5)

В данной системе координат эллипс имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, если расстояние от директрисы до ближайшей вершины равно 4. А до вершины, лежащей на оси OY, расстояние равно 8.

Решение. Перепишем условие "в нужных терминах".

Расстояние от директрисы до ближайшей вершины:

$$a/\varepsilon - a = 4$$

Расстояние от директрисы до вершины на OY:

$$a/\varepsilon - 0 = 8$$

Получается, $a = 4$, $\varepsilon = 1/2 < 1$. Теперь можно найти малую полуось:

$$\begin{cases} \varepsilon = c/a \\ c^2 = a^2 - b^2 \end{cases} \Rightarrow b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2) = 4^2(1 - (1/2)^2) = 12$$

Можем выписать каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

□

1.3. # 7.26(4)

Вычислить эксцентриситет эллипса, если отрезок между фокусами виден из конца малой оси под прямым углом.

Решение. Пусть B — "верхняя" вершина эллипса (один из концов малой оси). Тогда треугольник $\triangle BF_1F_2$ по условию прямоугольный. Очевидно, он также и равнобедренный: $BF_1 = BF_2 \equiv r_b$.

Сумма расстояний от точки эллипса до фокусов постоянна и равна $2a$ (6). В случае с точкой B это значит, что $BF_1 + BF_2 = 2a \Rightarrow r_b = a$.

Вернёмся к треугольнику $\triangle BF_1F_2$. Так как он прямоугольный:

$$F_1F_2^2 = BF_1^2 + BF_2^2 \Leftrightarrow (2c)^2 = a^2 + a^2$$

Таким образом,

$$c = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

И потому эксцентриситет эллипса оказывается равным:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

□

1.4. Гипербола

Определение 1.2. *Гипербола* — кривая второго порядка, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат может быть описана уравнением:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad a > 0,\ b > 0 \tag{7}$$

Прямоугольная декартова система координат, в которой гипербола описывается уравнением вида (7), называется *канонической*, и само уравнение (7) в таком случае — *каноническим* уравнением гиперболы.

По уравнению (7) можно видеть, что гипербола неограничена. Также видно, что, например, точки $(\pm a, 0)$ лежат на гиперболе. А ось OY гипербола вообще никогда не пересекает...

Оказывается, что у гиперболы есть две наклонных асимптоты (см. рисунок (2)):

$$\boxed{y = \pm\frac{b}{a}x}$$

Проверим, что это так. Если у гиперболы есть асимптота, то она будет "пределом касательной" в точке $M(x_0, y_0)$ при стремлении $x_0 \to +\infty$. Найдём уравнение касательной к гиперболе в точке $M(x_0, y_0)$. Пусть, для определённости, $x_0 > 0$ и $y_0 > 0$. Будем искать уравнение касательной в виде:

$$y = k_1x + k_2$$

Коэффициент k_1 — тангенс угла наклона касательной к оси OX. На него можно смотреть как на предел

$$k_1 = \lim_{x\to x_0}\frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{dx\to 0}\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_0}$$

Чтобы найти этот предел, можно сначала взять дифференциал от обеих частей уравнения гиперболы в точке $M(x_0, y_0)$:

$$\frac{x_0dx}{a^2} - \frac{y_0dy}{b^2} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_0} = \frac{x_0b^2}{y_0a^2}$$

Таким образом,

$$k_1 = \frac{x_0b^2}{y_0a^2}$$

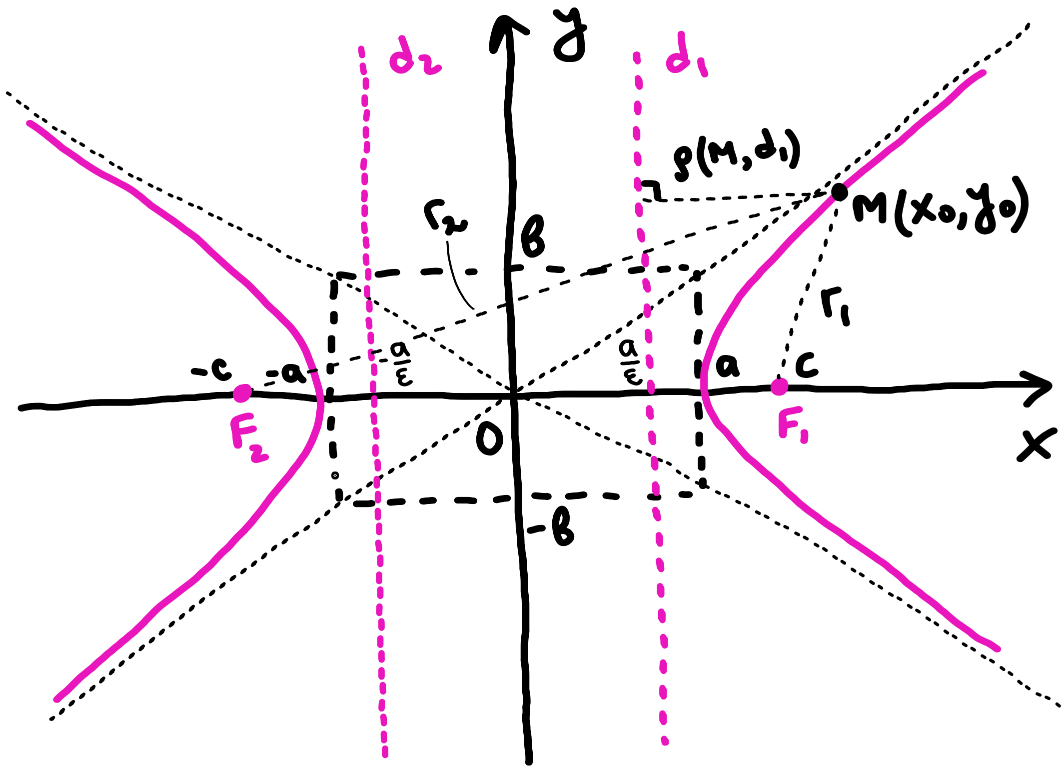

Рис. 2: Гипербола и “всё основное”, что с ней связано.

Как себя ведёт угол наклона касательной при $x_0 \to +\infty$? Для определённости будем двигать точку касания “выше” оси OX, то есть считаем, что $y_0 > 0$ (см. рисунок (3)). При нахождении предела k_1 воспользуемся тем, что точка касания лежит и на гиперболе — благодаря этому можно выразить y_0 через x_0:

$$\lim_{x_0\to+\infty} k_1 = \lim_{x_0\to+\infty} \frac{x_0 b^2}{y_0 a^2} = \lim_{x_0\to+\infty} \frac{x_0 b^2}{a^2\sqrt{b^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}-1\right)}} = \frac{b}{a}$$

То есть у гиперболы в самом деле есть асимптота. Остаётся найти коэффициент k_2. Для касательной он будет равен:

$$y_0 = k_1 x_0 + k_2 \Rightarrow k_2 = y_0 - k_1 x_0 = y_0 - \frac{x_0^2 b^2}{y_0 a^2} = -\frac{b^2}{y_0}$$

И для асимптоты:

$$\lim_{x_0\to+\infty} k_2 = \lim_{x_0\to+\infty} -\frac{b^2}{y_0} = 0$$

Мы рассматривали точки касания (x_0, y_0), у которых $x_0 > 0$ и $y_0 > 0$. Такую же асимптоту получили бы и для точек из третьей координатной четверти. В других случаях (для точек гиперболы из второй и четвёртой четвертей) могли бы ещё получить асимптоту с углом наклона $-b/a$.

Итак, гипербола состоит из двух ветвей. Точки $(\pm a, 0)$ называются *вершинами* гиперболы. Величина a называется *действительной полуосью*, а b — *мнимой полуосью*. У гиперболы, так же, как и у эллипса, есть два фокуса — точки с координатами $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$. Правда, *фокальное расстояние* c считается уже по-другому:

$$\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

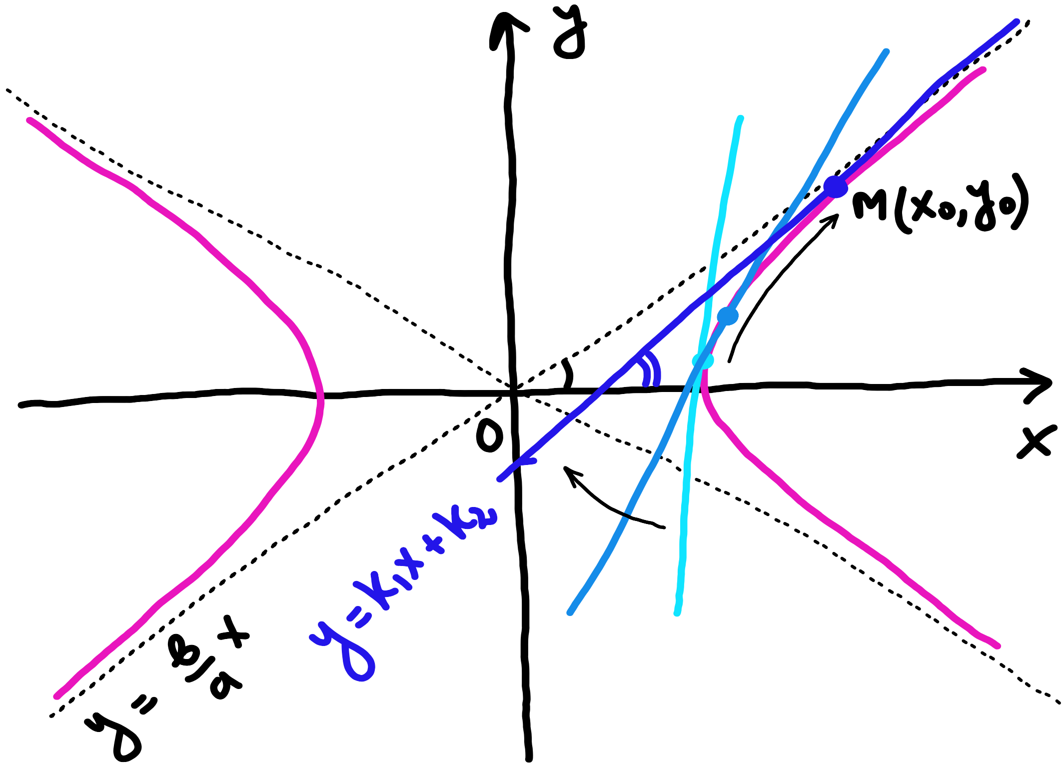

Рис. 3: Касательная к гиперболе в точке (x_0, y_0), $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ при увеличении x_0.

Таким образом, у гиперболы $c > a$.

Далее, у гиперболы, так же, как и у эллипса, есть *эксцентриситет*, который определяется как отношение:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

Как видно из формулы, эксцентриситет гиперболы *больше единицы*.

Определим также две вертикальные прямые — *директрисы* гиперболы:

$$d_1 : \ x = \frac{a}{\varepsilon}, \quad d_2 : \ x = -\frac{a}{\varepsilon}$$

Аналогично случаю с эллипсом, можно получить формулы для расстояния от точки гиперболы $M(x_0, y_0)$ до фокусов F_1 и F_2:

$$r_1 = |MF_1| = |a - \varepsilon x_0|, \quad r_2 = |MF_2| = |a + \varepsilon x_0|$$

Модули уже будут раскрываться по-разному для точек из разных координатных четвертей. Но можно убедиться в том, что во всех случаях *модуль разности расстояний от точки гиперболы до фокусов постоянен*:

$$\boxed{|r_1 - r_2| = 2a}$$

Также несложно проверить, что *отношение расстояния от точки гиперболы M до фокуса к расстоянию от M до соответственной директрисы равно эксцентриситету*:

$$\frac{r_1}{\rho(M, d_1)} = \varepsilon$$

1.5. # 7.38(4)

В данной системе координат гипербола имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, если длина мнимой полуоси равна 1, а вершина гиперболы делит отрезок между фокусами в отношении $4 : 1$.

Решение. Снова попытаемся "переписать условие", но на этот раз "в терминах гиперболы". Получается, дана длина мнимой полуоси: $b = 1$. До канонического уравнения не хватает найти a.

Отношение длин отрезков, на которые вершина делит отрезок между фокусами:

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{4}{1} \Rightarrow 5a = 3c$$

Выразим c через a и b:

$$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + 1$$

Возведём в квадрат соотношение, полученное шагом ранее, и подставим выражение для c:

$$25a^2 = 9(a^2 + 1) \Rightarrow a = 3/4$$

Тогда каноническое уравнение:

$$\frac{16}{9}x^2 - y^2 = 1$$

□

1.6. # 7.40(2)

Вычислить эксцентриситет гиперболы, если угол между асимптотами, содержащий фокус, равен 120°.

Решение. Половина угла между асимптотами есть 60°. Таким образом, тангенс угла наклона асимптоты:

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

Эксцентриситет гиперболы:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = 2 > 1$$

□

1.7. Парабола

Определение 1.3. *Параболой* называется кривая второго порядка, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат может быть задана уравнением вида:

$$\boxed{y^2 = 2px} \quad p > 0 \tag{8}$$

Декартова прямоугольная система координат, где парабола задаётся уравнением вида (8), называется *канонической системой координат*, а само уравнение параболы в этой системе координат — *каноническим уравнением* параболы.

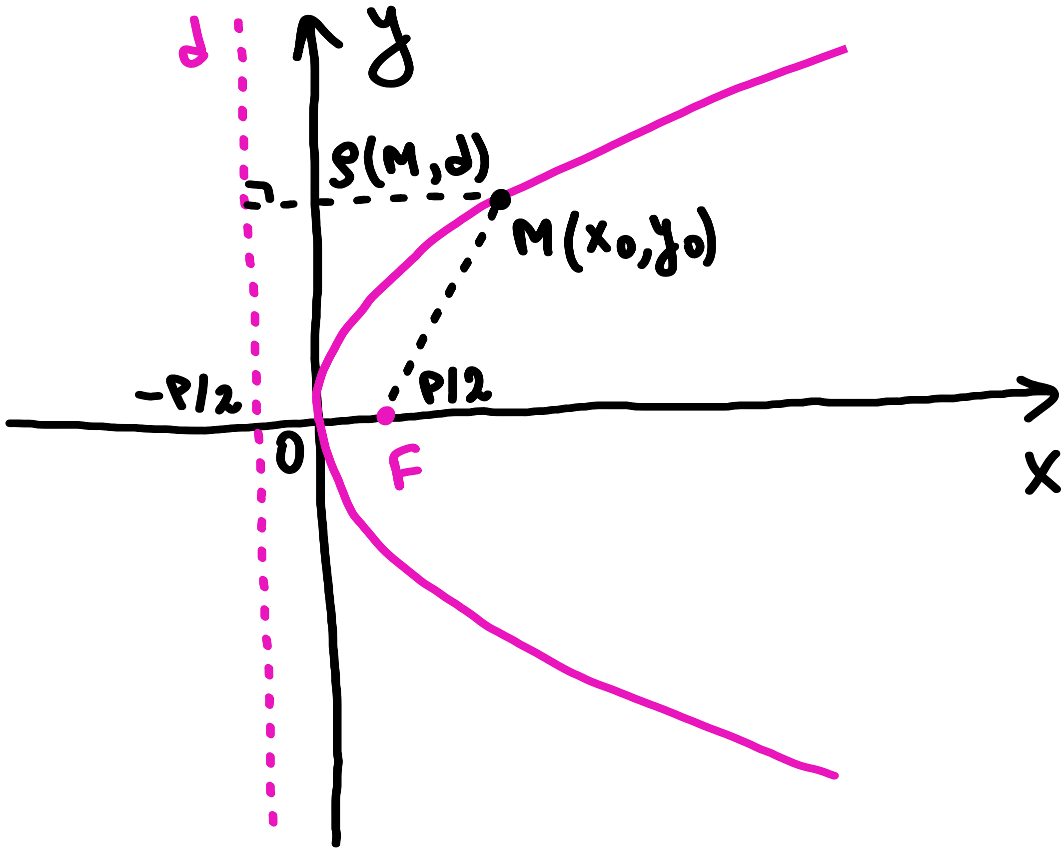

Рис. 4: Парабола и “всё основное”, что с ней связано.

Видно, что, парабола неограничена. Также видно, что, в отличие от рассмотренных ранее эллипса (1) и гиперболы (7), парабола имеет только одну ось симметрии (см. рисунок (4)): если точка (x_0, y_0) лежит на параболе, то и точка $(x_0, -y_0)$ лежит на ней, но у всех точек параболы $x_0 > 0$.

Величина p называется *параметром параболы*. *Фокус* параболы — точка $F(p/2, 0)$. Директриса — вертикальная прямая $d:\ x = -p/2$. Эксцентриситет параболы полагается равным единице: $\varepsilon = 1$.

Найдём расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ параболы до фокуса F:

$$r = \sqrt{(x_0 - p/2)^2 + y_0^2} \overset{y_0^2 = 2px_0}{=\!=\!=} x_0 + p/2$$

Видно, что *отношение расстояния от точки $M(x_0, y_0)$ параболы до фокуса к расстоянию от M до директрисы равно эксцентриситету ε* (то есть указанные расстояния одинаковые):

$$\frac{r}{\rho(M, d)} = \frac{x_0 + p/2}{x_0 - (-p/2)} = 1 = \varepsilon$$

1.8. # 7.54(3)

В данной системе координат парабола имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, если длина хорды, проходящей через фокус под углом 45° к оси параболы, равна 18.

Решение. Не совсем очевидно[1], можно ли как-то “по-простому”, как в аналогичных но-

[1]По крайней мере, автору конспекта не очевидно :)

мерах для эллипса и гиперболы, переписать условие в нужных терминах, чтобы сразу что-то посчитать... Поэтому предлагается пойти, возможно не самым оптимальным, но точно "пробивным" путём. Найдём уравнение прямой l, содержащей описанную хорду. Определим точки — концы хорды. И после этого составим уравнение, используя данную в условии длину хорды.

Будем искать уравнение прямой l в виде $y = ax + b$ (наклонная прямая). Нам дан угол наклона хорды, поэтому сразу понятно, что $a = 1$. Далее, прямая l проходит через фокус, поэтому можно записать:

$$0 = \frac{p}{2} + b \Rightarrow b = -\frac{p}{2}$$

Таким образом, уравнение прямой l, которая содержит хорду из условия:

$$y = x - \frac{p}{2}$$

Теперь определим точки пересечения прямой l и параболы (концы хорды):

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = x - \dfrac{p}{2} \end{cases}$$

Решая систему, находим координаты точек:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3p \pm 2p\sqrt{2}}{2} \\ y = 2p \pm 2p\sqrt{2} \end{cases}$$

Длина хорды:

$$18^2 = \left(\frac{3p + 2p\sqrt{2}}{2} - \frac{3p - 2p\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\left(2p + 2p\sqrt{2}\right) - \left(2p - 2p\sqrt{2}\right)\right)^2 \Rightarrow p = \frac{9}{2}$$

И потому каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 9x$$

$\square$

2. Дополнение

2.1. Про конические сечения

Кривые второго порядка можно получать, пересекая двойной круговой конус (не обязательно прямой) плоскостью, не проходящей через вершину конуса (5).

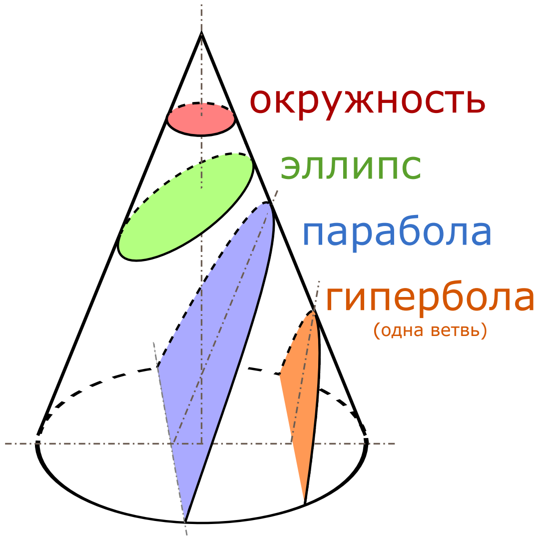

Рис. 5: Кривые второго порядка (эллипс, гипербола и парабола) — как конические сечения.

Можно заметить, что эксцентриситет увеличивается в ряду “окружность – эллипс – парабола – гипербола” (6). Таким образом, эксцентриситет выражает некую меру кривизны кривой: от максимальной у окружности до минимальной у гиперболы.

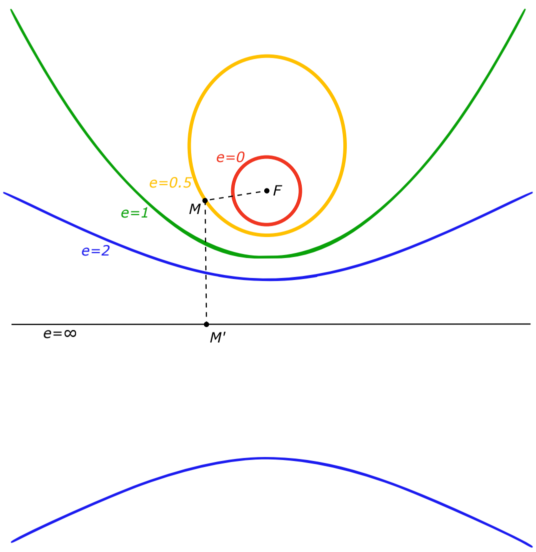

Рис. 6: Эксцентриситет — как число, отражающее кривизну линии второго порядка. Кривизна уменьшается с увеличением эксцентриситета.

Мы определяли эксцентриситет для эллипса и гиперболы через отношение c к a (к слову, c ещё называют *линейным эксцентриситетом* или *фокальным расстоянием* — расстояние между центром и фокусом). У параболы же нет c (так как нет центра), но отношение расстояния от точки параболы до фокуса к расстоянию от той же точки до директрисы было равно 1, то есть эксцентриситету параболы... Существует более общее определение эксцентриситета, которое подходит как для окружности, так и для эллипса, гиперболы и параболы — через конические сечения (7):

$$\begin{cases} \varepsilon = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} \\ 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq \beta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

где β — угол наклона секущей конус плоскости, а α — угол между образующей конуса и его основанием.

В пределе $\alpha \to +0$ (сплющенный конус) в сечении в пределе получается прямая, поэтому для прямой можно считать эксцентриситет $\varepsilon \to +\infty$ (6).

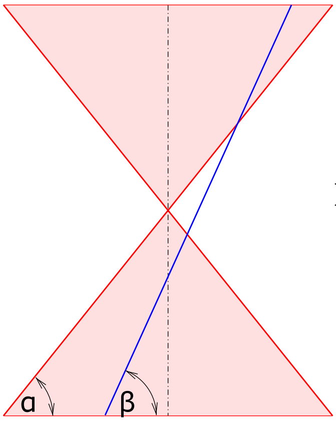

Рис. 7: К определению эксцентриситета через конические сечения.

2.2. Про $2p$

В каноническом уравнении параболы

$$y^2 = 2px, \quad p > 0$$

двойка на самом деле “не просто так”: p — половина так называемого *latus rectum*[2] (8). То есть p — это длина части перпендикуляра к оси параболы, проходящего через фокус, от фокуса до параболы. Точно так же p определяется и в случае эллипса и гиперболы.

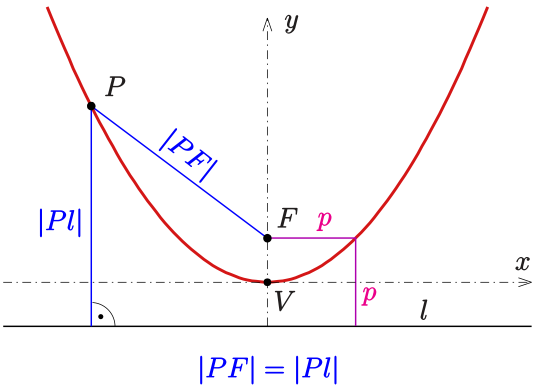

Рис. 8: Число p из канонического уравнения параболы.

[2]Latus переводится с латинского как “прямой”, а rectum — “кишка”?.. Или это всё вместе переводится как “прямая сторона” (по другим источникам)?.. Автору конспекта ответ не известен.