

# Семинар 3

Алексеев Василий

15 + 20 сентября 2021

## Содержание

<b>1</b>	<b>Замена базиса</b>	<b>1</b>
1.1	Поворот базиса . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Система координат + Замена</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Дополнение</b>	<b>8</b>
3.1	Скалярное произведение . . . . .	8
3.2	Ещё пара задач про несколько систем координат . . . . .	10

# 1. Замена базиса

**Задача (4.7).** Есть два базиса на плоскости (которые заданы компонентами в каком-то третьем базисе). Первый:  $e_1(2, 3)$  и  $e_2(3, 4)$ . Второй:  $e'_1(1, -1)$  и  $e'_2(2, -3)$ .

Надо выразить координаты произвольного вектора  $a$  в базисе  $e$  по его координатам  $(\alpha'_1, \alpha'_2)$  в базисе  $e'$ .

**Решение.** Обозначим векторы того “третьего” базиса (в котором заданы векторы  $e$  и  $e'$ ) за  $p$  и  $q$ . Занесём в табличку известные координаты участвующих в задаче векторов в разных базисах (1).

Таблица 1: Координаты векторов (по вектору в строке) в разных базисах (в столбце — координаты векторов в одном базисе). В задаче надо найти **такие** координаты.

	$(p, q)$	$(e_1, e_2)$	$(e'_1, e'_2)$
$e_1$	(2, 3)	(1, 0)	
$e_2$	(3, 4)	(0, 1)	
$e'_1$	(1, -1)		(1, 0)
$e'_2$	(2, -3)		(0, 1)
$a$		$(\alpha_1, \alpha_2)$	$(\alpha'_1, \alpha'_2)$

Теперь посмотрим на вектор  $a$  в разных базисах:

$$a = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 = \alpha'_1 \cdot e'_1 + \alpha'_2 \cdot e'_2$$

Чтобы найти  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , можно выразить все  $e_i$  и  $e'_i$  через  $p$  и  $q$ :

$$\alpha_1 \cdot (2p + 3q) + \alpha_2 \cdot (3p + 4q) = \alpha'_1 \cdot (p - q) + \alpha'_2 \cdot (2p - 3q)$$

Тогда после приведения получится, что

$$(2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha'_1 - 2\alpha'_2)p + (3\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha'_1 + 3\alpha'_2)q = 0$$

линейная комбинация векторов  $p$  и  $q$  равна нулю. Но, так как они линейно независимые, отсюда можно заключить, что нулю равны коэффициенты при  $p$  и  $q$ :

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha'_1 - 2\alpha'_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha'_1 + 3\alpha'_2 = 0 \end{cases}$$

Решая полученную систему (например, с помощью правила Крамера), получаем:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -7\alpha'_1 - 17\alpha'_2 \\ \alpha_2 = 5\alpha'_1 + 12\alpha'_2 \end{cases}$$

□

Решённая задача — пример перехода от одного базиса к другому. Рассмотрим этот вопрос в более общем виде. Будем обозначать векторы базиса в виде строки. Например:

$$e = (e_1, e_2, e_3)$$

для случая базиса во всём пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Аналогично и для базисов на плоскости и на прямой (в  $\mathbb{R}^2$  и в  $\mathbb{R}$ ).

При заданном базисе  $e$  любой вектор  $a$  пространства однозначно определяется его компонентами в базисе:

$$a = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3 \Rightarrow a \leftrightarrow x = (x_1, x_2, x_3)^T$$

поэтому, говоря о векторе — направленном отрезке, часто имеют в виду его компоненты в базисе (то есть понятия вектора как направленного отрезка и вектора как столбца из чисел при фиксированном базисе взаимозаменяемы).

В пространстве существует больше одного базиса: любая тройка некомпланарных векторов в  $\mathbb{R}^3$  образует базис. Встаёт вопрос о том, как связаны компоненты одного и того же вектора в разных базисах.

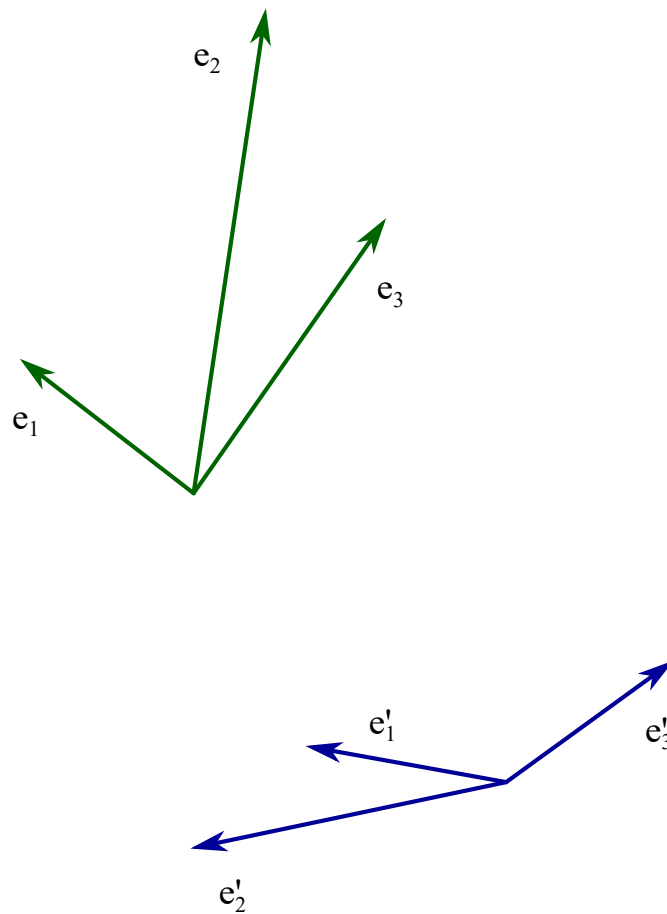


Рис. 1: Два разных базиса в пространстве.

Пусть есть два базиса:  $e$  и  $e'$  (1). Тогда векторы базиса  $e'$  можно разложить по  $e$ :

$$\begin{cases} e'_1 = a_{11} \cdot e_1 + a_{12} \cdot e_2 + a_{13} \cdot e_3 \\ e'_2 = a_{21} \cdot e_1 + a_{22} \cdot e_2 + a_{23} \cdot e_3 \\ e'_3 = a_{31} \cdot e_1 + a_{32} \cdot e_2 + a_{33} \cdot e_3 \end{cases} \quad (1)$$

Запись можно представить более компактно<sup>1</sup>:

$$e' = eS$$

<sup>1</sup>Под результатом умножения строки из векторов  $e$  на матрицу из чисел  $S$  будем иметь в виду такую строку  $e'$  из векторов, где каждый элемент равен линейной комбинации векторов умножаемой строки  $e$  с коэффициентами, равными элементам соответственного столбца матрицы  $S$ . То есть по правилу умножения числовых матриц.

где  $S$  называется *матрицей перехода* от базиса  $e$  (“старого”) к базису  $e'$  (“новому”):

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

во введенных ранее обозначениях (1). Столбцы матрицы перехода  $S$  — это координаты векторов нового базиса в старом базисе (“переход от  $e$  к  $e'$ ”: зная векторы  $e$ , надо получить векторы  $e'$ ).

Посмотрим теперь, как выражаются компоненты некоторого вектора  $a$  в одном базисе через его же компоненты, но в другом базисе. Имеем

$$a = ex = e'x' \quad (2)$$

где  $a$  — вектор как направленный отрезок,  $x \equiv x_e$  — вектор-столбец, соответствующий  $a$  в базисе  $e$ ,  $x' \equiv x_{e'}$  — вектор-столбец, соответствующий  $a$  в базисе  $e'$ .

Теперь воспользуемся тем, что нам известно представление базиса  $e'$  через вектора базиса  $e$ :

$$e'x' = (eS)x' \stackrel{(2)}{=} ex$$

Так как умножение матриц ассоциативно, а также дистрибутивно относительно матричного сложения, мы можем перенести  $ex$  влево и перегруппировать слагаемые:

$$e \cdot (Sx' - x) = 0$$

Из линейной независимости системы векторов  $e$  получаем:

$$Sx' - x = 0 \Leftrightarrow x = Sx'$$

Итак, в двух базисах компоненты векторов связаны так:

$$\boxed{\begin{cases} e' = eS \\ x = Sx' \end{cases}} \quad (3)$$

При этом, при переходе, наоборот, от базиса  $e'$  к базису  $e$  можно написать аналогичное соотношение, но уже с другой матрицей перехода, которую обозначим за  $S'$ :

$$\begin{cases} e = e'S' \\ x' = S'x \end{cases}$$

## 1.1. Поворот базиса

Рассмотрим отдельно преобразование поворота правого<sup>2</sup> ортонормированного базиса  $e_1, e_2$  на плоскости на угол  $\phi$  против часовой стрелки (2).

Имеем для компонент векторов  $e'$  в базисе  $e$ <sup>3</sup>:

$$\begin{cases} e'_1 = |e'_1| \cdot \cos \phi \cdot e_1 + |e'_1| \cdot \sin \phi \cdot e_2 \\ e'_2 = |e'_2| \cdot \cos \left( \phi + \frac{\pi}{2} \right) \cdot e_1 + |e'_2| \cdot \sin \left( \phi + \frac{\pi}{2} \right) \cdot e_2 \end{cases}$$

<sup>2</sup>Поворот от первого базисного вектора ко второму по наименьшему углу происходит против часовой стрелки.

<sup>3</sup>Угол именно  $\phi + \frac{\pi}{2}$ ! чтобы при умножении на  $\cos/\sin$  получить скалярные проекции на направления базисных векторов.

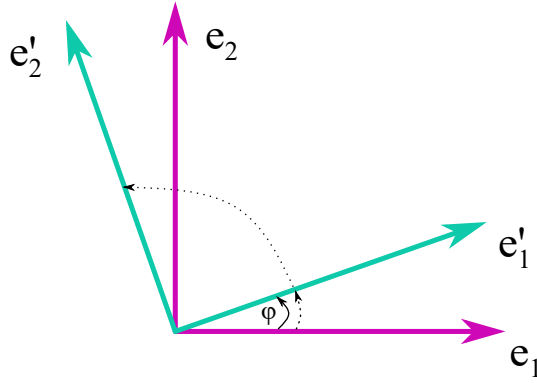


Рис. 2: Базис  $e'$  повёрнут на угол  $\phi$  относительно базиса  $e$ .

Так как модули векторов единичные:

$$e' = e \begin{pmatrix} \cos \phi & \cos \left( \phi + \frac{\pi}{2} \right) \\ \sin \phi & \sin \left( \phi + \frac{\pi}{2} \right) \end{pmatrix}$$

То есть матрица перехода:

$$S' = \begin{pmatrix} \cos \phi & \cos \left( \phi + \frac{\pi}{2} \right) \\ \sin \phi & \sin \left( \phi + \frac{\pi}{2} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Таким образом, получили матрицу, задающую поворот правого ортонормированного базиса на угол  $\phi$  против часовой стрелки. То же самое получилось бы, если бы старый базис был левый ортонормированный, а новый получался бы его поворотом по часовой стрелке на угол  $\phi$ .

Аналогично можно получить матрицу перехода, когда базис  $e'$  не только повёрнут относительно  $e$ , но если второй вектор ещё отражён относительно первого. То есть если базис  $e'$  левый, а  $e$  правый, и наоборот (2). В этом случае при нахождении  $e'_2$  будет использоваться угол не  $\phi + \frac{\pi}{2}$ , а  $\phi - \frac{\pi}{2}$ .

## 2. Система координат + Замена

Имея базис в пространстве, можно описать любой вектор с помощью столбца из чисел — его координат в базисе. Но как описать просто точку? Ведь у неё нет ни “длины”, ни “направления”... Один из способов — зафиксировать некоторую точку  $O$ , и строить векторы с началом в  $O$  и концом в интересующей точке пространства (*радиусы-векторы*). Тогда за описание точки можно принять координаты соответствующего ей радиуса-вектора (при выбранном базисе и выбранной точке  $O$ ). Описанный способ задания точек называется *общей декартовой системой координат*<sup>4</sup> (4).

**Определение 2.1.** Общей декартовой системой координат называется совокупность точки  $O$  (*начала системы координат*) и базиса:  $(O; e_1, \dots, e_n)$

<sup>4</sup>Помимо декартовой, есть и другие системы координат. Например полярная, когда положение точки на плоскости определяется по расстоянию  $r$  от начала координат  $O$  и по углу  $\phi$ , которое направление из начала координат на точку образует с выбранным направлением  $l$ :  $a \leftrightarrow (r, \phi)$ .

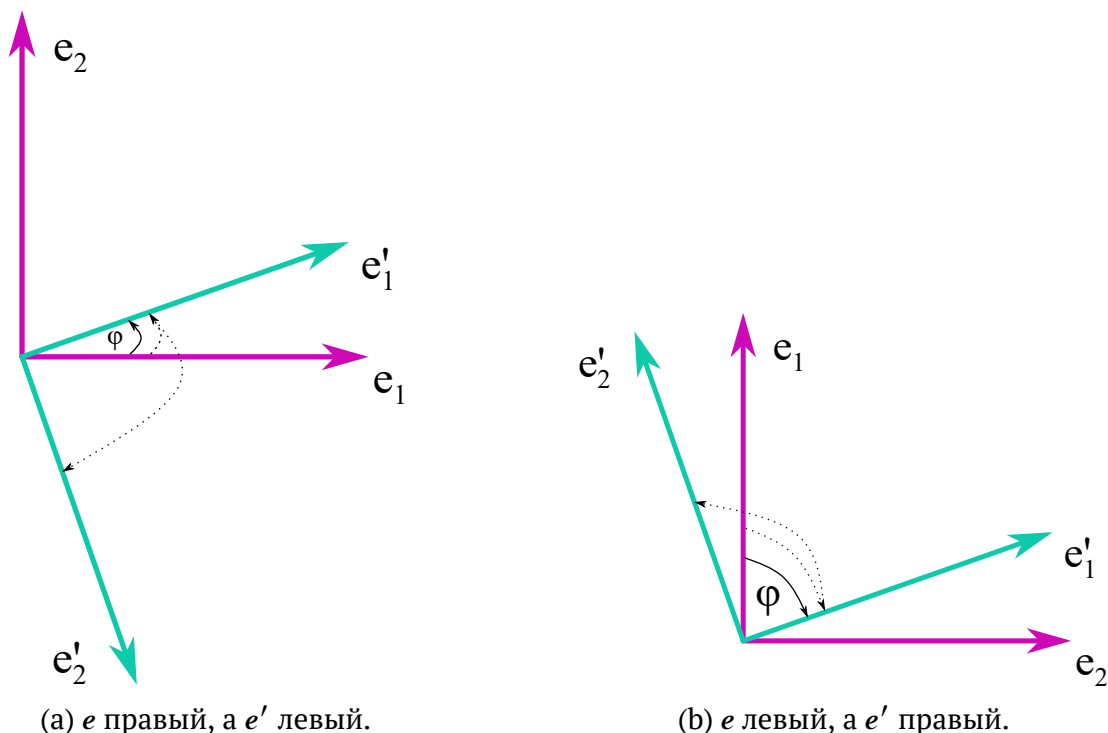


Рис. 3: Базис  $e'$  повернут на угол  $\phi$  относительно базиса  $e$ , при этом поворот от первого вектора ко второму по наименьшему углу в старом и новом базисах совершается в разные стороны.

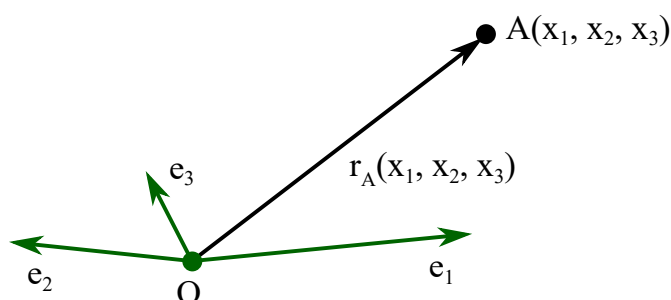


Рис. 4: Общая декартова система координат (совокупность точки и базиса) — способ описания точек в пространстве.

**Определение 2.2.** Прямоугольной декартовой системой координат называется такая общая декартова система координат, в которой базисные векторы перпендикулярны и по длине равны единице.

*Замечание.* При заданной системе координат  $O; e_1, \dots, e_n$  каждой точке  $A$  можно поставить в соответствие набор чисел — компонент радиуса-вектора точки в базисе  $\vec{OA} = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ :

$$A \leftrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$$

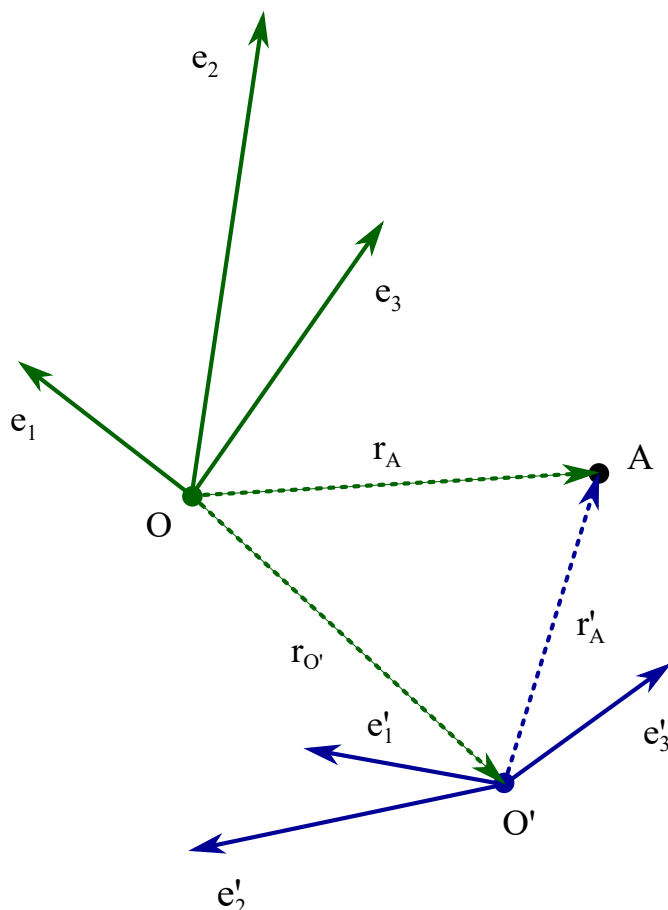


Рис. 5: Две системы координат в пространстве.

Аналогично с заменой базиса, может возникнуть вопрос, как меняются координаты точек при смене системы координат (5). Пусть есть две системы координат: “старая”  $(O; e)$  и “новая”  $(O'; e')$ . Пусть нам известно положение точки  $A$  относительно новой системы координат. Также пусть нам известно, как выражаются базисные векторы новой системы  $e'$  через векторы старой  $e$  и как расположено начало новой системы  $O'$  в старой системе. Очевидно, по этой информации мы должны уметь найти, как расположена точка  $A$  в старой системе координат  $(O; e)$ ...

Введём обозначения: пусть  $r_A \equiv r_O(A)$  — радиус-вектор точки  $A$  в системе  $(O; e)$ ,  $r'_A \equiv r_{O'}(A)$  — радиус-вектор точки  $A$  в системе  $(O'; e')$ , и  $r_{O'} \equiv r_O(O')$  — радиус-вектор, определяющий положение начала отсчёта  $O'$  в системе  $(O; e)$ . Очевидно, что

$$r_A = r_{O'} + r'_A$$

В системе  $(O'; e')$  известно координатное представление вектора  $r'_A$ . Для вектора  $r_{O'}$  известны компоненты в базисе  $(O; e)$ . Как записать соотношение выше через вектор-столбцы компонент векторов в базисах? Для этого *надо все векторы представить в одном базисе*. Из соотношений (3) мы можем найти вектор-столбец радиуса-вектора  $r'_A$  в базисе  $e$  по его координатному столбцу  $x'_A$  в базисе  $e'$ . Он будет равен  $Sx'_A$ . Итого, получаем соотношение для компонент радиусов-векторов точки в разных системах координат:

$$\begin{cases} e' = eS \\ x_A = x_{O'} + Sx'_A \end{cases} \quad (4)$$

то есть для нахождения координат точки в “старой” системе по её координатам в “новой” системе координат надо знать, как выражаются векторы “новой” системы в базисе “старой” и как расположено начало координат “новой” системы в “старой”.

**Задача (4.19).** Треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$  (6). Точка  $M$  — точка пересечения медиан грани  $A_1B_1C_1$ . Требуется, зная координаты точки  $x', y', z'$  в системе  $A_1; \overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1M}$ , найти её координаты  $(x, y, z)$  в системе  $A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}$ <sup>5</sup>.

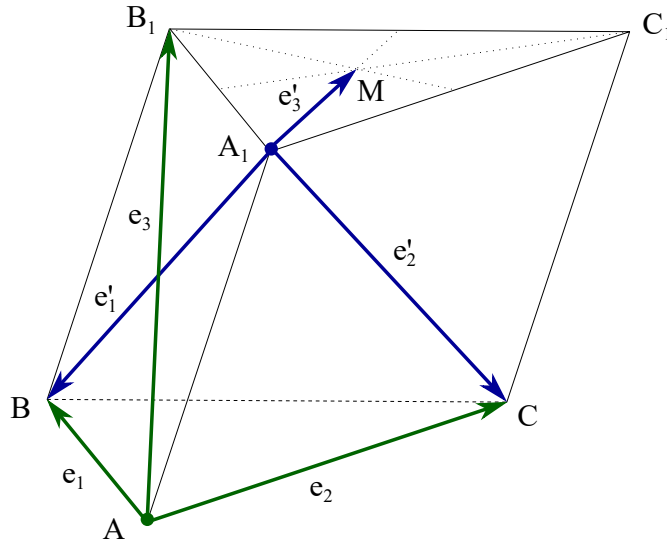


Рис. 6: Призма  $ABCA_1B_1C_1$ .

**Решение.** Что нам надо найти? Вспоминая формулы (3) или (4), получаем, что если векторы базиса связаны соотношением  $e' = eS$ , то компоненты векторов связаны соотношением  $x = Sx'$  и координаты точек связаны соотношением  $x = x_{O'} + Sx'$ . Таким образом, чтобы решить задачу, надо найти матрицу  $S$ , столбцы которой — компоненты базиса  $\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1M}$  в базисе  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}$ , и координаты начала  $A_1$  в системе с началом  $A$ . Обозначим  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}$  за  $e_1, e_2, e_3$  и разложим  $\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1M}$  по этой системе:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1B} &= \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} = e_1 - e_3 + e_1 \\ \overrightarrow{A_1C} &= \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AC} = e_1 - e_3 + e_2 \\ \overrightarrow{A_1M} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1C_1}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(e_1 + e_2)\end{aligned}$$

Итого,

$$(e'_1, e'_2, e'_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Положение  $A_1$  в системе  $(A; e)$ :

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} = e_3 - e_1$$

Поэтому связь между координатами точек в разных системах:

$$x = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x' + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

<sup>5</sup>Порядок базисных векторов важен!



## 3. Дополнение

### 3.1. Скалярное произведение

**Определение 3.1.** Скалярное произведение  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  ненулевых векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  определяется следующим образом:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \phi \quad (5)$$

где  $|\mathbf{a}|$  и  $|\mathbf{b}|$  — модули векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , а  $\phi$  — угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  (не превосходящий  $\pi$ ). В случае, если хотя бы один из пары векторов нулевой, скалярное произведение этих векторов полагается равным нулю.

Отметим несколько свойств скалярного произведения:

- $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$  — симметричность
- $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2$  — скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины
- О равенстве нулю скалярного произведения:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = 0 \text{ или } \mathbf{b} = 0 \text{ или } \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$$

- Линейность по первому аргументу:

$$(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

Первые три свойства следуют из определения. Докажем последнее свойство.

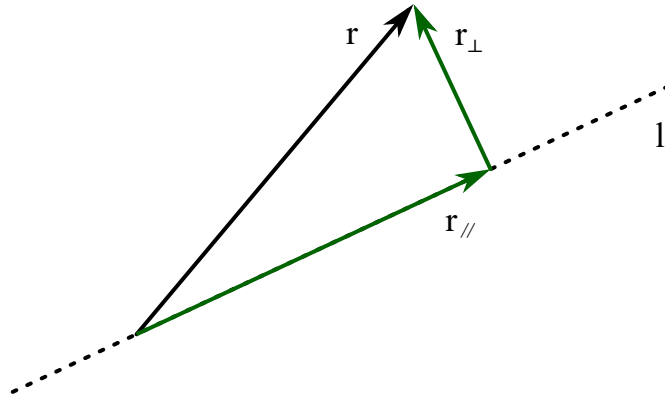


Рис. 7: Векторная проекция вектора  $\mathbf{r}$  на направление, определяемое вектором  $\mathbf{l}$ .

Начнём с того, что при заданном направлении  $\mathbf{l}$  любой вектор раскладывается в сумму двух (7):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$$

где  $\mathbf{r}_{\parallel}$  — вектор, параллельный  $\mathbf{l}$ , и  $\mathbf{r}_{\perp}$  — вектор, перпендикулярный  $\mathbf{l}$ . Компонента  $\mathbf{r}_{\parallel}$  называется *ортогональной векторной проекцией* вектора  $\mathbf{r}$  на направление, определяемое вектором  $\mathbf{l}$ , и может обозначаться так:

$$\pi_{\mathbf{l}}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{r}_{\parallel}$$

Кроме векторной проекции, есть ещё понятие скалярной проекции вектора  $\mathbf{r}$  на направление вектора  $\mathbf{l}$ :

$$\pi_{\mathbf{l}}(\mathbf{r}) \equiv |\mathbf{r}_{\parallel}| \cdot \begin{cases} +1 & \text{если } \mathbf{r}_{\parallel} \uparrow\uparrow \mathbf{l} \\ -1 & \text{если } \mathbf{r}_{\parallel} \uparrow\downarrow \mathbf{l} \end{cases}$$

Будем обозначать векторную и скалярную проекции одинаково. Но из контекста будет понятно, какая имеется в виду.

Спроецируем теперь вектор  $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$  на направление, определяемое вектором  $\mathbf{c}$ :

$$\pi_{\mathbf{c}}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = |\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}| \cdot \cos \phi$$

где  $\pi_{\mathbf{c}}(\cdot)$  — скалярная проекция на направление вектора  $\mathbf{c}$ ,  $\phi$  — угол между вектором  $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$  и вектором  $\mathbf{c}$ . Но проекция вектора, являющегося суммой нескольких векторов, равна сумме проекций этих векторов<sup>6</sup>:

$$\pi_{\mathbf{c}}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \pi_{\mathbf{c}}(\alpha\mathbf{a}) + \pi_{\mathbf{c}}(\beta\mathbf{b})$$

поэтому

$$|\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}| \cdot \cos \phi = |\alpha\mathbf{a}| \cdot \cos \phi_1 + |\beta\mathbf{b}| \cdot \cos \phi_2$$

где  $\phi_1$  и  $\phi_2$  — углы, которые образуют векторы  $\alpha\mathbf{a}$  и  $\beta\mathbf{b}$  с вектором  $\mathbf{c}$ . Умножая обе части последнего равенства на модуль вектора  $\mathbf{c}$ , получаем то, что хотели доказать (при этом числовые множители можно вынести за знак модуля):

$$(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

□

**Задача (2.21).** Длины базисных векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  равны соответственно  $3, \sqrt{2}$  и  $4$ . Углы между векторами  $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 45^\circ$ ,  $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 60^\circ$ .

Надо найти длины сторон и углы параллелограмма, построенного на векторах с координатами  $(1, -3, 0)$  и  $(-1, 2, 1)$  в указанном базисе.

**Решение.** Обозначим данные нам векторы за  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :

$$\begin{cases} \mathbf{a} = (1, -3, 0) \\ \mathbf{b} = (-1, 2, 1) \end{cases}$$

Базис не ортонормированный, поэтому скалярные произведения надо будет считать “по-честному”.

Модуль вектора  $\mathbf{a}$ :

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = \sqrt{(\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2)} = \sqrt{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) - 6(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + 9(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} = \sqrt{9 - 18 + 18} = 3$$

Аналогично для вектора  $\mathbf{b}$ :

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{(\mathbf{b}, \mathbf{b})} = \sqrt{(-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)(-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)} = \dots = 5$$

Косинус угла между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :

$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{(\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2) \cdot (-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)}{3 \cdot 5} = \dots = -\frac{12}{15} = -\frac{4}{5}$$

И острый угол параллелограмма можно найти как  $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$ .

□

<sup>6</sup>В силу линейности скалярного произведения.

В случае же **ортонормированного** базиса формулы с применением скалярных произведений упрощаются:

$$(a, b) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

$$|a| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

$$\cos \angle(a, b) = \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}}$$

### 3.2. Ещё пара задач про несколько систем координат

**Задача (4.23).** Пусть  $(x, y)$  — координаты точки в некоторой прямоугольной системе координат  $(O; e)$ , а  $(x', y')$  — координаты той же точки в некоторой другой системе координат  $(O'; e')$ . При этом

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{10} \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{20} \end{cases}$$

При каком необходимом и достаточном условии вторая система координат  $(O'; e')$  также будет прямоугольной?

**Решение.** Итак, если переписать связь между координатами точки в разных системах координат в матричном виде

$$x = Sx' + x_{O'}$$

где

$$\begin{cases} S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ x_{O'} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Тогда связь между базисами

$$e' = eS$$

$$(e'_1, e'_2) = (a_{11}e_1 + a_{21}e_2 \quad a_{12}e_1 + a_{22}e_2)$$

То, что  $e$  прямоугольный, означает, что

$$\begin{cases} (e_i, e_i) = 1 \\ (e_i, e_j) = 0, \quad i \neq j \end{cases}$$

Выпишем аналогичные условия для базиса  $e'$ :

$$\begin{cases} (e'_1, e'_1) = a_{11}^2 e_1^2 + a_{21}^2 e_2^2 = 1 \\ (e'_2, e'_2) = a_{12}^2 e_1^2 + a_{22}^2 e_2^2 = 1 \\ (e'_1, e'_2) = a_{11}a_{12}e_1^2 + a_{21}a_{22}e_2^2 = 0 \end{cases}$$

И в итоге:

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases}$$

Можно заметить, что матрицы  $S$  вида

$$S = \begin{pmatrix} \cos \phi & \mp \sin \phi \\ \sin \phi & \pm \cos \phi \end{pmatrix}$$

удовлетворяют полученным соотношениям. Действительно, так как базисы  $e$  и  $e'$  оба прямоугольные, то один переводится в другой с помощью поворота или отражения<sup>7</sup>.  $\square$

**Задача (4.30).** Пусть  $(O; e)$  и  $(O'; e')$  — две прямоугольные системы координат в пространстве  $\mathbb{R}^3$ . При этом точки  $O$  и  $O'$  различны, а концы векторов  $e_i$  и  $e'_i$ , отложенных из точек  $O$  и  $O'$  соответственно, совпадают ( $i = 1, 2, 3$ ). Найти координаты точки  $(x, y, z)$  в первой системе, зная её координаты во второй системе  $(x', y', z')$ .

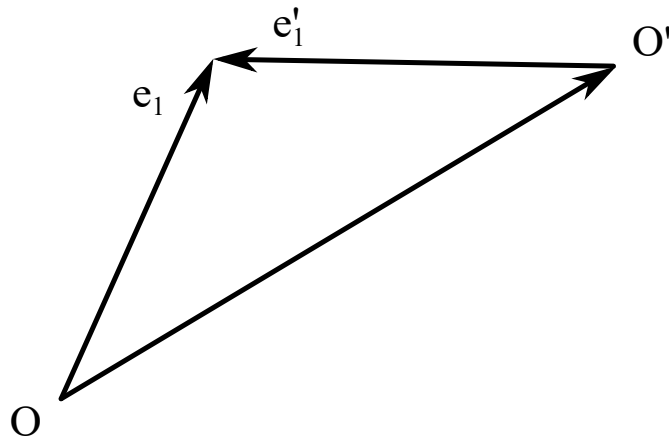


Рис. 8: Концы соответственных базисных векторов, отложенных от соответствующих начал координат, совпадают.

*Решение.* Условие о том, что концы базисных векторов совпадают (при условии, что векторы отложены из начал систем координат), можно записать так (8)

$$e_i = \overrightarrow{OO'} + e'_i$$

Нужно найти преобразование

$$x = Sx' + x_{O'}$$

В то же время

$$e' = eS$$

Поэтому матрицу  $S$  можно записать так

$$S = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \overrightarrow{OO'}_e \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \overrightarrow{OO'}_e \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \overrightarrow{OO'}_e \right)$$

где  $\overrightarrow{OO'}_e$  — компоненты вектора  $\overrightarrow{OO'}$  в базисе  $e$  (то же самое, что и  $x_{O'}$  в формуле, связывающей координаты точек).

Получается, осталось лишь найти  $\overrightarrow{OO'}$  в базисе  $e$ . Это можно сделать, потому что мы учли ещё не всю информацию о взаимном расположении систем координат. На самом

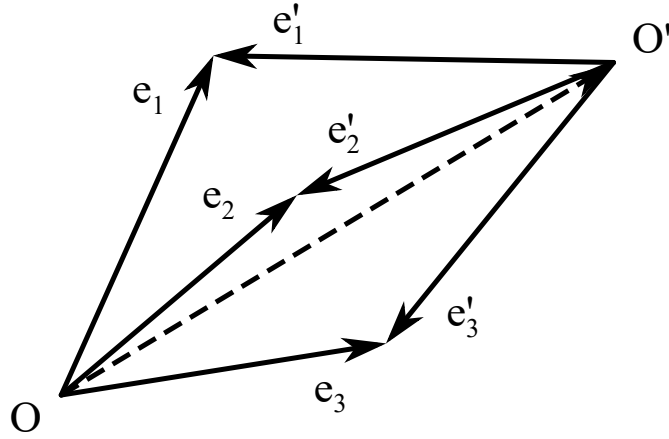


Рис. 9: Базисы, отложенные от соответствующих начал координат — прямоугольные тетраэдры.

деле тот факт, что обе системы координат прямоугольные и концы соответственных векторов, отложенных из начал соответствующих систем координат, совпадают, означает, что у нас есть “два поставленных друг на друга прямоугольных тетраэдра” (9).

Поэтому вектор  $\overrightarrow{OO'}$  можно найти как

$$\overrightarrow{OO'} = 2 \cdot \left( \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2 + \frac{1}{3}e_3 \right)$$

(так как проекция точки пересечения  $OO'$  с плоскостью концов базисных векторов на грани векторов  $e_i, e_j$  совпадает с точкой пересечения медиан треугольников соответствующих граней<sup>8</sup>).

Тогда матрица  $S$  равна

$$\begin{aligned} S &= \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

□

<sup>7</sup>По знаку определителя матрицы  $S$  можно сказать о том, какое именно преобразование связывает два базиса: только поворот (при котором направление поворота от  $e'_1$  к  $e'_2$  по наименьшему углу совпадает с направлением поворота по наименьшему углу от  $e_1$  к  $e_2$ ) или ещё и отражение одного базисного вектора относительно другого (когда меняется класс базиса).

<sup>8</sup>Точка  $P$  пересечения  $OO'$  с плоскостью концов базисных векторов  $E_1E_2E_3$  — очевидно, точка пересечения медиан  $\triangle E_1E_2E_3$ . То есть его центр масс. Если “двигать” одну из вершин  $\triangle E_1E_2E_3$  по нормали до пересечения с гранью тетраэдра, скажем, двигать  $E_3$  по нормали к плоскости  $OE_1E_2$ , то она окажется вершиной  $O$  при прямом угле в  $\triangle OE_1E_2$ , а  $P$  перейдёт в центр масс прямоугольного треугольника  $OE_1E_2$ . Но положение проекции  $P$  на грань  $OE_1E_2$  не менялось при сдвиге вершины  $E_3$  по нормали к  $OE_1E_2$ .