

Семинар 9

Алексеев Василий

7 + 11 апреля 2023

Содержание

1	Bili & Qua (Diag 2)	1
1.1	Билинейная $b(x, y)$ и квадратичная $k(x)$ функции	1
1.2	Матрица $b(x, y)$	3
1.3	Диагонализируемость матрицы $k(x)$	4
1.4	Канонический вид $k(x)$	8
1.5	Положительная определённость $k(x)$	10
2	Задачи	13
2.1	по мотивам # 32.8(2) + 32.9(2)	13

1. Bili & Qua (Diag 2)

В конспекте билинейная функция называется именно “билинейной функцией”. Хотя общепринятым синонимом является также термин “билинейная форма”. Квадратичная функция же иногда в конспекте именуется и “квадратичной формой” (общепринятый синоним), и даже просто “формой” (немного неряшливое короткое обозначение, которое, однако, можно считать корректным, но только в рамках конспекта — неопределённости возникнуть не должно, потому что билинейная функция “формой” именоваться не будет).

1.1. Билинейная $b(x, y)$ и квадратичная $k(x)$ функции

Линейное отображение $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ называлось *линейной функцией*. То есть линейная функция принимает *один* вектор, и возвращает число. Но отображения вообще могут принимать на вход и *больше одного* аргумента. (Например, хотя бы та же операция сложения векторов ‘+’ : $X \times X \rightarrow X$.) Рассматривая функции *от двух* аргументов, можно бы было выделить класс функций, линейных только по первому аргументу, только по второму или *по двум аргументам сразу*. Приходим к следующему понятию.

Определение 1.1. Билинейной функцией называется отображение $b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, линейное по каждому аргументу:

$$\begin{cases} b(x_1 + x_2, y) = b(x_1, y) + b(x_2, y) \\ b(\alpha x, y) = \alpha b(x, y) \end{cases} \quad \begin{cases} b(x, y_1 + y_2) = b(x, y_1) + b(x, y_2) \\ b(x, \beta y) = \beta b(x, y) \end{cases}$$

Отдельно стоит выделить билинейные функции, значения которых не зависят от порядка аргументов.

Определение 1.2. Билинейная функция $b(\cdot, \cdot)$ называется *симметричной*, если

$$b(x, y) = b(y, x), \quad \forall x, y \in X$$

Пример. Симметричная билинейная функция — это, например, скалярное произведение векторов геометрического векторного пространства:

$$b(x, y) = (x, y) = |x||y| \cos \angle(x, y) \quad (1)$$

□

От линейной функции (один аргумент) перешли к билинейной функции (два аргумента). А что, если... в качестве обоих аргументов в билинейную функцию подать один и тот же вектор? Снова получится функция одного аргумента.

Определение 1.3. Пусть $b(\cdot, \cdot)$ — симметричная билинейная функция¹. Тогда *квадратичной функцией*, порождённой $b(\cdot, \cdot)$, называется отображение $k : X \rightarrow \mathbb{R}$, которое опреде-

¹Как могло бы сперва показаться, дело не в том, что если $b(\cdot, \cdot)$ не симметричная, то $k(\cdot)$ всегда ноль. Нет. Например, $b(x, y) = -2x_1y_2$ не симметричная (это формула билинейной функции от координат векторов — про этот способ описания билинейной функции будет далее в конспекте). И можно было бы подставить вместо вектора y тоже вектор x и получить $b(x, x) = -2x_1x_2$. Но тогда по формуле квадратичной функции, если не знать, что $b(\cdot, \cdot)$ была симметричной, нельзя однозначно восстановить матрицу этой билинейной функции (будет несколько возможных вариантов). Вообще, матрицу любой билинейной функции можно представить как сумму симметричной и кососимметричной матриц (см. # 15.94). Можно показать, что, кососимметричная вообще не будет играть роли в формуле квадратичной функции, порождаемой данной билинейной. (Например, ту же $b(x, y) = -2x_1y_2$ можно так представить как сумму симметричной и кососимметричной частей: $-2x_1y_2 = (-x_1y_2 - x_2y_1) + (-x_1y_2 + x_2y_1)$. Несложно проверить, что при вычислении $k(x) = b(x, x)$ кососимметричная часть занулится.) То есть если по произвольной билинейной функции как бы “построить” квадратичную, положив $k(x) = b(x, x)$, то эта квадратичная по сути будет определяться только “симметричной частью” билинейной функции... В общем, с “симметричной” в определении квадратичной функции получается более однозначно)

ляется формулой:

$$k(x) = b(x, x)$$

Пример. Симметричной билинейной функцией (1) порождается следующая квадратичная:

$$k(x) = b(x, x) = (x, x) = |x|^2 \quad (2)$$

□

Будет ли квадратичная функция линейной? Очевидно, функция из примера (2) линейной вообще не будет. Посмотрим, чему будет равен образ суммы $x_1 + x_2$ под действием произвольной квадратичной функции $k(\cdot)$:

$$k(x_1 + x_2) = b(x_1 + x_2, x_1 + x_2) = b(x_1, x_1) + b(x_2, x_2) + b(x_1, x_2) + b(x_2, x_1) = k(x_1) + k(x_2) + 2b(x_1, x_2)$$

то есть тоже в общем случае не линейная. Из формулы выше также можно заметить следующее. Значение билинейной функции $b(\cdot, \cdot)$ на произвольной паре векторов x_1, x_2 можно выразить с помощью соответствующей ей квадратичной функции:

$$b(x_1, x_2) = \frac{k(x_1 + x_2) - k(x_1) - k(x_2)}{2}$$

то есть, с одной стороны, квадратичная порождается симметричной билинейной, и, с другой — по квадратичной однозначно восстанавливается породившая её симметричная билинейная (1).

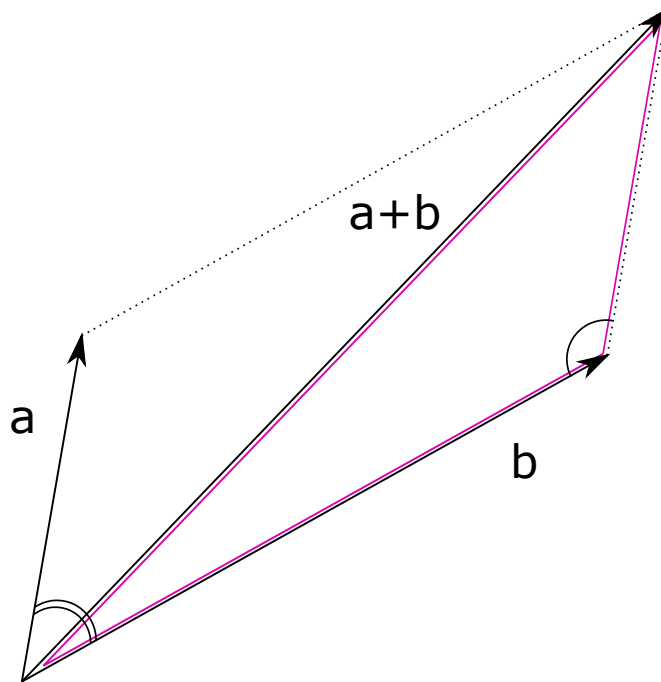


Рис. 1: Можно вычислить скалярное (a, b) , зная длины $|a|$, $|b|$ и $|a + b|$.

Из всех квадратичных функций на пространстве X выделяют несколько классов.

Определение 1.4. Квадратичная функция $k(\cdot)$ называется

- *положительно определённой*, если $k(x) > 0$, $x \neq 0$,
- *отрицательно определённой*, если $k(x) < 0$, $x \neq 0$,

- положительно полуопределённой, если $k(\mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x}$,
- отрицательно полуопределённой, если $k(\mathbf{x}) \leq 0, \forall \mathbf{x}$.

Пример. Если рассматривать множество векторов – направленных отрезков трёхмерного пространства, то форма $k(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2$ (2) будет положительно определённой. Форма же $k(\mathbf{x}) = -|\mathbf{x}|^2$ будет отрицательно определённой. Пример же полуопределённой формы... на данном этапе привести затруднительно. ...Или нет. Да, например, пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Тогда определим форму следующим образом:

$$k(\mathbf{x}) = \left| \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \right|^2$$

то есть как квадрат ортогональной проекции вектора \mathbf{x} на направление, задаваемое вектором \mathbf{a} (это в самом деле квадратичная форма, так как она порождена симметричной билинейной функцией $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, которая по паре векторов \mathbf{x}, \mathbf{y} возвращает скалярное произведение их ортогональных векторных проекций на \mathbf{a}). Очевидно, $k(\mathbf{x}) \geq 0$ для любого \mathbf{x} . Однако $k(\mathbf{x})$ может быть равна нулю и при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (если $\mathbf{x} \perp \mathbf{a}$). \square

1.2. Матрица $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Пример. Пусть в трёхмерном геометрическом пространстве векторов введён базис $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Распишем формулу для скалярного произведения произвольной пары векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} , разложив каждый из них по базису \mathbf{e} :

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3, y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3) \\ &= x_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)y_1 + x_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)y_2 + x_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)y_3 + \\ &\quad x_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)y_1 + x_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)y_2 + x_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)y_3 + \\ &\quad x_3(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)y_1 + x_3(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2)y_2 + x_3(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3)y_3 \end{aligned}$$

“Можно заметить”, что более компактно это выражается в матричном виде:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T \Gamma \mathbf{y}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ координатные столбцы векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} , и матрица $\Gamma = ((\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))_{ij}$, каждый элемент на позиции i, j которой есть скалярное произведение пары базисных векторов \mathbf{e}_i и \mathbf{e}_j (матрица Грама системы векторов \mathbf{e}). \square

Для произвольной билинейной функции $b(\cdot, \cdot)$ всё получается аналогично: введём базис в пространстве X , разложим аргументы функции $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ по этому базису и “посмотрим, что получится”. Итак, пусть базис — это система векторов $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Любой вектор пространства можно представить как линейную комбинацию базисных векторов:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n, \quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \dots + y_n\mathbf{e}_n$$

Подставим это в билинейную функцию и преобразуем:

$$\begin{aligned} b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= b(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n, y_1\mathbf{e}_1 + \dots + y_n\mathbf{e}_n) \\ &= x_1b(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)y_1 + \dots + x_1b(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n)y_n + \dots + x_nb(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1)y_1 + \dots + x_nb(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n)y_n \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_ib(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)y_j \end{aligned} \tag{3}$$

Если координаты векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} собрать в столбцы² $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ соответственно, а также ввести матрицу

$$B = \begin{pmatrix} b(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \dots & b(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & \dots & b(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix}$$

которая называется *матрицей билинейной функции*, то выражение (3) можно продолжить и записать в матричном виде:

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T B \mathbf{y}$$

Если билинейная функция $b(\cdot, \cdot)$ симметрична, то и её матрица B в произвольном базисе, очевидно, также симметрична. Но верно и в обратную сторону.

Утверждение 1.1. *Билинейная функция $b(\cdot, \cdot)$ симметрична тогда и только тогда, когда её матрица B в некотором базисе симметрична.*

Доказательство. Ещё раз, если $b(\cdot, \cdot)$ симметрична, то:

$$\begin{cases} b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = b(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) \\ \forall i, j \end{cases} \Leftrightarrow B = B^T$$

И, наоборот, если матрица симметрична, то:

$$B = B^T \Leftrightarrow \begin{cases} b(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = b(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) \\ \forall i, j \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \dots + x_i b(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) y_j + \dots \\ = \dots + y_j b(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) x_i + \dots = b(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

□

Для квадратичной функции $k(\cdot)$, построенной по симметричной билинейной $b(\cdot, \cdot)$ с матрицей B в базисе \mathbf{e} получаем:

$$k(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n x_i b(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) x_j = \mathbf{x}^T B \mathbf{x}$$

1.3. Диагонализируемость матрицы $\mathbf{k}(\mathbf{x})$

Пример. Пусть в трёхмерном геометрическом пространстве векторов введён базис $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, такой что $|\mathbf{e}_1| = 1$, $|\mathbf{e}_2| = 2\sqrt{3}$, $|\mathbf{e}_3| = 6$ и $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = \frac{\pi}{3}$.

Матрица симметричной билинейной функции $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (матрица Грама) будет равна:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 12 & 12 \\ 3 & 12 & 36 \end{pmatrix}$$

²По-хорошему, для столбцов стоило бы использовать “другие” обозначения, например, ξ для координат вектора \mathbf{x} и η для координат вектора \mathbf{y} . Однако поступим проще, надеясь, что из контекста будет понятно, где \mathbf{x} означает вектор, а где x означает соответствующий координатный столбец (к тому же один икс пишется “жирным”, а другой нет).

Можно ли найти базис e' , в котором матрица B' скалярного произведения была бы диагональна?

Да, можно. Ведь по сути именно это и получается в процессе ортогонализации базиса. Будем постепенно, вектор за вектором, собирать базис e' . Пусть $e'_1 \equiv e_1$. Тогда в базисной системе векторов $\{e'_1, e_2, e_3\}$ матрица формы B' будет в точности как B . (Будем обозначать символом B' и “итоговый результат”, то есть диагональную матрицу, и матрицу формы в “промежуточном состоянии”, то есть после получения очередного e'_i . Точнее, B' всегда будет означать “текущее состояние” матрицы формы: когда первые сколько-то новых базисных уже получены, “новые”, а последние базисные пока оставлены как были, “старые”).

Далее, чтобы получить e'_2 , надо из e_2 вычесть его ортогональные проекции на все найденные на данный момент векторы будущего нового базиса (а это пока просто $\{e'_1\}$). “Поправим” же описанным образом вектор e_2 и заметим при этом, какой получится матрица B' скалярного произведения в базисе $\{e'_1, e'_2, e_3\}$. Итак, новый второй базисный вектор:

$$e'_2 \equiv e_2 - \frac{(e'_1, e_2)}{|e'_1|^2} e'_1 = e_2 - \frac{(e'_1, e_2)}{(e'_1, e'_1)} e'_1$$

Меняем второй вектор — в матрице B' изменятся только вторые строчка и столбец. Так, первый элемент во втором столбце (и во второй строчке):

$$b(e'_1, e'_2) = (e'_1, e_2) - \frac{(e'_1, e_2)}{(e'_1, e'_1)} (e'_1, e'_1) = b'_{12} - \frac{b'_{12}}{b'_{11}} b'_{11} = b'_{12} - \frac{b'_{11}}{b'_{11}} b'_{12}$$

Аналогичным образом поменяется скалярное произведение с третьим вектором (который пока не меняли):

$$b(e'_2, e_3) = \dots = b'_{23} - \frac{b'_{13}}{b'_{11}} b'_{12}$$

Отдельно стоит рассмотреть элемент на главной диагонали:

$$b(e'_2, e'_2) = \dots = b'_{22} - \frac{b'^2_{12}}{b'_{11}}$$

Итого, матрица на текущей итерации (когда “поправлены” первые два базисных вектора, а остальные как бы оставлены без изменений):

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 2 - 1/1 \cdot 2 & 3 \\ 2 - 1/1 \cdot 2 & 12 - 2^2/1 & 12 - 3/1 \cdot 2 \\ 3 & 12 - 3/1 \cdot 2 & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 36 \end{pmatrix}$$

Что по сути произошло с B' ? Получилось так, что из второго столбца вычли первый с коэффициентом (равным $b'_{12}/b'_{11} = 2$), чтобы занулить b'_{12} , а также из второй строчки вычли первую с таким же коэффициентом, чтобы занулить b'_{21} . То есть провели *элементарное преобразование столбцов* и *такое же элементарное преобразование строк*. Элементарное преобразование столбцов равносильно умножению исходной матрицы *справа* на матрицу, задающую преобразование столбцов. Элементарное преобразование строк равносильно умножению исходной матрицы *слева* на матрицу преобразования строк. В общем, можно проверить, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 12 & 12 \\ 3 & 12 & 36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 36 \end{pmatrix}$$

То есть изменение матрицы можно описать как:

$$B' = S^T B S, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица же перехода от “старого” базиса $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ к “новому” $\{e_1, e_2, e_3\}$ равна:

$$S_{e \rightarrow e'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $S_{e \rightarrow e'}$ есть по сути та же S , которая определяет изменение матрицы скалярного произведения... Совпадение?..

Ещё несколько шагов правки базисных векторов, и можно будет получить базис e' , в котором матрица B' скалярного произведения будет диагональной (ортонормальный базис). Более того, на диагонали будут стоять только положительные числа:

$$B' = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_i > 0$$

Можно будет даже найти базис e'' , такой что у диагональной матрицы B'' на диагонали будут только единицы (ортонормированный базис): $B'' = \text{diag}(1, 1, 1)$. \square

Можно ли диагонализировать произвольную билинейную функцию $b(\cdot, \cdot)$?

Если билинейная функция несимметричная, то ответ “нет”, её диагонализировать не получится (иначе она не была бы несимметричной).

Если же билинейная функция симметричная... Особенность скалярного произведения (1.3) была в том, что $(e_i, e_i) > 0, \forall i$, то есть на диагонали в матрице B (на каждой итерации “правки” базиса) обязательно стояли положительные числа (и как раз с помощью них проводилась “чистка” строк и столбцов, то есть вычитание из каждого e_j ортогональных проекций на $e'_i, i < j$). Но с произвольной билинейной функцией $b(\cdot, \cdot)$ вполне может оказаться так, что $b(e'_i, e'_i) < 0$ или даже $b(e'_i, e'_i) = 0$ для некоторого i . И в таком случае с “ортонормализацией” могут возникнуть проблемы: если “проекция” $b(e_j, e'_i)$ вектора e_j на e'_i не ноль, но при этом “длина” $b(e'_i, e'_i) = 0$... Которые, однако, с помощью “дополнительной правки” базисного вектора e'_i всегда можно будет разрешить (2).

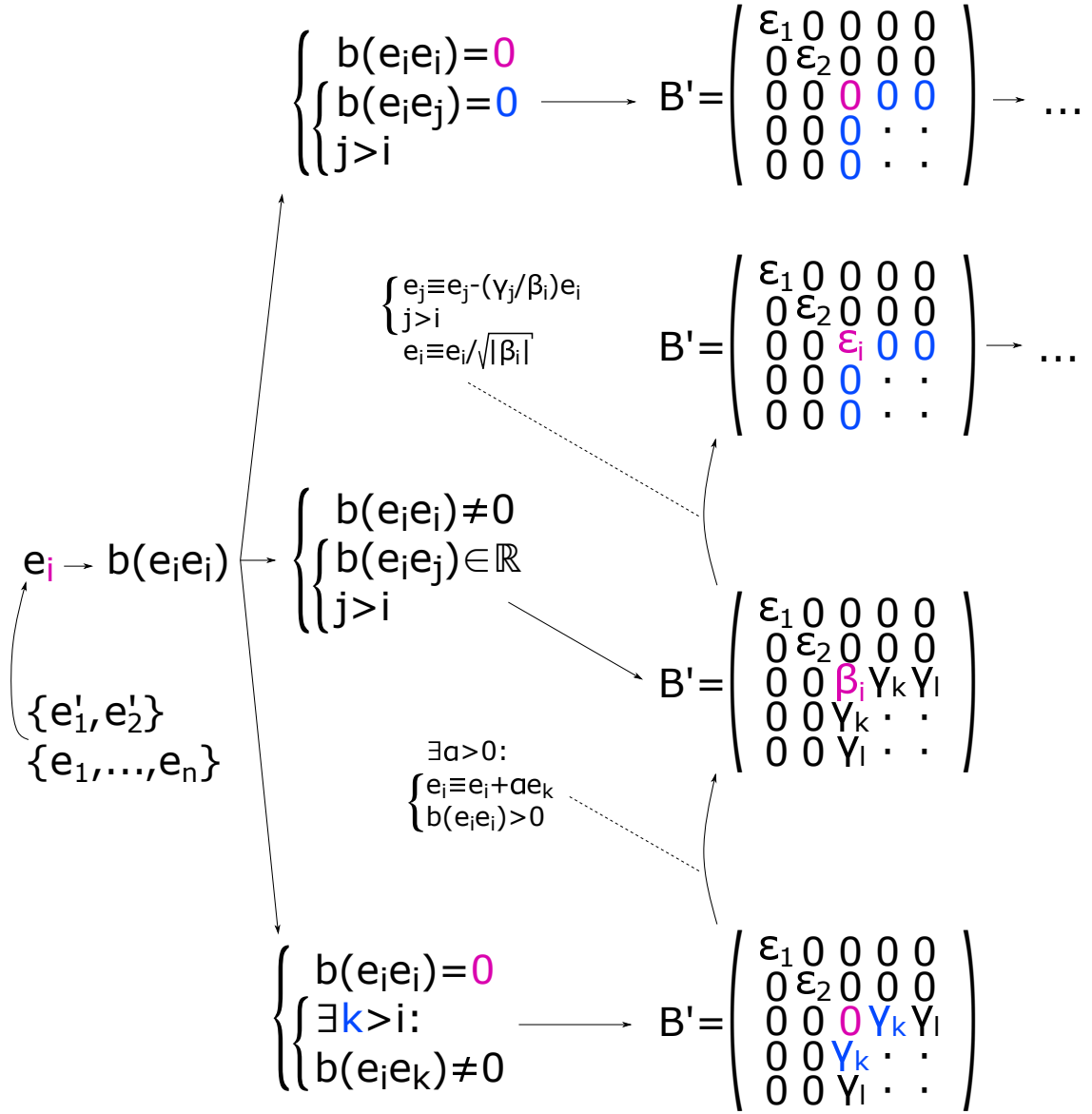
Покажем “по-честному”, как меняется матрица билинейной формы при смене базиса. И далее сформулируем утверждение о возможности приведения этой матрицы к диагональному виду.

Пусть в базисе e матрица билинейной функции $b(\cdot, \cdot)$ есть B . Пусть “новый” базис e' связан со “старым” матрицей перехода S , то есть $e' = eS$. Какой будет матрица B' билинейной функции в “новом” базисе? Значение билинейной функции на произвольной паре векторов не зависит от базиса:

$$(x')^T B' y' = b(x, y) = x^T B y$$

Пользуясь связью $x = Sx'$ между координатными столбцами одного и того же вектора в разных базисах, можем преобразовать соотношение:

$$\begin{aligned} \underline{(x')^T B' y'} &= b(x, y) = x^T B y \\ &= (Sx')^T B (Sy') = \underline{(x')^T (S^T B S) y'} \end{aligned} \quad (4)$$



$$b(x, y) \equiv b(xy); b(e_i, e_i) \equiv \beta_i, b(e_i, e_k) \equiv \gamma_k, b(e_i, e_l) \equiv \gamma_l \ (k, l > i); \epsilon \in \{0, 1, -1\}$$

Рис. 2: Возможные случаи при рассмотрении очередного вектора e_i “старого” базиса при добавлении его под тем же номером в “новый” базис (в котором матрица билинейной функции будет канонической). Базис e' строится постепенно: на каждой итерации добавляется новый вектор, а к матрице B' при этом добавляется новый “слой”, новый “угол” из строчки и столбца с вершиной на главной диагонали (вершина “угла” принимает значения $\{0, \pm 1\}$, а остальные элементы “угла” нули). Поэтому если все $b(e_i, e_j) = 0, j > i$, то ничего вообще делать не нужно, кроме, возможно, “нормировки” вектора e_i . Если же $b(e_i, e_i) \neq 0$ и при этом какие-то из $b(e_i, e_j), j > i$ тоже не нули, то надо “править” эти векторы e_j , вычитая с нужным коэффициентом вектор e_i , то есть $e_j \equiv e_j - b(e_i, e_j)/b(e_i, e_i) \cdot e_i$ (после этого будет $b(e_i, e_j) = 0$). А если оказалось, что $b(e_i, e_i) = 0$ и при этом хоть какой-то $b(e_i, e_k), k > i$ не ноль, то “правим” e_i : надо прибавить к нему с некоторым коэффициентом α вектор e_k , так чтобы $b(e_i, e_i)$ стало не нулём. То есть замена $e_i \equiv e_i + \alpha e_k$, и тогда $b(e_i, e_i) = 0 + \alpha^2 b(e_k, e_k) + 2\alpha b(e_i, e_k) \neq 0$ при некотором α .

И это верно для любой пары $x', y' \in \mathbb{R}$. Поэтому можно утверждать, что будут равны матрицы “посередине”:

$$B' = S^T B S \quad (5)$$

(Подставляя $x' = y' = (1, 0, \dots, 0)^T$ в (4), получаем равенство элементов матриц на позиции “1, 1”. Подставляя $x' = (1, 0, 0, \dots, 0)$ и $y' = (0, 1, 0, \dots, 0)$, получаем равенство элементов на позиции “1, 2”. И так далее.)

Теорема 1.1. Пусть $b(\cdot, \cdot)$ есть симметричная билинейная функция. Тогда найдётся базис e' , в котором матрица B' билинейной функции будет диагональной

$$B' = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n), \quad \epsilon_i \in \mathbb{R}$$

Более того, найдётся базис e'' , в котором матрица B'' билинейной функции будет диагональной, причём на диагонали будут обязательно только числа $\{0, 1, -1\}$:

$$B'' = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n), \quad \epsilon_i \in \{0, \pm 1\} \quad (6)$$

Также можно привести “матричный аналог” утверждения.

Теорема 1.2. Пусть $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ есть симметричная матрица. Тогда найдётся невырожденная квадратная матрица $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, такая что матрица $S^T B S$ будет диагональной:

$$B' = S^T B S = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n), \quad \epsilon_i \in \mathbb{R}$$

Более того, найдётся невырожденная квадратная матрица $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, такая что матрица $S^T B S$ будет диагональной, причём на диагонали будут только числа $\{0, 1, -1\}$:

$$B'' = S^T B S = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n), \quad \epsilon_i \in \{0, \pm 1\}$$

1.4. Канонический вид $k(x)$

Если в данном базисе e матрица квадратичной функции $k(x)$ имеет вид (6), то есть диагональная с числами $\{0, \pm 1\}$ на диагонали, то говорят, что форма в базисе e имеет канонический вид.

Пример. Форма $k(x)$ в каноническом виде может, например, иметь матрицу:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда формула для нахождения $k(x)$:

$$k(x) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$$

□

Количество ненулевых элементов на диагонали матрицы B' формы $k(\cdot)$ в каноническом виде, очевидно, определяет ранг B' . А что можно сказать о ранге матрицы B формы $k(\cdot)$ в произвольном базисе? Оказывается, что $\text{Rg } B = \text{Rg } B'$:

$$B' = S^T B S \Rightarrow \text{Rg } B' = \text{Rg}(S^T B S) = \text{Rg}(S^T B) = \text{Rg } B$$

Канонический вид формы зависит от базиса. Например, одна и та же форма может иметь канонический вид $k(x) = x_1^2 - x_2^2$ с матрицей $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ в одном базисе и иметь

вид $k(\mathbf{x}) = -x_1^2 + x_2^2$ с матрицей $B'' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ в другом базисе. Но зависит ли ранг матрицы формы в каноническом виде от способа приведения формы к этому каноническому виду? То есть обязательно ли $\text{Rg } B' = \text{Rg } B''$, если B' и B'' определяют канонический вид одной и той же формы в разных базисах? Очевидно, да, ведь по уже доказанному

$$\text{Rg } B' = \text{Rg } B = \text{Rg } B''$$

где B — матрица формы в произвольном “начальном” базисе. Независимость ранга матрицы от способа приведения формы к каноническому виду можно бы было показать и по-другому, от противного.

Пример. Так, допустим, что у одной формы $k(\cdot)$ получилось в разных базисах получить такие матрицы:

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Почему такого не может быть? Потому что для формы с матрицей B'' можно привести двумерное подпространство

$$U'' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} \mid x_2'', x_3'' \in \mathbb{R} \right\}$$

на котором форма будет нулевой:

$$\mathbf{x} \in U'' \rightarrow k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B'' \mathbf{x} = 0$$

Однако для формы с матрицей B' подобного двумерного подпространства уже не найти. ...Это очевидно. ...Очевидно ли? Пожалуй, не совсем...

Несложно найти два *одномерных* подпространства

$$U'_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x'_1 \\ 0 \\ x'_3 \end{pmatrix} \mid x'_1 = x'_3 \in \mathbb{R} \right\}, \quad U'_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \mid x'_2 = x'_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

на которых $k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B' \mathbf{x} = 0$. Однако сумма $U'_1 + U'_2$ не будет давать двумерное подпространство, для векторов которого $k(\mathbf{x}) = 0$.

Проще получить противоречие (и в более общем случае, а не только в рассмотренном примере), возможно, было бы, если бы рассматривались не подпространства, где форма *обязательно нулевая*, а где она *может быть ненулевая*. Так, для формы с матрицей B'' максимальное по размерности подпространство с таким свойством будет одномерным: натянутым на вектор $\mathbf{u}'' = (1, 0, 0)^T$. А для формы с матрицей B' оно будет трёхмерным. Имеется в виду, что можно привести три линейно независимых вектора: $\mathbf{u}' = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{v}' = (0, 1, 0)^T$ и $\mathbf{w}' = (0, 0, 1)^T$ — таких что $\mathbf{u}'^T B' \mathbf{u}' = \mathbf{v}'^T B' \mathbf{v}' = \mathbf{w}'^T B' \mathbf{w}' = 0$. \square

Итого, ранг матрицы квадратичной формы сохраняется при переходе к новому базису. И в любом каноническом виде одной и той же квадратичной формы число ненулевых значений (± 1) на диагонали будет одинаковым. Но может ли получиться так, что будет разным, например, количество значений $+1$?

Пример. Допустим, что у одной формы $k(\cdot)$ получилось в разных базисах получить такие матрицы:

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Имея матрицу B' , можно указать такое *максимальное по размерности подпространство*, на котором форма положительно определена:

$$L'_+ = \left\{ \begin{pmatrix} x'_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x'_1 \in \mathbb{R} \right\}, \quad k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B' \mathbf{x} > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in L'_+, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

А в том базисе, в котором дана B'' , это будет двумерное подпространство:

$$L''_+ = \left\{ \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x''_1, x''_2 \in \mathbb{R} \right\}, \quad k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B'' \mathbf{x} > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in L''_+, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Получается, $L'_+ \neq L''_+$, так как $\dim L'_+ \neq \dim L''_+$. Однако само понятие *максимального по размерности подпространства*, на котором форма положительно определена не зависит от базиса, а характеризует лишь саму квадратичную форму. Пришли к противоречию. \square

Понятия L^+ и L^- (подпространства максимальной размерности, на которых форма определена соответственно положительно и отрицательно) позволяют аналогичным образом показать неизменность количества значений $+1$ и -1 на диагонали в каноническом виде для произвольной квадратичной формы. Поэтому можно ввести понятия: *положительный индекс* квадратичной формы p и *отрицательный индекс* квадратичной формы q — как числа единиц и минус единиц в каноническом виде квадратичной формы. Ранг матрицы формы, очевидно, оказывается равным сумме $p+q$. *Сигнатурой* σ квадратичной формы называется разность $p - q$.

Теорема 1.3. *Ранг, положительный и отрицательный индексы, сигнатура не зависят от базиса, в котором форма приведена к каноническому виду (и потому являются характеристиками не столько матрицы формы в конкретном базисе, сколько самой формы).*

1.5. Положительная определённость $k(\mathbf{x})$

На нескольких примерах разберём некоторые особенности положительно и отрицательно определённых форм, которые следуют из вида их матриц в каноническом виде.

Пример. Пусть B есть матрица некоторой *положительно определённой* квадратичной формы $k(\cdot)$ в трёхмерном пространстве:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad B = B^T$$

Раз форма $k(\cdot)$ положительно определена, то в каноническом виде у неё обязательно будет матрица:

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

И соответствующая формула $k(\mathbf{x})$ от координат вектора:

$$k(\mathbf{x}) = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$$

Что можно заметить “интересного” про матрицу B' ? Она полного ранга. А ранг матрицы формы сохраняется при смене базиса. Таким образом, *матрица положительно определённой квадратичной формы полного ранга*.

Что-нибудь ещё “интересное”? Не сложно заметить, что $\det B' = 1$. А что можно сказать про определитель исходной B ? как он связан (и связан ли вообще как-нибудь) с определителем B' ?

$$\det B' = \det(S^T B S) = \det S^T \det B \det S = (\det S)^2 \det B$$

То есть из того, что $\det B' = 1 > 0$ следует, что и $\det B > 0$. Таким образом, *определитель матрицы положительно определённой квадратичной формы больше нуля.*

Посмотрим ещё раз внимательно на матрицу формы B' и заметим, что... больше нуля не только $\det B'$ — положительно определены определители всех квадратных подматриц, расположенных в левом верхнем углу! (Такие определители называются *главными минорами* и обычно обозначаются как Δ_i , где $i \geq 1$ есть порядок минора.) То есть

$$\Delta'_1 = 1 > 0, \quad \Delta'_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \Delta'_3 = \det B' = 1 > 0$$

Можно ли утверждать то же самое и про матрицу B ? Ведь про определитель всей матрицы получилось показать, что он тоже больше нуля... Посмотрим:

$$\Delta_1 = b_{11} = k(e_1) > 0$$

так как форма по условию положительно определена. А какого знака будет второй главный минор?

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

Рассмотрим двумерное подпространство векторов:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Раз форма $k(\cdot)$ положительно определена на всём пространстве, то она положительно определена и на подпространстве U , то есть $k(x) > 0$ для всех ненулевых $x \in U$. Подставим координаты произвольного вектора из U в формулу $k(\cdot)$ и немного преобразуем, или “перепишем”, не меняя сути:

$$k(x) = (x_1, x_2, 0)^T \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)^T \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Иными словами, положительная определённость формы вкупе с “упрощённой формулой” вычисления $k(\cdot)$ для векторов из U выливаются в:

$$(x_1, x_2)^T \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} > 0 \quad \forall (x_1, x_2)^T \neq 0$$

А это фактически означает, что положительно определена некоторая форма с матрицей $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$! Но определитель матрицы положительно определённой формы обязательно положителен! То есть и второй главный минор Δ_2 матрицы B больше нуля.

Таким образом, *все главные миноры матрицы положительно определённой квадратичной формы больше нуля.* □

Все приведённые выводы про матрицу положительно определённой квадратичной формы из примера, очевидно, будут верны и для положительно определённой формы произвольного порядка. Однако последнее наблюдение, про главные миноры, не такое простое (ещё более непростое), как пока могло показаться.

Пример. Пусть B есть матрица *некоторой* квадратичной формы $k(\cdot)$ в трёхмерном пространстве:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad B = B^T$$

Известно, что главные миноры матрицы положительны. *Следует ли из этого, что форма положительно определена?* Иными словами, обязательно ли матрица B' формы в каноническом виде будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Начнём с того, что посмотрим на определитель $\det B'$:

$$\det B' = \det(S^T B S) = (\det S)^2 \det B$$

раньше эта формула уже использовалась, но тогда было “в другую сторону”. Теперь же важно, что знак $\det B'$ такой же, как у $\det B$, то есть тоже больше нуля, так как $\det B = \Delta_3 > 0$ по условию. Таким образом, у матрицы B' формы в каноническом виде точно полный ранг, то есть на диагонали нет нулей:

$$B' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_i \neq 0$$

Далее, так как

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0$$

то у *некоторой* формы $\tilde{k}(\cdot)$ с матрицей $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ в каноническом виде будет матрица $\tilde{B}' = \text{diag}(\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2)$, определитель которой тоже больше нуля. И так как матрица B исходной формы невырождена, то можно организовать процесс приведения к каноническому виду следующим образом:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1 & 0 & b_{13} \\ 0 & \tilde{\varepsilon}_2 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\varepsilon}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

то есть сначала как бы приводим к каноническому виду подматрицу второго порядка в верхнем левом углу, которая есть матрица положительно определённой формы $\tilde{k}(\cdot)$, а потом уже “доделываем” последние столбец и строку. Итого, получается, что

$$\det B' = \underbrace{\overbrace{\det \tilde{B}'}^{>0} \cdot \varepsilon_3}_{>0}$$

но тогда обязательно $\varepsilon_3 > 0$, то есть $\boxed{\varepsilon_3 = 1}$! (Так как канонический вид.)

То есть узнали чуть больше про B' — теперь понятно, что

$$B' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_i \neq 0$$

Аналогично можно показать, что $\varepsilon_2 = 1$, а потом и $\varepsilon_1 = 1$. В итоге у матрицы B' формы в каноническом виде только единицы на диагонали — а это и есть критерий положительной определённости формы. \square

С некоторыми, возможно, дополнительными “аккуратностями” рассуждения из примера применимы и к форме с матрицей произвольного порядка с тем свойством, что все её главные миноры больше нуля.

Наблюдения из нескольких рассмотренных выше примеров иллюстрируют следующее утверждение.

Теорема 1.4 (Критерий Сильвестра). *Для положительной определённости квадратичной формы $k(\cdot)$ с матрицей $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ в некотором базисе необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры этой матрицы Δ_i ($i = 1, \dots, n$) были больше нуля.*

А что же с отрицательной определётельностью? С некоторыми незначительными отличиями рассуждения, приведённые в примерах с положительно определённой формой, “работают” и в случае с отрицательно определённой формой. Главное, что меняется — это то, что знак определителя матрицы формы (очевидно — в каноническом, а далее можно показать, что и вообще в любом виде) *зависит от порядка матрицы*, то есть чередуется, то “плюс”, то “минус”.

Теорема 1.5 (“Критерий Сильвестра 2”). *Для отрицательной определённости квадратичной формы $k(\cdot)$ с матрицей $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ в некотором базисе необходимо и достаточно, чтобы знаки всех главных миноров этой матрицы Δ_i ($i = 1, \dots, n$) чередовались как $(-1)^i$, то есть*

$$\underline{\Delta_1 < 0} \leftrightarrow -1 < 0, \quad \underline{\Delta_2 > 0} \leftrightarrow (-1) \cdot (-1) > 0, \quad \dots$$

2. Задачи

2.1. по мотивам # 32.8(2) + 32.9(2)

Привести данную квадратичную форму

$$k(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + \frac{x_2^2}{4} + x_3^2$$

к каноническому виду с помощью метода Лагранжа или элементарных преобразований (столбцов и строк!) её матрицы. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

Выяснить, является ли форма положительно или отрицательно определённой или полуопределённой.

Решение.

Способ 1: Метод Лагранжа (выделения квадратов).

В формуле $k(\mathbf{x})$ есть член x_1^2 , а также члены с x_1 в первой степени. Поэтому приведение к каноническому виду можно начать с того, чтоб *собрать вместе все члены с x_1 ,*

дополнить, если надо, до квадрата, и сделать замену, выделив квадрат (так, чтобы члены с x_1 “ушли”, а вместо этого появился бы только квадрат новой переменной):

$$k(x) = \left(x_1^2 - x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + \left(\frac{x_2}{2} \right)^2 + x_3^2 + 2 \cdot \frac{x_2}{2} \cdot x_3 \right) - \left(\frac{x_2}{2} \right)^2 - x_3^2 - 2 \cdot \frac{x_2}{2} \cdot x_3 + \frac{x_2^2}{4} + x_3^2$$

$$k(x) = \left(x_1 - \frac{x_2}{2} - x_3 \right)^2 - x_2 x_3$$

Замена:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - \frac{x_2}{2} - x_3 \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \end{cases} \quad (7)$$

В результате формула для квадратичной функции примет вид:

$$k(x) = x_1'^2 - x_2' x_3'$$

При приведении формы к диагональному (или каноническому) виду методом Лагранжа может возникнуть ситуация, когда квадрат сразу выделить и нельзя. Как в формуле выше: есть только смешанное произведение $x_2' x_3'$, но ни $x_2'^2$, ни $x_3'^2$ нет. В таком случае можно сделать следующую замену (“трюк”):

$$\begin{cases} x'_1 = x_1'' \\ x'_2 = x_2'' - x_3'' \\ x'_3 = x_2'' + x_3'' \end{cases} \quad (8)$$

В результате вместо $x_2' x_3'$ появится разность квадратов, и “стандартный” процесс выделения квадратов и замен переменных можно будет продолжить:

$$k(x) = x_1''^2 - (x_2'' - x_3'')(x_2'' + x_3'')$$

$$k(x) = x_1''^2 - x_2''^2 + x_3''^2 \quad (9)$$

Привели форму к каноническому виду. Теперь, по-хорошему, надо ещё привести соответствующую замену координат (переход от “старого” исходного базиса к “новому”, где канонический вид). Из первой замены (7) получаем:

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + \frac{x'_2}{2} + x'_3 \\ x_2 = x'_2 \\ x_3 = x'_3 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad x = S_1 x', \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где S_1 — матрица, задающая переход от базиса e к базису e' (в котором координаты с одним “штрихом”). Далее, вторая замена (8):

$$\begin{cases} x'_1 = x_1'' \\ x'_2 = x_2'' - x_3'' \\ x'_3 = x_2'' + x_3'' \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad x' = S_2 x'', \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

где S_2 — матрица перехода от базиса e' к базису e'' (в котором как раз имеем канонический вид формы (9)).

Итоговая (комбинированная) замена:

$$\begin{cases} x_1 = x_1'' + \frac{3x_2''}{2} + \frac{x_3''}{2} \\ x_2 = x_2'' - x_3'' \\ x_3 = x_2'' + x_3'' \end{cases} \leftrightarrow x = Sx'', \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Можно проверить, что $S = S_1 S_2$:

$$S_1 S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = S$$

Способ 2: Элементарные преобразования матрицы (столбцов и строк).

При смене базиса матрица формы меняется по правилу (5):

$$B' = S^T B S$$

Матрица S невырожденная, поэтому может быть представлена как произведение матриц, задающих, например, элементарные преобразования столбцов: $S = S_1 \cdot \dots \cdot S_N$. Если подставить это в формулу выше:

$$B' = S_N^T \cdot \dots \cdot S_1^T \cdot B \cdot S_1 \cdot \dots \cdot S_N$$

Получается, чтобы получить B' , надо провести над B серию преобразований: столбцов (умножение на S_i справа) и строк (умножение на S_i^T слева), причём после преобразования столбцов должно сразу идти аналогичное преобразование строк (например, первая пара преобразований: $S_1^T B S_1$).

С помощью способа, похожего на тот, с помощью которого искали обратную матрицу, можно одновременно найти и диагональную (каноническую) матрицу B' формы, и матрицу перехода S к соответствующему базису: надо “приписать”, например, справа к исходной матрице единичную, и выполнять над ней те же самые элементарные преобразования, но **только элементарные преобразования столбцов**:

$$(B \mid E) \rightarrow (S_1^T B S_1 \mid S_1) \rightarrow \dots \rightarrow (S_N^T \dots S_1^T B S_1 \dots S_N \mid \underbrace{S_1 \dots S_N}_S)$$

Возвращаясь к форме из задачи, её матрица:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ -1/2 & 1/4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Получим из неё диагональную:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad (10)$$

где первый переход — это результат преобразования “ко второму столбцу прибавить половину первого, к третьему прибавить первый” (и то же самое со строками — но только

для матрицы “слева”), а второй — это “ко второму столбцу прибавить третий, а из третьего вычесть второй” (и потом так же со строками).

Итого, матрица формы B' в каноническом виде и матрица перехода S к соответствующему базису³:

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Имея форму в каноническом виде (9):

$$k(\mathbf{x}) = x_1''^2 - x_2''^2 + x_3''^2$$

не сложно ответить на вопрос о знакоопределённости формы. Она будет знакопеременной. Потому что, например, при $u'' = (1, 0, 0)^T$ имеем $k(u'') > 0$, а при $v'' = (0, 1, 0)^T$ получается $k(v'') < 0$. □

³...Внимательный читатель мог заметить, что стадии изменения матрицы в процессе элементарных преобразований в точности соответствуют заменам, совершённым в процессе диагонализации методом Лагранжа! Однако стоит считать это лишь “случайностью” — вообще могло бы получиться и по-другому.