

Семинар 5

Алексеев Василий

6 октября 2020

Содержание

1	Прямая на плоскости (и в пространстве)	1
2	Задачи	4
2.1	# 5.1	4
2.2	# 6.3	5
2.3	# 6.1(2, 3)	6
2.4	# 5.5(2)	7
2.5	# 5.17	7
2.6	# 5.19	8
2.7	# 5.34(2) (p)	10
2.8	# 5.53 (p)	10
2.9	# 5.35	11

1. Прямая на плоскости (и в пространстве)

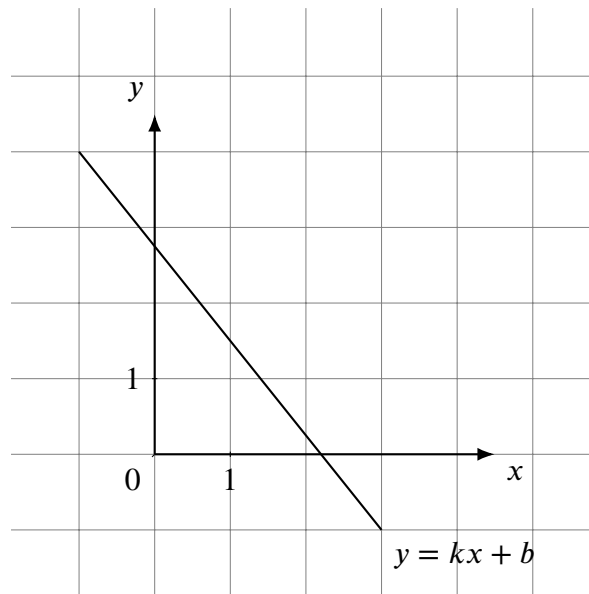


Рис. 1: Прямоугольная декартова система координат на плоскости и прямая, заданная в этой системе координат уравнением $y = kx + b$.

Пусть на плоскости есть прямоугольная система координат (1). Тогда прямая может быть задана уравнением

$$y = kx + b \quad (1)$$

где $k \in \mathbb{R}$ — угловой коэффициент (тангенс угла между прямой и положительным направлением оси X), а $b \in \mathbb{R}$ — свободный член (ордината точки пересечения прямой с осью Y). Уравнение прямой — связь между координатами точек, такая что точки прямой и только они удовлетворяют этому соотношению. Но с помощью уравнения (1) нельзя задать вертикальную прямую (параллельную оси Y). Вертикальные прямые можно описать с помощью уравнения

$$x = x_0$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$. Вместо уравнений для двух частных случаев (наклонная прямая и вертикальная) можно рассмотреть уравнение для произвольной прямой на плоскости, включающее в себя описанные частные случаи:

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0 \quad (2)$$

Отметим, что коэффициенты в уравнении прямой (2) определены с точностью до ненулевого множителя. Так, пусть прямая задаётся уравнением

$$Ax + By + C = 0$$

Но тогда и уравнение

$$2Ax + 2By + 2C = 0$$

хоть формально и отличается от первого, но задаёт ту же прямую: если координаты точки удовлетворяют первому уравнению, то они удовлетворяют и второму, и наоборот.

Также стоит подчеркнуть, что коэффициенты в уравнении зависят от выбранной системы координат. Так, в декартовой прямоугольной¹ системе координат $O; e_1, e_2$ уравнение прямой может иметь вид

$$Ax + By + C = 0$$

¹Базис которой ортонормирован.

а в другой системе координат $O'; e'_1, e'_2$ (не обязательно прямоугольной, базис e' которой не обязательно имеющий ту же ориентацию, что и базис e) уравнение *той же* прямой может иметь другие коэффициенты (координаты тоже можно обозначить как x', y' вместо x, y , как координаты в другой декартовой системе)

$$A'x' + B'y' + C' = 0$$

Таким образом, уравнение прямой — это способ описания прямой, связанный с выбранной системой координат².

Что можно сказать о прямой по её уравнению? Пусть есть прямая l , заданная уравнением (2), и точка на прямой $P = (x_0, y_0) \in l$. Рассмотрим точку $P' = (x_0 - B, y_0 + A)$. Принадлежит ли она прямой l ?

$$A(x_0 - B) + B(y_0 + A) + C = (Ax_0 + By_0 + C) - AB + BA = 0 + 0 = 0 \Rightarrow P' \in l$$

Очевидно, что и точка $P'' = (x_0 - 2B, y_0 + 2A)$ также лежит на l . Таким образом, радиус-вектор любой точки на прямой может быть получен из радиуса-вектора исходной точки P сдвигом вдоль вектора

$$a \equiv (-B, A) \quad (4)$$

который можно взять в качестве *направляющего вектора* прямой, то есть ненулевого вектора, параллельного прямой.

Зная одну точку на прямой и направляющий вектор, можно записать *векторное уравнение прямой в параметрической форме*:

$$r = r_0 + at, \quad a \neq 0, \quad t \in \mathbb{R} \quad (5)$$

где r_0 — вектор начальной точки на прямой, a — направляющий вектор, а t — числовой параметр.

Векторное уравнение равносильно системе из двух скалярных уравнений в общей декартовой системе координат:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \quad (6)$$

где $(\alpha, \beta) = a$, а потому $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Систему скалярных уравнений, в свою очередь, можно ещё записать в *канонической форме*:

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} \\ \alpha \neq 0, \beta \neq 0 \end{cases} \quad (7)$$

²В более общем случае, *алгебраическая линия* на плоскости — множество точек, определяемых в некоторой декартовой системе координат уравнением

$$A_1 x^{k_1} y^{l_1} + \dots + A_s x^{k_s} y^{l_s} = 0, \quad k_i, l_i \in \mathbb{N}_{\geq 0} \quad (3)$$

Степень уравнения (порядок алгебраической линии) определяется как максимальная из сумм:

$$\max \{k_1 + l_1, \dots, k_s + l_s\}$$

(при условии, что в уравнении приведены подобные члены, и числовой коэффициент A_i в соответствующем одночлене с максимальной суммой $k_i + l_i$ отличен от нуля).

Существует теорема, согласно которой *алгебраическая линия порядка p на плоскости в любой декартовой системе координат может быть задана уравнением вида (3) порядка p* .

P.S. Свойство неизменности порядка не относится к различным уравнениям, которые линия может иметь в одной и той же системе координат. Например, $x^2 + y^2 - 1 = 0$ и $(x^2 + y^2 - 1)^2 = 0$.

Если система координат **декартова прямоугольная**, то, зная направляющий вектор прямой $(-B, A)$, можно найти вектор нормали к прямой (2):

$$(a, n) = -B \cdot n_x + A \cdot n_y = 0 \Rightarrow n \propto (A, B)$$

и в качестве вектора нормали можно взять

$$n = (A, B) \quad (8)$$

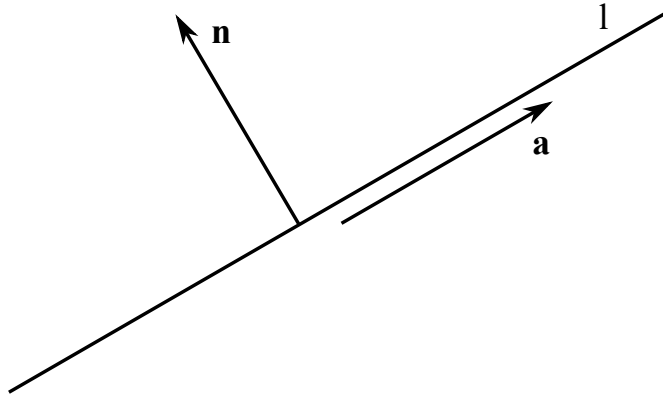


Рис. 2: Направляющий вектор a прямой l и вектор нормали n к ней.

Зная вектор нормали n к прямой, можно записать *нормальное векторное уравнение прямой* (принимая во внимание, что $a \perp n$, а $a \parallel (r - r_0)$ для точек r прямой и только для них)

$$(r - r_0, n) = 0, \quad n \neq 0 \quad (9)$$

или

$$(r, n) = D, \quad n \neq 0, \quad D \in \mathbb{R}$$

Одной из базовых задач является нахождение расстояния от точки до прямой. Пусть есть точка $A = (x_1, y_1) = r_1$ и прямая l , заданная с помощью радиуса вектора начальной точки r_0 и направляющего вектора a . Тогда расстояние от точки A до прямой l можно найти как модуль векторной проекции вектора $r_1 - r_0$ на направление, определяемое вектором нормали к прямой n :

$$\rho(A, l) = \frac{|(r_1 - r_0, n)|}{|n|} \quad (10)$$

Пусть теперь в **прямоугольной системе** координат прямая l задана уравнением $Ax + By + C = 0$. Тогда направляющий вектор прямой $a = (-B, A)$, вектор нормали $n = (A, B)$, а расстояние от точки A до прямой l :

$$\begin{aligned} \rho(A, l) &= \frac{|(r_1 - r_0, n)|}{|n|} = \frac{|(r_1, n) - (r_0, n)|}{|n|} \\ &\xrightarrow{\text{ДПСК}} \frac{|Ax_1 + By_1 - (Ax_0 + By_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \stackrel{r_0 \in l}{=} \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{aligned}$$

где ДПСК — декартова прямоугольная система координат. То есть в итоге

$$\rho(A, l) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (11)$$

2. Задачи

2.1. # 5.1

Задача. При каком необходимом и достаточном условии прямые $r = r_1 + a_1 t$ и $r = r_2 + a_2 t$

1. Пересекаются в единственной точке?
2. Параллельны, но не совпадают?
3. Совпадают?

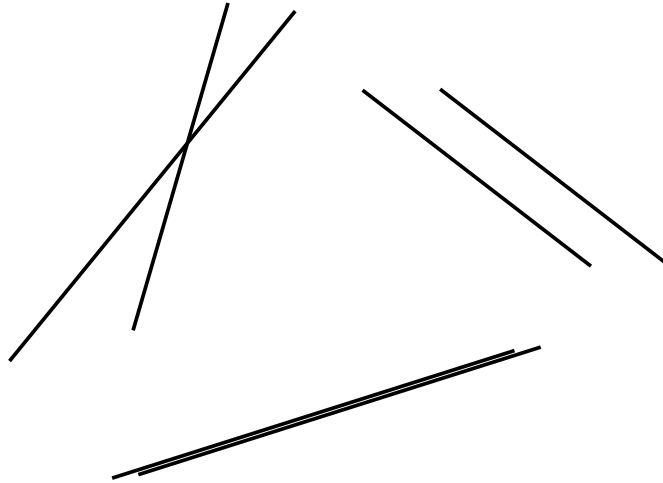


Рис. 3: Варианты взаимного расположения двух прямых на плоскости.

Решение. Рассмотрим пункты по порядку (3).

1. Очевидно, необходимое и достаточное условие — чтобы a_1 и a_2 были неколлинеарны³. То есть условие

$$a_1 \nparallel a_2$$

2. Первое условие — чтобы направляющие векторы были параллельны. Но этого недостаточно: надо “отсечь” случай совпадения прямых. При $a_1 \parallel a_2$ необходимым и достаточным условием совпадения прямых является наличие хотя бы одной общей точки r_* . Но тогда получаем $r_* = r_1 + a_1 t_1$ и $r_* = r_2 + a_2 t_2$, а потому для того, чтобы прямые были различны, должно выполняться $(r_1 - r_2) \nparallel a_1$. Итого

$$\begin{cases} a_1 \parallel a_2 \\ (r_1 - r_2) \nparallel a_1 \end{cases}$$

3. Последний случай получается изменением второго условия в предыдущем пункте на противоположное:

$$\begin{cases} a_1 \parallel a_2 \\ (r_1 - r_2) \parallel a_1 \end{cases}$$

□

³Более строго это можно обосновать, рассмотрев систему уравнений $r_1 + a_1 t_1 = r_2 + a_2 t_2$. Если определитель системы отличен от нуля, то, по теореме Крамера, решение существует и единственно. Обратно, если определитель системы равен нулю, то можно показать, что решений либо нет, либо их бесконечно много.

2.2. # 6.3

Задача. При каком необходимом и достаточном условии прямые $r = r_1 + a_1 t$ и $r = r_2 + a_2 t$

- Пересекаются в единственной точке?
- Скрещиваются?
- Параллельны, но не совпадают?
- Совпадают?

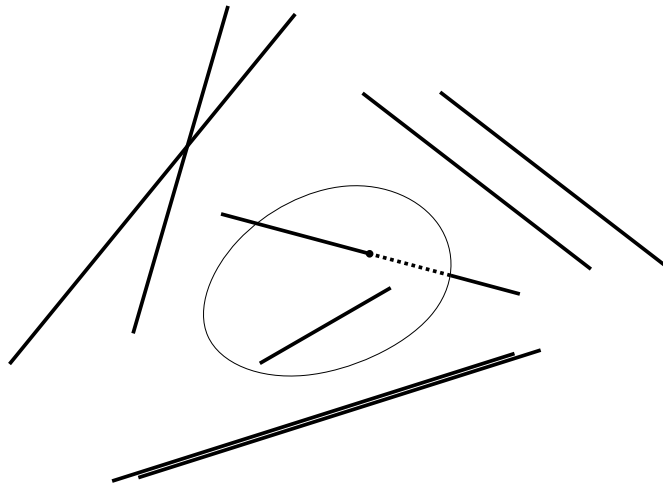


Рис. 4: Варианты взаимного расположения двух прямых в пространстве.

Решение. Решение этой задачи отчасти похоже на решение для случая 2D. Снова рассмотрим пункты по порядку (4).

1. В пространстве уже недостаточно только лишь неколлинеарности a_1 и a_2 . Надо “отсечь” случай, когда прямые скрещиваются. То есть надо потребовать, чтобы прямые лежали в одной плоскости. Для этого необходимо и достаточно, чтобы четыре точки: две на одной прямой, и две на другой — лежали в одной плоскости (прямая определяется по двум точкам, плоскость по трём). На первой прямой можно взять точки $r_1, r_1 + a_1$. На второй — точки $r_2, r_2 + a_2$. Чтобы проверить, что четыре точки лежат на одной плоскости, можно построить три вектора с началом в одной из четырёх точек и концами в оставшихся трёх. Например, можно рассмотреть векторы $r_1 - r_2, r_1 + a_1 - r_2$ и $r_2 + a_2 - r_2 = a_2$ (откладываем векторы от точки r_2). Далее на получившихся трёх векторах можно построить параллелепипед и посчитать его объём: если он больше нуля, то исходные четыре точки не лежат на одной плоскости, если равен нулю — то лежат. Объём же можно посчитать с помощью смешанного произведения (сначала в формуле под векторами имеются в виду направленные отрезки, при появлении же определителя под векторами понимаются столбцы из компонент векторов в некотором правом ортонормированном базисе):

$$\begin{aligned} V_{\pm} &= (r_1 - r_2, r_1 + a_1 - r_2, a_2) \\ &= |(r_1 - r_2, r_1 + a_1 - r_2, a_2)^T| = |(r_1 - r_2, a_1 + (r_1 - r_2), a_2)^T| = |(r_1 - r_2, a_1, a_2)^T| \end{aligned}$$

где в последнем переходе использовалось свойство определителя, заключающееся в том, что к любой строке (или столбцу) можно прибавлять линейную комбинацию

остальных строк (или столбцов) — при этом определитель не меняется. В случае 3D первое условие (неколлинеарность \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2) можно записать ещё и с помощью векторного произведения. Итого, получаем два условия

$$\begin{cases} [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \neq \mathbf{0} \\ (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0 \end{cases}$$

2. Получается из предыдущего пункта заменой одного условия на противоположное (условия, с помощью которого разделяли случаи скрещивания и собственно пересечения):

$$\begin{cases} [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \neq \mathbf{0} \\ (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \neq 0 \end{cases}$$

3. Параллельны — условие $\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_2$. Не совпадают — так же, как и в 2D (так как параллельные прямые лежат в одной плоскости). То есть $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \nparallel \mathbf{a}_1$. И получаем

$$\begin{cases} [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \mathbf{0} \\ [\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_1] \neq \mathbf{0} \end{cases}$$

4. Получается из предыдущего заменой одного условия на противоположное:

$$\begin{cases} [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \mathbf{0} \\ [\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_1] = \mathbf{0} \end{cases}$$

□

2.3. # 6.1(2, 3)

Задача. Для прямой, заданной одним уравнением, записать её же уравнение, но в другой форме.

2. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + at \xrightarrow{?} [\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$

3. $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b} \xrightarrow{?} \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + at$

Решение. Пойдём по пунктам по порядку.

2.

$$\begin{aligned} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = at &\Leftrightarrow (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \parallel \mathbf{a} \Leftrightarrow [\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \mathbf{0} \\ [\mathbf{r}, \mathbf{a}] &= [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] \equiv \mathbf{b} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, \mathbf{b}] &= \mathbf{a} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = \mathbf{r}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{r} &= \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|\mathbf{a}|^2} + \mathbf{a} \cdot \left(\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} \cdot \mathbf{r} \right) = \mathbf{r}_0 + at \end{aligned}$$

где $\mathbf{r}_0 \equiv \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|\mathbf{a}|^2}$ и $t \equiv \left(\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} \cdot \mathbf{r} \right)$.

□

2.4. # 5.5(2)

Задача. Найти расстояние от точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ до прямой l , заданной уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + a\tau$.

Решение. Пусть \mathbf{r}_x — радиус-вектор ортогональной проекции точки M_0 на прямую l . Тогда

$$\begin{cases} \mathbf{r}_x = \mathbf{r}_1 + a\tau \\ (\mathbf{r}_x - \mathbf{r}_0) \perp \mathbf{a} \end{cases}$$

При этом $(\mathbf{r}_x - \mathbf{r}_0) \perp \mathbf{a}$ равносильно $(\mathbf{r}_x - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}) = 0$. Подставляя \mathbf{r}_x из первого уравнения системы в скалярное произведение, получаем

$$(\mathbf{r}_1 + a\tau - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}) = 0$$

Откуда

$$\tau = \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}$$

И вектор \mathbf{r}_x равен

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{r}_1 + \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a}$$

Искомое же расстояние

$$\rho(M_0, l) = |\mathbf{r}_x - \mathbf{r}_0| = \left| \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)|\mathbf{a}|^2 - \mathbf{a}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2} \right|$$

Получили расстояние от точки до прямой.

Можно заметить, что числитель в последней дроби “похож” на развёрнутый “бац минус цаб”... Действительно, можно записать

$$(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}) = [\mathbf{a}, [\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}]]$$

но при этом надо сказать, что мы **с плоскости выходим в пространство** с некоторым базисом (при этом в данном случае не важно, как ориентирован базис в пространстве, как векторы базиса в пространстве расположены по отношению к исходной плоскости, где лежат прямая l и точка M_0). Итого, с помощью векторного произведения запись для расстояния можно записать в более компактном виде:

$$\rho(M_0, l) = \frac{|[\mathbf{a}, [\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}]]|}{|\mathbf{a}|^2} = \frac{|[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}]|}{|\mathbf{a}|}$$

□

2.5. # 5.17

Задача. Треугольник. Две медианы: $x + y = 3$ и $2x + 3y = 1$. Вершина $A(1, 1)$. Уравнения сторон?

Решение. Вершина не лежит на медианах (5): $1 + 1 \neq 2$, $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \neq 3$.

Пусть B — вершина, соответственная медиане $x + y = 3$.

Пусть M_{AC} и M_{AB} — середины сторон AC и AB соответственно:

$$M_{AC} = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right), M_{AB} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

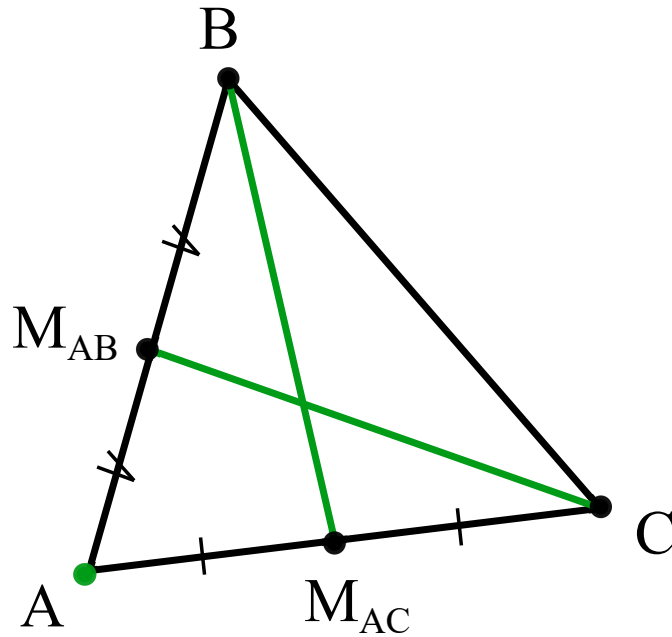


Рис. 5: Вершина A и две медианы BM_{AC} и CM_{AB} в треугольнике ABC .

Тогда

$$\begin{cases} x_B + y_B = 3 \\ x_{M_{AC}} + y_{M_{AC}} = 3 \end{cases}, \begin{cases} 2x_C + 3y_C = 1 \\ 2x_{M_{AB}} + 3y_{M_{AB}} = 1 \end{cases}$$

Координаты вершин: $A(1, 1)$, $B(12, -9)$, $C(11, -7)$.

Уравнение прямой AB :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{AB}x + \tilde{B}_{AB}y + \tilde{C}_{AB} &= 0 \\ \begin{cases} \tilde{A}_{AB} + \tilde{B}_{AB} + \tilde{C}_{AB} = 0 \\ 12\tilde{A}_{AB} - 9\tilde{B}_{AB} + \tilde{C}_{AB} = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \tilde{A}_{AB} = -\frac{10}{21}\tilde{C}_{AB} \\ \tilde{B}_{AB} = -\frac{11}{21}\tilde{C}_{AB} \end{cases} \\ -10x - 11y + 21 &= 0 \end{aligned}$$

Аналогично для сторон BC , AC .

Но можно воспользоваться и другим способом нахождения уравнения прямой. Например, по двум точкам для прямой, соответствующей стороне BC :

$$\begin{aligned} \frac{x - x_B}{y - y_B} &= \frac{x_C - x_B}{y_C - y_B} \\ \frac{x - 12}{y + 9} &= \frac{11 - 12}{-7 + 9} \end{aligned}$$

И в итоге прямая BC :

$$2x + y - 15 = 0$$

□

2.6. # 5.19

Задача. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1, 5)$ и равноудалённых от точек $B(3, 7)$ и $C(1, -1)$.

Решение. Расстояние от точки до прямой: $\rho = \frac{|(r_1 - r_0, \mathbf{n})|}{|\mathbf{n}|}$

Прямая a равноудалена от $B(3, 7)$ и $C(1, -1)$:

$$\frac{|((3, 7) - (-1, 5), \mathbf{n})|}{|\mathbf{n}|} = \rho_{a,B} = \rho_{a,C} = \frac{|((1, -1) - (-1, 5), \mathbf{n})|}{|\mathbf{n}|}$$

$$|(4, 2) \cdot \mathbf{n}| = |(2, -6) \cdot \mathbf{n}|$$

$$4n_x + 2n_y \stackrel{?}{=} \pm(2n_x - 6n_y)$$

Но система координат не прямоугольная! При вычислении скалярного произведения недостаточно лишь перемножать соответствующие координаты:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (x_u \mathbf{e}_1 + y_u \mathbf{e}_2, x_v \mathbf{e}_1 + y_v \mathbf{e}_2) \\ &= x_u x_v (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + y_u y_v (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) + (x_u y_v + y_u x_v) (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

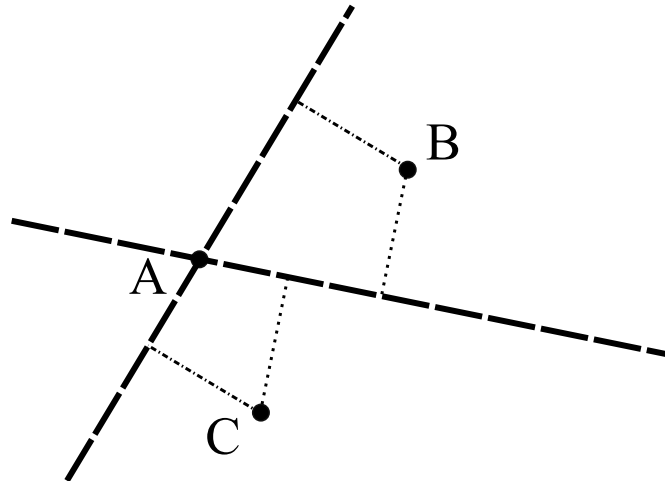


Рис. 6: Прямая, проходящая через точку A и равноудалённая от точек B и C .

Прямая a параллельна $\mathbf{BC} = (1 - 3, -1 - 7) = (-2, -8)$ (6):

$$a : -8x - (-2)y + C = 0$$

$$A \in a \Rightarrow -8 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 + C = 0 \Rightarrow C = -18$$

$$\boxed{4x - y + 9 = 0}$$

Прямая a проходит между точками B и C (6).

Пусть M — середина BC : $M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{-1+7}{2}\right) = (2, 3)$

Прямая, проходящая через две точки $A(-1, 5)$ и $M(2, 3)$:

$$\frac{x - x_M}{x_A - x_M} = \frac{y - y_M}{y_A - y_M} \Rightarrow \frac{x - 2}{-1 - 2} = \frac{y - 3}{5 - 3}$$

$$\boxed{2x + 3y - 13 = 0}$$

□

2.7. # 5.34(2) (p)

Задача. Точка $A(1, 2)$ и прямая $a : 3x - y + 9 = 0$. Найти координаты

1. A_{\perp} — проекции A на прямую a
2. A' — точки, симметричной с A относительно прямой a

Решение. Точка A не лежит на прямой: $3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 9 \neq 0$

Система прямоугольная $\Rightarrow n = (3, -1)$.

$A_{\perp} = (x, y)$, $A_{\perp} \in a$, $A_{\perp}A \parallel n$:

$$\begin{cases} 3x - y + 9 = 0 \\ \frac{1 - x}{2 - y} = \frac{x_A - x_{A_{\perp}}}{y_A - y_{A_{\perp}}} = \frac{n_x}{n_y} = \frac{3}{-1} \end{cases}$$

$$A_{\perp} = (-2, 3)$$

A, A_{\perp}, A' :

$$\begin{cases} AA_{\perp} = A_{\perp}A' \\ AA_{\perp} = (-2, 3) - (1, 2) = (-3, 1) \end{cases} \Rightarrow A_{\perp}A' = (-3, 1)$$

$$A_{\perp}A' = A' - A_{\perp} \Rightarrow A' = A_{\perp}A' + A_{\perp} = (-3, 1) + (-2, 3)$$

$$A_{\perp}A' = (-5, 4)$$

□

2.8. # 5.53 (p)

Задача. Две прямые: $x - 7y = 1$ и $x + y = -7$. Угол с точкой $A(1, 1)$ внутри. Уравнение биссектрисы?

Решение. Изложенное далее отличается от решения в задачнике. Возможно, вариант, представленный здесь, менее рациональный, но всё же, хочется думать, тоже небесполезный.

Прямые пересекаются, точка A не лежит ни на одной прямой.

Точка пересечения прямых $X(x, y)$:

$$\begin{cases} x - 7y = 1 \\ x + y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$X = (-6, -1)$$

Выберем направляющие векторы прямых a_1, a_2 так, чтобы они образовывали угол с точкой A внутри (7).

$$[a_i, \overrightarrow{XA}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_{ix} & a_{iy} & 0 \\ XA_x & XA_y & 0 \end{vmatrix} = k \cdot (a_{ix} \cdot XA_y - XA_x \cdot a_{iy})$$

$$XA = (1, 1) - (-6, -1) = (7, 2)$$

$$a_1 = (7, 1) \Rightarrow \operatorname{sgn}(7 \cdot 2 - 7 \cdot 1) = +$$

$$a_2 = (-1, 1) \Rightarrow \operatorname{sgn}(-1 \cdot 2 - 7 \cdot 1) = -$$

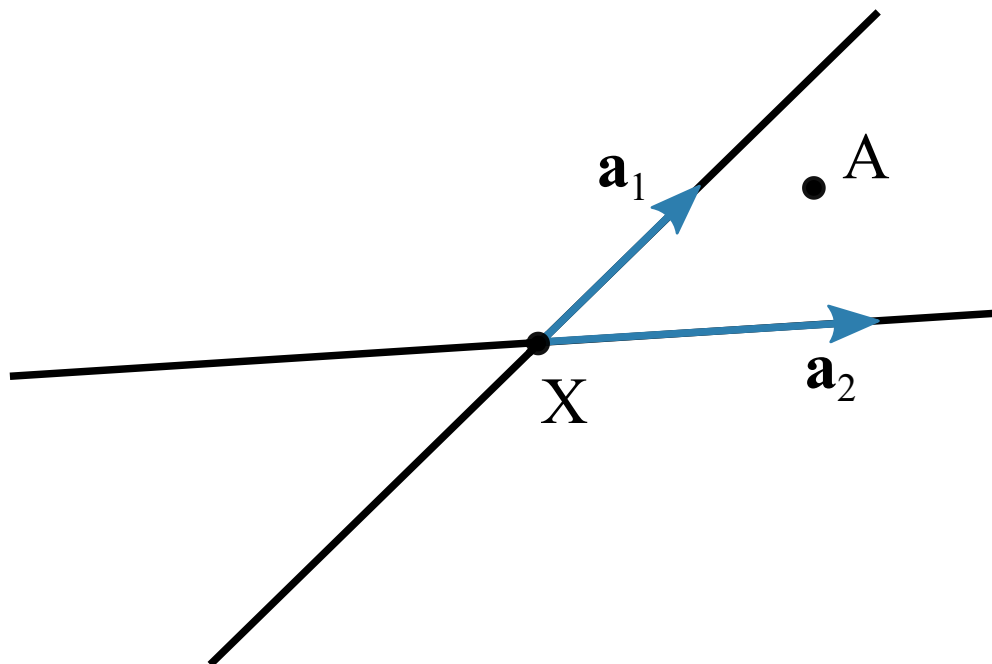


Рис. 7: Точка A лежит внутри угла, образованного векторами a_1 и a_2 , отложенными от точки X .

Получаем, что при выбранных a_1 и a_2 направление поворота от a_1 к \overrightarrow{XA} по наименьшему углу не совпадает с направлением поворота от a_2 к \overrightarrow{XA} по наименьшему углу. То есть A лежит внутри угла, образованного a_1 и a_2 , отложенными из точки X . Итак, полагаем

$$a_1 \equiv (7, 1), a_2 \equiv (-1, 1)$$

Пусть $b = (b_x, b_y)$ — направляющий вектор биссектрисы. Точки на биссектрисе равноудалены от сторон угла:

$$\begin{aligned} \frac{(a_1, b)}{|a_1||b|} &= \cos \angle(a_1, b) = \cos \angle(a_2, b) = \frac{(a_2, b)}{|a_2||b|} \\ \frac{7b_x + b_y}{|a_1|} &= \frac{-b_x + b_y}{|a_2|} \Rightarrow b = (|a_1| - |a_2|, 7|a_2| + |a_1|) \\ |a_1| &= \sqrt{50}, |a_2| = \sqrt{2} \Rightarrow b = (5 - 1, 7 + 5) = (4, 12) \end{aligned}$$

Уравнение биссектрисы:

$$\frac{x - (-6)}{4} = \frac{y - (-1)}{12} \Rightarrow 3x - y + 17 = 0$$

□

2.9. # 5.35

Задача. Составить уравнение прямой, симметричной прямой $a: 3x - y + 5 = 0$ относительно прямой $l: x + y - 1 = 0$.

Решение. Точка пересечения прямых X (8):

$$\begin{cases} 3x - y + 5 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = (-1, 2)$$

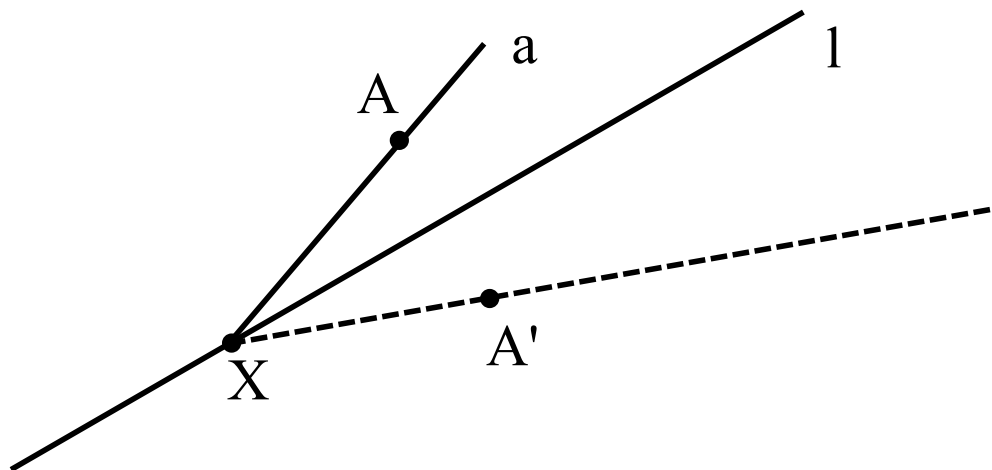


Рис. 8: Прямая, симметричная прямой a относительно прямой l .

Точка A на прямой $3x - y + 5 = 0$:

$$3 \cdot 0 - 5 + 5 = 0 \Rightarrow A = (0, 5)$$

Проекция π_{XA} вектора $XA = (1, 3)$ на прямую l с направляющим вектором $l = (-1, 1)$:

$$\pi_{XA} = XA \cdot \cos \angle(XA, l) = \frac{(XA, l)}{|l|} = (1, 3) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1) = \sqrt{2}$$

Проекция π_A точки A на l :

$$\pi_A = X + \frac{l}{l} \cdot \pi_{XA} = (-1, 2) + (-1, 1) = (-2, 3)$$

Точка A' , симметричная точке A относительно l :

$$A' = \pi_A + (\pi_A - A) = (-4, 1)$$

Прямая, проходящая через две точки $X(-1, 2)$ и $A'(-4, 1)$:

$$\frac{x - (-1)}{y - 2} = \frac{-4 - (-1)}{1 - 2} \Rightarrow \boxed{x - 3y + 7 = 0}$$

□