Семинар 2

Алексеев Василий

8 сентября 2020

Содержание

1. Вектора (-ы?)

Вектор — направленный отрезок (1). Вектор можно обозначать одной строчной буквой, например $\boldsymbol{a}$, или двумя: началом и концом, например $\overrightarrow{AB}$.

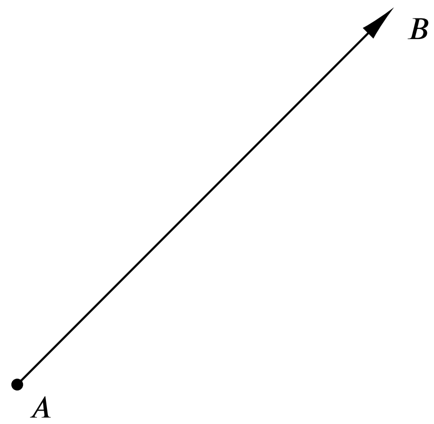

Рис. 1: Вектор характеризуется направлением и величиной.

Определение 1.1 (Коллинеарность)**.** Два ненулевых вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются *коллинеарными*, если существует прямая, которой они параллельны (2). Коллинеарность обозначается $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$. Если при этом $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ направлены в одну сторону, то можно писать $\boldsymbol{a} \upuparrows \boldsymbol{b}$, если в разные стороны — $\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{b}$. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

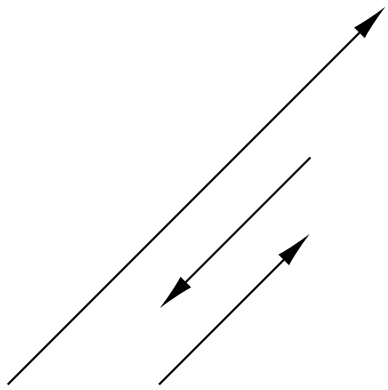

Рис. 2: Коллинеарные вектора.

Определение 1.2 (Компланарность)**.** Три ненулевых вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны (3). Три вектора, два из которых ненулевые, а третий нулевой, всегда компланарны.

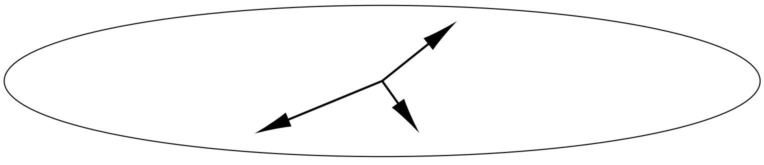

Рис. 3: Компланарные вектора.

Определение 1.3 (Равенство векторов)**.** Будем считать два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равными, если они

- равны по длине $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$
- коллинеарны $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$
- одинаково направлены $\boldsymbol{a} \upuparrows \boldsymbol{b}$

Точка приложения при равенстве не учитывается[1].

На множестве векторов определены следующие операции:

- Сложение векторов:
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$
- Умножение вектора $\boldsymbol{a}$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$. Результирующий вектор обозначается как $\alpha\boldsymbol{a}$ и определяется свойствами:
$$\begin{cases} |\alpha\boldsymbol{a}| = |\alpha| \cdot |\boldsymbol{a}| \\ \alpha\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{a} \\ \begin{cases} \alpha\boldsymbol{a} \upuparrows \boldsymbol{a}, \alpha > 0 \\ \alpha\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{a}, \alpha < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Множество векторов в $\mathbb{R}^3$ с введёнными операциями сложения и умножения на число из $\mathbb{R}$ образуют линейное пространство. Но рассмотрим векторы на одной прямой: сложение и умножение на число не выводят с прямой. То же самое с векторами на плоскости: сложение и умножение на число даёт вектор, также лежащий в той же плоскости. Таким образом, не только векторы из всего $\mathbb{R}^3$ образуют линейное пространство, но и векторы, параллельные одной прямой, и векторы, параллельные одной плоскости. Множество векторов из одного нулевого вектора также образуют линейное пространство. Таким образом,

- нульмерное векторное пространство — нулевой вектор
- одномерное векторное пространство
$$\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{v} \parallel l\}, \quad l \text{ — прямая}$$
- двумерное векторное пространство
$$\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{v} \parallel \alpha\}, \quad \alpha \text{ — плоскость}$$
- трёхмерное векторное пространство — $\mathbb{R}^3$

Определение 1.4. Линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$:
$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{a}_n, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le n$$

Нетривиальная линейная комбинация — когда хотя бы один их коэффициентов α_i отличен от нуля: $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 0$.

[1] То есть получается, что можно нарисовать несколько несовпадающих, но равных векторов. Хотя в зависимости от конкретной задачи может быть важным различать векторы с разной точкой приложения. Например, в физике, при действии сил на тело.

Определение 1.5 (Линейно зависимая система векторов)**.** Система векторов $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ называется линейно зависимой, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору:

$$\begin{cases} \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0} \\ \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 > 0 \end{cases}$$

Пример. Система из одного нулевого вектора линейно зависима.

Теорема 1.1. *Система из $k > 1$ вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов системы представим как линейная комбинация остальных.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ — линейно зависимы. Это значит, что

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

и некоторый $\alpha_j \neq 0$. Поэтому

$$\alpha_j = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq j}} -\frac{\alpha_i}{\alpha_j} \boldsymbol{a}_i$$

И наоборот, пусть некоторый $\boldsymbol{a}_j$ представим как линейная комбинация остальных векторов из набора с коэффициентами α_i':

$$\boldsymbol{a}_j = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq j}} \alpha_i' \boldsymbol{a}_i$$

Тогда

$$\alpha_1' \boldsymbol{a}_1 + \ldots + (-1) \cdot \boldsymbol{a}_j + \ldots + \alpha_n' \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

и по крайней мере один коэффициент -1 при разложении нуля $\boldsymbol{0}$ в линейную комбинацию векторов $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1}^n$ не равен нулю. □

Теорема 1.2. *Критерии линейной зависимости систем векторов:*

- *Один вектор линейно зависим ⇔ это нулевой вектор.*
- *Два вектора линейно зависимы ⇔ эти векоры коллинеарны.*
- *Три ветора линейно зависимы ⇔ эти векторы компланарны.*
- *Любые четыре вектора линейно зависимы*[2].

Определение 1.6 (Базис)**.** Базисом в пространстве называется

- упорядоченная
- линейно независимая
- полная[3]

система векторов.

[2] В $\mathbb{R}^3$.

[3] Любой вектор пространства модет быть разложен по системе.

Из теоремы (1.2) следует, что

- В нулевом пространстве не существует базиса.
- В одномерном пространстве ненулевой вектор образует базис.
- В двумерном пространстве пара неколлинеарных векторов образует базис.
- В трёхмерном пространстве тройка некомпланарных векторов образует базис.

Замечание. При заданном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ каждому вектору можно поставить в соответствие набор чисел — коэффициентов при разложении вектора по базису $\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \dots + \alpha_n \boldsymbol{e}_n$:

$$\boldsymbol{a} \leftrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$$

Соответствие взаимнооднозначное, потому что базисная система векторов линейно независима.

Замечание (Про матричное умножение). Почему матричное умножение введено именно так: $C_{m\times n} = A_{m\times p} B_{p\times n}$, $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kn}$, $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$?

Пусть есть ортонормированный[4] базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$. Повернём вектор $\boldsymbol{v}$ с компонетнами $(1, 0)$ на угол 45 градусов против часовой стрелки (4).

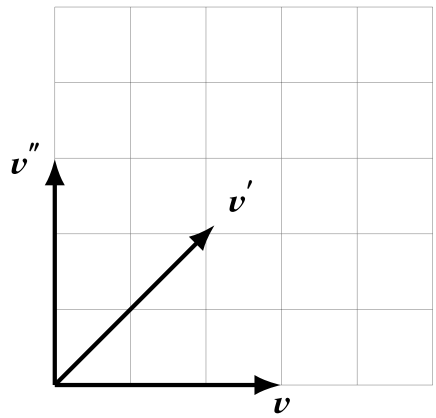

Рис. 4: Несколько поворотов вектора $\boldsymbol{v}$ на 45 градусов против часовой стрелки.

Получим вектор $\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$. Проверим, что матрица $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ как раз задаёт нужное преобразование:

$$v' = A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Снова повернём вектор на угол 45 градусов против часовой стрелки. Должны получить вектор с компонентами $\binom{0}{1}$:

$$v'' = A\boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[4]Вектора взаимноперпендикулярны и по длине равны единице 1.

Какой матрицей задаётся поворот сразу на 90 градусов против часовой стрелки? Как из вектора $\binom{1}{0}$ сразу получить вектор $\binom{0}{1}$?

Возведём матрицу, задающую поворот на 45 против часовой стрелки, в квадрат:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и умножим её на исходный вектор $\boldsymbol{v}$:

$$A^2\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, благодяра введённому матричному умножению, матрица композиции линейных преобразований получилась равна произведению матриц этих преобразований.

Определение 1.7 (Система координат)**.** Декартовой системой координат[5] называется совокупность точки и базиса $O; \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$. Точка O называется началом отчёта.

Замечание. При заданной системе координат $O; \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ каждой точке A можно поставить в соответствие набор чисел — компонент радиуса-вектора точки в базисе $\overrightarrow{OA} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n$:

$$A \leftrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$$

Задача (1.6)**.** $\boldsymbol{a}(-5, -1), \boldsymbol{b}(-1, 3)$ — *проверить, что базис. Разложить* $\boldsymbol{c}(-1, 2)$ *и* $\boldsymbol{d}(2, -6)$ *по этому базису.*

Решение. Для доказательства того, что $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ вместе образют базис, достаточно проверить их линейную независимость:

$$\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -15 - 1 = -16 \neq 0$$

Теперь разложим, например, вектор $\boldsymbol{c}$ по $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (с вектором $\boldsymbol{d}$ будет аналогично):

$$\boldsymbol{c} = \alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\alpha - \beta \\ -\alpha + 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 - 1 \\ -1 + 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Решаем получившуюся систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -16$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -11$$

[5] Помимо декартовой, есть и другие системы координат. Например полярная, когда положение точки на плоскости определяется по расстоянию r от начала координат O и по углу ϕ, которое направление из начала координат на точку образует с выбранным направлением $\boldsymbol{l}$: $\boldsymbol{a} \leftrightarrow (r, \phi)$.

И коэффициенты разложения:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{1}{16} \\ \beta = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{11}{16} \end{cases}$$

□

Задача (1.11(1))**.** *Компланарны ли $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$?*

$$\begin{cases} \boldsymbol{l} = 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{m} = 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \end{cases}$$

(векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ некомпланарны).

Решение. Векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ некомпланарны $\Rightarrow$ образуют базис. Компланарность $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \Leftrightarrow$ линейная зависимость $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$. Для проверки линейной зависимости или независимости можно посчитать определитель матрицы, составленной из компонент векторов $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ в базисе $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ (столбец матрицы — компоненты в разложении по данному вектору базиса):

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{(2)=(2)+(3)}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Откуда видно, что $(1) = -\big((2) + (3)\big)$, или, если от строчек вернуться к векторам:

$$\boldsymbol{l} = -(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{m} - \boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{l} + \boldsymbol{m} + \boldsymbol{n} = 0$$

□

Задача (1.24(1))**.** *Три точки, не лежащие на одной прямой: O, A, B. Векторы $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ — базис. Найти вектор $\overrightarrow{OM}$, где $M \in [AB]$, так что $|AM| \div |MB| = m \div n$.*

Решение.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$$
$$\overrightarrow{AM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB} = \frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)$$
$$\overrightarrow{OM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB} = \left(\frac{n}{m+n}, \frac{m}{m+n}\right)$$

□

Задача (1.51)**.** *Доказать, что три отрезка, соединяющие середины скрещивающихся рёбер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.*

Решение. Пусть P, Q, R, H — середины соответственных рёбер тетраэдра (см. рисунок 5). Тогда $PH \parallel SB$ как средняя линия в $\triangle ASB$ и $QR \parallel SB$ как средняя линия в $\triangle CBS$. Поэтому $PH \parallel QR$. Аналогично $PQ \parallel HR$. Значит, $PQRH$ — параллелограмм, и точка пересечения диагоналей $O = PR \cap HQ$ делит их пополам.

Аналогично рассматривается случай с ещё одним отрезком, соединяющим середины SB и AC (он рассматривается в паре с уже упомянутым отрезком PR или HQ: они — диагонали в другом параллелограмме, ...). Точка их пересечения совпадёт с O, потому что у PR (или у HQ) всего одна середина.

Итого, все три интересующих отрезка пересекаются в одной точке и делятся ей пополам.

□

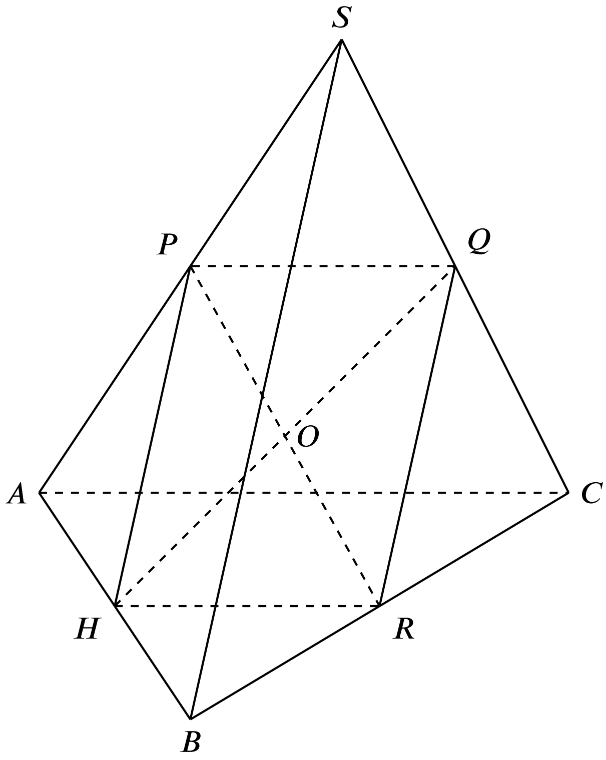

Рис. 5: Середины четырёх рёбер тетраэдра.

Задача (1.39). *Однородная проволока — угол AOB. При этом $|OA| = a$, $|OB| = b$. Найти координаты центра тяжести проволоки в системе координат: $O, \overrightarrow{OA}/a, \overrightarrow{OB}/b$.*

Решение. Обозначим за ρ плотность проволоки на единицу длины. Пусть также $\boldsymbol{e}_1 \equiv \overrightarrow{OA}/a$ и $\boldsymbol{e}_2 \equiv \overrightarrow{OB}/B$. Тогда радиус-вектор центра масс:

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{\sum_i m\boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{(\rho \cdot a) \cdot (a/2 \cdot \boldsymbol{e}_1) + (\rho \cdot b) \cdot (b/2 \cdot \boldsymbol{e}_2)}{\rho \cdot a + \rho \cdot b} = \frac{1}{2(a+b)}\left(a^2\boldsymbol{e}_1 + b^2\boldsymbol{e}_2\right)$$

□

Задача (1.37). *В плоскости треугольника ABC найти точку O, такую что*

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$$

Есть ли ещё такие точки?

Решение.

Вспомогательная часть 1*: координаты центра масс треугольника.*

$$\boldsymbol{r}_c(\triangle ABC) = \frac{1}{3}\left(\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{r}_C\right)$$

Вспомогательная часть 2*: координаты точки пересечения медиан треугольника.*
Пусть AM — медиана, проведённая из вершины A треугольника к стороне BC (6).
Радиус-вектор точки M:

$$\boldsymbol{r}_M = \boldsymbol{r}_C + \overrightarrow{CM} = \boldsymbol{r}_C + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \boldsymbol{r}_C + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_C\right) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{r}_C\right)$$

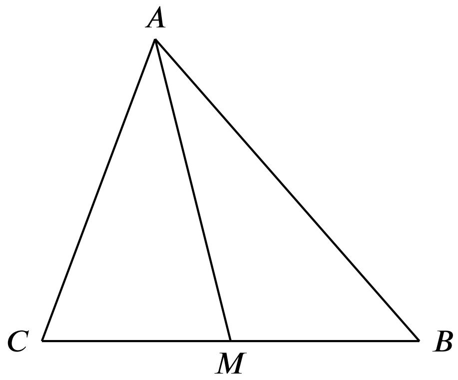

Рис. 6: Медиана AM в треугольнике ABC.

Вектор $\overrightarrow{AM}$:

$$\overrightarrow{AM} = \boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_A = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{r}_C) - \boldsymbol{r}_A = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{r}_C - 2\boldsymbol{r}_A)$$

Обозначим точкой Q центр масс. Вектор $\overrightarrow{AQ}$:

$$\overrightarrow{AQ} = \boldsymbol{r}_c - \boldsymbol{r}_A = \frac{1}{3}(\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{r}_C) - \boldsymbol{r}_A = \frac{1}{3}(\boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{r}_C - 2\boldsymbol{r}_A)$$

Получаем, что $\overrightarrow{AQ} \upuparrows \overrightarrow{AM}$, причём $|AQ| \div |AM| = 2 \div 3$. Значит, $Q \in [AM]$.

Аналогично доказывается, что Q лежит на медианах из вершин B и C. Так как несовпадающие прямые могут иметь не больше одной общей точки, то получаем, что точка пересечения медиан треугольника совпадает с его центром масс.

Собственно решение задачи.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overbrace{\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA}\right)}^{\mathbf{0}} + \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}\right) = 3\overrightarrow{AO} + \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = 3\overrightarrow{AO}$$

То есть

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

Или, если переписать через радиус-векторы:

$$\boldsymbol{r}_O - \boldsymbol{r}_A = \frac{1}{3}(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A)$$

Откуда получаем выражение для $\boldsymbol{r}_O$:

$$\boldsymbol{r}_O = \frac{1}{3}(\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{r}_C)$$

Что значит, что точка O — точка пересечения медиан $\triangle ABC$.

Существует ли ещё одна точка $Q \neq O$, такая что $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} = \mathbf{0}$? Допустим, такая точка Q сущетсвует. Тогда

$$\begin{cases} \overrightarrow{QO} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AO} \\ \overrightarrow{QO} = \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BO} \\ \overrightarrow{QO} = \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CO} \end{cases}$$

Складывая уравнения системы выше, получаем

$$3\overrightarrow{QO} = \left(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC}\right) + \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}\right) = \mathbf{0} - \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Поэтому $\overrightarrow{QO} = \mathbf{0}$ и $Q = O$. Другой точки, удовлетворяющей условию задачи, кроме точки O, в плоскости $\triangle ABC$ нет. □

2. Дополнение

2.1. Про центр масс

Есть задача, где надо было найти центр масс однородной проволоки, изогнутой под углом. В общем случае положение центра масс тела объёма V и массы M вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{1}{M}\int_V \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}dV$$

где $\rho(\boldsymbol{r})$ — плотность в точке $\boldsymbol{r}$.

Поэтому, даже в случае, когда система состоит не из материальных точек, а из протяжённых тел, центр масс системы тоже можно вычислять как взвешенное среднее центров масс отдельных частей (потому что интеграл по телу разбивается на несколько интегралов).

В задаче же про центра масс треугольника не важно, где сосредоточена масса в треугольнике: в вершинах или распределена равномерно по сторонам. Положение центра масс в обоих случаях будет одинаковое.