Семинар 3

Алексеев Василий

15 + 21 сентября 2020

Содержание

1. Замена базиса и системы координат

Будем обозначать векторы базиса в виде строки:

$$\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$$

для случая базиса в $\mathbb{R}^3$. Аналогично и для базисов в $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$.

При заданном базисе $\boldsymbol{e}$ любой вектор пространства $\boldsymbol{x}$ однозначно определяется его компонентами в базисе:

$$\boldsymbol{x} = x_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + x_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + x_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \Rightarrow \boldsymbol{x} \leftrightarrow (x_1, x_2, x_3)^T$$

поэтому, говоря о векторе, часто имеют в виду его компоненты в базисе (то понятия вектора как направленного отрезка и вектора как столбца из чисел взаимозаменяемы). Но это при фиксированном базисе.

В пространстве существует больше одного базиса: любая тройка некомпланарных векторов в $\mathbb{R}^3$ образует базис. Встаёт вопрос о том, как связаны компоненты одного и того же вектора в разных базисах[1]

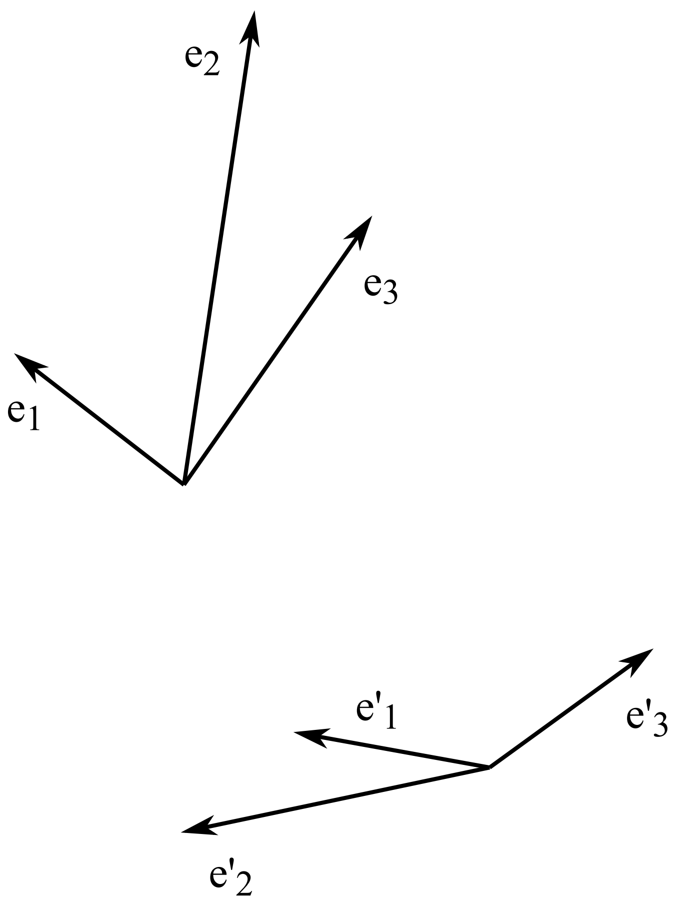

Рис. 1: Два разных базиса в пространстве.

Пусть есть два базиса: $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$ (1). Тогда векторы любого базиса можно разложить по системе векторов другого базиса. Разложим, например, векторы $\boldsymbol{e}$ по $\boldsymbol{e}'$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = a_{11} \cdot \boldsymbol{e}'_1 + a_{12} \cdot \boldsymbol{e}'_2 + a_{13} \cdot \boldsymbol{e}'_3 \\ \boldsymbol{e}_2 = a_{21} \cdot \boldsymbol{e}'_1 + a_{22} \cdot \boldsymbol{e}'_2 + a_{23} \cdot \boldsymbol{e}'_3 \\ \boldsymbol{e}_3 = a_{31} \cdot \boldsymbol{e}'_1 + a_{32} \cdot \boldsymbol{e}'_2 + a_{33} \cdot \boldsymbol{e}'_3 \end{cases} \tag{1}$$

[1] В приложениях бывает нужно переводить координаты радиусов-векторов точек из одной системы координат в другую.

Запись можно представить более компактно[2]:

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}' S$$

где S называется *матрицей перехода* от базиса $\boldsymbol{e}'$ к базису $\boldsymbol{e}$:

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

во введённых ранее обозначениях (1).

Посмотрим теперь, как выражаются компоненты некоторого вектора $\boldsymbol{x}$ в одном базисе через его же компоненты, но в другом базисе. Имеем

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{e}'\boldsymbol{x}_{e'} \tag{2}$$

где $\boldsymbol{x}$ — вектор как направленный отрезок, $\boldsymbol{x}_e$ — вектор-столбец, соответствующий $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{x}_{e'}$ — вектор-столбец, соответствующий $\boldsymbol{x}'$ в базисе $\boldsymbol{e}'$.

Теперь воспользуемся тем, что нам известно представление базиса $\boldsymbol{e}$ через вектора базиса $\boldsymbol{e}'$:

$$\boldsymbol{e}\boldsymbol{x}_e = \left(\boldsymbol{e}' S\right)\boldsymbol{x}_e \overset{(2)}{=} \boldsymbol{e}'\boldsymbol{x}_{e'}$$

Так как умножение матриц ассоциативно, а также дистрибутивно относительно матричного сложения, мы можем перенести $\boldsymbol{e}'\boldsymbol{x}_{e'}$ влево и перегруппировать слагаемые:

$$\boldsymbol{e}' \cdot \left(S\boldsymbol{x}_e - \boldsymbol{x}_{e'}\right) = \boldsymbol{0}$$

Из линейной независимости системы векторов $\boldsymbol{e}'$ получаем:

$$S\boldsymbol{x}_e - \boldsymbol{x}_{e'} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x}_{e'} = S\boldsymbol{x}_e$$

Итак, в двух базисах компоненты векторов связаны так:

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}' S \\ \boldsymbol{x}_{e'} = S\boldsymbol{x}_e \end{cases}} \tag{3}$$

При этом, при переходе, наоборот, от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{e}'$ можно написать аналогичное соотношение, но уже с другой матрицей перехода, которую обозначим за S':

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S' \\ \boldsymbol{x}_e = S'\boldsymbol{x}_{e'} \end{cases}$$

Последний вопрос: как изменяются радиусы-векторы точек при смене системы координат (2)? Очевидно,

$$\boldsymbol{r}_O(A) = \boldsymbol{r}_O(O') + \boldsymbol{r}_{O'}(A)$$

где $\boldsymbol{r}_O(A)$ — радиус-вектор точки A в системе $O; \boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{r}_{O'}(A)$ — радиус-вектор точки A в системе $O'; \boldsymbol{e}'$, и $\boldsymbol{r}_O(O')$ — радиус-вектор, определяющий положение начала отсчёта O' в системе $O; \boldsymbol{e}$. В системе $O'; \boldsymbol{e}'$ известно координатное представление вектора $\boldsymbol{r}_{O'}(A)$. Для

[2] Под результатом умножения строки из векторов $\boldsymbol{e}'$ на матрицу из чисел S будем иметь в виду такую строку $\boldsymbol{e}$ из векторов, где каждый элемент равен линейной комбинации векторов умножаемой строки $\boldsymbol{e}'$ с коэффициентами, равными элементам соответственного столбца матрицы S. То есть по правилу умножения числовых матриц.

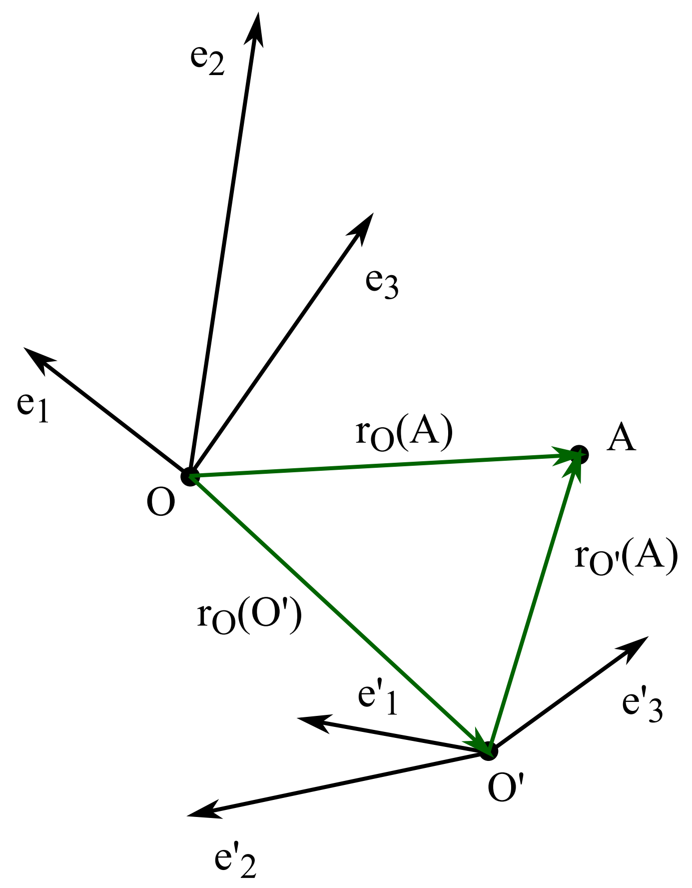

Рис. 2: Две системы координат в пространстве.

других же двух векторов $\boldsymbol{r}_O(A)$ и $\boldsymbol{r}_O(O')$ известны компоненты в базисе $O;\boldsymbol{e}$. Как записать соотношение выше через вектор-столбцы компонент векторов в базисах? Для этого надо все векторы представить в одном базисе. Из соотношения (3) мы можем выразить вектор $\boldsymbol{r}_{O'}(A)$ в базисе $\boldsymbol{e}$:

$$\boldsymbol{r}_{O'}(A) = S'\boldsymbol{x}_{O'}(A)$$

где $\boldsymbol{x}_{O'}(A)$ — компоненты радиус-вектора точки A в $O';\boldsymbol{e}'$ и $S'\boldsymbol{x}_{O'}(A)$ — компоненты *того же* вектора в системе $O;\boldsymbol{e}$. Итого, получаем соотношение для компонент радиусов-векторов точки в разных системах координат:

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S' \\ \boldsymbol{x}_O(A) = \boldsymbol{x}_O(O') + S'\boldsymbol{x}_{O'}(A) \end{cases}} \tag{4}$$

то есть для нахождения координат точки в одной системе по её координатам в другой системе координат надо знать связь между векторами базисов и положение начала координат одной системы относительно другой.

Задача (4.5)**.** *Есть две системы координат: $O;\boldsymbol{e}$ и $O';\boldsymbol{e}'$. Координаты произвольной точки в первой системе обозначаются за (x, y), координаты той же точки, но во второй системе координат — (x', y'). Известна связь между (x, y) и (x', y'):*

$$\begin{cases} x = 2x' - y' + 5 \\ y = 3x' + y' + 2 \end{cases}$$

Требуется найти

- *Выражение* (x', y') *через* (x, y).
- *Координаты точки* O *и компоненты векторов* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ *в системе* $O'; \boldsymbol{e}'$.
- *Координаты точки* O' *и компоненты векторов* $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ *в системе* $O; \boldsymbol{e}$.

Решение. Перепишем связь между координатами точки в разных системах в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}^{S'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Перепишем как

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-5 \\ y-2 \end{pmatrix}$$

И решим получившуюся систему относительно (x', y') с помощью метода Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$$

$$\Delta_{x'} = \begin{vmatrix} x-5 & -1 \\ y-2 & 1 \end{vmatrix} = x + y - 7$$

$$\Delta_{y'} = \begin{vmatrix} 2 & x-5 \\ 3 & y-2 \end{vmatrix} = -3x + 2y + 11$$

И сами координаты:

$$x' = \frac{\Delta_{x'}}{\Delta} = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y - \frac{7}{5}$$

$$y' = \frac{\Delta_{y'}}{\Delta} = -\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{11}{5}$$

Или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ -3/5 & 2/5 \end{pmatrix}}^{S} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7/5 \\ 11/5 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Итак, теперь известны обе матрицы перехода S и S': от базиса $\boldsymbol{e}'$ к $\boldsymbol{e}$ и наоборот[3].

Вспоминая (4) или просто подставляя нулевые векторы в соотношения для координат, получаем положения начал отсчёта:

- Нулевой вектор в (5) $\Rightarrow \boldsymbol{x}_O(O') = (5, 2)^T$
- Нулевой вектор в (6) $\Rightarrow \boldsymbol{x}_{O'}(O) = \left(-\frac{7}{5}, \frac{11}{5}\right)^T$

Вспоминая, что столбцы матриц S и S' есть компоненты векторов одного базиса в другом, или просто умножая матрицы S и S' на векторы $(1, 0)^T$ и $(0, 1)^T$, получаем компоненты одних базисных векторов в другом базисе:

[3] Можно проверить, что $SS' = S'S = E$, то есть $S' = S^{-1}$.

- Столбцы S ($e = e'S$)

$$\Rightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{5}e'_1 - \frac{3}{5}e'_2 \\ e_2 = \frac{1}{5}e'_1 + \frac{2}{5}e'_2 \end{cases}$$

- Столбцы S' ($e' = eS'$)

$$\Rightarrow \begin{cases} e'_1 = 2e_1 + 3e_2 \\ e'_2 = -e_1 + e_2 \end{cases}$$

□

Задача (4.19). *Треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (3). Точка M — точка пересечения медиан грани $A_1B_1C_1$. Требуется, зная координаты точки x', y', z') в системе $A_1; \overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1M}$, найти её координаты (x, y, z) в системе $A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}$*[4].

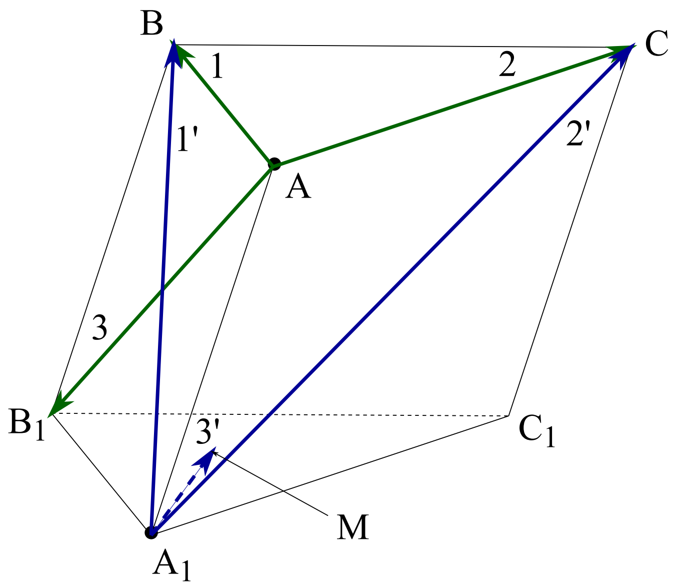

Рис. 3: Призма $ABCA_1B_1C_1$.

Решение. Что нам надо найти? Вспоминая формулы (3) или (4), получаем, что если векторы базиса связаны соотношением $e' = eS'$, то компоненты векторов связаны соотношением $x = S'x'$ и координаты точек связаны соотношением $x_O = x_O(O') + S'x_{O'}$. Таким образом, чтобы решить задачу, надо найти матрицу S', столбцы которой — компоненты базиса $\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1M}$ в базисе $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}$ и координаты начала отсчёта A_1 в системе с началом отсчёта A. Обозначим $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}$ за e_1, e_2, e_3 и разложим $\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1M}$ по этой системе:

$$\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} = 2e_1 - e_3$$

$$\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AC} = e_1 + e_2 - e_3$$

$$\overrightarrow{A_1M} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1C_1}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(e_1 + e_2)$$

[4]Порядок базисных векторов важен!

Итого,

$$(e'_1, e'_2, e'_3) = (e_1, e_2, e_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Положение A_1 в системе $A; \boldsymbol{e}$:

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$$

Поэтому связь между координатами точек в разных системах:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}' + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

Рассмотрим отдельно преобразование поворота правого[5] ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ на плоскости на угол ϕ против часовой стрелки (4).

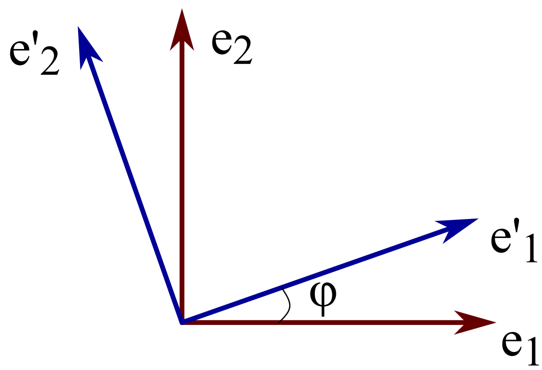

Рис. 4: Базис $\boldsymbol{e}'$ повёрнут на угол ϕ относительно базиса $\boldsymbol{e}$.

Имеем для компонент векторов $\boldsymbol{e}'$ в базисе $\boldsymbol{e}$[6]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = |\boldsymbol{e}'_1| \cdot \cos\phi \cdot \boldsymbol{e}_1 + |\boldsymbol{e}'_1| \cdot \sin\phi \cdot \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}'_2 = |\boldsymbol{e}'_2| \cdot \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \boldsymbol{e}_1 + |\boldsymbol{e}'_2| \cdot \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \boldsymbol{e}_2 \end{cases}$$

Так как модули векторов единичные:

$$\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}\begin{pmatrix} \cos\phi & \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\phi & \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

То есть матрица перехода:

$$S' = \begin{pmatrix} \cos\phi & \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\phi & \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Таким образом, получили матрицу, задающую поворот правого ортонормированного базиса на угол ϕ против часовой стрелки. Аналогично можно получить матрицу перехода, когда базис $\boldsymbol{e}'$ не только повёрнут относительно $\boldsymbol{e}$, но если второй вектор ещё отражён относительно первого (то есть базис $\boldsymbol{e}'$ левый). В этом случае при нахождении $\boldsymbol{e}'_2$ будет использоваться угол не $\phi + \dfrac{\pi}{2}$, а $\phi - \dfrac{\pi}{2}$.

[5]Поворот от первого базисного вектора ко второму по наименьшему углу происходит против часовой стрелки.

[6]Угол именно $\phi + \frac{\pi}{2}$! чтобы при умножении на cos/sin получить скалярные проекции на направления базисных векторов.

2. Скалярное произведение

Определение 2.1. Скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ определяется следующим образом:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \equiv |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi \tag{7}$$

где $|\boldsymbol{a}|$ и $|\boldsymbol{b}|$ — модули векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а ϕ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (не превосходящий π). В случае, если хотя бы один из пары векторов нулевой, скалярное произведение этих векторов полагается равным нулю.

Отметим несколько свойств скалярного произведения:

- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ — симметричность
- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|^2$ — скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины
- О равенстве нулю скалярного произведения:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = 0 \text{ или } \boldsymbol{b} = 0 \text{ или } \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$$

- Линейность по первому аргументу:

$$(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \beta(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

Первые три свойства следуют из определения. Докажем последнее свойство.

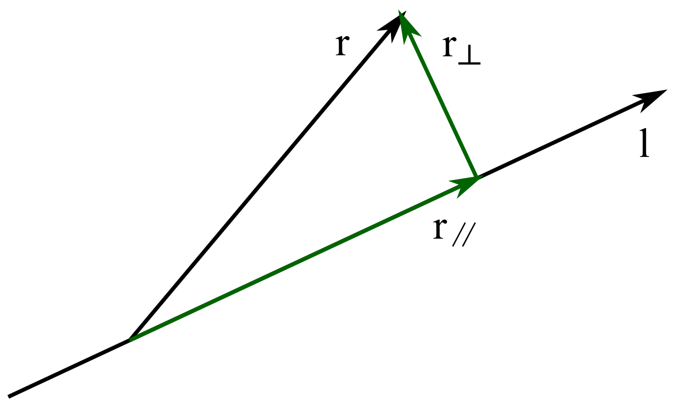

Рис. 5: Векторная проекция вектора $\boldsymbol{r}$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{l}$.

Начнём с того, что при заданном направлении $\boldsymbol{l}$ любой вектор раскладывается в сумму двух (5):

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{\parallel} + \boldsymbol{r}_{\perp}$$

где $\boldsymbol{r}_{\parallel}$ — вектор, параллельный $\boldsymbol{l}$, и $\boldsymbol{r}_{\perp}$ — вектор, перпендикулярный $\boldsymbol{l}$. Компонента $\boldsymbol{r}_{\parallel}$ называется *ортогональной векторной проекцией* вектора $\boldsymbol{r}$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{l}$, и может обозначаться так:

$$\pi_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{r}_{\parallel}$$

Кроме векторной проекции, есть ещё понятие скалярное проекции вектора $\boldsymbol{r}$ на направление вектора $\boldsymbol{l}$:

$$\pi_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{r}) \equiv |\boldsymbol{r}_{\parallel}| \cdot \begin{cases} +1 & \text{если } \boldsymbol{r}_{\parallel} \upuparrows \boldsymbol{l} \\ -1 & \text{если } \boldsymbol{r}_{\parallel} \uparrow\downarrow \boldsymbol{l} \end{cases}$$

Будем обозначать векторную и скалярную проекции одинаково. Но из контекста будет понятно, какая имеется в виду.

Спроецируем теперь вектор $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{c}$:

$$\pi_{\boldsymbol{c}}(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = |\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi$$

где $\pi_{\boldsymbol{c}}(\cdot)$ — скалярная проекция на направление вектора $\boldsymbol{c}$, ϕ — угол между вектором $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ и вектором $\boldsymbol{c}$. Но проекция вектора, являющегося суммой нескольких векторов, равна сумме проекций этих векторов[7]:

$$\pi_{\boldsymbol{c}}(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = \pi_{\boldsymbol{c}}(\alpha\boldsymbol{a}) + \pi_{\boldsymbol{c}}(\beta\boldsymbol{b})$$

поэтому

$$|\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi = |\alpha\boldsymbol{a}| \cdot \cos\phi_1 + |\beta\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi_2$$

где ϕ_1 и ϕ_2 — углы, которые образуют векторы $\alpha\boldsymbol{a}$ и $\beta\boldsymbol{b}$ с вектором $\boldsymbol{c}$. Умножая обе части последнего равенства на модуль вектора $\boldsymbol{c}$, получаем то, что хотели доказать (при этом числовые множители можно вынести за знак модуля):

$$(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \beta(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

□

Задача (2.21). *Длины базисных векторов* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ *равны соответственно* 3, $\sqrt{2}$ *и* 4. *Углы между векторами* $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \angle(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 45°$, $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = 60°$.

Надо найти длины сторон и углы параллелограмма, построенного на векторах с координатами $(1, -3, 0)$ *и* $(-1, 2, 1)$ *в указанном базисе.*

Решение. Обозначим данные нам векторы за $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = (1, -3, 0) \\ \boldsymbol{b} = (-1, 2, 1) \end{cases}$$

Базис не ортонормированный, поэтому скалярные произведения надо будет считать "по-честному".

Модули вектора $\boldsymbol{a}$:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \sqrt{(\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2)} = \sqrt{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) - 6(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + 9(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)} = \sqrt{9 - 18 + 18} = 3$$

Аналогично для вектора $\boldsymbol{b}$:

$$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})} = \sqrt{(-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)(-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)} = \ldots = 5$$

Косинус угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} = \frac{(\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2) \cdot (-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)}{3 \cdot 5} = \ldots = -\frac{12}{15} = -\frac{4}{5}$$

И острый угол параллелограмма можно найти как $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$. □

[7] В силу линейности скалярного произведения.

В случае же **ортонормированного** базиса формулы с применением скалярных произведений упрощаются:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

$$\cos \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}$$

Задача (2.24)**.** *Даны два вектора* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$*, причём* $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$*. Чему равна ортогональная проекция* $\boldsymbol{b}$ *на направление, определяемое вектором* $\boldsymbol{a}$*?*

Решение.

$$\pi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{b}| \cos \angle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \cdot \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

где левый множитель есть скалярная проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на направление $\boldsymbol{a}$, а правый — единичный вектор в направлении $\boldsymbol{a}$. Выражение можно записать по-другому, если домножить числитель и знаменатель на $|\boldsymbol{a}|$:

$$\pi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}) = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}$$

Векторная проекция $\boldsymbol{b}$ сонаправлена с $\boldsymbol{a}$, если скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) > 0$ и противоположно направлена $\boldsymbol{a}$ в случае, если $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) < 0$. Если $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$, то векторная проекция — нулевой вектор. □

Задача (Про точку пересечения высот в треугольнике)**.** *Используя скалярное произведение, доказать, что в любом треугольнике высоты пересекаются в одной точке.*

Решение. Пусть в $\triangle ABC$ высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O (6). Тогда надо показать, что прямая $CO \perp AB$.

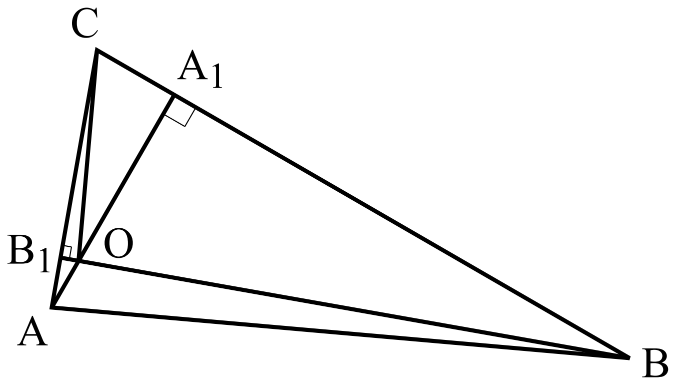

Рис. 6: Точка O пересечения двух высот AA_1 и BB_1 в $\triangle ABC$.

Так как $AO \perp BC$ и $BO \perp AC$, то

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = 0 \\ \overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} \end{cases}$$

В то же время

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

Поэтому $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB}$. □

Задача (4.23)**.** *Пусть* (x, y) *— координаты точки в некоторой прямоугольной системе координат* $O; \boldsymbol{e}$*, а* (x', y') *— координаты той же точки в некоторой другой системе координат* $O'; \boldsymbol{e}'$*. При этом*

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{10} \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{20} \end{cases}$$

При каком необходимом и достаточном условии вторая система координат $O'; e'$ *также будет прямоугольной?*

Решение. Итак, если переписать связь между координатами точки в разных системах координат в матричном виде

$$\boldsymbol{x} = S'\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}(O')$$

где

$$\begin{cases} S' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{x}(O') = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Тогда связь между базисами

$$\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S'$$

$$(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2) = \begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 & a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix}$$

То, что $\boldsymbol{e}$ прямоугольный, означает, что

$$\begin{cases} (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) = 1 \\ (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 0, \ i \neq j \end{cases}$$

Выпишем аналогичные условия для базиса $\boldsymbol{e}'$:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_1) = a_{11}^2\boldsymbol{e}_1^2 + a_{21}^2\boldsymbol{e}_2^2 = 1 \\ (\boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_2) = a_{12}^2\boldsymbol{e}_1^2 + a_{22}^2\boldsymbol{e}_2^2 = 1 \\ (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2) = a_{11}a_{12}\boldsymbol{e}_1^2 + a_{21}a_{22}\boldsymbol{e}_2^2 = 0 \end{cases}$$

И в итоге:

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases}$$

Можно заметить, что матрицы S' вида

$$S' = \begin{pmatrix} \cos\phi & \mp\sin\phi \\ \sin\phi & \pm\cos\phi \end{pmatrix}$$

удовлетворяют полученным соотношениям. Действительно, так как базисы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$ оба прямоугольные, то один переводится в другой с помощью поворота или отражения[8]. $\square$

Задача (4.30). *Пусть O; $\boldsymbol{e}$ и O'; $\boldsymbol{e}'$ — две прямоугольные системы координат в пространстве $\mathbb{R}^3$. При этом точки O и O' различны, а концы векторов $\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{e}'_i$, отложенных из точек O и O' соответственно, совпадают ($i = 1, 2, 3$). Найти координаты точки (x, y, z) в первой системе, зная её координаты во второй системе (x', y', z').*

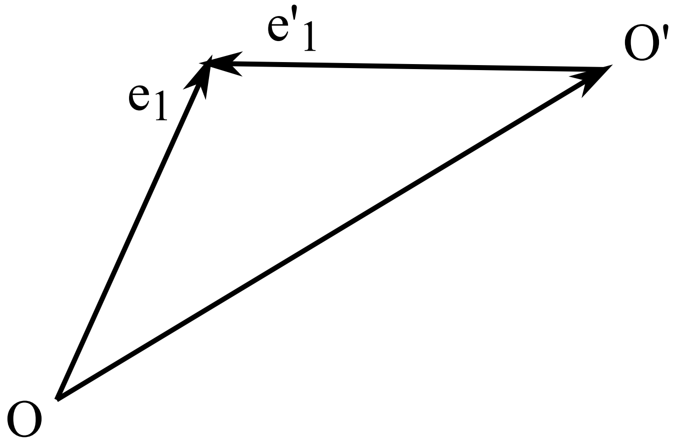

Рис. 7: Концы соответственных базисных векторов, отложенных от соответствующих начал координат, совпадают.

Решение. Условие о том, что концы базисных векторов совпадают (при условии, что векторы отложены из начал систем координат), можно записать так (7)

$$\boldsymbol{e}_i = \overrightarrow{OO'} + \boldsymbol{e}'_i$$

Нужно найти преобразование

$$\boldsymbol{x} = S'\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}(O')$$

В то же время

$$\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S'$$

Поэтому матрицу S' можно записать так

$$S' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \overrightarrow{OO'}_e \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \overrightarrow{OO'}_e \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \overrightarrow{OO'}_e \right)$$

где $\overrightarrow{OO'}_e$ — компоненты вектора $\overrightarrow{OO'}$ в базисе $\boldsymbol{e}$ (то же самое, что и $\boldsymbol{x}(O')$ в формуле, связывающей координаты точек).

Получается, осталось лишь найти $\overrightarrow{OO'}$ в базисе $\boldsymbol{e}$. Это можно сделать, потому что мы учли ещё не всю информацию о взаимном расположении систем координат. На самом деле тот факт, что обе системы координат прямоугольные и концы соответственных векторов, отложенных из начал соответствующих систем координат, совпадают, означает, что у нас есть “два поставленных друг на друга прямоугольных тетраэдра” (8).

[8]По знаку определителя матрицы S' можно сказать о том, какое именно преобразование связывает два базиса: только поворот (при котором направление поворота от $\boldsymbol{e}'_1$ к $\boldsymbol{e}'_2$ по наименьшему углу совпадает с направлением поворота по наименьшему углу от $\boldsymbol{e}_1$ к $\boldsymbol{e}_2$) или ещё и отражение одного базисного вектора относительно другого (когда меняется *класс базиса*).

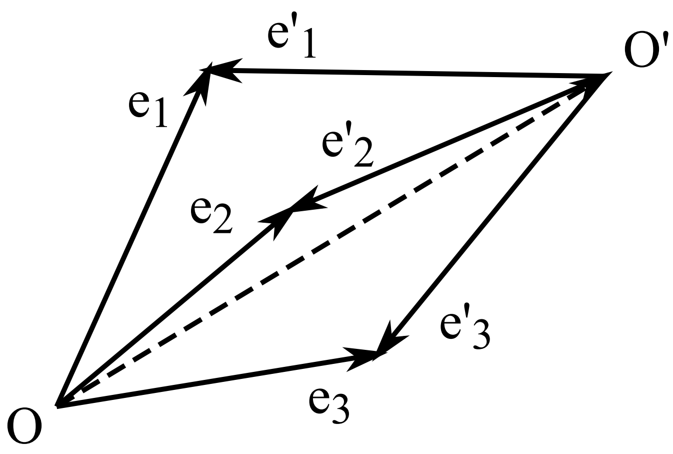

Рис. 8: Базисы, отложенные от соответствующих начал координат — прямоугольные тетраэдры.

Поэтому вектор $\overrightarrow{OO'}$ можно найти как

$$\overrightarrow{OO'} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_3\right)$$

(так как проекция точки пересечения OO' с плоскостью концов базисных векторов на грани векторов $\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j$ совпадает с точкой пересечения медиан треугольников соответствующих граней[9]).

Тогда матрица S' равна

$$\begin{aligned} S' &= \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{pmatrix}1/3\\-2/3\\-2/3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-2/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-2/3\\-2/3\\1/3\end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix}1/3 & -2/3 & -2/3\\ -2/3 & 1/3 & -2/3\\ -2/3 & -2/3 & 1/3\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

□

[9] Точка P пересечения OO' с плоскостью концов базисных векторов $E_1E_2E_3$ — очевидно, точка пересечения медиан $\triangle E_1E_2E_3$. То есть его центр масс. Если "двигать" одну из вершин $\triangle E_1E_2E_3$ по нормали до пересечения с гранью тетраэдра, скажем, двигать E_3 по нормали к плоскости OE_1E_2, то она окажется вершиной O при прямом угле в $\triangle OE_1E_2$, а P перейдёт в центр масс прямоугольного треугольника OE_1E_2. Но положение проекции P на грань OE_1E_2 не менялось при сдвиге вершины E_3 по нормали к OE_1E_2.