

# Семинар 6

Алексеев Василий

10 марта + 14 марта 2022

## Содержание

<b>1</b>	<b>Линейные отображения</b>	<b>1</b>
1.1	Сюжет 1: Матрица линейного отображения . . . . .	1
1.2	Сюжет 2: Ранг матрицы линейного отображения . . . . .	2
1.3	Сюжет 3: Пространство отображений . . . . .	2
1.4	Сюжет 4: Изоморфизм . . . . .	3
1.5	Последний сюжет: Линейные функции (тема семинара) . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Задачи</b>	<b>4</b>
2.1	# 23.9(2) . . . . .	4
2.2	# 23.15(1) . . . . .	5
2.3	# 23.29(5) . . . . .	6
2.4	# 23.40(1в) . . . . .	7
2.5	# 23.82(1) . . . . .	9
2.6	# 31.21 . . . . .	10
2.7	# 31.35(1) . . . . .	11

# 1. Линейные отображения 2

## 1.1. Сюжет 1: Матрица линейного отображения

Пусть есть линейное отображение  $\phi: X \rightarrow Y$ , где  $X$  и  $Y$  — линейные пространства (см. Рис. 1). Выберем базисы в  $X$  и  $Y$ :  $e = (e_1, \dots, e_n) \subset X$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m) \subset Y$ , при этом будем считать  $n > 0$  и  $m > 0$ . Рассмотрим действие отображения  $\phi$  на вектор  $x \in X$  с компонентными  $(x_1, \dots, x_n)$  в базисе  $e$ :

$$\phi(x) = \phi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \phi(e_1) + \dots + x_n \phi(e_n) = \underbrace{(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n))}_{\text{строка векторов}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{столбец координат}}$$

Каждый из векторов  $\phi(e_i) \in Y$  можно разложить по базису  $f$ . Например

$$\phi(e_1) = (f_1, \dots, f_m) \phi(e_1)$$

где как  $\phi(e_1) \in \mathbb{R}^m$  обозначен вектор-столбец вектора  $\phi(e_1) \in Y^1$ . Таким образом,

$$\phi(x) = \dots = (f_1, \dots, f_m) \underbrace{(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n))}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

С другой стороны, так как вектор  $\phi(x) \in Y$ , то он раскладывается по базису  $f$  с некоторыми коэффициентами  $y_1, \dots, y_m$ :

$$\phi(x) = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Получили, что

$$(f_1, \dots, f_m) (\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Так как  $(f_1, \dots, f_m)$  базис, то:

$$(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Если ввести обозначения  $(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)) \equiv A$  — матрица линейного отображения,  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \equiv \xi$  — вектор-столбец прообраза,  $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \equiv \eta$  — вектор-столбец образа, то выражение выше будет выглядеть как

$$\boxed{\eta = A\xi}$$

<sup>1</sup>В обозначениях Рис. 1  $\phi(e_1)$  это  $\tilde{\phi}(h_X(e_1))$ .

$$\begin{array}{ccc}
X \ni x & \xrightarrow{\phi} & y \in Y \\
\downarrow h_X & & \downarrow h_Y \\
\mathbb{R}^n \ni \xi & \xrightarrow[\sim]{\tilde{\phi}} & \eta \in \mathbb{R}^m
\end{array}$$

Рис. 1: Линейное отображение  $\phi: X \rightarrow Y$ , действующее из линейного пространства  $X$  размерности  $n$  в линейное пространство  $Y$  размерности  $m$ . Выбор базиса  $e = (e_1, \dots, e_n)$  в пространстве  $X$  порождает отображение  $h_X$ , переводящее вектор  $x \in X$  в его координатный столбец  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Аналогично, выбор базиса  $f = (f_1, \dots, f_m)$  в пространстве  $Y$  порождает отображение  $h_Y$ , переводящее вектор  $y \in Y$  в его координатный столбец  $\eta \in \mathbb{R}^m$ . (Можно заметить, что  $h_X$  и  $h_Y$  — биекции, причём такие, которые сохраняют линейные операции: суммы и умножения на число.) Таким образом, выбор пары базисов  $e$  и  $f$  в пространствах  $X$  и  $Y$  порождает отображение  $\tilde{\phi}$ , переводящее вектор-столбец  $\xi$  в вектор-столбец  $\eta$ :  $\tilde{\phi}(\xi) = \eta$ . При этом  $\eta = A\xi$ , где  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  — матрица линейного отображения  $\phi$ . (Матрица определяется выбором базисов в пространствах  $X$  и  $Y$ .)

## 1.2. Сюжет 2: Ранг матрицы линейного отображения

Пусть в  $X$  и  $Y$  выбраны базисы, и матрица  $A$  — матрица отображения  $\phi$ . Множество столбцов

$$I = \{\eta \in \mathbb{R}^m \mid \eta = A\xi, \xi \in \mathbb{R}^n\}$$

будет линейным подпространством  $\mathbb{R}^m$  и представляет совокупность вектор-столбцов элементов из  $\text{Im } \phi$ . Размерности  $I$  и  $\text{Im } \phi$  совпадают, потому что сумма векторов  $y_1$  и  $y_2$  из  $\text{Im } \phi$  есть вектор, координатный столбец которого есть сумма координатных столбцов векторов  $y_1$  и  $y_2$ . Аналогично с умножением на число. То есть линейные операции “проходят одинаково”: между векторами в  $\text{Im } \phi$  и их координатными столбцами в  $I$ .

Запись  $\eta = A\xi$  означает, что  $\eta$  есть линейная комбинация столбцов  $A$  с коэффициентами, записанными в столбец  $\xi$ . Пусть столбцовый ранг матрицы  $A$  равен  $r \leq n$ . Тогда все оставшиеся  $n - r$  столбцов  $A$  можно выразить через базисные, и произвольный  $\eta \in I$  окажется представленным как линейная комбинация  $r$  линейно независимых вектор-столбцов из  $I$ . Таким образом,  $\dim I = r = \text{Rg } A$ . В то же время  $\dim I = \dim \text{Im } \phi = \text{Rg } \phi$ . Получаем, что

$$\boxed{\text{Rg } A = \text{Rg } \phi}$$

то есть ранг матрицы линейного отображения равен рангу этого отображения. Матрица  $A$  зависит от выбора базисов в пространствах  $X$  и  $Y$ , но ранг её не меняется и равен рангу отображения.

## 1.3. Сюжет 3: Пространство отображений

Рассмотрим множество всех линейных отображений из  $X$  в  $Y$ :

$$\mathcal{F} = \{\phi \mid \phi: X \rightarrow Y, \phi \text{ — линейное}\}$$

где линейность  $\phi$  обозначает выполнение следующих двух свойств:

- $\phi(x_1 + x_2) = \phi(x_1) + \phi(x_2), \quad x_1, x_2 \in X$
- $\phi(\alpha x_1) = \alpha \phi(x_1), \quad \alpha \in \mathbb{R}, x_1 \in X$

Введём на  $\mathcal{F}$  операции сложения отображений и умножения отображения на число. За сумму  $\phi_1 + \phi_2$  двух линейных отображений  $\phi_1$  и  $\phi_2$  будем считать отображение из  $X$  в  $Y$ , которое действует на произвольный  $x \in X$  как:

$$(\phi_1 + \phi_2)(x) \equiv \phi_1(x) + \phi_2(x)$$

За отображение  $\alpha\phi$ , где  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $\phi \in \mathcal{F}$ , будем считать отображение из  $X$  в  $Y$ , действующее на произвольный  $x \in X$  по правилу:

$$(\alpha\phi)(x) \equiv \alpha\phi(x)$$

Проверим, что сумма линейных отображений — это тоже линейное отображение:

$$\begin{aligned} (\phi_1 + \phi_2)(x_1 + x_2) &= \phi_1(x_1 + x_2) + \phi_2(x_1 + x_2) = \phi_1(x_1) + \phi_1(x_2) + \phi_2(x_1) + \phi_2(x_2) \\ &= (\phi_1(x_1) + \phi_2(x_1)) + (\phi_1(x_2) + \phi_2(x_2)) = (\phi_1 + \phi_2)(x_1) + (\phi_1 + \phi_2)(x_2) \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что  $(\phi_1 + \phi_2)(\alpha x) = \alpha(\phi_1 + \phi_2)(x)$ . Таким образом, линейные операции над линейными отображениями из  $\mathcal{F}$  дают также линейные отображения из  $\mathcal{F}$ , то есть “+” :  $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  и “.” :  $\mathbb{R} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ .

Множество  $\mathcal{F}$  с введёнными операциями “+” и “.” образует линейное пространство. Чтобы в этом убедиться, можно проверить выполнение “8 свойств”, связанных с операциями сложения и умножения на число. Например, коммутативность:  $(\phi_1 + \phi_2)(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x) = \phi_2(x) + \phi_1(x) = (\phi_2 + \phi_1)(x)$  для произвольного  $x \in X$ . Нулевым же, очевидно, будет отображение  $\phi_0 : x \mapsto 0 \in Y$ .

## 1.4. Сюжет 4: Изоморфизм

В выбранной паре базисов пространств  $X$  и  $Y$  устанавливается взаимно однозначное соответствие  $h_{\mathcal{F}}$  между линейными отображениями  $\mathcal{F}$  и матрицами  $\mathbb{R}^{m \times n}$  (см. Раздел 1.1). Множество матриц  $\mathbb{R}^{m \times n}$  — очевидно, линейное пространство (размерности  $mn$ ). Множество линейных отображений  $\mathcal{F}$  — также линейное пространство (см. Раздел 1.3). При этом сумме отображений  $\phi_1$  и  $\phi_2$  из  $\mathcal{F}$  с матрицами соответственно  $A_1$  и  $A_2$  соответствует отображение, матрица которого является суммой  $A_1 + A_2$ . Умножению отображения  $\phi$  с матрицей  $A$  на число  $\alpha$  соответствует отображение с матрицей  $\alpha A$ . Таким образом, отображение  $h_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$  линейно, сохраняет линейные операции. Взаимно однозначное линейное отображение называется *изоморфизмом*<sup>2</sup>. Про пространства  $\mathcal{F}$  и  $\mathbb{R}^{m \times n}$  в таком случае говорят, что они *изоморфны*. Из изоморфности  $\mathcal{F}$  и  $\mathbb{R}^{m \times n}$ , в частности, следует, что размерность  $\mathcal{F}$  равна также  $mn$ .

## 1.5. Последний сюжет: Линейные функции (тема семинара)

Пусть  $Y \equiv \mathbb{R}$ . То есть будем теперь рассматривать линейные отображения, действующие из  $X$  в  $\mathbb{R}$ :

$$\mathcal{F}_1 = \{\phi \mid \phi : X \rightarrow \mathbb{R}, \phi \text{ — линейное}\}$$

Такие отображения ещё называют *линейными функциями*.

С выбранным базисом в  $X$ <sup>3</sup> каждой линейной функции из  $\mathcal{F}_1$  ставится в соответствие матрица отображения  $A$  размера  $1 \times n$ , то есть матрица отображения в случае линейной

<sup>2</sup>В общем случае изоморфизм — биекция, сохраняющая структуру. В случае отображений между линейными пространствами изоморфизм должен сохранять линейные зависимости между векторами: сумма прообразов — сумма образов, аналогично с умножением на число.

<sup>3</sup>В  $Y = \mathbb{R}$  тоже можно бы было “выбрать” базис, но обычно базисом в  $\mathbb{R}$  по умолчанию считают единицу.

функции — это одна строка. Эта строка ещё называется *координатной строкой* линейной функции.

Пространство линейных функций  $\mathcal{F}_1$  изоморфно пространству строк  $\mathbb{R}^n$  длины  $n$  (см. Раздел 1.4). В пространстве строк можно очевидным образом выбрать базис:  $(1, 0, \dots, 0, 1); \dots; (0, 0, \dots, 0, 1)$ . Пусть базисной строчке из  $\mathbb{R}^n$  с единицей на  $i$ -ой позиции соответствует функция  $\phi_i \in \mathcal{F}_1$ :

$$\mathbb{R}^n \ni \left\{ \begin{array}{ll} (1, 0, \dots, 0, 1) & \leftrightarrow \phi_1 \\ (0, 1, \dots, 0, 0) & \leftrightarrow \phi_2 \\ & \dots \\ (0, 0, \dots, 1, 0) & \leftrightarrow \phi_{n-1} \\ (0, 0, \dots, 0, 1) & \leftrightarrow \phi_n \end{array} \right\} \in \mathcal{F}_1$$

В совокупности функции  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$  дадут базис в  $\mathcal{F}_1$ . Этот базис называется базисом, *взаимным* к базису  $e$  пространства  $X$ . Само пространство линейных функций, действующих на пространстве  $X$ , называется пространством, *сопряжённым* к  $X$ , и может обозначаться как  $X^*$ . Таким образом,  $\dim X^* = \dim X$ , а смысл *координатной строки* функции  $\phi$  также в том, что она — это коэффициенты разложения  $\phi$  по взаимному базису.

## 2. Задачи

### 2.1. # 23.9(2)

Найти матрицу следующего преобразования  $\phi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  векторов трёхмерного геометрического пространства:  $\phi$  — ортогональное проектирование на  $\mathcal{L}_1 = \{v \in \mathcal{E} \mid v = \alpha a, \alpha \in \mathbb{R}\}$ , где  $a = (1, 1, 1)^T$ .

*Решение.* Формула, задающая преобразование:

$$\phi(v) = \frac{a}{|a|} \frac{(a, v)}{|a|} = \frac{a}{|a|^2} (a, v) \in \mathcal{E}$$

Преобразование задаёт связь между векторами, матрица преобразования связывает координатные столбцы. Распишем координатный столбец образа  $\phi(v) \in \mathbb{R}^3$ , где  $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  — координатный столбец прообраза:

$$\phi(v) = \frac{(1, 1, 1)^T}{3} \cdot (x_1 + x_2 + x_3) = \underbrace{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Можно бы было искать по отдельности столбцы  $A$ :

$$A = (\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Если же бы  $\phi$  рассматривалось не как преобразование, а как отображение  $\tilde{\phi}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}_1$  (и пусть при этом за базис в  $\mathcal{L}_1$  естественным образом выбран вектор  $a$ ), то матрица  $\tilde{A}$  была бы такой (индексом  $a$  обозначен базис, в котором составлен координатный столбец)

$$\tilde{A} = (\phi(e_1)_a, \phi(e_2)_a, \phi(e_3)_a) = (1/3, 1/3, 1/3)$$

□

## 2.2. # 23.15(1)

Пусть линейное пространство  $\mathcal{L}$  представимо как прямая сумма двух ненулевых подпространств:  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ .

Показать, что преобразование  $\phi: X \rightarrow Y$ , где  $X = Y = \mathcal{L}$ , проектирования на  $\mathcal{L}_1$  параллельно  $\mathcal{L}_2$  линейно. Найти ядро и множество значений  $\phi$ . Найти матрицу преобразования  $\phi$  в базисе  $\mathcal{L}$ , составленном из базисов подпространств  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ .

**Решение. Линейность.** Раз  $\mathcal{L}$  выражено прямой суммой  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ , то любой вектор  $x$  из  $\mathcal{L}$  единственным образом раскладывается в сумму двух, один из которых в  $\mathcal{L}_1$ , а другой в  $\mathcal{L}_2$ :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow \underbrace{x}_{\in \mathcal{L}} = \underbrace{x_1}_{\in \mathcal{L}_1} + \underbrace{x_2}_{\in \mathcal{L}_2}$$

В таком представлении

$$\phi(x) = x_1$$

И можно проверить линейность преобразования:

$$\phi(x + y) = \phi(x_1 + x_2 + y_1 + y_2) = \phi((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)) = x_1 + y_1 = \phi(x) + \phi(y)$$

Аналогично  $\phi(\alpha x) = \alpha \phi(x)$ .

**Ядро** преобразования определяется как

$$\phi(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \Leftrightarrow x = x_2 \in \mathcal{L}_2$$

то есть  $\text{Ker } \phi = \mathcal{L}_2$ .

**Множество значений** есть подмножество  $\mathcal{L}$  векторов  $y$ , которые могут быть получены с помощью преобразования  $\phi$ . То есть рассматриваем  $y \in \mathcal{L}$  и проверяем, при каких условиях его можно получить с помощью  $\phi$ . Очевидно, если существует  $x$ , являющийся прообразом  $y$ , то

$$\phi(x) = y \Rightarrow y \in \mathcal{L}_1$$

То есть  $\text{Im } \phi \subseteq \mathcal{L}_1$ . Но верно и в другую сторону:

$$y \in \mathcal{L}_1 \Rightarrow \exists x = y \in \mathcal{L} : \phi(x) = y$$

Поэтому  $\mathcal{L}_1 \subseteq \text{Im } \phi$ , и в итоге  $\text{Im } \phi = \mathcal{L}_1$ .

Можно заметить, что выполняется тождество<sup>4</sup>:

$$\dim \text{Im } \phi + \dim \text{Ker } \phi = \dim X$$

**Матрица отображения.** Пусть размерность  $\mathcal{L}_1$  равна  $l$ , а размерность  $\mathcal{L}_2$  равна  $k$ . Пусть  $a = (a_1, \dots, a_l)$  — базис в  $\mathcal{L}_1$ , а  $b = (b_1, \dots, b_k)$  — базис в  $\mathcal{L}$ . Тогда за базис в  $\mathcal{L}$  предлагается взять  $a \cup b = (a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_k)$ <sup>5</sup>.

В общем случае, столбцы матрицы отображения  $\phi: X \rightarrow Y$  — это координатные столбцы базиса  $X$  в базисе  $Y$ . В случае преобразования,  $X$  и  $Y$  — одно и то же, и базис один.

<sup>4</sup>Верно и в общем случае для линейного отображения  $\phi: X \rightarrow Y$ . Доказательство можно свести к рассмотрению системы линейных уравнений  $\eta_m = A_{m \times n} \xi_n$ . В фундаментальной матрице соответствующей однородной системы будет  $n - r$  столбцов, где  $r = \text{Rg } A$ . Это и есть “то самое” тождество.

<sup>5</sup>Так можно сделать, потому что  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ .

Поэтому столбцы матрицы преобразования  $\phi$  — это координатные столбцы образов базисных векторов в том же базисе (индексом  $a \cup b$  обозначено, в каком базисе компоненты)

$$A = (\phi(a_1)_{a \cup b}, \dots, \phi(a_l)_{a \cup b}, \phi(b_1)_{a \cup b}, \dots, \phi(b_k)_{a \cup b}) = \begin{pmatrix} E_{l \times l} & 0_{l \times k} \\ 0_{k \times l} & 0_{k \times k} \end{pmatrix}$$

так как  $\phi(a_i) = 1 \cdot a_i$ , а  $\phi(b_i) = 0$ .

Если же рассмотреть  $\phi$  не как преобразование, а как отображение  $\tilde{\phi}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_1$ , то в данном случае базисы в пространствах “из” и “куда” уже отличаются. Столбцов в матрице отображения останется  $l + k$ , но строк уже будет всего  $l$  (потому что базис в пространстве “куда”  $\mathcal{L}_1$  есть  $(a_1, \dots, a_l)$ ). То есть матрица отображения  $\phi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_1$  равна (индексом  $a$  обозначено, в каком базисе компоненты)

$$\tilde{A} = (\tilde{\phi}(a_1)_a, \dots, \tilde{\phi}(a_l)_a, \tilde{\phi}(b_1)_a, \dots, \tilde{\phi}(b_k)_a) = (E_{l \times l} \quad 0_{l \times k})$$

□

### 2.3. # 23.29(5)

Линейное отображение  $\phi: X \rightarrow Y$  задано матрицей  $A_{m \times n}$  в базисах  $e = (e_1, \dots, e_n)$  в  $X$  и  $f = (f_1, \dots, f_m)$  в  $Y$ :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Надо найти ядро, множество значений отображения. Выяснить, является ли оно инъективным, сюръективным.

*Решение.* Из размера матрицы  $A$  видно, что  $\dim X = 3$  и  $\dim Y = 5$ .

Найдём **ядро**  $\phi$  (за  $x \in \mathbb{R}^3$  обозначен координатный столбец вектора  $x \in X$ ):

$$x \in \text{Ker } \phi \Leftrightarrow \phi(x) = Ax = 0$$

Надо решить однородную систему, упростив матрицу  $A$ :

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Сразу видно, что ранг матрицы отображения (он же ранг самого отображения)  $\text{Rg } \phi = 2$ . Ранг отображения — размерность множества значений. Поэтому  $\dim \text{Im } \phi = 2 < 5 = \dim Y$ . Что означает, что отображение  $\phi$  не сюръективно.

Произвольный вектор из ядра представим как

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что размерность ядра  $\dim \text{Ker } \phi = 1$ . Ядро не нулевое. Это значит, что отображение не инъективно (можно подобрать два различных вектора (отличающихся на ненулевой вектор из ядра) которые  $\phi$  переводит в один и тот же вектор).

Остаётся найти **множество значений**  $\phi$  (у которого размерность, уже известно, равна двум):

$$y \in \text{Im } \phi \Leftrightarrow \exists x \in X : Ax = y$$

Получается, надо рассмотреть расширенную матрицу  $(A \mid y)$ , упростить её, и выписать ограничения на  $y$ , чтобы система была совместна. Упрощение матрицы  $A$  уже проведено в (1). Остаётся проделать те же самые преобразования со столбцом  $y$ :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -y_1/2 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -y_1/2 \\ y_2 - y_1 \\ y_3 - 3y_1/2 \\ y_4 + 4y_1/2 \\ y_5 + 6y_1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -y_1/2 - (y_3 - 3y_1/2) \\ y_2 - y_1 \\ y_3 - 3y_1/2 \\ y_4 + 4y_1/2 + 5(y_3 - 3y_1/2) \\ y_5 + 6y_1/2 + (y_3 - 3y_1/2) \end{pmatrix}$$

Зануляем компоненты, соответствующие нулевым строкам в упрощённой  $A$ :

$$\begin{cases} y_2 - y_1 = 0 \\ y_4 + \frac{4y_1}{2} + 5\left(y_3 - \frac{3y_1}{2}\right) \\ y_5 + \frac{6y_1}{2} + \left(y_3 - \frac{3y_1}{2}\right) \end{cases}$$

Уравнений 3 (очевидно, линейно независимых). Переменных 5. Значит, какие-то три можно выразить через другие две. Например,

$$\begin{cases} y_2 = y_1 \\ y_4 = \frac{1}{2}(11y_1 - 10y_3) \\ y_5 = \frac{1}{2}(-3y_1 - 2y_3) \end{cases}$$

Поэтому общий вид  $y$  из множества значений ( $y_1 = t_1 \in \mathbb{R}$ ,  $y_3 = t_2 \in \mathbb{R}$ ):

$$y = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \\ t_2 \\ \frac{1}{2}(11t_1 - 10t_2) \\ \frac{1}{2}(-3t_1 - 2t_2) \end{pmatrix} = 2t_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\tilde{i}_1} + 2t_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\tilde{i}_2}$$

Базис в  $\text{Im } \phi$  “виден”. Векторов в нём, ожидаемо, два...

*Другой способ нахождения  $\text{Im } \phi$ .* Видно, что в матрице  $A$  первые два столбца линейно независимы, а третий выражается через второй. Поэтому  $\text{Im } \phi$  — это линейная оболочка первых двух столбцов матрицы  $A$ . □

## 2.4. # 23.40(1в)

Пусть  $\mathcal{P}^{(m)}$  — линейное пространство линейных многочленов степени не выше  $m$ . Проверить, что дифференцирование, рассматриваемое как преобразование  $D: \mathcal{P}^{(m)} \rightarrow \mathcal{P}^{(m)}$ , линейно. Найти его ядро и множество значений. Вычислить матрицу в базисе

$$\left(1, \frac{t}{1!}, \dots, \frac{t^m}{m!}\right)$$



**Решение. Линейность** ( $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m$  и  $q(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m$ ):

$$\begin{aligned} D(p(t) + q(t)) &= D((a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m) + (b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m)) \\ &= a_1 + \dots + a_m t^{m-1} + b_1 + \dots + b_m t^{m-1} = D(p(t)) + D(q(t)) \end{aligned}$$

Аналогично с  $D(\alpha p(t)) = \alpha D(p(t))$ .

**Ядро:**

$$p(t) \in \text{Ker } D \Leftrightarrow D(p(t)) = a_1 + \dots + a_m t^{m-1} = 0 \Leftrightarrow a_1 = \dots = a_m = 0$$

Поэтому  $p(t) \in \text{Ker } D \Leftrightarrow p(t) = a_0$ . То есть ядро дифференцирования — все константные многочлены. Размерность ядра, очевидно, равно одному.

**Множество значений** — это  $\mathcal{P}^{(m-1)}$ . Потому что, с одной стороны, при дифференцировании многочлена степени не выше  $m$  получается многочлен степени не выше  $m-1$ . С другой стороны, для многочлена  $h(t)$  степени не выше  $m-1$  можно подобрать многочлен  $p(t)$  степени не выше  $m$ , дифференцирование которого даёт данный (например,  $p(t) = \int h(t)$ ).

**Матрица преобразования.** Стобцы матрицы — координаты образов векторов пространства  $\mathcal{P}^{(m)}$  в том же базисе. Так как

$$\begin{aligned} D(1) &= 0 \\ D\left(\frac{1}{1!}t\right) &= \mathbf{1} \cdot \frac{1}{1!} \\ D\left(\frac{1}{2!}t^2\right) &= \mathbf{1} \cdot \frac{1}{1!}t \\ &\dots \\ D\left(\frac{1}{m!}t^m\right) &= \mathbf{1} \cdot \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1} \end{aligned}$$

то матрица преобразования получается равной

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Размер матрицы  $A$  равен  $(m+1) \times (m+1)$ .

Если бы дифференцирование рассматривалось как отображение  $D: \mathcal{P}^{(m)} \rightarrow \mathcal{P}^{(m-1)}$  (и в  $\mathcal{P}^{(m-1)}$  базис бы был такой же, как в  $\mathcal{P}^{(m)}$ , только без последнего вектора), то строк в матрице отображения стало бы меньше на одну (столбцов столько же, потому что базис исходного пространства такой же, строк же меньше, потому что меняется базис пространства, куда отображаем):

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

И размер матрицы  $A'$  равен  $m \times (m+1)$ . □

## 2.5. # 23.82(1)

Преобразование  $\phi$  переводит линейно независимые векторы  $a_i$  в  $b_i$ . Преобразование  $\psi$  переводит линейно независимые векторы  $b_i$  в  $c_i$ . То есть

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, a_3) &\xrightarrow{\phi} (b_1, b_2, b_3) \\ (b_1, b_2, b_3) &\xrightarrow{\psi} (c_1, c_2, c_3)\end{aligned}$$

Надо найти матрицу  $A_{\psi\phi}$  преобразования  $\psi\phi$  в исходном базисе.

*Решение.* Пусть матрицы  $A_\phi$  и  $A_\psi$  — матрицы преобразований  $\phi$  и  $\psi$  соответственно. Тогда условие задачи можно переписать в виде

$$\begin{cases} A_\phi(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3) \\ A_\psi(b_1, b_2, b_3) = (c_1, c_2, c_3) \\ A_{\psi\phi}(a_1, a_2, a_3) = (c_1, c_2, c_3) \end{cases}$$

Если положить  $A \equiv (a_1, a_2, a_3)$ ,  $B \equiv (b_1, b_2, b_3)$  и  $C \equiv (c_1, c_2, c_3)$ , то условие можно переписать в ещё более сжатой форме:

$$\begin{cases} A_\phi A = B \\ A_\psi B = C \\ A_{\psi\phi} A = C \end{cases}$$

Отсюда (так как по условию существуют  $A^{-1}$  и  $B^{-1}$ ):

$$\begin{cases} A_\phi = BA^{-1} \\ A_\psi = CB^{-1} \\ A_{\psi\phi} = CA^{-1} = CB^{-1} \cdot BA^{-1} = A_\psi A_\phi \end{cases}$$

А как бы, например, выглядела матрица преобразования  $\phi$  в базисе  $(a_1, a_2, a_3)$ ? На данном этапе известно, что

$$A_{\psi\phi}\xi_e = \nu_e$$

где индекс  $e$  показывает, в каком базисе даны компоненты. При замене старого базиса  $e = (e_1, e_2, e_3)$  на новый  $a = (a_1, a_2, a_3)$  векторы базисов связаны соотношением (коэффициенты разложения векторов нового базиса  $a$  по старому  $e$  образуют столбцы матрицы перехода  $S$ ):

$$(a_1, a_2, a_3) = (e_1, e_2, e_3)S$$

Координатные же столбцы произвольного вектора  $x$  в старом  $\xi_e$  и новом  $\xi_a$  базисах связаны следующим образом:

$$\begin{cases} x = e\xi_e \\ x = a\xi_a = eS\xi_a \end{cases} \Rightarrow \xi_e = S\xi_a$$

Итак, пока известно, что в базисе  $e$ :

$$A_{\psi\phi}\xi_e = \nu_e \quad (2)$$

Надо же найти матрицу  $A'_{\psi\phi}$  преобразования в базисе  $a$ :

$$A'_{\psi\phi}\xi_a = \nu_a \quad (3)$$

Чтобы найти  $A'_{\psi\phi}$ , можно выразить в формуле (2) координатные столбцы в старом базисе через столбцы соответствующих векторов в новом базисе (чтобы получить формулу, “похожую” на (3), только с  $A_{\psi\phi}$  вместо  $A'_{\psi\phi}$ ):

$$A_{\psi\phi} S \xi_a = S v_a \Leftrightarrow S^{-1} A_{\psi\phi} S \xi_a = v_a \quad (4)$$

Подставляя вместо  $\xi_a$  базисные столбцы в последнюю формулу (4) и в (3) получаем, что

$$S^{-1} A_{\psi\phi} S = A'_{\psi\phi}$$

Остаётся понять, чему равна матрица  $S$  перехода от базиса  $e$  к базису  $a$ . Столбцы матрицы  $A$  — координаты новых базисных векторов  $a$  в старом базисе  $e$ . Поэтому  $A$  и есть  $S$ , и матрица преобразования в новом базисе в итоге выглядит так:

$$A'_{\psi\phi} = A^{-1} A_{\psi\phi} A$$

□

## 2.6. # 31.21

Пусть  $t_0 \in \mathbb{R}$  — фиксированное число.

Показать, что сопоставление  $f$  каждому многочлену степени не выше  $n$  его значения в  $t_0$  есть линейная функция:

$$f : \mathcal{P}^{(n)} \ni p(t) \mapsto p(t_0) \in \mathbb{R}$$

Вычислить координатную строку функции в базисах  $(1, t, \dots, t^n)$  и  $(1, t - t_0, \dots, (t - t_0)^n)$ .

*Решение. Линейность:*

$$\begin{aligned} f(p(t) + q(t)) &= f((a_{0p} + a_{1p}t + \dots + a_{np}t^n) + (a_{0q} + a_{1q}t + \dots + a_{nq}t^n)) \\ &= (a_{0p} + a_{1p}t_0 + \dots + a_{np}t_0^n) + (a_{0q} + a_{1q}t_0 + \dots + a_{nq}t_0^n) = f(p(t)) + f(q(t)) \end{aligned}$$

Аналогично и

$$f(\alpha p(t)) = f(\alpha a_{0p} + \alpha a_{1p}t + \dots + \alpha a_{np}t^n) = \alpha a_{0p} + \alpha a_{1p}t_0 + \dots + \alpha a_{np}t_0^n = \alpha f(p(t))$$

Координатная строка функции — как матрица отображения, только в случае с функцией  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  она становится строкой. То есть надо вычислить образы базисных векторов и разложить их “по базису в  $\mathbb{R}$ ” (который принимается равным просто 1).

Итак, в случае, если в  $\mathcal{P}^{(n)}$  выбран базис  $(1, t, \dots, t^n)$ , то координатная строка функции  $f$  равна:

$$(f(1), f(t), \dots, f(t^n)) = (1, t_0, \dots, t_0^n)$$

Если же в  $\mathcal{P}^{(n)}$  выбран базис  $(1, t - t_0, \dots, (t - t_0)^n)$ , то координатная строка функции  $f$  будет равна:

$$(f(1), f(t), \dots, f(t^n)) = (1, 0, \dots, 0)$$

□

## 2.7. # 31.35(1)

Пусть базису  $(e_1, e_2, e_3)$  пространства  $\mathcal{L}$  биортогонален базис  $(f_1, f_2, f_3)$  сопряжённого пространства  $\mathcal{L}^*$ . Надо найти базис, биортогональный базису

$$e'_1 = e_1 + e_2, \quad e'_2 = e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_3$$

*Решение.* Биортогональный базис  $f$  — это такой базис в  $\mathcal{L}^*$ , функции  $f_i$  которого обладают следующим свойством:

$$f_i(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

То есть для неизвестных пока линейных функций  $f'_1, f'_2, f'_3$  нового биортогонального базиса уже известно, что, во-первых (выписываем соотношения для  $f'_1$ ):

$$\begin{cases} 1 = f'_1(e'_1) = f'_1(e_1 + e_2) = f'_1(e_1) + f'_1(e_2) \\ 0 = f'_1(e'_2) = f'_1(e_2 + e_3) = f'_1(e_2) + f'_1(e_3) \\ 0 = f'_1(e'_3) = f'_1(e_3) \end{cases}$$

То есть  $f'_1$  в точности такая же, как  $f_1$  (ведь линейная функция из  $\mathcal{L}^*$  однозначно определяется значениями на векторах базиса  $\mathcal{L}$ ).

Далее, аналогичные соотношения для  $f'_2$ :

$$\begin{cases} 0 = f'_2(e'_1) = f'_2(e_1 + e_2) = f'_2(e_1) + f'_2(e_2) \\ 1 = f'_2(e'_2) = f'_2(e_2 + e_3) = f'_2(e_2) + f'_2(e_3) \\ 0 = f'_2(e'_3) = f'_2(e_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_2(e_1) = -1 \\ f'_2(e_2) = 1 \\ f'_2(e_3) = 0 \end{cases}$$

И для  $f'_3$ :

$$\begin{cases} 0 = f'_3(e'_1) = f'_3(e_1 + e_2) = f'_3(e_1) + f'_3(e_2) \\ 0 = f'_3(e'_2) = f'_3(e_2 + e_3) = f'_3(e_2) + f'_3(e_3) \\ 1 = f'_3(e'_3) = f'_3(e_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_3(e_1) = 1 \\ f'_3(e_2) = -1 \\ f'_3(e_3) = 1 \end{cases}$$

Чему равны  $f'_2$  и  $f'_3$ ? Линейные действия над функциями из  $\mathcal{L}^*$  равносильны таким же линейным действиям над их координатными строками: пространство  $\mathcal{L}^*$  изоморфно пространству строк размера  $\dim \mathcal{L}$ . Функции  $f'_2$ , например, (при базисе  $e$  в  $\mathcal{L}$ ) соответствует строка  $(-1, 1, 0)$ . Можно разложить эту строку в линейную комбинацию базисных строк (соответствующих функциям, из которого состоит биортогональный базис  $f$ ):

$$(-1, 1, 0) = -1 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0)$$

Это значит, что с самой функцией  $f'_2$  будет “то же самое”:

$$f'_2 = -1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2$$

Аналогично с  $f'_3$ :

$$f'_3 = 1 \cdot f_1 - 1 \cdot f_2 + 1 \cdot f_3$$

Итого, новый биортогональный базис:

$$f = (f_1, -f_1 + f_2, f_1 - f_2 + f_3)$$

□