Семинар 3

Алексеев Василий

17 февраля + 21 февраля 2023

Содержание

1. Линейные пространства 1

1.1. Кососимметричность, или “Плоскости, плоскости повсюду”

Возьмём *множество* квадратных матриц $\mathbb{R}^{3\times 3} \equiv \mathscr{M}$. И рассмотрим в нём *подмножество* $\mathscr{S}'$ кососимметрических[1] матриц:

$$\mathscr{S}' = \{A \in \mathscr{M} \mid A^T = -A\}$$

Что можно “заметить” про множество $\mathscr{S}'$? Будет ли, например, кососимметричной *сумма двух матриц* $A, B \in \mathscr{S}'$?

$$(A + B)^T = A^T + B^T = (-A) + (-B) = -(A + B)$$

То есть, да, сумма также кососимметрична $A + B \in \mathscr{S}'$. Также несложно убедиться, что кососимметричность сохранится и при *умножении матрицы на число*. То есть $\alpha A \in \mathscr{S}'$ при $A \in \mathscr{S}'$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. В таком случае про множество кососимметрических матриц $\mathscr{S}'$ можно сказать, что оно *замкнуто* относительно операций сложения и умножения на число.

С подобными замкнутыми подмножествами мы уже встречались: например, плоскость как *подпространство* векторов (направленных отрезков) замкнуто во всём геометрическом *пространстве* векторов. То есть о кососимметричных матрицах $\mathscr{S}'$ можно думать как о “плоскости” (в некотором смысле) в *пространстве* всех квадратных матриц $\mathscr{M}$.

Возвращаясь к “векторам из аналитической геометрии”: плоскость — *двумерное* подпространство. Всё же пространство — *трёхмерное*. Это значит, что, например, во всём пространстве можно выбрать *базис* из трёх векторов, то есть систему из трёх упорядоченных линейно независимых векторов, линейной комбинацией которых может быть выражен любой вектор пространства. (На плоскости — можно выбрать базис из двух векторов.) Какой будет *размерность* пространства матриц $\mathscr{M}$? Возьмём произвольную матрицу A из $\mathscr{M}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Она однозначно определяется своими $3 \times 3 = 9$ элементами. Таким образом... размерность $\mathscr{M}$ равна 9? Можно ли выбрать базис (полную систему линейно независимых *матриц*) в $\mathscr{M}$ в количестве 9 штук? Ещё раз посмотрим на произвольную матрицу $A \in \mathscr{M}$ и

[1]Множество “без штриха” $\mathscr{S} \subset \mathscr{M}$ как бы означает совокупность всех *симметрических* матриц, и тогда “$\mathscr{S}$ штрихованная” — кососимметрические. Может возникнуть вопрос: зачем вообще было “штриховать”, ведь можно было просто работать с симметрическими матрицами $\mathscr{S}$ (какая по сути разница) — и не пришлось бы так сложно пояснять обозначения?.. Ясного ответа на этот вопрос нет. Так уж “сложилось”.

просто представим её (довольно очевидным, если подумать, образом) как сумму:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{E_1} + a_{12} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{E_2} + a_{13} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{E_3}$$

$$+ a_{21} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{E_4} + a_{22} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{E_5} + a_{23} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{E_6}$$

$$+ a_{31} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{E_7} + a_{32} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{E_8} + a_{33} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{E_9}$$

Произвольная матрица разложена — значит, система матриц $\{E_1, \dots, E_9\}$ полная. Очевидно, она также линейно независимая (несложно проверить, что только тривиальная, то есть с нулевыми коэффициентами, линейная комбинация матриц даст нулевую матрицу). Таким образом, в качестве базиса в $\mathscr{M}$ можно выбрать указанную систему из 9 матриц — размерность $\mathscr{M}$ в самом деле равна 9.

А какова будет размерность подпространства кососимметрических матриц $\mathcal{S}'$? Пусть $C \in \mathcal{S}'$. Что можно сказать про C? Очевидно, она уже определяется не девятью элементами — ведь симметричные относительно главной диагонали отличаются лишь знаками. Несложно прийти к выводу, что произвольную матрицу из $\mathcal{S}'$ можно представить, например, в таком виде:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

То есть любая $C \in \mathcal{S}'$ однозначно задаётся лишь *тремя* числами (a, b, c). Размерность $\mathcal{S}'$ равна 3? Да, снова несложно выбрать базис из нужного числа матриц (кососимметрических матриц!):

$$C = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = a \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{C_1} + b \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{C_2} + c \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}^{C_3}$$

Матрицы $\{C_1, C_2, C_3\}$ дают базис в $\mathcal{S}'$. Значит, размерность $\mathcal{S}'$ в самом деле равна трём. Зная базис, мы также можем представить $\mathcal{S}'$ в таком виде:

$$\mathcal{S}' = \boxed{\{\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3 \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\} = \mathscr{L}(C_1, C_2, C_3)}$$

то есть как *линейную оболочку* $\mathscr{L}(C_1, C_2, C_3)$ системы матриц $\{C_1, C_2, C_3\}$.

Итак, выбор базиса, например $\{C_1, C_2, C_3\}$, в $\mathcal{S}'$ позволяет установить *взаимно однозначное соответствие* (биекцию) между матрицами $\mathcal{S}'$ и вектор-столбцами $\mathbb{R}^3$ из *координат* матриц в базисе:

$$\mathcal{S}' \ni C = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \xi \in \mathbb{R}^3$$

Но это не просто взаимно однозначное соответствие… Пусть есть две матрицы из $\mathscr{S}'$: матрица A_1, которой соответствует столбец координат $\xi_1 = (a_1, b_1, c_1)^T$, и A_2 со столбцом $\xi_2 = (a_2, b_2, c_2)^T$. Их сумма:

$$\mathscr{S}' \ni A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ -(a_1 + a_2) & 0 & c_1 + c_2 \\ -(b_1 + b_2) & -(c_1 + c_2) & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \xi_1 + \xi_2 \in \mathbb{R}^3$$

То есть сумме матриц соответствует координатный столбец, являющийся суммой координатных столбцов матриц-слагаемых. Аналогично, результат умножения матрицы A на число α есть матрица αA, координатный столбец которой получен умножением на то же число α координатного столбца исходной матрицы A. В таком случае можно сказать, что отображение между матрицами и координатными столбцами, помимо того, что оно взаимно однозначное, ещё и *сохраняет линейные операции* (сумму и умножение на число), то есть является *изоморфизмом*.

1.2. Линейные пространства

Дадим общие определения некоторым уже использовавшимся ранее, но так пока по-нормальному и не введённым, понятиям.

Вещественным *линейным пространством* называется *множество объектов* $\mathscr{V}$, называемых векторами, для которых определена *операция сложения* ‘+’ : $\mathscr{V} \times \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ и умножения на действительное число ‘$\cdot$’ : $\mathbb{R} \times \mathscr{V} \to \mathscr{V}$, удовлетворяющие следующим свойствам ($\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathscr{V}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)[2]:

1. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

   (коммутативность сложения)

2. $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$

   (ассоциативность сложения)

3. $\exists \mathbf{0} \in \mathscr{V} \ : \ \boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}$

   (существование “нулевого” — нейтрального относительно сложения — вектора)

4. $\forall \boldsymbol{v} \ \exists(-\boldsymbol{v}) \ : \ \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$

   (существование “противоположного” — обратного по сложению — вектора)

5. $(\alpha\beta)\boldsymbol{v} = \alpha(\beta\boldsymbol{v})$

6. $1 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

7. $\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$

   (дистрибутивность умножения относительно сложения векторов)

8. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{v}$

   (дистрибутивность умножения относительно сложения чисел)

[2] Свойства “очень похожи” на свойства аналогичных операций на множестве матриц и на множестве векторов…

Множество $\mathscr{V}'$ называется *подпространством* линейного пространства $\mathscr{V}$, если

- $\mathscr{V}'$ само является линейным пространством (с теми же операциями сложения и умножения на число, что для векторов $\mathscr{V}$[3])
- векторы $\mathscr{V}'$ являются подмножеством векторов $\mathscr{V}$ ($\mathscr{V}' \subseteq \mathscr{V}$)

Чтобы проверить, является или нет данное подмножество $\mathscr{V}' \subseteq \mathscr{V}$ векторов подпространством, можно, получается, просто проверить выполнимость свойств, которым должны удовлетворять операции сложения и умножения на число. Но так как операции на векторах предполагаемого подпространства $\mathscr{V}'$ по сути *те же самые*, что и на векторах всего пространства $\mathscr{V}$, то проверять по-честному все свойства не обязательно (они ведь точно выполнены для векторов $\mathscr{V}$). Надо лишь проверить, что $\mathscr{V}'$ *замкнуто* относительно этих операций, то есть что сумма произвольных двух векторов из $\mathscr{V}'$ лежит там же, как и произведение произвольного вектора из $\mathscr{V}'$ на любое число[4,5].

Базисом в пространстве $\mathscr{V}$ называется упорядоченная, полная, линейно независимая система векторов $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$. Во всех базисах одного и того же пространства $\mathscr{V}$ одинаковое число векторов n, которое называется *размерностью пространства* и обозначается $\dim \mathscr{V}$.

С абстрактными векторами ("вектора из линейной алгебры") точно так же, как и с векторами – направленными отрезками ("вектора из аналитической геометрии"), работает переход между базисами. Так, пусть в $\mathscr{V}$ есть базис $e = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ ("старый", вектора базиса собраны в строчку длины n) и базис $e' = (\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n)$ ("новый"). Причём известно, как векторы e' раскладываются по векторам e, то есть $e' = eS$, где S — матрица перехода от "старого" базиса к "новому" (в её столбцах собраны компоненты "новых" базисных векторов в "старом" базисе). Получим тогда связь между координатным столбцом $\xi \in \mathbb{R}^n$ произвольного вектора $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$ в базисе e и его же координатным столбцом $\xi' \in \mathbb{R}^n$ в базисе e':

$$e\xi = \boldsymbol{x} = e'\xi' = eS \cdot \xi' \Rightarrow e(\xi - S\xi') = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boxed{\xi = S\xi'}$$

2. Задачи

2.1. # 20.3(1, 4)

Выяснить, являются ли линейными подпространствами следующие множества векторов в n-мерном пространстве: множество векторов $\mathscr{V}_1$, все координаты которых равны между собой? множество векторов $\mathscr{V}_2$, сумма координат которых равна 1?

Решение. Пусть $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathscr{V}_1$. Очевидно, у вектора-суммы $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ все координаты также одинаковые. При умножении вектора $\boldsymbol{a}$ на произвольное число $\alpha \in \mathbb{R}$ также получаем вектор из $\mathscr{V}_1$. То есть $\mathscr{V}_1$ замкнуто относительно сложения и умножения, и потому является подпространством. Размерность этого подпространства равна единице ("прямая"), так как

---

[3] На самом деле это, скорее, *ограничения* операций '+' и '·' на подмножество $\mathscr{V}'$. Так, если "обычная" операция сложения '+' определена как отображение $\mathscr{V} \times \mathscr{V} \to \mathscr{V}$, то её ограничение на $\mathscr{V}'$ определено как "точно такое же" сложение, только отображающее $\mathscr{V}' \times \mathscr{V}' \to \mathscr{V}'$, то есть "работающее" только на парах элементов из $\mathscr{V}'$.

[4] Иными словами, надо фактически проверить корректность ограничения операций '+' и '·' на подмножество $\mathscr{V}'$.

[5] Если $\mathscr{V}'$ замкнуто относительно умножения на число, то $\boldsymbol{0} \in \mathscr{V}'$, так как (можно показать) $\boldsymbol{0} = 0 \cdot \boldsymbol{v}$, и также $-\boldsymbol{v} \in \mathscr{V}'$, потому что $-\boldsymbol{v} = -1 \cdot \boldsymbol{v}$ ($\forall \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}'$).

есть базис $\{\boldsymbol{e}_1\}$ из одного вектора, например $\boldsymbol{e}_1 = (1, \dots, 1)^T$, состоящего из всех единиц[6]:

$$\mathscr{V}_1 \ni \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пусть теперь $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathscr{V}_2$. При этом $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_n)$. Тогда сумма векторов

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

И сумма координат у суммы:

$$\sum_i (a_i + b_i) = \sum_i a_i + \sum_i b_i = 1 + 1 = 2 \neq 1$$

$\mathscr{V}_2$ не замкнуто относительно суммы векторов (при умножении вектора на число тоже можно получить "не то"), поэтому не является подпространством. А вообще ещё несложно было заметить, что в $\mathscr{V}_2$ даже нет нуля. □

2.2. # 20.18 ("правильная")

Доказать, что четыре матрицы

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \right\} \tag{1}$$

образуют базис в пространстве квадратных матриц порядка 2.

Далее найти компоненты матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$$

в этом базисе.

Решение. Покажем, что четыре матрицы (1) в самом деле можно взять в качестве базиса. Для этого можно просто проверить, как по системе раскладывается нулевая матрица (если единственной решение — тривиальное, то система линейно независима). Итак, составляем линейную комбинацию матриц (1) и приравниваем её нулевой:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = 0$$

□

Составляем систему:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma + 3\zeta = 0 \\ \alpha + \beta \qquad + 5\zeta = 0 \\ -\alpha + 5\beta + \gamma + 4\zeta = 0 \\ \alpha + 3\beta + \gamma + 7\zeta = 0 \end{cases}$$

[6] Как часто уже было и ещё будет, равенство между вектором и столбцом из компонент в данном случае — это не совсем "равенство". Это значит, что множество векторов изоморфно множеству столбцов, состоящих из компонент векторов в фиксированном базисе. Поэтому вектор можно отождествлять с его координатным столбцом. При этом собственно настоящим вектором на самом деле может быть "что угодно" (направленный отрезок, матрица, функция, ...)

И решаем её методом Гаусса (на каждом шаге цветом выделен элемент, который используем для "устранения" других ненулевых в том же столбце[7]):

$$
\begin{gathered}
\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \mathbf{-1} & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 21 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & 6 \end{pmatrix} \\
\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{2}
$$

Таким образом, векторы-матрицы линейно независимы[8]. Их четыре (в четырёхмерном пространстве), поэтому это — полная система. Поэтому их можно взять в качестве базиса.

Чтобы теперь разложить матрицу $\left(\begin{smallmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{smallmatrix}\right)$ по базису, надо представить её в виде их линейной комбинации (решение точно будет существовать, притом единственное, так как система матриц (1) — базис):

$$
\alpha \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}
$$

Расширенная матрица системы:

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & 6 \\ -1 & 5 & 1 & 4 & 14 \\ 1 & 3 & 1 & 7 & 13 \end{array}\right)
$$

Далее с расширенной матрице можно провести те же элементарные преобразования строк, что и в случае (2). При этом можно работать только с последним столбцом (так как для матрицы уже "всё сделано"):

$$
\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 19 \\ 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 26 \\ 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -19 \\ 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 19/9 \\ 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -37/9 \\ 4/9 \\ 19/9 \\ -33/9 \end{pmatrix}
$$

Поэтому коэффициенты в разложении

$$
(\alpha, \beta, \gamma, \zeta) = \left(-\frac{37}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{33}{9}, \frac{19}{9}\right)
$$

[7]И каждый раз такой элемент выбирается в новой строке.

[8]Можно бы было доказывать линейную независимость не "через матрицы", а "через вектора". То есть каждую матрицу из (1) можно бы было "развернуть" в столбец. Например, первой матрице $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ можно бы было сопоставить столбец $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^T$ (и оставшимся матрицам — по такому же правилу). После этого, возможно, было бы немного "приятнее" составлять линейную комбинацию из векторов-столбцов и приравнивать её нулевому столбцу. В итоге же всё равно получилась бы система линейных уравнений. Линейная же зависимость матриц и "развёрнутых столбцов" равносильны, потому что множества матриц второго порядка и столбцов размера четыре (которые сопоставляются матрицам по конкретному правилу) изоморфны.

2.3. # 20.22(3)

Найти размерность и базис подпространства[9,10]

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \\ -15 & 5 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

Решение. Приводим матрицу к упрощённому виду, выражаем базисные переменные через свободные:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \\ -15 & 5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 3x_1 + 2x_3$$

Таким образом, решение системы:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 3\alpha + 2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Вектора базиса найдены, их два, поэтому размерность подпространства равна двум. □

[9] Снова “абстрактные векторы” отождествляются с их координатными столбцами в некотором базисе.

[10] Система $Ax = 0$ в самом деле определяет подпространство: можно проверить замкнутость относительно сложения векторов и умножения вектора на число.