Семинар 2

Алексеев Василий

10 + 14 февраля (♥) 2023

Содержание

1. Системы линейных уравнений

1.1. Пример 1

Рассмотрим следующую систему 2×2:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \tag{1}$$

Её также можно переписать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Или так:

$$Ax = b$$

где $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ — *матрица системы*, $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ — столбец из неизвестных, и $b = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ — столбец свободных членов. В зависимости от того, какой столбец справа, системы делят на два вида: система вида $Ax = b$, $b \neq 0$, как в примере, называется *неоднородной*. А система вида $Ax = 0$ — *однородной*. В приведённом примере (1) матрица A размера 2 на 2, то есть в системе два уравнения и две неизвестных. В общем же случае матрица системы может быть прямоугольной: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, где m — число уравнений, а n — число неизвестных. И тогда $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. *Решение системы* — набор значений переменных, обращающих каждое уравнение системы в верное числовое равенство. *Решить систему* — значит найти все её решения или показать, что их нет. Если хотя бы одно решение есть, система называется *совместной* (иначе — несовместной). Решение может быть всего одно, или их может быть бесконечно много...[1]

Матрица A системы (1) квадратная невырожденная. По Крамеру, решение такой системы существует и единственно, причём все компоненты решения можно сразу найти по специальной формуле. Но решение системы (1), конечно, можно найти и совсем "попростому", "как в школе"...

Что можно сделать с системой (1)? Можно выразить одну переменную через другую, например, x_2 через x_1 из первого уравнения. Потом подставить во второе, получится уравнение с одной переменной x_1. Решить его, а потом найти и зачение второй переменной x_2. Это первый из "школьных приёмов". Ещё был способ "манипуляций уравнениями". Это когда надо сложить уравнения (возможно, с некоторыми коэффициентами) так, чтобы одна переменная "пропала". Число переменных таким образом можно "уменьшить", чтобы в итоге получилось уравнение лишь с одной неизвестной.

Решим систему (1) с помощью "манипуляций". При этом, по-хорошему, даже после "уничтожения" переменной при сложении уравнений мы всё равно должны оставлять систему системой, чтобы можно было найти все неизвестные. Будем использовать значок $\sim$ для обозначения перехода от одной системы к другой в результате "школьной манипуляции" уравнениями:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x_2 = -1 \\ x_1 = 1 \end{cases} \tag{2}$$

где сначала прибавили первое уравнение ко второму, потом сократили второе на 2, и в конце не подставили найденное значение x_2 в первое уравнение, а снова сложили уравнения, чтобы "избавиться" от переменной — а именно вычли из первого уже упрощённое второе.

[1] Может ли у системы $Ax = b$ быть, например, всего два различных решения?

На самом деле приведённый способ решения это... уже рассмотренный на прошлом семинаре метод Гаусса преобразования строк матрицы! Чтобы убедиться в этом, составим *расширенную матрицу* системы, приписав к матрице системы A справа столбец свободных членов b. Получится матрица вида $(A \mid b)$. И проследим, как менялась эта матрица на протяжении решения (2). То есть на каждом этапе решения выпишем расширенную матрицу для соответствующей упрощённой системы:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{3}$$

Видно, что школьный приём "манипуляций" уравнениями — это по сути элементарные преобразования строк расширенной матрицы системы с целью упрощения, "чистки столбцов". То есть можно думать, что решение системы словно разворачивается параллельно "в двух плоскостях": с одной стороны, упрощение уравнений системы, "уничтожение" переменных; с другой — преобразование строк расширенной матрицы при приведении матрицы системы к упрощённому виду. В процессе решения каждой системе уравнений после преобразования соответствует расширенная матрица. И наоборот: каждой расширенной матрице, получающейся в результате упрощения исходной методом Гаусса, соответствует система уравнений.

По-хорошему, преобразования строк матрицы (3) ещё не доведены до конца — до получения упрощённого вида матрицы системы (матрица A была невырожденная, поэтому её упрощённый вид есть просто единичная матрица того же порядка) остаётся поменять местами строки:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

И соответствующая система уравнений (где просто переменные идут "по порядку"):

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Таким образом, основное, что будет дальше в конспекте — это снова решение систем линейных уравнений, но на этот методом Гаусса (снова элементарные пребразования строк). Новое — как другой взгляд на старое. Под другим углом, с другой стороны, в других обозначениях...

1.2. **Пример** 8

Рассмотрим другую систему ("модифицированная" первая система (1)):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}- x_4} = 0 \\ x_1 - x_2 + \phantom{x_3 - {}} x_4 = 2 \\ \phantom{x_1 + {}} 2x_2 + x_3 - x_4 = -2 \end{cases} \tag{4}$$

В системе три уравнения, четыре неизвестных. Она решается? Чтобы выяснить это (и найти решение, если оно есть), применим тот же метод Гаусса. Матрица системы $A \in \mathbb{R}^{3\times4}$ в данном случае прямоугольная[2]. Поэтому единичную матрицу из A с помощью элементарных преобразований строк не получить. Но матрицу A можно упростить, получив в некоторых r её столбцах единичную матрицу и оставив нулевыми все строки с номерами больше r (*упрощённый вид* матрицы, число r при этом будет равно рангу A).

[2]Считаем, что "подвоха" по умолчанию нет, то есть что кроме переменных, представленных в системе с ненулевыми коэффициентами (x_1, x_2, x_3, x_4), больше неизвестных нет.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)=(2)-(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3)=(3)+(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{magenta}{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)=-1/2\cdot(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)=(1)-(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1/2 & 1/2 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1/2 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Пришли к упрощённой матрице[3] A' и преобразованному аналогичным образом столбцу b':

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Выпишем систему, соответствующую расширенной матрице $(A' \mid b')$:

$$\begin{cases} x_1 + 1/2x_3 + 1/2x_4 = 1 \\ x_2 + 1/2x_3 - 1/2x_4 = -1 \end{cases}$$

Переменные, которым соответствуют столбцы единичной матрицы в упрощённом виде матрицы A', называются *базисными*. (Базисная подматрица, базисные столбцы — базисные переменные.) В нашем случае это x_1 и x_2. Остальные переменные (x_3 и x_4) называются *свободными*, или параметрическими. Почему такое название, будет понятно далее.

Видно, что базисные переменные легко выражаются через оставшиеся:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 1/2x_3 - 1/2x_4 \\ x_2 = -1 - 1/2x_3 + 1/2x_4 \end{cases}$$

На самом деле решение уже получено. Например, берём $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, получаем по приведённым формулам значения x_1 и x_2, все вместе они дают одно из решений. Берём другие, *произвольные*, значения x_3 и x_4, снова получаем по формулам x_1 и x_2, находим ещё одно решение.

Описать всё бесконечное множество решений можно следующим образом (введя параметры, пробегающие всё $\mathbb{R}$, в качестве значений свободных неизвестных):

$$\begin{cases} x_3 = 2t_1 \in \mathbb{R} \\ x_4 = 2t_2 \in \mathbb{R} \\ x_1 = 1 - t_1 - t_2 \\ x_2 = -1 - t_1 + t_2 \end{cases}$$

[3]При этом последнюю строчку, нулевую, да, можно как бы вообще “выкинуть”... В этом примере.

Запишем решение в виде столбца:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - t_1 - t_2 \\ -1 - t_1 + t_2 \\ 2t_1 \\ 2t_2 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Частное решение неоднородной системы} \\ \text{(решение при нулевых свободных переменных)}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} t_2}_{\substack{\text{Общее решение однородной системы} \\ \text{(решение при нулевом столбце свободных членов)}}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Фундаментальная матрица} \\ \text{(её столбцы — базис в пространстве} \\ \text{решений однородной системы)}}} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

Столбцы, состоящие из коэффициентов перед параметрами t_1 и t_2, можно собрать в матрицу, которая называется *фундаментальной матрицей, соответствующей однородной системе* $Ax = 0$. Можно заметить, что эти столбцы — *решения однородной системы*; ещё видно, что они *линейно независимые*; и *любое решение однородной представимо как их линейная комбинация*.

Базисных переменных всего r — количество, равное рангу A. Значит, свободных переменных будет $n - r$. Но количество свободных как раз и определяет число столбцов фундаментальной матрицы Ф. Таким образом, размер фундаментальной должен быть $n \times (n - r)$. "Наполнение" же фундаментальной матрицы для данной системы $Ax = 0$ *неоднозначно*: главное, чтобы выполнялись условия на столбцы.

Итак, решений у системы (4) оказалось бесконечно много. (При этом "бесконечно много" ≠ "произвольные".) Однако не всегда всё складывается так хорошо...

1.3. **Пример** 0

Рассмотрим ещё одну систему ("модификация" второй (4)):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}- x_4} = 0 \\ x_1 - x_2 + \phantom{x_3 +{}} x_4 = 2 \\ \phantom{x_1 +{}} 2x_2 + x_3 - x_4 = \mathbf{-1} \end{cases} \tag{5}$$

Есть ли у неё решения? Снова попытаемся упростить методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{(2)=(2)-(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{(3)=(3)+(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

На этом можно закончить. Потому что посмотрим на получившуюся систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ \boxed{0 = 1} \text{ — “конец”} \end{cases}$$

Получили противоречие: слева в преобразованной матрице системы A' строчка нулевая, а соответствующая компонента преобразованного столбца b' нулю не равна. Раньше такого в процессе преобразований расширенной матрицы $(A \mid b)$ не было — система решалась. Противоречие появилось — решений нет.

Есть несколько вариантов сформулировать это наблюдение “по-умному”.

Теорема 1.1 (Кронекера – Капелли). *Система $Ax = b$ совместна* $\Leftrightarrow \mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A \mid b)$.

Ранг матрицы A — максимальное количество линейно независимых столбцов (базисные столбцы). Если приписывание нового столбца не меняет ранг, это значит, что новый столбец раскладывается по базисным. Но если в упрощённом виде у всех базисных какая-то компонента нулевая (нулевая строка в матрице A'), а в приписанном столбце после тех же преобразований стоит не ноль, то этот столбец b', очевидно, никак не может быть разложен по базисным A' (а значит, и исходный b не мог быть разложен по базисным исходной A), то есть максимальное число линейно независимых столбцов увеличивается, и ранг другой.

Теорема 1.2 (Фредгольма). *Система $Ax = b$ совместна* $\Leftrightarrow (y^T A = 0_{1\times n} \to y^T b = 0_{1\times 1})$.

Иными словами, что это значит, если в матрице A удалось занулить какую-то строчку? Это значит, что она может быть разложена в линейную комбинацию других. То есть строчки A можно сложить с некоторыми коэффициентами так, чтобы получить нулевую. Это сложение строк с коэффициентами можно представить как умножение матрицы A слева на строку[4] из коэффициентов $y^T \in \mathbb{R}^{1\times m}$. Если в результате такого действия в расширенной матрице справа окажется не ноль, то есть $y^T b \neq 0$, то получим противоречие.

Пример. Если $y^T A = 0$ только при нулевой строчке y^T, то это значит, что строки матрицы A линейно независимы. Очевидно, что в этом случае обязательно и $y^T b = 0$, и решение у системы $Ax = b$ есть.

В системе (5), “можно заметить”, третья строчка есть первая минус вторая. То есть, например, при $y^T = (1, -1, -1)$ имеем $y^T A = 0$. Однако $y^T b = -1 \neq 0$.

[4]Считается как бы, что маленькие строчные буквы: x, y, … — по умолчанию представляют столбцы (“координатный *столбец* вектора в базисе” — раньше у вектор-столбца тоже была “особая роль”). Тогда y^T будет строчкой.

2. Задачи

2.1. # 17.1(4)

Выписать расширенную матрицу. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y + 3z = -1 \\ 2x + 3y + 5z = 3 \\ 3x + 5y + 7z = 6 \end{cases}$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)=(3)-5\cdot(1)]{(2)=(2)-3\cdot(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \\ 3 & 0 & -8 & 11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)=(2)/2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -8 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)=(3)-3\cdot(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3)=-1/2\cdot(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2)=(2)+2\cdot(3)]{(1)=(1)-3\cdot(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Упрощённой матрице соответствует система

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

то есть решение есть $(1, 2, -1)^T$. □

2.2. # 19.19(1)

Расширенная матрица системы содержит параметр:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \alpha \\ 2 & 3 & 4 & \alpha^2 \\ 3 & 4 & 5 & \alpha^3 \end{array}\right)$$

Найти все значения параметра α, при которых система $Ax = b$ совместна, и решить.

Решение. "Заметим", что третья строчка есть разность удвоенной второй и первой. Таким образом, преобразования матрицы можно начать "нестандартно":

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \alpha \\ 2 & 3 & 4 & \alpha^2 \\ 3 & 4 & 5 & \alpha^3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \alpha \\ 2 & 3 & 4 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha \end{array}\right)$$

Очевидно, первые две строки преобразованной матрицы A' линейно независимы (нулевой строки там уже не получится). То есть $\operatorname{Rg} A = 2$. Поэтому по теореме Кронекера – Капелли (или по теореме Фредгольма, или просто потому, что не может в "нормальной" системе получиться $0 = 1$):

$$\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha = 1 \end{array}\right.$$

При $\alpha = 0$ получаем однородную систему (выпишем сразу матрицу с занулённой третьей строчкой):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{6}$$

При $\alpha = 1$ — неоднородную:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{7}$$

Решим сначала, например, однородную (6):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Преобразованная система:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$$

Поэтому решение:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

Если же внимательно посмотреть на неоднородную (7), то можно увидеть частное решение $(-1, 1, 0)^T$. Значит, имея общее решение однородной и частное неоднородной, можно сразу выписать общее решение неоднородной[5]:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

□

[5] А можно было бы, наоборот, “по-честному” решить сначала неоднородную, и потом сразу выписать решение однородной. В любом случае, в этом номере не обязательно решать от начала и до конца, по Гауссу, две системы при разных α.

2.3. # 18.17(1)

Найти однородную систему, для которой фундаментальной является матрица Φ следующего вида:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение.

Способ 1: Решение системы "наоборот". Размер фундаментальной матрицы 3×2. Значит, неизвестных в системе всего 3. А ранг самой матрицы A равен $3 - 2 = 1$. То есть в матрице всего "одна строчка" (может быть и больше — главное, чтоб ранг был равен одному, то есть чтоб "информативная" была всего одна строчка).

При данной фундаментальной матрице Φ общее решение однородной системы выражается как линейная комбинация её столбцов:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = x = \Phi h = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = h_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + h_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad h_1, h_2 \in \mathbb{R}$$

Это значит, что при определённом наборе чисел (x_1, x_2, x_3) коэффициенты разложения h_1 и h_2 по столбцам фундаментальной матрицы Φ найдутся тогда и только тогда, когда вектор (x_1, x_2, x_3) будет решением системы $Ax = 0$.

Перепишем выражение для общего решения выше в виде системы:

$$\begin{cases} x_1 = 3h_1 + h_2 \\ x_2 = 2h_1 + h_2 \\ x_3 = h_1 \end{cases}$$

Таким образом, можно попытаться решить эту систему относительно h_1 и h_2. И в процессе решения получить условие на компоненты x_1, x_2, x_3, при которых система будет разрешима. Можно воспользоваться методом Гаусса. Либо просто "поиграть с уравнениями" (что в целом одно и то же):

$$\begin{cases} x_1 = 3h_1 + h_2 \\ x_2 = 2h_1 + h_2 \\ x_3 = h_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = h_1 \\ x_2 = 2h_1 + h_2 \\ x_3 = h_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = x_3 \\ h_2 = x_2 - 2h_1 = x_2 - 2x_3 \\ h_1 = x_3 \end{cases}$$

Условие разрешимости (ограничение на компоненты вектора x, чтобы его можно было найти коэффициенты разложения h_1 и h_2): $\boxed{x_1 - x_2 = x_3}$. Если указанное соотношение между $(x_1, x_2, x_3) = x$ не выполняется, коэффициенты h_1 и h_2 найти нельзя (x — не решение $Ax = 0$). Иначе — коэффициенты h_1 и h_2 найти можно и потому $x = (x_1, x_2, x_3)$ — решение $Ax = 0$. В итоге матрицу A можно взять в виде:

$$A = (1, -1, -1)$$

Очевидно, ответ не однозначен: строчку можно несколько раз продублировать, даже с некоторым ненулевым коэффициентом (см. задачу (3.1) далее).

Способ 2: "Обычное" решение системы... В условии дана фундаментальная матрица. То есть её столбцы — решения однородной системы. Это значит, что в уравнение $Ax = 0$ можно подставить вместо x поочерёдно столбцы Φ, и это будет давать верные числовые равенства. Пусть в матрице A всего m строк (и 3 столбца). Тогда $Ax = 0$ в виде системы можно записать так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 = 0 \end{cases}$$

Подставляем сюда вместо x_1, x_2 и x_3 компоненты первого столбца Φ:

$$\begin{cases} 3a_{11} + 2a_{12} + a_{13} = 0 \\ 3a_{21} + 2a_{22} + a_{23} = 0 \\ \dots \end{cases}$$

И компоненты второго столбца Φ:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} \qquad = 0 \\ a_{21} + a_{22} \qquad = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Отсюда надо найти коэффициенты a_{ij}, составляющие матрицу A. Чтобы это сделать, можно сгруппировать уравнения из двух систем по строчкам:

$$\begin{cases} \begin{cases} 3a_{11} + 2a_{12} + a_{13} = 0 \\ \ \ a_{11} + \ \ a_{12} \qquad = 0 \end{cases} \\ \dots \end{cases}$$

В каждой такой паре уравнений можно принять первую и вторую переменные за базисные (выразить через третью). В итоге строки матрицы A должны выглядеть так:

$$A = \begin{pmatrix} -a_{13} & a_{13} & a_{13} \\ -a_{23} & a_{23} & a_{23} \\ \dots \end{pmatrix}$$

Три столбца линейно зависимы: например, первый и второй очевидным образом выражаются через третий. Поэтому максимальное число линейно независимых строк в матрице A — одна строчка (строчный ранг совпадает со столбцовым). Поэтому остаётся составить подходящую строку коэффициентов. Например,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

И тогда "система" уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

□

3. Дополнение

3.1. # 18.18

Найти *все* однородные системы уравнений, эквивалентные данной системе $Ax = 0$.

Решение. Надо найти совокупность матриц B, таких что $Bx = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$. Очевидно, столбцов в матрице B столько же, сколько и в данной в условии A (число неизвестных). Пусть размер матрицы A есть m строк на n столбцов. А размер матрицы B пусть l строк на n столбцов. Сколько строк l должно быть в матрице B, дающей такое же множество решений, что и A?

"Информативные" строки матрицы A должны сохраниться (их количество — ранг матрицы r). И к ним можно добавить сколько угодно "лишних" (или убрать из исходной системы, если строки A линейно зависимы). Таким образом, $l \geq r$. При этом r "информативных" строк B — это преобразованные r базисных (каких-то) строк матрицы A. Остальные строки B (если есть) — это произвольные линейные комбинации базисных строк A (1).

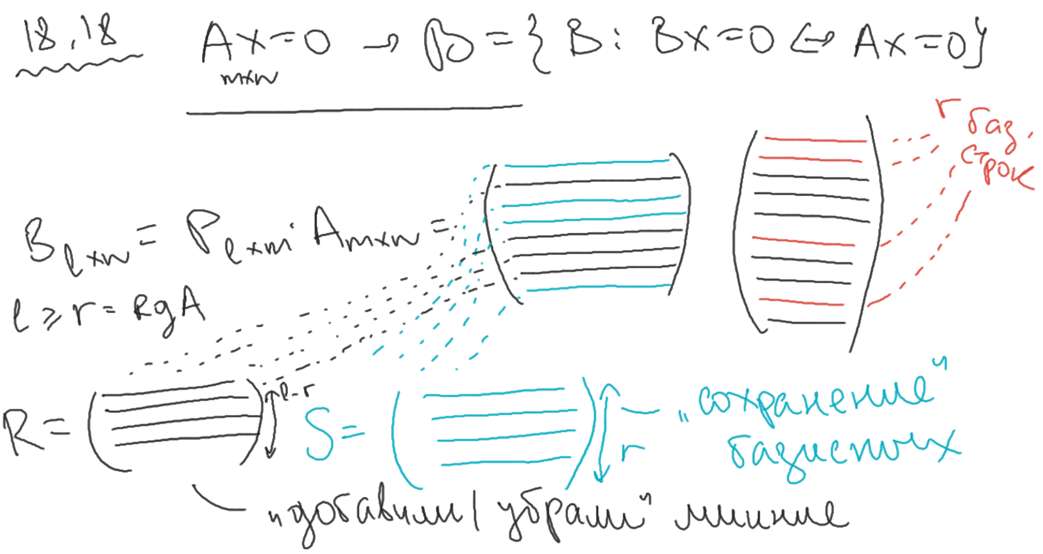

Рис. 1: Подходит любая матрица B вида $B = PA$, где строчный ранг P такой же, как у A (равный r). И подматрица S матрицы P, расположенная в r базисных строках — это матрица, которая преобразует r базисных строк матрицы A.

P.S. В конце задачника ответ сформулирован немного по-другому. Видимо, там считали, что строки матрицы A линейно независимы (хотя в условии задачи про это не сказано). Если же строки A линейно зависимы, то среди столбцов P могут быть хоть нулевые (например, столбец, который во всех строках B зануляет строку A, являющуюся линейной комбинацией базисных). $\square$