

# Семинар 1

Алексеев Василий

1 + 5 сентября 2022

## Содержание

<b>1</b>	<b>Матрицы и определители 2-го и 3-го порядков</b>	<b>1</b>
1.1	Операции с матрицами . . . . .	1
1.2	Определитель матрицы . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Системы линейных уравнений. Правило Крамера</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Дополнение</b>	<b>7</b>
3.1	“Интуитивное” матричное умножение . . . . .	7
3.2	Определитель порядка три по правилу треугольника . . . . .	7
3.3	Задание определителя с помощью формулы . . . . .	8
3.4	Свойства определителя . . . . .	9
3.5	Задание определителя через свойства . . . . .	10
3.6	“Программистское” матричное сложение . . . . .	11

# 1. Матрицы и определители 2-го и 3-го порядков

Вещественная матрица  $A$  размера  $m \times n$  — “таблица” из чисел  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  ( $i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$ ):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

## 1.1. Операции с матрицами

**Определение 1.1** (Сложение матриц). Пусть  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Суммой  $A + B$  называется матрица  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , такая что  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  ( $i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$ ).

**Определение 1.2** (Умножение матрицы на число). Пусть  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \alpha \in \mathbb{R}$ . Произведением матрицы  $A$  на число  $\alpha$  называется матрица  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , такая что  $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$  ( $i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$ ).

*Замечание.* Можно проверить, что введённые операции обладают следующими свойствами:

1.  $A + (B + C) = (A + B) + C, \forall A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  (ассоциативность сложения).
2.  $A + B = B + A, \forall A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  (коммутативность сложения).
3.  $\exists 0_{m \times n} \in \mathbb{R}^{m \times n} : 0_{m \times n} + A = A, \forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .
4.  $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n} \exists -A \in \mathbb{R}^{m \times n} : A + (-A) = 0_{m \times n}$ .
5.  $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  (ассоциативность умножения на скаляр).
6.  $1 \cdot A = A, \forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .
7.  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  (дистрибутивность умножения матрицы на число относительно сложения чисел).
8.  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, \forall \alpha \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  (дистрибутивность умножения матрицы на число относительно сложения матриц).

**Определение 1.3** (Линейная комбинация матриц). Линейной комбинацией матриц  $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^{m \times n}$  называется их сумма с некоторыми коэффициентами  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ :

$$\alpha_1 \cdot A_1 + \dots + \alpha_n \cdot A_n$$

**Задача (15.2(3)).** Вычислить линейную комбинацию матриц:

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 & -15 \\ 1 & -5 & -6 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 24 & -7 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & 3 \end{pmatrix} = ?$$

*Решение.* Вычисляя линейные комбинации соответственных элементов матриц, получаем ответ:

$$\begin{pmatrix} 2 - 5 & 2 \cdot 8 - 24 & 2 \cdot 7 - (-7) & 2 \cdot (-15) - (-1) \\ 2 - (-1) & 2 \cdot (-5) - (-2) & 2 \cdot (-6) - 7 & 2 \cdot 11 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 21 & -29 \\ 3 & -8 & -19 & 19 \end{pmatrix}$$

□

**Определение 1.4** (Умножение матриц). Пусть  $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ . Тогда матрица  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  называется произведением матриц  $A$  и  $B$ , если

$$\begin{cases} c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

и обозначается  $C = AB$ .

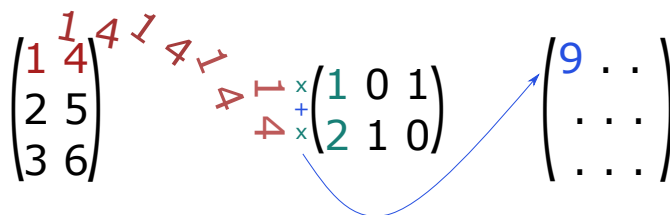


Рис. 1: Иллюстрация умножения матриц.

**Задача** (15.5(9)). Вычислить произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = ?$$

*Решение.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

□

Приведём ещё пару небесполезных определений, связанных с матрицами.

**Определение 1.5** (Единичная матрица). Матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  называется единичной, если она нулевая, кроме главной диагонали ( $\{a_{ij} \mid i = j\}$ ), на которой стоят единицы. То есть  $a_{ij} = 1$  при  $i = j$  и  $a_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица обычно обозначается  $E$  или  $I$ .

**Определение 1.6** (Транспонирование матрицы). Пусть  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Тогда транспонированной по отношению к матрице  $A$  называется матрица  $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , такая что  $c_{ij} = a_{ji}$  ( $i = 1 \dots n, j = 1 \dots m$ ). Транспонированная матрица обозначается  $A^T$ .

*Пример.* О транспонировании можно думать как о замене строк матрицы на столбцы и наоборот. Либо как об отражении элементов матрицы относительно главной диагонали:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}^T$$

**Задача (15.13(1)).** Проверить справедливость тождества:

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T$$

*Решение.* Пусть  $A$  размера 2 строки на 3 столбца (для наглядности, и чтоб меньше писать — для размера  $m$  строк на  $n$  столбцов всё будет аналогично):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Тогда мы можем записать:

$$(\alpha A)^T = \left( \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{21} \\ \alpha a_{12} & \alpha a_{22} \\ \alpha a_{13} & \alpha a_{23} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} = \alpha A^T$$

□

**Определение 1.7** (След матрицы). Следом квадратной матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  называется сумма элементов, находящихся на главной диагонали  $\{a_{ij} \mid i = j, i = 0 \dots n\}$ :

$$\begin{cases} \text{Sp} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{Sp} : A \mapsto \sum_{i=1}^n a_{ii} \end{cases}$$

У следа есть несколько возможных обозначений. Ещё одно, например,  $\text{Tr } A$ .

## 1.2. Определитель матрицы

Об определителе можно думать как об особой числовой функции на множестве квадратных матриц, обозначаемой  $\det$  или  $|\cdot|$

$$\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

Существует несколько эквивалентных способов определения  $\det$ : через свойства функции, конкретную формулу вычисления по элементам матрицы (3) при произвольном  $n$ . Мы пока опустим строгое определение  $\det$  и просто посмотрим, как его можно вычислять для квадратных матриц размерностей 2 и 3.

*Определитель второго порядка:*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

*Определитель третьего порядка.* Способ вычисления “разложением по первой строке” (перебираем элементы первой строки; чередуем знаки начиная с плюса; домножаем на

определитель матрицы, остающейся после вычёркивания строки и столбца, где стоит текущий элемент первой строки):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1$$

Но и при более высоких порядках (четыре и далее) можно использовать тот же алгоритм разложения по первой строке, сводя вычисление определителя порядка  $n$  к вычислению нескольких определителей порядка  $n - 1$ . Даже если мы ещё раз посмотрим на определитель второго порядка, то увидим, что он тоже может быть посчитан разложением по первой строке, если положить определитель матрицы размера  $1 \times 1$  из одного элемента равным этому самому элементу:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot |d| - b \cdot |c| \xrightarrow{|x| \equiv x} ad - cb$$

Таким образом, мы уже фактически пришли к следующему варианту определить функцию  $\det$ :

**Определение 1.8** (Определитель (рекурсивный вариант определения)). Положим определитель матрицы из одного элемента равным этому самому элементу

$$\det(a) \equiv a$$

Пусть  $d_{ij}$  — определитель подматрицы  $D_{ij}$  матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , которая получается при вычёркивании  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца. Тогда

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{1j} (-1)^{1+j} d_{1j}$$

**Задача (14.7(6)).** Вычислить определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = ?$$

*Решение.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 \cdot 5 - 4 \cdot 4) - 2 \cdot (2 \cdot 5 - 3 \cdot 4) + 3 \cdot (2 \cdot 4 - 3 \cdot 3) = -1 + 4 - 3 = 0$$

Получаем, что определитель матрицы равен нулю. □

**Определение 1.9** (Вырожденная матрица (возможный вариант определения)). Матрица  $A$  называется вырожденной, если  $\det A = 0$ . В противном случае матрица  $A$  называется невырожденной.

## 2. Системы линейных уравнений. Правило Крамера

Система  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными ( $a_{ij} \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}$ ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

В матричном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Или так:

$$A_{m \times n} \mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{b}_{m \times 1}, \quad A_{m \times n} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \mathbf{b}_{m \times 1} \in \mathbb{R}^{m \times 1} \quad (2)$$

**Определение 2.1** (Решение системы). Решением системы (2) называется совокупность наборов значений переменных, которые каждое уравнение системы обращают в верное числовое равенство:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$$

**Определение 2.2.** Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если у неё нет решений.

**Определение 2.3.** Говорят, что система  $B$  следует из системы  $A$ , если множество решений  $B$  содержит множество решений  $A$ .

*Пример.* Пусть дана система  $A$ :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Можно, например, сложить уравнения системы  $A$ . Получим новую систему  $B$  (которая следует из  $A$ ):

$$2x = 2$$

Её множество решений (наборов из двух компонент  $x, y$ ), очевидно, шире множества решений системы  $A$ .

**Теорема 2.1.** Пусть число уравнений в системе  $m$  равно числу неизвестных  $n$ . Тогда если  $\det A \neq 0$ , то система  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  имеет решение, и притом только одно.

**Теорема 2.2** (Правило Крамера). Пусть число уравнений в системе  $m$  равно числу неизвестных  $n$ . Тогда если  $\det A \neq 0$ , то решение можно найти по формулам:

$$\begin{cases} x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \\ i = 1 \dots n \end{cases}$$

В обозначениях выше  $\Delta$  — это просто  $\det A$ , а  $\Delta_i$  — определитель матрицы, все столбцы которой такие же, как у  $A$ , кроме столбца с номером  $i$ , который есть столбец  $\mathbf{b}$ :

$$\begin{cases} \Delta_i \equiv \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n) \\ i = 1 \dots n \end{cases}$$

где  $\mathbf{a}_i$ , ( $i = 1 \dots n$ ) — это столбцы матрицы  $A$ .

*Пример.* Если определитель матрицы системы равен нулю, то решений может как не быть вообще, так и быть бесконечно много. Например:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

**Задача** (17.1(2)). *Решить систему:*

$$\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 5x + 9y = 4 \end{cases}$$

*Решение.* Перепишем систему в матричном виде:

$$\begin{cases} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \\ \mathbf{b} = (2 \ 4)^T \end{cases}$$

Расширенная матрица системы:  $(A \mid \mathbf{b})$ .

Матрица  $A$  квадратная. Её определитель  $|A| = 2$  отличен от нуля. Поэтому решение системы существует и единственно. И его можно найти по формулам:

$$\Delta = \det A = \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Delta_x = \det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = -2 \Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\Delta_y = \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1$$

И решение:

$$\mathbf{x} = (x \ y)^T = (-1 \ 1)^T$$

Проверяем:

$$\begin{cases} -3 + 5 = 2 \\ -5 + 9 = 4 \end{cases}$$

□

### 3. Дополнение

В дополнении упомянем ещё один вариант матричного умножения (“интуитивный”) и то, где он может применяться. Рассмотрим ещё один способ считать определитель третьего порядка. Приведём ещё несколько равносильных способов задать определитель (без доказательства равносильности). Отметим пару свойств определителя. И в конце — ещё пара слов про сложение (о возможности складывать “когда формально нельзя, но на практике удобно”).

#### 3.1. “Интуитивное” матричное умножение

Помимо “обычного” матричного умножения (1.4), о котором уже говорили ранее и которое далее всегда и будем использовать, существует ещё несколько вариантов определить операцию умножения между двумя матрицами.

Например — поэлементное умножение, “произведение Адамара”. Пусть есть две матрицы *одинакового размера*  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Тогда матрица  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  называется произведением Адамара матриц  $A$  и  $B$ , если

$$\begin{cases} c_{ij} = a_{ij}b_{ij} \\ i = 1 \dots m \\ j = 1 \dots n \end{cases}$$

Покомпонентное произведение обозначается как  $C = A \odot B$ .

Почему “умножение по умолчанию” выбрано не так просто и понятно, а по-другому (1.4), будет понятно далее в курсе (наверно). Поэлементное же умножение тоже используется. Например, в анализе изображений при свёртке с помощью фильтра (2). Изображение представляется как совокупность прямоугольных матриц (по матрице на каждый цвет: красный, зелёный и синий — если изображение цветное), где каждый элемент матрицы отвечает за “величину” соответствующего цвета в данном пикселе. Ядро свёртки — квадратная (как правило) матрица меньшего (как правило) размера. В процессе свёртки ядро как бы “скользит” по матрице изображения, адамарово умножаясь на подматрицу изображения, находящуюся в данный момент под ядром. Элементы матрицы, полученной в результате такого умножения, складываются, и результат записывается как значение цвета в пиксель матрицы преобразованного изображения. Таким образом, свёртка — это как ещё одна операция между матрицами, которая принимает на вход две матрицы (разных размеров) и возвращает одну матрицу. Размер матрицы-результата может быть такой же, как у исходной матрицы изображения, а может быть больше или меньше (в зависимости от того, как “скользит” ядро).

#### 3.2. Определитель порядка три по правилу треугольника

При подсчёте определителя третьего порядка ещё можно пользоваться т.н. “правилом треугольника” (3).

Если сложить все тройки, сначала с плюсом, потом с минусом, то получаем (первая тройка в каждом “блоке” — диагональные элементы):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

Что совпадает, с точностью до перестановки троек, с формулой вычисления по первой строке (1).



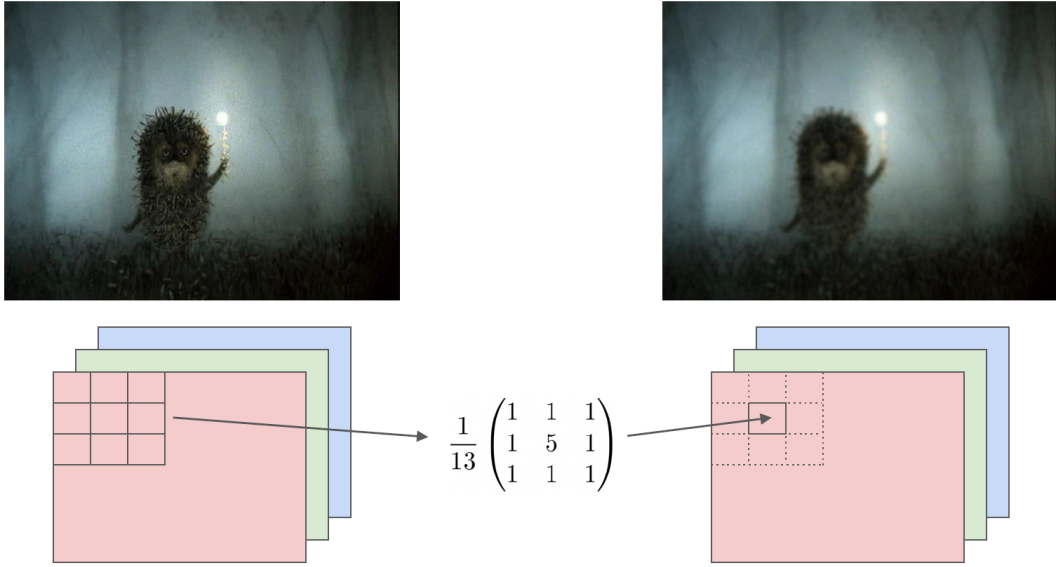


Рис. 2: Ёжик в тумане после десятикратного применения **сглаживающего фильтра**  $\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

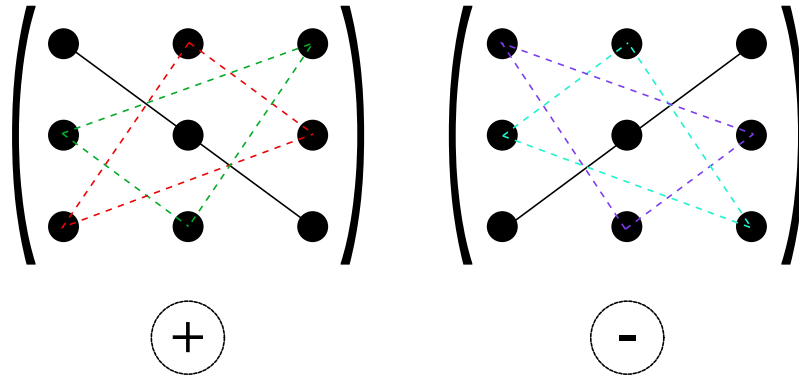


Рис. 3: Правило треугольника для вычисления определителя третьего порядка.

Ещё есть (возможно, не такое красивое, как с треугольниками) правило Саррюса (4).

### 3.3. Задание определителя с помощью формулы

**Теорема 3.1** (Формула полного разложения определителя). Пусть  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Тогда определитель  $\det A$  матрицы равен

$$\det A = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} (-1)^{N(i_1, \dots, i_n)} a_{1i_1} \dots a_{ni_n} \quad (3)$$

где  $N(i_1, \dots, i_n)$  — число нарушений порядка в перестановке чисел  $i_1, \dots, i_n$ <sup>1</sup>. Сумма в формуле берётся по всем перестановкам чисел  $1, \dots, n$ <sup>2</sup>.

**Пример.** Вспомним формулу вычисления определителя для матрицы размера 3:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1$$

<sup>1</sup>Нарушение порядка — когда правее большего элемента стоит меньший элемент:  $i_k > i_s$ , но  $k < s$ .

<sup>2</sup>Например, перестановки чисел 1, 2, 3: (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).

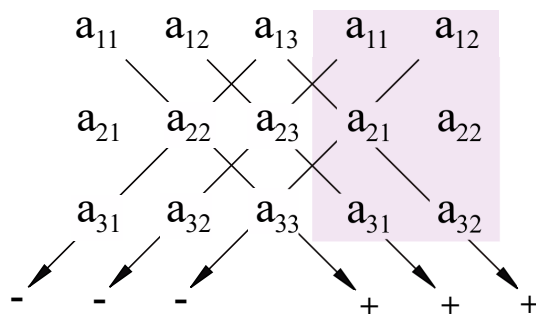


Рис. 4: Правило Саррюса для вычисления определителя третьего порядка (картинка взята с русской страницы [Википедии](#)).

Элементы в каждом слагаемом упорядочены по номеру столбца. Поэтому посмотрим на число беспорядков по строкам (неважно, как считать беспорядки, по строкам или по столбцам, потому что  $\det A = \det A^T$ ). В первом слагаемом:  $N(1, 2, 3) = 0$ . Во втором:  $N(1, 3, 2) = 1$  (тройка и двойка). В третьем:  $N(2, 1, 3) = 1$  (двойка и единица). В четвёртом:  $N(3, 1, 2) = 2$  (два беспорядка с тройкой и единицей и тройкой и двойкой). В пятом:  $N(2, 3, 1) = 1 + 1 = 2$  (для двойки и единицы и для тройки и единицы). В шестом:  $N(3, 2, 1) = 2 + 1 = 3$  (тройка-двойка, тройка-единица, двойка-единица).

### 3.4. Свойства определителя

**Теорема 3.2.** *Некоторые свойства определителя (матрицы в формулах ниже представляются столбцами  $a_i \in \mathbb{R}^n$ ):*

1. *Линейность по столбцу (строке) — полилинейность:*

$$\begin{cases} \det(a_1, \dots, \underbrace{p + q}_{a_i}, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, p, \dots, a_n) + \det(a_1, \dots, q, \dots, a_n) \\ \det(a_1, \dots, \underbrace{\alpha p}_{a_i}, \dots, a_n) = \alpha \det(a_1, \dots, p, \dots, a_n) \end{cases} \quad (4)$$

2. *При перестановке двух столбцов (строк) матрицы её определитель меняет знак (косимметричность, антисимметричность по столбцам/строкам):*

$$\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = -\det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n) \quad (5)$$

3. *Если два столбца (две строки) матрицы совпадают, то её определитель равен нулю:*

$$\det(a_1, \dots, p, \dots, p, \dots, a_n) = 0 \quad (6)$$

Свойства можно доказать как следствия теоремы 3.1.

И ещё пара более частных утверждений, которые следуют из/являются подслучаями свойств выше:

- Общий множитель элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя:

$$\det(a_1, \dots, \alpha p, \dots, a_n) = \alpha \cdot \det(a_1, \dots, p, \dots, a_n)$$

- К любой строке (столбцу) матрицы можно прибавлять линейную комбинацию других строк (столбцов) — определитель при этом не изменится:

$$\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \alpha_j a_j + a_i, \dots, a_n)$$

- При вычислении определителя матрицы вида  $\alpha A$  скаляр  $\alpha$  можно выносить за знак  $\det$  следующим образом:

$$\det \alpha A = \alpha^n \det A$$

*Пример.* Определитель единичной матрицы:

$$\det E = 1^n = 1$$

**Теорема 3.3.** *Определитель транспонированной матрицы*

$$\det A^T = \det A$$

**Теорема 3.4.** *Определитель произведения двух квадратных матриц:*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

### 3.5. Задание определителя через свойства

Как отмечалось выше, существует несколько эквивалентных определений  $\det$ . Один из способов — с помощью формулы (3). Приведём далее ещё пару, основанных на перечислении свойств, которыми должна обладать функция  $\det$ .

**Определение 3.1** (Вариант 1<sup>3</sup>). Функция  $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  называется определителем (детерминантом) и обозначается  $\det$ , если

- Функция  $f$  является линейным однородным многочленом от элементов любой строки:

$$\begin{cases} f(A) = h_1 a_{i1} + \dots + h_n a_{in} \\ 1 \leq i \leq n \\ h_j = h_j(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

то есть коэффициенты в разложении по элементам строки не зависят от этой самой строки.

- Значение  $f$  на вырожденной матрице<sup>4</sup> равно нулю 0.
- Значение  $f$  на единичной матрице  $E_{n \times n}$  равно единице 1.

**Определение 3.2** (Вариант 2<sup>5</sup>). Функция  $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  называется определителем (детерминантом) и обозначается  $\det$ , если

- Функция  $f$  полилинейна по строкам матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (4).
- Функция  $f$  кососимметрична по строкам матрицы  $A$  (5).

<sup>3</sup>Беклемишев Д. В. «Курс аналитической геометрии и линейной алгебры»

<sup>4</sup>Если определять вырожденную матрицу как такую, у которой строки линейно зависимы.

<sup>5</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Determinant>

- Значение  $f$  на единичной матрице  $E_{n \times n}$  равно единице 1.

**Определение 3.3** (Вариант 3<sup>6</sup>). Функция  $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  называется определителем (детерминантом) и обозначается  $\det$ , если

- Функция  $f$  полилинейна по строкам матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (4).
- Значение  $f$  на матрице с двумя одинаковыми строками равно нулю 0 (6).
- Значение  $f$  на единичной матрице  $E_{n \times n}$  равно единице 1.

### 3.6. “Программистское” матричное сложение

Помимо “математических” операций сложения и умножения матриц, стоит отметить ещё такое явление, как “программистское” сложение и умножение. Так, программные пакеты, реализующие действия с матрицами, могут ради удобства давать возможность складывать и поэлементно умножать матрицы разных размеров. В рамках библиотеки [numpy](#) Питона это называется [Broadcasting](#) (5). Но, хоть размеры матриц при сложении с помощью `broadcasting` и могут отличаться, они всё равно должны соотноситься определённым образом.

---

<sup>6</sup>Hans Schneider, George Phillip Barker. «Matrices and Linear Algebra»

```

import numpy as np

A = np.array([
    [1, 2],
    [3, 4],
    [5, 6]
])

x = np.array([
    [-1],
    [-1],
    [-1]
])

result = A + x

print(f'Matrix:\n{A}\n')
print(f'Vector:\n{x}\n')
print(f'Sum:\n{result}')

# Output:
#
# Matrix:
# [[1 2]
#  [3 4]
#  [5 6]]
#
# Vector:
# [[-1]
#  [-1]
#  [-1]]
#
# Sum:
# [[0 1]
#  [2 3]
#  [4 5]]

```

Рис. 5: Пример сложения матриц разных размеров в Питоне. Матрица меньшего размера в процессе сложения как бы увеличивается, самокопируясь вдоль определённой размерности.