Семинар 2

Алексеев Василий

8 + 13 сентября 2021

Содержание

1. Вектора (-ы?)

Вектор — направленный отрезок (1). Вектор можно обозначать одной строчной буквой, например $\boldsymbol{a}$, или двумя: началом и концом, например $\overrightarrow{AB}$.

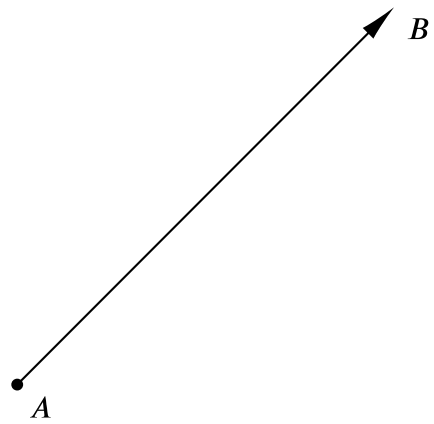

Рис. 1: Вектор характеризуется направлением и величиной.

Определение 1.1 (Коллинеарность)**.** Два ненулевых вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются *коллинеарными*, если существует прямая, которой они параллельны (2). Коллинеарность обозначается $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$. Если при этом $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ направлены в одну сторону, то можно писать $\boldsymbol{a} \upuparrows \boldsymbol{b}$, если в разные стороны — $\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{b}$. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

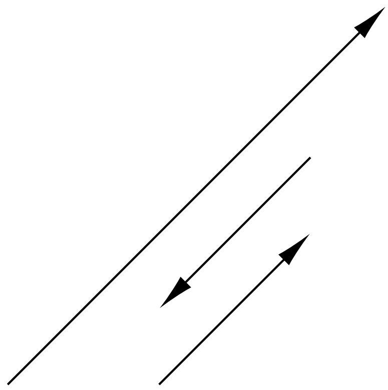

Рис. 2: Коллинеарные вектора.

Определение 1.2 (Компланарность)**.** Три ненулевых вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны (3). Три вектора, два из которых ненулевые, а третий нулевой, всегда компланарны.

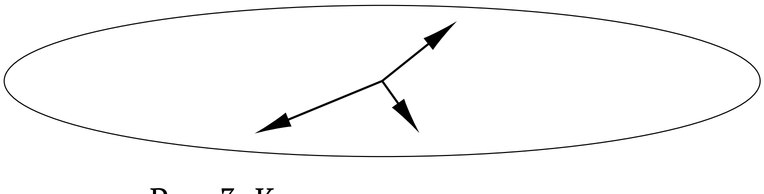

Рис. 3: Компланарные вектора.

Определение 1.3 (Равенство векторов)**.** Будем считать два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равными, если они

- равны по длине $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$
- одинаково направлены $\boldsymbol{a} \upuparrows \boldsymbol{b}$

Точка приложения при равенстве не учитывается[1].

На множестве векторов можно определить следующие операции:

- Сложение векторов (по правилу треугольника):
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$
- Умножение вектора $\boldsymbol{a}$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$. Результирующий вектор обозначается как $\alpha\boldsymbol{a}$ и определяется свойствами:
$$\begin{cases} |\alpha\boldsymbol{a}| = |\alpha| \cdot |\boldsymbol{a}| \\ \begin{cases} \alpha\boldsymbol{a} \upuparrows \boldsymbol{a}, \alpha > 0 \\ \alpha\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{a}, \alpha < 0 \end{cases} \end{cases}$$
(то есть при $\alpha = 0$ будет нулевой вектор, и которого нет определённого направления).

Множество векторов в $\mathbb{R}^3$ с введёнными операциями сложения и умножения на число из $\mathbb{R}$ образуют линейное пространство[2].

Замечание. В чём можно убедиться, проверив следующие свойства операций, введённых на множестве векторов (обозначим за V векторы трёхмерного пространства):

1. $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}, \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ (ассоциативность сложения).
2. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}, \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ (коммутативность сложения).
3. $\exists \boldsymbol{0} \in V \,:\, \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}, \forall \boldsymbol{a} \in V$.
4. $\forall \boldsymbol{a} \in V \; \exists {-\boldsymbol{a}} \in V \,:\, \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$.
5. $\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{a} \in V$ (ассоциативность умножения на скаляр).
6. $1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}, \forall \boldsymbol{a} \in V$.
7. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \boldsymbol{a} \in V$ (дистрибутивность умножения матрицы на число относительно сложения чисел).
8. $\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ (дистрибутивность умножения матрицы на число относительно сложения матриц).

[1] То есть получается, что можно нарисовать несколько несовпадающих, но равных векторов. Хотя в зависимости от конкретной задачи может быть важным различать векторы с разной точкой приложения. Например, в физике, при действии сил на тело.

[2] Формально $\mathbb{R}^3$ — это не векторы как направленные отрезки, а столбцы из чисел. Но мы будем использовать обозначения $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ не только для векторов-столбцов, но и для векторов — направленных отрезков на плоскости и в трёхмерном пространстве соответственно.

Но рассмотрим векторы на одной прямой: сложение и умножение на число не выводят с прямой. То же самое с векторами на плоскости: сложение и умножение на число даёт вектор, также лежащий в той же плоскости. Таким образом, не только векторы из всего $\mathbb{R}^3$ образуют линейное пространство, но и векторы, параллельные одной прямой, и векторы, параллельные одной плоскости. Множество векторов из одного нулевого вектора также образуют линейное пространство. Таким образом,

- нульмерное векторное пространство — нулевой вектор
- одномерное векторное пространство
$$\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{v} \parallel l\}, \quad l \text{ — прямая}$$
- двумерное векторное пространство
$$\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{v} \parallel \alpha\}, \quad \alpha \text{ — плоскость}$$
- трёхмерное векторное пространство — $\mathbb{R}^3$

Определение 1.4. Линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$:
$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le n$$

Нетривиальная линейная комбинация — когда хотя бы один их коэффициентов α_i отличен от нуля: $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 0$.

Определение 1.5 (Линейно зависимая система векторов)**.** Система векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называется линейно зависимой, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору:
$$\begin{cases} \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n = \mathbf{0} \\ \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 > 0 \end{cases}$$

Пример. Система из одного нулевого вектора линейно зависима.

Теорема 1.1. *Система из $k > 1$ вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов системы представим как линейная комбинация остальных.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ — линейно зависимы. Это значит, что
$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$$
и некоторый $\alpha_j \neq 0$. Поэтому
$$\alpha_j = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq j}} -\frac{\alpha_i}{\alpha_j} \boldsymbol{a}_i$$

И наоборот, пусть некоторый $\boldsymbol{a}_j$ представим как линейная комбинация остальных векторов из набора с коэффициентами α_i':
$$\boldsymbol{a}_j = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq j}} \alpha_i' \boldsymbol{a}_i$$

Тогда
$$\alpha_1' \boldsymbol{a}_1 + \ldots + (-1) \cdot \boldsymbol{a}_j + \ldots + \alpha_n' \boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$$
и по крайней мере один коэффициент -1 при разложении нуля $\mathbf{0}$ в линейную комбинацию векторов $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1}^n$ не равен нулю. □

Теорема 1.2. *Критерии линейной зависимости систем векторов:*

- *Один вектор линейно зависим* $\Leftrightarrow$ *это нулевой вектор.*
- *Два вектора линейно зависимы* $\Leftrightarrow$ *эти векторы коллинеарны.*
- *Три вектора линейно зависимы* $\Leftrightarrow$ *эти векторы компланарны.*
- *Любые четыре вектора линейно зависимы.*

Определение 1.6 (Базис)**.** Базисом в пространстве называется

- упорядоченная (векторы перенумерованы)
- линейно независимая (только тривиальная линейная комбинация векторов равна нулевому вектору)
- полная (любой вектор пространства можно представить как их линейную комбинацию)

система векторов.

Из теоремы (1.2) следует, что

- В нулевом пространстве не существует базиса.
- В одномерном пространстве ненулевой вектор образует базис.
- В двумерном пространстве пара неколлинеарных векторов образует базис.
- В трёхмерном пространстве тройка некомпланарных векторов образует базис.

Замечание. При заданном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ каждому вектору можно поставить в соответствие набор чисел — коэффициентов при разложении вектора по базису $\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{e}_n$:

$$\boldsymbol{a} \leftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$$

Соответствие взаимно однозначное (каждому вектору соответствует один координатный столбец и каждому столбцу соответствует один вектор), потому что базисная система векторов линейно независима. Более того, сложение векторов — направленных отрезков соответствует сложению их координатных столбцов (у вектора — результата сложения координатный столбец в базисе равен сумме координатных столбцов векторов-слагаемых). И умножение вектора на число соответствует умножению его координатного столбца на это же самое число. То есть между векторами — направленными отрезками и векторами — координатными столбцами соответствие не просто взаимно однозначное, но такое, при котором ещё сохраняются линейные операции.

Определение 1.7 (Система координат)**.** Декартовой системой координат[3] называется совокупность точки и базиса $O; \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Точка O называется началом отсчёта.

Замечание. При заданной системе координат $O; \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ каждой точке A можно поставить в соответствие набор чисел — компонент радиуса-вектора точки в базисе $\overrightarrow{OA} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n$:

$$A \leftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$$

[3] Помимо декартовой, есть и другие системы координат. Например полярная, когда положение точки на плоскости определяется по расстоянию r от начала координат O и по углу ϕ, которое направление из начала координат на точку образует с выбранным направлением $\boldsymbol{l}$: $\boldsymbol{a} \leftrightarrow (r, \phi)$.

1.1. Задачи

Задача (1.6)**.** $\boldsymbol{a}(-5,-1), \boldsymbol{b}(-1,3)$ *— проверить, что система из двух векторов образует базис. Разложить* $\boldsymbol{c}(-1,2)$ *и* $\boldsymbol{d}(2,-6)$ *по этому базису.*

Решение. Все векторы заданы компонентами в некотором неизвестном базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$.

Для доказательства того, что $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ вместе образуют базис, достаточно проверить их линейную независимость. Для проверки же линейной независимости векторов, можно проверить линейную независимость соответствующих им столбцов. Иными словами, надо проверить, что координатные столбцы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ неколлинеарны:

$$(-5,-1) = \alpha(-1,3) \Rightarrow \alpha \in \varnothing$$

Теперь разложим, например, вектор $\boldsymbol{c}$ по $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (с вектором $\boldsymbol{d}$ будет аналогично):

$$\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\alpha-\beta\\-\alpha+3\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5-1\\-1+3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$$

Решаем получившуюся систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix}-5 & -1\\-1 & 3\end{vmatrix} = -16$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix}-1 & -1\\-2 & 3\end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix}-5 & -1\\-1 & 2\end{vmatrix} = -11$$

И коэффициенты разложения:

$$\begin{cases}\alpha = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{1}{16}\\[2mm] \beta = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{11}{16}\end{cases}$$

□

Задача (1.11(1))**.** *Компланарны ли* $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$*?*

$$\begin{cases}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{m} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}\end{cases} \tag{1}$$

(про векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *при этом известно, что они некомпланарны).*

Решение.

Способ 1.

Векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ некомпланарны $\Rightarrow$ они линейно независимы, и в трёхмерном пространстве образуют базис. Компланарность $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ равносильна их линейной зависимости:

$$\alpha\boldsymbol{l} + \beta\boldsymbol{m} + \gamma\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$$

Что, в свою очередь, равносильно линейной зависимости (с теми же коэффициентами) их координатных столбцов в базисе:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Или, в более компактном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$

Очевидно, определитель матрицы системы не равен нулю ($\Delta = 1$). То есть, по Крамеру, решение системы существует и единственно. Но нулевой вектор $(\alpha, \beta, \gamma)^T = (0, 0, 0)^T$ точно является решением (система однородная). Поэтому единственное решение:

$$(\alpha, \beta, \gamma)^T = (0, 0, 0)^T$$

Но это значит, что система векторов $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ линейно независима (только их тривиальная линейная комбинация, где все коэффициенты нулевые, может быть равна нулевому вектору). То есть векторы некомпланарны.

Способ 2.

(Как было замечено на семинаре) можно было просто попробовать решить систему (1). В системе этой участвуют не числа (как обычно), а векторы (направленные отрезки). Но так как линейные операции (сложение и умножение на число) работают одинаково, что с векторами, что с числами, то мы можем попробовать решить систему относительно векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Что нам это даст, если получится выразить $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ через $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ (или если не получится)? Система $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ образует базис. То есть они линейно независимы и любой вектор пространства можно представить как их линейную комбинацию. Если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ выражаются через $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$, то потому и любой вектор пространства тоже разложится по $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$. То есть система векторов $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ тоже полная.

(…Внимательно смотрим на систему из условия задачи, понимаем, что она решается относительно $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, и $\boldsymbol{c}$…)

Могут ли теперь $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ быть линейно зависимыми? Допустим, да. Тогда максимальное количество линейно независимых векторов среди $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ — это два вектора или вообще один. В любом случае, если $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ линейно зависимы, то они компланарны (1.2). Но тогда в трёхмерном пространстве можно будет найти вектор, который по $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ разложен быть не может (который не лежит в плоскости $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$). Получаем противоречие с уже доказанной полнотой.

То есть $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$, линейно независимы, а потому некомпланарны. □

Задача (1.21). *В $\triangle ABC$ точка M — середина стороны AC. Также известно, что $K \in [AB]$ и $AK : KB = 3 : 5$. И ещё $L \in [BC]$ и $BL : LC = 2 : 3$.*

Надо найти координаты вектора $\overrightarrow{BM}$ в базисе $\{\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{CK}\}$.

Решение. Очевидно, векторы $\{\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{CK}\}$, которые предлагается взять в качестве базисных, неколлинеарны, а потому в самом деле образуют базис на плоскости (4).

Задачу можно бы было решить, отложив векторы $\overrightarrow{BM}$ и $\{\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{CK}\}$ от одной точки и далее воспользовавшись правилом треугольника сложения векторов (5). Но точное решение, очевидно, надо получить, воспользовавшись соотношениями между отрезками, на которые точки делят стороны треугольника…

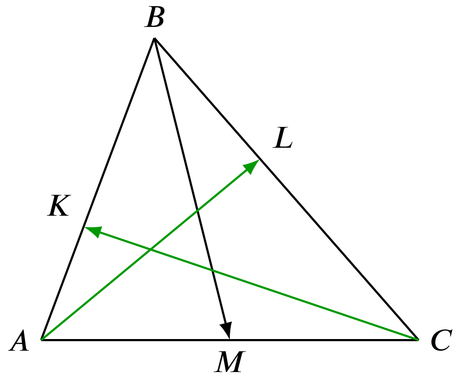

Рис. 4: Треугольник $\triangle ABC$ и точки M, K и L, делящие его стороны в заданном отношении.

Какие соотношения можно выписать для векторов? Можно представить $\overrightarrow{BM}$ как сумму чего-то:

$$\begin{cases} \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} \end{cases} \tag{2}$$

Из выписанных соотношений можно также получить, что

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) \tag{3}$$

Потом можно ещё выписать несколько соотношений с известными $\overrightarrow{CK}$ и $\overrightarrow{AL}$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AK} \\ \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CL} \end{cases} \tag{4}$$

Очевидно, из соотношений с $\overrightarrow{BM}$ (2) можно выразить $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{CL}$ через $\overrightarrow{BM}$. И потом подставить это в систему с $\overrightarrow{CK}$ и $\overrightarrow{AL}$. Получится система из двух уравнений с двумя неизвестными ($\overrightarrow{BM}$ и, например, $\overrightarrow{AC}$). Которую уже можно решить...

Или можно бы было рассмотреть такую систему с уравнениями, где в левой части стоят векторы $\overrightarrow{CK}$ и $\overrightarrow{AL}$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BK} \\ \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} \end{cases}$$

Её можно бы было привести к такому виду, чтоб справа среди неизвестных векторов оставались бы только, например, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BA}$. Найти эти векторы (из системы с двумя уравнениями это можно будет сделать) и далее воспользоваться соотношением (3)...

А вообще, стоит про себя на всякий случай понимать, что треугольник однозначно определяется длинами трёх его сторон (либо двумя сторонами и углом между ними). Обладая этими тремя значениями, дальше в треугольнике можно посчитать что угодно.

Два вектора, связанные с треугольником, по условию даны. Ещё точно известно соотношение между векторами, отложенными на сторонах треугольника ($\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \mathbf{0}$). Получается, есть три неизвестных (векторы — стороны треугольника) и три соотношения между ними. Откуда точно можно всё найти. □

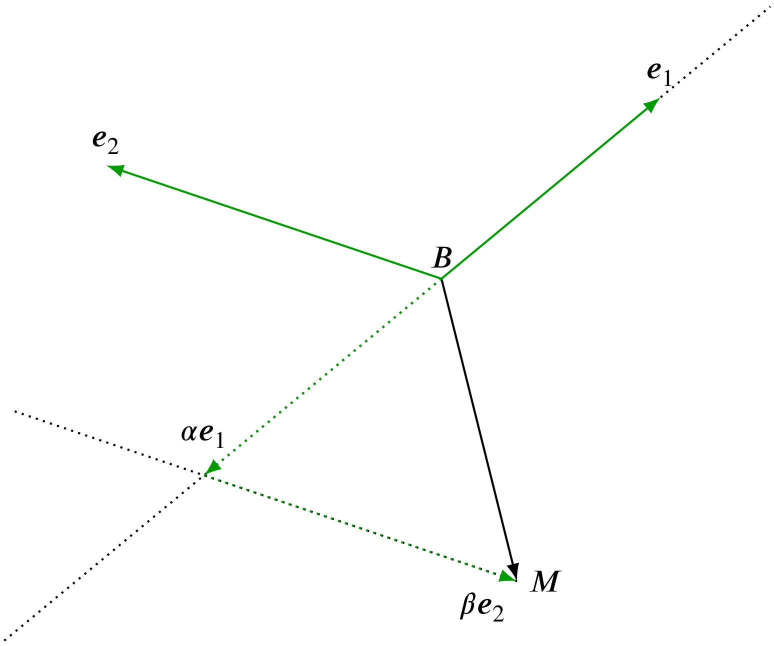

Рис. 5: Разложить вектор по базису можно с помощью правила треугольника сложения векторов.

2. Дополнение

2.1. Про матричное умножение

Почему матричное умножение введено именно так: $C_{m\times n} = A_{m\times p}B_{p\times n}$, $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kn}$, $1 \leq$ $\leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$?

Пусть есть ортонормированный[4] базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$. Повернём вектор $\boldsymbol{v}$ с компонентами $(1, 0)$ на угол 45 градусов против часовой стрелки (6).

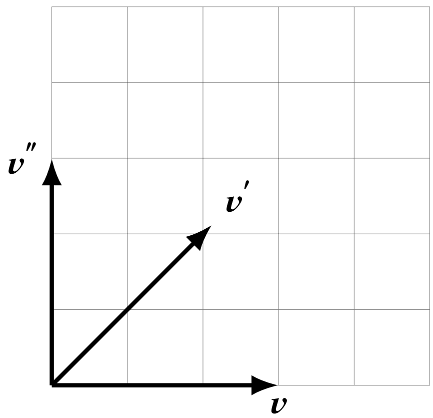

Рис. 6: Несколько поворотов вектора $\boldsymbol{v}$ на 45 градусов против часовой стрелки.

Получим вектор $\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$. Проверим, что матрица $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ как раз задаёт

[4] Вектора взаимно перпендикулярны и по длине равны единице 1.

нужное преобразование:

$$v' = A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Снова повернём вектор на угол 45 градусов против часовой стрелки. Должны получить вектор с компонентами $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$:

$$v'' = A\boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Какой матрицей задаётся поворот сразу на 90 градусов против часовой стрелки? Как из вектора $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ сразу получить вектор $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$?

Возведём матрицу, задающую поворот на 45 против часовой стрелки, в квадрат:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и умножим её на исходный вектор $\boldsymbol{v}$:

$$A^2\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, благодаря введённому матричному умножению, матрица композиции линейных преобразований получилась равна произведению матриц этих преобразований.

2.2. Ещё пара задач

Задача (1.51). *Доказать, что три отрезка, соединяющие середины скрещивающихся рёбер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.*

Решение. Пусть P, Q, R, H — середины соответственных рёбер тетраэдра (см. рисунок 7). Тогда $PH \parallel SB$ как средняя линия в $\triangle ASB$ и $QR \parallel SB$ как средняя линия в $\triangle CBS$. Поэтому $PH \parallel QR$. Аналогично $PQ \parallel HR$. Значит, $PQRH$ — параллелограмм, и точка пересечения диагоналей $O = PR \cap HQ$ делит их пополам.

Аналогично рассматривается случай с ещё одним отрезком, соединяющим середины SB и AC (он рассматривается в паре с уже упомянутым отрезком PR или HQ: они — диагонали в другом параллелограмме, ...). Точка их пересечения совпадёт с O, потому что у PR (или у HQ) всего одна середина.

Итого, все три интересующих отрезка пересекаются в одной точке и делятся ей пополам.

□

Задача (1.36). *Имея радиус-векторы вершин треугольника $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$, найти радиус-вектор центра окружности, вписанной в треугольник.*

Решение. Пусть O — точка пересечения биссектрис $\triangle ABC$ (то есть центр вписанной окружности). Пусть OH — перпендикуляр, опущенный из O к стороне AC (то есть $|OH| = r$, где r — радиус вписанной окружности) (8). Обозначим угол $\angle BAC$ за α: $\angle BAC = \alpha$.

Будем искать радиус вектор точки O как $\overrightarrow{O} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{AO}$: положение A известно, поэтому при таком пути решения надо получить $\overrightarrow{AO}$.

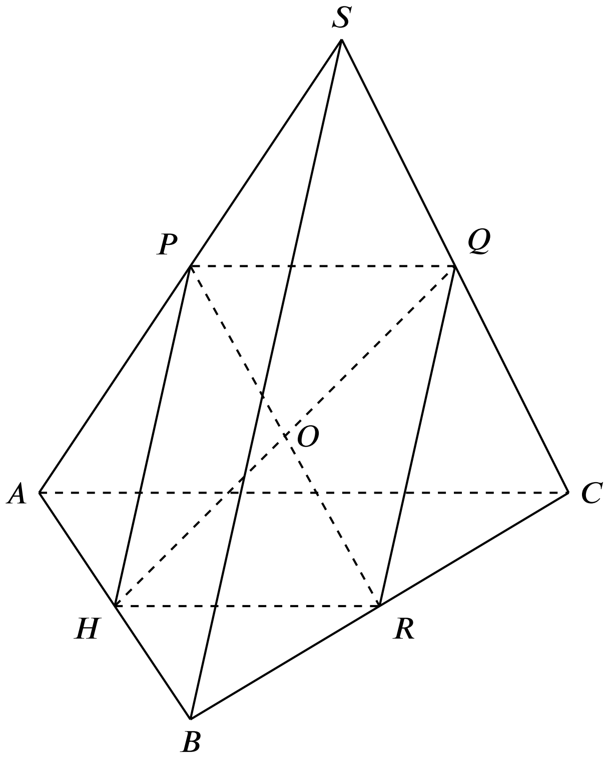

Рис. 7: Середины четырёх рёбер тетраэдра.

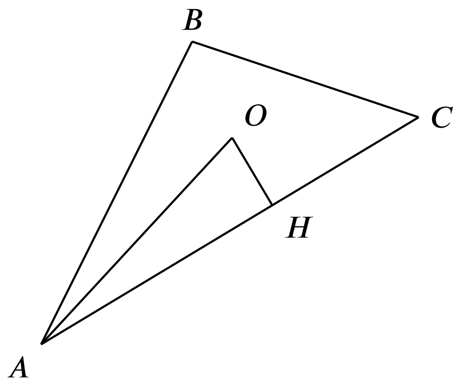

Рис. 8: Точка O пересечения биссектрис $\triangle ABC$.

Начнём с того, что вектор в направлении прямой AO (9) можно получить как

$$\boldsymbol{l} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|AC|} \tag{5}$$

Но вектор не нормирован: $|\boldsymbol{l}| \neq 1$. И сходу посчитать его модуль мы не можем (базис в задаче общий, не обязательно ортонормированный, поэтому скалярное произведение не выражается *только* через компоненты векторов). Но модуль можно так выразить через угол α с помощью теоремы синусов для треугольника APL (9):

$$\frac{AP}{\sin\angle ALP} = \frac{PL}{\sin\angle PAL}$$

или, переходя к обозначениям $\boldsymbol{l}$ и α и пользуясь тем, что $|PL| = 1$ по построению:

$$\frac{|\boldsymbol{l}|}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

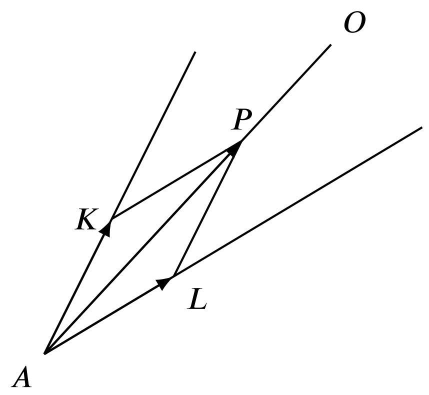

Рис. 9: Вектор $\boldsymbol{l} = \overrightarrow{AP}$ в направлении прямой AO — сумма единичных векторов $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AL}$, направленных соответственно вдоль сторон AB и AC треугольника ABC.

В итоге получаем

$$|\boldsymbol{l}| = \frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} \tag{6}$$

Рассмотрим $\triangle AOH$ (8). Сторона AO:

$$AO = \frac{OH}{\sin\angle OAH} = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Вектор $\overrightarrow{AO}$:

$$\overrightarrow{AO} = \frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|}\cdot|AO| \overset{(6)}{=} \frac{\boldsymbol{l}}{\sin\alpha\Big/\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \boldsymbol{l}\cdot\frac{r}{\sin\alpha} = \bigstar$$

Радиус r можно выразить через формулы для нахождения площади треугольника $\triangle ABC$:

$$S_{\triangle ABC} = pr = \frac{1}{2}AC\cdot AB\cdot\sin\alpha \Rightarrow \frac{bc\sin\alpha}{2p}$$

где p — полупериметр $\triangle ABC$, $b\equiv AC$, $c\equiv AB$.

И тогда, возвращаясь к нахождению вектора $\overrightarrow{AO}$:

$$\bigstar = \boldsymbol{l}\cdot\frac{r}{\sin\alpha} = \boldsymbol{l}\cdot\frac{bc}{2p} = \blacktriangledown$$

Далее можно подставить вместо $\boldsymbol{l}$ его выражение через вектора $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A$ и $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A$ (5) и вместо p его выражение через длины сторон $\triangle ABC$ ($BC\equiv a$):

$$\blacktriangledown = \left(\frac{\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A}{b} + \frac{\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A}{c}\right)\cdot\frac{bc}{a+b+c} = \frac{c(\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A) + b(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A)}{a+b+c}$$

И в итоге для радиуса-вектора центра вписанной окружности O получаем выражение:

$$\boldsymbol{r}_O = \boldsymbol{r}_A + \overrightarrow{AO} = \frac{a\boldsymbol{r}_A + b\boldsymbol{r}_B + c\boldsymbol{r}_C}{a+b+c} = \frac{|\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_B|\boldsymbol{r}_A + |\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A|\boldsymbol{r}_B + |\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B|\boldsymbol{r}_C}{|\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_B| + |\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A| + |\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B|}$$

□