Семинар 1

Алексеев Василий

1 + 7 сентября 2020

Содержание

1. Матрицы и определители 2-го и 3-го порядков

1.1. Матрицы

Матрица A размера $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

1.1.1. Операции с матрицами

Определение 1.1 (Сложение матриц)**.** Пусть $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Суммой $A + B$ называется матрица $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, такая что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Определение 1.2 (Умножение матрицы на число)**.** Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Произведением матрицы A на число α называется матрица C, такая что $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Замечание. Матрицы $\mathbb{R}^{n \times n}$ с введённой операцией сложения и умножения на числа из $\mathbb{R}$ образуют линейное пространство[1]:

1. $A + B = B + A$, $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (коммутативность сложения).
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$, $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (ассоциативность сложения).
3. $\exists 0_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n} : 0_{n \times n} + A = A$, $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
4. $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}\ \exists -A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A + (-A) = 0_{n \times n}$.
5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (ассоциативность умножения на скаляр).
6. $1 \cdot A = A$, $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
7. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (дистрибутивность умножения матрицы на число относительно сложения чисел).
8. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (дистрибутивность умножения матрицы на число относительно сложения матриц).

Определение 1.3 (Умножение матриц)**.** Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Тогда матрица C называется произведением матриц A и B, если

$$\begin{cases} c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \\ 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{cases}$$

и обозначается $C = AB$.

[1] wikipedia.org/wiki/Vector_space

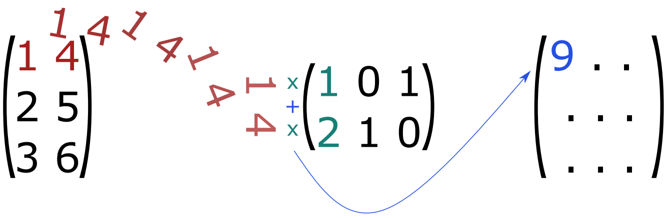

Рис. 1: Иллюстрация умножения матриц.

Задача (15.5(7))**.**

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 1\cdot 1 & 3\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 1 & 2\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Задача (T1*)**.** *Для матриц A, B, C определены произведения AB, AC, BC. Всегда ли определено произведение $BB = B^2$?*

Решение. Обозначим размерности (число строк и число столбцов) в матрицах A, B, C за (m_a, n_a), (m_b, n_b), (m_c, n_c) соответственно. Тогда условие задачи (возможность умножения матриц) можно переписать так:

$$\begin{cases} m_a = n_b \\ m_a = n_c \\ m_b = n_c \end{cases}$$

И получаем

$$m_b = n_c = m_a = n_b \Rightarrow m_b = n_b$$

Поэтому произведение B^2 также определено. □

Задача (15.11(9))**.** *Вычислить матрицу в степени (произведение нескольких одинаковых матриц)*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots\dots\dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^n$$

Решение. Начинаем умножать и видим закономерность:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots\dots\dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots\dots\dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots\dots\dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots\dots\dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^{n-2}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots\dots\dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots\dots\dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^{n-2}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots\dots\dots & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots\dots\dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^{n-3}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots\dots\dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^{n-n} = E_{n\times n}$$

□

И ещё пара небесполезных концепций из мира матриц.

Определение 1.4 (Транспонирование матрицы)**.** Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Тогда транспонированной по отношению к матрице A матрицей называется такая матрица , что $c_{ij} = a_{ji}$. Транспонированная матрица обозначается A^T.

Определение 1.5 (След матрицы)**.** Следом матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется сумма элементов, находящихся на главной диагонали $\{a_{ij} \mid i = j, i = 0, \dots, n\}$:

$$\begin{cases} \mathrm{Sp}: \ \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} \\ \mathrm{Sp}: \ A \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} \end{cases}$$

У следа есть несколько возможных обозначений. Например, можно ещё писать $\mathrm{Tr}\, A$.

1.2. Определитель матрицы

Об определителе можно думать как о числовой функции на множестве матриц, обозначаемой det или $|\cdot|$

$$\det: \ \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$

и обладающей некоторыми свойствами. Конкретное определение det можно вводить по-разному (через свойства функции, или даже через конкретную формулу вычисления по элементам матрицы 1). Мы пока опустим строгое определение det. Так как мы делаем фокус на решении задач, то нам не так важно последовательное изложение теории. Поэтому будем считать, что определитель "просто есть", как-то задан. И рассмотрим, как его вычислять для квадратных матриц размерности 2, 3, и пару свойств определителя (некоторые из которых следуют из определения, которое мы опускаем).

Пример. Определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Пример. Определитель третьего порядка (разложение по первой строке):

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
&= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1
\end{aligned}$$

Задача (14.7(3))**.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \Big(1 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2)\Big) - 2 \cdot \Big(2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2)\Big) + 2 \cdot \Big(2 \cdot (-2) - 2 \cdot 1\Big) = -3 - 12 - 12 = -27$$

□

Пример. Определитель единичной матрицы:

$$\det E = 1^n = 1$$

Теорема 1.1. *Определитель транспонированной матрицы*

$$\det A^T = \det A$$

Теорема 1.2. *Определитель произведения двух квадратных матриц:*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Определение 1.6 (Вырожденная матрица[2])**.** Матрица A называется вырожденной, если $\det A = 0$. В противном случае матрица A называется невырожденной.

[2]Определение вырожденной матрицы можно вводить по-разному. Ещё возможный вариант: квадратная матрица называется вырожденной, если её строки $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1}^n$ линейно зависимы. Строки линейно зависимы — когда существует нетривиальная линейная комбинация строк, которая даёт нулевую строку: $\sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 > 0$.

Теорема 1.3. *Определитель обратной к* невырожденной *матрице*

$$\det A^{-1} = \left(\det A\right)^{-1}$$

Теорема 1.4 (Формула полного разложения определителя)**.** *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Тогда определитель* $\det A$ *матрицы равен*

$$\det A = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)} (-1)^{N(i_1,\ldots,i_n)} a_{1i_1} \ldots a_{ni_n} \tag{1}$$

где $N(i_1, \ldots, i_n)$ *— число нарушений порядка в перестановке чисел* $i_1, \ldots, i_n$[3]. *Сумма в формуле берётся по всем перестановкам чисел* $1, \ldots, n$[4].

Пример. Вспомним формулу вычисления определителя для матрицы размера 3:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1$$

Элементы в каждом слагаемом упорядочены по номеру столбца. Поэтому посмотрим на число беспорядков по строкам (неважно, как считать беспорядки, по строкам или по столбцам, потому что $\det A = \det A^T$). В первом слагаемом: $N(1, 2, 3) = 0$. Во втором: $N(1, 3, 2) = 1$ (тройка и двойка). В третьем: $N(2, 1, 3) = 1$ (двойка и единица). В четвёртом: $N(3, 1, 2) = 2$ (два беспорядка с тройкой и единицей и тройкой и двойкой). В пятом: $N(2, 3, 1) = 1+1 = 2$ (для двойки и единицы и для тройки и единицы). В шестом: $N(3, 2, 1) = 2 + 1 = 3$ (тройка-двойка, тройка-единица, двойка-единица).

1.2.1. Свойства определителя

Теорема 1.5. *Некоторые свойства определителя (матрицы в формулах ниже представляются столбцами* $\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^n$*):*

1. *Линейность по столбцу (строке) — полилинейность:*

$$\begin{cases} \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \underbrace{\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{a}_i}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{p}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) + \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{q}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\ \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \underbrace{\alpha\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{a}_i}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \alpha \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{p}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \end{cases} \tag{2}$$

2. *При перестановке двух столбцов (строк) матрицы её определитель меняет знак (кососимметричность, антисимметричность по столбцам/строкам):*

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = -\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \tag{3}$$

3. *Если два столбца (две строки) матрицы совпадают, то её определитель равен нулю:*

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{p}, \ldots, \boldsymbol{p}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = 0 \tag{4}$$

Свойства можно доказать как следствия теоремы 1.4.

И ещё пара более частных утверждений, которые следуют/являются подслучаями свойств выше:

[3] Нарушение порядка — когда правее большего элемента стоит меньший элемент: $i_k > i_s$, но $k < s$.

[4] Например, перестановки чисел 1, 2, 3: (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).

- Общий множитель элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя:
$$\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \alpha\boldsymbol{p}, \dots, \boldsymbol{a}_n) = \alpha \cdot \det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{p}, \dots, \boldsymbol{a}_n)$$
- К любой строке (столбцу) матрицы можно прибавлять линейную комбинацию других строк (столбцов) — определитель при этом не изменится:
$$\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}} \alpha_j \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_n)$$
- При вычислении определителя матрицы вида αA скаляр α можно выносить за знак $\det$ следующим образом:
$$\det \alpha A = \alpha^n \det A$$

Задача (14.24(1))**.** *Вычислить определитель порядка n*
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

Решение. Раскладываем определитель по первому столбцу:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Рассмотрим первый из определителей во второй части равенства выше. Пользуясь свойствами определителя, его можно посчитать так:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \color{cyan}{0} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \color{cyan}{0} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1^{n-1} = 1$$

Если обозначит искомый определитель как Δ_n, то второй из определителей в первой формуле есть просто Δ_{n-1}. Итого,
$$\Delta_n = 1 - \Delta_{n-1}$$

Посмотрим на Δ_n при $n = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned}
&\Delta_1 = 1\\
&\Delta_2 = 1 - 1 = 0\\
&\Delta_3 = 1 - 0 = 1\\
&\Delta_4 = 1 - 1 = 0\\
&\Delta_5 = 1 - 0 = 1\\
&\dots
\end{aligned}$$

Очевидно[5],

$$\Delta_n = \begin{cases} 1, 2 \nmid n \\ 0, 2 \mid n \end{cases} \equiv [2 \nmid n]^{6}$$

□

2. Системы линейных уравнений. Правило Крамера

Система m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_n \end{cases}$$

В матричном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Или так:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Определение 2.1 (Решение системы).

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$$

Определение 2.2. Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если у неё нет решений.

Определение 2.3. Говорят, что система B следует из системы A, если множество решений B содержит множество решений A 2.

Теорема 2.1. *Пусть число уравнений в системе m равно числу неизвестных n. Тогда если* $\det A \neq 0$, *то система $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ имеет решение, и притом только одно.*

Теорема 2.2 (Правило Крамера). *Пусть число уравнений в системе m равно числу неизвестных n. Тогда если* $\det A \neq 0$, *то*

$$\begin{cases} x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta} \\ \Delta \equiv \det A \\ \Delta_i \equiv \det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{a}_n) \end{cases}$$

[5] $a \,\vdots\, p \equiv p \mid a$

[6] Встречаются такие более короткие записи выражения индикатора (либо 0, либо 1 в зависимости от некоторого условия): $[\cdot]$, $I[\cdot]$. Например, “b равно 3, если a равно 2; иначе b равно 17.5” можно записать так: $b = 3 \cdot [a = 2] + 17.5 \cdot [a \neq 2]$.

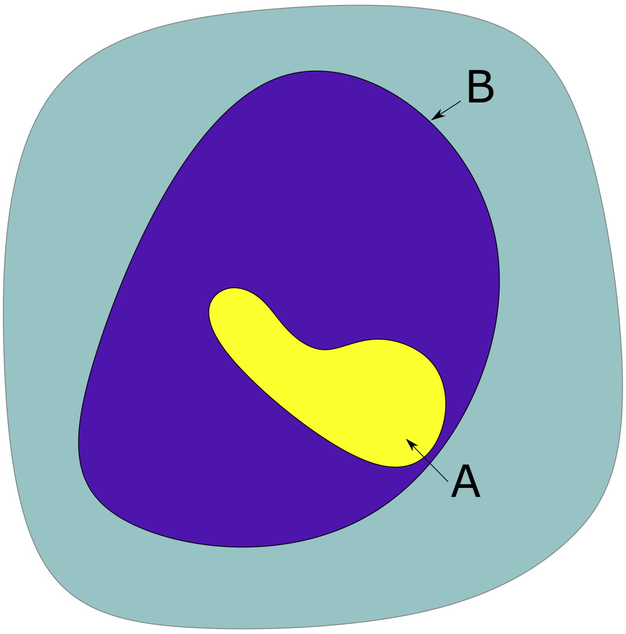

Рис. 2: Множество решений A содержится во множестве решений B.

Задача (17.2(4)).

$$\begin{cases} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} = -1$$

$$\Delta_1 = \det \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 \\ 10 & 7 & 2 \\ 9 & 2 & -4 \end{pmatrix} = -3 \Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -2 & 10 & 2 \\ 3 & 9 & -4 \end{pmatrix} = -2 \Rightarrow x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\Delta_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -2 & 7 & 10 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix} = -1 \Rightarrow x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

3. Дополнение

3.1. Определения определителя

Как отмечалось выше, существует нескольно эквивалентных определений det. Один из способов — с помощью формулы (1). Приведём далее ещё пару.

Определение 3.1 (Через свойства[7]). Функция $f: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ называется определителем (детерминантом) и обозначается det, если

- Функция f является линейным однородным многочленом от элементов любой строки:
  $$\begin{cases} f(A) = h_1 a_{i1} + \ldots + h_n a_{in} \\ 1 \leq i \leq n \\ h_j = h_j(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n),\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$
  то есть коэффициенты в разложении по элементам строки не зависят от этой самой строки.
- Значение f на вырожденной матрице[8] равно нулю 0.
- Значение f на единичной матрице $E_{n\times n}$ равно единице 1.

Определение 3.2 (Через формулу, вариант 2: рекурсивный). Положим определитель матрицы из одного элемента равным этому самому элементу

$$\det\left(a\right) \equiv a$$

Пусть d_{ij} — определитель подматрицы D_{ij} матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, которая получается при вычёркивании i-ой строки и j-го столбца. Тогда

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} d_{ij}$$

где i — любая строка матрицы A (не важно, какая — значение функции det не изменится).

Определение 3.3 (Через свойства, вариант 2[9]). Функция $f: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ называется определителем (детерминантом) и обозначается det, если

- Функция f полилинейна по строкам матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (2).
- Функция f кососимметрична по строкам матрицы A (3).
- Значение f на единичной матрице $E_{n\times n}$ равно единице 1.

Определение 3.4 (Через свойства, вариант 3[10]). Функция $f: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ называется определителем (детерминантом) и обозначается det, если

- Функция f полилинейна по строкам матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (2).
- Значение f на матрице с двумя одинаковыми строками равно нулю 0 (4).
- Значение f на единичной матрице $E_{n\times n}$ равно единице 1.

[7] Беклемишев Д. В. «Курс аналитической геометрии и линейной алгебры»
[8] У которой строки линейно зависимы
[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Determinant
[10] Hans Schneider, George Phillip Barker. «Matrices and Linear Algebra»

3.2. Задача про определитель `np.arange(`$n*n$`).reshape(`$n, -1$`)`

Посчитаем определитель матрицы $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{smallmatrix}\right)$:

$$\det\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} \overset{(3)=(3)-(2)}{=} \det\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\3&3&3\end{pmatrix} \overset{(2)=(2)-(1)}{=} \det\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix} = 0$$

так как определитель матрицы с двумя одинаковыми строками равен нулю (4).

Рассмотрим более общий случай (для матрицы произвольной размерности):

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix}1&2&3&\dots&n\\ n+1&n+2&n+3&\dots&2n\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ (n-2)\cdot n+1&(n-2)\cdot n+2&(n-2)\cdot n+3&\dots&(n-1)\cdot n\\ (n-1)\cdot n+1&(n-1)\cdot n+2&(n-1)\cdot n+3&\dots&n\cdot n\end{pmatrix}\\
\overset{(n)=(n)-(n-1)}{=}&\det\begin{pmatrix}1&2&3&\dots&n\\ n+1&n+2&n+3&\dots&2n\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ (n-2)\cdot n+1&(n-2)\cdot n+2&(n-2)\cdot n+3&\dots&(n-1)\cdot n\\ n&n&n&\dots&n\end{pmatrix}\\
\overset{(2)=(2)-(1)}{=}&\det\begin{pmatrix}1&2&3&\dots&n\\ n&n&n&\dots&n\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ (n-2)\cdot n+1&(n-2)\cdot n+2&(n-2)\cdot n+3&\dots&(n-1)\cdot n\\ n&n&n&\dots&n\end{pmatrix}\\
=\quad&0
\end{aligned}$$

И в общем случае определитель равен нулю!

При этом стоит отметить, что для $n = 2$ и $n = 1$ определитель всё-таки отличен от нуля:

$$\det\begin{pmatrix}1\end{pmatrix} = 1$$

$$\det\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} = 1\cdot 4 - 3\cdot 2 = -2$$

□