Семинар 4

Алексеев Василий

22 сентября 2022

Содержание

1 Скалярное произведение **1**

2 Смешанное и векторное произведения **4**

2.1 Ориентированное пространство 4

2.2 Смешанное произведение 5

2.3 Векторное произведение 7

2.4 Задачи 9

3 Дополнение **14**

3.1 Ещё пара задач про скалярное произведение 14

3.2 Ещё пара задач про векторное и смешанное произведения 17

1. Скалярное произведение

Определение 1.1. Скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ненулевых[1] векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ определяется следующим образом:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \equiv |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi \tag{1}$$

где $|\boldsymbol{a}|$ и $|\boldsymbol{b}|$ — модули векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а ϕ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (тот, который не превосходит π). В случае, если хотя бы один из пары векторов нулевой, скалярное произведение этих векторов полагается равным нулю.

Отметим несколько свойств скалярного произведения:

- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geq 0$. При этом $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.
- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ — симметричность.
- Линейность по первому аргументу:

$$\begin{cases} (\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}), & \alpha \in \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \end{cases}$$

Первые свойства следуют из определения. Вынесение множителя за знак скалярного произведения тоже "в целом понятно" (можно вывести из определения). Докажем последнее свойство.

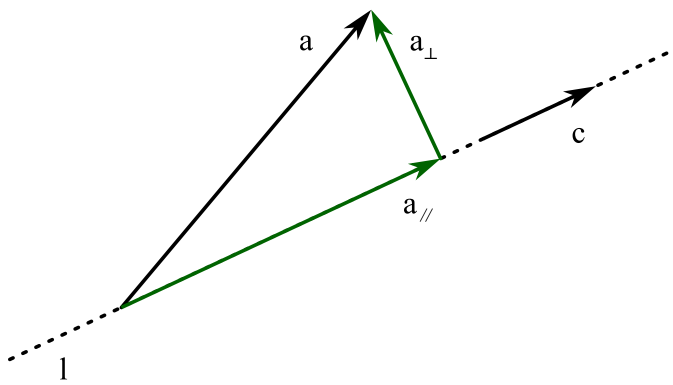

Рис. 1: Ортогональная векторная проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{c}$.

Начнём с того, что при заданном направлении $\boldsymbol{c}$ любой вектор раскладывается в сумму двух (1):

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\|} + \boldsymbol{a}_{\perp}$$

где $\boldsymbol{a}_{\|}$ — вектор, параллельный $\boldsymbol{c}$, и $\boldsymbol{a}_{\perp}$ — вектор, перпендикулярный $\boldsymbol{c}$. Компонента $\boldsymbol{a}_{\|}$ называется *ортогональной векторной проекцией* вектора $\boldsymbol{a}$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{c}$, и может обозначаться так:

$$\pi_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}) \equiv \boldsymbol{a}_{\|}$$

Кроме векторной проекции, есть ещё понятие скалярной проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на направление вектора $\boldsymbol{c}$:

$$\pi_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}) \equiv |\boldsymbol{a}_{\|}| \cdot \begin{cases} +1 & \text{если } \boldsymbol{a}_{\|} \upuparrows \boldsymbol{c} \\ -1 & \text{если } \boldsymbol{a}_{\|} \uparrow\downarrow \boldsymbol{c} \end{cases}$$

[1] Ненулевых, чтобы можно было говорить об угле между векторами.

Будем обозначать векторную и скалярную проекции одинаково. (Из контекста должно быть понятно, какая имеется в виду.)

Спроецируем теперь вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{c}$ (2):

$$\pi_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi$$

где ϕ — угол между вектором $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и вектором $\boldsymbol{c}$.

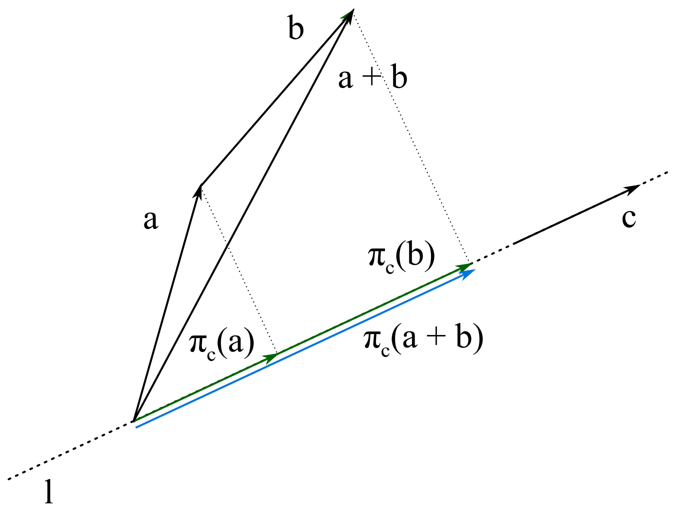

Рис. 2: Ортогональные векторные проекции векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{c}$.

Но проекция вектора, являющегося суммой нескольких векторов, равна сумме проекций этих векторов:

$$\pi_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \pi_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}) + \pi_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{b})$$

поэтому

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi = |\boldsymbol{a}| \cdot \cos\phi_1 + |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi_2$$

где ϕ_1 и ϕ_2 — углы, которые образуют векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ с вектором $\boldsymbol{c}$ (считаем, что $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ ненулевые). Умножая обе части последнего равенства на модуль вектора $\boldsymbol{c}$, получаем то, что хотели доказать:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

□

Задача (2.21)**.** *Длины базисных векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ равны соответственно 3, $\sqrt{2}$ и 4. Углы между векторами: $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \angle(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 45^\circ$, $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = 60^\circ$.*

Надо вычислить длины сторон и углы параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}(1, -3, 0)$ и $\boldsymbol{b}(-1, 2, 1)$, заданных своими координатами в указанном базисе.

Решение. Длины сторон можно посчитать через скалярные произведения:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}, \quad |\boldsymbol{b}| = \sqrt{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})}$$

Угол между сторонами (какой-нибудь один из двух) — тоже:

$$\cos\alpha = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

Получается, чтобы решить задачу, надо просто посчитать три скалярных произведения. Базис “кривой”, поэтому считать надо “по-честному”, отталкиваясь от базовой формулы. Например, модуль $\boldsymbol{a}$ можно посчитать так:

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}|^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2) \cdot (\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) - 3(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) - 3(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + 9(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)\\ = \boldsymbol{e}_1^2 - 6(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + 9\boldsymbol{e}_2^2 = 9 - 18 + 18 = 9 \Rightarrow |\boldsymbol{a}| = 3\end{aligned}$$

Аналогично, для модуля $\boldsymbol{b}$:

$$|\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = (-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)^2 = \ldots = 25$$

И скалярное $\boldsymbol{a}$ на $\boldsymbol{b}$, чтоб потом найти косинус угла:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = \ldots = -12$$

Косинус одного из углов между сторонами параллелограмма:

$$\cos\alpha = \frac{-12}{3 \cdot 5} = -\frac{4}{5}$$

□

В случае же **ортонормированного** базиса формулы с применением скалярных произведений упрощаются:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \tag{2}$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

$$\cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}$$

Задача (2.24)**.** *Даны два вектора* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$*, причём* $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$*. Чему равна ортогональная проекция* $\boldsymbol{b}$ *на направление, определяемое вектором* $\boldsymbol{a}$*?*

Решение. Скалярная ортогональная проекция $\boldsymbol{b}$ на направление, задаваемое $\boldsymbol{a}$:

$$\pi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{b}| \cos\angle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$$

Векторная проекция:

$$\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{b}| \cos\angle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \cdot \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

то есть скалярная проекция, умноженная на единичный вектор в направлении $\boldsymbol{a}$. Выражение можно записать по-другому, если домножить числитель и знаменатель на $|\boldsymbol{a}|$:

$$\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}) = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}$$

Векторная проекция $\boldsymbol{b}$ сонаправлена с $\boldsymbol{a}$, если скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) > 0$ и противоположно направлена $\boldsymbol{a}$ в случае, если $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) < 0$. Если $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$, то векторная проекция — нулевой вектор. □

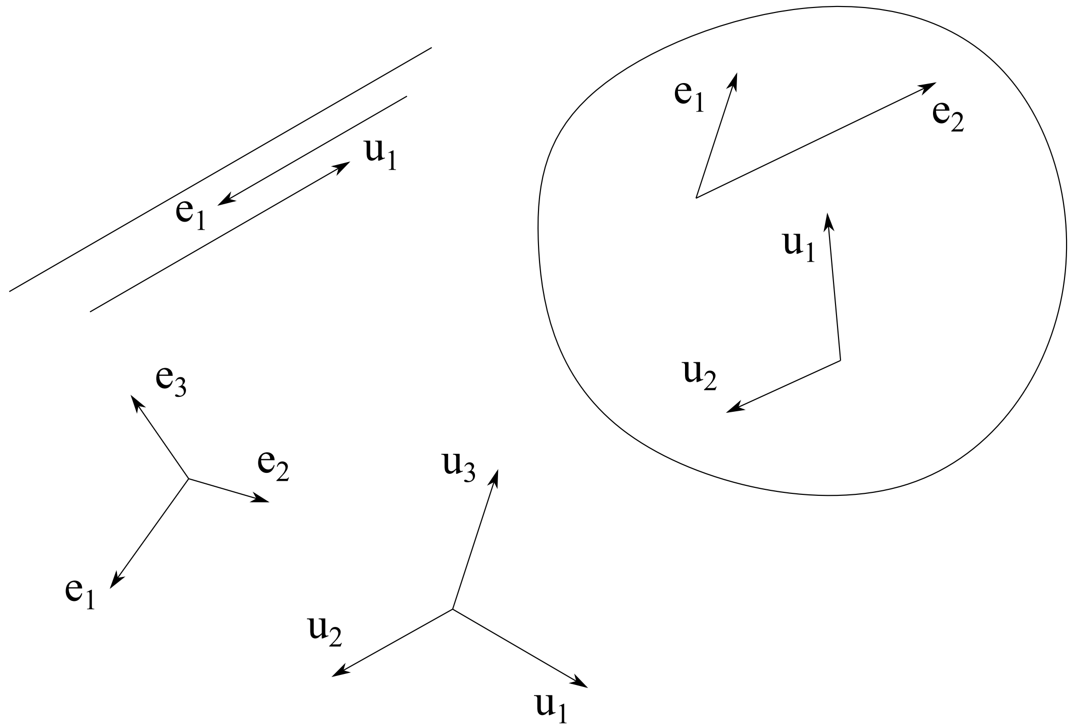

Рис. 3: Разные классы базисов в одно-, дву- и трёхмерном пространствах.

2. Смешанное и векторное произведения

2.1. Ориентированное пространство

На прямой все векторы делятся на два класса: направленные в одну сторону вдоль прямой и в противоположную (3). На плоскости все упорядоченные пары неколлинеарных векторов делятся на два класса: пары, где поворот от первого вектора ко второму по наименьшему углу совершается против часовой стрелки, и пары, где этот поворот совершается по часовой стрелке (3). И в трёхмерном пространстве все упорядоченные тройки некомпланарных векторов делятся на два класса: те, где поворот от первого базисного вектора ко второму по наименьшему углу происходит против часовой стрелки, если смотреть со стороны третьего базисного вектора (*правые* базисы), и те, где этот поворот происходит по часовой стрелке (*левые* базисы) (3).

Определение 2.1. Ориентированное пространство — пространство, в котором выбран класс базисов[2].

В ориентированном пространстве можно говорить о длине, площади и объёме со знаком.

Так, в одномерном пространстве, если рассматриваемый вектор направлен так же, как и базисы в выбранном классе, то его длина считается большей нуля. В противном случае — меньше нуля. В двумерном пространстве, если параллелограмм построен на *упорядоченной* паре векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то его площадь со знаком $S_\pm$ можно считать большей нуля, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют базис, относящийся к выбранному (положительному) классу (4). Иначе — меньше нуля. И в трёхмерном пространстве, если параллелепипед построен на *упорядоченной* тройке векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, которые в таком же порядке образуют базис из выбранного (положительного) класса, то объём со знаком $V_\pm$ такого параллелепипеда будет

[2] В общем случае пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ базисы тоже образуют два класса.

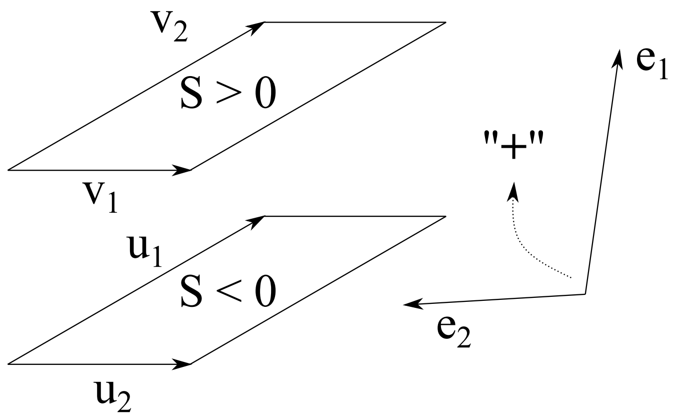

Рис. 4: Площадь ориентированного параллелограмма.

больше нуля. Иначе, если тройка $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ не принадлежит положительному классу базисов, то объём $V_{\pm}$ параллелепипеда будет меньше нуля.

В трёхмерном пространстве положительными выбраны правые базисы.

Упомянув трёхмерное пространство, стоит ещё раз вернуться к вопросу об ориентации плоскости. Выбор ориентации в 3D ничего не говорит об ориентации на конкретной плоскости. Задать ориентацию на плоскости можно

- В 2D — просто сказав, в какую сторону поворот от $\boldsymbol{e}_1$ к $\boldsymbol{e}_2$ по наименьшему углу считается положительным.

- В 3D — выбрав вектор нормали $\boldsymbol{n}$ к плоскости. Тогда положительный базис на плоскости — тот, который с выбранной нормалью составляет положительную тройку в пространстве (порядок $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{n}$ или $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ — не важно).

- Как в 2D, так и в 3D: просто выбрав упорядоченную пару неколлинеарных векторов и сказав, что этот базис положительный (тогда и все упорядоченные пары векторов из этого же класса — тоже положительные).

2.2. Смешанное произведение

Определение 2.2. В ориентированном пространстве смешанное произведение трёх некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ полагается равным объёму ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \equiv V_{\pm}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

Если вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ компланарны, то их смешанное произведение полагается равным нулю.

Отметим, что в смешанном произведении можно переставлять сомножители. Но при этом может поменяться знак смешанного произведения (если меняется класс тройки):

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = \ldots = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \tag{3}$$

Теорема 2.1 (О связи смешанного и скалярного произведения). *Для любой пары векторов* $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *существует единственный вектор* $\boldsymbol{d}$*, такой что для любого вектора* $\boldsymbol{a}$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})$$

Доказательство. Найдём такой вектор $\boldsymbol{d}$ для произвольной тройки векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и покажем, что он единственен и не зависит от $\boldsymbol{a}$.

Пусть $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ неколлинеарны. Пусть также $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ некомпланарны. Отложим вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ от одной точки (5).

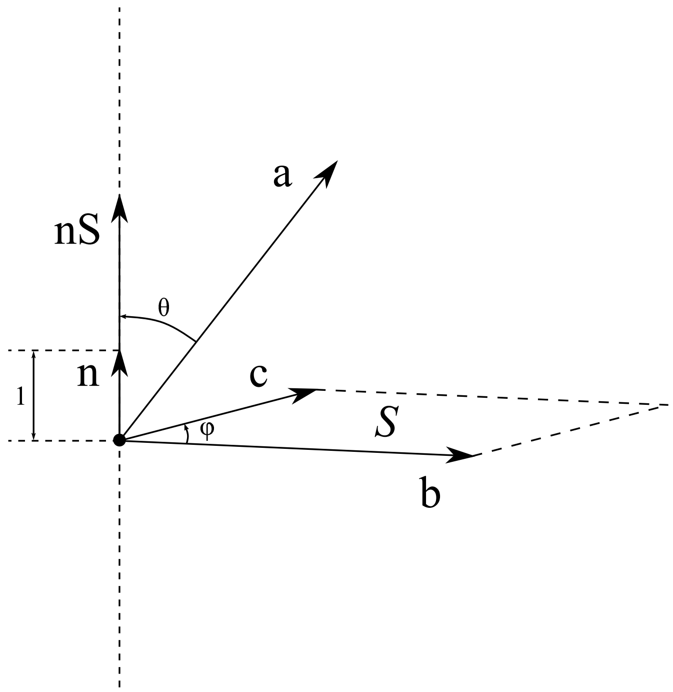

Рис. 5: Некомпланарные векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$; единичный вектор нормали $\boldsymbol{n}$ к плоскости векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, такой что тройка $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{n}$ положительная (правая); S — площадь параллелограмма, построенного на $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

Рассмотрим пару векторов $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Отложим единичный вектор нормали $\boldsymbol{n}$ к плоскости векторов $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ так, чтобы тройка векторов $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{n}$ была бы положительной. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ (площадь без знака) равна

$$S = |\boldsymbol{b}| \cdot |\boldsymbol{c}| \cdot \sin\phi$$

где ϕ — угол между векторами $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Тогда $\boldsymbol{d} \equiv S \cdot \boldsymbol{n}$ — вектор, направленный вдоль $\boldsymbol{n}$ и по модулю равный площади основания параллелепипеда, где лежат вектора $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. И для объёма параллелепипеда (без знака) получаем:

$$V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = S \cdot \big||\boldsymbol{a}| \cdot \cos\theta\big|$$

где $\big||\boldsymbol{a}| \cdot \cos\theta\big|$ — высота. При этом можно заметить, что если "убрать модуль", то получается как раз объём со знаком:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) = S \cdot |\boldsymbol{a}| \cdot \cos\theta = V_{\pm}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

так как именно от того, со-направлены или противоположно направлены вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{d}$, зависит, будет ли $V_{\pm}$ больше или меньше нуля (тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}$ по построению положительная; тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ может быть как положительной, так и отрицательной). Таким образом, получаем, что

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})$$

Если же векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны, то объём параллелепипеда будет равен нулю, но тогда и $\boldsymbol{d} \perp \boldsymbol{a}$.

Если же вектора $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ коллинеарны, то смешанное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ также будет равно нулю, и вектор $\boldsymbol{d}$ можно взять равным нулю.

Покажем, что такой вектор $\boldsymbol{d}$, что $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})$, $\forall \boldsymbol{a}$ единственен. Допустим противное: пусть существует вектор $\boldsymbol{d}_1$, такой что $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})$ и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}_1)$, $\forall \boldsymbol{a}$. Но тогда $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}_1)$, и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d} - \boldsymbol{d}_1) = 0$. То есть вектор $\boldsymbol{d} - \boldsymbol{d}_1$ перпендикулярен любому вектору пространства. Поэтому $\boldsymbol{d} - \boldsymbol{d}_1 = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_1$. □

Введённый выше вектор $\boldsymbol{d}$ называется *векторным произведением* векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

2.3. Векторное произведение

Определение 2.3. Векторным произведением неколлинеарных векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называется вектор $\boldsymbol{d}$, такой что

- Модуль вектора $\boldsymbol{d}$ равен
$$|\boldsymbol{d}| = |\boldsymbol{b}| \cdot |\boldsymbol{c}| \cdot \sin\alpha$$
где α — угол между векторами $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

- Вектор $\boldsymbol{d}$ перпендикулярен как вектору $\boldsymbol{b}$, так и вектору $\boldsymbol{c}$:
$$\boldsymbol{d} \perp \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{d} \perp \boldsymbol{c}$$

- Вектор $\boldsymbol{d}$ образует *положительную тройку* $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ вместе с исходными $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$[3].

Если же векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ коллинеарны[4], то их векторное произведение полагается равным нулю.

Векторное произведение $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ может обозначаться как $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ или $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$.

Таким образом,
$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]) \tag{4}$$

Рассмотрим некоторые свойства векторного произведения.

Так, векторное произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на самого себя равно нулю, так как $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{a}$:
$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{0}$$

Векторное произведение обладает свойством антикоммутативности. Так, для любых $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$
$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$$
так как первый и второй вектора меняются местами, и направление поворота от первого вектора ко второму меняется на противоположное (6).

И, так же, как и скалярное произведение, векторное произведение линейно по первому аргументу:
$$[\beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}] = \beta_1 [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}] + \beta_2 [\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}]$$
Или, что то же самое:
$$\begin{cases} [\beta \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \beta [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] \\ [\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}] \end{cases}$$

[3] При выбранной правой ориентации пространства тройка $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ должна быть правой.

[4] В этом случае не получится использовать “связанный с положительной тройкой” пункт определения.

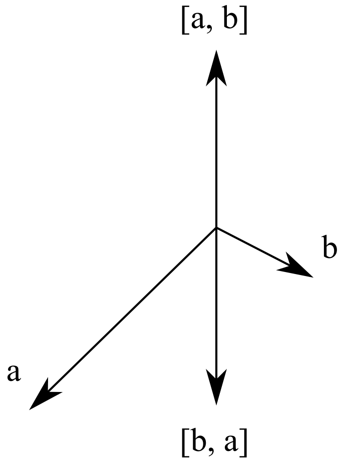

Рис. 6: Векторное произведение антикоммутативно.

Доказательство. Докажем это свойство. Надо “в нужное время вставлять и убирать квадратные скобки” и пользоваться линейность скалярного произведения:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}, [\beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}]) &\overset{(4)}{=} (\boldsymbol{a}, \beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}) \\
&\overset{(3)}{=} -(\beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \\
&\overset{(4)}{=} -(\beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]) \\
&= -\beta_1(\boldsymbol{b}_1, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]) - \beta_2(\boldsymbol{b}_2, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]) \\
&\overset{(4)}{=} -\beta_1(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \beta_2(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \\
&\overset{(3)}{=} \beta_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}) + \beta_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}) \\
&\overset{(4)}{=} \beta_1(\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}]) + \beta_2(\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}]) = (\boldsymbol{a}, \beta_1[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}] + \beta_2[\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}])
\end{aligned} \tag{5}$$

□

Теперь можно выразить векторное произведение между произвольными двумя векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ пространства, которые заданы компонентами в некотором базисе $e = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Пусть

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = a_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + a_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + a_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{b} = b_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + b_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + b_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + a_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + a_3 \cdot \boldsymbol{e}_3) \times (b_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + b_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + b_3 \cdot \boldsymbol{e}_3) \\
&= (a_2 b_3 - a_3 b_2)[\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] + (a_1 b_3 - a_3 b_1)[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3] + (a_1 b_2 - a_2 b_1)[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]
\end{aligned}$$

где в последнем переходе использовались свойство антикоммутативности векторного произведения и свойство равенства нулевому вектору векторного квадрата любого вектора. Полученное соотношение можно переписать в таком виде

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] & [\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1] & [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2] \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{6}$$

где, отметим ещё раз, $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ — произвольный базис.

Если воспользоваться полученным представлением векторного произведения через компоненты векторов, подставив его в формулу (4), то получим

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \tag{7}$$

Если же базис e **правый ортонормированный**, то формулы упрощаются. Для векторного произведения:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{8}$$

и для смешанного:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{9}$$

2.4. Задачи

Перед задачами параграфа 3 в сборнике сказано, что базис во всех задачах, если не оговорено противное, *правый ортонормированный*. Поэтому при решении можно будет пользоваться более простыми формулами: для векторного (8), смешанного (9) и скалярного (2) произведений.

Задача (3.1(2)). *Найти* $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$*, где* $\boldsymbol{a}(2, -1, 1)$ *и* $\boldsymbol{b}(-4, 2, -2)$.

Решение.

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 0\boldsymbol{i} - 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$$

То есть $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$. О чём можно бы было догадаться и сразу, просто внимательно посмотрев на координатные строки векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (они пропорциональны, а значит векторы коллинеарны). □

Задача (3.2(1)). *Упростить выражение* $[\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}]$.

Решение. Упрощаем, пользуясь свойствами операции векторного произведения (перемена мест — со сменой знака!):

$$[\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] - [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] - [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{0} - [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] - [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] - \boldsymbol{0} = -2[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$$

□

Задача (3.8(1)). *На векторах* $\boldsymbol{a}(2, 3, 1)$ *и* $\boldsymbol{b}(-1, 1, 2)$*, отложенных из одной точки, построен треугольник. Найти:*

1) *Площадь треугольника.*

2) *Длины трёх его высот.*

Решение.

Способ 1 ("скетч"). Можно бы было сделать "по-простому": найти длины сторон треугольника (через скалярное произведение), потом косинус угла между сторонами (тоже через скалярное произведение), потом синус, а потом и площадь треугольника.

Способ 2. А можно найти площадь с помощью векторного произведения. Векторное произведение $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ даст *вектор*, перпендикулярный плоскости, где лежат $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Но длина этого вектора как раз будет равна удвоенной площади треугольника. А найти сам вектор $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ можно с помощью формулы от компонент (8):

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\boldsymbol{e}_1 - 5\boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_3$$

Поэтому площадь будет равна:

$$S_{\triangle} = \frac{\sqrt{5^2+5^2+5^2}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

А чтобы найти высоты... видимо, всё равно придётся считать скалярные произведения)

$$a = \sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}, \quad b = \sqrt{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})}, \quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}$$

Дальше же высоты можно найти с помощью другой формулы площади треугольника:

$$S_{\triangle} = \frac{a\cdot h_a}{2}$$

□

Задача (3.19(3))**.** *Найти смешанное произведение векторов* $\boldsymbol{a}(2,1,0)$, $\boldsymbol{b}(3,4,-1)$, $\boldsymbol{c}(-1,-3,1)$.

Решение.

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 2-2+0 = 0$$

То есть $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = 0$. О чём можно бы было догадаться и сразу, просто внимательно посмотрев на координатные строки векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ (они линейно зависимы: $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$ — а значит векторы компланарны). □

Задача (3.12)**.** *Доказать, что для трёх неколлинеарных векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *выполнение равенств*

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]$$

равносильно тому, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *компланарны, причём*

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

Решение.

$\Leftarrow$. Пусть сумма векторов равна нулевому вектору. Тогда можно, например, выразить $\boldsymbol{a}$ через $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$:

$$\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$$

Подставим в векторные произведения и проверим выполнение равенств:

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = [-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$$

$$[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{c}, -\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}] = -[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$$

$\Rightarrow$. Пусть выполнены равенства векторных произведений. Если известно, что, например

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$$

то можно это переписать как

$$[\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{0}$$

Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ по условию неколлинеарны, значит, ненулевые. Тогда из соотношения выше видно, что векторы $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, причём эту коллинеарность можно представить так:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = k_1 \boldsymbol{b}, \quad k_1 \in \mathbb{R}$$

Мы рассмотрели только одно равенство. Вообще же аналогичным образом можно вывести следующие соотношения:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = k_1 \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = k_2 \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = k_3 \boldsymbol{a} \end{cases}$$

Выразим $\boldsymbol{c}$ из первого соотношения:

$$\boldsymbol{c} = k_1 \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$$

и подставим в третье уравнение системы. Получим:

$$\boldsymbol{b} + k_1 \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = k_3 \boldsymbol{a} \Leftrightarrow (1 + k_1)\boldsymbol{b} = (1 + k_3)\boldsymbol{a}$$

Но $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны по условию. Поэтому $k_1 = k_3 = -1$. Очевидно, также и $k_2 = -1$. Раз $k_1 = -1$, то

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

□

Задача (3.13(2))**.** *Доказать тождество (“бац минус цаб”):*

$$\big[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\big] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

Решение.

Способ 1 *(“Стандартный”).* Введём базис, посчитаем левую и правую часть через компоненты векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, и сравним.

Выберем “хороший” базис — ортонормированный. Пусть при этом базисный вектор $\boldsymbol{e}_3$ параллелен вектору $\boldsymbol{c}$: $\boldsymbol{c} = \gamma_3 \boldsymbol{e}_3$. Пусть базисный вектор $\boldsymbol{e}_2$ лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ (если они неколлинеарны, иначе — надо выбрать $\boldsymbol{e}_2$ “просто как-нибудь”, чтоб $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_2$ были неколлинеарны): $\boldsymbol{b} = \beta_2 \boldsymbol{e}_2 + \beta_3 \boldsymbol{e}_3$. И последний вектор $\boldsymbol{e}_1$ — такой, чтоб вместе с $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_2$ образовывал правую тройку (в порядке нумерации): $\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{e}_3$.

Теперь, введя базис и координаты векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в этом базисе, можем начать выражать произведения между ними через их координаты:

$$[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 0 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \beta_2 \gamma_3 \boldsymbol{e}_1$$

$$\big[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\big] = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 \gamma_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \beta_2 \gamma_3 \cdot (\alpha_3 \boldsymbol{e}_2 - \alpha_2 \boldsymbol{e}_3)$$

И для правой части тождества, которое надо доказать:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = 0 + 0 + \alpha_3\gamma_3 = \alpha_3\gamma_3$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\beta_2\boldsymbol{e}_2 + \beta_3\boldsymbol{e}_3) \cdot \alpha_3\gamma_3 - \gamma_3\boldsymbol{e}_3 \cdot (\alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3) = \beta_2\gamma_3 \cdot (\alpha_3\boldsymbol{e}_2 - \alpha_2\boldsymbol{e}_3)$$

Результаты для левой и правой частей доказываемого тождества получились одинаковыми, поэтому тождество доказано.

Способ 2 *(Павел Юнкер, Б04-108, 2021*[5]*)*. Приведём ещё раз тождество, которое надо доказать:

$$\big[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\big] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

Понимаем, что левая часть — это некоторый вектор в плоскости $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$. Причём не просто “некоторый”, а вектор, который получается поворотом ортогональной проекции $\boldsymbol{a}$ на плоскость $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ на 90° в направлении от $\boldsymbol{c}$ к $\boldsymbol{b}$ (7). С правой частью уравнения пока не очень понятно (кроме того, что это тоже вектор, лежащий в плоскости векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$).

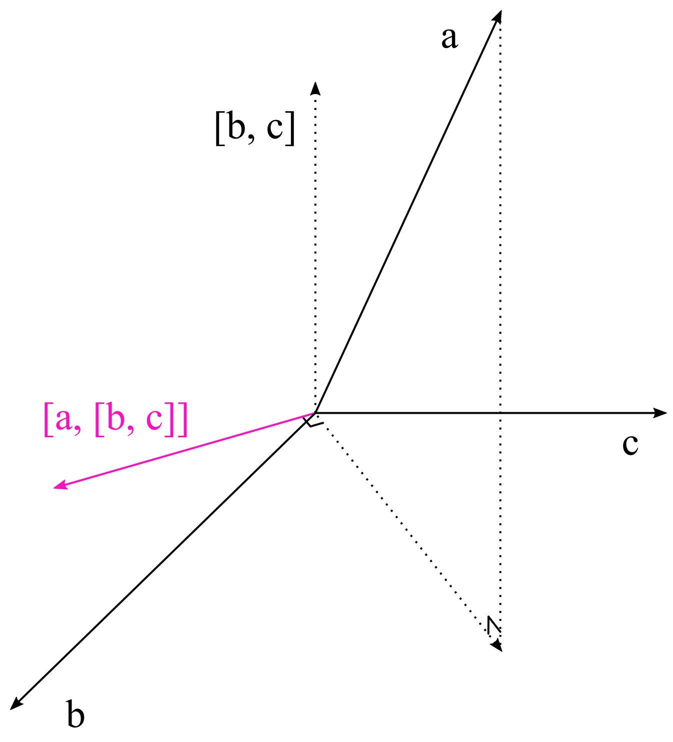

Рис. 7: Вектор $\big[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\big]$.

Можно ли как-то… упростить задачу? Перейти от исходной “общей” постановки к какой-нибудь другой, попроще (но так, чтоб решение более простого случая позволяло бы и исходное тождество доказать)…

Зависит ли тождество от модулей векторов? Если один из векторов нулевой, то всё будет нулём. Если же векторы не нулевые, то можно просто “отнормировать обе части тождества” на модули векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Таким образом, мы можем считать, что все векторы единичной длины.

Зависит ли тождество от угла между векторами $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ (которые образуют базис на той плоскости, где поворачивается проекция вектора $\boldsymbol{a}$)? Допустим, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ не перпендикулярны. Тода можно подобрать $k \in \mathbb{R}$ так, чтобы векторы $\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b} - k\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{c}$ уже были перпендикулярны. Заменяя в исходном тождестве $\boldsymbol{b}$ на $\boldsymbol{b}' + k\boldsymbol{c}$, получаем… точно такое же тождество,

[5]Автор конспекта впервые познакомился с таким решением, проверяя ДЗ Павла.

но с вектором $\boldsymbol{b}'$ вместо $\boldsymbol{b}$! Таким образом, мы можем считать, что векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ перпендикулярны.

Теперь понятен смысл правой части тождества: это ортогональная проекция $\boldsymbol{a}$ на плоскость $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, но повёрнутая на 90° в направлении от $\boldsymbol{c}$ к $\boldsymbol{b}$. (Выражения $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ дают ортогональные проекции на $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно. Поэтому ортогональная проекция на плоскость *до поворота*: $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$.) То есть это ровно то же самое, что даёт левая часть!

Тождество доказано. $\square$

Задача (3.15)**.** *Даны векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$*, такие что*

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0} \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \end{cases}$$

Надо выразить через $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *какой-нибудь вектор* $\boldsymbol{x}$*, удовлетворяющий уравнению*

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$$

Решение. Из условия следует, что либо $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}$, либо $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$. Будем пока считать, что $\boldsymbol{b}$ не равен нулю (8).

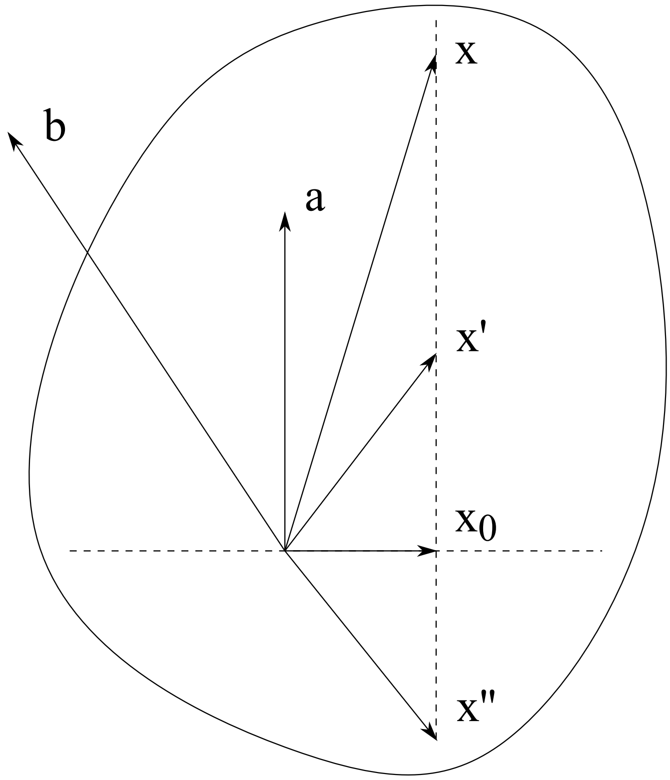

Рис. 8: $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$.

Так как $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{b}$ и $|\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{a}| \cdot \sin\alpha = |\boldsymbol{b}|$, где $\alpha = \angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$. То есть

$$|\boldsymbol{x}| \sin\alpha = \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$$

Пусть решению $\boldsymbol{x}_0$ соответствует угол $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, то есть вектор $\boldsymbol{x}_0$ перпендикулярен как $\boldsymbol{b}$, так и $\boldsymbol{a}$. Тогда $\boldsymbol{x}_0$ сонаправлен $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ (векторное произведение — именно в таком порядке) (8). И найти $\boldsymbol{x}_0$ можно как

$$\boldsymbol{x}_0 = \underbrace{\frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{\big|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\big|}}_{\text{“направление”}} \cdot \underbrace{\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}}_{\text{модуль}} = \frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{|\boldsymbol{a}|^2}$$

Если $\boldsymbol{b} = 0$, то по формуле получаем $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$, что тоже является решением уравнения. □

Задача (3.20(1)). *Проверить, компланарны ли векторы, заданные своими координатами в произвольном базисе:*

$$\boldsymbol{a}(2, 3, 5), \quad \boldsymbol{b}(7, 1, -1), \quad \boldsymbol{c}(3, -5, -11)$$

Решение.

Способ 1 *("скетч").* Компланарность трёх векторов равносильна их линейной зависимости. Поэтому можно бы было составить линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и приравнять её нулю. Если бы получилось найти нетривиальное решение (коэффициенты перед векторами), то система бы была линейно зависимой. В противном случае — линейно независимой.

Способ 2. Компланарность трёх векторов также равносильна тому, что объём параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен нулю. А объём можно посчитать через смешанное произведение. Если обозначить исходный базис как $e = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, то объём параллелепипеда со знаком будет равен:

$$V_{\pm}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & -11 \end{vmatrix} (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$$

Смешанное $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ точно не ноль. Но определитель даст ноль, поэтому и объём ноль, и векторы компланарны. □

3. Дополнение

3.1. Ещё пара задач про скалярное произведение

Задача (2.21 (Другой способ)). *Длины базисных векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ равны соответственно* 3, $\sqrt{2}$ *и* 4. *Углы между векторами: $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \angle(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 45°$, $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = 60°$.*

Надо вычислить длины сторон и углы параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}(1, -3, 0)$ и $\boldsymbol{b}(-1, 2, 1)$, заданных своими координатами в указанном базисе.

Решение. Мы "умеем" считать скалярное произведение в "хорошем" базисе (ортонормированном). Поэтому, чем считать всё в "кривом" базисе, можно... "починить" этот самый базис, и формулы для скалярного произведения будут простыми.

Как "починить" базис $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$? Можно отнормировать векторы. Но базис всё равно останется "кривым". Нам ещё надо как-то "повернуть" базисные векторы, чтобы они стали перпендикулярны...

Но вместо того, чтоб пытаться последовательно из старого базиса получить новый, мы можем сразу *выбрать подходящий ортонормированный новый базис*, а потом просто найти нужную матрицу перехода, чтобы пересчитать компоненты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Вектор $\boldsymbol{e}_2$ образует одинаковые углы с $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_3$. Поэтому будем смотреть на исходный базис так, словно $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_3$ лежат в горизонтальной плоскости, а $\boldsymbol{e}_2$ из неё выходит (9). Направим $\boldsymbol{e}'_1$ вдоль $\boldsymbol{e}_1$. Вектор $\boldsymbol{e}'_3$ выберем так, чтоб он был в той же горизонтальной плоскости, и чтоб поворот от $\boldsymbol{e}'_1$ к $\boldsymbol{e}'_3$ совершался в ту же сторону (по или против часовой стрелки), что и поворот от $\boldsymbol{e}_1$ к $\boldsymbol{e}_3$. Вектор $\boldsymbol{e}'_2$ направим в ту же сторону (в то же полупространство), что и $\boldsymbol{e}_2$. Новый базис e' построен.

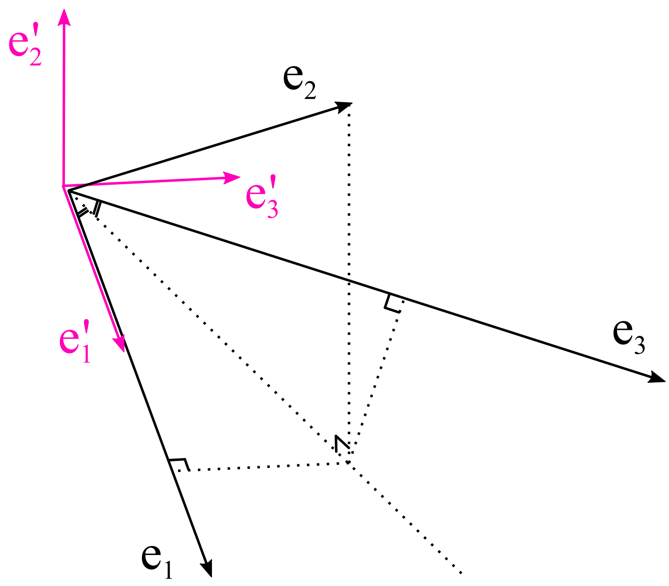

Рис. 9: Выбор нового базиса e' (ортонормированного).

От чего к чему искать матрицу перехода[6]? Если $e = e'S'$, то $\boldsymbol{x}' = S'\boldsymbol{x}$. То есть чтобы понять, как векторы раскладываются в новом ("хорошем") базисе, надо понять, как векторы старого ("плохого") базиса выражаются в новом базисе.

Удачный выбор e' позволяет "не очень сложно" ("из геометрии") получить указанную матрицу перехода S' (столбцы которой — координаты векторов "плохого" базиса в "хорошем"[7]):

$$S' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2/3} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Тогда координаты векторов в "хорошем" базисе:

$$\boldsymbol{a}' = S'\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2/3} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{6} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}' = S'\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2/3} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 8/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Скалярное произведение (тех же векторов, но с координатами в "хорошем" базисе):

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \cdot 1 + \left(-\sqrt{6}\right) \cdot \left(2\sqrt{2}/\sqrt{3}\right) + \left(-\sqrt{3}\right) \cdot 8/\sqrt{3} = -12$$

□

Задача (2.22). *Длины базисных векторов* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ *равны соответственно* 1, 1 *и* 2. *Углы между векторами:* $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 90°$, $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = \angle(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 60°$.

Надо найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}(-1, 0, 2)$ *и* $\boldsymbol{b}(2, -1, 1)$.

[6] Возможно, в такой постановке вопрос лишний, потому что раскладывать векторы e' по e представляется проблематичным.

[7] Осторожно: обычно всегда искали матрицу перехода от "старого" базиса к "новому", а тут наоборот.

Решение. Базис не ортонормированный, поэтому скалярные произведения надо будет считать "по-честному".

Модуль вектора $\boldsymbol{a}$:

$$|\boldsymbol{a}|^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = (-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3)(-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) - 4(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) + 4(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) = 1 - 4 + 16 = 13$$

Аналогично для вектора $\boldsymbol{b}$:

$$|\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = (2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)(2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = \ldots = 11$$

Косинус угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} = \frac{(-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3) \cdot (2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{11}} = \ldots = \frac{7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{11}}$$

Поэтому синус угла будет равен:

$$\sin\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sqrt{1 - \frac{49}{13 \cdot 11}}$$

И площадь параллелограмма:

$$S = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sqrt{13} \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt{1 - \frac{49}{13 \cdot 11}} = \sqrt{94}$$

□

Задача (Про точку пересечения высот в треугольнике)**.** *Используя скалярное произведение, доказать, что в любом треугольнике высоты пересекаются в одной точке.*

Решение. Пусть в $\triangle ABC$ высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O (10). Тогда надо показать, что прямая $CO \perp AB$.

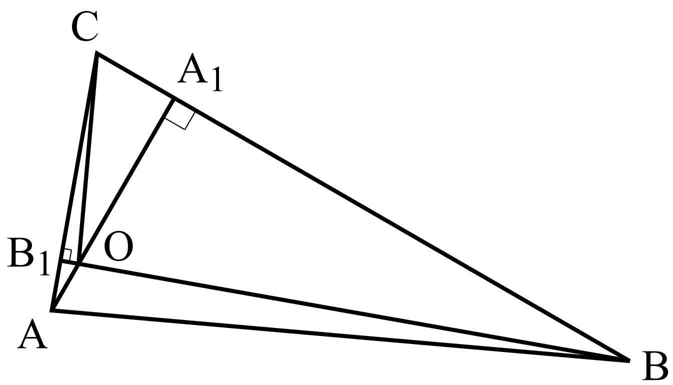

Рис. 10: Точка O пересечения двух высот AA_1 и BB_1 в $\triangle ABC$.

Так как $AO \perp BC$ и $BO \perp AC$, то

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = 0 \\ \overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} \end{cases}$$

В то же время

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

Поэтому $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB}$. □

3.2. Ещё пара задач про векторное и смешанное произведения

Задача (2.22 (Другой способ)). *Длины базисных векторов* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ *равны соответственно* 1, 1 *и* 2. *Углы между векторами:* $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 90°$, $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = \angle(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 60°$.

Надо найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}(-1, 0, 2)$ *и* $\boldsymbol{b}(2, -1, 1)$.

Решение. Площадь можно посчитать и с помощью векторного произведения. Только пользоваться надо общей формулой, потому что базис "кривой":

$$S = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \left|\det\begin{pmatrix} [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] & [\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1] & [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2] \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right| = \Big|2 \underbrace{\tilde{e}_1}_{[e_2, e_3]} + 5 \underbrace{\tilde{e}_2}_{[e_3, e_1]} + \underbrace{\tilde{e}_3}_{[e_1, e_2]}\Big|$$
$$= \sqrt{4\tilde{e}_1^2 + 25\tilde{e}_2^2 + \tilde{e}_3^2 + 4\tilde{e}_1\tilde{e}_3 + 20\tilde{e}_1\tilde{e}_2 + 10\tilde{e}_2\tilde{e}_3}$$
$$= \sqrt{4 \cdot 3 + 25 \cdot 3 + 1 + 4 \cdot (-1) + 20 \cdot 1 + 10 \cdot (-1)} = \sqrt{94}$$

При этом произведение $\tilde{e}_1\tilde{e}_2$, например, могло бы быть посчитано так[8]:

$$\tilde{e}_1\tilde{e}_2 = [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] \cdot [\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1] = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

□

Задача (3.28(1)). *Доказать, что если векторы* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$ *компланарны, то и векторы* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *тоже компланарны.*

Решение. Рассмотрим два варианта решения.

"Словесный".

Отложим векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ от одной точки. Назовём плоскость, где лежат $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$, плоскостью α (11).

Рассмотрим пару векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Их векторное произведение $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ лежит в α и перпендикулярно плоскости, где лежат $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (пока считаем, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ неколлинеарны). Таким образом, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ лежат в плоскости, перпендикулярной α. Аналогично и с парами векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Все три такие плоскости попарно пересекаются хотя бы по одной прямой (например, плоскости векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ пересекаются хотя бы по прямой, содержащей вектор $\boldsymbol{a}$: векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ изначально отложены от одной точки). Таким образом, если все три описанные плоскости совпадают, то вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ лежат в ней, а потому компланарны. Если же плоскости не совпадают, а пересекаются попарно по одной прямой, то все три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ оказываются перпендикулярными α, а потому параллельными. То есть в этом случае векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ не только компланарны, но

[8] См. номер 3.13(3)

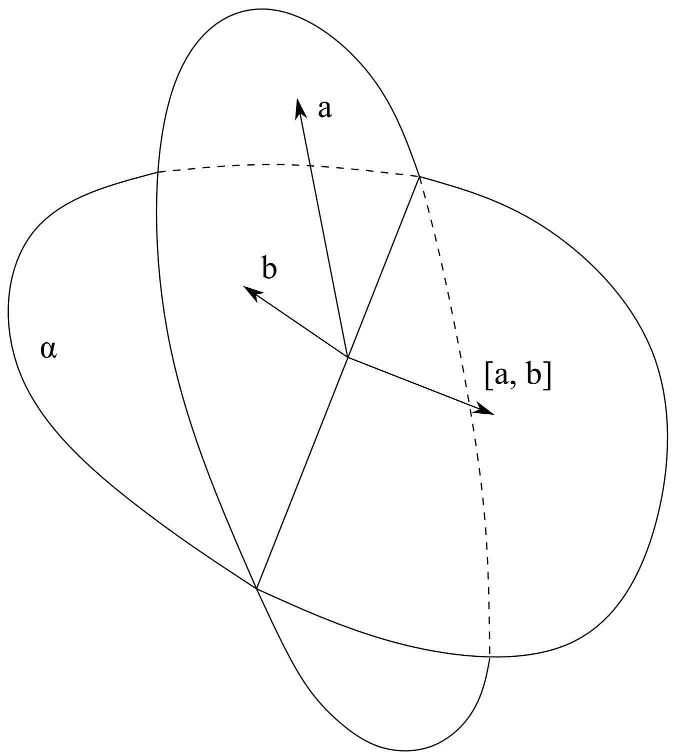

Рис. 11: α — плоскость, где лежат $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ и $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$.

и коллинеарны. Но в процессе решения было сделано предположение о том, что $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ неколлинеарны, поэтому такой случай отпадает.

Пусть теперь хотя бы один вектор из тройки $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$ равен нулевому вектору. Тогда либо хотя бы два вектора из трёх $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ коллинеарны, а потому все три они компланарны. Либо хотя бы один вектор из трёх $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ равен нулевому вектору, а потому все три снова компланарны.

“Формульный”.

Рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

Умножим векторно обе части на $\boldsymbol{a}$ слева. Получим

$$\beta \cdot [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + \gamma \cdot [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{0}$$

Аналогично, при умножении векторно слева обеих частей исходного уравнения на $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$:

$$\begin{cases} \alpha \cdot [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] + \gamma \cdot [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{0} \\ \alpha \cdot [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] + \beta \cdot [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

Складывая все три полученных уравнения, получаем

$$(\beta - \alpha) \cdot [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + (\gamma - \beta) \cdot [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] + (\gamma - \alpha) \cdot [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{0}$$

Так как векторы $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$ линейно зависимы, то хотя бы один из коэффициентов $(\beta - \alpha)$, $(\gamma - \beta)$, $(\gamma - \alpha)$ может быть отличен от нуля. Но в таком случае три коэффициента в исходном уравнении α, β, γ не совпадают, а потому все три не могут в данном случае быть равны нулю одновременно. То есть существует нетривиальная линейная комбинация $\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c}$, равная нулевому вектору. Поэтому три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны. □

Задача (3.31). *Решить систему векторных уравнений в пространстве*

$$\begin{cases} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = p \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = q \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) = s \end{cases}$$

*где векторы **a**, **b** и **c** некомпланарны.*

Решение. Сначала покажем, что если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ некомпланарны, то и $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ и $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ некомпланарны. Рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + \beta[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] + \gamma[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{0}$$

Умножим обе части скалярно на $\boldsymbol{b}$ слева. Получим

$$\gamma(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$$

Откуда $\gamma = 0$, так как $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ некомпланарны (и их смешанное произведение отлично от нуля). Аналогично $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Поэтому три вектора $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ и $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ также некомпланарны.

Введём понятие *взаимного базиса*.

Определение 3.1. Пусть есть базис $e = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Тогда взаимный базис $e^* = (\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*)$ определяется как

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1^* = \dfrac{[\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)} \\ \boldsymbol{e}_2^* = \dfrac{[\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1]}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)} \\ \boldsymbol{e}_3^* = \dfrac{[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)} \end{cases} \tag{10}$$

По доказанному ранее, e^* в самом деле базис (три линейно независимых вектора в пространстве). Также можно заметить, что $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i^*) = 1$ и $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j^*) = 0$ при $i \neq j$ (поэтому базис e^* также называют биортогональным к базису e)[9].

Возвращаясь к задаче, разложим вектор $\boldsymbol{x}$ по взаимному к $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ базису $\{\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*\}$:

$$\boldsymbol{x} = x_1^* \boldsymbol{a}^* + x_2^* \boldsymbol{b}^* + x_3^* \boldsymbol{c}^*$$

Умножая скалярно по очереди на $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и пользуясь свойством "биортогональности" взаимного базиса, получаем

$$\begin{cases} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = x_1^* \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = x_2^* \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) = x_3^* \end{cases}$$

То есть числа p, q и s, данные в условии, есть компоненты вектора $\boldsymbol{x}$ во взаимном к $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ базисе, векторы которого вычисляются по (10). □

Задача (3.22(1)). *Три некомпланарных вектора **a**, **b**, **c** отложены из одной точки. Найти объём треугольной призмы, основание которой построено на **a** и **b**, а боковое ребро совпадает с вектором **c**.*

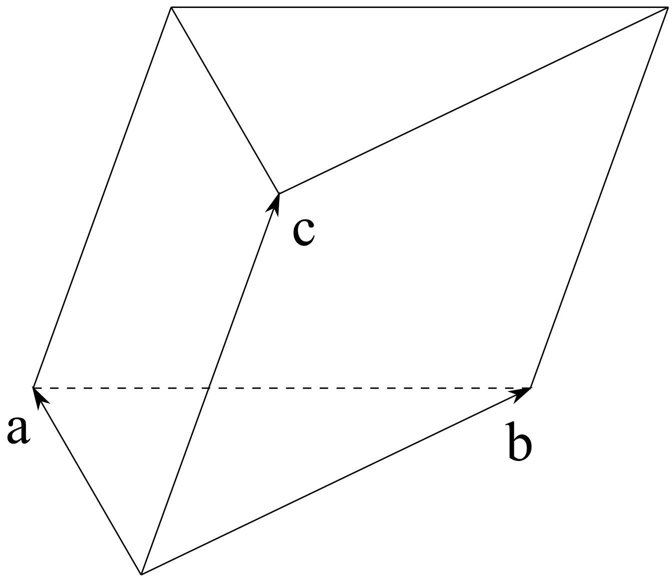

Рис. 12: Треугольная призма, построенная на $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

Решение. Объём призмы V' равен произведению площади основания на высоту (12). В основании треугольник — площадь которого в два раза меньше площади параллелограмма, построенного на тех же векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. То есть объём призмы ищется аналогично объёму V параллелепипеда, построенного на $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, только площадь основания в два раза меньше. Поэтому и

$$V' = \frac{1}{2}V = \frac{\left|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\right|}{2}$$

Задача решена. Нашли объём, не находя ни высоты, ни площади основания.

Отступление.

Но как можно бы было найти вектор $\boldsymbol{c}_\perp$, по модулю равный высоте призмы и перпендикулярный основаниям? Вектор $\boldsymbol{c}$ можно представить в виде суммы двух векторов, один из которых параллелен плоскости основания призмы, а другой перпендикулярен плоскости основания. В свою очередь, компоненту $\boldsymbol{c}$, параллельную основаниям, можно разложить по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (которые, как неколлинеарные вектора, образуют базис на плоскости). Получаем

$$\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}_\perp$$

Если умножить полученное уравнение скалярно на $\boldsymbol{a}$ и на $\boldsymbol{b}$ (по очереди), то получим систему

$$\begin{cases} (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + \beta(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \\ (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \beta(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{cases}$$

из которой уже можно найти α и β, например, по правилу Крамера, если определитель системы отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{vmatrix} = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \left|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\right|^2 \neq 0$$

так как векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны. А вообще, определитель

$$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{vmatrix}$$

[9] Эти свойства на самом деле и определяют взаимный базис в общем случае $\mathbb{R}^n$ (en.wikipedia.org/wiki/Dual_basis).

называется *определителем Грама*[10] системы векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Из решения видно, что отличие от нуля определителя Грама системы векторов является *критерием линейной независимости* этой системы векторов (чтобы коэффициенты разложения любого вектора по этой системе определялись однозначно — в нашем случае коэффициенты разложения компоненты $\boldsymbol{c}$, параллельной основанию призмы, по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$).

Возвращаясь к вектору $\boldsymbol{c}_\perp$, то при найденных α и β он получается равным

$$\boldsymbol{c}_\perp = \boldsymbol{c} - \alpha\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{b}$$

□

[10] en.wikipedia.org/wiki/Gramian_matrix.