Семинар 1

Алексеев Василий

1 сентября 2021

Содержание

1. Матрицы и определители 2-го и 3-го порядков

Вещественная матрица A размера $m \times n$ — "таблица" из чисел $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1 \dots m$, $j = 1 \dots n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

1.1. Операции с матрицами

Определение 1.1 (Сложение матриц)**.** Пусть $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Суммой $A + B$ называется матрица $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, такая что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Определение 1.2 (Умножение матрицы на число)**.** Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Произведением матрицы A на число α называется матрица C, такая что $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Замечание. Можно проверить, что матрицы $\mathbb{R}^{n \times n}$ с введённой операцией сложения и умножения на числа из $\mathbb{R}$ образуют линейное пространство[1], то есть операции обладают следующими свойствами:

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$, $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (ассоциативность сложения).
2. $A + B = B + A$, $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (коммутативность сложения).
3. $\exists 0_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n} : 0_{n \times n} + A = A$, $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
4. $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n} \; \exists {-A} \in \mathbb{R}^{n \times n} : A + (-A) = 0_{n \times n}$.
5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (ассоциативность умножения на скаляр).
6. $1 \cdot A = A$, $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
7. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (дистрибутивность умножения матрицы на число относительно сложения чисел).
8. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (дистрибутивность умножения матрицы на число относительно сложения матриц).

Определение 1.3 (Линейная комбинация матриц)**.** Линейной комбинацией матриц $A_1, \dots, A_n$ называется их сумма с некоторыми коэффициентами $\alpha_i \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_1 \cdot A_1 + \ldots + \alpha_n \cdot A_n$$

Задача (15.2(6))**.** *Вычислить линейную комбинацию матриц:*

$$2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

Решение. Вычисляя линейные комбинации соответственных элементов матриц, получаем ответ:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

[1] wikipedia.org/wiki/Vector_space

Определение 1.4 (Умножение матриц)**.** Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$. Тогда матрица C называется произведением матриц A и B, если

$$\begin{cases} c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \\ 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{cases}$$

и обозначается $C = AB$.

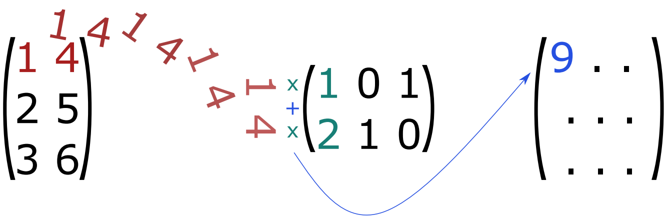

Рис. 1: Иллюстрация умножения матриц.

Задача (15.5(12))**.** *Вычислить произведение матриц:*

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \dots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = ?$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \dots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot\lambda_1 + \dots + \lambda_1\cdot 0 & \dots & 0 + \dots + \lambda_1\cdot\lambda_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n\cdot\lambda_1 + \dots + 0 & \dots & \lambda_n\cdot 0 + \dots + 0\cdot\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \lambda_1\lambda_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n\lambda_1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

□

И ещё пара небесполезных концепций из мира матриц.

Определение 1.5 (Единичная матрица)**.** Матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется единичной, если она нулевая, кроме главной диагонали ($\{a_{ij} \mid i = j\}$), на которой стоят единицы. То есть $a_{ij} = 1$ при $i = j$ и $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица обычно обозначается E или I.

Определение 1.6 (Транспонирование матрицы)**.** Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Тогда транспонированной по отношению к матрице A матрицей называется такая матрица , что $c_{ij} = a_{ji}$. Транспонированная матрица обозначается A^T.

Определение 1.7 (След матрицы). Следом матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется сумма элементов, находящихся на главной диагонали $\{a_{ij} \mid i = j, i = 0, \dots, n\}$:

$$\begin{cases} \mathrm{Sp}: \ \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R} \\ \mathrm{Sp}: \ A \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \end{cases}$$

У следа есть несколько возможных обозначений. Например, можно ещё писать $\mathrm{Tr}\, A$.

1.2. Определитель матрицы

Об определителе можно думать как об особой числовой функции на множестве матриц, обозначаемой det или $|\cdot|$

$$\det: \ \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$$

Существует несколько эквивалентных способов определения det: через свойства функции, конкретную формулу вычисления по элементам матрицы 1 при произвольном n. Мы пока опустим строгое определение det и будем считать, что определитель “просто есть”, как-то задан. И рассмотрим, как его вычислять для квадратных матриц размерностей 2 и 3.

Пример. Определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Пример. Определитель третьего порядка (разложение по первой строке):

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 \end{aligned}$$

Но и при более высоких порядках (четыре и далее) можно использовать тот же алгоритм разложения по первой строке, сводя вычисление определителя порядка n к вычислению нескольких определителей порядка $n - 1$. Даже если мы ещё раз посмотрим на определитель второго порядка, то увидим, что он тоже может быть посчитан разложением по первой строке, если положить определитель матрицы размера 1×1 из одного элемента равным этому самому элементу:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot |d| - b \cdot |c| \xrightarrow{|x| \equiv x} ad - cb$$

Таким образом, мы уже фактически пришли к следующему варианту определить функцию det:

Определение 1.8 (Определитель (рекурсивный вариант определения)). Положим определитель матрицы из одного элемента равным этому самому элементу

$$\det(a) \equiv a$$

Пусть d_{ij} — определитель подматрицы D_{ij} матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, которая получается при вычёркивании i-ой строки и j-го столбца. Тогда

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} d_{ij}$$

где i — любая строка матрицы A (не важно, какая — значение функции det не изменится).

Задача (14.7(3)).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \Big(1 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2)\Big) - 2 \cdot \Big(2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2)\Big) + 2 \cdot \Big(2 \cdot (-2) - 2 \cdot 1\Big) = -3 - 12 - 12 = -27$$

□

2. Системы линейных уравнений. Правило Крамера

Система m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

В матричном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Или так:

$$A_{m\times n}\boldsymbol{x}_{n\times 1} = \boldsymbol{b}_{m\times 1}$$

Определение 2.1 (Решение системы).

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$$

Определение 2.2. Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если у неё нет решений.

Определение 2.3. Говорят, что система B следует из системы A, если множество решений B содержит множество решений A (2).

Теорема 2.1. *Пусть число уравнений в системе m равно числу неизвестных n. Тогда если* $\det A \neq 0$*, то система $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ имеет решение, и притом только одно.*

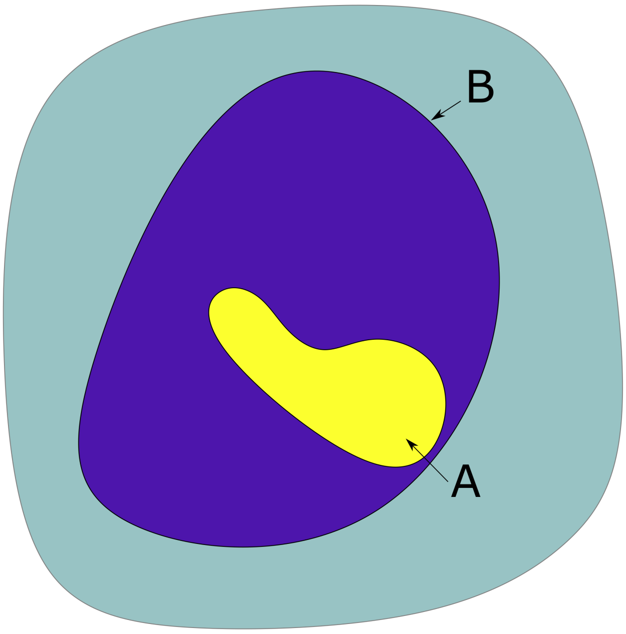

Рис. 2: Множество решений A содержится во множестве решений B.

Теорема 2.2 (Правило Крамера)**.** *Пусть число уравнений в системе m равно числу неизвестных n. Тогда если* $\det A \neq 0$*, то*

$$\begin{cases} x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta} \\ \Delta \equiv \det A \\ \Delta_i \equiv \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \end{cases}$$

Задача (17.1(2))**.** *Решить систему:*

$$\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 5x + 9y = 4 \end{cases}$$

Решение. Перепишем систему в матричном виде:

$$\begin{cases} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}^T \end{cases}$$

Расширенная матрица системы: $(A|\boldsymbol{b})$.

Матрица A квадратная. Её определитель $|A| = 2$ отличен от нуля. Поэтому решение системы существует и единственно. И его можно найти по формулам:

$$\Delta = \det A = \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Delta_x = \det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = -2 \Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\Delta_y = \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1$$

И решение:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

□

3. Дополнение

Приведём далее ещё несколько равносильных способов задать определитель (без доказательства равносильности), отметим пару свойств определителя.

3.1. Задание определителя с помощью формулы

Теорема 3.1 (Формула полного разложения определителя)**.** *Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Тогда определитель* $\det A$ *матрицы равен*

$$\det A = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)} (-1)^{N(i_1,\ldots,i_n)} a_{1i_1} \ldots a_{ni_n} \tag{1}$$

где $N(i_1, \ldots, i_n)$ — число нарушений порядка в перестановке чисел $i_1, \ldots, i_n$[2]*. Сумма в формуле берётся по всем перестановкам чисел $1, \ldots, n$*[3]*.*

Пример. Вспомним формулу вычисления определителя для матрицы размера 3:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1$$

Элементы в каждом слагаемом упорядочены по номеру столбца. Поэтому посмотрим на число беспорядков по строкам (неважно, как считать беспорядки, по строкам или по столбцам, потому что $\det A = \det A^T$). В первом слагаемом: $N(1,2,3) = 0$. Во втором: $N(1,3,2) = 1$ (тройка и двойка). В третьем: $N(2,1,3) = 1$ (двойка и единица). В четвёртом: $N(3,1,2) = 2$ (два беспорядка с тройкой и единицей и тройкой и двойкой). В пятом: $N(2,3,1) = 1{+}1 = 2$ (для двойки и единицы и для тройки и единицы). В шестом: $N(3,2,1) = 2 + 1 = 3$ (тройка-двойка, тройка-единица, двойка-единица).

3.2. Свойства определителя

Теорема 3.2. *Некоторые свойства определителя (матрицы в формулах ниже представляются столбцами $\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^n$):*

1. *Линейность по столбцу (строке) — полилинейность:*

$$\begin{cases} \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \underbrace{\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{a}_i}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{p}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) + \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{q}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\ \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \underbrace{\alpha \boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{a}_i}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \alpha \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{p}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \end{cases} \tag{2}$$

2. *При перестановке двух столбцов (строк) матрицы её определитель меняет знак (кососимметричность, антисимметричность по столбцам/строкам):*

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = -\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \tag{3}$$

3. *Если два столбца (две строки) матрицы совпадают, то её определитель равен нулю:*

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{p}, \ldots, \boldsymbol{p}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = 0 \tag{4}$$

[2] Нарушение порядка — когда правее большего элемента стоит меньший элемент: $i_k > i_s$, но $k < s$.
[3] Например, перестановки чисел $1, 2, 3$: $(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)$.

Свойства можно доказать как следствия теоремы 3.1.

И ещё пара более частных утверждений, которые следуют/являются подслучаями свойств выше:

- Общий множитель элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя:
$$\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \alpha \boldsymbol{p}, \dots, \boldsymbol{a}_n) = \alpha \cdot \det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{p}, \dots, \boldsymbol{a}_n)$$
- К любой строке (столбцу) матрицы можно прибавлять линейную комбинацию других строк (столбцов) — определитель при этом не изменится:
$$\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}} \alpha_j \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_n)$$
- При вычислении определителя матрицы вида αA скаляр α можно выносить за знак det следующим образом:
$$\det \alpha A = \alpha^n \det A$$

И посмотрим, чему равен определитель нескольких специального вида матриц.

Пример. Определитель единичной матрицы:
$$\det E = 1^n = 1$$

Определение 3.1 (Вырожденная матрица[4])**.** Матрица A называется вырожденной, если $\det A = 0$. В противном случае матрица A называется невырожденной.

Теорема 3.3. *Определитель транспонированной матрицы*
$$\det A^T = \det A$$

Теорема 3.4. *Определитель произведения двух квадратных матриц:*
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Теорема 3.5. *Определитель матрицы, обратной к* невырожденной *матрице*
$$\det A^{-1} = \left(\det A\right)^{-1}$$

3.3. Задание определителя через свойства

Как отмечалось выше, существует несколько эквивалентных определений det. Один из способов — с помощью формулы (1). Приведём далее ещё пару, основанных на перечислении свойств, которыми должна обладать функция det.

Определение 3.2 (Вариант 1[5])**.** Функция $f : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ называется определителем (детерминантом) и обозначается det, если

[4] Определение вырожденной матрицы можно вводить по-разному. Ещё возможный вариант: квадратная матрица называется вырожденной, если её строки $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1}^n$ линейно зависимы. Строки линейно зависимы — когда существует нетривиальная линейная комбинация строк, которая даёт нулевую строку: $\sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 > 0$.

[5] Беклемишев Д. В. «Курс аналитической геометрии и линейной алгебры»

- Функция f является линейным однородным многочленом от элементов любой строки:
$$\begin{cases} f(A) = h_1 a_{i1} + \ldots + h_n a_{in} \\ 1 \le i \le n \\ h_j = h_j(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n),\ 1 \le j \le n \end{cases}$$
то есть коэффициенты в разложении по элементам строки не зависят от этой самой строки.

- Значение f на вырожденной матрице[6] равно нулю 0.

- Значение f на единичной матрице $E_{n\times n}$ равно единице 1.

Определение 3.3 (Вариант 2[7]). Функция $f:\ \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ называется определителем (детерминантом) и обозначается det, если

- Функция f полилинейна по строкам матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (2).

- Функция f кососимметрична по строкам матрицы A (3).

- Значение f на единичной матрице $E_{n\times n}$ равно единице 1.

Определение 3.4 (Вариант 3[8]). Функция $f:\ \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ называется определителем (детерминантом) и обозначается det, если

- Функция f полилинейна по строкам матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (2).

- Значение f на матрице с двумя одинаковыми строками равно нулю 0 (4).

- Значение f на единичной матрице $E_{n\times n}$ равно единице 1.

[6] У которой строки линейно зависимы
[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Determinant
[8] Hans Schneider, George Phillip Barker. «Matrices and Linear Algebra»