Семинар 3

Алексеев Василий

15 сентября 2022

Содержание

1. Замена базиса

Вспомним номер с прошлого семинара:

Задача (1.6). $\boldsymbol{a}(-5,-1), \boldsymbol{b}(-1,3)$ — *проверить, что система из двух векторов образует базис. Разложить* $\boldsymbol{c}(-1,2)$ *по этому базису.*

Решение. Обозначим векторы исходного базиса за $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$. Занесём в табличку известные координаты участвующих в задаче векторов в разных базисах (1).

Таблица 1: Координаты векторов (по вектору в строке) в разных базисах (в столбце — координаты векторов в одном базисе). Надо найти координаты (x'_1, x'_2) вектора $\boldsymbol{c}$ в новом базисе.

	$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$	$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$
$\boldsymbol{e}_1$	$(1,0)$	
$\boldsymbol{e}_2$	$(0,1)$	
$\boldsymbol{a}$	$(-5,-1)$	$(1,0)$
$\boldsymbol{b}$	$(-1,3)$	$(0,1)$
$\boldsymbol{c}$	$(-1,2)$	(x'_1, x'_2)

□

Задача выше — пример задачи на переход от одного базиса к другому. Рассмотрим переход между базисами в более общем виде (и в немного другой постановке).

Будем обозначать векторы базиса в виде *строки*. Например:

$$e = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$$

для случая базиса во всём пространстве $\mathbb{R}^3$. Аналогично и для базисов на плоскости и на прямой (в $\mathbb{R}^2$ и в $\mathbb{R}$).

При заданном базисе e любой вектор $\boldsymbol{a}$ пространства однозначно определяется его компонентами в базисе:

$$\boldsymbol{a} = x_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + x_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + x_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \Rightarrow \boldsymbol{a} \leftrightarrow \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$$

поэтому, говоря о векторе — направленном отрезке, часто имеют в виду его компоненты в базисе (то есть понятия вектора как направленного отрезка и вектора как столбца из чисел при фиксированном базисе взаимозаменяемы).

В пространстве существует больше одного базиса: любая тройка некомпланарных векторов в $\mathbb{R}^3$ образует базис. Можно задаться вопросом о том, как связаны компоненты одного и того же вектора в разных базисах.

Дано

Пусть есть два базиса в пространстве векторов (рассмотрим переход между базисами на примере трёхмерного пространства): “старый” e и “новый” e' (1). Пусть нам известно представление некоторого вектора $\boldsymbol{v}$ в базисе e':

$$\boldsymbol{v} = x'_1 \boldsymbol{e}'_1 + x'_2 \boldsymbol{e}'_2 + x'_3 \boldsymbol{e}'_3$$

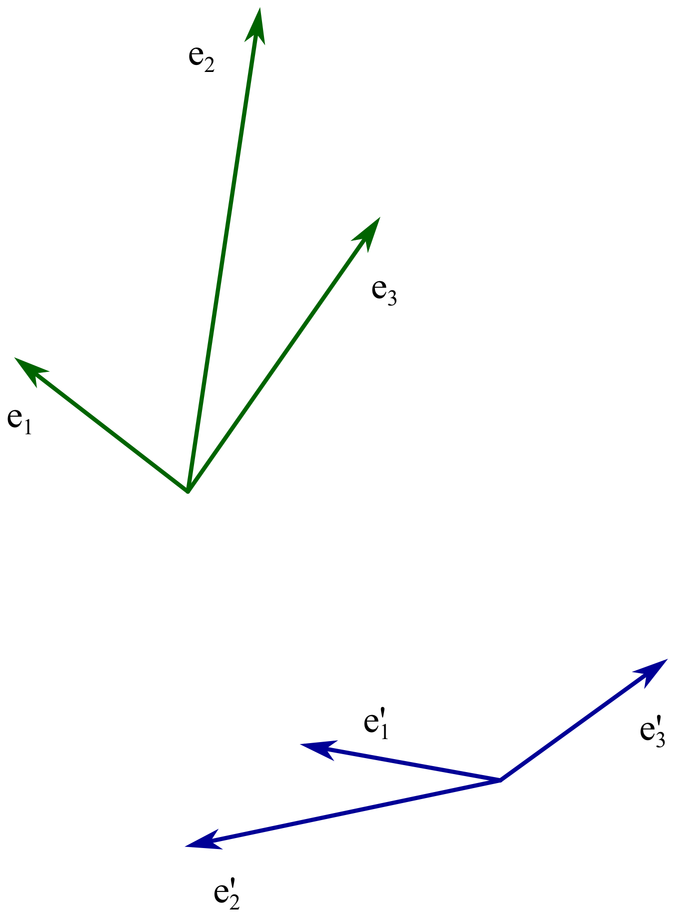


Рис. 1: Два разных базиса в пространстве.

Пусть нам также известно, как базис e' представляется в базисе e:

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = a_{11} \cdot \boldsymbol{e}_1 + a_{12} \cdot \boldsymbol{e}_2 + a_{13} \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 = a_{21} \cdot \boldsymbol{e}_1 + a_{22} \cdot \boldsymbol{e}_2 + a_{23} \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 = a_{31} \cdot \boldsymbol{e}_1 + a_{32} \cdot \boldsymbol{e}_2 + a_{33} \cdot \boldsymbol{e}_3 \end{cases} \tag{1}$$

Найти

Требуется найти, как вектор $\boldsymbol{v}$ выглядит в базисе e:

$$\boldsymbol{v} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + x_3 \boldsymbol{e}_3$$

Решение

Заметим, что текущая постановка отличается от рассмотренной в задаче ранее (1) тем, что раньше надо было найти координаты в “новом” базисе. Сейчас же, наоборот, в “старом”.

Итого, мы знаем всё про вектор $\boldsymbol{v}$ в базисе e', знаем всё про базис e' в базисе e. Кажется, что можно “сложить одно с другим”, и мы сможем найти представление $\boldsymbol{v}$ в базисе e.

Но сначала перепишем условие в более компактном виде. Векторы базисов мы уже группировали как строки: $e = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ и $e' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$. Координаты вектора $\boldsymbol{v}$ запишем в виде столбцов: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ в базисе e и $\boldsymbol{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)^T$ в базисе e'. Тогда разложение

$\boldsymbol{v}$ по базису e' и разложение e' по e можно записать так[1]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = e'\boldsymbol{x}' \\ e' = eS \end{cases}$$

где S называется *матрицей перехода* от базиса e (“старого”) к базису e' (“новому”):

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

во введённых ранее обозначениях (1). Столбцы матрицы перехода S — это координаты векторов нового базиса в старом базисе (“переход от e к e'”: зная векторы e, надо получить векторы e').

Искомое разложение $\boldsymbol{v}$ по e, аналогично, можно записать в компактном (матричном) виде так:

$$\boldsymbol{v} = e\boldsymbol{x}$$

Получается, один и тот же вектор $\boldsymbol{v}$ можно представить по-разному:

$$\boldsymbol{v} = e\boldsymbol{x} = e'\boldsymbol{x}' \tag{2}$$

Теперь выразим e' через e и подставим в формулу (2):

$$e\boldsymbol{x} = \left(eS\right)\boldsymbol{x}'$$

Так как умножение матриц ассоциативно (можно “переставить скобки”), а также дистрибутивно относительно матричного сложения (можно вынести матрицу — общий множитель за скобку):

$$e \cdot \left(S\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\right) = \boldsymbol{0}$$

Так как система векторов e линейно независима, то получаем:

$$S\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = S\boldsymbol{x}'$$

Итак, в двух базисах компоненты векторов связаны следующим образом:

$$\boxed{\begin{cases} e' = eS \\ \boldsymbol{x} = S\boldsymbol{x}' \end{cases}} \tag{3}$$

При этом при переходе, наоборот, от базиса e' к базису e можно написать аналогичное соотношение, но уже с другой матрицей перехода, которую можно обозначить как S':

$$\begin{cases} e = e'S' \\ \boldsymbol{x}' = S'\boldsymbol{x} \end{cases}$$

1.1. Поворот базиса

Рассмотрим отдельно преобразование поворота правого (поворот от первого базисного вектора ко второму по наименьшему углу происходит против часовой стрелки) ортонормированного (векторы взаимно перпендикулярны, единичной длины) базиса $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ на плоскости на угол ϕ против часовой стрелки (2).

[1]Под результатом умножения строки из векторов e на матрицу из чисел S будем иметь в виду такую строку e' из векторов, где каждый элемент равен линейной комбинации векторов умножаемой строки e с коэффициентами, равными элементам соответствующего столбца матрицы S. То есть по правилу умножения числовых матриц.

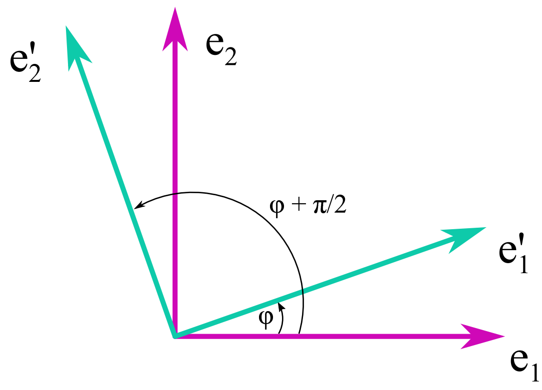


Рис. 2: Базис e' повёрнут на угол ϕ относительно базиса e.

Имеем для компонент векторов e' в базисе e:

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = |\boldsymbol{e}'_1| \cdot \cos\phi \cdot \boldsymbol{e}_1 + |\boldsymbol{e}'_1| \cdot \sin\phi \cdot \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}'_2 = |\boldsymbol{e}'_2| \cdot \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \boldsymbol{e}_1 + |\boldsymbol{e}'_2| \cdot \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \boldsymbol{e}_2 \end{cases}$$

Так как модули векторов единичные:

$$e' = e \begin{pmatrix} \cos\phi & \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\phi & \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

То есть матрица перехода:

$$S' = \begin{pmatrix} \cos\phi & \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\phi & \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

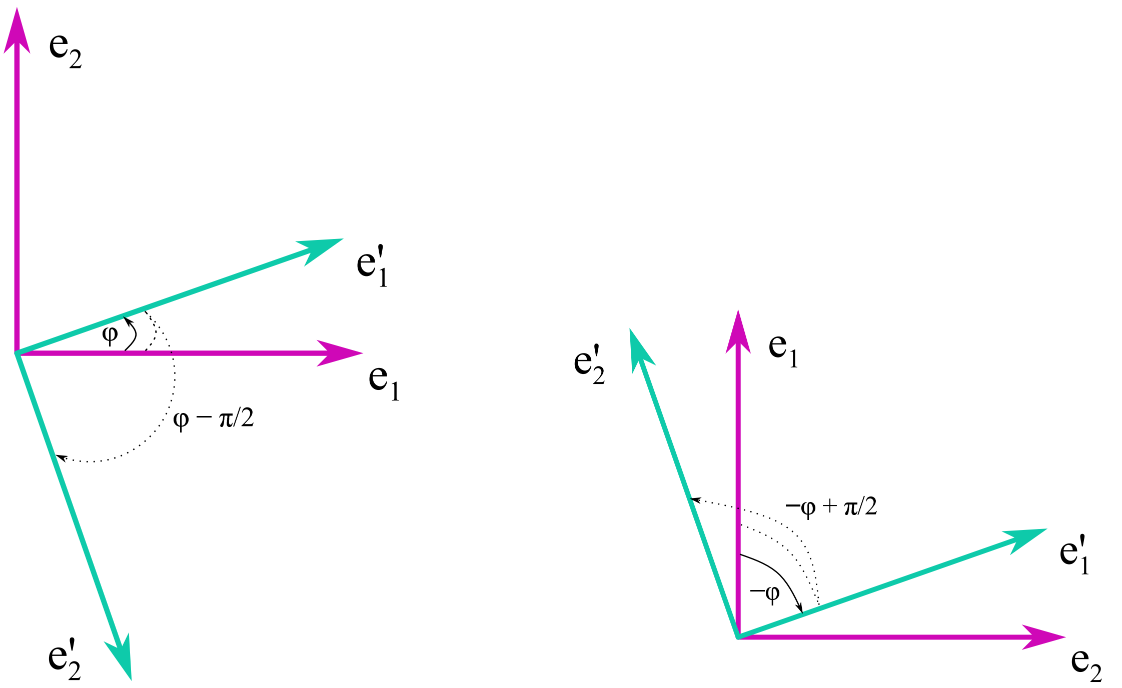
Таким образом, получили матрицу, задающую поворот правого ортонормированного базиса на угол ϕ против часовой стрелки.

Аналогично можно бы было получить матрицу перехода, если бы старый базис был левый ортонормированный, а новый получался бы его поворотом по против часовой стрелки на угол ϕ. Так же можно бы было рассмотреть и случай, когда базис e' не только повёрнут относительно e, но если второй вектор ещё отражён относительно первого. То есть если базис e' левый, а e правый, или наоборот (3). В этом случае при нахождении $\boldsymbol{e}'_2$ будет использоваться угол не $\phi + \frac{\pi}{2}$, а $\phi - \frac{\pi}{2}$.

2. Система координат (повторение)

Имея базис в пространстве, можно описать любой вектор с помощью столбца из чисел — его координат в базисе. Но как описать просто точку? Ведь у неё нет ни “длины”, ни “направления”… Один из способов — зафиксировать некоторую точку O, и строить векторы с началом в O и концом в интересующей точке пространства (*радиусы-векторы*). Тогда за описание точки можно принять координаты соответствующего ей радиуса-вектора (при выбранном базисе и выбранной точке O). Описанный способ задания точек называется *общей декартовой системой координат*[2] (4).

[2] Помимо декартовой, есть и другие системы координат. Например полярная, когда положение точки на плоскости определяется по расстоянию r от начала координат O и по углу ϕ, которое направление из начала координат на точку образует с выбранным направлением $\boldsymbol{l}$: $\boldsymbol{a} \leftrightarrow (r, \phi)$.



(a) e правый, e' левый. (b) e левый, e' правый.

Рис. 3: Базис e' повёрнут на угол ϕ относительно базиса e, при этом поворот от первого вектора ко второму по наименьшему углу в старом и новом базисах совершается в разные стороны.

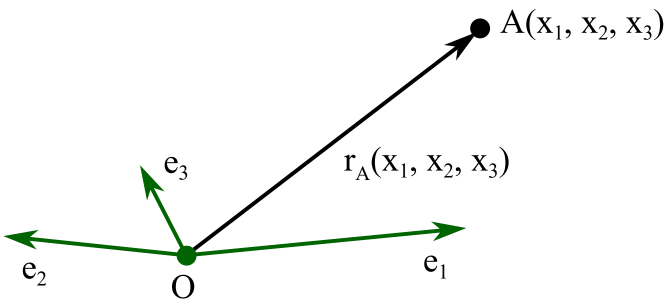


Рис. 4: Общая декартова система координат (совокупность точки и базиса) — способ описания точек в пространстве.

Определение 2.1. Общей декартовой системой координат называется совокупность точки (*начала системы координат*) и базиса: $(O; \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$.

Определение 2.2. Прямоугольной декартовой системой координат называется такая общая декартова система координат, в которой базисные векторы перпендикулярны и по длине равны единице.

Замечание. При заданной системе координат $O; \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ каждой точке A можно поставить в соответствие набор чисел — компонент радиуса-вектора точки в базисе $\overrightarrow{OA} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{e}_n$:

$$A \leftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$$

3. Замена системы координат

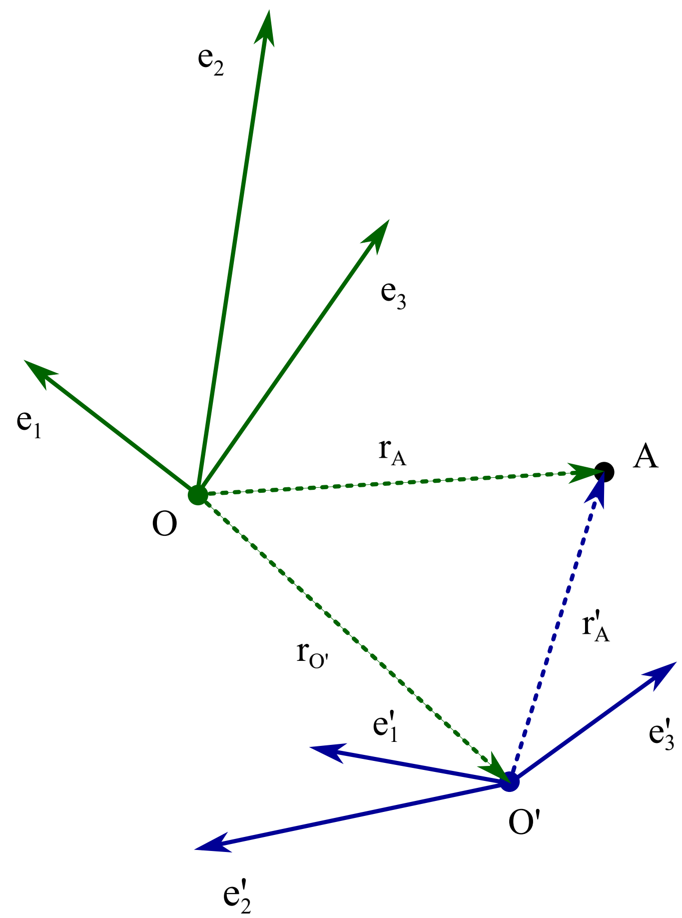


Рис. 5: Две системы координат в пространстве.

Как и с заменой базиса, может возникнуть вопрос, как меняются координаты точек при смене системы координат (5).

Дано

Пусть есть две системы координат: "старая" $(O; e)$ и "новая" $(O'; e')$. Пусть известно расположение некоторой точки A в системе координат $(O'; e')$:

$$\boldsymbol{r}'_A = e'\boldsymbol{x}'$$

Пусть также известно, как "расположена" система координат $(O'; e')$ в системе $(O; e)$: то есть как расположено начало "новой" системы O' в "старой" системе и как "новые" базисные векторы e' выражаются через "старые" векторы e:

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_{O'} = e\boldsymbol{x}_{O'} \\ e' = eS \end{cases}$$

Найти

Требуется найти положение точки A в "старой" системе координат:

$$\boldsymbol{r}_A = e\boldsymbol{x}$$

Решение

Итого, мы знаем положение точки A в "новой" системе, знаем всё о самой "новой" системе — кажется, что, объединив одно с другим, мы должны суметь найти, как точка A расположена в "старой" системе координат...

Очевидно, что по правилу треугольника (5) можем записать:

$$\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_{O'} + \boldsymbol{r}'_A$$

В соотношении выше используются векторы — направленные отрезки. Но ровно то же самое можно записать и для координатных столбцов векторов в некотором *одном* базисе:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{O'} + \underbrace{S\boldsymbol{x}'}_{\boldsymbol{r}'_A \text{ в базисе } e}$$

Итого, получаем соотношение для компонент радиусов-векторов точки в разных системах координат:

$$\boxed{\begin{cases} e' = eS \\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{O'} + S\boldsymbol{x}' \end{cases}} \qquad (4)$$

4. Задачи

Задача (4.19). *Треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (6). Точка M — точка пересечения медиан грани $A_1B_1C_1$. Требуется, зная координаты точки (x', y', z') в системе $A_1; (\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1M})$, найти её координаты (x, y, z) в системе $A; (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1})$.*

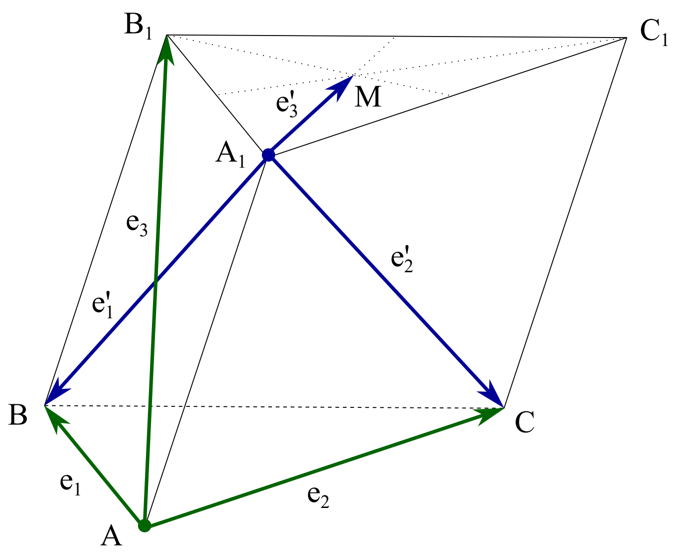


Рис. 6: Призма $ABCA_1B_1C_1$.

Решение. Что нам надо найти? Координаты в "старой" системе по координатам в "новой" системе. Значит, надо "расписать" всё про "новую" систему, сидя в "старой".

Ещё как способ понять, что через что надо выражать — это вспомнить формулы (3) или (4). Видно, что если векторы базиса связаны соотношением $e' = eS$, то компоненты векторов связаны соотношением $\boldsymbol{x} = S\boldsymbol{x}'$ и координаты точек связаны соотношением $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{O'} + S\boldsymbol{x}'$. Таким образом, чтобы решить задачу, надо найти координаты начала A_1 в системе с началом A и матрицу S, столбцы которой — компоненты базиса $\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1M}$ в базисе $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}$.

Обозначим $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}$ за $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ и разложим $\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1M}$ по этой системе:

$$\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_1$$

$$\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_2$$

$$\overrightarrow{A_1M} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1C_1}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)$$

Итого,

$$(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Положение A_1 в системе $(A; e)$:

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} = \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_1$$

Поэтому связь между координатами точек в разных системах:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}' + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

Задача (4.5). *Известно, как координаты каждой точки плоскости в системе координат $O; (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ выражаются через её координаты в системе $O'; (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$:*

$$\begin{cases} x = 2x' - y' + 5 \\ y = 3x' + y' + 2 \end{cases} \tag{5}$$

Надо найти выражение x', y' через x, y. Положение начала и координаты базисных векторов системы $O; e$ в системе $O'; e'$. И наоборот: положение начала и координаты базисных векторов системы $O'; e'$ в системе $O; e$.

Решение. С помощью метода Крамера, например, можем получить:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{5} - \dfrac{7}{5} \\ y' = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{2}{5}y + \dfrac{11}{5} \end{cases}$$

Координаты точки O в системе $O; e$ есть $x_O = (0, 0)$. Подставляя в соответствующую систему уравнений, получаем, что $x'_O = (-7/5, 11/5)$. Аналогично, координаты O' в другой системе: $x_{O'} = (5, 2)$.

Чтобы найти координаты базисных векторов, можно либо выписать матрицы перехода и вспомнить, какой смысл имеют её столбцы. Либо можно снова подставить координаты в систему. Только надо учесть, что если связь между координатами точек в разных системах координат описывается, например, системой уравнений (5), то связь между компонентами векторов в базисах этих систем будет описываться похожей системой уравнений, но без свободных членов (как бы не учитываем положение начала координат: вектор не привязан ни к какой конкретной точке, а определяется только разницей между концом и началом):

$$\begin{cases} x = 2x' - y' \\ y = 3x' + y' \end{cases}$$

Поэтому координаты, например, $\boldsymbol{e}'_1$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ будут $(2 - 0, 3 + 0) = (2, 3)$. Координаты $\boldsymbol{e}'_2$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ находим из той же системы: $(0 - 1, 0 + 1) = (-1, 1)$. Аналогично с векторами $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ в базисе $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$. $\square$

5. Дополнение

5.1. Скалярное произведение

Определение 5.1. Скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ определяется следующим образом:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \equiv |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi \tag{6}$$

где $|\boldsymbol{a}|$ и $|\boldsymbol{b}|$ — модули векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а ϕ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (не превосходящий π). В случае, если хотя бы один из пары векторов нулевой, скалярное произведение этих векторов полагается равным нулю.

Отметим несколько свойств скалярного произведения:

- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ — симметричность
- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|^2$ — скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины
- О равенстве нулю скалярного произведения:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = 0 \text{ или } \boldsymbol{b} = 0 \text{ или } \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$$

- Линейность по первому аргументу:

$$(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \beta(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

Первые три свойства следуют из определения. Докажем последнее свойство.

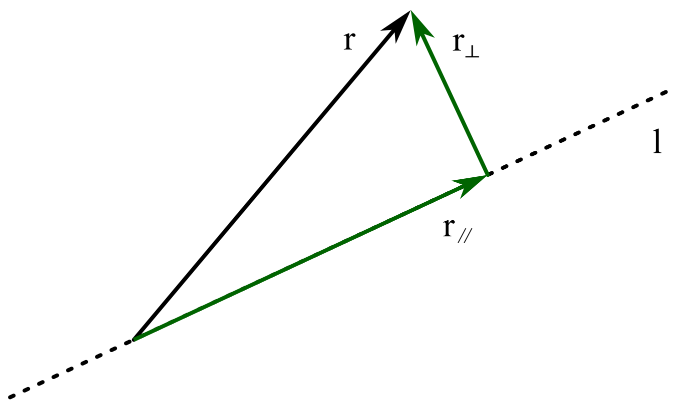


Рис. 7: Векторная проекция вектора $\boldsymbol{r}$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{l}$.

Начнём с того, что при заданном направлении $\boldsymbol{l}$ любой вектор раскладывается в сумму двух (7):

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{\parallel} + \boldsymbol{r}_{\perp}$$

где $\boldsymbol{r}_{\parallel}$ — вектор, параллельный $\boldsymbol{l}$, и $\boldsymbol{r}_{\perp}$ — вектор, перпендикулярный $\boldsymbol{l}$. Компонента $\boldsymbol{r}_{\parallel}$ называется *ортогональной векторной проекцией* вектора $\boldsymbol{r}$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{l}$, и может обозначаться так:

$$\pi_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{r}_{\parallel}$$

Кроме векторной проекции, есть ещё понятие скалярное проекции вектора $\boldsymbol{r}$ на направление вектора $\boldsymbol{l}$:

$$\pi_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{r}) \equiv |\boldsymbol{r}_{\parallel}| \cdot \begin{cases} +1 & \text{если } \boldsymbol{r}_{\parallel} \upuparrows \boldsymbol{l} \\ -1 & \text{если } \boldsymbol{r}_{\parallel} \updownarrows \boldsymbol{l} \end{cases}$$

Будем обозначать векторную и скалярную проекции одинаково. Но из контекста будет понятно, какая имеется в виду.

Спроецируем теперь вектор $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{c}$:

$$\pi_{\boldsymbol{c}}(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = |\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi$$

где $\pi_{\boldsymbol{c}}(\cdot)$ — скалярная проекция на направление вектора $\boldsymbol{c}$, ϕ — угол между вектором $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ и вектором $\boldsymbol{c}$. Но проекция вектора, являющегося суммой нескольких векторов, (в силу линейности скалярного произведения) равна сумме проекций этих векторов:

$$\pi_{\boldsymbol{c}}(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = \pi_{\boldsymbol{c}}(\alpha\boldsymbol{a}) + \pi_{\boldsymbol{c}}(\beta\boldsymbol{b})$$

поэтому

$$|\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi = |\alpha\boldsymbol{a}| \cdot \cos\phi_1 + |\beta\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi_2$$

где ϕ_1 и ϕ_2 — углы, которые образуют векторы $\alpha\boldsymbol{a}$ и $\beta\boldsymbol{b}$ с вектором $\boldsymbol{c}$. Умножая обе части последнего равенства на модуль вектора $\boldsymbol{c}$, получаем то, что хотели доказать (при этом числовые множители можно вынести за знак модуля):

$$(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \beta(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

□

Задача (2.21)**.** *Длины базисных векторов* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ *равны соответственно* 3, $\sqrt{2}$ *и* 4*. Углы между векторами* $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \angle(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 45^\circ$, $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = 60^\circ$.

Надо найти длины сторон и углы параллелограмма, построенного на векторах с координатами $(1, -3, 0)$ *и* $(-1, 2, 1)$ *в указанном базисе.*

Решение. Обозначим данные нам векторы за $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = (1, -3, 0) \\ \boldsymbol{b} = (-1, 2, 1) \end{cases}$$

Базис не ортонормированный, поэтому скалярные произведения надо будет считать “по-честному”.

Модуль вектора $\boldsymbol{a}$:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \sqrt{(\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2)} = \sqrt{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) - 6(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + 9(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)} = \sqrt{9 - 18 + 18} = 3$$

Аналогично для вектора $\boldsymbol{b}$:

$$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})} = \sqrt{(-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)(-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)} = \ldots = 5$$

Косинус угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} = \frac{(\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2) \cdot (-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)}{3 \cdot 5} = \ldots = -\frac{12}{15} = -\frac{4}{5}$$

И острый угол параллелограмма можно найти как $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$. □

В случае же **ортонормированного** базиса формулы с применением скалярных произведений упрощаются:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

$$\cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}$$

5.2. Ещё пара задач про несколько систем координат

Задача (4.23). *Пусть (x, y) — координаты точки в некоторой прямоугольной системе координат $(O; e)$, а (x', y') — координаты той же точки в некоторой другой системе координат $(O'; e')$. При этом*

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{10} \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{20} \end{cases}$$

При каком необходимом и достаточном условии вторая система координат $(O'; e')$ также будет прямоугольной?

Решение. Итак, если переписать связь между координатами точки в разных системах координат в матричном виде

$$\boldsymbol{x} = S\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}_{O'}$$

где

$$\begin{cases} S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{x}_{O'} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Тогда связь между базисами

$$e' = eS$$

$$(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2') = \begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 & a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix}$$

То, что e прямоугольный, означает, что

$$\begin{cases} (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) = 1 \\ (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 0, \ i \neq j \end{cases}$$

Выпишем аналогичные условия для базиса e':

$$\begin{cases} (\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_1') = a_{11}^2\boldsymbol{e}_1^2 + a_{21}^2\boldsymbol{e}_2^2 = 1 \\ (\boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_2') = a_{12}^2\boldsymbol{e}_1^2 + a_{22}^2\boldsymbol{e}_2^2 = 1 \\ (\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2') = a_{11}a_{12}\boldsymbol{e}_1^2 + a_{21}a_{22}\boldsymbol{e}_2^2 = 0 \end{cases}$$

И в итоге:

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases}$$

Можно заметить, что матрицы S вида

$$S = \begin{pmatrix} \cos\phi & \mp\sin\phi \\ \sin\phi & \pm\cos\phi \end{pmatrix}$$

удовлетворяют полученным соотношениям. Действительно, так как базисы e и e' оба прямоугольные, то один переводится в другой с помощью поворота или отражения[3]. □

Задача (4.30). *Пусть $(O; e)$ и $(O'; e')$ — две прямоугольные системы координат в пространстве $\mathbb{R}^3$. При этом точки O и O' различны, а концы векторов $\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{e}_i'$, отложенных из точек O и O' соответственно, совпадают ($i = 1, 2, 3$). Найти координаты точки (x, y, z) в первой системе, зная её координаты во второй системе (x', y', z').*

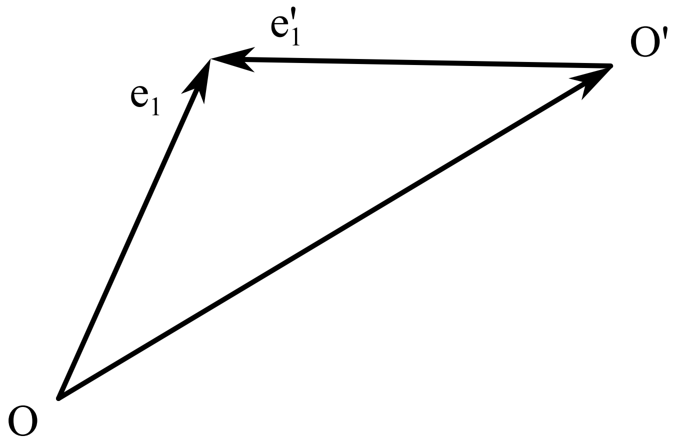


Рис. 8: Концы соответственных базисных векторов, отложенных от соответствующих начал координат, совпадают.

Решение. Условие о том, что концы базисных векторов совпадают (при условии, что векторы отложены из начал систем координат), можно записать так (8)

$$\boldsymbol{e}_i = \overrightarrow{OO'} + \boldsymbol{e}'_i$$

Нужно найти преобразование

$$\boldsymbol{x} = S\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}_{O'}$$

В то же время

$$e' = eS$$

Поэтому матрицу S можно записать так

$$S = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \overrightarrow{OO'}_e \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \overrightarrow{OO'}_e \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \overrightarrow{OO'}_e \right)$$

где $\overrightarrow{OO'}_e$ — компоненты вектора $\overrightarrow{OO'}$ в базисе e (то же самое, что и $\boldsymbol{x}_{O'}$ в формуле, связывающей координаты точек).

Получается, осталось лишь найти $\overrightarrow{OO'}$ в базисе e. Это можно сделать, потому что мы учли ещё не всю информацию о взаимном расположении систем координат. На самом деле тот факт, что обе системы координат прямоугольные и концы соответственных векторов, отложенных из начал соответствующих систем координат, совпадают, означает, что у нас есть "два поставленных друг на друга прямоугольных тетраэдра" (9).

Поэтому вектор $\overrightarrow{OO'}$ можно найти как

$$\overrightarrow{OO'} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_3 \right)$$

(так как проекция точки пересечения OO' с плоскостью концов базисных векторов на

[3] По знаку определителя матрицы S можно сказать о том, какое именно преобразование связывает два базиса: только поворот (при котором направление поворота от $\boldsymbol{e}'_1$ к $\boldsymbol{e}'_2$ по наименьшему углу совпадает с направлением поворота по наименьшему углу от $\boldsymbol{e}_1$ к $\boldsymbol{e}_2$) или ещё и отражение одного базисного вектора относительно другого (когда меняется *класс базиса*).

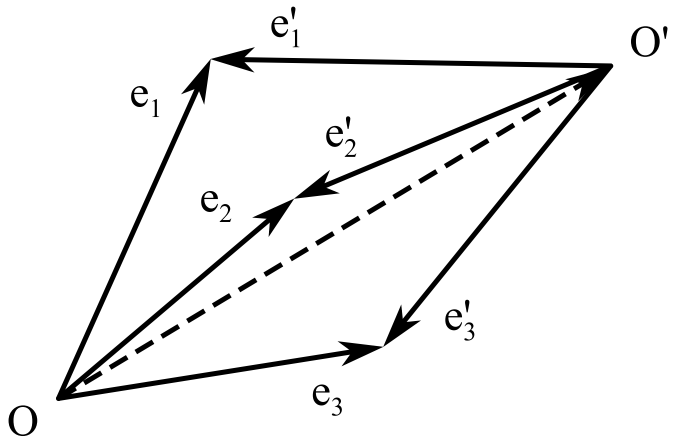


Рис. 9: Базисы, отложенные от соответствующих начал координат — прямоугольные тетраэдры.

грани векторов $\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j$ совпадает с точкой пересечения медиан треугольников соответствующих граней[4]).

Тогда матрица S равна

$$
\begin{aligned}
S &= \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix}1/3\\-2/3\\-2/3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-2/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-2/3\\-2/3\\1/3\end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix}1/3 & -2/3 & -2/3\\ -2/3 & 1/3 & -2/3\\ -2/3 & -2/3 & 1/3\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7}
$$

□

[4]Точка P пересечения OO' с плоскостью концов базисных векторов $E_1E_2E_3$ — очевидно, точка пересечения медиан $\triangle E_1E_2E_3$. То есть его центр масс. Если “двигать” одну из вершин $\triangle E_1E_2E_3$ по нормали до пересечения с гранью тетраэдра, скажем, двигать E_3 по нормали к плоскости OE_1E_2, то она окажется вершиной O при прямом угле в $\triangle OE_1E_2$, а P перейдёт в центр масс прямоугольного треугольника OE_1E_2. Но положение проекции P на грань OE_1E_2 не менялось при сдвиге вершины E_3 по нормали к OE_1E_2.