Семинар 1

Алексеев Василий

4 февраля + 5 февраля 2021

Содержание

1. Ранг матрицы

2. Задачи

2.1. # 15.45(2)

Вычислить обратную для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Найдём обратную с помощью метода Гаусса. Далее фиолетовым цветом будем выделять элемент в столбце, с помощью которого будем занулять другие элементы в том же столбце. Те, которые зануляем на данном шаге, будем отмечать красным цветом. Когда столбец "готов" (остался один ненулевой — фиолетовый), переходим к другому столбцу и снова выбираем ненулевой элемент для "зачищения столбца", но *из строчек, откуда ещё не выбирали*.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\widetilde{(1) \leftrightarrow (3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{-1} & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\widetilde{(3) = (3) + (1) \cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\widetilde{(2) = (2)/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & \mathbf{-1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & \mathbf{-3} & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{(3)=(3)+(2)\cdot 3 \\ (1)=(1)+(2)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & \mathbf{1/2} & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & \mathbf{-1/2} & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1/2} & 1 & 3/2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{(2)=(2)+(3) \\ (1)=(1)-(3)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 3/2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{(1)=-1\cdot(1) \\ (3)=2\cdot(3)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Можно проверить:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Почему преобразования строк у “сдвоенной” матрицы позволило найти A^{-1}? Каждое элементарное преобразование строк[1] можно задать невырожденной матрицей S, умножение на которую слева равносильно данному преобразованию строк. Таким образом, каждый шаг метода Гаусса можно рассматривать как умножение слева на некоторую S_i:

$$\left(A \mid E\right) \to \left(S_1 A \mid S_1 E\right) \to \ldots \to \left(\overbrace{S_n \ldots S_1 A}^{E} \mid \overbrace{S_n \ldots S_1 E}^{B}\right)$$

где единичная матрица $E = S_n \ldots S_1 A$ — то, что стремимся получить слева, справа же получается матрица $B = S_n \ldots S_1 E = S_n \ldots S_1$. Выходит, $E = BA$, что равносильно тому, что $B = A^{-1}$.

Отступление

Найдём интереса ради какую-нибудь S_i. Например, S_1, которая задаёт перестановку строк. Правда, перестановка строк — не совсем элементарное преобразование. Разложим его сначала на элементарные.

Мы хотим задать преобразование перестановки строк (первой и третьей):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Это преобразование можно представить как композицию преобразований (над-под каждой стрелочкой обозначено элементарное преобризование и его матрица[2]):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)=(3)+(1)]{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(1)=(1)-(3)]{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)=(3)+(1)]{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(1)=-1\cdot(1)]{\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

И в итоге, S_1, задающая первую перестановку строк:

$$S_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ldots$$

□

[1] Умножение строки на число, отличное от нуля, и прибавление к одной строке другой

[2] Матрица, которую можно получить,например, из единичной, проведя над её строками аналогичное преобразование.

2.2. # 15.65(1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Какая размерность у матрицы X? Очевидно, если $X_{m\times n}$, то $m = 2$ и $n = 2$.

Также можно заметить, что матрица, которая известный множитель, и матрица-результат невырождены. Поэтому и X должна быть невырождена.

Чтобы найти X, можно умножить обе части уравнение на обратную к матрице-множителю:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

В итоге (после нахождения обратной по формуле или с помощью метода Гаусса) получается, что

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Отступление

Рассмотрим уравнение в форме

$$AX = B$$

В задаче A и B были невырождены. Но что было бы, если бы одна или две из них были бы вырождены?

Уравнение

$$(\text{невыр.})\ X = (\text{выр.})$$

очевидно, не имеет решений.

То же самое можно сказать и про уравнение

$$(\text{выр.})\ X = (\text{невыр.})$$

Но в случае

$$(\text{выр.})\ X = (\text{выр.})$$

всё зависит от конкретных матриц.

Например, пусть дано уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Если искать матрицу X в виде $X = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, то матричное уравнение можно будет переписать как систему их четырёх скалярных уравнений

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ b + d = 3 \\ a + c = 2 \\ b + d = 6 \end{cases}$$

у которой нет решений.

Но для уравнения же

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

аналогичная система скалярных уравнений

$$\begin{cases} a + 2c = 2 \\ b + 2d = 1 \\ a + 2c = 2 \\ b + 2d = 1 \end{cases}$$

уже будет иметь решение, причём не одно[3]. И решение X уравнение в общем виде будет

$$X = \begin{pmatrix} 2 - 2c & 1 - 2d \\ c & d \end{pmatrix}, \quad c, d \in \mathbb{R}$$

(c и d выбраны в качестве параметрических переменных, остальные две из системы выражены через них)

2.3. # 16.19(3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Rg} A = ?$$

Решение. Чтобы найти ранг матрицы, можно методом Гаусса привести её к упрощённому виду (то есть “пытаться” преобразованиями строк привести матрицу A к единичной; некоторые строки в общем случае могут оказаться нулевыми). Первым преобразованием можно вычесть первую строку из второй и третьей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & \alpha - 1 \\ 0 & \alpha^2 - 1 & \alpha^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Далее метод Гаусса продолжать нельзя, пока не стало понятно, нулевые вторая и третья строки или нет. Например, следующим шагом метода Гаусса могла бы быть “чистка второго столбца”, но для этого во второй или третьей строчке должен быть ненулевой элемент во втором столбце.

$$\alpha - 1 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Rg} A = 1$$

$$\alpha^2 - 1 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \alpha = -1 \text{ (1 уже рассмотрели)} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Rg} A = 2$$

Остаются случаи $\alpha \neq 1; 2$. При таком α вторая и третья строки точно ненулевые. Если они к тому же линейно независимы, то ранг матрицы A будет равен 3. Если линейно зависимы — ранг будет равен 2. Найдём, какие α будут давать ранг 2:

$$\alpha - 1 = k \cdot (\alpha^2 - 1), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

В результате получаем $\alpha = \frac{1}{k} - 1$. То есть ранг матрицы A при всех оставшихся α будет равен 2. □

[3] Дело в том, что умножение матрицы A справа на матрицу X равносильно преобразованию столбцов (которое задаёт матрица X) матрицы A. Для рассматриваемого уравнения $AX = B$ такое преобразование столбцов, очевидно, существует.