Семинар 6 + 5

Линейные преобразования евклидовых пространств. “Diag 1.2”

Алексеев Василий

21 апреля + 25 апреля 2022

Содержание

Жирным шрифтом обозначаются как векторы линейного пространства, так и их координатные столбцы в выбранном базисе. При этом и векторы, и их координатные столбцы обозначаются, как правило, одинаковыми буквами. Например, $\boldsymbol{x} \in X$ *(вектор) и* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\dim X}$ *(координатный столбец). Таким образом, смысл зависит от контекста* ¯_(ツ)_/¯

1. Самосопряжённые преобразования

1.1. # 29.19(7)

Преобразование $\phi: X \to X$, где X — евклидово пространство, задано в *ортонормированном базисе* матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -4 & 16 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Надо найти ортонормированный базис из собственных векторов преобразования ϕ, матрицу перехода S к этому базису, и матрицу преобразования ϕ в указанном базисе.

Решение. Найдём **собственные значения** преобразования ϕ. Характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & 1 \\ -4 & 16-\lambda & -4 \\ 1 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = \lambda^2(18-\lambda) = 0$$

Корни характеристического уравнения:

$$\left[\begin{aligned} &\lambda = 0 \quad \text{(кратность 2)} \\ &\lambda = 18 \end{aligned}\right.$$

Видно, что *все корни характеристического уравнения вещественные*, поэтому они же — и собственные значения преобразования ϕ.

При этом то, что $\lambda = 0$ — собственное значение, можно бы было (стоило бы) заметить и в самом начале, ведь у матрицы A строки уже линейно зависимы (первая и третья совпадают), то есть $\det(A - \lambda E)|_{\lambda=0} = 0$.

Найдём **собственные векторы** преобразования ϕ (максимальную линейно независимую систему собственных векторов). При $\lambda = 0$ получаем следующее уравнение для поиска собственных векторов:

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -4 & 16 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

Последнее матричное уравнение равносильно одному скалярному уравнению

$$x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$$

Из которого можно выразить x_1 через x_2 и x_3:

$$x_1 = 4t_1 - t_2, \quad x_2 = t_1 \in \mathbb{R}, \quad x_3 = t_2 \in \mathbb{R}$$

Тогда общее решение $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (произвольный вектор из собственного подпространства $\mathrm{Ker}(A - \lambda E)|_{\lambda=0}$) можно выписать в виде:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4t_1 - t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = t_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Видно, что в качестве базиса в собственном подпространстве ϕ, соответствующем собственному значению $\lambda = 0$ (максимальная линейно независимая система собственных векторов для $\lambda = 0$) можно взять векторы:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Не лишним будет на всякий случай проверить, что $A\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}$ и $A\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}$.)

Теперь найдём собственные векторы для $\lambda = 18$. Уравнение, определяющее соответствующее собственное подпространство:

$$\begin{pmatrix} -17 & -4 & 1 \\ -4 & -2 & -4 \\ 1 & -4 & -17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Упростим матрицу соответствующей однородной системы:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{-17} & -4 & 1 \\ \mathbf{-4} & -2 & -4 \\ 1 & -4 & -17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -72 & -288 \\ 0 & -18 & -72 \\ 1 & -4 & -17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & \mathbf{-4} & -17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

То есть упрощённая система будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \quad x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 \quad\quad - \; x_3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2 = -4x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$$

Общее решение:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} t \\ -4t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Базис в собственном подпространстве (один вектор):

$$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(На всякий случай убеждаемся, что $A\boldsymbol{x}_3 = 18\boldsymbol{x}_3$.)

Таким образом, мы нашли *базис из собственных векторов* преобразования ϕ:

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{1}$$

Теперь проведём **ортогонализацию** системы векторов (1). Исходный базис ортонормированный, поэтому скалярное произведение между векторами $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ считается как

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

Видно, что $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3) = 4 - 4 + 0 = 0$. Так же, как и $(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = -1 + 0 + 1 = 0$.

То есть *собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям преобразования ϕ, ортогональны*.

Остаётся "поправить" подсистему $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$, потому что $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = -4 \neq 0$. Вычтем, например, из $\boldsymbol{x}_1$ его ортогональную проекцию на $\boldsymbol{x}_2$:

$$\boldsymbol{x}_1' = \boldsymbol{x}_1 - \frac{(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)}{|\boldsymbol{x}_2|} \cdot \frac{\boldsymbol{x}_2}{|\boldsymbol{x}_2|} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

где было использовано, что $|\boldsymbol{x}_2|^2 = 1 + 0 + 1 = 2$.

Убеждаемся, что $(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2) = -2 + 0 + 2 = 0$. Так как мы считали $\boldsymbol{x}_1'$ как линейную комбинацию $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$, то $(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_3) = 0$ (можно не проверять ортогональность $\boldsymbol{x}_3$; ну, или можно проверить, но стоит понимать, что ничего удивительного в сохранении ортогональности $\boldsymbol{x}_1'$ и $\boldsymbol{x}_3$ нет). Получили ортогональную систему из собственных векторов преобразования ϕ?.. А остался ли вектор $\boldsymbol{x}_1'$ собственным для $\lambda = 0$? Да, ведь он получен как линейная комбинация $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ — векторов из собственного подпространства $\mathrm{Ker}(A - \lambda E)|_{\lambda=0}$, а потому $\boldsymbol{x}_1'$ тоже лежит в указанном собственном подпространстве ($A\boldsymbol{x}_1' = \boldsymbol{0}$).

Итого, помимо просто базиса из собственных векторов, для преобразования ϕ *существует ортогональный базис из собственных векторов*:

$$\{\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{2}$$

Чтобы **нормировать** базис, надо теперь просто поделить все векторы (2) на их модули:

$$\begin{cases} |\boldsymbol{x}_1'| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3 \\ |\boldsymbol{x}_2| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \\ |\boldsymbol{x}_3| = \sqrt{1 + 16 + 1} = 3\sqrt{2} \end{cases}$$

Имеем следующий ортонормированный базис из собственных векторов:

$$\{\boldsymbol{x}_1'', \boldsymbol{x}_2'', \boldsymbol{x}_3''\} = \left\{ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{3}$$

Матрица перехода S от старого ортонормированного базиса в новому $\{\boldsymbol{x}_1'', \boldsymbol{x}_2'', \boldsymbol{x}_3''\}$ — это матрица, столбцы которой есть компоненты новых базисных векторов в старом базисе. То есть матрица S получается просто объединением столбцов (3) в матрицу:

$$S = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/\sqrt{2} & 1/\left(3\sqrt{2}\right) \\ 1/3 & 0 & -4/\left(3\sqrt{2}\right) \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/\left(3\sqrt{2}\right) \end{pmatrix}$$

Можно заметить, что $S^T S = E$, то есть матрица перехода S ортогональная. Это потому, что S — матрица перехода от *одного ортонормированного* базиса к *другому ортонормированному* базису. Например,

$$(S^T S)_{12} = \boldsymbol{x}_1''^T \boldsymbol{x}_2'' \xlongequal{\text{старый ОНБ}} (\boldsymbol{x}_1'', \boldsymbol{x}_2'') \xlongequal{\text{новый ОНБ}} 0$$

Чтобы найти матрицу A' преобразования ϕ в новом базисе, можно воспользоваться либо тем, что новый базис — это базис из собственных векторов (например, в новом базисе $\boldsymbol{x}_1''$ имеет координаты $(1, 0, 0)^T$, поэтому образ $\boldsymbol{x}_1''$ будет просто первым столбцом A', а это $\lambda \boldsymbol{x}_1''|_{\lambda=0}$, так как вектор $\boldsymbol{x}_1''$ — собственный, соответствующий $\lambda = 0$), то есть

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

Либо тем, что уже известна матрица S перехода от старого базиса к новому:

$$A' = S^{-1}AS \overset{S^T S = E}{=\!=\!=\!=} S^T AS = \ldots = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

Первый способ, очевидно, побыстрее :) Но вторым, с матрицей S, можно хотя бы проверить, что всё в порядке. Если только не ошибиться в процессе самой проверки :) $\square$

1.2. Самосопряжённые преобразования

Пусть есть линейное преобразование $\phi\colon X \to X$ *евклидова* пространства X (то есть пространство, в котором выбрано скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$). Тогда преобразованием, *сопряжённым* преобразованию ϕ, называется преобразование $\phi^*\colon X \to X$, такое что

$$\boxed{\big(\phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}\big) = \big(\boldsymbol{x}, \phi^*(\boldsymbol{y})\big), \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X} \tag{4}$$

Пусть e — базис в X. Пусть матрица A — матрица преобразования ϕ в этом базисе, A^* — матрица сопряжённого преобразования ϕ^*, а Γ — матрица Грама базиса. Тогда левую часть соотношения (4) можно переписать в таком виде:

$$(\phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x})^T \Gamma \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T \cdot A^T \Gamma \cdot \boldsymbol{y}$$

А правая часть (4) будет выглядеть как

$$(\boldsymbol{x}, \phi^*(\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{x}^T \Gamma (A^* \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \cdot \Gamma A^* \cdot \boldsymbol{y}$$

Так как (4) верно для произвольной пары $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, то равны “матрицы посередине”:

$$\boxed{A^T \Gamma = \Gamma A^*} \tag{5}$$

Так как Γ — матрица Грама, то можно соотношение между матрицами исходного и сопряжённого преобразований переписать в таком виде:

$$A^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma$$

В *ортонормированном* базисе матрица сопряжённого преобразования оказывается равной

$$A^* = A^T \quad \text{(ОНБ)}$$

Преобразование ϕ евклидова пространства X называется *самосопряжённым*, если оно совпадает со своим сопряжённым ϕ^*, то есть $\phi(\boldsymbol{x}) = \phi^*(\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{x} \in X$, или:

$$\boxed{\big(\phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}\big) = \big(\boldsymbol{x}, \phi(\boldsymbol{y})\big), \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X} \tag{6}$$

Матрица самосопряжённого преобразования удовлетворяет соотношению:

$$\boxed{A^T\Gamma = \Gamma A} \tag{7}$$

В ортонормированном базисе:

$$A = A^T \quad \text{(ОНБ)}$$

Отметим несколько свойств самосопряжённых преобразований в контексте собственных значений и собственных векторов.

Теорема 1.1. *Все корни характеристического уравнения самосопряжённого преобразования вещественные*[1].

Пример. Убедимся в этом на примере самосопряжённого преобразования двумерного пространства, заданного матрицей в ортонормированном базисе (симметричной). Пусть матрица преобразования $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$. Тогда характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (a+c)\lambda + (b^2 + ac) = 0$$

Дискриминант $(a+c)^2 - 4(b^2 + ac) = (a-c)^2 + b^2 \geq 0$, поэтому оба корня $\lambda_{1,2}$ действительные.

Пусть теперь λ_1 и λ_2 — различные собственные значения самосопряжённого преобразования ϕ. Пусть $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ — соответственные собственные векторы. Тогда, с одной стороны,

$$(\phi(\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{x}_2) = (\lambda_1\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \lambda_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$$

С другой стороны,

$$(\phi(\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1, \phi(\boldsymbol{x}_2)) = (\boldsymbol{x}_1, \lambda_2\boldsymbol{x}_2) = \lambda_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$$

Отсюда получаем, что

$$\lambda_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \lambda_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \Leftrightarrow (\lambda_2 - \lambda_1)(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$$

Но собственные значения по условию различны, поэтому $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$. То есть *собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям самосопряжённого преобразования, ортогональны*[2].

Теорема 1.2. *Для самосопряжённого преобразования ϕ найдётся ортонормированный базис из собственных векторов.*

То есть, с одной стороны, найдётся базис из собственных векторов (даже если у характеристического уравнения будут кратные корни — каждому собственному значению будет соответствовать собственное подпространство той же размерности, что и кратность собственного значения как корня характеристического уравнения). С другой стороны, базис можно будет ортогонализировать.

[1]При этом интересно, что корни характеристического уравнения — это характеристика именно преобразования, а самосопряжённость связана с конкретным скалярным произведением.

[2]Собственные векторы ненулевые по определению, поэтому можно говорить именно об ортогональности (“угол между векторами равен 90 градусам”).

Пример. Преобразование, рассмотренное в (1.1), было задано симметричной матрицей в ортонормированном базисе. То есть преобразование было самосопряжённым. Поэтому для него точно можно было найти ортонормированный базис из собственных векторов.

Итак, свойство самосопряжённости связано со скалярным произведением, выбранным в пространстве X. Проверим, что матричное соотношение (7), хотя матрицы и зависят от выбора базиса, выполняется и при *смене базиса* (очевидно, должно выполняться, ведь в определении самосопряжённого преобразования (6) никакой конкретный базис не участвовал). Пусть e — "старый" базис, а $e' = eS$ — "новый" базис. Тогда матрица преобразования в новом базисе $A' = S^{-1}AS$, матрица Грама нового базиса $\Gamma' = S^T \Gamma S$, и соотношение (7), которое хотим проверить для новых матриц:

$$\begin{aligned} A'^T\Gamma' = \Gamma' A' &\Leftrightarrow (S^{-1}AS)^T(S^T\Gamma S) = (S^T\Gamma S)(S^{-1}AS) \\ &\Leftrightarrow S^T A^T \Gamma S = S^T \Gamma A S \Leftrightarrow A^T\Gamma = \Gamma A \end{aligned}$$

То есть, да, от выбора базиса самосопряжённость не зависит.

1.3. # 29.14(2, 3)

Может ли самосопряжённое преобразование в каком-то базисе иметь матрицу A_2 или A_3, где

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$$

Решение. То есть скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ задано, можно только пытаться найти подходящий базис.

Рассмотрим матрицу A_2. Её характеристическое уравнение:

$$\det(A_2 - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

Очевидно, нет действительных корней. Поэтому преобразование с матрицей A_2 не может быть самосопряжённым (1.1).

Характеристическое уравнение для матрицы A_3:

$$\det(A_3 - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 14 \\ 6 & 13-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 18\lambda - 19 = 0$$

$$\left[\begin{aligned} \lambda &= -1 \\ \lambda &= 19 \end{aligned}\right.$$

То есть у преобразования ϕ с матрицей A_3 точно есть базис из собственных векторов. *Если* получится найти *ортонормированный* базис из собственных векторов, то в этом базисе матрица ϕ будет диагональной, а потому преобразование ϕ будет самосопряжённым (как преобразование с симметричной матрицей в ортонормированном базисе).

Будут ли собственные векторы ортогональны или нет — очевидно, как раз зависит от выбора базиса. Найдём собственные векторы:

$$A_3\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}|_{\lambda=-1} \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 = (7, -3)^T$$

$$A_3\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}|_{\lambda=19} \Rightarrow \boldsymbol{x}_2 = (1, 1)^T$$

Пусть матрица Грама искомого базиса равна $\Gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$, $a > 0$, $ac - b^2 > 0$. Тогда скалярное произведение собственных векторов будет равно

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{x}_1^T \Gamma \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Хотим найти базис, такой что $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$. Приходим к условию на элементы матрицы Грама:

$$7a + 7b - 3b - 3c = 7a + 4b - 3c = 0$$

Итого, объединяя условия, связанные с положительной определённостью матрицы Грама, сводим поиск базиса к поиску решения следующей системы с ограничениями:

$$\begin{cases} 7a + 4b - 3c = 0 \\ a > 0 \\ ac - b^2 > 0 \end{cases}$$

Равенство задаёт плоскость в пространстве (a, b, c), первое неравенство — полупространство, второе — “внутренность” конуса. В качестве решения можно взять, например, следующее:

$$a = 3, \quad b = 0, \quad c = 7$$

То есть искомый базис — такой, матрица Грама которого равна, например, $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{smallmatrix}\right)$.

Для поиска матрицы Грама базиса можно бы было идти другим путём. Матрица самосопряжённого преобразования удовлетворяет условию (7):

$$A_3^T G = G A_3$$

Если снова обозначить матрицу Грама как $\Gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$, $a > 0$, $ac - b^2 > 0$, то получаем

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 14 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5a + 6b & 5b + 6c \\ 14a + 13b & 14b + 13c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a + 6b & 14a + 13b \\ 5b + 6c & 14b + 13c \end{pmatrix}$$

Что равносильно

$$14a + 13b = 5b + 6c \Leftrightarrow 7a + 4b - 3c = 0$$

Получили то же, что и в прошлый раз (когда требовали ортогональность собственных векторов).

P.S. (“Объяснение” на пальцах)

Итого, мы проверили на конкретном примере, что если на плоскости даны в координатах два неколлинеарных вектора, то можно найти базис, в котором векторы с такими координатами будут перпендикулярны (скалярное произведение фиксировано). Можно себе это представить как “преобразование плоскости”: если два вектора неколлинеарны, то можно немного “сжать-растянуть” (“повернуть”) всё так, чтоб стали перпендикулярны (1).

□

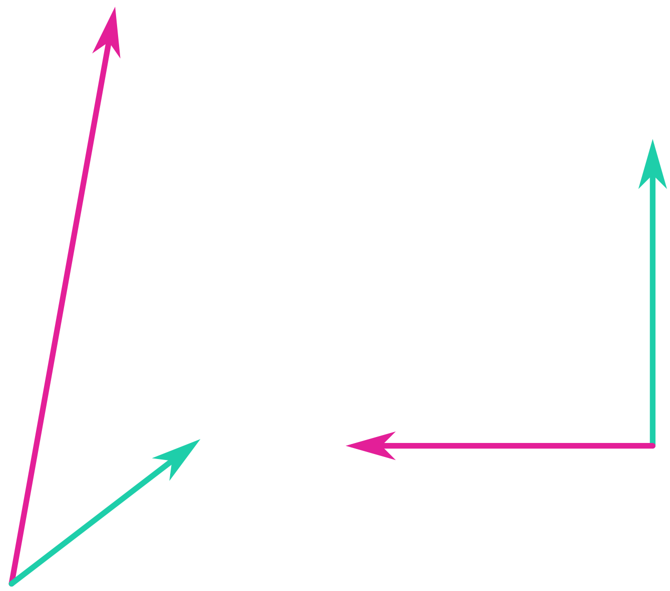

Рис. 1: Два вектора с координатами $(1,0)$ и $(0,1)$: не перпендикулярны в одном базисе (слева), но перпендикулярны в другом базисе (справа).

2. Ортогональные преобразования

Преобразование ϕ евклидова пространства X называется *ортогональным*, если оно сохраняет скалярное произведение. То есть если

$$\boxed{\big(\phi(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{y})\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X} \tag{8}$$

Так как скалярное произведение, как симметричная билинейная форма, выражается через соответствующую квадратичную форму, то сохранение скалярного произведения равносильно сохранению длины. То есть преобразование ортогональное, если сохраняет длины:

$$\boxed{\big(\phi(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{x})\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in X}$$

Пусть в X выбран базис $e = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$. Пусть матрица A — матрица ортогонального преобразования ϕ в этом базисе, а Γ — матрица Грама базиса. Тогда левую часть (8) можно расписать так:

$$(\phi(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{y})) = (A\boldsymbol{x})^T \Gamma (A\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \cdot A^T \Gamma A \cdot \boldsymbol{y}$$

Правая часть (8):

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \Gamma \boldsymbol{y}$$

Соотношение (8) выполнено при произвольных $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, поэтому получаем следующий критерий ортогональности преобразования в матричном виде:

$$\boxed{A^T \Gamma A = \Gamma}$$

В ортонормированном базисе:

$$A^T A = E \quad \text{(ОНБ)} \tag{9}$$

То есть *матрица ортогонального преобразования в ортонормированном базисе ортогональна*.

Вернёмся к определению ортогонального преобразования (8). Ещё один вариант переписать то же самое — представив векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ как линейные комбинации базисных. Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — координатный столбец вектора $\boldsymbol{x}$, и $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$ — координатный столбец вектора $\boldsymbol{y}$. Тогда:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= (x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n, y_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n) \\ &= x_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)y_1 + x_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)y_2 + \ldots + x_n(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_n)y_n \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)y_j\end{aligned}$$

В то же время:

$$\begin{aligned}(\phi(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{y})) &= \big(\phi(x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n), \phi(y_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n)\big) \\ &= \big(x_1\phi(\boldsymbol{e}_1) + \ldots + x_n\phi(\boldsymbol{e}_n), y_1\phi(\boldsymbol{e}_1) + \ldots + y_n\phi(\boldsymbol{e}_n)\big) \\ &= x_1\big(\phi(\boldsymbol{e}_1), \phi(\boldsymbol{e}_1)\big)y_1 + x_1\big(\phi(\boldsymbol{e}_1), \phi(\boldsymbol{e}_2)\big)y_2 + \ldots + x_n\big(\phi(\boldsymbol{e}_n), \phi(\boldsymbol{e}_n)\big)y_n \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i\big(\phi(\boldsymbol{e}_i), \phi(\boldsymbol{e}_j)\big)y_j\end{aligned}$$

Получаем, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_i(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)y_j = \sum_{i,j=1}^{n} x_i\big(\phi(\boldsymbol{e}_i), \phi(\boldsymbol{e}_j)\big)y_j, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$$

Это значит, что ортогональность преобразования ϕ равносильна также следующему условию:

$$\boxed{\begin{cases}\big(\phi(\boldsymbol{e}_i), \phi(\boldsymbol{e}_j)\big) = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \\ i = 1 \ldots n, \quad j = 1 \ldots n\end{cases}} \tag{10}$$

(которое, в свою очередь, можно заметить, приводит к уже ранее полученному $A^T\Gamma A = \Gamma$).

То есть сохранение ортогональным преобразованием скалярного произведения для *любой* пары векторов — это то же самое, что сохранение скалярного произведения *лишь* для $n(n-1)/2$ пар базисных векторов.

Отметим одно свойство собственных значений ортогонального преобразования ϕ. Пусть λ — собственное значение ϕ, и $\boldsymbol{x}$ — соответствующий собственный вектор. Тогда

$$(\phi(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{x})) = (\lambda\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}) = \lambda^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \xlongequal{\phi \text{ ортогональное}} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$$

То есть $\lambda^2 = 1$. Иными словами, *собственные значения ортогонального преобразования по модулю равны единице*.

2.1. # 29.47(1)

В евклидовом пространстве X выбран ортонормированный базис. Дано преобразование ϕ, про которое известно, что оно переводит столбцы матрицы A в столбцы матрицы B, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Является ли ϕ ортогональным?

Решение. Будем считать, что ϕ переводит первый столбец A в первый столбец B, и второй столбец A во второй столбец B (видимо, так предполагается по условию, хотя вообще это не важно, какой столбец в какой переходит).

Видно, что столбцы A не пропорциональны (так же, как и столбцы B). Поэтому можно взять векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ с координатными столбцами, совпадающими со столбцами матрицы A, в качестве базиса в X. Тогда столбцы B будут совпадать с координатными столбцами $\phi(\boldsymbol{x})$ и $\phi(\boldsymbol{y})$. И для проверки ортогональности ϕ достаточно проверить (10), то есть

$$\begin{cases} \big(\phi(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{x})\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \\ \big(\phi(\boldsymbol{y}), \phi(\boldsymbol{y})\big) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \\ \big(\phi(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{y})\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{cases}$$

Подставляя числа из матриц A и B (и учитывая, что исходный базис ОНБ), получаем:

$$\begin{cases} 16 + 49 = 65 = 64 + 1 \\ 4 + 1 = 5 = 4 + 1 \\ 8 + 7 = 15 = 16 - 1 \end{cases}$$

То есть, да, преобразование ϕ является ортогональным.

Можно бы было действовать по-другому. Пусть F — матрица преобразования ϕ. Преобразование будет ортогональным, если матрица F ортогональна (9) (исходный базис ОНБ). По условию сказано, что

$$\begin{cases} \phi:\ (4, 7)^T \mapsto (8, 1)^T \\ \phi:\ (2, 1)^T \mapsto (2, -1)^T \end{cases}$$

Это можно переписать как

$$\begin{cases} F \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \\ F \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Далее компактнее это можно записать просто как

$$FA = B$$

Откуда получаем, что

$$F = BA^{-1}$$

(Уже отметили, что столбцы A не пропорциональны, поэтому точно существует A^{-1}). Подставляя числа, находим матрицу преобразования

$$F = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Очевидно[3], что $FF^T = E$, то есть, да, ϕ ортогонально. □

[3] Матрица F из “косинусов и синусов”.