Семинар 4

Алексеев Василий

22 + 27 сентября 2021

Содержание

1. Замена системы координат (“флешбэк”)

Задача (4.5). *Есть две системы координат:* $(O; \boldsymbol{e})$ *и* $(O'; \boldsymbol{e}')$. *Координаты произвольной точки в первой системе обозначаются за* (x, y)*, координаты той же точки, но во второй системе координат —* (x', y'). *Известна связь между* (x, y) *и* (x', y')*:*

$$\begin{cases} x = 2x' - y' + 5 \\ y = 3x' + y' + 2 \end{cases}$$

Требуется найти

- *Выражение* (x', y') *через* (x, y).
- *Координаты точки* O *и компоненты векторов* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ *в системе* $O'; \boldsymbol{e}'$.
- *Координаты точки* O' *и компоненты векторов* $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ *в системе* $O; \boldsymbol{e}$.

Решение. Перепишем связь между координатами точки в разных системах в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}^{S} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Перепишем как

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-5 \\ y-2 \end{pmatrix}$$

И решим получившуюся систему относительно (x', y') с помощью метода Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$$

$$\Delta_{x'} = \begin{vmatrix} x-5 & -1 \\ y-2 & 1 \end{vmatrix} = x + y - 7$$

$$\Delta_{y'} = \begin{vmatrix} 2 & x-5 \\ 3 & y-2 \end{vmatrix} = -3x + 2y + 11$$

И сами координаты:

$$x' = \frac{\Delta_{x'}}{\Delta} = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y - \frac{7}{5}$$

$$y' = \frac{\Delta_{y'}}{\Delta} = -\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{11}{5}$$

Или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ -3/5 & 2/5 \end{pmatrix}}^{S'} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7/5 \\ 11/5 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Итак, теперь известны обе матрицы перехода S и S': от базиса $\boldsymbol{e}$ к $\boldsymbol{e}'$ и наоборот[1].

[1] Можно заметить, что $SS' = S'S = E$, то есть $S' = S^{-1}$.

Вспоминая соотношение для компонент радиусов-векторов точки в разных системах координат

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S \\ \boldsymbol{x}_A = \boldsymbol{x}_{O'} + S\boldsymbol{x}'_A \end{cases}$$

или просто подставляя нулевые векторы в соотношения для координат, получаем положения начал:

- Нулевой вектор в (1) $\Rightarrow \boldsymbol{x}_O(O') = (5, 2)^T$
- Нулевой вектор в (2) $\Rightarrow \boldsymbol{x}_{O'}(O) = \left(-\frac{7}{5}, \frac{11}{5}\right)^T$

Вспоминая, что столбцы матриц S и S' есть компоненты векторов одного базиса в другом, или просто умножая матрицы S и S' на векторы $(1, 0)^T$ и $(0, 1)^T$, получаем компоненты одних базисных векторов в другом базисе:

- Столбцы S' ($\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}'S'$)

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{5}\boldsymbol{e}'_1 - \frac{3}{5}\boldsymbol{e}'_2 \\ \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{5}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{2}{5}\boldsymbol{e}'_2 \end{cases}$$

- Столбцы S ($\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S$)

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \end{cases}$$

$\square$

2. Скалярное произведение

Определение 2.1. Скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ определяется следующим образом:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \equiv |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi \tag{3}$$

где $|\boldsymbol{a}|$ и $|\boldsymbol{b}|$ — модули векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а ϕ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (не превосходящий π). В случае, если хотя бы один из пары векторов нулевой, скалярное произведение этих векторов полагается равным нулю.

Отметим несколько свойств скалярного произведения:

- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geq 0$. При этом $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.
- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ — симметричность.
- Линейность по первому аргументу:

$$\begin{cases} (\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}), \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \end{cases}$$

Первые свойства следуют из определения. Докажем последнее свойство.

Начнём с того, что при заданном направлении $\boldsymbol{l}$ любой вектор раскладывается в сумму двух (1):

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{\parallel} + \boldsymbol{r}_{\perp}$$

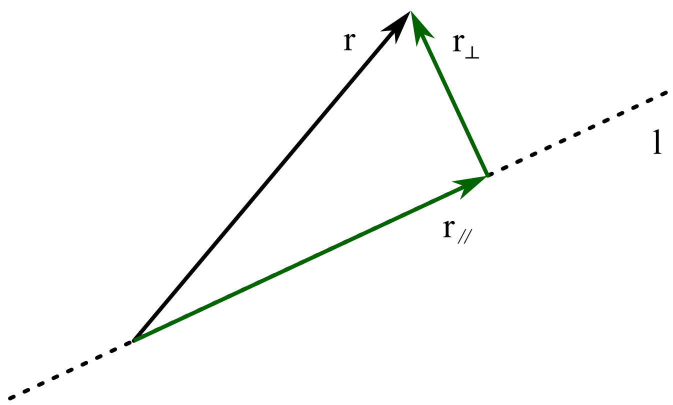

Рис. 1: Векторная проекция вектора $\boldsymbol{r}$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{l}$.

где $\boldsymbol{r}_{\|}$ — вектор, параллельный $\boldsymbol{l}$, и $\boldsymbol{r}_{\perp}$ — вектор, перпендикулярный $\boldsymbol{l}$. Компонента $\boldsymbol{r}_{\|}$ называется *ортогональной векторной проекцией* вектора $\boldsymbol{r}$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{l}$, и может обозначаться так:

$$\pi_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{r}_{\|}$$

Кроме векторной проекции, есть ещё понятие скалярное проекции вектора $\boldsymbol{r}$ на направление вектора $\boldsymbol{l}$:

$$\pi_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{r}) \equiv |\boldsymbol{r}_{\|}| \cdot \begin{cases} +1 & \text{если } \boldsymbol{r}_{\|} \upuparrows \boldsymbol{l} \\ -1 & \text{если } \boldsymbol{r}_{\|} \uparrow\downarrow \boldsymbol{l} \end{cases}$$

Будем обозначать векторную и скалярную проекции одинаково. Из контекста должно быть понятно, какая имеется в виду.

Спроецируем теперь вектор $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{c}$:

$$\pi_{\boldsymbol{c}}(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = |\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi$$

где $\pi_{\boldsymbol{c}}(\cdot)$ — скалярная проекция на направление вектора $\boldsymbol{c}$, ϕ — угол между вектором $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ и вектором $\boldsymbol{c}$. Но проекция вектора, являющегося суммой нескольких векторов, равна сумме проекций этих векторов (в силу линейности скалярного произведения):

$$\pi_{\boldsymbol{c}}(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = \pi_{\boldsymbol{c}}(\alpha\boldsymbol{a}) + \pi_{\boldsymbol{c}}(\beta\boldsymbol{b})$$

поэтому

$$|\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi = |\alpha\boldsymbol{a}| \cdot \cos\phi_1 + |\beta\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi_2$$

где ϕ_1 и ϕ_2 — углы, которые образуют векторы $\alpha\boldsymbol{a}$ и $\beta\boldsymbol{b}$ с вектором $\boldsymbol{c}$. Умножая обе части последнего равенства на модуль вектора $\boldsymbol{c}$, получаем то, что хотели доказать (при этом числовые множители можно вынести за знак модуля):

$$(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \beta(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

$\square$

Задача (2.22). *Длины базисных векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ равны соответственно* 1, 1 *и* 2. *Углы между векторами:* $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 90°$, $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = \angle(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 60°$.

Надо найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}(-1, 0, 2)$ *и* $\boldsymbol{b}(2, -1, 1)$.

Решение. Базис не ортонормированный, поэтому скалярные произведения надо будет считать “по-честному”.

Модуль вектора $\boldsymbol{a}$:

$$|\boldsymbol{a}|^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = (-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3)(-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) - 4(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) + 4(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) = 1 - 4 + 16 = 13$$

Аналогично для вектора $\boldsymbol{b}$:

$$|\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = (2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)(2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = \ldots = 11$$

Косинус угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} = \frac{(-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3) \cdot (2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{11}} = \ldots = \frac{7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{11}}$$

Поэтому синус угла будет равен:

$$\sin\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sqrt{1 - \frac{49}{13 \cdot 11}}$$

И площадь параллелограмма:

$$S = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sqrt{13} \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt{1 - \frac{49}{13 \cdot 11}} = \sqrt{94}$$

□

В случае же **ортонормированного** базиса формулы с применением скалярных произведений упрощаются:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \tag{4}$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

$$\cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}$$

Задача (2.24)**.** *Даны два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, причём $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$. Чему равна ортогональная проекция $\boldsymbol{b}$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{a}$?*

Решение.

$$\pi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{b}| \cos\angle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \cdot \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

где левый множитель есть скалярная проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на направление $\boldsymbol{a}$, а правый — единичный вектор в направлении $\boldsymbol{a}$. Выражение можно записать по-другому, если домножить числитель и знаменатель на $|\boldsymbol{a}|$:

$$\pi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}) = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}$$

Векторная проекция $\boldsymbol{b}$ сонаправлена с $\boldsymbol{a}$, если скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) > 0$ и противоположно направлена $\boldsymbol{a}$ в случае, если $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) < 0$. Если $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$, то векторная проекция — нулевой вектор. □

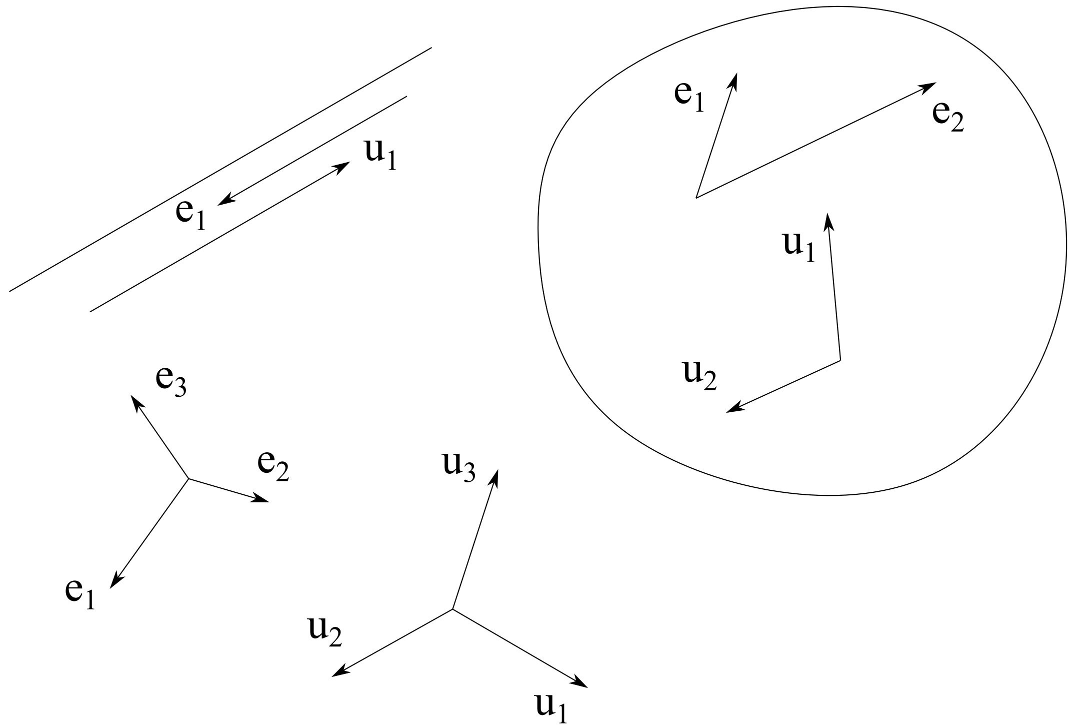

Рис. 2: Разные классы базисов в одно-, дву- и трёхмерном пространствах.

3. Смешанное и векторное произведения

3.1. Ориентированное пространство

На прямой все векторы делятся на два класса: направленные в одну сторону вдоль прямой и в противоположную (2). На плоскости все упорядоченные пары неколлинеарных векторов делятся на два класса: пары, где поворот от первого вектора ко второму по наименьшему углу совершается против часовой стрелки, и пары, где этот поворот совершается по часовой стрелке (2). И в трёхмерном пространстве все упорядоченные тройки некомпланарных векторов делятся на два класса: те, где поворот от первого базисного вектора ко второму по наименьшему углу происходит против часовой стрелки, если смотреть со стороны третьего базисного вектора (*правые* базисы), и те, где этот поворот происходит по часовой стрелке (*левые* базисы) (2).

Определение 3.1. Ориентированное пространство — пространство, в котором выбран класс базисов[2].

В ориентированном пространстве можно говорить о длине, площади и объёме со знаком.

Так, в одномерном пространстве, если рассматриваемый вектор направлен так же, как и базисы в выбранном классе, то его длина считается большей нуля. В противном случае — меньше нуля. В двумерном пространстве, если параллелограмм построен на *упорядоченной* паре векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то его площадь со знаком $S_\pm$ можно считать большей нуля, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют базис, относящийся к выбранному (положительному) классу (3). Иначе — меньше нуля. И в трёхмерном пространстве, если параллелепипед построен на *упорядоченной* тройке векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, которые в таком же порядке образуют базис из выбранного (положительного) класса, то объём со знаком $V_\pm$ такого параллелепипеда

[2] В общем случае пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ базисы тоже образуют два класса.

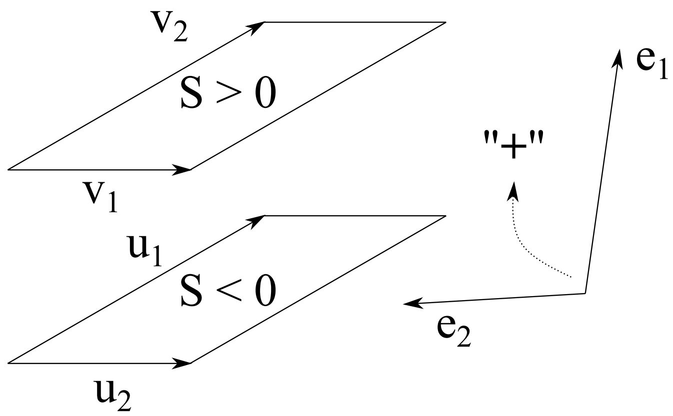

Рис. 3: Площадь ориентированного параллелограмма.

будет больше нуля. Иначе, если тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ не принадлежит положительному классу базисов, то объём $V_{\pm}$ параллелепипеда будет меньше нуля.

В трёхмерном пространстве положительными выбраны правые базисы.

Упомянув трёхмерное пространство, стоит ещё раз вернуться к вопросу об ориентации плоскости. Выбор ориентации в 3D ничего не говорит об ориентации на конкретной плоскости. Задать ориентацию на плоскости можно

- В 2D — просто сказав, в какую сторону поворот от $\boldsymbol{e}_1$ к $\boldsymbol{e}_2$ по наименьшему углу считается положительным.
- В 3D — выбрав вектор нормали $\boldsymbol{n}$ к плоскости. Тогда положительный базис на плоскости — тот, который с выбранной нормалью составляет положительную тройку в пространстве (порядок $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{n}$ или $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ — не важно).
- Как в 2D, так и в 3D: просто выбрав упорядоченную пару неколлинеарных векторов и сказав, что этот базис положительный (тогда и все упорядоченные пары векторов из этого же класса — тоже положительные).

3.2. Смешанное произведение

Определение 3.2. В ориентированном пространстве смешанное произведение трёх некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ полагается равным объёму ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \equiv V_{\pm}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

Если вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны, то их смешанное произведение полагается равным нулю.

Теорема 3.1 (О связи смешанного и скалярного произведения). *Для любой пары векторов* $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *существует единственный вектор* $\boldsymbol{d}$, *такой что для любого вектора* $\boldsymbol{a}$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})$$

Доказательство. Найдём такой вектор $\boldsymbol{d}$ для произвольной тройки векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и покажем, что он единственен и не зависит от $\boldsymbol{a}$.

Пусть $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ неколлинеарны. Пусть также $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ некомпланарны. Отложим вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ от одной точки (4).

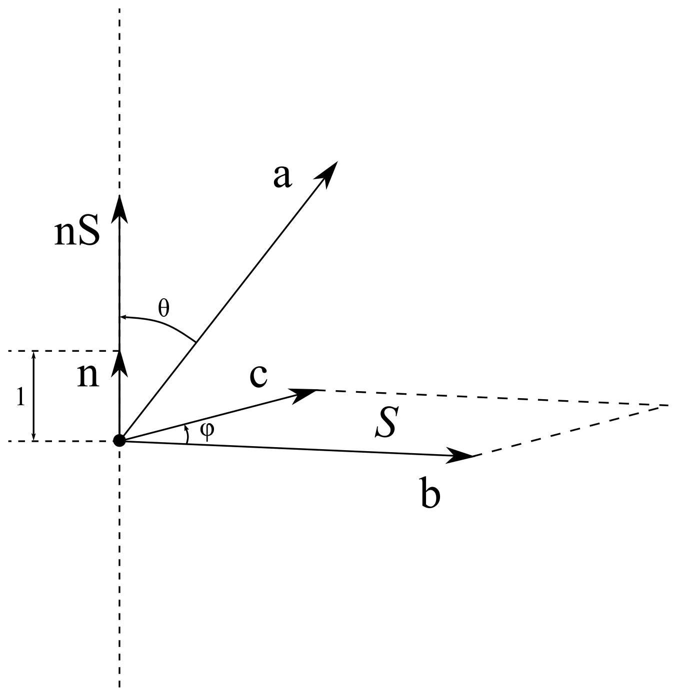

Рис. 4: Некомпланарные векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$; единичный вектор нормали $\boldsymbol{n}$ к плоскости векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, такой что тройка $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{n}$ положительная (правая); S — площадь параллелограмма, построенного на $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

Рассмотрим пару векторов $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Отложим единичный вектор нормали $\boldsymbol{n}$ к плоскости векторов $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ так, чтобы тройка векторов $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{n}$ была бы положительной. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ (площадь без знака) равна

$$S = |\boldsymbol{b}| \cdot |\boldsymbol{c}| \cdot \sin\phi$$

где ϕ — угол между векторами $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Тогда $\boldsymbol{d} \equiv S \cdot \boldsymbol{n}$ — вектор, направленный вдоль $\boldsymbol{n}$ и по модулю равный площади основания параллелепипеда, где лежат вектора $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. И для объёма параллелепипеда (без знака) получаем:

$$V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = S \cdot \Big||\boldsymbol{a}| \cdot \cos\theta\Big|$$

где $\Big||\boldsymbol{a}| \cdot \cos\theta\Big|$ — высота. При этом можно заметить, что если “убрать модуль”, то получается как раз объём со знаком:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) = S \cdot |\boldsymbol{a}| \cdot \cos\theta = V_{\pm}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

так как именно от того, со-направлены или противоположно направлены вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{d}$, зависит, будет ли $V_{\pm}$ больше или меньше нуля (тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}$ по построению положительная; тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ может быть как положительной, так и отрицательной). Таким образом, получаем, что

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})$$

Если же векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны, то объём параллелепипеда будет равен нулю, но тогда и $\boldsymbol{d} \perp \boldsymbol{a}$.

Если же вектора $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ коллинеарны, то смешанное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ также будет равно нулю, и вектор $\boldsymbol{d}$ можно взять равным нулю.

Покажем, что такой вектор $\boldsymbol{d}$, что $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})$, $\forall \boldsymbol{a}$ единственен. Допустим противное: пусть существует вектор $\boldsymbol{d}_1$, такой что $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})$ и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}_1)$, $\forall \boldsymbol{a}$. Но тогда $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}_1)$, и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d} - \boldsymbol{d}_1) = 0$. То есть вектор $\boldsymbol{d} - \boldsymbol{d}_1$ перпендикулярен любому вектору пространства. Поэтому $\boldsymbol{d} - \boldsymbol{d}_1 = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_1$. □

Введённый выше вектор $\boldsymbol{d}$ называется векторным произведением векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

3.3. Векторное произведение

Определение 3.3. Векторным произведением неколлинеарных векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называется вектор $\boldsymbol{d}$, такой что

- Модуль вектора $\boldsymbol{d}$ равен
$$|\boldsymbol{d}| = |\boldsymbol{b}| \cdot |\boldsymbol{c}| \cdot \sin\alpha$$
где α — угол между векторами $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

- Вектор $\boldsymbol{d}$ перпендикулярен как вектору $\boldsymbol{b}$, так и вектору $\boldsymbol{c}$:
$$\boldsymbol{d} \perp \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{d} \perp \boldsymbol{c}$$

- Вектор $\boldsymbol{d}$ образует *положительную тройку* $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ вместе с исходными $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$[3].

Если же векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ коллинеарны, то их векторное произведение полагается равным нулю.

Векторное произведение $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ может обозначаться как $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ или $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$.

Таким образом,
$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]) \tag{5}$$

Рассмотрим некоторые свойства векторного произведения.

Так, векторное произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на самого себя равно нулю, так как $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{a}$:
$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{0}$$

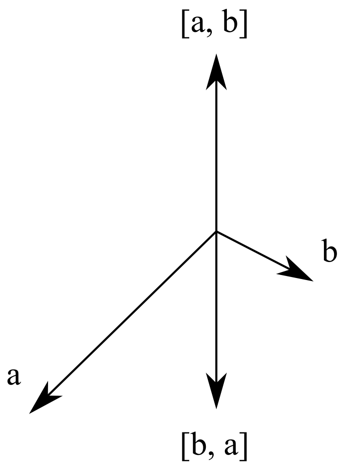

Рис. 5: Векторное произведение антикоммутативно.

Векторное произведение обладает свойством антикоммутативности. Так, для любых $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$
$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$$
так как первый и второй вектора меняются местами, и направление поворота от первого вектора ко второму меняется на противоположное (5).

[3] При выбранной правой ориентации пространства тройка $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ должна быть правой.

И, так же, как и скалярное произведение, векторное произведение линейно по первому аргументу:

$$[\beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}] = \beta_1[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}] + \beta_2[\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}]$$

Или, что то же самое:

$$\begin{cases} [\beta \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \beta[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] \\ [\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}] \end{cases}$$

Доказательство. Докажем это свойство. Надо “в нужное время вставлять и убирать квадратные скобки” и пользоваться линейность скалярного произведения:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}, [\beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}]) &\overset{(5)}{=} (\boldsymbol{a}, \beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}) \\
&\overset{(7)}{=} -(\beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \\
&\overset{(5)}{=} -(\beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]) \\
&= -\beta_1(\boldsymbol{b}_1, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]) - \beta_2(\boldsymbol{b}_2, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]) \\
&\overset{(5)}{=} -\beta_1(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \beta_2(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \\
&\overset{(7)}{=} \beta_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}) + \beta_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}) \\
&\overset{(5)}{=} \beta_1(\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}]) + \beta_2(\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}]) = (\boldsymbol{a}, \beta_1[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}] + \beta_2[\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}])
\end{aligned} \tag{6}$$

□

При этом в смешанном произведении сомножители тоже можно переставлять, и, если класс тройки меняется, то меняется и знак перед смешанным произведением:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = \ldots = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \tag{7}$$

Теперь можно выразить векторное произведение между произвольными двумя векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ пространства, которые заданы компонентами в некотором базисе $e = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Пусть

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = a_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + a_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + a_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{b} = b_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + b_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + b_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + a_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + a_3 \cdot \boldsymbol{e}_3) \times (b_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + b_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + b_3 \cdot \boldsymbol{e}_3) \\
&= (a_2 b_3 - a_3 b_2)[\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] + (a_1 b_3 - a_3 b_1)[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3] + (a_1 b_2 - a_2 b_1)[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]
\end{aligned}$$

где в последнем переходе использовались свойство антикоммутативности векторного произведения и свойство равенства нулевому вектору векторного квадрата любого вектора. Полученное соотношение можно переписать в таком виде

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] & [\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1] & [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2] \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{8}$$

где, отметим ещё раз, $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ — произвольный базис.

Если воспользоваться полученным представлением векторного произведения через компоненты векторов, подставив его в формулу (5), то получим

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \tag{9}$$

Если же базис e **правый ортонормированный**, то формулы упрощаются. Для векторного произведения:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{10}$$

и для смешанного:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{11}$$

3.4. Задачи

Перед задачами параграфа 3 в сборнике сказано, что базис во всех задачах, если не оговорено противное, правый ортонормированный. Поэтому при решении можно будет пользоваться более простыми формулами: для векторного (10), смешанного (11) и скалярного (4) произведений.

Задача (3.1(2)). *Найти $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}(2, -1, 1)$ и $\boldsymbol{b}(-4, 2, -2)$.*

Решение.

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 0\boldsymbol{i} - 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$$

То есть $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$. О чём можно бы было догадаться и сразу, просто внимательно посмотрев на координатные строки векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (они пропорциональны, а значит векторы коллинеарны). □

Задача (3.2(1)). *Упростить выражение $[\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}]$.*

Решение. Упрощаем, пользуясь свойствами операции векторного произведения (перемена мест — со сменой знака!):

$$[\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] - [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] - [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{0} - [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] - [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] - \boldsymbol{0} = -2[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$$

□

Задача (3.19(3)). *Найти смешанное произведение векторов $\boldsymbol{a}(2, 1, 0)$, $\boldsymbol{b}(3, 4, -1)$, $\boldsymbol{c}(-1, -3, 1)$.*

Решение.

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 2 - 2 + 0 = 0$$

То есть $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$. О чём можно бы было догадаться и сразу, просто внимательно посмотрев на координатные строки векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ (они линейно зависимы: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$ — а значит векторы компланарны). □

Задача (3.13(1)). *Доказать тождество*

$$\big|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\big|^2 = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{vmatrix}$$

Решение. Пусть α — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Распишем левую часть:

$$\left|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\right|^2 = \left(|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\alpha\right)^2 = |\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2\cdot\sin^2\alpha$$

И правую часть:

$$\begin{vmatrix}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\end{vmatrix} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos^2\alpha = |\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2\cdot(1-\cos^2\alpha)$$

Так как $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$, то тождество можно считать доказанным. □

Задача (3.13(2)). *Доказать тождество (“бац минус цаб”):*

$$\left[\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]\right] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

Решение. Введём базис, посчитаем левую и правую часть через компоненты векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, и сравним.

Выберем “хороший” базис — ортонормированный. Пусть при этом базисный вектор $\boldsymbol{e}_3$ параллелен вектору $\boldsymbol{c}$: $\boldsymbol{c} = \gamma_3\boldsymbol{e}_3$. Пусть базисный вектор $\boldsymbol{e}_2$ лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ (если они неколлинеарны, иначе — надо выбрать $\boldsymbol{e}_2$ “просто как-нибудь”, чтоб $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_2$ были неколлинеарны): $\boldsymbol{b} = \beta_2\boldsymbol{e}_2 + \beta_3\boldsymbol{e}_3$. И последний вектор $\boldsymbol{e}_1$ — такой, чтоб вместе с $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_2$ образовывал правую тройку (в порядке нумерации): $\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \alpha_3\boldsymbol{e}_3$.

Теперь, введя базис и координаты векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в этом базисе, можем начать выражать произведения между ними через их координаты:

$$[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] = \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ 0 & \beta_2 & \beta_3\\ 0 & 0 & \gamma_3\end{pmatrix} = \beta_2\gamma_3\boldsymbol{e}_1$$

$$\left[\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]\right] = \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2\gamma_3 & 0 & 0\end{pmatrix} = \beta_2\gamma_3\cdot(\alpha_3\boldsymbol{e}_2 - \alpha_2\boldsymbol{e}_3)$$

И для правой части тождества, которое надо доказать:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) = 0 + 0 + \alpha_3\gamma_3 = \alpha_3\gamma_3$$

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\beta_2\boldsymbol{e}_2 + \beta_3\boldsymbol{e}_3)\cdot\alpha_3\gamma_3 - \gamma_3\boldsymbol{e}_3\cdot(\alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3) = \beta_2\gamma_3\cdot(\alpha_3\boldsymbol{e}_2 - \alpha_2\boldsymbol{e}_3)$$

Результаты для левой и правой частей доказываемого тождества получились одинаковыми, поэтому тождество доказано. □

Задача (3.15). *Даны векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$*, такие что*

$$\begin{cases}\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}\\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0\end{cases}$$

Надо выразить через $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *какой-нибудь вектор* $\boldsymbol{x}$*, удовлетворяющий уравнению*

$$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$$

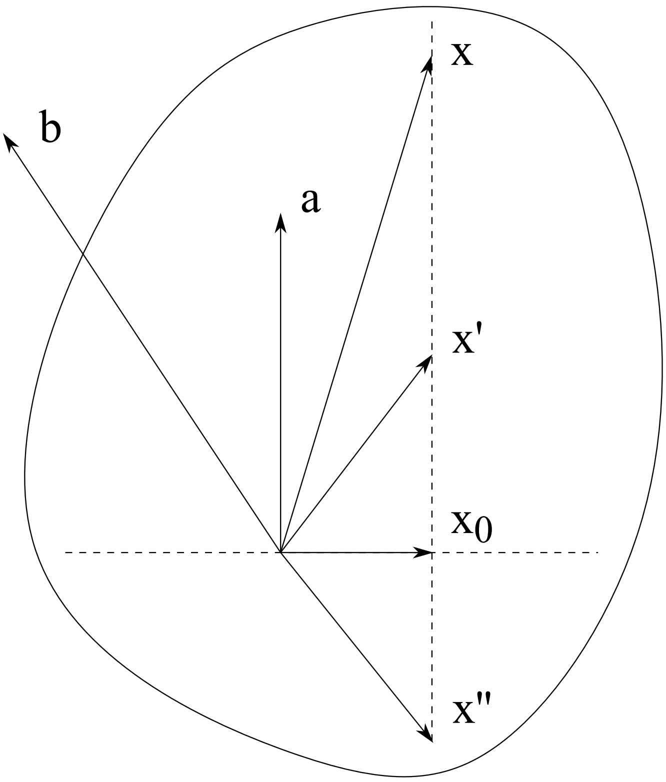

Рис. 6: $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$.

Решение. Из условия следует, что либо $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}$, либо $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$. Будем пока считать, что $\boldsymbol{b}$ не равен нулю (6).

Так как $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{b}$ и $|\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{a}| \cdot \sin\alpha = |\boldsymbol{b}|$, где $\alpha = \angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$. То есть

$$|\boldsymbol{x}| \sin\alpha = \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$$

Пусть решению $\boldsymbol{x}_0$ соответствует угол $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, то есть вектор $\boldsymbol{x}_0$ перпендикулярен как $\boldsymbol{b}$, так и $\boldsymbol{a}$. Тогда $\boldsymbol{x}_0$ сонаправлен $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ (векторное произведение — именно в таком порядке) (6). И найти $\boldsymbol{x}_0$ можно как

$$\boldsymbol{x}_0 = \underbrace{\frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{\big|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\big|}}_{\text{“направление”}} \cdot \underbrace{\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}}_{\text{модуль}} = \frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{|\boldsymbol{a}|^2}$$

Если $\boldsymbol{b} = 0$, то по формуле получаем $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$, что тоже является решением уравнения. □

Задача (3.28(1)). *Доказать, что если векторы $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$ компланарны, то и векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ тоже компланарны.*

Решение. Рассмотрим два варианта решения.

“Словесный”.

Отложим векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ от одной точки. Назовём плоскость, где лежат $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$, плоскостью α (7).

Рассмотрим пару векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Их векторное произведение $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ лежит в α и перпендикулярно плоскости, где лежат $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (пока считаем, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ неколлинеарны).

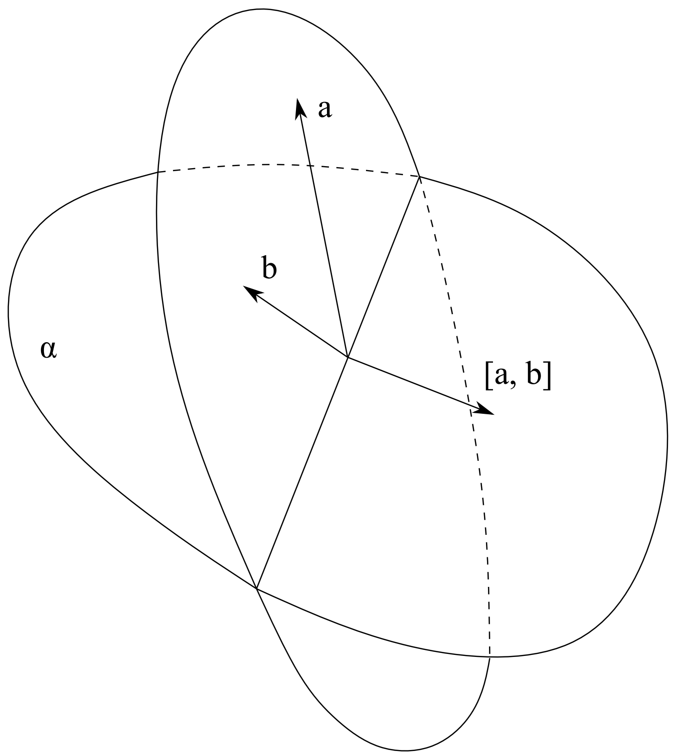

Рис. 7: α — плоскость, где лежат $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ и $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$.

Таким образом, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ лежат в плоскости, перпендикулярной α. Аналогично и с парами векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Все три такие плоскости попарно пересекаются хотя бы по одной прямой (например, плоскости векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ пересекаются хотя бы по прямой, содержащей вектор $\boldsymbol{a}$: векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ изначально отложены от одной точки). Таким образом, если все три описанные плоскости совпадают, то вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ лежат в ней, а потому компланарны. Если же плоскости не совпадают, а пересекаются попарно по одной прямой, то все три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ оказываются перпендикулярными α, а потому параллельными. То есть в этом случае векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ не только компланарны, но и коллинеарны. Но в процессе решения было сделано предположение о том, что $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ неколлинеарны, поэтому такой случай отпадает.

Пусть теперь хотя бы один вектор из тройки $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$ равен нулевому вектору. Тогда либо хотя бы два вектора из трёх $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ коллинеарны, а потому все три они компланарны. Либо хотя бы один вектор из трёх $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ равен нулевому вектору, а потому все три снова компланарны.

“Формульный”.

Рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

Умножим векторно обе части на $\boldsymbol{a}$ слева. Получим

$$\beta \cdot [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + \gamma \cdot [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{0}$$

Аналогично, при умножении векторно слева обеих частей исходного уравнения на $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$:

$$\begin{cases} \alpha \cdot [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] + \gamma \cdot [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{0} \\ \alpha \cdot [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] + \beta \cdot [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

Складывая все три полученных уравнения, получаем

$$(\beta - \alpha) \cdot [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + (\gamma - \beta) \cdot [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] + (\gamma - \alpha) \cdot [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{0}$$

Так как векторы $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$ линейно зависимы, то хотя бы один из коэффициентов $(\beta - \alpha)$, $(\gamma - \beta)$, $(\gamma - \alpha)$ может быть отличен от нуля. Но в таком случае три коэффициента в исходном уравнении α, β, γ не совпадают, а потому все три не могут в данном случае быть равны нулю одновременно. То есть существует нетривиальная линейная комбинация $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$, равная нулевому вектору. Поэтому три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны. □

4. Дополнение

4.1. Ещё задача про скалярное произведение

Задача (Про точку пересечения высот в треугольнике). *Используя скалярное произведение, доказать, что в любом треугольнике высоты пересекаются в одной точке.*

Решение. Пусть в $\triangle ABC$ высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O (8). Тогда надо показать, что прямая $CO \perp AB$.

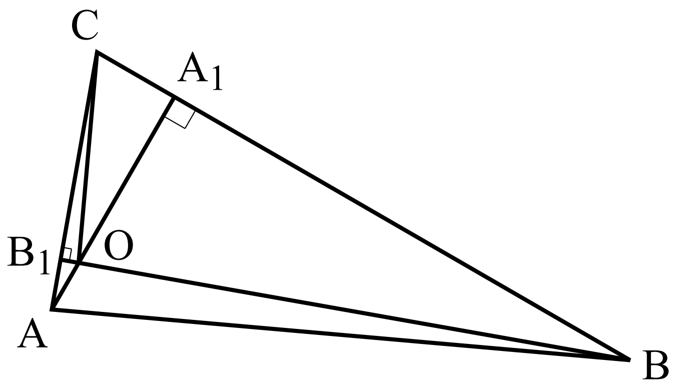

Рис. 8: Точка O пересечения двух высот AA_1 и BB_1 в $\triangle ABC$.

Так как $AO \perp BC$ и $BO \perp AC$, то

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = 0 \\ \overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} \end{cases}$$

В то же время

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

Поэтому $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB}$. □

4.2. Ещё пара задач про векторное и смешанное произведения

Задача (2.22 (Другой способ))**.** *Длины базисных векторов* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ *равны соответственно* $1, 1$ *и* 2*. Углы между векторами:* $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 90°$*,* $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = \angle(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 60°$*.*

Надо найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}(-1, 0, 2)$ *и* $\boldsymbol{b}(2, -1, 1)$*.*

Решение. Площадь можно посчитать и с помощью векторного произведения. Только пользоваться надо общей формулой, потому что базис “кривой”:

$$S = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \left|\det\begin{pmatrix} [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] & [\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1] & [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2] \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right| = \Big|2 \underbrace{\tilde{\boldsymbol{e}}_1}_{[\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]} + 5 \underbrace{\tilde{\boldsymbol{e}}_2}_{[\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1]} + \underbrace{\tilde{\boldsymbol{e}}_3}_{[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]}\Big|$$
$$= \sqrt{4\tilde{\boldsymbol{e}}_1^2 + 25\tilde{\boldsymbol{e}}_2^2 + \tilde{\boldsymbol{e}}_3^2 + 4\tilde{\boldsymbol{e}}_1\tilde{\boldsymbol{e}}_3 + 20\tilde{\boldsymbol{e}}_1\tilde{\boldsymbol{e}}_2 + 10\tilde{\boldsymbol{e}}_2\tilde{\boldsymbol{e}}_3}$$
$$= \sqrt{4 \cdot 3 + 25 \cdot 3 + 1 + 4 \cdot (-1) + 20 \cdot 1 + 10 \cdot (-1)} = \sqrt{94}$$

При этом произведение $\tilde{\boldsymbol{e}}_1\tilde{\boldsymbol{e}}_2$, например, могло бы быть посчитано так[4]:

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_1\tilde{\boldsymbol{e}}_2 = [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] \cdot [\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1] = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

□

Задача (3.31)**.** *Решить систему векторных уравнений в пространстве*

$$\begin{cases} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = p \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = q \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) = s \end{cases}$$

где векторы $\boldsymbol{a}$*,* $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$ *некомпланарны.*

Решение. Сначала покажем, что если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ некомпланарны, то и $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ и $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ некомпланарны. Рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + \beta[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] + \gamma[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{0}$$

Умножим обе части скалярно на $\boldsymbol{b}$ слева. Получим

$$\gamma(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$$

Откуда $\gamma = 0$, так как $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ некомпланарны (и их смешанное произведение отлично от нуля). Аналогично $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Поэтому три вектора $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ и $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ также некомпланарны.

Введём понятие *взаимного базиса*.

Определение 4.1. Пусть есть базис $e = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Тогда взаимный базис $e^* = (\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*)$ определяется как

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1^* = \dfrac{[\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)} \\ \boldsymbol{e}_2^* = \dfrac{[\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1]}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)} \\ \boldsymbol{e}_3^* = \dfrac{[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)} \end{cases} \qquad (12)$$

[4] См. номер 3.13(3)

По доказанному ранее, e^* в самом деле базис (три линейно независимых вектора в пространстве). Также можно заметить, что $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i^*) = 1$ и $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j^*) = 0$ при $i \neq j$ (поэтому базис e^* также называют биортогональным к базису e)[5].

Возвращаясь к задаче, разложим вектор $\boldsymbol{x}$ по взаимному к $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ базису $\{\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*\}$:

$$\boldsymbol{x} = x_1^* \boldsymbol{a}^* + x_2^* \boldsymbol{b}^* + x_3^* \boldsymbol{c}^*$$

Умножая скалярно по очереди на $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и пользуясь свойством “биортогональности” взаимного базиса, получаем

$$\begin{cases} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = x_1^* \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = x_2^* \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) = x_3^* \end{cases}$$

То есть числа p, q и s, данные в условии, есть компоненты вектора $\boldsymbol{x}$ во взаимном к $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ базисе, векторы которого вычисляются по (12). □

Задача (3.22(1)). *Три некомпланарных вектора* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *отложены из одной точки. Найти объём треугольной призмы, основание которой построено на* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, *а боковое ребро совпадает с вектором* $\boldsymbol{c}$.

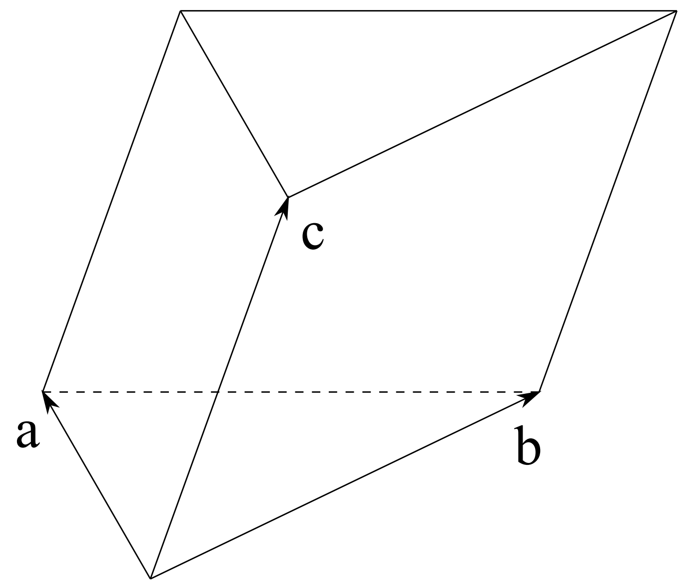

Рис. 9: Треугольная призма, построенная на $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

Решение. Объём призмы V' равен произведению площади основания на высоту (9). В основании треугольник — площадь которого в два раза меньше площади параллелограмма, построенного на тех же векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. То есть объём призмы ищется аналогично объёму V параллелепипеда, построенного на $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, только площадь основания в два раза меньше. Поэтому и

$$V' = \frac{1}{2} V = \frac{\left|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\right|}{2}$$

Задача решена. Нашли объём, не находя ни высоты, ни площади основания.

Отступление.

[5] Эти свойства на самом деле и определяют взаимный базис в общем случае $\mathbb{R}^n$ (en.wikipedia.org/wiki/Dual_basis).

Но как можно бы было найти вектор $\boldsymbol{c}_\perp$, по модулю равный высоте призмы и перпендикулярный основаниям? Вектор $\boldsymbol{c}$ можно представить в виде суммы двух векторов, один из которых параллелен плоскости основания призмы, а другой перпендикулярен плоскости основания. В свою очередь, компоненту $\boldsymbol{c}$, параллельную основаниям, можно разложить по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (которые, как неколлинеарные вектора, образуют базис на плоскости). Получаем

$$\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}_\perp$$

Если умножить полученное уравнение скалярно на $\boldsymbol{a}$ и на $\boldsymbol{b}$ (по очереди), то получим систему

$$\begin{cases} (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + \beta(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \\ (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \beta(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{cases}$$

из которой уже можно найти α и β, например, по правилу Крамера, если определитель системы отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{vmatrix} = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \big|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\big|^2 \neq 0$$

так как векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны. А вообще, определитель

$$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{vmatrix}$$

называется *определителем Грама*[6] системы векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Из решения видно, что отличие от нуля определителя Грама системы векторов является *критерием линейной независимости* этой системы векторов (чтобы коэффициенты разложения любого вектора по этой системе определялись однозначно — в нашем случае коэффициенты разложения компоненты $\boldsymbol{c}$, параллельной основанию призмы, по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$).

Возвращаясь к вектору $\boldsymbol{c}_\perp$, то при найденных α и β он получается равным

$$\boldsymbol{c}_\perp = \boldsymbol{c} - \alpha\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{b}$$

□

[6] en.wikipedia.org/wiki/Gramian_matrix.