

Семинар 3

Алексеев Василий

15 + 20 сентября 2021

Содержание

1	Замена базиса	1
1.1	Поворот базиса	3
2	Система координат + Замена	4
3	Дополнение	8
3.1	Скалярное произведение	8
3.2	Ещё пара задач про несколько систем координат	10

1. Замена базиса

Задача (4.7). Есть два базиса на плоскости (которые заданы компонентами в каком-то третьем базисе). Первый: $e_1(2, 3)$ и $e_2(3, 4)$. Второй: $e'_1(1, -1)$ и $e'_2(2, -3)$.

Надо выразить координаты произвольного вектора a в базисе e по его координатам (α'_1, α'_2) в базисе e' .

Решение. Обозначим векторы того “третьего” базиса (в котором заданы векторы e и e') за p и q . Занесём в табличку известные координаты участвующих в задаче векторов в разных базисах (1).

Таблица 1: Координаты векторов (по вектору в строке) в разных базисах (в столбце — координаты векторов в одном базисе). В задаче надо найти **такие** координаты.

	(p, q)	(e_1, e_2)	(e'_1, e'_2)
e_1	(2, 3)	(1, 0)	
e_2	(3, 4)	(0, 1)	
e'_1	(1, -1)		(1, 0)
e'_2	(2, -3)		(0, 1)
a		(α_1, α_2)	(α'_1, α'_2)

Теперь посмотрим на вектор a в разных базисах:

$$a = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 = \alpha'_1 \cdot e'_1 + \alpha'_2 \cdot e'_2$$

Чтобы найти α_1 и α_2 , можно выразить все e_i и e'_i через p и q :

$$\alpha_1 \cdot (2p + 3q) + \alpha_2 \cdot (3p + 4q) = \alpha'_1 \cdot (p - q) + \alpha'_2 \cdot (2p - 3q)$$

Тогда после приведения получится, что

$$(2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha'_1 - 2\alpha'_2)p + (3\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha'_1 + 3\alpha'_2)q = 0$$

линейная комбинация векторов p и q равна нулю. Но, так как они линейно независимые, отсюда можно заключить, что нулю равны коэффициенты при p и q :

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha'_1 - 2\alpha'_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha'_1 + 3\alpha'_2 = 0 \end{cases}$$

Решая полученную систему (например, с помощью правила Крамера), получаем:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -7\alpha'_1 - 17\alpha'_2 \\ \alpha_2 = 5\alpha'_1 + 12\alpha'_2 \end{cases}$$

□

Решённая задача — пример перехода от одного базиса к другому. Рассмотрим этот вопрос в более общем виде. Будем обозначать векторы базиса в виде строки. Например:

$$e = (e_1, e_2, e_3)$$

для случая базиса во всём пространстве \mathbb{R}^3 . Аналогично и для базисов на плоскости и на прямой (в \mathbb{R}^2 и в \mathbb{R}).

При заданном базисе e любой вектор a пространства однозначно определяется его компонентами в базисе:

$$a = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3 \Rightarrow a \leftrightarrow x = (x_1, x_2, x_3)^T$$

поэтому, говоря о векторе — направленном отрезке, часто имеют в виду его компоненты в базисе (то есть понятия вектора как направленного отрезка и вектора как столбца из чисел при фиксированном базисе взаимозаменяемы).

В пространстве существует больше одного базиса: любая тройка некомпланарных векторов в \mathbb{R}^3 образует базис. Встаёт вопрос о том, как связаны компоненты одного и того же вектора в разных базисах.

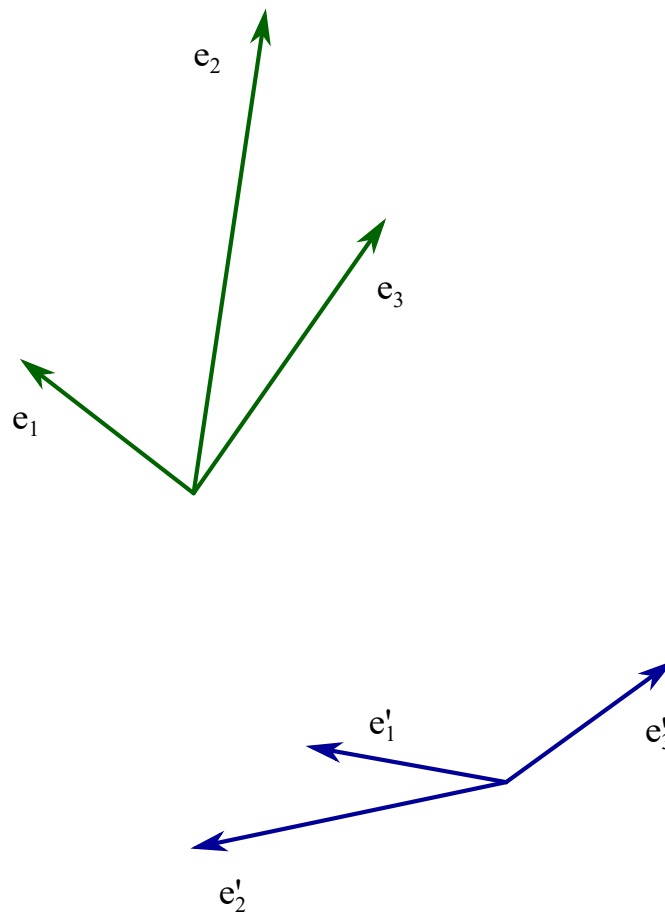


Рис. 1: Два разных базиса в пространстве.

Пусть есть два базиса: e и e' (1). Тогда векторы базиса e' можно разложить по e :

$$\begin{cases} e'_1 = a_{11} \cdot e_1 + a_{12} \cdot e_2 + a_{13} \cdot e_3 \\ e'_2 = a_{21} \cdot e_1 + a_{22} \cdot e_2 + a_{23} \cdot e_3 \\ e'_3 = a_{31} \cdot e_1 + a_{32} \cdot e_2 + a_{33} \cdot e_3 \end{cases} \quad (1)$$

Запись можно представить более компактно¹:

$$e' = eS$$

¹Под результатом умножения строки из векторов e на матрицу из чисел S будем иметь в виду такую строку e' из векторов, где каждый элемент равен линейной комбинации векторов умножаемой строки e с коэффициентами, равными элементам соответственного столбца матрицы S . То есть по правилу умножения числовых матриц.

где S называется *матрицей перехода* от базиса e (“старого”) к базису e' (“новому”):

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

во введенных ранее обозначениях (1). Столбцы матрицы перехода S — это координаты векторов нового базиса в старом базисе (“переход от e к e' ”: зная векторы e , надо получить векторы e').

Посмотрим теперь, как выражаются компоненты некоторого вектора a в одном базисе через его же компоненты, но в другом базисе. Имеем

$$a = ex = e'x' \quad (2)$$

где a — вектор как направленный отрезок, $x \equiv x_e$ — вектор-столбец, соответствующий a в базисе e , $x' \equiv x_{e'}$ — вектор-столбец, соответствующий a в базисе e' .

Теперь воспользуемся тем, что нам известно представление базиса e' через вектора базиса e :

$$e'x' = (eS)x' \stackrel{(2)}{=} ex$$

Так как умножение матриц ассоциативно, а также дистрибутивно относительно матричного сложения, мы можем перенести ex влево и перегруппировать слагаемые:

$$e \cdot (Sx' - x) = 0$$

Из линейной независимости системы векторов e получаем:

$$Sx' - x = 0 \Leftrightarrow x = Sx'$$

Итак, в двух базисах компоненты векторов связаны так:

$$\boxed{\begin{cases} e' = eS \\ x = Sx' \end{cases}} \quad (3)$$

При этом, при переходе, наоборот, от базиса e' к базису e можно написать аналогичное соотношение, но уже с другой матрицей перехода, которую обозначим за S' :

$$\begin{cases} e = e'S' \\ x' = S'x \end{cases}$$

1.1. Поворот базиса

Рассмотрим отдельно преобразование поворота правого² ортонормированного базиса e_1, e_2 на плоскости на угол ϕ против часовой стрелки (2).

Имеем для компонент векторов e' в базисе e ³:

$$\begin{cases} e'_1 = |e'_1| \cdot \cos \phi \cdot e_1 + |e'_1| \cdot \sin \phi \cdot e_2 \\ e'_2 = |e'_2| \cdot \cos \left(\phi + \frac{\pi}{2} \right) \cdot e_1 + |e'_2| \cdot \sin \left(\phi + \frac{\pi}{2} \right) \cdot e_2 \end{cases}$$

²Поворот от первого базисного вектора ко второму по наименьшему углу происходит против часовой стрелки.

³Угол именно $\phi + \frac{\pi}{2}$! чтобы при умножении на \cos/\sin получить скалярные проекции на направления базисных векторов.

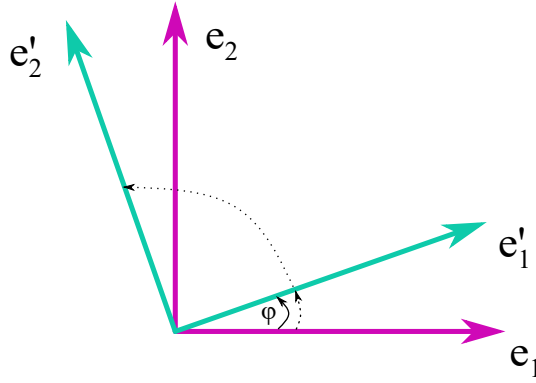


Рис. 2: Базис e' повернут на угол ϕ относительно базиса e .

Так как модули векторов единичные:

$$e' = e \begin{pmatrix} \cos \phi & \cos \left(\phi + \frac{\pi}{2} \right) \\ \sin \phi & \sin \left(\phi + \frac{\pi}{2} \right) \end{pmatrix}$$

То есть матрица перехода:

$$S' = \begin{pmatrix} \cos \phi & \cos \left(\phi + \frac{\pi}{2} \right) \\ \sin \phi & \sin \left(\phi + \frac{\pi}{2} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Таким образом, получили матрицу, задающую поворот правого ортонормированного базиса на угол ϕ против часовой стрелки. То же самое получилось бы, если бы старый базис был левый ортонормированный, а новый получался бы его поворотом по часовой стрелке на угол ϕ .

Аналогично можно получить матрицу перехода, когда базис e' не только повернут относительно e , но если второй вектор ещё отражён относительно первого. То есть если базис e' левый, а e правый, и наоборот (3). В этом случае при нахождении e'_2 будет использоваться угол не $\phi + \frac{\pi}{2}$, а $\phi - \frac{\pi}{2}$.

2. Система координат + Замена

Имея базис в пространстве, можно описать любой вектор с помощью столбца из чисел — его координат в базисе. Но как описать просто точку? Ведь у неё нет ни “длины”, ни “направления”... Один из способов — зафиксировать некоторую точку O , и строить векторы с началом в O и концом в интересующей точке пространства (*радиусы-векторы*). Тогда за описание точки можно принять координаты соответствующего ей радиуса-вектора (при выбранном базисе и выбранной точке O). Описанный способ задания точек называется *общей декартовой системой координат*⁴ (4).

Определение 2.1. Общей декартовой системой координат называется совокупность точки O (*начала системы координат*) и базиса: $(O; e_1, \dots, e_n)$

⁴Помимо декартовой, есть и другие системы координат. Например полярная, когда положение точки на плоскости определяется по расстоянию r от начала координат O и по углу ϕ , которое направление из начала координат на точку образует с выбранным направлением l : $a \leftrightarrow (r, \phi)$.

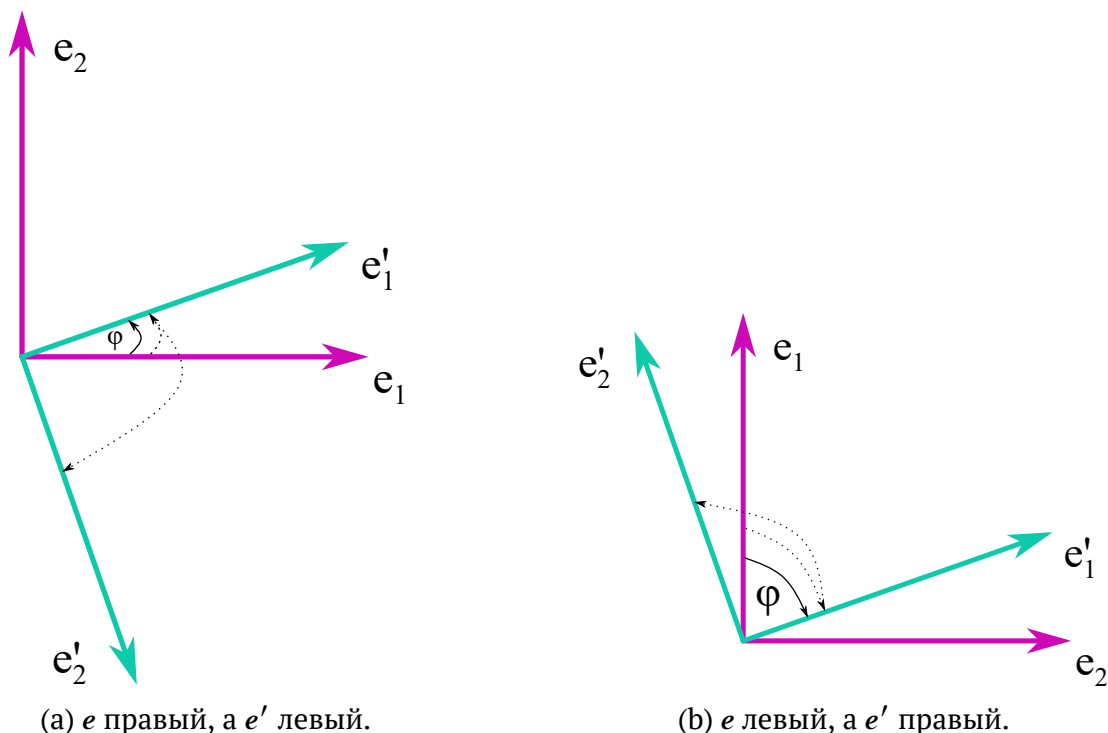


Рис. 3: Базис e' повернут на угол ϕ относительно базиса e , при этом поворот от первого вектора ко второму по наименьшему углу в старом и новом базисах совершается в разные стороны.

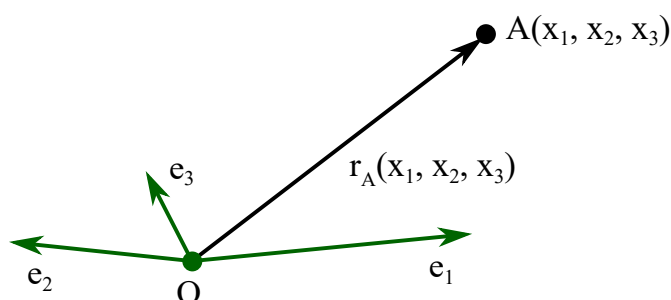


Рис. 4: Общая декартова система координат (совокупность точки и базиса) — способ описания точек в пространстве.

Определение 2.2. Прямоугольной декартовой системой координат называется такая общая декартова система координат, в которой базисные векторы перпендикулярны и по длине равны единице.

Замечание. При заданной системе координат $O; e_1, \dots, e_n$ каждой точке A можно поставить в соответствие набор чисел — компонент радиуса-вектора точки в базисе $\vec{OA} = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$:

$$A \leftrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$$

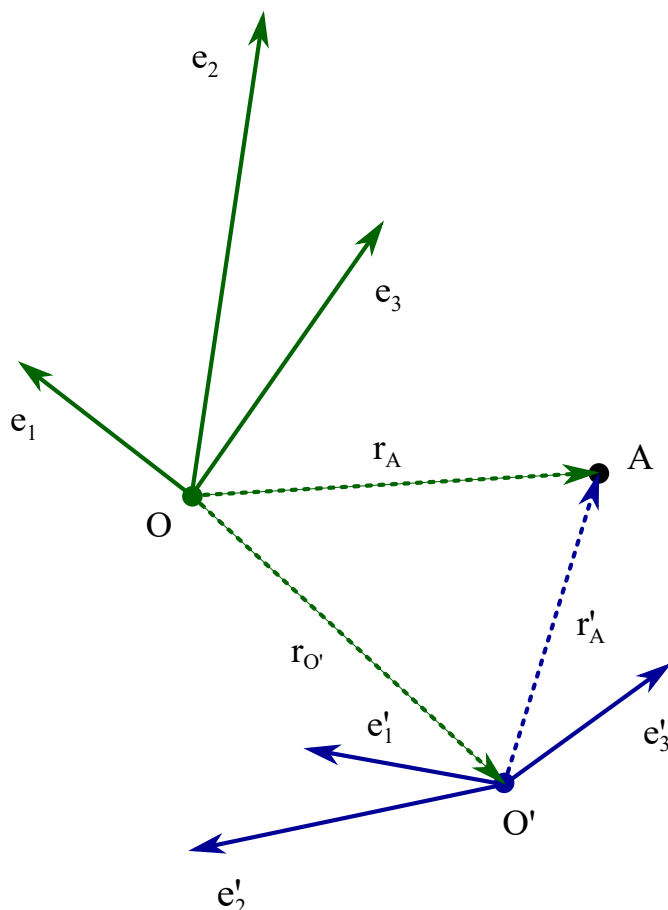


Рис. 5: Две системы координат в пространстве.

Аналогично с заменой базиса, может возникнуть вопрос, как меняются координаты точек при смене системы координат (5). Пусть есть две системы координат: “старая” $(O; e)$ и “новая” $(O'; e')$. Пусть нам известно положение точки A относительно новой системы координат. Также пусть нам известно, как выражаются базисные векторы новой системы e' через векторы старой e и как расположено начало новой системы O' в старой системе. Очевидно, по этой информации мы должны уметь найти, как расположена точка A в старой системе координат $(O; e)$...

Введём обозначения: пусть $r_A \equiv r_O(A)$ — радиус-вектор точки A в системе $(O; e)$, $r'_A \equiv r_{O'}(A)$ — радиус-вектор точки A в системе $(O'; e')$, и $r_{O'} \equiv r_O(O')$ — радиус-вектор, определяющий положение начала отсчёта O' в системе $(O; e)$. Очевидно, что

$$r_A = r_{O'} + r'_A$$

В системе $(O'; e')$ известно координатное представление вектора r'_A . Для вектора $r_{O'}$ известны компоненты в базисе $(O; e)$. Как записать соотношение выше через вектор-столбцы компонент векторов в базисах? Для этого *надо все векторы представить в одном базисе*. Из соотношений (3) мы можем найти вектор-столбец радиуса-вектора r'_A в базисе e по его координатному столбцу x'_A в базисе e' . Он будет равен Sx'_A . Итого, получаем соотношение для компонент радиусов-векторов точки в разных системах координат:

$$\begin{cases} e' = eS \\ x_A = x_{O'} + Sx'_A \end{cases} \quad (4)$$

то есть для нахождения координат точки в “старой” системе по её координатам в “новой” системе координат надо знать, как выражаются векторы “новой” системы в базисе “старой” и как расположено начало координат “новой” системы в “старой”.

Задача (4.19). Треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (6). Точка M — точка пересечения медиан грани $A_1B_1C_1$. Требуется, зная координаты точки x', y', z' в системе $A_1; \overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1M}$, найти её координаты (x, y, z) в системе $A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}$ ⁵.

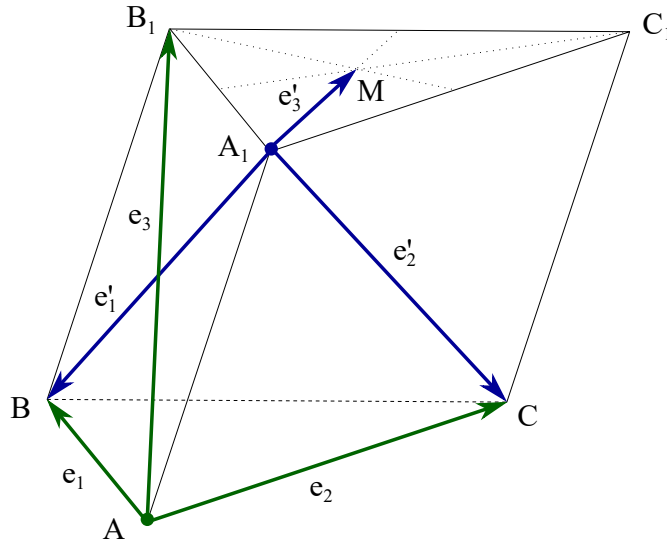


Рис. 6: Призма $ABCA_1B_1C_1$.

Решение. Что нам надо найти? Вспомяная формулы (3) или (4), получаем, что если векторы базиса связаны соотношением $e' = eS$, то компоненты векторов связаны соотношением $x = Sx'$ и координаты точек связаны соотношением $x = x_{O'} + Sx'$. Таким образом, чтобы решить задачу, надо найти матрицу S , столбцы которой — компоненты базиса $\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1M}$ в базисе $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}$, и координаты начала A_1 в системе с началом A . Обозначим $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}$ за e_1, e_2, e_3 и разложим $\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1M}$ по этой системе:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1B} &= \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} = e_1 - e_3 + e_1 \\ \overrightarrow{A_1C} &= \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AC} = e_1 - e_3 + e_2 \\ \overrightarrow{A_1M} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1C_1}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(e_1 + e_2)\end{aligned}$$

Итого,

$$(e'_1, e'_2, e'_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Положение A_1 в системе $(A; e)$:

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} = e_3 - e_1$$

Поэтому связь между координатами точек в разных системах:

$$x = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x' + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

⁵Порядок базисных векторов важен!

3. Дополнение

3.1. Скалярное произведение

Определение 3.1. Скалярное произведение (\mathbf{a}, \mathbf{b}) ненулевых векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} определяется следующим образом:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \phi \quad (5)$$

где $|\mathbf{a}|$ и $|\mathbf{b}|$ — модули векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , а ϕ — угол между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} (не превосходящий π). В случае, если хотя бы один из пары векторов нулевой, скалярное произведение этих векторов полагается равным нулю.

Отметим несколько свойств скалярного произведения:

- $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$ — симметричность
- $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2$ — скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины
- О равенстве нулю скалярного произведения:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = 0 \text{ или } \mathbf{b} = 0 \text{ или } \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$$

- Линейность по первому аргументу:

$$(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

Первые три свойства следуют из определения. Докажем последнее свойство.

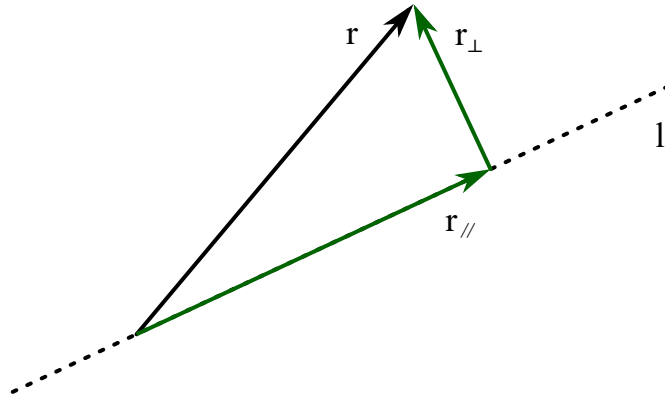


Рис. 7: Векторная проекция вектора \mathbf{r} на направление, определяемое вектором \mathbf{l} .

Начнём с того, что при заданном направлении \mathbf{l} любой вектор раскладывается в сумму двух (7):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$$

где \mathbf{r}_{\parallel} — вектор, параллельный \mathbf{l} , и \mathbf{r}_{\perp} — вектор, перпендикулярный \mathbf{l} . Компонента \mathbf{r}_{\parallel} называется *ортогональной векторной проекцией* вектора \mathbf{r} на направление, определяемое вектором \mathbf{l} , и может обозначаться так:

$$\pi_{\mathbf{l}}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{r}_{\parallel}$$

Кроме векторной проекции, есть ещё понятие скалярной проекции вектора \mathbf{r} на направление вектора \mathbf{l} :

$$\pi_{\mathbf{l}}(\mathbf{r}) \equiv |\mathbf{r}_{\parallel}| \cdot \begin{cases} +1 & \text{если } \mathbf{r}_{\parallel} \uparrow\uparrow \mathbf{l} \\ -1 & \text{если } \mathbf{r}_{\parallel} \uparrow\downarrow \mathbf{l} \end{cases}$$

Будем обозначать векторную и скалярную проекции одинаково. Но из контекста будет понятно, какая имеется в виду.

Спроецируем теперь вектор $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ на направление, определяемое вектором \mathbf{c} :

$$\pi_{\mathbf{c}}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = |\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}| \cdot \cos \phi$$

где $\pi_{\mathbf{c}}(\cdot)$ — скалярная проекция на направление вектора \mathbf{c} , ϕ — угол между вектором $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ и вектором \mathbf{c} . Но проекция вектора, являющегося суммой нескольких векторов, равна сумме проекций этих векторов⁶:

$$\pi_{\mathbf{c}}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \pi_{\mathbf{c}}(\alpha\mathbf{a}) + \pi_{\mathbf{c}}(\beta\mathbf{b})$$

поэтому

$$|\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}| \cdot \cos \phi = |\alpha\mathbf{a}| \cdot \cos \phi_1 + |\beta\mathbf{b}| \cdot \cos \phi_2$$

где ϕ_1 и ϕ_2 — углы, которые образуют векторы $\alpha\mathbf{a}$ и $\beta\mathbf{b}$ с вектором \mathbf{c} . Умножая обе части последнего равенства на модуль вектора \mathbf{c} , получаем то, что хотели доказать (при этом числовые множители можно вынести за знак модуля):

$$(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

□

Задача (2.21). Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ равны соответственно $3, \sqrt{2}$ и 4 . Углы между векторами $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 45^\circ$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 60^\circ$.

Надо найти длины сторон и углы параллелограмма, построенного на векторах с координатами $(1, -3, 0)$ и $(-1, 2, 1)$ в указанном базисе.

Решение. Обозначим данные нам векторы за \mathbf{a} и \mathbf{b} :

$$\begin{cases} \mathbf{a} = (1, -3, 0) \\ \mathbf{b} = (-1, 2, 1) \end{cases}$$

Базис не ортонормированный, поэтому скалярные произведения надо будет считать “по-честному”.

Модуль вектора \mathbf{a} :

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = \sqrt{(\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2)} = \sqrt{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) - 6(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + 9(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} = \sqrt{9 - 18 + 18} = 3$$

Аналогично для вектора \mathbf{b} :

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{(\mathbf{b}, \mathbf{b})} = \sqrt{(-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)(-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)} = \dots = 5$$

Косинус угла между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} :

$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{(\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2) \cdot (-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)}{3 \cdot 5} = \dots = -\frac{12}{15} = -\frac{4}{5}$$

И острый угол параллелограмма можно найти как $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$.

□

⁶В силу линейности скалярного произведения.

В случае же **ортонормированного** базиса формулы с применением скалярных произведений упрощаются:

$$(a, b) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

$$|a| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

$$\cos \angle(a, b) = \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}}$$

3.2. Ещё пара задач про несколько систем координат

Задача (4.23). Пусть (x, y) — координаты точки в некоторой прямоугольной системе координат $(O; e)$, а (x', y') — координаты той же точки в некоторой другой системе координат $(O'; e')$. При этом

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{10} \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{20} \end{cases}$$

При каком необходимом и достаточном условии вторая система координат $(O'; e')$ также будет прямоугольной?

Решение. Итак, если переписать связь между координатами точки в разных системах координат в матричном виде

$$x = Sx' + x_{O'}$$

где

$$\begin{cases} S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ x_{O'} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Тогда связь между базисами

$$e' = eS$$

$$(e'_1, e'_2) = (a_{11}e_1 + a_{21}e_2 \quad a_{12}e_1 + a_{22}e_2)$$

То, что e прямоугольный, означает, что

$$\begin{cases} (e_i, e_i) = 1 \\ (e_i, e_j) = 0, \quad i \neq j \end{cases}$$

Выпишем аналогичные условия для базиса e' :

$$\begin{cases} (e'_1, e'_1) = a_{11}^2 e_1^2 + a_{21}^2 e_2^2 = 1 \\ (e'_2, e'_2) = a_{12}^2 e_1^2 + a_{22}^2 e_2^2 = 1 \\ (e'_1, e'_2) = a_{11}a_{12}e_1^2 + a_{21}a_{22}e_2^2 = 0 \end{cases}$$

И в итоге:

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases}$$

Можно заметить, что матрицы S вида

$$S = \begin{pmatrix} \cos \phi & \mp \sin \phi \\ \sin \phi & \pm \cos \phi \end{pmatrix}$$

удовлетворяют полученным соотношениям. Действительно, так как базисы e и e' оба прямоугольные, то один переводится в другой с помощью поворота или отражения⁷. \square

Задача (4.30). Пусть $(O; e)$ и $(O'; e')$ — две прямоугольные системы координат в пространстве \mathbb{R}^3 . При этом точки O и O' различны, а концы векторов e_i и e'_i , отложенных из точек O и O' соответственно, совпадают ($i = 1, 2, 3$). Найти координаты точки (x, y, z) в первой системе, зная её координаты во второй системе (x', y', z') .

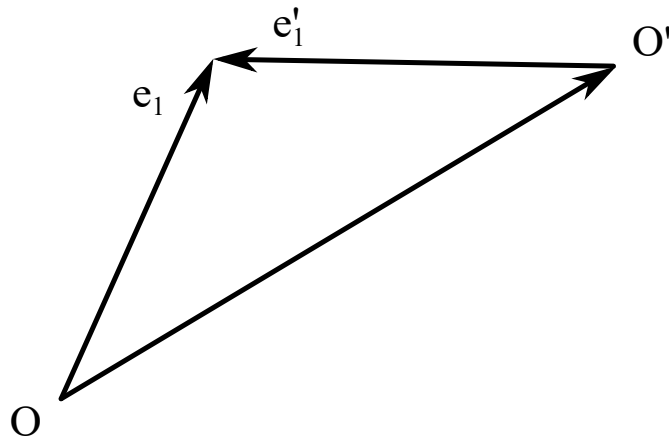


Рис. 8: Концы соответственных базисных векторов, отложенных от соответствующих начал координат, совпадают.

Решение. Условие о том, что концы базисных векторов совпадают (при условии, что векторы отложены из начал систем координат), можно записать так (8)

$$e_i = \overrightarrow{OO'} + e'_i$$

Нужно найти преобразование

$$x = Sx' + x_{O'}$$

В то же время

$$e' = eS$$

Поэтому матрицу S можно записать так

$$S = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \overrightarrow{OO'}_e \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \overrightarrow{OO'}_e \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \overrightarrow{OO'}_e \right)$$

где $\overrightarrow{OO'}_e$ — компоненты вектора $\overrightarrow{OO'}$ в базисе e (то же самое, что и $x_{O'}$ в формуле, связывающей координаты точек).

Получается, осталось лишь найти $\overrightarrow{OO'}$ в базисе e . Это можно сделать, потому что мы учли ещё не всю информацию о взаимном расположении систем координат. На самом

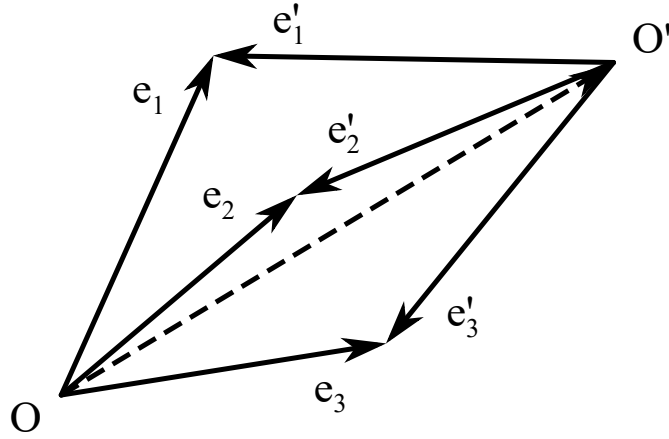


Рис. 9: Базисы, отложенные от соответствующих начал координат — прямоугольные тетраэдры.

деле тот факт, что обе системы координат прямоугольные и концы соответственных векторов, отложенных из начал соответствующих систем координат, совпадают, означает, что у нас есть “два поставленных друг на друга прямоугольных тетраэдра” (9).

Поэтому вектор $\overrightarrow{OO'}$ можно найти как

$$\overrightarrow{OO'} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2 + \frac{1}{3}e_3 \right)$$

(так как проекция точки пересечения OO' с плоскостью концов базисных векторов на грани векторов e_i, e_j совпадает с точкой пересечения медиан треугольников соответствующих граней⁸).

Тогда матрица S равна

$$\begin{aligned} S &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

□

⁷По знаку определителя матрицы S можно сказать о том, какое именно преобразование связывает два базиса: только поворот (при котором направление поворота от e'_1 к e'_2 по наименьшему углу совпадает с направлением поворота по наименьшему углу от e_1 к e_2) или ещё и отражение одного базисного вектора относительно другого (когда меняется класс базиса).

⁸Точка P пересечения OO' с плоскостью концов базисных векторов $E_1E_2E_3$ — очевидно, точка пересечения медиан $\triangle E_1E_2E_3$. То есть его центр масс. Если “двигать” одну из вершин $\triangle E_1E_2E_3$ по нормали до пересечения с гранью тетраэдра, скажем, двигать E_3 по нормали к плоскости OE_1E_2 , то она окажется вершиной O при прямом угле в $\triangle OE_1E_2$, а P перейдёт в центр масс прямоугольного треугольника OE_1E_2 . Но положение проекции P на грань OE_1E_2 не менялось при сдвиге вершины E_3 по нормали к OE_1E_2 .