Семинар 4

Алексеев Василий

22 + 26 сентября 2022

Содержание

1 Скалярное произведение **1**

2 Смешанное и векторное произведения **4**

2.1 Ориентированное пространство 4

2.2 Смешанное произведение 6

2.3 Векторное произведение 7

2.4 Задачи 10

3 Дополнение **15**

3.1 Ещё пара задач про скалярное произведение 15

3.2 Ещё пара задач про векторное и смешанное произведения 17

1. Скалярное произведение

Определение 1.1. Скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ненулевых[1] векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ определяется следующим образом:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \equiv |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi \tag{1}$$

где $|\boldsymbol{a}|$ и $|\boldsymbol{b}|$ — модули векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а ϕ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (тот, который не превосходит π). В случае, если хотя бы один из пары векторов нулевой, скалярное произведение этих векторов полагается равным нулю.

Отметим несколько свойств скалярного произведения:

- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geq 0$. При этом $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.
- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ — симметричность.
- Линейность по первому аргументу:

$$\begin{cases} (\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}), \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \end{cases}$$

Первые свойства следуют из определения. Вынесение множителя за знак скалярного произведения тоже "в целом понятно" (можно вывести из определения). Докажем последнее свойство.

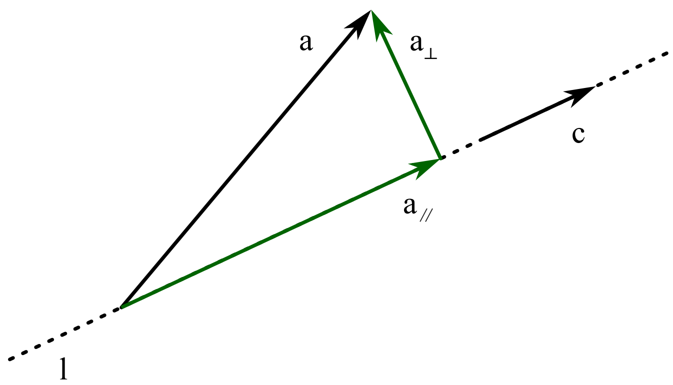

Рис. 1: Ортогональная векторная проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{c}$.

Начнём с того, что при заданном направлении $\boldsymbol{c}$ любой вектор раскладывается в сумму двух (1):

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\parallel} + \boldsymbol{a}_{\perp}$$

где $\boldsymbol{a}_{\parallel}$ — вектор, параллельный $\boldsymbol{c}$, и $\boldsymbol{a}_{\perp}$ — вектор, перпендикулярный $\boldsymbol{c}$. Компонента $\boldsymbol{a}_{\parallel}$ называется *ортогональной векторной проекцией* вектора $\boldsymbol{a}$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{c}$, и может обозначаться так:

$$\pi_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}) \equiv \boldsymbol{a}_{\parallel}$$

Кроме векторной проекции, есть ещё понятие скалярной проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на направление вектора $\boldsymbol{c}$:

$$\pi_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}) \equiv |\boldsymbol{a}_{\parallel}| \cdot \begin{cases} +1 & \text{если } \boldsymbol{a}_{\parallel} \upuparrows \boldsymbol{c} \\ -1 & \text{если } \boldsymbol{a}_{\parallel} \uparrow\downarrow \boldsymbol{c} \end{cases}$$

[1]Ненулевых, чтобы можно было говорить об угле между векторами.

Будем обозначать векторную и скалярную проекции одинаково. (Из контекста должно быть понятно, какая имеется в виду.)

Спроецируем теперь вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{c}$ (2):

$$\pi_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi$$

где ϕ — угол между вектором $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и вектором $\boldsymbol{c}$.

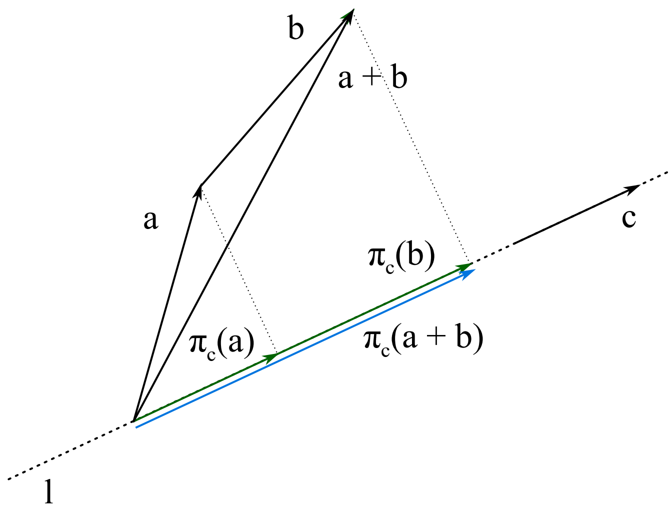

Рис. 2: Ортогональные векторные проекции векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{c}$.

Но проекция вектора, являющегося суммой нескольких векторов, равна сумме проекций этих векторов:

$$\pi_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \pi_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}) + \pi_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{b})$$

поэтому

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi = |\boldsymbol{a}| \cdot \cos\phi_1 + |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi_2$$

где ϕ_1 и ϕ_2 — углы, которые образуют векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ с вектором $\boldsymbol{c}$ (считаем, что $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ ненулевые). Умножая обе части последнего равенства на модуль вектора $\boldsymbol{c}$, получаем то, что хотели доказать:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

□

Задача (2.21)**.** *Длины базисных векторов* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ *равны соответственно* 3*,* $\sqrt{2}$ *и* 4*. Углы между векторами:* $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \angle(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 45^\circ$*,* $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = 60^\circ$*.*

Надо вычислить длины сторон и углы параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}(1, -3, 0)$ *и* $\boldsymbol{b}(-1, 2, 1)$*, заданных своими координатами в указанном базисе.*

Решение. Длины сторон можно посчитать через скалярные произведения:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}, \quad |\boldsymbol{b}| = \sqrt{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})}$$

Угол между сторонами (какой-нибудь один из двух) — тоже:

$$\cos\alpha = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

Получается, чтобы решить задачу, надо просто посчитать три скалярных произведения. Базис "кривой", поэтому считать надо "по-честному", отталкиваясь от базовой формулы. Например, модуль $\boldsymbol{a}$ можно посчитать так:

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}|^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2) \cdot (\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2) &= (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) - 3(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) - 3(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + 9(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)\\ &= \boldsymbol{e}_1^2 - 6(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + 9\boldsymbol{e}_2^2 = 9 - 18 + 18 = 9 \Rightarrow |\boldsymbol{a}| = 3\end{aligned}$$

Аналогично, для модуля $\boldsymbol{b}$:

$$|\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = (-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)^2 = \ldots = 25$$

И скалярное $\boldsymbol{a}$ на $\boldsymbol{b}$, чтоб потом найти косинус угла:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = \ldots = -12$$

Косинус одного из углов между сторонами параллелограмма:

$$\cos\alpha = \frac{-12}{3 \cdot 5} = -\frac{4}{5}$$

Задачу можно считать решённой. Но вернёмся ещё раз к скалярному $\boldsymbol{a}$ на $\boldsymbol{b}$. Распишем его ещё раз, и в общем случае. То есть пусть вектор $\boldsymbol{a}$ — это вектор с компонентами (a_1, a_2, a_3), а вектор $\boldsymbol{b}$ — с компонентами (b_1, b_2, b_3) в некотором базисе $e = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$.

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3, b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) = a_1b_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + a_2b_2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)&\\ + a_3b_3(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) + (a_1b_2 + a_2b_1)(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + (a_1b_3 + a_3b_1)(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) + (a_2b_3 + a_3b_2)(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)&\end{aligned}$$

Теперь "не трудно заметить", что выражение для скалярного через компоненты можно свернуть и записать в матричном виде:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) \\ (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \\ (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Матрица, куда собираем скалярные произведения между парами базисных векторов, называется *матрицей Грама* базиса:

$$\begin{cases} \Gamma = (g_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3} \\ g_{ij} = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \end{cases}$$

Итого, с матрицей Грама скалярное произведение можно считать по формуле:

$$\boxed{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^T \Gamma \boldsymbol{b}}$$

где в левой части символы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ означают векторы — направленные отрезки, а в правой те же самые символы означают координатные столбцы соответствующих векторов в базисе.

□

В случае же **ортонормированного** базиса формулы с применением скалярных произведений упрощаются:

$$\boxed{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i} \tag{2}$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

$$\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}$$

Задача (2.24)**.** *Даны два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, причём $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$. Чему равна ортогональная проекция $\boldsymbol{b}$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{a}$?*

Решение. Скалярная ортогональная проекция $\boldsymbol{b}$ на направление, задаваемое $\boldsymbol{a}$:

$$\pi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{b}| \cos\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$$

Векторная проекция:

$$\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{b}| \cos\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) \cdot \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

то есть скалярная проекция, умноженная на единичный вектор в направлении $\boldsymbol{a}$. Выражение можно записать по-другому, если домножить числитель и знаменатель на $|\boldsymbol{a}|$:

$$\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}) = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}$$

Векторная проекция $\boldsymbol{b}$ сонаправлена с $\boldsymbol{a}$, если скалярное произведение $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) > 0$ и противоположно направлена $\boldsymbol{a}$ в случае, если $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) < 0$. Если $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0$, то векторная проекция — нулевой вектор. □

2. Смешанное и векторное произведения

2.1. Ориентированное пространство

На прямой все векторы делятся на два класса: направленные в одну сторону вдоль прямой и в противоположную (3). На плоскости все упорядоченные пары неколлинеарных векторов делятся на два класса: пары, где поворот от первого вектора ко второму по наименьшему углу совершается против часовой стрелки, и пары, где этот поворот совершается по часовой стрелке (3). И в трёхмерном пространстве все упорядоченные тройки некомпланарных векторов делятся на два класса: те, где поворот от первого базисного вектора ко второму по наименьшему углу происходит против часовой стрелки, если смотреть со стороны третьего базисного вектора (*правые* базисы), и те, где этот поворот происходит по часовой стрелке (*левые* базисы) (3).

Определение 2.1. Ориентированное пространство — пространство, в котором выбран класс базисов[2].

В ориентированном пространстве можно говорить о длине, площади и объёме со знаком.

Так, в одномерном пространстве, если рассматриваемый вектор направлен так же, как и базисы в выбранном классе, то его длина считается большей нуля. В противном случае — меньше нуля. В двумерном пространстве, если параллелограмм построен на *упорядоченной* паре векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то его площадь со знаком $S_{\pm}$ можно считать большей

[2]В общем случае пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ базисы тоже образуют два класса.

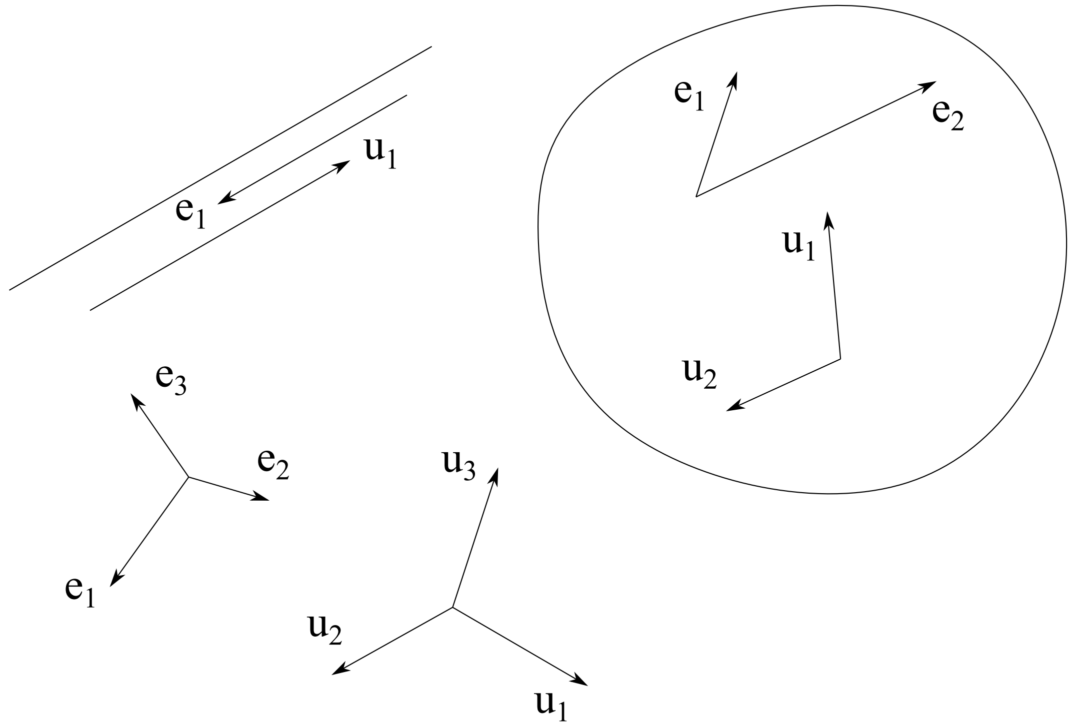

Рис. 3: Разные классы базисов в одно-, дву- и трёхмерном пространствах.

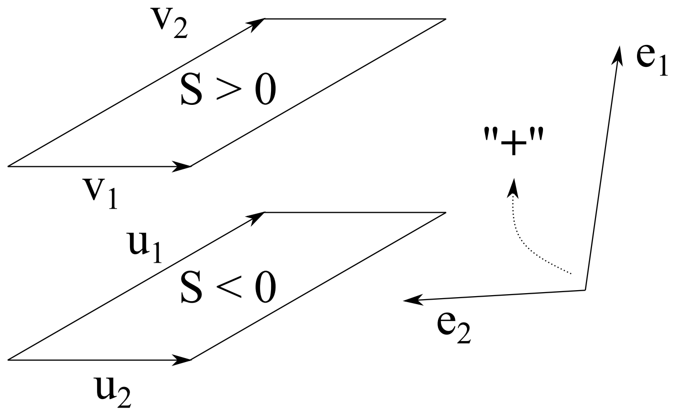

Рис. 4: Площадь ориентированного параллелограмма.

нуля, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют базис, относящийся к выбранному (положительному) классу (4). Иначе — меньше нуля. И в трёхмерном пространстве, если параллелепипед построен на *упорядоченной* тройке векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, которые в таком же порядке образуют базис из выбранного (положительного) класса, то объём со знаком $V_{\pm}$ такого параллелепипеда будет больше нуля. Иначе, если тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ не принадлежит положительному классу базисов, то объём $V_{\pm}$ параллелепипеда будет меньше нуля.

В трёхмерном пространстве положительными выбраны правые базисы.

Упомянув трёхмерное пространство, стоит ещё раз вернуться к вопросу об ориентации плоскости. Выбор ориентации в 3D ничего не говорит об ориентации на конкретной плоскости. Задать ориентацию на плоскости можно

- В 2D — просто сказав, в какую сторону поворот от $\boldsymbol{e}_1$ к $\boldsymbol{e}_2$ по наименьшему углу считается положительным.

- В 3D — выбрав вектор нормали $\boldsymbol{n}$ к плоскости. Тогда положительный базис на плоскости — тот, который с выбранной нормалью составляет положительную тройку в пространстве (порядок $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{n}$ или $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ — не важно).

- Как в 2D, так и в 3D: просто выбрав упорядоченную пару неколлинеарных векторов и сказав, что этот базис положительный (тогда и все упорядоченные пары векторов из этого же класса — тоже положительные).

2.2. Смешанное произведение

Определение 2.2. В ориентированном пространстве смешанное произведение трёх некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ полагается равным объёму ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \equiv V_{\pm}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

Если вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны, то их смешанное произведение полагается равным нулю.

Отметим, что в смешанном произведении можно переставлять сомножители. Но при этом может поменяться знак смешанного произведения (если меняется класс тройки):

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = \ldots = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \tag{3}$$

Теорема 2.1 (О связи смешанного и скалярного произведения)**.** *Для любой пары векторов* $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *существует единственный вектор* $\boldsymbol{d}$, *такой что для любого вектора* $\boldsymbol{a}$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})$$

Доказательство. Найдём такой вектор $\boldsymbol{d}$ для произвольной тройки векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и покажем, что он единственен и не зависит от $\boldsymbol{a}$.

Пусть $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ неколлинеарны. Пусть также $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ некомпланарны. Отложим вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ от одной точки (5).

Рассмотрим пару векторов $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Отложим единичный вектор нормали $\boldsymbol{n}$ к плоскости векторов $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ так, чтобы тройка векторов $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{n}$ была бы положительной. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ (площадь без знака) равна

$$S = |\boldsymbol{b}| \cdot |\boldsymbol{c}| \cdot \sin\phi$$

где ϕ — угол между векторами $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Тогда $\boldsymbol{d} \equiv S \cdot \boldsymbol{n}$ — вектор, направленный вдоль $\boldsymbol{n}$ и по модулю равный площади основания параллелепипеда, где лежат вектора $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. И для объёма параллелепипеда (без знака) получаем:

$$V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = S \cdot \big||\boldsymbol{a}| \cdot \cos\theta\big|$$

где $\big||\boldsymbol{a}| \cdot \cos\theta\big|$ — высота. При этом можно заметить, что если “убрать модуль”, то получается как раз объём со знаком:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) = S \cdot |\boldsymbol{a}| \cdot \cos\theta = V_{\pm}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

так как именно от того, со-направлены или противоположно направлены вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{d}$, зависит, будет ли $V_{\pm}$ больше или меньше нуля (тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}$ по построению положительная; тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ может быть как положительной, так и отрицательной). Таким образом, получаем, что

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})$$

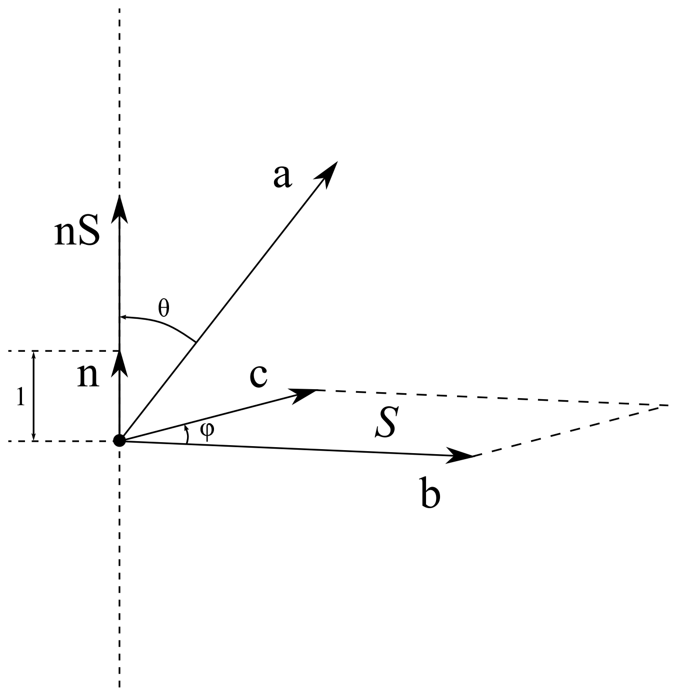

Рис. 5: Некомпланарные векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$; единичный вектор нормали $\boldsymbol{n}$ к плоскости векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, такой что тройка $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{n}$ положительная (правая); S — площадь параллелограмма, построенного на $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

Если же векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны, то объём параллелепипеда будет равен нулю, но тогда и $\boldsymbol{d} \perp \boldsymbol{a}$.

Если же вектора $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ коллинеарны, то смешанное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ также будет равно нулю, и вектор $\boldsymbol{d}$ можно взять равным нулю.

Покажем, что такой вектор $\boldsymbol{d}$, что $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})$, $\forall \boldsymbol{a}$ единственен. Допустим противное: пусть существует вектор $\boldsymbol{d}_1$, такой что $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})$ и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}_1)$, $\forall \boldsymbol{a}$. Но тогда $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}_1)$, и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d} - \boldsymbol{d}_1) = 0$. То есть вектор $\boldsymbol{d} - \boldsymbol{d}_1$ перпендикулярен любому вектору пространства. Поэтому $\boldsymbol{d} - \boldsymbol{d}_1 = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_1$. □

Введённый выше вектор $\boldsymbol{d}$ называется *векторным произведением* векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

2.3. Векторное произведение

Определение 2.3. Векторным произведением неколлинеарных векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называется вектор $\boldsymbol{d}$, такой что

- Модуль вектора $\boldsymbol{d}$ равен
$$|\boldsymbol{d}| = |\boldsymbol{b}| \cdot |\boldsymbol{c}| \cdot \sin\alpha$$
где α — угол между векторами $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

- Вектор $\boldsymbol{d}$ перпендикулярен как вектору $\boldsymbol{b}$, так и вектору $\boldsymbol{c}$:
$$\boldsymbol{d} \perp \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{d} \perp \boldsymbol{c}$$

- Вектор $\boldsymbol{d}$ образует *положительную тройку* $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ вместе с исходными $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$[3].

[3] При выбранной правой ориентации пространства тройка $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ должна быть правой.

Если же векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ коллинеарны[4], то их векторное произведение полагается равным нулю.

Векторное произведение $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ может обозначаться как $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ или $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$.

Таким образом,

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]) \tag{4}$$

Рассмотрим некоторые свойства векторного произведения.

Так, векторное произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на самого себя равно нулю, так как $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{a}$:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{0}$$

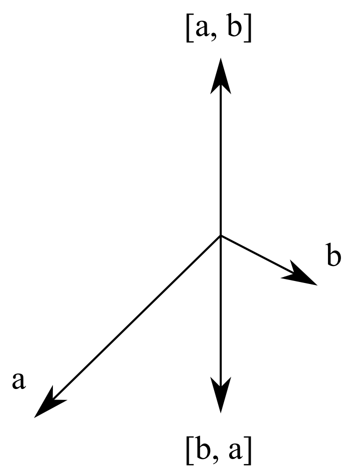

Рис. 6: Векторное произведение антикоммутативно.

Векторное произведение обладает свойством антикоммутативности. Так, для любых $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$$

так как первый и второй вектора меняются местами, и направление поворота от первого вектора ко второму меняется на противоположное (6).

И, так же, как и скалярное произведение, векторное произведение линейно по первому аргументу:

$$[\beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}] = \beta_1[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}] + \beta_2[\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}]$$

Или, что то же самое:

$$\begin{cases} [\beta \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \beta[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] \\ [\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}] \end{cases}$$

Доказательство. Докажем это свойство. Надо “в нужное время вставлять и убирать квад-

[4] В этом случае не получится использовать “связанный с положительной тройкой” пункт определения.

ратные скобки" и пользоваться линейность скалярного произведения:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}, [\beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}]) &\overset{(4)}{=} (\boldsymbol{a}, \beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}) \\
&\overset{(3)}{=} -(\beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \\
&\overset{(4)}{=} -(\beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]) \\
&= -\beta_1 (\boldsymbol{b}_1, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]) - \beta_2 (\boldsymbol{b}_2, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]) \\
&\overset{(4)}{=} -\beta_1 (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \beta_2 (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \\
&\overset{(3)}{=} \beta_1 (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}) + \beta_2 (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}) \\
&\overset{(4)}{=} \beta_1 (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}]) + \beta_2 (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}]) = (\boldsymbol{a}, \beta_1 [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}] + \beta_2 [\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}])
\end{aligned} \tag{5}
$$

□

Теперь можно выразить векторное произведение между произвольными двумя векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ пространства, которые заданы компонентами в некотором базисе $e = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Пусть

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{a} = a_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + a_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + a_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\
\boldsymbol{b} = b_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + b_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + b_3 \cdot \boldsymbol{e}_3
\end{cases}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + a_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + a_3 \cdot \boldsymbol{e}_3) \times (b_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + b_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + b_3 \cdot \boldsymbol{e}_3) \\
&= (a_2 b_3 - a_3 b_2)[\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] + (a_1 b_3 - a_3 b_1)[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3] + (a_1 b_2 - a_2 b_1)[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]
\end{aligned}
$$

где в последнем переходе использовались свойство антикоммутативности векторного произведения и свойство равенства нулевому вектору векторного квадрата любого вектора. Полученное соотношение можно переписать в таком виде

$$
\boxed{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] & [\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1] & [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2] \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}} \tag{6}
$$

где, отметим ещё раз, $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ — произвольный базис.

Если воспользоваться полученным представлением векторного произведения через компоненты векторов, подставив его в формулу (4), то получим

$$
\boxed{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)} \tag{7}
$$

Если же базис e **правый ортонормированный**, то формулы упрощаются. Для векторного произведения:

$$
\boxed{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}} \tag{8}
$$

И для смешанного:

$$
\boxed{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}} \tag{9}
$$

2.4. Задачи

Перед задачами параграфа 3 в сборнике сказано, что базис во всех задачах, если не оговорено противное, *правый ортонормированный*. Поэтому при решении можно будет пользоваться более простыми формулами: для векторного (8), смешанного (9) и скалярного (2) произведений.

Задача (3.1(2))**.** *Найти* $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$*, где* $\boldsymbol{a}(2, -1, 1)$ *и* $\boldsymbol{b}(-4, 2, -2)$*.*

Решение.

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 0\boldsymbol{i} - 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$$

То есть $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$. О чём можно бы было догадаться и сразу, просто внимательно посмотрев на координатные строки векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (они пропорциональны, а значит векторы коллинеарны). □

Задача (3.2(1))**.** *Упростить выражение* $[\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}]$.

Решение. Упрощаем, пользуясь свойствами операции векторного произведения (перемена мест — со сменой знака!):

$$[\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] - [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] - [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{0} - [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] - [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] - \boldsymbol{0} = -2[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$$

□

Задача (3.8(1))**.** *На векторах* $\boldsymbol{a}(2, 3, 1)$ *и* $\boldsymbol{b}(-1, 1, 2)$*, отложенных из одной точки, построен треугольник. Найти:*

1) *Площадь треугольника.*
2) *Длины трёх его высот.*

Решение.

Способ 1 (“скетч”). Можно бы было сделать “по-простому”: найти длины сторон треугольника (через скалярное произведение), потом косинус угла между сторонами (тоже через скалярное произведение), потом синус, а потом и площадь треугольника.

Способ 2. А можно найти площадь с помощью векторного произведения. Векторное произведение $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ даст *вектор*, перпендикулярный плоскости, где лежат $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Но длина этого вектора как раз будет равна удвоенной площади треугольника. А найти сам вектор $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ можно с помощью формулы от компонент (8):

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\boldsymbol{e}_1 - 5\boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_3$$

Поэтому площадь будет равна:

$$S_{\triangle} = \frac{\sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

А чтобы найти высоты... видимо, всё равно придётся считать скалярные произведения)

$$a = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}, \quad b = \sqrt{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})}, \quad |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| = \sqrt{(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})}$$

Дальше же высоты можно найти с помощью другой формулы площади треугольника:

$$S_{\triangle} = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$\square$

Задача (3.19(3)). *Найти смешанное произведение векторов* $\boldsymbol{a}(2, 1, 0)$, $\boldsymbol{b}(3, 4, -1)$, $\boldsymbol{c}(-1, -3, 1)$.

Решение.

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 2 - 2 + 0 = 0$$

То есть $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$. О чём можно бы было догадаться и сразу, просто внимательно посмотрев на координатные строки векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ (они линейно зависимы: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$ — а значит векторы компланарны). $\square$

Задача (3.12). *Доказать, что для трёх неколлинеарных векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *выполнение равенств*

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$$

равносильно тому, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *компланарны, причём*

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

Решение.

$\Leftarrow$. Пусть сумма векторов равна нулевому вектору. Тогда можно, например, выразить $\boldsymbol{a}$ через $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$:

$$\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$$

Подставим в векторные произведения и проверим выполнение равенств:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [-\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$$

$$[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{c}, -\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}] = -[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$$

$\Rightarrow$. Пусть выполнены равенства векторных произведений. Если известно, что, например

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$$

то можно это переписать как

$$[\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{0}$$

Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ по условию неколлинеарны, значит, ненулевые. Тогда из соотношения выше видно, что векторы $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, причём эту коллинеарность можно представить так:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = k_1 \boldsymbol{b}, \quad k_1 \in \mathbb{R}$$

Мы рассмотрели только одно равенство. Вообще же аналогичным образом можно вывести следующие соотношения:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = k_1 \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = k_2 \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = k_3 \boldsymbol{a} \end{cases}$$

Выразим $\boldsymbol{c}$ из первого соотношения:

$$\boldsymbol{c} = k_1 \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$$

и подставим в третье уравнение системы. Получим:

$$\boldsymbol{b} + k_1\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = k_3\boldsymbol{a} \Leftrightarrow (1 + k_1)\boldsymbol{b} = (1 + k_3)\boldsymbol{a}$$

Но $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны по условию. Поэтому $k_1 = k_3 = -1$. Очевидно, также и $k_2 = -1$. Раз $k_1 = -1$, то

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

□

Задача (3.13(2)). *Доказать тождество (“бац минус цаб”):*

$$\big[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\big] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

Решение.

Способ 1 *(“Стандартный”).* Введём базис, посчитаем левую и правую часть через компоненты векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, и сравним.

Выберем “хороший” базис — ортонормированный. Пусть при этом базисный вектор $\boldsymbol{e}_3$ параллелен вектору $\boldsymbol{c}$: $\boldsymbol{c} = \gamma_3\boldsymbol{e}_3$. Пусть базисный вектор $\boldsymbol{e}_2$ лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ (если они неколлинеарны, иначе — надо выбрать $\boldsymbol{e}_2$ “просто как-нибудь”, чтоб $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_2$ были неколлинеарны): $\boldsymbol{b} = \beta_2\boldsymbol{e}_2 + \beta_3\boldsymbol{e}_3$. И последний вектор $\boldsymbol{e}_1$ — такой, чтоб вместе с $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_2$ образовывал правую тройку (в порядке нумерации): $\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \alpha_3\boldsymbol{e}_3$.

Теперь, введя базис и координаты векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в этом базисе, можем начать выражать произведения между ними через их координаты:

$$[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 0 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \beta_2\gamma_3\boldsymbol{e}_1$$

$$\big[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\big] = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2\gamma_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \beta_2\gamma_3 \cdot (\alpha_3\boldsymbol{e}_2 - \alpha_2\boldsymbol{e}_3)$$

И для правой части тождества, которое надо доказать:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = 0 + 0 + \alpha_3\gamma_3 = \alpha_3\gamma_3$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\beta_2\boldsymbol{e}_2 + \beta_3\boldsymbol{e}_3) \cdot \alpha_3\gamma_3 - \gamma_3\boldsymbol{e}_3 \cdot (\alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3) = \beta_2\gamma_3 \cdot (\alpha_3\boldsymbol{e}_2 - \alpha_2\boldsymbol{e}_3)$$

Результаты для левой и правой частей доказываемого тождества получились одинаковыми, поэтому тождество доказано.

Способ 2 *(Павел Юнкер, Б04-108, 2021[5]).* Приведём ещё раз тождество, которое надо доказать:

$$\big[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\big] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

Понимаем, что левая часть — это некоторый вектор в плоскости $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$. Причём не просто “некоторый”, а вектор, который получается поворотом ортогональной проекции $\boldsymbol{a}$ на плоскость $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ на 90° в направлении от $\boldsymbol{c}$ к $\boldsymbol{b}$ (7). С правой частью уравнения пока не очень понятно (кроме того, что это тоже вектор, лежащий в плоскости векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$).

Можно ли как-то... упростить задачу? Перейти от исходной “общей” постановки к какой-нибудь другой, попроще (но так, чтоб решение более простого случая позволяло бы и исходное тождество доказать)...

[5]Автор конспекта впервые познакомился с таким решением, проверяя ДЗ Павла.

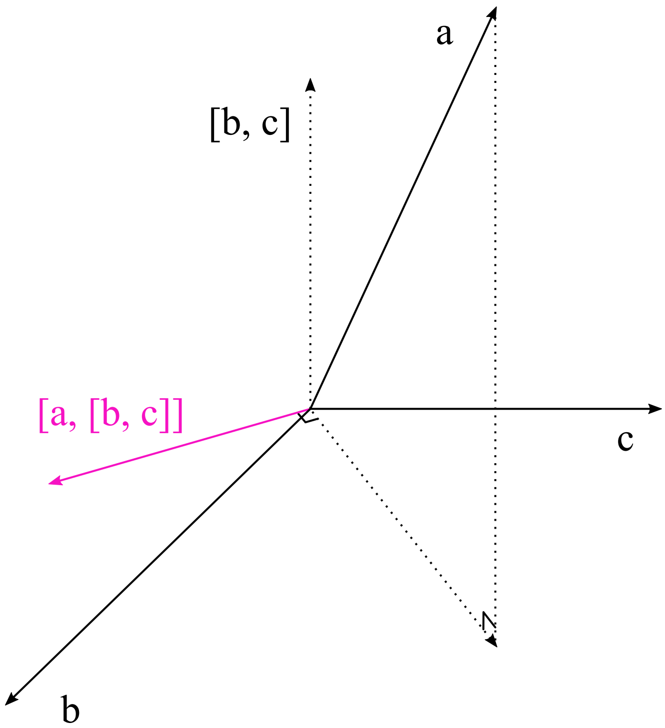

Рис. 7: Вектор $\big[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\big]$.

Зависит ли тождество от модулей векторов? Если один из векторов нулевой, то всё будет нулём. Если же векторы не нулевые, то можно просто “отнормировать обе части тождества” на модули векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Таким образом, мы можем считать, что все векторы единичной длины.

Зависит ли тождество от угла между векторами $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ (которые образуют базис на той плоскости, где поворачивается проекция вектора $\boldsymbol{a}$)? Допустим, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ не перпендикулярны. Тода можно подобрать $k \in \mathbb{R}$ так, чтобы векторы $\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b} - k\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{c}$ уже были перпендикулярны. Заменяя в исходном тождестве $\boldsymbol{b}$ на $\boldsymbol{b}' + k\boldsymbol{c}$, получаем… точно такое же тождество, но с вектором $\boldsymbol{b}'$ вместо $\boldsymbol{b}$! Таким образом, мы можем считать, что векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ перпендикулярны.

Теперь понятен смысл правой части тождества: это ортогональная проекция $\boldsymbol{a}$ на плоскость $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, но повёрнутая на 90° в направлении от $\boldsymbol{c}$ к $\boldsymbol{b}$. (Выражения $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ дают ортогональные проекции на $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно. Поэтому ортогональная проекция на плоскость *до поворота*: $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$.) То есть это ровно то же самое, что даёт левая часть!

Тождество доказано. □

Задача (3.15)**.** *Даны векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$*, такие что*

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0} \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \end{cases}$$

Надо выразить через $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *какой-нибудь вектор* $\boldsymbol{x}$*, удовлетворяющий уравнению*

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$$

Решение. Из условия следует, что либо $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}$, либо $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$. Будем пока считать, что $\boldsymbol{b}$ не равен нулю (8).

Так как $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{b}$ и $|\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{a}| \cdot \sin\alpha = |\boldsymbol{b}|$, где $\alpha = \angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$. То есть

$$|\boldsymbol{x}| \sin\alpha = \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$$

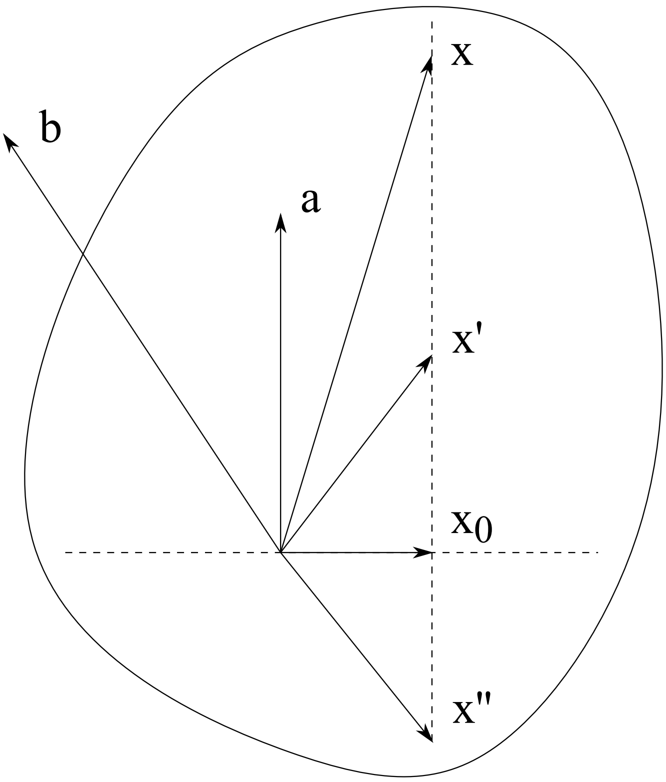

Рис. 8: $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$.

Пусть решению $\boldsymbol{x}_0$ соответствует угол $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, то есть вектор $\boldsymbol{x}_0$ перпендикулярен как $\boldsymbol{b}$, так и $\boldsymbol{a}$. Тогда $\boldsymbol{x}_0$ сонаправлен $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ (векторное произведение — именно в таком порядке) (8). И найти $\boldsymbol{x}_0$ можно как

$$\boldsymbol{x}_0 = \underbrace{\frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{\big|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\big|}}_{\text{“направление”}} \cdot \underbrace{\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}}_{\text{модуль}} = \frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{|\boldsymbol{a}|^2}$$

Если $\boldsymbol{b} = 0$, то по формуле получаем $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$, что тоже является решением уравнения. □

Задача (3.20(1))**.** *Проверить, компланарны ли векторы, заданные своими координатами в произвольном базисе:*

$$\boldsymbol{a}(2, 3, 5), \quad \boldsymbol{b}(7, 1, -1), \quad \boldsymbol{c}(3, -5, -11)$$

Решение.

Способ 1 *(“скетч”).* Компланарность трёх векторов равносильна их линейной зависимости. Поэтому можно бы было составить линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и приравнять её нулю. Если бы получилось найти нетривиальное решение (коэффициенты перед векторами), то система бы была линейно зависимой. В противном случае — линейно независимой.

Способ 2. Компланарность трёх векторов также равносильна тому, что объём параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен нулю. А объём можно посчитать через смешанное произведение. Если обозначить исходный базис как $e = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, то объём параллелепипеда со знаком будет равен:

$$V_{\pm}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & -11 \end{vmatrix} (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$$

Смешанное $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ точно не ноль. Но определитель даст ноль, поэтому и объём ноль, и векторы компланарны. $\square$

3. Дополнение

3.1. Ещё пара задач про скалярное произведение

Задача (2.21 (Другой способ)). *Длины базисных векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ равны соответственно* 3*,* $\sqrt{2}$ *и* 4*. Углы между векторами: $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \angle(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 45°$, $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = 60°$.*

Надо вычислить длины сторон и углы параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}(1, -3, 0)$ и $\boldsymbol{b}(-1, 2, 1)$, заданных своими координатами в указанном базисе.

Решение. Мы "умеем" считать скалярное произведение в "хорошем" базисе (ортонормированном). Поэтому, чем считать всё в "кривом" базисе, можно... "починить" этот самый базис, и формулы для скалярного произведения будут простыми.

Как "починить" базис $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$? Можно отнормировать векторы. Но базис всё равно останется "кривым". Нам ещё надо как-то "повернуть" базисные векторы, чтобы они стали перпендикулярны...

Но вместо того, чтоб пытаться последовательно из старого базиса получить новый, мы можем сразу *выбрать подходящий ортонормированный новый базис*, а потом просто найти нужную матрицу перехода, чтобы пересчитать компоненты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

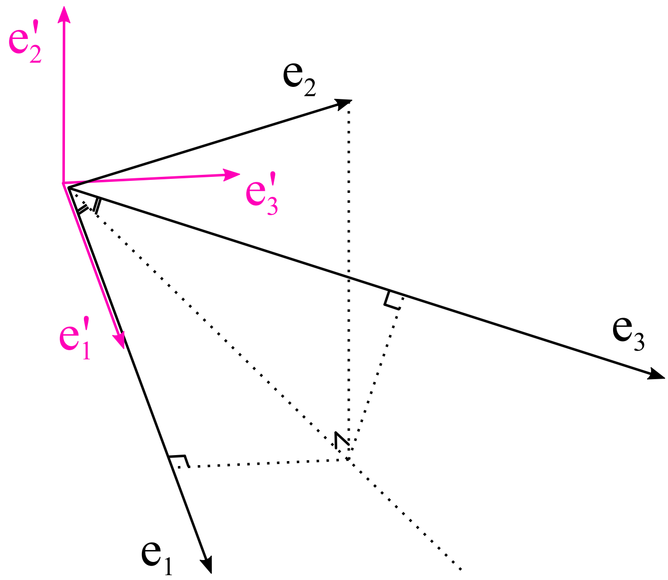

Рис. 9: Выбор нового базиса e' (ортонормированного).

Вектор $\boldsymbol{e}_2$ образует одинаковые углы с $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_3$. Поэтому будем смотреть на исходный базис так, словно $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_3$ лежат в горизонтальной плоскости, а $\boldsymbol{e}_2$ из неё выходит (9). Направим $\boldsymbol{e}_1'$ вдоль $\boldsymbol{e}_1$. Вектор $\boldsymbol{e}_3'$ выберем так, чтоб он был в той же горизонтальной плоскости, и чтоб поворот от $\boldsymbol{e}_1'$ к $\boldsymbol{e}_3'$ совершался в ту же сторону (по или против часовой стрелки), что и поворот от $\boldsymbol{e}_1$ к $\boldsymbol{e}_3$. Вектор $\boldsymbol{e}_2'$ направим в ту же сторону (в то же полупространство), что и $\boldsymbol{e}_2$. Новый базис e' построен.

От чего к чему искать матрицу перехода[6]? Если $e = e'S'$, то $\boldsymbol{x}' = S'\boldsymbol{x}$. То есть чтобы понять, как векторы раскладываются в новом ("хорошем") базисе, надо понять, как

[6]Возможно, в такой постановке вопрос лишний, потому что раскладывать векторы e' по e представляется проблематичным.

векторы старого (“плохого”) базиса выражаются в новом базисе.

Удачный выбор e' позволяет “не очень сложно” (“из геометрии”) получить указанную матрицу перехода S' (столбцы которой — координаты векторов “плохого” базиса в “хорошем”[7]):

$$S' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2/3} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Тогда координаты векторов в “хорошем” базисе:

$$\boldsymbol{a}' = S'\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2/3} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{6} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}' = S'\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2/3} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 8/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Скалярное произведение (тех же векторов, но с координатами в “хорошем” базисе):

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \cdot 1 + \left(-\sqrt{6}\right) \cdot \left(2\sqrt{2}/\sqrt{3}\right) + \left(-\sqrt{3}\right) \cdot 8/\sqrt{3} = -12$$

□

Задача (2.22)**.** *Длины базисных векторов* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ *равны соответственно* 1*,* 1 *и* 2*. Углы между векторами:* $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 90°$*,* $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = \angle(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 60°$*.*

Надо найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}(-1, 0, 2)$ *и* $\boldsymbol{b}(2, -1, 1)$*.*

Решение. Базис не ортонормированный, поэтому скалярные произведения надо будет считать “по-честному”.

Модуль вектора $\boldsymbol{a}$:

$$|\boldsymbol{a}|^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = (-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3)(-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) - 4(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) + 4(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) = 1 - 4 + 16 = 13$$

Аналогично для вектора $\boldsymbol{b}$:

$$|\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = (2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)(2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = \ldots = 11$$

Косинус угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} = \frac{(-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3) \cdot (2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{11}} = \ldots = \frac{7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{11}}$$

Поэтому синус угла будет равен:

$$\sin\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sqrt{1 - \frac{49}{13 \cdot 11}}$$

И площадь параллелограмма:

$$S = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sqrt{13} \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt{1 - \frac{49}{13 \cdot 11}} = \sqrt{94}$$

□

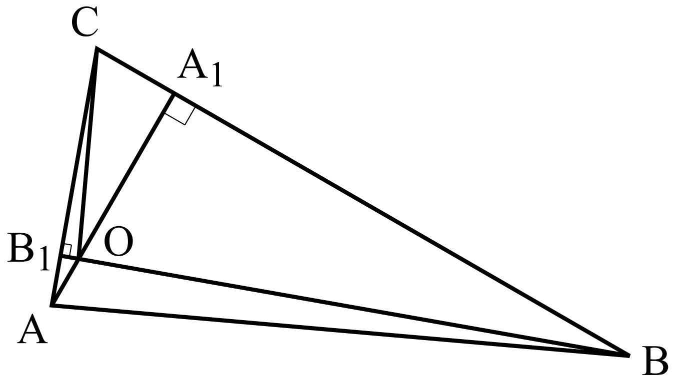

Рис. 10: Точка O пересечения двух высот AA_1 и BB_1 в $\triangle ABC$.

Задача (Про точку пересечения высот в треугольнике)**.** *Используя скалярное произведение, доказать, что в любом треугольнике высоты пересекаются в одной точке.*

Решение. Пусть в $\triangle ABC$ высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O (10). Тогда надо показать, что прямая $CO \perp AB$.

Так как $AO \perp BC$ и $BO \perp AC$, то

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = 0 \\ \overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} \end{cases}$$

В то же время

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

Поэтому $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB}$. □

3.2. Ещё пара задач про векторное и смешанное произведения

Задача (2.22 (Другой способ))**.** *Длины базисных векторов* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ *равны соответственно* 1*,* 1 *и* 2*. Углы между векторами:* $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 90^\circ$*,* $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = \angle(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 60^\circ$*.*

Надо найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}(-1, 0, 2)$ *и* $\boldsymbol{b}(2, -1, 1)$*.*

Решение. Площадь можно посчитать и с помощью векторного произведения. Только пользоваться надо общей формулой, потому что базис “кривой”:

$$S = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \left|\det\begin{pmatrix} [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] & [\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1] & [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2] \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right| = \Big|2 \underbrace{\tilde{e}_1}_{[e_2, e_3]} +5 \underbrace{\tilde{e}_2}_{[e_3, e_1]} + \underbrace{\tilde{e}_3}_{[e_1, e_2]} \Big|$$

$$= \sqrt{4\tilde{e}_1^2 + 25\tilde{e}_2^2 + \tilde{e}_3^2 + 4\tilde{e}_1\tilde{e}_3 + 20\tilde{e}_1\tilde{e}_2 + 10\tilde{e}_2\tilde{e}_3}$$

$$= \sqrt{4 \cdot 3 + 25 \cdot 3 + 1 + 4 \cdot (-1) + 20 \cdot 1 + 10 \cdot (-1)} = \sqrt{94}$$

[7]Осторожно: обычно всегда искали матрицу перехода от “старого” базиса к “новому”, а тут наоборот.

При этом произведение $\tilde{e}_1\tilde{e}_2$, например, могло бы быть посчитано так[8]:

$$\tilde{e}_1\tilde{e}_2 = [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] \cdot [\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1] = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

□

Задача (3.28(1)). *Доказать, что если векторы* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$ *компланарны, то и векторы* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *тоже компланарны.*

Решение. Рассмотрим два варианта решения.

“Словесный”.

Отложим векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ от одной точки. Назовём плоскость, где лежат $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$, плоскостью α (11).

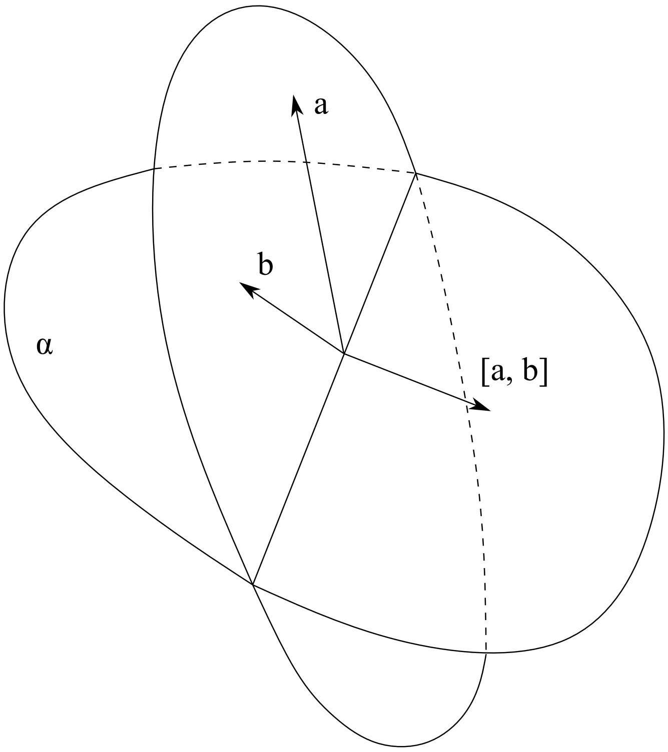

Рис. 11: α — плоскость, где лежат $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ и $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$.

Рассмотрим пару векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Их векторное произведение $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ лежит в α и перпендикулярно плоскости, где лежат $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (пока считаем, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ неколлинеарны). Таким образом, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ лежат в плоскости, перпендикулярной α. Аналогично и с парами векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Все три такие плоскости попарно пересекаются хотя бы по одной прямой (например, плоскости векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ пересекаются хотя бы по прямой, содержащей вектор $\boldsymbol{a}$: векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ изначально отложены от одной точки). Таким образом, если все три описанные плоскости совпадают, то вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ лежат в ней, а потому компланарны. Если же плоскости не совпадают, а пересекаются попарно по одной прямой, то все три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ оказываются перпендикулярными α, а потому параллельными. То есть в этом случае векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ не только компланарны, но и коллинеарны. Но в процессе решения было сделано предположение о том, что $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ неколлинеарны, поэтому такой случай отпадает.

[8] См. номер 3.13(3)

Пусть теперь хотя бы один вектор из тройки $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$ равен нулевому вектору. Тогда либо хотя бы два вектора из трёх $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ коллинеарны, а потому все три они компланарны. Либо хотя бы один вектор из трёх $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ равен нулевому вектору, а потому все три снова компланарны.

"Формульный".

Рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

Умножим векторно обе части на $\boldsymbol{a}$ слева. Получим

$$\beta \cdot [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + \gamma \cdot [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{0}$$

Аналогично, при умножении векторно слева обеих частей исходного уравнения на $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$:

$$\begin{cases} \alpha \cdot [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] + \gamma \cdot [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{0} \\ \alpha \cdot [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] + \beta \cdot [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

Складывая все три полученных уравнения, получаем

$$(\beta - \alpha) \cdot [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + (\gamma - \beta) \cdot [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] + (\gamma - \alpha) \cdot [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{0}$$

Так как векторы $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$ линейно зависимы, то хотя бы один из коэффициентов $(\beta - \alpha)$, $(\gamma - \beta)$, $(\gamma - \alpha)$ может быть отличен от нуля. Но в таком случае три коэффициента в исходном уравнении α, β, γ не совпадают, а потому все три не могут в данном случае быть равны нулю одновременно. То есть существует нетривиальная линейная комбинация $\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c}$, равная нулевому вектору. Поэтому три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны. □

Задача (3.31). *Решить систему векторных уравнений в пространстве*

$$\begin{cases} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = p \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = q \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) = s \end{cases}$$

где векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$ *некомпланарны.*

Решение. Сначала покажем, что если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ некомпланарны, то и $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ и $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ некомпланарны. Рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + \beta[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] + \gamma[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{0}$$

Умножим обе части скалярно на $\boldsymbol{b}$ слева. Получим

$$\gamma(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$$

Откуда $\gamma = 0$, так как $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ некомпланарны (и их смешанное произведение отлично от нуля). Аналогично $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Поэтому три вектора $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ и $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ также некомпланарны.

Введём понятие *взаимного базиса*.

Определение 3.1. Пусть есть базис $e = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Тогда взаимный базис $e^* = (\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*)$ определяется как

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1^* = \dfrac{[\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)} \\ \boldsymbol{e}_2^* = \dfrac{[\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1]}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)} \\ \boldsymbol{e}_3^* = \dfrac{[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)} \end{cases} \tag{10}$$

По доказанному ранее, e^* в самом деле базис (три линейно независимых вектора в пространстве). Также можно заметить, что $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i^*) = 1$ и $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j^*) = 0$ при $i \neq j$ (поэтому базис e^* также называют биортогональным к базису e)[9].

Возвращаясь к задаче, разложим вектор $\boldsymbol{x}$ по взаимному к $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ базису $\{\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*\}$:

$$\boldsymbol{x} = x_1^* \boldsymbol{a}^* + x_2^* \boldsymbol{b}^* + x_3^* \boldsymbol{c}^*$$

Умножая скалярно по очереди на $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и пользуясь свойством “биортогональности” взаимного базиса, получаем

$$\begin{cases} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = x_1^* \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = x_2^* \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) = x_3^* \end{cases}$$

То есть числа p, q и s, данные в условии, есть компоненты вектора $\boldsymbol{x}$ во взаимном к $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ базисе, векторы которого вычисляются по (10). □

Задача (3.22(1))**.** *Три некомпланарных вектора* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *отложены из одной точки. Найти объём треугольной призмы, основание которой построено на* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$, *а боковое ребро совпадает с вектором* $\boldsymbol{c}$.

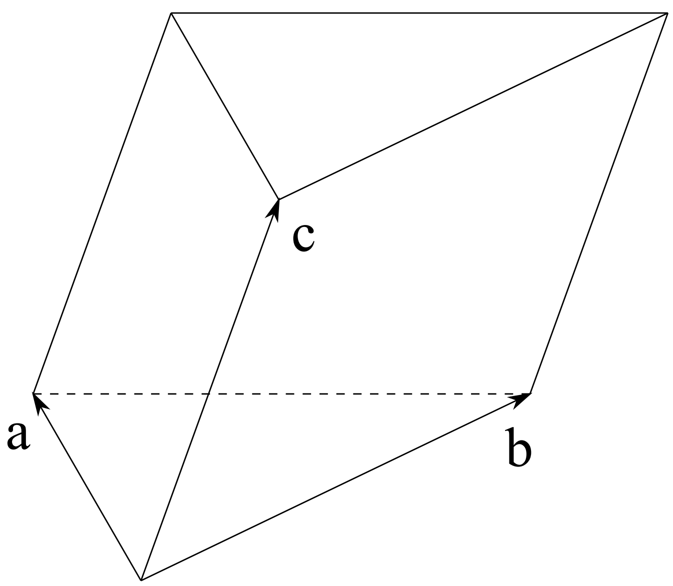

Рис. 12: Треугольная призма, построенная на $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

[9]Эти свойства на самом деле и определяют взаимный базис в общем случае $\mathbb{R}^n$ (en.wikipedia.org/wiki/Dual_basis).

Решение. Объём призмы V' равен произведению площади основания на высоту (12). В основании треугольник — площадь которого в два раза меньше площади параллелограмма, построенного на тех же векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. То есть объём призмы ищется аналогично объёму V параллелепипеда, построенного на $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, только площадь основания в два раза меньше. Поэтому и

$$V' = \frac{1}{2}V = \frac{\left|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\right|}{2}$$

Задача решена. Нашли объём, не находя ни высоты, ни площади основания.

Отступление.

Но как можно бы было найти вектор $\boldsymbol{c}_\perp$, по модулю равный высоте призмы и перпендикулярный основаниям? Вектор $\boldsymbol{c}$ можно представить в виде суммы двух векторов, один из которых параллелен плоскости основания призмы, а другой перпендикулярен плоскости основания. В свою очередь, компоненту $\boldsymbol{c}$, параллельную основаниям, можно разложить по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (которые, как неколлинеарные вектора, образуют базис на плоскости). Получаем

$$\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}_\perp$$

Если умножить полученное уравнение скалярно на $\boldsymbol{a}$ и на $\boldsymbol{b}$ (по очереди), то получим систему

$$\begin{cases} (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + \beta(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \\ (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \beta(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{cases}$$

из которой уже можно найти α и β, например, по правилу Крамера, если определитель системы отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{vmatrix} = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \left|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\right|^2 \neq 0$$

так как векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны. А вообще, определитель

$$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{vmatrix}$$

называется *определителем Грама*[10] системы векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Из решения видно, что отличие от нуля определителя Грама системы векторов является *критерием линейной независимости* этой системы векторов (чтобы коэффициенты разложения любого вектора по этой системе определялись однозначно — в нашем случае коэффициенты разложения компоненты $\boldsymbol{c}$, параллельной основанию призмы, по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$).

Возвращаясь к вектору $\boldsymbol{c}_\perp$, то при найденных α и β он получается равным

$$\boldsymbol{c}_\perp = \boldsymbol{c} - \alpha\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{b}$$

□

[10] en.wikipedia.org/wiki/Gramian_matrix.