

Семинар 4

Алексеев Василий

22 + 28 сентября 2020

Содержание

1	Смешанное и векторное произведения	1
1.1	Ориентированное пространство	1
1.2	Смешанное произведение	2
1.3	Векторное произведение	4
1.4	Задачи	6

1. Смешанное и векторное произведения

1.1. Ориентированное пространство

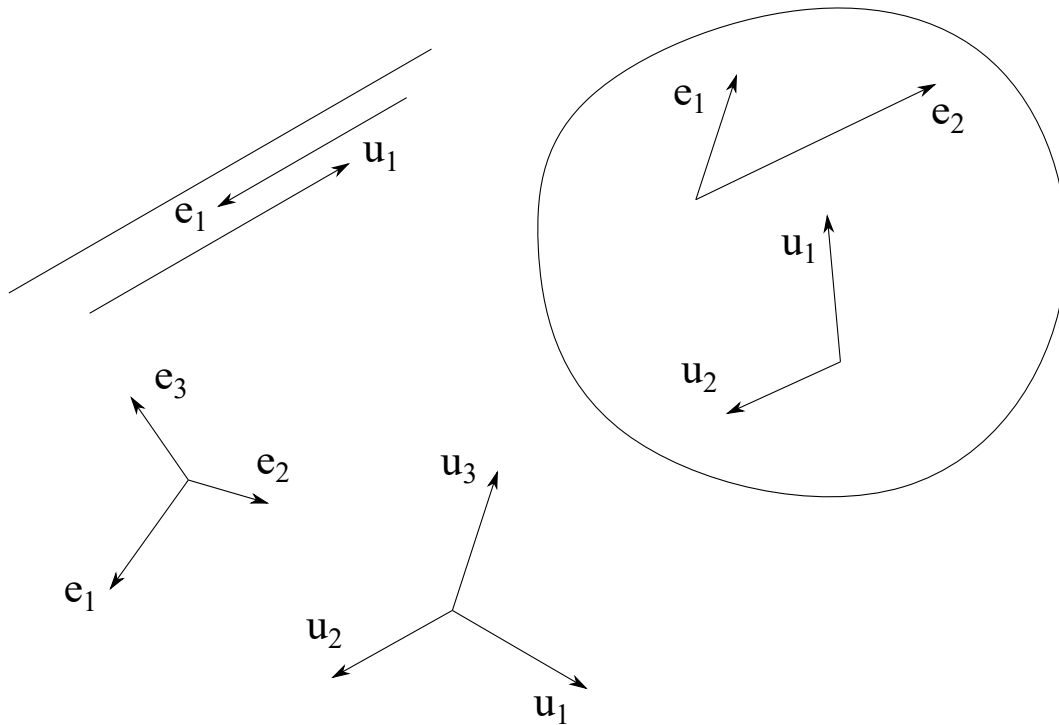


Рис. 1: Разные классы базисов в одно-, дву- и трёхмерном пространствах.

На прямой все векторы делятся на два класса: направленные в одну сторону вдоль прямой и в противоположную (1). На плоскости все упорядоченные пары неколлинеарных векторов делятся на два класса: пары, где поворот от первого вектора ко второму по наименьшему углу совершается против часовой стрелки, и пары, где этот поворот совершается по часовой стрелке (1). И в трёхмерном пространстве все упорядоченные тройки некомпланарных векторов делятся на два класса: те, где поворот от первого базисного вектора ко второму по наименьшему углу происходит против часовой стрелки, если смотреть со стороны третьего базисного вектора (*правые базисы*), и те, где этот поворот происходит по часовой стрелке (*левые базисы*) (1).

В трёхмерном пространстве положительными выбраны правые базисы.

Определение 1.1. Ориентированное пространство — пространство, в котором выбран класс базисов¹.

В ориентированном пространстве можно говорить о длине, площади и объёме со знаком.

Так, в одномерном пространстве, если рассматриваемый вектор направлен так же, как и базисы в выбранном классе, то его длина считается большей нуля. В противном случае — меньше нуля. В двумерном пространстве, если параллелограмм построен на упорядоченной паре векторов a и b , то его площадь со знаком S_{\pm} можно считать большей нуля, если a и b образуют базис, относящийся к выбранному (положительному) классу (2). Иначе — меньше нуля. И в трёхмерном пространстве, если параллелепипед построен на упорядоченной тройке векторов a , b , c , которые в таком же порядке образуют базис

¹В общем случае пространства \mathbb{R}^n , $n \geq 1$ базисы тоже образуют два класса.

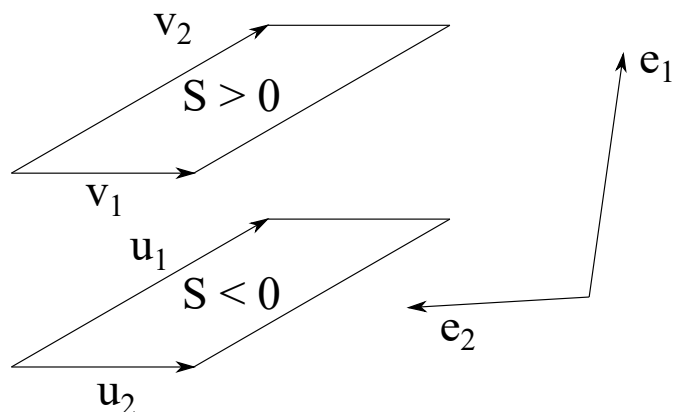


Рис. 2: Площадь ориентированного параллелограмма.

из выбранного (положительного) класса, то объём со знаком V_{\pm} такого параллелепипеда будет больше нуля. Иначе, если тройка $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ не принадлежит положительному классу базисов, то объём V_{\pm} параллелепипеда будет меньше нуля.

Упомянув трёхмерное пространство, стоит ещё раз вернуться к вопросу об ориентации плоскости. Выбор ориентации в 3D ничего не говорит об ориентации на конкретной плоскости. Задать ориентацию на плоскости можно

- В 2D — просто сказав, в какую сторону поворот от \mathbf{e}_1 к \mathbf{e}_2 по наименьшему углу считается положительным.
- В 3D — выбрав вектор нормали \mathbf{n} к плоскости. Тогда положительный базис на плоскости — тот, который с выбранной нормалью составляет положительную тройку в пространстве (порядок $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$ или $\mathbf{n}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — не важно).
- Как в 2D, так и в 3D: просто выбрать упорядоченную пару неколлинеарных векторов и сказать, что этот базис положительный (тогда и все упорядоченные пары векторов из этого же класса — тоже положительные).

1.2. Смешанное произведение

Определение 1.2. В ориентированном пространстве, смешанное произведение трёх некопланарных векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ полагается равным объёму ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \equiv V_{\pm}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

Если вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ компланарны, то смешанное произведение полагается равным нулю.

Теорема 1.1 (О связи смешанного и скалярного произведения). Для любой пары векторов \mathbf{b}, \mathbf{c} существует единственный вектор \mathbf{d} , такой что для любого вектора \mathbf{a}

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{d})$$

Доказательство. Найдём такой вектор \mathbf{d} для произвольной тройки векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и покажем, что он единственен.

Пусть \mathbf{b}, \mathbf{c} неколлинеарны. Пусть также \mathbf{a}, \mathbf{b} и \mathbf{c} некопланарны. Отложим вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ от одной точки (3).

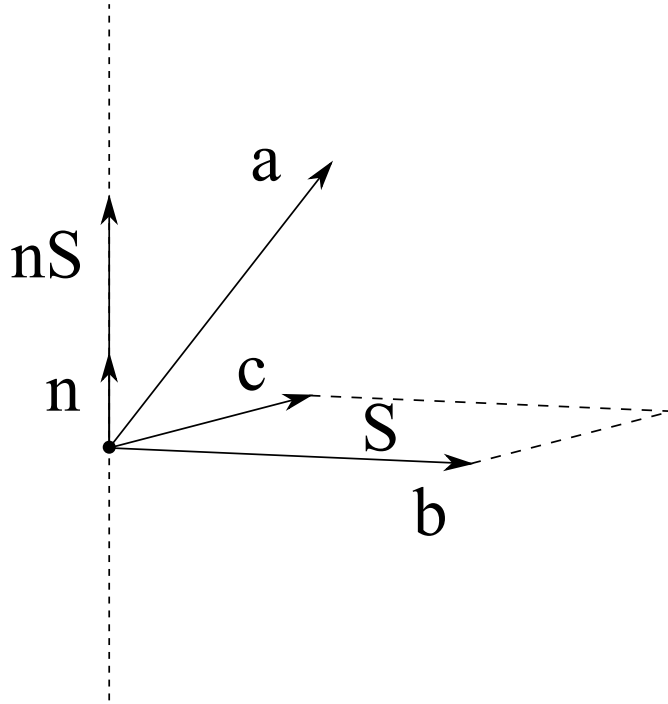


Рис. 3: Некомпланарные векторы a, b, c ; единичный вектор нормали n к плоскости векторов b и c , такой что тройка b, c, n положительная; S — площадь параллелограмма, построенного на b и c .

Рассмотрим пару векторов b, c . Отложим единичный вектор нормали n к плоскости векторов b, c так, чтобы тройка векторов b, c, n была бы положительной. Площадь параллелограмма, построенного на векторах b и c (площадь без знака) равна

$$S = |b| \cdot |c| \cdot \sin \alpha$$

где α — угол между векторами b и c . Тогда $d \equiv S \cdot n$ — вектор, направленный вдоль n и равный площади основания параллелепипеда, где лежат вектора b, c . При этом можно заметить, что скалярное произведение

$$(a, d) = V_{\pm}(a, b, c)$$

так как $|(a, d)| = |V_{\pm}|$ (площадь параллелепипеда равна произведению площади основания на высоту, проведённую к этому основанию) и от того, сонаправлены или противоположно направлены вектора a и d , зависит, будет ли V_{\pm} больше нуля или меньше нуля (тройка a, b, n по построению положительная; тройка a, b, c может быть как положительной, так и отрицательной). Таким образом, получаем, что

$$(a, b, c) = (a, d)$$

Если же векторы a, b и c компланарны, то объём параллелепипеда будет равен нулю, но тогда и $d \perp a$.

Если же вектора b, c коллинеарны, то смешанное произведение (a, b, c) также будет равно нулю, и вектор d можно взять равным нулю.

Покажем, что такой вектор d , что $(a, b, c) = (a, d), \forall a$, единственен. Допустим противное: пусть существует вектор d_1 , такой что $(a, b, c) = (a, d)$ и $(a, b, c) = (a, d_1), \forall a$. Но тогда $(a, d) = (a, d_1)$, и $(a, d - d_1) = 0$. То есть вектор $d - d_1$ перпендикулярен любому вектору пространства. Поэтому $d - d_1 = 0 \Rightarrow d = d_1$. \square

Введённый выше вектор d называется векторным произведением векторов b и c ...

1.3. Векторное произведение

Определение 1.3. Векторным произведением неколлинеарных векторов a и b называется вектор d , такой что

- Модуль вектора d равен

$$|d| = |a| \cdot |b| \cdot \sin \alpha$$

где α — угол между векторами a и b .

- Вектор d перпендикулярен как вектору a , так и вектору b :

$$d \perp a, d \perp b$$

- Вектор d образует *положительную тройку* (a, b, d) вместе с исходными a и b ².

Если же векторы a и b коллинеарны, то их векторное произведение полагается равным нулю.

Таким образом,

$$(a, b, c) = (a, [b, c]) \quad (1)$$

Рассмотрим некоторые свойства векторного произведения.

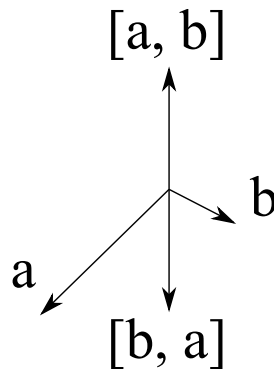


Рис. 4: $[a, b] = -[b, a]$.

Так, для любых a и b

$$[a, b] = -[b, a]$$

так как первый и второй вектора меняются местами, и направление поворота от первого вектора ко второму меняется на противоположное (4). При этом сомножители в смешанном произведении тоже можно переставлять, и, если ориентация тройки меняется, то меняется и знак перед смешанным произведением:

$$(a, b, c) = -(b, a, c) = \dots = (c, a, b) \quad (2)$$

И свойство линейности по первому аргументу:

$$[\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2, c] = \beta_1 [b_1, c] + \beta_2 [b_2, c]$$

²При выбранной правой ориентации пространства тройка (a, b, d) должна быть правой.

Доказательство. Докажем это свойство. Надо “в нужное время вставлять и убирать квадратные скобки” и пользоваться линейностью скалярного произведения:

$$\begin{aligned}
& (a, [\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2, c]) \\
& \stackrel{(1)}{=} (a, \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2, c) \\
& \stackrel{(2)}{=} -(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2, a, c) \\
& \stackrel{(1)}{=} -(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2, [a, c]) \\
& = -\beta_1 (b_1, [a, c]) - \beta_2 (b_2, [a, c]) \\
& \stackrel{(1)}{=} -\beta_1 (b_1, a, c) - \beta_2 (b_2, a, c) \\
& \stackrel{(2)}{=} \beta_1 (a, b_1, c) + \beta_2 (a, b_2, c) \\
& \stackrel{(1)}{=} \beta_1 (a, [b_1, c]) + \beta_2 (a, [b_2, c]) \\
& = (a, \beta_1 [b_1, c] + \beta_2 [b_2, c])
\end{aligned} \tag{3}$$

□

Теперь можно выразить векторное произведение между произвольными двумя векторами a и b пространства, которые заданы компонентами в некотором базисе $e = (e_1, e_2, e_3)$. Пусть

$$\begin{cases} a = a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + a_3 \cdot e_3 \\ b = b_1 \cdot e_1 + b_2 \cdot e_2 + b_3 \cdot e_3 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} a \times b &= (a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + a_3 \cdot e_3) \times (b_1 \cdot e_1 + b_2 \cdot e_2 + b_3 \cdot e_3) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)[e_2, e_3] + (a_1 b_3 - a_3 b_1)[e_1, e_3] + (a_1 b_2 - a_2 b_1)[e_1, e_2] \end{aligned}$$

где в последнем переходе использовались свойство асимметричности векторного произведения и свойство равенства нулевому вектору векторного квадрата любого вектора. Полученное соотношение можно переписать в таком виде

$$[a, b] = \begin{vmatrix} [e_2, e_3] & [e_3, e_1] & [e_1, e_2] \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{4}$$

где, отметим ещё раз, (e_1, e_2, e_3) — произвольный базис.

Если воспользоваться полученным представлением векторного произведения через компоненты векторов, подставив его в формулу (1), то получим

$$(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot (e_1, e_2, e_3) \tag{5}$$

Если же базис e **правый ортонормированный**, то формулы упрощаются. Для векторного произведения:

$$[a, b] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{6}$$

и для смешанного:

$$(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{7}$$

1.4. Задачи

Перед задачами параграфа 3 в сборнике сказано, что базис во всех задачах, если не оговорено противное, правый ортонормированный. Поэтому при решении можно будет пользоваться более простыми формулами (6) и (7) (а также более простыми формулами, связанными с вычислениями скалярных произведений).

Задача (3.8(1)). На векторах $\mathbf{a} = (2, 3, 1)$ и $\mathbf{b} = (-1, 1, 2)$, отложенных из одной точки, построен треугольник. Надо найти площадь этого треугольника.

Решение. Обозначим за α угол между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} . Тогда

$$\begin{aligned} S_{\triangle} &= \frac{1}{2} |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| \\ &= \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |5i - 5j + 5k| = \frac{1}{2} \sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

□

Задача (3.13(1)). Доказать тождество

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{vmatrix}$$

Решение. Пусть α — угол между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} .

Распишем левую часть:

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2 = (|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \alpha)^2 = |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2 \cdot \sin^2 \alpha$$

И правую часть:

$$\begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{vmatrix} = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b}, \mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos^2 \alpha = |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2 \cdot (1 - \cos^2 \alpha)$$

Так как $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, то тождество можно считать доказанным.

□

Задача (3.15 (близкая к 3.16)). Даны векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} , такие что

$$\begin{cases} \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \end{cases}$$

Надо выразить через \mathbf{a} и \mathbf{b} какой-нибудь вектор \mathbf{x} , удовлетворяющий уравнению

$$[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$$

Решение. Из условия следует, что либо $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, либо $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Будем пока считать, что \mathbf{b} не равен нулю. Так как $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$, то $\mathbf{x} \perp \mathbf{a}$ и $|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \sin \alpha = |\mathbf{b}|$, где $\alpha = \angle(\mathbf{x}, \mathbf{a})$. То есть

$$|\mathbf{x}| \sin \alpha = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$$

Пусть решению \mathbf{x}_0 соответствует угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то есть вектор \mathbf{x}_0 перпендикулярен как \mathbf{b} , так и \mathbf{a} . Тогда \mathbf{x}_0 сонаправлен $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ (векторное произведение — именно в таком порядке). И найти \mathbf{x}_0 можно как

$$\mathbf{x}_0 = \underbrace{\frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|}}_{\text{“направление”}} \cdot \underbrace{\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}}_{\text{модуль}} = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|\mathbf{a}|^2}$$

□

Задача (3.28(1)). Доказать, что если векторы $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, a]$ компланарны, то и векторы a , b , c тоже компланарны.

Решение. Рассмотрим два варианта решения.

“Словесный”.

Отложим векторы a , b , c от одной точки. Назовём плоскость, где лежат $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, a]$, плоскостью α .

Рассмотрим пару векторов a и b . Их векторное произведение $[a, b]$ лежит в α и перпендикулярно плоскости, где лежат a и b (пока считаем, что векторы a , b , c неколлинеарны). Таким образом, векторы a и b определяют плоскость, перпендикулярную α . Аналогично и с парами векторов a , c и b , c . Все три такие плоскости попарно пересекаются хотя бы по одной прямой (например, плоскости векторов a , b и векторов a , c пересекаются хотя бы по прямой, содержащей вектор a — векторы a , b , c изначально отложены от одной точки). Таким образом, если все три описанные плоскости совпадают, то вектора a , b , c лежат в ней, а потому компланарны. Если же плоскости не совпадают, а пересекаются попарно по одной прямой, то все три вектора a , b , c оказываются перпендикулярными α , а потому параллельными. То есть в этом случае векторы a , b , c не только компланарны, но и коллинеарны. Но в процессе решения было сделано предположение о том, что a , b , c неколлинеарны, поэтому такой случай отпадает.

Пусть теперь хотя бы один вектор из тройки $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, a]$ равен нулевому вектору. Тогда либо хотя бы два вектора из трёх a , b , c коллинеарны, а потому все три они компланарны. Либо хотя бы один вектор из трёх a , b , c равен нулевому вектору, а потому все три снова компланарны.

“Формульный”.

Рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$$

Умножим векторно обе части на a слева. Получим

$$\beta \cdot [a, b] + \gamma \cdot [a, c] = 0$$

Аналогично, при умножении векторно слева обеих частей исходного уравнения на b и c :

$$\begin{cases} \alpha \cdot [b, a] + \gamma \cdot [b, c] = 0 \\ \alpha \cdot [c, a] + \beta \cdot [c, b] = 0 \end{cases}$$

Складывая все три полученных уравнения, получаем

$$(\beta - \alpha) \cdot [a, b] + (\gamma - \beta) \cdot [b, c] + (\gamma - \alpha) \cdot [a, c] = 0$$

Так как векторы $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, a]$ линейно зависимы, то хотя бы один из коэффициентов $(\beta - \alpha)$, $(\gamma - \beta)$, $(\gamma - \alpha)$ может быть отличен от нуля. Но в таком случае три коэффициента в исходном уравнении α , β , γ не совпадают, а потому все три не могут в данном случае быть равны нулю одновременно. То есть существует нетривиальная линейная комбинация $\alpha a + \beta b + \gamma c$, равная нулевому вектору. Поэтому три вектора a , b , c компланарны. \square

Задача (3.27). Доказать, что проекция b_{\perp} вектора b на плоскость, перпендикулярную вектору a , равна

$$b_{\perp} = \frac{[a, [b, a]]}{|a|^2}$$

Решение. Пусть b_{\parallel} — составляющая вектора b , параллельная вектору a . Тогда

$$b = b_{\parallel} + b_{\perp}$$

$$b_{\perp} = b - b_{\parallel} = b - \frac{(b, a)}{|a|^2} a = \frac{|a|^2 b - (a, b) a}{|a|^2} \xrightarrow{\text{“бац минус цаб”}} \frac{[a, [b, a]]}{|a|^2}$$

□

Задача (3.33*). Доказать, что площадь треугольника, составленного из медиан треугольника ABC , равна $3/4$ площади самого треугольника ABC .

Решение. Пусть в треугольнике ABC проведены медианы AM_1, BM_2, CM_3 . Проверим сначала, что из медиан в самом деле можно составить треугольник:

$$\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{BM_2} + \overrightarrow{CM_3} \stackrel{?}{=} \mathbf{0}$$

Выразим векторы медиан через векторы сторон треугольника ABC :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ \overrightarrow{BM_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) \\ \overrightarrow{CM_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}) \end{cases}$$

Складывая левые и правые части равенств, получаем

$$\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{BM_2} + \overrightarrow{CM_3} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Теперь найдём площадь S' треугольника, образованного медианами (за S обозначим площадь треугольника ABC):

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{BM_2}]| = \frac{1}{2} \left| \left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) \right] \right| \\ &= \frac{1}{8} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BA}| = \frac{1}{8} \cdot 3 \cdot 2S = \frac{3}{4} S \end{aligned}$$

так как $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BA}$ сонаправлены и по модулю равны удвоенной площади треугольника ABC , а $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BA} = \mathbf{0}$. □

Задача (3.31). Решить систему векторных уравнений в пространстве

$$\begin{cases} (x, a) = p \\ (x, b) = q \\ (x, c) = s \end{cases}$$

где векторы a, b и c некопланарны.

Решение. Сначала покажем, что если a, b и c некопланарны, то и $[a, b], [b, c]$ и $[a, c]$ некопланарны. Рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha[a, b] + \beta[b, c] + \gamma[c, a] = \mathbf{0}$$

Умножим обе части скалярно на b слева. Получим

$$\gamma(b, c, a) = 0$$

Откуда $\gamma = 0$, так как \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} некопланарны (и их смешанное произведение отлично от нуля). Аналогично $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Поэтому три вектора $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ и $[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$ также некопланарны.

Введём понятие *взаимного базиса*.

Определение 1.4. Пусть есть базис $e = (e_1, e_2, e_3)$. Тогда взаимный базис $e^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ определяется так

$$\begin{cases} e_1^* = \frac{[e_2, e_3]}{(e_1, e_2, e_3)} \\ e_2^* = \frac{[e_3, e_1]}{(e_1, e_2, e_3)} \\ e_3^* = \frac{[e_1, e_2]}{(e_1, e_2, e_3)} \end{cases} \quad (8)$$

По доказанному ранее, e^* в самом деле базис (три линейно независимых вектора в пространстве). Также можно заметить, что $(e_i, e_i^*) = 1$ и $(e_i, e_j^*) = 0$ при $i \neq j$ (поэтому базис e^* также называют биортогональным к базису e).

Возвращаясь к задаче, разложим вектор \mathbf{x} по взаимному к $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ базису $\{\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{c}^*\}$:

$$\mathbf{x} = x_1^* \mathbf{a}^* + x_2^* \mathbf{b}^* + x_3^* \mathbf{c}^*$$

Умножая скалярно по очереди на \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} и пользуясь свойством “биортогональности” взаимного базиса, получаем

$$\begin{cases} (\mathbf{x}, \mathbf{a}) = x_1^* \\ (\mathbf{x}, \mathbf{b}) = x_2^* \\ (\mathbf{x}, \mathbf{c}) = x_3^* \end{cases}$$

То есть числа p , q и s , данные в условии, есть компоненты вектора \mathbf{x} во взаимном к $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ базисе, векторы которого вычисляются по (8). \square

Задача (3.22(1)). Три некопланарных вектора \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} отложены из одной точки. Найти объём треугольной призмы, основание которой построено на \mathbf{a} и \mathbf{b} , а боковое ребро совпадает с вектором \mathbf{c} .

Решение. Объём призмы V' равен произведению площади основания на высоту. В основании треугольник — площадь которого в два раза меньше площади параллелограмма, построенного на тех же векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} . То есть объём призмы ищется аналогично объёму V параллелепипеда, построенного на \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , только площадь основания в два раза меньше. Поэтому и

$$V' = \frac{1}{2}V = \frac{|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|}{2}$$

Задача решена. Нашли объём, не находя ни высоты, ни площади основания.

Отступление.

Но как можно бы было найти вектор \mathbf{c}_\perp , по модулю равный высоте призмы и перпендикулярный основаниям? Вектор \mathbf{c} можно представить в виде суммы двух векторов, один из которых параллелен плоскости основания призмы, а другой перпендикулярен плоскости основания. В свою очередь, компоненту \mathbf{c} , параллельную основаниям, можно разложить по векторам \mathbf{a} и \mathbf{b} (которые, как неколлинеарные вектора, образуют базис на плоскости). Получаем

$$\mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \mathbf{c}_\perp$$

Если умножить полученное уравнение скалярно на \mathbf{a} и на \mathbf{b} (по очереди), то получим систему

$$\begin{cases} (c, \mathbf{a}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{a}) + \beta(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \\ (c, \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \beta(\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{cases}$$

из которой уже можно найти α и β , например, по правилу Крамера, если определитель системы отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{vmatrix} = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2 \neq 0$$

так как векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} неколлинеарны. А вообще, определитель

$$\begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{vmatrix}$$

называется *определителем Грама*³ системы векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} . Из решения видно, что отличие от нуля определителя Грама системы векторов является критерием линейной независимости этой системы векторов (чтобы коэффициенты разложения любого вектора по этой системе определялись однозначно — в нашем случае коэффициенты разложения компоненты c , параллельной основанию призмы, по векторам \mathbf{a} и \mathbf{b}). \square

³en.wikipedia.org/wiki/Gramian_matrix