Семинар 5

Алексеев Василий

4 марта + 5 марта 2021

Содержание

1 Линейные отображения: ядро, образ, матрица **1**

2 Задачи **1**

2.1 # 21.7(7) 1
2.2 # 23.8(2) 2
2.3 # 23.9(2) 3

1. Линейные отображения: ядро, образ, матрица

2. Задачи

2.1. # 21.7(7)

Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств $\mathbb{R}^4$, являющихся следующими линейными оболочками:

$$\mathscr{P} = \mathscr{L}\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3\} = \mathscr{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\8\\-6\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\10\\-5\\8\end{pmatrix}\right\} \quad \mathscr{Q} = \mathscr{L}\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3\} = \mathscr{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\4\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-2\\6\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\\5\\8\end{pmatrix}\right\}$$

Решение. Для начала можно заметить, что $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_3$ и $\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{q}_3$. В то же время $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ (как и $\boldsymbol{q}_1$ и $\boldsymbol{q}_2$), очевидно, не коллинеарны. Поэтому размерности $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ равны двум, и за базис в $\mathscr{P}$ можно взять, например, $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$, а за базис в $\mathscr{Q}$ — $(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2)$.

Чтобы найти базис в сумме $\mathscr{P} \oplus \mathscr{Q}$, можно просто объединить базисные вектора $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ в одну систему и “выкинуть” лишние векторы, так чтобы система векторов, помимо того, что полная, была бы ещё и линейно независимой.

$$(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2) = \begin{pmatrix}\mathbf{1} & -1 & 1 & 3\\ 2 & 8 & 4 & -2\\ 1 & -6 & -1 & 6\\ 3 & 5 & 5 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 10 & 2 & -8\\ 0 & -5 & -2 & 3\\ 0 & 8 & 2 & -6\end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & \mathbf{5} & 1 & -4\\ 0 & -5 & -2 & 3\\ 0 & 4 & 1 & -3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 5 & 1 & -4\\ 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1-4/5 & -3+(4\cdot 4)/5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 5 & 1 & -4\\ 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1/5 & 1/5\end{pmatrix}$$

Таким образом, в сумме $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ базис состоит из трёх линейно независимых векторов (например, $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{q}_1$). И размерность суммы, очевидно, равна трём.

Пересечение можно искать так: можно получить системы уравнений, задающих $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ (получить условия на компоненты вектора $\boldsymbol{x}$, чтобы его можно было разложить по базису подпространства). И далее пересечение $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}$ задавалось бы системой уравнений, составленной из всех уравнений обеих систем для каждого из подпространств. Потом эту “объединённую” систему надо бы было решить, чтобы понять, как выглядит произвольный вектор из пересечения (по каким базисным он раскладывается).

Но можно пойти другим путём, который в данном случае будет быстрее. Пусть $\boldsymbol{x} \in \mathscr{P} \cap \cap \mathscr{Q}$. Это значит, что, с одной стороны, $\boldsymbol{x} \in \mathscr{P}$, а с другой стороны, $\boldsymbol{x} \in \mathscr{Q}$. Принадлежность $\mathscr{P}$ равносильна тому, что вектор $\boldsymbol{x}$ раскладывается по базису $\mathscr{P}$. Аналогично с $\mathscr{Q}$. Поэтому

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{p}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{p}_2 = \beta_1 \boldsymbol{q}_1 + \beta_2 \boldsymbol{q}_2$$

Или, если перенести всё в одну часть

$$\alpha_1 \boldsymbol{p}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{p}_2 - \beta_1 \boldsymbol{q}_1 - \beta_2 \boldsymbol{q}_2 = 0 \tag{1}$$

Но суть такой записи фактически в том, что мы пытаемся разложить нулевой вектор по системе векторов $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2)$! Иными словами, чтобы найти коэффициенты разложения $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$, надо привести к упрощённому виду матрицу системы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & 4 & -2 \\ 1 & -6 & -1 & 6 \\ 3 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Но большая часть преобразований уже была проведена в пункте ранее! Поэтому можно просто продолжить упрощение:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & 4 & -2 \\ 1 & -6 & -1 & 6 \\ 3 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & -1 \\ 0 & 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Поэтому коэффициенты в линейно комбинации (1) оказываются равными[1] (свободная $(-\beta_2) \equiv t$):

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ -\beta_1 \\ -\beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Теперь, используя, например, найденные α_1 и α_2, можно задать произвольный вектор из пересечения $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}$:

$$\mathscr{P} \cap \mathscr{Q} \ni \boldsymbol{x} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 \boldsymbol{p}_2 = -t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

В ядре вектор и одного базиса — размерность пересечения равна одному. Но размерность пересечения можно бы было указать и раньше, воспользовавшись формулой (верной для *двух* подпространств L_1 и L_2):

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$$

В нашем случае:

$$3 = 2 + 2 - 1$$

□

2.2. # 23.8(2)

Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{n}$ — ненулевые векторы геометрического векторного пространства X, причём $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) \neq 0$. Пусть $\mathscr{L}_1$ — прямая с направляющим вектором $\boldsymbol{a}$, а $\mathscr{L}_2$ — плоскость с вектором нормали $\boldsymbol{n}$.

Надо записать формулой преобразование $\phi : X \to X$, проверить его линейность, найти ядро, множество значений и ранг, если ϕ — ортогональное проектирование на $\mathscr{L}_1$.

[1] Осторожно: у коэффициентов β стоят минусы, потому что сначала они были в другой части уравнения.

Решение. Из геометрических соображений,

$$\phi(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}| \cos \angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) \cdot \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \underbrace{\frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{a}|}}_{\text{скалярная проекция}} \cdot \underbrace{\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}}_{\text{единичный вектор}}$$

Поэтому линейность преобразования следует из линейности скалярного произведения. Например, ϕ от суммы:

$$\phi(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{a}) = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{a}) + \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{a}) = \phi(\boldsymbol{x}_1) + \phi(\boldsymbol{x}_2)$$

Аналогично $\phi(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha\phi(\boldsymbol{x})$.

Ядро преобразования — все векторы, которые отображаются в ноль. Очевидно, ядро ортогонального проектирования на прямую — плоскость, перпендикулярная этой прямой. Но можно это и показать:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = 0 \Leftrightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{a} \end{array}\right.$$

Из того, что ядро — плоскость, следует, что $\dim \operatorname{Ker} \phi = 2$.

Множество значений ортогонального проектирования на прямую — это, очевидно, вся прямая (при проектировании получаем вектор на прямой, и обратно: любой вектор, параллельный прямой, можно получить проектированием некоторого вектора[2]). Но можно это и показать:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} \cdot \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{a}|^2} = t\boldsymbol{a}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Множество значений — прямая. Поэтому размерность множества значений (она же ранг преобразования):

$$\dim \operatorname{Im} \phi = \operatorname{Rg} \phi = 1$$

Также можно убедиться в выполнении тождества[3]:

$$\operatorname{Rg} \phi + \dim \operatorname{Ker} \phi = 1 + 2 = 3 = \dim X$$

□

2.3. # 23.9(2)

Надо вычислить матрицу ортогонального проектирования преобразования как из предыдущего номера в некотором ортонормированном базисе $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Проектирование — на прямую $\{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_2 = x_3\}$.

Решение. Направляющий вектор прямой:

$$\boldsymbol{a} = (1, 1, 1)^T$$

Тогда преобразование ϕ выражается формулой

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$$

[2] Хотя бы его же самого.

[3] Которое, фактически, про то, что число базисных переменных плюс число свободных переменных (количество столбцов в фундаментальной матрице) при решении однородной системы равно общему числу переменных.

С одной стороны, ϕ переводит вектор как направленный отрезок в другой вектор — направленный отрезок. С другой стороны, при заданном базисе, можно также думать о ϕ как о преобразовании между столбцами из координат в базисе. И матрица как раз “будет участвовать” в формуле, где фигурируют не векторы-отрезки, а векторы-столбцы. Пусть координатный столбец вектора $\boldsymbol{x}$ есть $\xi = (x_1, x_2, x_3)$. Тогда надо получить ϕ в форме

$$\phi(\boldsymbol{x}) = A\xi$$

то есть как матрица, умноженная на столбец.

Вернёмся к векторной записи, и “перейдём” в ней от векторов к их компонентам (“переход” от вектора к его вектор-столбцу отмечен значком $\cong$ вместо равно)[4]:

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|^2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} \cong \frac{1}{|\boldsymbol{a}|^2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|^2}\begin{pmatrix} a_1 \cdot (x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3) \\ a_2 \cdot (x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3) \\ a_3 \cdot (x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3) \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|^2}\begin{pmatrix} x_1a_1a_1 + x_2a_1a_2 + x_3a_1a_3 \\ x_1a_2a_1 + x_2a_2a_2 + x_3a_2a_3 \\ x_1a_3a_1 + x_2a_3a_2 + x_3a_3a_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{|\boldsymbol{a}|^2}\begin{pmatrix} a_1a_1 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_2a_1 & a_2a_2 & a_2a_3 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3a_3 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

[4] Скалярное произведение при этом расписывается “хорошо”, потому что базис ортонормированный.