Семинар 9

Алексеев Василий

7 + 11 апреля 2023

Содержание

1. Bili & Qua (Diag 2)

В конспекте билинейная функция называется именно "билинейной функцией". Хотя общепринятым синонимом является также термин "билинейная форма". Квадратичная функция же иногда в конспекте именуется и "квадратичной формой" (общепринятый синоним), и даже просто "формой" (немного неряшливое короткое обозначение, которое, однако, можно считать корректным, но только в рамках конспекта — неопределённости возникнуть не должно, потому что билинейная функция "формой" именоваться не будет).

1.1. Билинейная b(x, y) и квадратичная k(x) функции

Линейное отображение $\phi : X \to \mathbb{R}$ называлось *линейной функцией*. То есть линейная функция принимает *один* вектор, и возвращает число. Но отображения вообще могут принимать на вход и *больше одного* аргумента. (Например, хотя бы та же операция сложения векторов '+' : $X \times X \to X$.) Рассматривая функции *от двух* аргументов, можно бы было выделить класс функций, линейных только по первому аргументу, только по второму или *по двум аргументам сразу*. Приходим к следующему понятию.

Определение 1.1. *Билинейной функцией* называется отображение $b : X \times X \to \mathbb{R}$, линейное по каждому аргументу ($\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} b(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = b(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + b(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) \\ b(\alpha \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{cases} \qquad \begin{cases} b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2) \\ b(\boldsymbol{x}, \beta \boldsymbol{y}) = \beta b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{cases}$$

Отдельно стоит выделить билинейные функции, значения которых не зависят от порядка аргументов.

Определение 1.2. Билинейная функция $b(\cdot, \cdot)$ называется *симметричной*, если

$$b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$$

Пример. Симметричная билинейная функция — это, например, скалярное произведение векторов геометрического векторного пространства:

$$b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| \cos \angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{1}$$

От линейной функции (один аргумент) перешли к билинейной функции (два аргумента). А что, если... в качестве обоих аргументов в билинейную функцию подать один и тот же вектор? Снова получится функция одного аргумента.

Определение 1.3. Пусть $b(\cdot, \cdot)$ — симметричная билинейная функция[1]. Тогда *квадратичной функцией*, порождённой $b(\cdot, \cdot)$, называется отображение $k : X \to \mathbb{R}$, которое опреде-

[1]Как могло бы сперва показаться, дело не в том, что если $b(\cdot, \cdot)$ не симметричная, то $k(\cdot)$ всегда ноль. Нет. Например, $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -2x_1 y_2$ не симметричная (это формула билинейной функции от координат векторов — про этот способ описания билинейной функции будет далее в конспекте). И *можно* было бы подставить вместо вектора $\boldsymbol{y}$ тоже вектор $\boldsymbol{x}$ и получить $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = -2x_1 x_2$. Но тогда по формуле квадратичной функции, если не знать, что $b(\cdot, \cdot)$ была симметричной, нельзя однозначно восстановить матрицу этой билинейной функции (будет несколько возможных вариантов). Вообще, матрицу любой билинейной функции можно представить как сумму симметричной и кососимметричной матриц (см. # 15.94). Можно показать, что, кососимметричная вообще не будет играть роли в формуле квадратичной функции, порождаемой данной билинейной. (Например, ту же $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -2x_1 y_2$ можно так представить как сумму симметричной и кососимметричной частей: $-2x_1 y_2 = (-x_1 y_2 - x_2 y_1) + (-x_1 y_2 + x_2 y_1)$. Несложно проверить, что при вычислении $k(\boldsymbol{x}) = b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ кососимметричная часть занулится.) То есть если по произвольной билинейной функции как бы "построить" квадратичную, положив $k(\boldsymbol{x}) = b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, то эта квадратичная по сути будет определяться только "симметричной частью" билинейной функции... В общем, с "симметричной" в определении квадратичной функции получается более однозначно)

ляется формулой:

$$k(\boldsymbol{x}) = b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$$

Пример. Симметричной билинейной функцией (1) порождается следующая квадратичная:

$$k(\boldsymbol{x}) = b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^2 \tag{2}$$

Будет ли квадратичная функция линейной? Очевидно, функция из примера (2) линейной вообще не будет. Посмотрим, чему будет равен образ суммы $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ под действием произвольной квадратичной функции $k(\cdot)$:

$$\underline{k(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)} = b(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2) = b(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1)+b(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2)+b(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)+b(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) = \underline{k(\boldsymbol{x}_1) + k(\boldsymbol{x}_2) + 2b(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)}$$

то есть тоже в общем случае не линейная. Из формулы выше также можно заметить следующее. Значение билинейной функции $b(\cdot, \cdot)$ на произвольной паре векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ можно выразить с помощью соответствующей ей квадратичной функции:

$$\boxed{b(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \frac{k(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) - k(\boldsymbol{x}_1) - k(\boldsymbol{x}_2)}{2}}$$

то есть, с одной стороны, квадратичная порождается симметричной билинейной, и, с другой — по квадратичной однозначно восстанавливается породившая её симметричная билинейная (1).

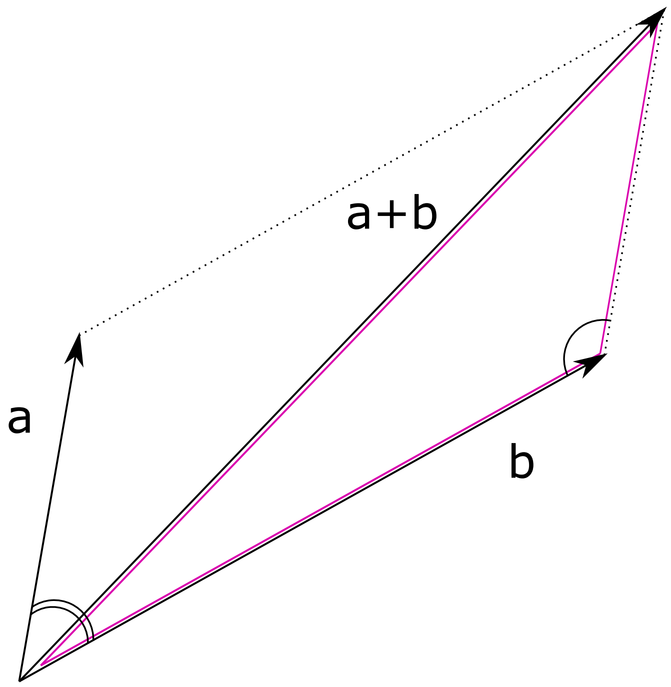


Рис. 1: Можно вычислить скалярное $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, зная длины $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$ и $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|$.

Из всех квадратичных функций на пространстве X выделяют несколько классов.

Определение 1.4. Квадратичная функция $k(\cdot)$ называется

- *положительно определённой*, если $k(\boldsymbol{x}) > 0$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$,
- *отрицательно определённой*, если $k(\boldsymbol{x}) < 0$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$,
- *положительно полуопределённой*, если $k(\boldsymbol{x}) \geq 0$, $\forall \boldsymbol{x}$,

- *отрицательно полуопределённой*, если $k(\boldsymbol{x}) \leq 0, \forall \boldsymbol{x}$.

Пример. Если рассматривать множество векторов – направленных отрезков трёхмерного пространства, то форма $k(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^2$ (2) будет положительно определённой. Форма же $k(\boldsymbol{x}) = -|\boldsymbol{x}|^2$ будет отрицательно определённой. Пример же полуопределённой формы… на данном этапе привести затруднительно. …Или нет. Да, например, пусть $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$. Тогда определим форму следующим образом:

$$k(\boldsymbol{x}) = \left|\frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}\right|^2$$

то есть как квадрат ортогональной проекции вектора $\boldsymbol{x}$ на направление, задаваемое вектором $\boldsymbol{a}$ (это в самом деле квадратичная форма, так как она порождена симметричной билинейной функцией $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, которая по паре векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ возвращает скалярное произведение их ортогональных векторных проекций на $\boldsymbol{a}$). Очевидно, $k(\boldsymbol{x}) \geq 0$ для любого $\boldsymbol{x}$. Однако $k(\boldsymbol{x})$ может быть равна нулю и при $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ (если $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{a}$). □

1.2. Матрица b(x, y)

Пример. Пусть в трёхмерном геометрическом пространстве векторов введён базис $e = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Распишем формулу для скалярного произведения произвольной пары векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, разложив каждый из них по базису e:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3, y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + y_3\boldsymbol{e}_3) \\
&= x_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)y_1 + x_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)y_2 + x_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3)y_3 + \\
&\quad x_2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1)y_1 + x_2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)y_2 + x_2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)y_3 + \\
&\quad x_3(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1)y_1 + x_3(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2)y_2 + x_3(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3)y_3
\end{aligned}$$

"Можно заметить", что более компактно это выражается в матричном виде:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) \\ (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) \\ (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x^T\Gamma y$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ и $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ координатные столбцы векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, и матрица $\Gamma = \big((\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)\big)_{ij}$, каждый элемент на позиции i, j которой есть скалярное произведение пары базисных векторов $\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{e}_j$ (*матрица Грама* системы векторов e). □

Для произвольной билинейной функции $b(\cdot, \cdot)$ всё получается аналогично: введём базис в пространстве X, разложим аргументы функции $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ по этому базису и "посмотрим, что получится". Итак, пусть базис — это система векторов $e = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. Любой вектор пространства можно представить как линейную комбинацию базисных векторов:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n, \quad \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n$$

Подставим это в билинейную функцию и преобразуем:

$$\begin{aligned}
b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= b(x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n, y_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n) \\
&= x_1 b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)y_1 + \ldots + x_1 b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_n)y_n + \ldots + x_n b(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_1)y_1 + \ldots + x_n b(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_n)y_n \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_i b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)y_j
\end{aligned} \tag{3}$$

Если координаты векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ собрать в столбцы[2] $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ и $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ соотвественно, а также ввести матрицу

$$B = \begin{pmatrix} b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) & \dots & b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_1) & \dots & b(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix}$$

которая называется *матрицей билинейной функции*, то выражение (3) можно продолжить и записать в матричном виде:

$$\boxed{b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x^T B y}$$

Если билинейная функция $b(\cdot, \cdot)$ симметрична, то и её матрица B в произвольном базисе, очевидно, также симметрична. Но верно и в обратную сторону.

Утверждение 1.1. *Билинейная функция $b(\cdot, \cdot)$ симметрична тогда и только тогда, когда её матрица B в некотором базисе симметрична.*

Доказательство. Ещё раз, если $b(\cdot, \cdot)$ симметрична, то:

$$\begin{cases} b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = b(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i) \\ \forall i, j \end{cases} \Leftrightarrow B = B^T$$

И, наоборот, если матрица симметрична, то:

$$B = B^T \Leftrightarrow \begin{cases} b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = b(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i) \\ \forall i, j \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \ldots + x_i b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) y_j + \ldots \\ \qquad = \ldots + y_j b(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i) x_i + \ldots = b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

□

Для квадратичной функции $k(\cdot)$, построенной по симметричной билинейной $b(\cdot, \cdot)$ с матрицей B в базисе e получаем:

$$k(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) x_j = x^T B x$$

1.3. Диагонализируемость матрицы k(x)

Пример. Пусть в трёхмерном геометрическом пространстве векторов введён базис $e = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, такой что $|\boldsymbol{e}_1| = 1$, $|\boldsymbol{e}_2| = 2\sqrt{3}$, $|\boldsymbol{e}_3| = 6$ и $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \angle(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = \frac{\pi}{3}$.

Матрица симметричной билинейной функции $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ (матрица Грама) будет равна:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 12 & 12 \\ 3 & 12 & 36 \end{pmatrix}$$

[2] По-хорошему, для столбцов стоило бы использовать “другие” обозначения, например, ξ для координат вектора $\boldsymbol{x}$ и η для координат вектора $\boldsymbol{y}$. Однако поступим проще, надеясь, что из контекста будет понятно, где $\boldsymbol{x}$ означает вектор, а где x означает соответствующий координатный столбец (к тому же один икс пишется “жирным”, а другой нет).

Можно ли найти базис e', в котором матрица B' скалярного произведения была бы диагональна?

Да, можно. Ведь по сути именно это и получается в процессе *ортогонализации* базиса. Будем постепенно, вектор за вектором, собирать базис e'. Пусть $\boldsymbol{e}'_1 \equiv \boldsymbol{e}_1$. Тогда в базисной системе векторов $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ матрица формы B' будет в точности как B. (Будем обозначать символом B' и "итоговый результат", то есть диагональную матрицу, и матрицу формы в "промежуточном состоянии", то есть после получения очередного $\boldsymbol{e}'_i$. Точнее, B' всегда будет означать "текущее состояние" матрицы формы: когда первые сколько-то новых базисных уже получены, "новые", а последние базисные пока оставлены как были, "старые".)

Далее, чтобы получить $\boldsymbol{e}'_2$, надо из $\boldsymbol{e}_2$ вычесть его ортогональные проекции на все найденные на данный момент векторы будущего нового базиса (а это пока просто $\{\boldsymbol{e}'_1\}$). "Поправим" же описанным образом вектор $\boldsymbol{e}_2$ и заметим при этом, какой получится матрица B' скалярного произведения в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Итак, новый второй базисный вектор:

$$\boldsymbol{e}'_2 \equiv \boldsymbol{e}_2 - \frac{(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}_2)}{|\boldsymbol{e}'_1|^2}\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_2 - \frac{(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}_2)}{(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_1)}\boldsymbol{e}'_1$$

Меняем второй вектор — в матрице B' изменятся только вторые строчка и столбец. Так, первый элемент во втором столбце (и во второй строчке):

$$b(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2) = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}_2) - \frac{(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}_2)}{(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_1)}(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_1) = b'_{12} - \frac{b'_{12}}{b'_{11}}b'_{11} = b'_{12} - \frac{b'_{11}}{b'_{11}}b'_{12} = 0$$

Аналогичным образом поменяется скалярное произведение с третьим вектором (который пока не меняли):

$$b(\boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}_3) = \ldots = b'_{23} - \frac{b'_{13}}{b'_{11}}b'_{12}$$

Отдельно стоит рассмотреть элемент на главной диагонали:

$$b(\boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_2) = \ldots = b'_{22} - \frac{b'^2_{12}}{b'_{11}}$$

Итого, матрица на текущей итерации (когда "поправлены" первые два базисных вектора, а остальные как бы оставлены без изменений):

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 2 - 1/1 \cdot 2 & 3 \\ 2 - 1/1 \cdot 2 & 12 - 2^2/1 & 12 - 3/1 \cdot 2 \\ 3 & 12 - 3/1 \cdot 2 & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 36 \end{pmatrix}$$

Что по сути произошло с B'? Получилось так, что из второго столбца вычли первый с коэффициентом (равным $b'_{12}/b'_{11} = 2$), чтобы занулить b'_{12}, а также из второй строчки вычли первую с таким же коэффициентом, чтобы занулить b'_{21}. То есть провели *элементарное преобразование столбцов и такое же элементарное преобразование строк*. Элементарное преобразование столбцов равносильно умножению исходной матрицы *справа* на матрицу, задающую преобразование столбцов. Элементарное преобразование строк равносильно умножению исходной матрицы *слева* на матрицу преобразования строк. В общем, можно проверить, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 12 & 12 \\ 3 & 12 & 36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 36 \end{pmatrix}$$

То есть изменение матрицы можно описать как:

$$B' = S^T B' S, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица же перехода от "старого" базиса $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ к "новому" $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}_3\}$ равна:

$$S_{e \to e'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $S_{e \to e'}$ есть по сути та же S, которая определяет изменение матрицы скалярного произведения... Совпадение?..

Ещё несколько шагов правки базисных векторов, и можно будет получить базис e', в котором матрица B' скалярного произведения будет диагональной (ортогональный базис). Более того, на диагонали будут стоять только положительные числа:

$$B' = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_i > 0$$

Можно будет даже найти базис e'', такой что у диагональной матрицы B'' на диагонали будут только единицы (ортонормированный базис): $B'' = \mathrm{diag}(1, 1, 1)$. □

Можно ли диагонализировать произвольную билинейную функцию $b(\cdot, \cdot)$?

Если билинейная функция несимметричная, то ответ "нет", её диагонализировать не получится (иначе она не была бы несимметричной).

Если же билинейная функция симметричная... Особенность скалярного произведения (1.3) была в том, что $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) > 0$, $\forall i$, то есть на диагонали в матрице B (на каждой итерации "правки" базиса) обязательно стояли положительные числа (и как раз с помощью них проводилась "чистка" строк и столбцов, то есть вычитание из каждого $\boldsymbol{e}_j$ ортогональных проекций на $\boldsymbol{e}'_i$, $i < j$). Но с произвольной билинейной функцией $b(\cdot, \cdot)$ вполне может оказаться так, что $b(\boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{e}'_i) < 0$ или даже $b(\boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{e}'_i) = 0$ для некоторого i. И в таком случае с "ортогонализацией" могут возникнуть проблемы: если "проекция" $b(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}'_i)$ вектора $\boldsymbol{e}_j$ на $\boldsymbol{e}'_i$ не ноль, но при этом "длина" $b(\boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{e}'_i) = 0$... Которые, однако, с помощью "дополнительной правки" базисного вектора e'_i всегда можно будет разрешить (2).

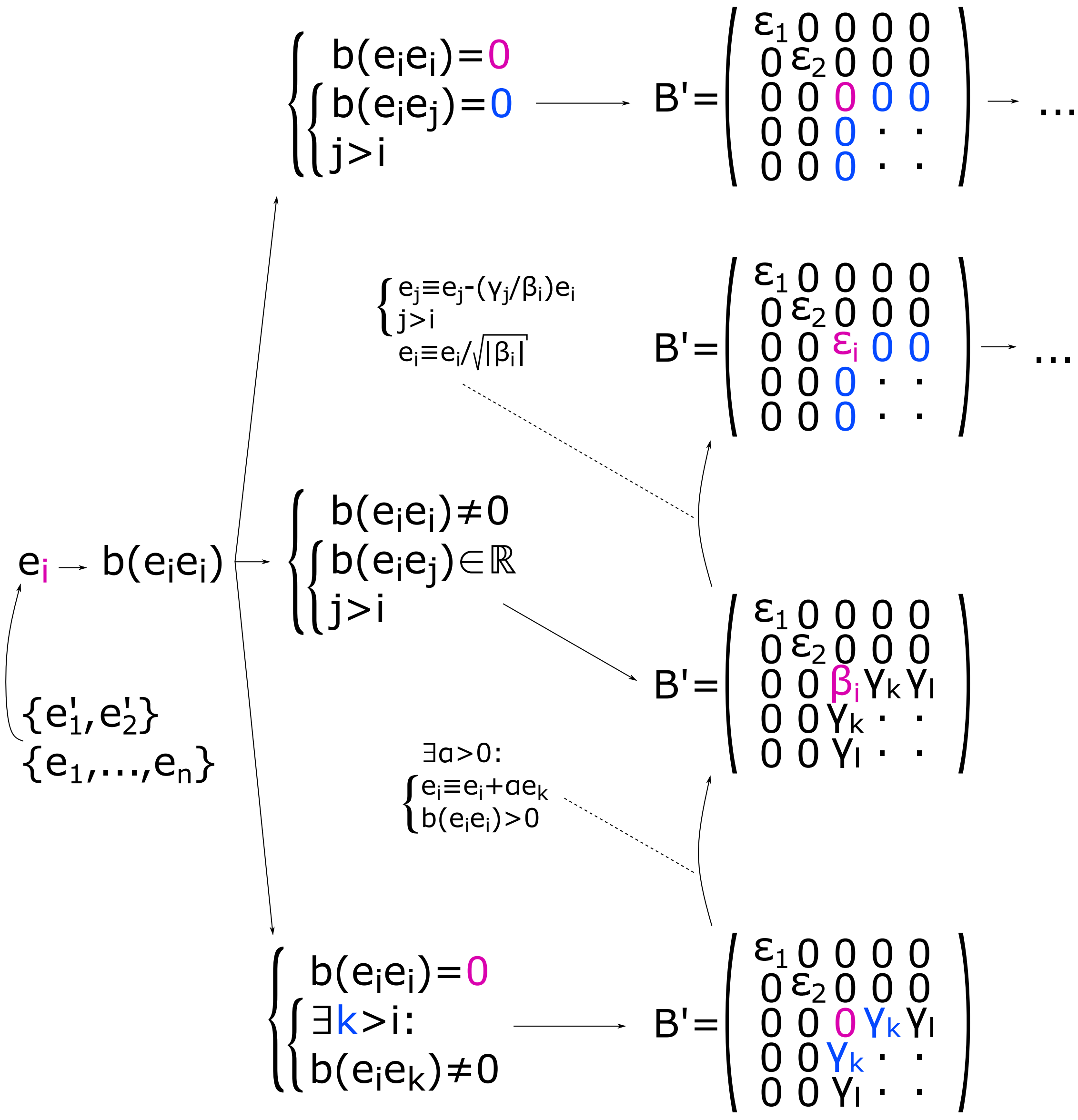
Покажем "по-честному", как меняется матрица билинейной формы при смене базиса. И далее сформулируем утверждение о возможности приведения этой матрицы к диагональному виду.

Пусть в базисе e матрица билинейной функции $b(\cdot, \cdot)$ есть B. Пусть "новый" базис e' связан со "старым" матрицей перехода S, то есть $e' = eS$. Какой будет матрица B' билинейной функции в "новом" базисе? Значение билинейной функции на произвольной паре векторов не зависит от базиса:

$$(x')^T B' y' = b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x^T B y$$

Пользуясь связью $x = Sx'$ между координатными столбцами одного и того же вектора в разных базисах, можем преобразовать соотношение:

$$\begin{aligned} \underline{(x')^T B' y'} &= b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x^T B y \\ &= (Sx')^T B (Sy') = \underline{(x')^T (S^T B S) y'} \end{aligned} \tag{4}$$



$b(x,y) \equiv b(xy)$; $b(e_ie_i) \equiv \beta_i$, $b(e_ie_k) \equiv \gamma_k$, $b(e_ie_l) \equiv \gamma_l$ $(k,l>i)$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0,1,-1\}$, $\varepsilon_i \in \{1,-1\}$

Рис. 2: Возможные случаи при рассмотрении очередного вектора $\boldsymbol{e}_i$ “старого” базиса при добавлении его под тем же номером в “новый” базис (в котором матрица билинейной функции будет канонической). Базис e' строится постепенно: на каждой итерации добавляется новый вектор, а к матрице B' при этом добавляется новый “слой”, новый “угол” из строчки и столбца с вершиной на главной диагонали (вершина “угла” принимает значения $\{0, \pm 1\}$, а остальные элементы “угла” нули). Поэтому если все $b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 0$, $j > i$, то ничего вообще делать не нужно, кроме, возможно, “нормировки” вектора $\boldsymbol{e}_i$. Если же $b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) \neq 0$ и при этом какие-то из $b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$, $j > i$ тоже не нули, то надо “править” эти векторы $\boldsymbol{e}_j$, вычитая с нужным коэффициентом вектор $\boldsymbol{e}_i$, то есть $\boldsymbol{e}_j \equiv \boldsymbol{e}_j - b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)/b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) \cdot \boldsymbol{e}_i$ (после этого будет $b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 0$). А если оказалось, что $b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) = 0$ и при этом хоть какой-то $b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k)$, $k > i$ не ноль, то “правим” $\boldsymbol{e}_i$: надо прибавить к нему с некоторым коэффициентом α вектор $\boldsymbol{e}_k$, так чтобы $b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i)$ стало не нулём. То есть замена $\boldsymbol{e}_i \equiv \boldsymbol{e}_i + \alpha \boldsymbol{e}_k$, и тогда $b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) = 0 + \alpha^2 b(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_k) + 2\alpha b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k) \neq 0$ при некотором α.

И это верно для *любой* пары $x', y' \in \mathbb{R}$. Поэтому можно утверждать, что будут равны матрицы "посередине":

$$\boxed{B' = S^T B S} \tag{5}$$

(Подставляя $x' = y' = (1, 0, \ldots, 0)^T$ в (4), получаем равенство элементов матриц на позиции "$1, 1$". Подставляя $x' = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ и $y' = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, получаем равенство элементов на позиции "$1, 2$". И так далее.)

Теорема 1.1. *Пусть $b(\cdot, \cdot)$ есть симметричная билинейная функция. Тогда найдётся базис e', в котором матрица B' билинейной функции будет диагональной*

$$B' = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \quad \varepsilon_i \in \mathbb{R}$$

Более того, найдётся базис e'', в котором матрица B'' билинейной функции будет диагональной, причём на диагонали будут обязательно только числа $\{0, 1, -1\}$:

$$B'' = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \quad \varepsilon_i \in \{0, \pm 1\} \tag{6}$$

Также можно привести "матричный аналог" утверждения.

Теорема 1.2. *Пусть $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ есть симметричная матрица. Тогда найдётся невырожденная квадратная матрица $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, такая что матрица $S^T B S$ будет диагональной:*

$$B' = S^T B S = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \quad \varepsilon_i \in \mathbb{R}$$

Более того, найдётся невырожденная квадратная матрица $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, такая что матрица $S^T B S$ будет диагональной, причём на диагонали будут только числа $\{0, 1, -1\}$:

$$B'' = S^T B S = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \quad \varepsilon_i \in \{0, \pm 1\}$$

1.4. Канонический вид k(x)

Если в данном базисе e матрица квадратичной функции $k(\boldsymbol{x})$ имеет вид (6), то есть диагональная с числами $\{0, \pm 1\}$ на диагонали, то говорят, что форма в базисе e имеет *канонический вид*.

Пример. Форма $k(\boldsymbol{x})$ в каноническом виде может, например, иметь матрицу:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда формула для нахождения $k(\boldsymbol{x})$:

$$k(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$$

□

Количество ненулевых элементов на диагонали матрицы B' формы $k(\cdot)$ в каноническом виде, очевидно, определяет ранг B'. А что можно сказать о ранге матрицы B формы $k(\cdot)$ в произвольном базисе? Оказывается, что $\operatorname{Rg} B = \operatorname{Rg} B'$:

$$B' = S^T B S \Rightarrow \operatorname{Rg} B' = \operatorname{Rg}(S^T B S) = \operatorname{Rg}(S^T B) = \operatorname{Rg} B$$

Канонический вид формы зависит от базиса. Например, одна и та же форма может иметь канонический вид $k(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - x_2^2$ с матрицей $B' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ в одном базисе и иметь вид $k(\boldsymbol{x}) = -x_1^2 + x_2^2$ с матрицей $\boldsymbol{B}'' = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ в другом базисе. Но зависит ли ранг матрицы формы в каноническом виде от способа приведения формы к этому каноническому виду? То есть обязательно ли $\operatorname{Rg} \boldsymbol{B}' = \operatorname{Rg} \boldsymbol{B}''$, если $\boldsymbol{B}'$ и $\boldsymbol{B}''$ определяют канонический вид одной и той же формы в разных базисах? Очевидно, да, ведь по уже доказанному

$$\operatorname{Rg} \boldsymbol{B}' = \operatorname{Rg} \boldsymbol{B} = \operatorname{Rg} \boldsymbol{B}''$$

где $\boldsymbol{B}$ — матрица формы в произвольном "начальном" базисе. Независимость ранга матрицы от способа приведения формы к каноническому виду можно бы было показать и по-другому, от противного.

Пример. Так, допустим, что у одной формы $k(\cdot)$ получилось в разных базисах получить такие матрицы:

$$\boldsymbol{B}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Почему такого не может быть? Потому что для формы с матрицей $\boldsymbol{B}''$ можно привести двумерное подпространство

$$\boldsymbol{U}'' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2'', x_3'' \in \mathbb{R} \right\}$$

на котором форма будет нулевой:

$$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}'' \to k(\boldsymbol{x}) = x^T \boldsymbol{B}'' x = 0$$

Однако для формы с матрицей $\boldsymbol{B}'$ подобного двумерного подпространства уже не найти. ...Это очевидно. ...Очевидно ли? Пожалуй, не совсем...

Несложно найти два *одномерных* подпространства

$$\boldsymbol{U}_1' = \left\{ \begin{pmatrix} x_1' \\ 0 \\ x_3' \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1' = x_3' \in \mathbb{R} \right\}, \quad \boldsymbol{U}_2' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2' = x_3' \in \mathbb{R} \right\}$$

на которых $k(\boldsymbol{x}) = x^T \boldsymbol{B}' x = 0$. Однако сумма $\boldsymbol{U}_1' + \boldsymbol{U}_2'$ не будет давать двумерное подпространство, для векторов которого $k(\boldsymbol{x}) = 0$.

Проще получить противоречие (и в более общем случае, а не только в рассмотренном примере), возможно, было бы, если бы рассматривались не подпространства, где форма *обязательно нулевая*, а где она *может быть ненулевая*. Так, для формы с матрицей $\boldsymbol{B}''$ максимальное по размерности подпространство с таким свойством будет одномерным: натянутым на вектор $u'' = (1, 0, 0)^T$. А для формы с матрицей $\boldsymbol{B}'$ оно будет трёхмерным. Имеется в виду, что можно привести три линейно независимых вектора: $u' = (1, 0, 0)^T$, $v' = (0, 1, 0)^T$ и $w' = (0, 0, 1)^T$ — таких что $u'^T \boldsymbol{B}' u', v'^T \boldsymbol{B}' v', w'^T \boldsymbol{B}' w' \neq 0$. □

Итого, ранг матрицы квадратичной формы сохраняется при переходе к новому базису. И в любом каноническом виде одной и той же квадратичной формы число ненулевых значений (± 1) на диагонали будет одинаковым. Но может ли получиться так, что будет разным, например, количество значений $+1$?

Пример. Допустим, что у одной формы $k(\cdot)$ получилось в разных базисах получить такие матрицы:

$$\boldsymbol{B}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Имея матрицу B', можно указать такое *максимальное по размерности подпространство, на котором форма положительно определена*:

$$L'_+ = \left\{ \begin{pmatrix} x'_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x'_1 \in \mathbb{R} \right\}, \quad k(\boldsymbol{x}) = x^T B' x > 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in L'_+, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$$

А в том базисе, в котором дана B'', это будет двумерное подпростнанство:

$$L''_+ = \left\{ \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x''_1, x''_2 \in \mathbb{R} \right\}, \quad k(\boldsymbol{x}) = x^T B'' x > 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in L''_+, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$$

Получается, $L'_+ \neq L''_+$, так как $\dim L'_+ \neq \dim L''_+$. Однако само понятие *максимального по размерности подпространства, на котором форма положительно определена* не зависит от базиса, а характеризует лишь саму квадратичную форму. Пришли к противоречию. $\square$

Понятия L^+ и L^- (подпространства максимальной размерности, на которых форма определена соответственно положительно и отрицательно) позволяют аналогичным образом показать неизменность количества значений $+1$ и -1 на диагонали в каноническом виде для произвольной квадратичной формы. Поэтому можно ввести понятия: *положительный индекс* квадратичной формы p и *отрицательный индекс* квадратичной формы q — как числа единичек и минус единичек в каноническом виде квадратичной формы. Ранг матрицы формы, очевидно, оказывается равным сумме $p+q$. *Сигнатурой σ* квадратичной формы называется разность $p - q$.

Теорема 1.3. *Ранг, положительный и отрицательный индексы, сигнатура не зависят от базиса, в котором форма приведена к каноническому виду (и потому являются характеристиками не столько матрицы формы в конкретном базисе, сколько самой формы).*

1.5. Положительная определённость k(x)

На нескольких примерах разберём некоторые особенности положительно и отрицательно определённых форм, которые следуют из вида их матриц в каноническом виде.

Пример. Пусть B есть матрица некоторой *положительно определённой* квадратичной формы $k(\cdot)$ в трёхмерном пространстве:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},\ B = B^T$$

Раз форма $k(\cdot)$ положительно определена, то в каноническом виде у неё обязательно будет матрица:

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

И соответствующая формула $k(\boldsymbol{x})$ от координат вектора:

$$k(\boldsymbol{x}) = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$$

Что можно заметить "интересного" про матрицу B'? Она полного ранга. А ранг матрицы формы сохраняется при смене базиса. Таким образом, *матрица положительно определённой квадратичной формы полного ранга*.

Что-нибудь ещё "интересное"? Не сложно заметить, что $\det B' = 1$. А что можно сказать про определитель исходной B? как он связан (и связан ли вообще как-нибудь) с определителем B'?

$$\det B' = \det(S^T BS) = \det S^T \det B \det S = (\det S)^2 \det B$$

То есть из того, что $\det B' = 1 > 0$ следует, что и $\det B > 0$. Таком образом, *определитель матрицы положительно определённой квадратичной формы больше нуля*.

Посмотрим ещё раз внимательно на матрицу формы B' и заметим, что... больше нуля не только $\det B'$ — положительны определители всех квадратных подматриц, расположенных в левом верхнем углу! (Такие определители называются *главными минорами* и обычно обозначаются как Δ_i, где $i \geq 1$ есть порядок минора.) То есть

$$\Delta'_1 = 1 > 0, \quad \Delta'_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \Delta'_3 = \det B' = 1 > 0$$

Можно ли утверждать то же самое и про матрицу B? Ведь про определитель всей матрицы получилось показать, что он тоже больше нуля... Посмотрим:

$$\Delta_1 = b_{11} = k(\boldsymbol{e}_1) > 0$$

так как форма по условию положительно определена. А какого знака будет второй главный минор?

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

Рассмотрим двумерное подпространство векторов:

$$\boldsymbol{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Раз форма $k(\cdot)$ положительно определена на всём пространстве, то она положительно определена и на подпространстве $\boldsymbol{U}$, то есть $k(\boldsymbol{x}) > 0$ для всех ненулевых $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}$. Подставим координаты произвольного вектора из $\boldsymbol{U}$ в формулу $k(\cdot)$ и немного преобразуем, или "перепишем", не меняя сути:

$$k(\boldsymbol{x}) = (x_1, x_2, 0)^T \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)^T \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Иными словами, положительная определённость формы вкупе с "упрощённой формулой" вычисления $k(\cdot)$ для векторов из $\boldsymbol{U}$ выливаются в:

$$(x_1, x_2)^T \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} > 0 \quad \forall (x_1, x_2)^T \neq 0$$

А это фактически означает, что положительно определена некоторая форма с матрицей $\left(\begin{smallmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{smallmatrix}\right)$! Но определитель матрицы положительно определённой формы обязательно положителен! То есть и второй главный минор Δ_2 матрицы $\boldsymbol{B}$ больше нуля.

Таким образом, *все главные миноры матрицы положительно определённой квадратичной формы больше нуля*. $\square$

Все приведённые выводы про матрицу положительно определённой квадратичной формы из примера, очевидно, будут верны и для положительно определённой формы произвольного порядка. Однако последнее наблюдение, про главные миноры, не такое простое (ещё более непростое), как пока могло показаться.

Пример. Пусть B есть матрица *некоторой* квадратичной формы $k(\cdot)$ в трёхмерном пространстве:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \; B = B^T$$

Известно, что главные миноры матрицы положительны. *Следует ли из этого, что форма положительно определена*? Иными словами, обязательно ли матрица B' формы в каноническом виде будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Начнём с того, что посмотрим на определитель $\det B'$:

$$\det B' = \det(S^T B S) = (\det S)^2 \det B$$

раньше эта формула уже использовалась, но тогда было “в другую сторону”. Теперь же важно, что знак $\det B'$ такой же, как у $\det B$, то есть тоже больше нуля, так как $\det B = \Delta_3 > 0$ по условию. Таким образом, у матрицы B' формы в каноническом виде точно полный ранг, то есть на диагонали нет нулей:

$$B' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_i \neq 0$$

Далее, так как

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0$$

то у некоторой формы $\widetilde{k}(\cdot)$ с матрицей $\left(\begin{smallmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{smallmatrix}\right)$ в каноническом виде будет матрица $\tilde{B}' = \operatorname{diag}(\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2)$, *определитель которой тоже больше нуля*. И так как *матрица B исходной формы невырождена*, то *можно* организовать процесс приведения к каноническому виду следующим образом:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1 & 0 & b_{13} \\ 0 & \tilde{\varepsilon}_2 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\varepsilon}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

то есть сначала как бы приводим к каноническому виду подматрицу второго порядка в верхнем левом углу, которая есть матрица положительно определённой формы $\widetilde{k}(\cdot)$, а потом уже “доделываем” последние столбец и строчку. Итого, получается, что

$$\det B' = \underbrace{\overbrace{\det \tilde{B}'}^{>0} \cdot \varepsilon_3}_{>0}$$

но тогда обязательно $\varepsilon_3 > 0$, то есть $\boxed{\varepsilon_3 = 1}$! (Так как канонический вид.)

То есть узнали чуть больше про B' — теперь понятно, что

$$B' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_i \neq 0$$

Аналогично можно показать, что $\varepsilon_2 = 1$, а потом и $\varepsilon_1 = 1$. В итоге у матрицы B' формы в каноническом виде только единицы на диагонали — а это и есть критерий положительной определённости формы. □

С некоторыми, возможно, дополнительными "аккуратностями" рассуждения из примера применимы и к форме с матрицей произвольного порядка с тем свойством, что все её главные миноры больше нуля.

Наблюдения из нескольких рассмотренных выше примеров иллюстрируют следующее утверждение.

Теорема 1.4 (Критерий Сильвестра). *Для положительной определённости квадратичной формы $k(\cdot)$ с матрицей $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ в некотором базисе необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры этой матрицы Δ_i $(i = 1, \dots, n)$ были больше нуля.*

А что же с отрицательной определённостью? В целом рассуждения, приведённые в примерах с положительно определённой формой, "работают" и в случае с отрицательно определённой формой. Главное, что меняется — это то, что знак определителя матрицы формы (очевидно — в каноническом, а далее можно показать, что и вообще в любом виде) *зависит от порядка матрицы*, то есть чередуется, то "плюс", то "минус".

Теорема 1.5 ("Критерий Сильвестра 2"). *Для отрицательной определённости квадратичной формы $k(\cdot)$ с матрицей $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ в некотором базисе необходимо и достаточно, чтобы знаки всех главных миноров этой матрицы Δ_i $(i = 1, \dots, n)$ чередовались как $(-1)^i$, то есть*

$$\underline{\Delta_1 < 0} \leftrightarrow -1 < 0, \quad \underline{\Delta_2 > 0} \leftrightarrow (-1) \cdot (-1) > 0, \quad \dots$$

2. Задачи

2.1. по мотивам # 32.8(2) + 32.9(2)

Привести данную квадратичную форму

$$k(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - x_1x_2 - 2x_1x_3 + \frac{x_2^2}{4} + x_3^2$$

заданную на трёхмерном векторном пространстве[3], к каноническому виду с помощью метода Лагранжа или элементарных преобразований (столбцов и строк!) её матрицы. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы. Выяснить, является ли форма положительно или отрицательно определённой или полуопределённой.

Решение.

Способ 1: Метод Лагранжа (выделения квадратов).

В формуле $k(\boldsymbol{x})$ есть член x_1^2, а также члены с x_1 в первой степени. Поэтому приведение к каноническому виду можно начать с того, чтоб *собрать вместе все члены с x_1, дополнить, если надо, до квадрата, и сделать замену, выделив квадрат* (так, чтобы члены с x_1 "ушли", а вместо этого появился бы только квадрат новой переменной):

$$k(\boldsymbol{x}) = \left(x_1^2 - x_1x_2 - 2x_1x_3 + \underline{\left(\frac{x_2}{2}\right)^2 + x_3^2 + 2\cdot\frac{x_2}{2}\cdot x_3}\right) - \underline{\left(\frac{x_2}{2}\right)^2 - x_3^2 - 2\cdot\frac{x_2}{2}\cdot x_3} + \frac{x_2^2}{4} + x_3^2$$

$$k(\boldsymbol{x}) = \left(x_1 - \frac{x_2}{2} - x_3\right)^2 - x_2x_3$$

Замена:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - \dfrac{x_2}{2} - x_3 \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3 \end{cases} \tag{7}$$

В результате формула для квадратичной функции примет вид:

$$k(\boldsymbol{x}) = x_1'^2 - x_2'x_3'$$

При приведении формы к диагональному (или каноническому) виду методом Лагранжа может возникнуть ситуация, когда квадрат сразу выделить и нельзя. Как в формуле выше: есть только смешанное произведение $x_2'x_3'$, но ни $x_2'^2$, ни $x_3'^2$ нет. В таком случае можно сделать следующую замену ("трюк"):

$$\begin{cases} x_1' = x_1'' \\ x_2' = x_2'' - x_3'' \\ x_3' = x_2'' + x_3'' \end{cases} \tag{8}$$

В результате вместо $x_2'x_3'$ появится разность квадратов, и "стандартный" процесс выделения квадратов и замен переменных можно будет продолжить:

$$k(\boldsymbol{x}) = x_1''^2 - (x_2'' - x_3'')(x_2'' + x_3'')$$

[3] То есть нет такого, что в формуле $k(\cdot)$ есть ещё "иксы", но с нулевыми коэффициентами.

$$k(\boldsymbol{x}) = x_1''^2 - x_2''^2 + x_3''^2 \tag{9}$$

Привели форму к каноническому виду. Теперь, по-хорошему, надо ещё привести соответствующую замену координат (переход от "старого" исходного базиса к "новому", где канонический вид). Из первой замены (7) получаем:

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + \dfrac{x_2'}{2} + x_3' \\ x_2 = x_2' \\ x_3 = x_3' \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad x = S_1 x', \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где S_1 — матрица, задающая переход от базиса e к базису e' (в котором координаты с одним "штрихом"). Далее, вторая замена (8):

$$\begin{cases} x_1' = x_1'' \\ x_2' = x_2'' - x_3'' \\ x_3' = x_2'' + x_3'' \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad x' = S_2 x'', \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

где S_2 — матрица перехода от базиса e' к базису e'' (в котором как раз имеем канонический вид формы (9)).

Итоговая (комбинированная) замена:

$$\begin{cases} x_1 = x_1'' + \dfrac{3x_2''}{2} + \dfrac{x_3''}{2} \\ x_2 = x_2'' - x_3'' \\ x_3 = x_2'' + x_3' \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad x = Sx'', \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Можно проверить, что $S = S_1 S_2$:

$$S_1 S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = S$$

Способ 2: Элементарные преобразования матрицы (столбцов и строк).

При смене базиса матрица формы меняется по правилу (5):

$$B' = S^T B S$$

Матрица S невырожденная, поэтому может быть представлена как произведение матриц, задающих, например, элементарные преобразования столбцов: $S = S_1 \cdot \ldots \cdot S_N$. Если подставить это в формулу выше:

$$B' = S_N^T \cdot \ldots \cdot S_1^T \cdot B \cdot S_1 \cdot \ldots \cdot S_N$$

Получается, чтобы получить B', надо провести над B серию преобразований: столбцов (умножение на S_i справа) и строк (умножение на S_i^T слева), причём после преобразования столбцов должно сразу идти аналогичное преобразование строк (например, первая пара преобразований: $S_1^T B S_1$).

С помощью способа, похожего на тот, с помощью которого искали обратную матрицу, можно одновременно найти и диагональную (каноническую) матрицу B' формы, и матрицу перехода S к соответствующему базису: надо "приписать", например, справа к исходной матрице единичную, и выполнять над ней те же самые элементарные преобразования, но **только элементарные преобразования столбцов**:

$$(B \mid E) \to (S_1^T B S_1 \mid S_1) \to \ldots \to (S_N^T \ldots S_1^T B S_1 \ldots S_N \mid \underbrace{S_1 \ldots S_N}_{S})$$

Возвращаясь к форме из задачи, её матрица:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ -1/2 & 1/4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Получим из неё диагональную:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad (10)$$

где первый переход — это результат преобразования "ко второму столбцу прибавить половину первого, к третьему прибавить первый" (и то же самое со строками — но только для матрицы "слева"), а второй — это "ко второму столбцу прибавить третий, а из третьего вычесть второй" (и потом так же со строками).

Итого, матрица формы B' в каноническом виде и матрица перехода S к соответствующему базису[4]:

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Имея форму в каноническом виде (9):

$$k(\boldsymbol{x}) = x_1''^2 - x_2''^2 + x_3''^2$$

не сложно ответить на вопрос о знакоопределённости формы. Она будет знакопеременной. Потому что, например, при $u'' = (1, 0, 0)^T$ имеем $k(u'') > 0$, а при $v'' = (0, 1, 0)^T$ получается $k(v'') < 0$. $\square$

[4]...Внимательный читатель мог заметить, что стадии изменения матрицы в процессе элементарных преобразований в точности соответствуют заменам, совершённым в процессе диагонализации методом Лагранжа! Однако стоит считать это лишь "случайностью" — вообще могло бы получиться и по-другому.