Семинар 5

Алексеев Василий

6 + 10 октября 2022

Содержание

1. Прямая на плоскости

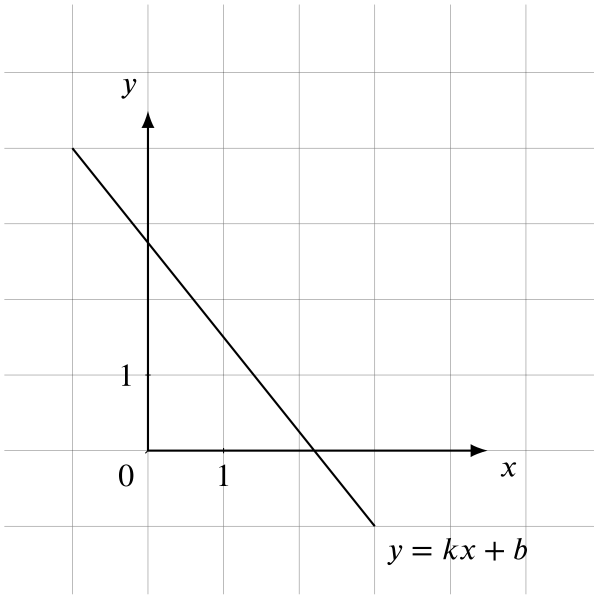

Рис. 1: Прямоугольная декартова система координат на плоскости и прямая, заданная в этой системе координат уравнением $y = kx + b$.

Пусть на плоскости есть прямоугольная система координат (1). Тогда прямая может быть задана уравнением

$$y = kx + b \tag{1}$$

где $k \in \mathbb{R}$ — угловой коэффициент (тангенс угла между прямой и положительным направлением оси X), а $b \in \mathbb{R}$ — свободный член (ордината точки пересечения прямой с осью Y). Уравнение прямой — связь между координатами точек, такая что точки прямой и только они удовлетворяют этому соотношению. Но с помощью уравнения (1) нельзя задать вертикальную прямую (параллельную оси Y). Вертикальные прямые можно описать с помощью уравнения

$$x = x_0$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$. Вместо уравнений для двух частных случаев (наклонная прямая и вертикальная) можно рассмотреть уравнение для произвольной прямой на плоскости, включающее в себя описанные частные случаи:

$$Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 \neq 0 \tag{2}$$

Отметим, что коэффициенты в уравнении прямой (2) определены с точностью до ненулевого множителя. Так, пусть прямая задаётся уравнением

$$Ax + By + C = 0$$

Но тогда и уравнение

$$2Ax + 2By + 2C = 0$$

хоть формально и отличается от первого, но задаёт ту же прямую: если координаты точки удовлетворяют первому уравнению, то они удовлетворяют и второму, и наоборот.

Также стоит подчеркнуть, что коэффициенты в уравнении зависят от выбранной системы координат. Так, в некоторой декартовой прямоугольной системе координат $O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ уравнение прямой может иметь вид

$$Ax + By + C = 0$$

а в другой системе координат $O'; \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ (не обязательно прямоугольной, и базис e' которой не обязательно имеет ту же ориентацию, что и базис e) уравнение *той же* прямой может иметь другие коэффициенты (координаты обозначим x', y' вместо x, y, как координаты в другой декартовой системе):

$$A'x' + B'y' + C' = 0$$

Таким образом, уравнение прямой — это способ описания прямой, связанный с выбранной системой координат[1].

Что можно сказать о прямой по её уравнению? Пусть есть прямая l, заданная уравнением (2), и точка на прямой $P = (x_0, y_0) \in l$. Рассмотрим точку $P' = (x_0 - B, y_0 + A)$. Принадлежит ли она прямой l?

$$A(x_0 - B) + B(y_0 + A) + C = \big(Ax_0 + By_0 + C\big) - AB + BA = 0 + 0 = 0 \Rightarrow P' \in l$$

Очевидно, что и точка $P'' = (x_0 - 2B, y_0 + 2A)$ также лежит на l. Таким образом, радиус-вектор любой точки на прямой может быть получен из радиуса-вектора исходной точки P сдвигом вдоль вектора

$$\boxed{\boldsymbol{a} = (-B, A)} \tag{4}$$

который можно взять в качестве *направляющего вектора* прямой, то есть ненулевого вектора, параллельного прямой.

Зная одну точку на прямой и направляющий вектор, можно записать *векторное уравнение прямой в параметрической форме*:

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t, \quad \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0},\ t \in \mathbb{R}} \tag{5}$$

где $\boldsymbol{r}_0$ — вектор начальной точки на прямой, $\boldsymbol{a}$ — направляющий вектор, а t — числовой параметр.

Векторное уравнение равносильно системе из двух скалярных уравнений в общей декартовой системе координат:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}} \tag{6}$$

где $(\alpha, \beta) = \boldsymbol{a}$, а потому $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Систему скалярных уравнений, в свою очередь, можно ещё записать в *канонической форме*:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}}$$

[1] В более общем случае, *алгебраическая линия* на плоскости — множество точек, определяемых в некоторой декартовой системе координат уравнением

$$A_1 x^{k_1} y^{l_1} + \ldots + A_s x^{k_s} y^{l_s} = 0, \quad k_i, l_i \in \mathbb{N}_{\geq 0} \tag{3}$$

Степень уравнения (порядок алгебраической линии) определяется как максимальная из сумм:

$$\max\{k_1 + l_1, \ldots, k_s + l_s\}$$

(при условии, что в уравнении приведены подобные члены, и числовой коэффициент A_i в соответствующем одночлене с максимальной суммой $k_i + l_i$ отличен от нуля).

Существует теорема, согласно которой *алгебраическая линия порядка p на плоскости* в любой *декартовой системе координат может быть задана уравнением вида (3) порядка p*.

При этом свойство неизменности порядка не относится к различным уравнениям, которые линия может иметь в одной и той же системе координат. Например, $x^2 + y^2 - 1 = 0$ и $(x^2 + y^2 - 1)^2 = 0$.

Если система координат **декартова прямоугольная** (у которой базис ортонормированный), то, зная направляющий вектор прямой $(-B, A)$, можно найти вектор нормали к прямой (2):

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = -B \cdot n_x + A \cdot n_y = 0 \Rightarrow \boldsymbol{n} \propto (A, B)$$

и в качестве вектора нормали можно взять

$$\boldsymbol{n} = (A, B) \tag{7}$$

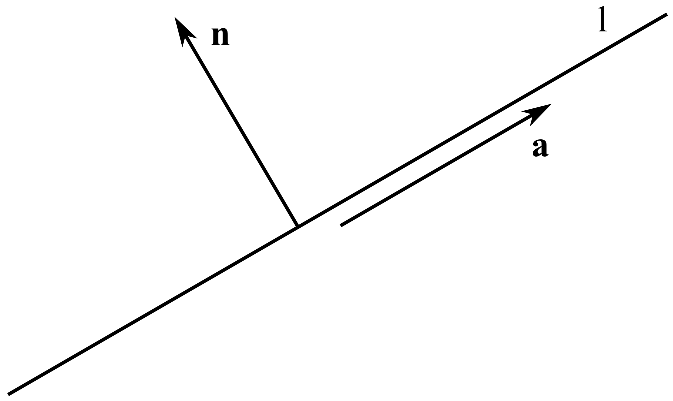

Рис. 2: Направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ прямой l и вектор нормали $\boldsymbol{n}$ к ней.

Зная вектор нормали $\boldsymbol{n}$ к прямой, можно записать *нормальное векторное уравнение прямой* (принимая во внимание, что $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{n}$, а $\boldsymbol{a} \parallel (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$ для точек $\boldsymbol{r}$ прямой и только для них)

$$\boxed{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) = 0, \quad \boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}} \tag{8}$$

или

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D, \quad \boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0},\ D \in \mathbb{R}$$

Одной из базовых задач является нахождение расстояния от точки до прямой. Пусть есть точка $A = (x_1, y_1) = \boldsymbol{r}_1$ и прямая l, заданная с помощью радиуса вектора начальной точки $\boldsymbol{r}_0$ и направляющего вектора $\boldsymbol{a}$. Тогда расстояние от точки A до прямой l можно найти как модуль векторной проекции вектора $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0$ на направление, определяемое вектором нормали к прямой $\boldsymbol{n}$:

$$\boxed{\rho(A, l) = \frac{\left|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})\right|}{|\boldsymbol{n}|}} \tag{9}$$

Пусть теперь в **прямоугольной системе** координат прямая l задана уравнением $Ax + By + C = 0$. Тогда направляющий вектор прямой $\boldsymbol{a} = (-B, A)$, вектор нормали $\boldsymbol{n} = (A, B)$, а расстояние от точки A до прямой l:

$$\rho(A, l) = \frac{\left|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})\right|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{\left|(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})\right|}{|\boldsymbol{n}|}$$
$$\xrightarrow{\text{ДПСК}} \frac{|Ax_1 + By_1 - (Ax_0 + By_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \overset{r_0 \in l}{=} \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

где *ДПСК* — декартова прямоугольная система координат. То есть в итоге

$$\rho(A, l) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{10}$$

2. Задачи

2.1. # 5.1

Задача. *При каком необходимом и достаточном условии прямые* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_1 t$ *и* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a}_2 t$

1. *Пересекаются в единственной точке?*
2. *Параллельны, но не совпадают?*
3. *Совпадают?*

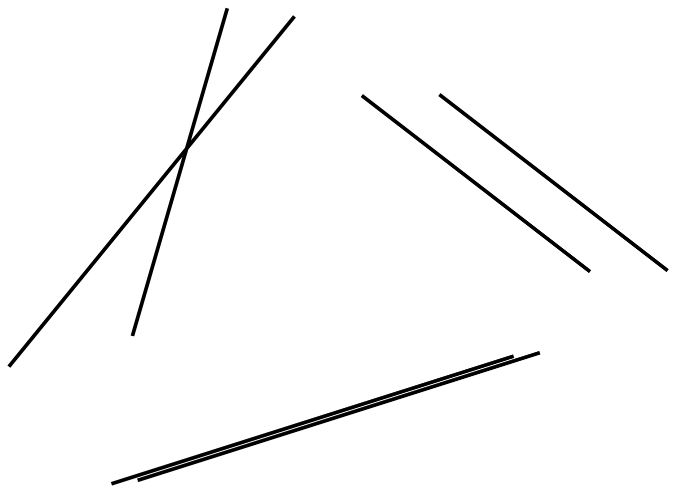

Рис. 3: Варианты взаимного расположения двух прямых на плоскости.

Решение. Рассмотрим пункты по порядку (3).

1. Очевидно, необходимое и достаточное условие — чтобы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ были неколлинеарны[2]. То есть условие
$$\boldsymbol{a}_1 \nparallel \boldsymbol{a}_2$$
2. Первое условие — чтобы направляющие векторы были параллельны. Но этого недостаточно: надо "отсечь" случай совпадения прямых. При $\boldsymbol{a}_1 \parallel \boldsymbol{a}_2$ необходимым и достаточным условием совпадения прямых является наличие хотя бы одной общей точки $\boldsymbol{r}_\star$. Но тогда получаем $\boldsymbol{r}_\star = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_1 t_1$ и $\boldsymbol{r}_\star = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a}_2 t_2$, а потому для того, чтобы прямые были различны, должно выполняться $(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \nparallel \boldsymbol{a}_1$. Итого
$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_1 \parallel \boldsymbol{a}_2 \\ (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \nparallel \boldsymbol{a}_1 \end{cases}$$
3. Последний случай получается изменением второго условия в предыдущем пункте на противоположное:
$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_1 \parallel \boldsymbol{a}_2 \\ (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \parallel \boldsymbol{a}_1 \end{cases}$$

□

[2] Более строго это можно обосновать, рассмотрев систему уравнений $\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_1 t_1 = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a}_2 t_2$. Если определитель системы отличен от нуля, то, по теореме Крамера, решение существует и единственно. Обратно, если определитель системы равен нулю, то можно показать, что решений либо нет, либо их бесконечно много.

2.2. # 5.2(1)

Задача. *Найти угол между прямыми l_1 и l_2, заданными следующими уравнениями:*

$$l_1 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_1 t$$

$$l_2 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a}_2 t$$

Решение. Очевидно, угол между прямыми можно найти с помощью направляющих векторов. (Направляющие векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, а также начальные точки прямых $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ известны по условию.)

$$\cos\angle(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \frac{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)}{|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|}$$

Тогда для угла между прямыми (который считается острым) получаем:

$$\cos\angle(l_1, l_2) = \left|\cos\angle(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)\right| = \left|\frac{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)}{|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|}\right|$$

□

2.3. # 5.9(4)

Задача. *Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $P(1, -3)$ и $Q(3, -3)$.*

Решение.

Способ 1 (уравнение в ОДСК). Ищем уравнение прямой в виде:

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0 \tag{11}$$

Точки P и Q принадлежат прямой. Поэтому их координаты удовлетворяют уравнению прямой. Объединим в систему эти соотношения:

$$\begin{cases} A - 3B + C = 0 \\ 3A - 3B + C = 0 \end{cases}$$

Вычитая из одного уравнения другое, находим, что $A = 0$. Тогда для поиска оставшихся коэффициентов в уравнении прямой получаем соотношение:

$$-3B + C = 0$$

Откуда можно, например, выразить C как $C = 3B$.

Вернёмся к уравнению прямой (11). Получили, что оно должно иметь такой вид:

$$By + 3B = 0$$

Можем сократить на B, так как этот коэффициент точно не ноль. Итоговое уравнение прямой:

$$y + 3 = 0$$

Способ 2 (“наблюдение”). Можно заметить, что прямая PQ параллельна оси X (но не факт, что перпендикулярна оси Y! только если система координат прямоугольная), причём пересекает ось Y в точке с ординатой -3. Таким образом, уравнение прямой: $y = -3$.

Способ 3 (векторный параметрический). В качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $\overrightarrow{PQ}(2, 0)$. Если в качестве начальной точки прямой выбрать точку P, то можно записать такое векторное уравнение прямой:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} t$$

Снова получаем, что прямая определяется уравнением $y = -3$. □

2.4. # 5.5(2)

Задача. *Найти расстояние от точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ до прямой l, заданной уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}t$.*

Решение. Пусть $\boldsymbol{r}_x$ — радиус-вектор ортогональной проекции точки M_0 на прямую l. Тогда

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_x = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}\tau \\ (\boldsymbol{r}_x - \boldsymbol{r}_0) \perp \boldsymbol{a} \end{cases}$$

При этом $(\boldsymbol{r}_x - \boldsymbol{r}_0) \perp \boldsymbol{a}$ равносильно $(\boldsymbol{r}_x - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}) = 0$. Подставляя $\boldsymbol{r}_x$ из первого уравнения системы в скалярное произведение, получаем

$$(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}\tau - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}) = 0$$

Откуда

$$\tau = \frac{(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{a}|^2}$$

И вектор $\boldsymbol{r}_x$ равен

$$\boldsymbol{r}_x = \boldsymbol{r}_1 + \frac{(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}$$

Искомое же расстояние

$$\rho(M_0, l) = |\boldsymbol{r}_x - \boldsymbol{r}_0| = \left| \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)|\boldsymbol{a}|^2 - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{a}|^2} \right|$$

Получили расстояние от точки до прямой.

Можно заметить, что числитель в последней дроби “похож” на развёрнутый “бац минус цаб”... Действительно, можно записать

$$(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}) = [\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}]]$$

но при этом надо сказать, что мы **с плоскости выходим в пространство** с некоторым базисом (при этом в данном случае не важно, как ориентирован базис в пространстве, как векторы базиса в пространстве расположены по отношению к исходной плоскости, где лежат прямая l и точка M_0). Итого, с помощью векторного произведения запись для расстояния можно записать в более компактном виде:

$$\rho(M_0, l) = \frac{\left|[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}]]\right|}{|\boldsymbol{a}|^2} = \frac{|[\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}]|}{|\boldsymbol{a}|}$$

На самом деле эту формулу можно бы было получить и сразу, без “озарения с “бац минус цаб”. Ведь в числителе стоит площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{a}$, а в знаменателе — длина одной из сторон этого параллелограмма. Или так: если расписать числитель и сократить дробь на $|\boldsymbol{a}|$, то останется $|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0| \sin\angle(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})$, что и даёт расстояние от точки до прямой. □

2.5. # 5.19

Задача. *Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1, 5)$ и равноудалённых от точек $B(3, 7)$ и $C(1, -1)$.*

Решение. Расстояние от точки до прямой:

$$\rho = \left|\frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})}{|\boldsymbol{n}|}\right|$$

Прямая a равноудалена от $B(3,7)$ и $C(1,-1)$:

$$\frac{\Big|\big((3,7)-(-1,5), \boldsymbol{n}\big)\Big|}{|\boldsymbol{n}|} = \rho_{a,B} = \rho_{a,C} = \frac{\Big|\big((1,-1)-(-1,5), \boldsymbol{n}\big)\Big|}{|\boldsymbol{n}|}$$

$$\big|(4,2)\cdot\boldsymbol{n}\big| = \big|(2,-6)\cdot\boldsymbol{n}\big|$$

Но не понятно, что с этим делать дальше, потому что система координат может быть и не прямоугольная! При вычислении скалярного произведения недостаточно лишь перемножать соответствующие координаты, надо считать “по-честному”:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &= (x_u\boldsymbol{e}_1 + y_u\boldsymbol{e}_2, x_v\boldsymbol{e}_1 + y_v\boldsymbol{e}_2)\\ &= x_u x_v(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + y_u y_v(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) + (x_u y_v + y_u x_v)(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\end{aligned}$$

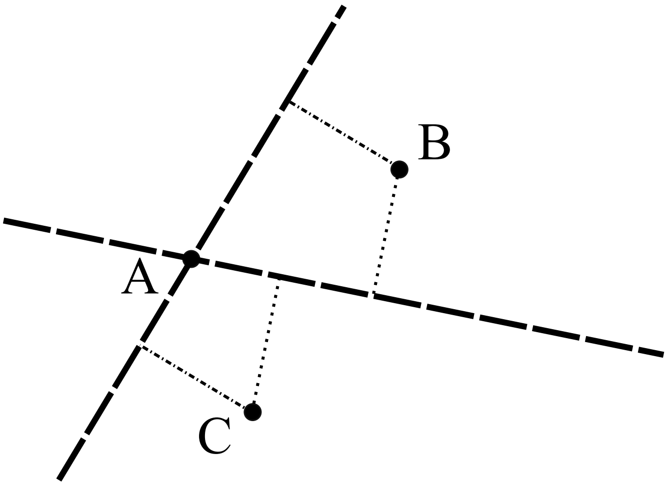

Рис. 4: Прямая, проходящая через точку A и равноудалённая от точек B и C.

Вместо (попыток) вычисления расстояний можно заметить, что нам подходят всего две прямые, которые определяются более “дружелюбными” условиями, с которыми уже можно будет работать.

Так, первый случай — прямая a параллельна $\boldsymbol{BC} = (1-3, -1-7) = (-2, -8)$ (4):

$$a : -8x - (-2)y + C = 0$$

$$A \in a \Rightarrow -8\cdot(-1) + 2\cdot 5 + C = 0 \Rightarrow C = -18$$

$$\boxed{4x - y + 9 = 0}$$

Второй случай — когда прямая a проходит между точками B и C (4).

Пусть M — середина BC: $M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{-1+7}{2}\right) = (2,3)$

Прямая, проходящая через две точки $A(-1,5)$ и $M(2,3)$:

$$\frac{x - x_M}{x_A - x_M} = \frac{y - y_M}{y_A - y_M} \Rightarrow \frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-3}{5-3}$$

$$\boxed{2x + 3y - 13 = 0}$$

□

2.6. # 5.34(2) (р)

Задача. *Точка* $A(1,2)$ *и прямая* $a : 3x - y + 9 = 0$. *Найти координаты*

1. $A_\perp$ *— проекции* A *на прямую* a

2. A' *— точки, симметричной с* A *относительно прямой* a

Решение. Точка A не лежит на прямой: $3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 9 \neq 0$

Система прямоугольная $\Rightarrow \boldsymbol{n} = (3, -1)$.

$A_\perp = (x, y)$, $A_\perp \in a$, $\overrightarrow{A_\perp A} \parallel \boldsymbol{n}$:

$$\begin{cases} 3x - y + 9 = 0 \\ \dfrac{1-x}{2-y} = \dfrac{x_A - x_{A_\perp}}{y_A - y_{A_\perp}} = \dfrac{n_x}{n_y} = \dfrac{3}{-1} \end{cases}$$

$$\boxed{A_\perp = (-2, 3)}$$

$A, A_\perp, A'$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AA_\perp} = \overrightarrow{A_\perp A'} \\ \overrightarrow{AA_\perp} = (-2,3) - (1,2) = (-3,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{A_\perp A'} = (-3, 1)$$

$$\overrightarrow{A_\perp A'} = A' - A_\perp \Rightarrow A' = \overrightarrow{A_\perp A'} + A_\perp = (-3,1) + (-2,3)$$

$$\boxed{A' = (-5, 4)}$$

□

2.7. # 5.54

Задача. *Составить уравнение биссектрисы острого угла между прямыми* l_1 *и* l_2, *заданными уравнениями:*

$$l_1 : \ x - 7y - 1 = 0$$

$$l_2 : \ x + y + 7 = 0$$

Решение. Проверим сначала, что прямые в самом деле пересекаются.

...Это так, потому что коэффициенты A и B в уравнениях l_1 и l_2 не пропорциональны.

Найдём же точку пересечения (почему нет). Эта точка — общая для двух прямых, то есть если обозначить её координаты как (x^*, y^*), то они удовлетворяют уравнениям обеих прямых:

$$\begin{cases} x^* - 7y^* - 1 = 0 \\ x^* + y^* + 7 = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получаем $(x^*, y^*) = (-6, -1)$.

Биссектрису вообще можно будет задать, если мы узнаем, например, какую-нибудь точку на биссектрисе и её направляющий вектор. Точка уже есть. Остался вектор. Его мы тоже сможем найти.

Выберем сначала направляющие векторы прямых:

$$\boldsymbol{a}_1 = (7, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (-1, 1)$$

(Видно, что прямые l_1 и l_2 не перпендикулярны, то есть в самом деле образуют острые и тупые углы в результате пересечения.)

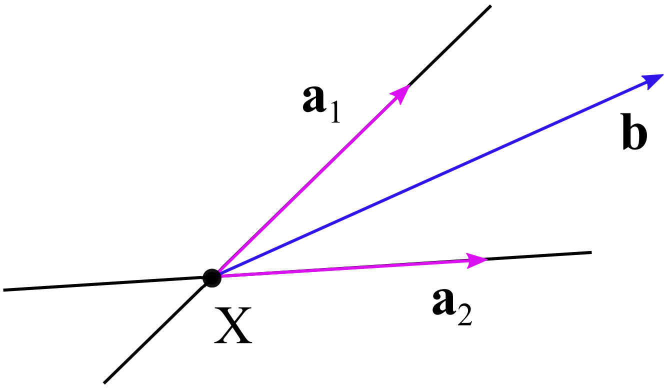

Рис. 5: Направляющий вектор $\boldsymbol{b}$ биссектрисы острого угла между l_1 и l_2.

“Из геометрии” не сложно видеть (5), что направляющий вектор биссектрисы $\boldsymbol{b}$ можно будет выбрать как сумму *единичных по длине* направляющих векторов прямых l_1 и l_2, *направленных вдоль сторон интересующего нас острого угла*. Векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ можно будет отнормировать — это не проблема. Но образуют ли они острый угол? Проверим:

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 7 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 < 0$$

Нет. Тогда положим

$$\boldsymbol{a}'_1 \equiv -1 \cdot \boldsymbol{a}_1 = (-7, -1), \quad \boldsymbol{a}'_2 \equiv \boldsymbol{a}_2 = (-1, 1)$$

Проверим, что между такими векторами угол в самом деле будет острый:

$$(\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2) = -7 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 > 0$$

Теперь отнормируем:

$$\boldsymbol{a}''_1 \equiv \frac{\boldsymbol{a}'_1}{|\boldsymbol{a}'_1|} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}''_2 \equiv \frac{\boldsymbol{a}'_2}{|\boldsymbol{a}'_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Наконец можем определить направляющий вектор биссектрисы:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}''_1 + \boldsymbol{a}''_2 = \frac{4}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Векторное параметрическое уравнение биссектрисы острого угла:

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{4}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Можно переписать его в более “простом” виде — чтоб можно было сравнить с ответом в конце задачника :)

$$\frac{x - (-6)}{y - (-1)} = \frac{-3}{1} \Leftrightarrow x + 3y + 9 = 0$$

$\square$

3. Дополнение 1: “Другое решение другой задачи”

3.1. # 5.53 (р)

Задача. *Две прямые:* $x - 7y = 1$ *и* $x + y = -7$*. Уравнение биссектрисы угла с точкой* $A(1, 1)$ *внутри?*

Решение. *Изложенное далее отличается от решения в задачнике. Возможно, вариант, представленный здесь, менее рациональный, но всё же, хочется думать, тоже небесполезный.*

Прямые пересекаются, точка A не лежит ни на одной прямой.

Точка пересечения прямых $X(x, y)$:

$$\begin{cases} x - 7y = 1 \\ x + y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{X = (-6, -1)}$$

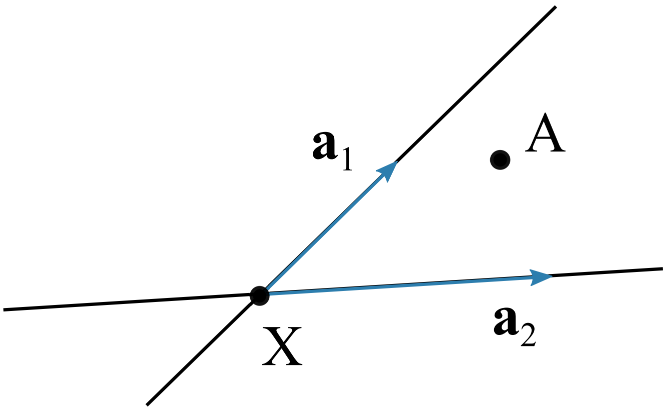

Рис. 6: Точка A лежит внутри угла, образованного векторами $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, отложенными от точки X.

Выберем направляющие векторы прямых $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ так, чтобы они образовывали угол с точкой A внутри (6).

$$[\boldsymbol{a}_i, \overrightarrow{XA}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_{ix} & a_{iy} & 0 \\ XA_x & XA_y & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{k} \cdot (a_{ix} \cdot XA_y - XA_x \cdot a_{iy})$$

$$\overrightarrow{XA} = (1, 1) - (-6, -1) = (7, 2)$$

$$\boldsymbol{a}_1 = (7, 1) \Rightarrow \operatorname{sgn}(7 \cdot 2 - 7 \cdot 1) = +$$

$$\boldsymbol{a}_2 = (-1, 1) \Rightarrow \operatorname{sgn}(-1 \cdot 2 - 7 \cdot 1) = -$$

Получаем, что при выбранных $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ направление поворота от $\boldsymbol{a}_1$ к $\overrightarrow{XA}$ по наименьшему углу не совпадает с направлением поворота от $\boldsymbol{a}_2$ к $\overrightarrow{XA}$ по наименьшему углу. То есть A лежит внутри угла, образованного $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, отложенными из точки X. Итак, полагаем

$$\boxed{\boldsymbol{a}_1 \equiv (7, 1), \ \boldsymbol{a}_2 \equiv (-1, 1)}$$

Пусть $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y)$ — направляющий вектор биссектрисы. Точки на биссектрисе равноудалены от сторон угла:

$$\frac{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{b}|} = \cos\angle(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) = \cos\angle(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}_2||\boldsymbol{b}|}$$

$$\frac{7b_x + b_y}{|\boldsymbol{a}_1|} = \frac{-b_x + b_y}{|\boldsymbol{a}_2|} \Rightarrow \boldsymbol{b} = \big(|\boldsymbol{a}_1| - |\boldsymbol{a}_2|, 7|\boldsymbol{a}_2| + |\boldsymbol{a}_1|\big)$$

$$|\boldsymbol{a}_1| = \sqrt{50},\ |\boldsymbol{a}_2| = \sqrt{2} \Rightarrow \boldsymbol{b} = (5-1, 7+5) = (4, 12)$$

Уравнение биссектрисы:

$$\frac{x-(-6)}{4} = \frac{y-(-1)}{12} \Rightarrow \boxed{3x - y + 17 = 0}$$

□

4. Дополнение 2: Пара задач про прямую в пространстве

4.1. # 6.3

Задача. *При каком необходимом и достаточном условии прямые* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_1 t$ *и* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a}_2 t$

- *Пересекаются в единственной точке?*
- *Скрещиваются?*
- *Параллельны, но не совпадают?*
- *Совпадают?*

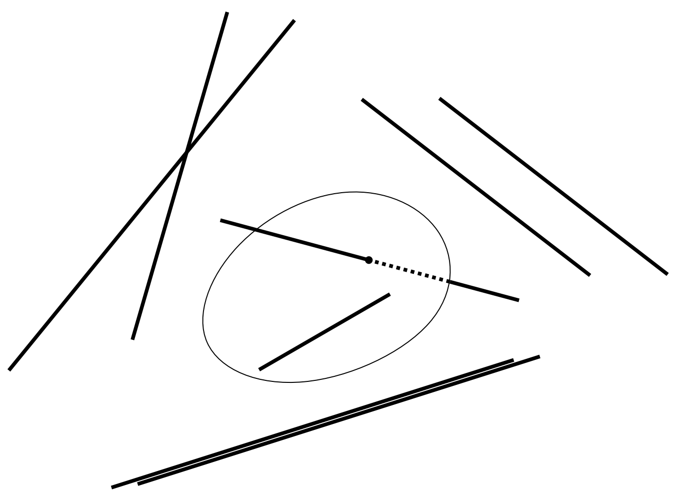

Рис. 7: Варианты взаимного расположения двух прямых в пространстве.

Решение. Решение этой задачи отчасти похоже на решение для случая 2D. Снова рассмотрим пункты по порядку (7).

1. В пространстве уже недостаточно только лишь неколлинеарности $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$. Надо "отсечь" случай, когда прямые скрещиваются. То есть надо потребовать, чтобы прямые лежали в одной плоскости. Для этого необходимо и достаточно, чтобы четыре точки: две на одной прямой, и две на другой — лежали в одной плоскости (прямая определяется по двум точкам, плоскость по трём). На первой прямой можно взять точки $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_1$. На второй — точки $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a}_2$. Чтобы проверить, что четыре точки лежат на одной плоскости, можно построить три вектора с началом в одной из четырёх точек и концами в оставшихся трёх. Например, можно рассмотреть векторы $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{a}_2$ (откладываем векторы от точки $\boldsymbol{r}_2$). Далее на получившихся трёх векторах можно построить параллелепипед и посчитать его объём: если он больше нуля, то исходные четыре точки не лежат на одной плоскости, если равен нулю — то лежат. Объём же можно посчитать с помощью смешанного произведения (сначала в формуле под векторами имеются в виду направленные отрезки, при появлении же определителя под векторами понимаются столбцы из компонент векторов в некотором правом ортонормированном базисе):

$$\begin{aligned} V_{\pm} &= (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}_2) \\ &= \left|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}_2)^T\right| = \left|\big(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}_1 + (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2), \boldsymbol{a}_2\big)^T\right| = \left|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)^T\right| \end{aligned}$$

   где в последнем переходе использовалось свойство определителя, заключающееся в том, что к любой строке (или столбцу) можно прибавлять линейную комбинацию остальных строк (или столбцов) — при этом определитель не меняется. В случае 3D первое условие (неколлинеарность $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$) можно записать ещё и с помощью векторного произведения. Итого, получаем два условия

$$\begin{cases} [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] \neq \boldsymbol{0} \\ (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 0 \end{cases}$$

2. Получается из предыдущего пункта заменой одного условия на противоположное (условия, с помощью которого разделяли случаи скрещивания и собственно пересечения):

$$\begin{cases} [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] \neq \boldsymbol{0} \\ (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \neq 0 \end{cases}$$

3. Параллельны — условие $\boldsymbol{a}_1 \parallel \boldsymbol{a}_2$. Не совпадают — так же, как и в 2D (так как параллельные прямые лежат в одной плоскости). То есть $(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \nparallel \boldsymbol{a}_1$. И получаем

$$\begin{cases} [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = \boldsymbol{0} \\ [\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}_1] \neq \boldsymbol{0} \end{cases}$$

4. Получается из предыдущего заменой одного условия на противоположное:

$$\begin{cases} [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = \boldsymbol{0} \\ [\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}_1] = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

□

4.2. # 6.1(2, 3, 5)

Задача. *Для прямой, заданной одним уравнением, записать её же уравнение, но в другой форме.*

2. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t \overset{?}{\to} [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$

3. $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b} \overset{?}{\to} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$

5. $\begin{cases} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_i) = D_i \\ i = 1, 2 \end{cases} \overset{?}{\to} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$

Решение. Пойдём по по пуктам по порядку.

2. $$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{a}t \Leftrightarrow (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \parallel \boldsymbol{a} \Leftrightarrow [\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{0}$$
$$[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}] \equiv \boldsymbol{b}$$

3. $$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r})$$
$$\boldsymbol{r} = \frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{|\boldsymbol{a}|^2} + \boldsymbol{a} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2} \cdot \boldsymbol{r} \right) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$$
где $\boldsymbol{r}_0 \equiv \dfrac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{|\boldsymbol{a}|^2}$ и $t \equiv \left(\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2} \cdot \boldsymbol{r} \right)$.

5. Направляющий вектор прямой $\boldsymbol{a}$ можно найти как
$$\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]$$
(при этом $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ не должны быть коллинеарны, иначе пара плоскостей не задаёт одну прямую). Остаётся найти начальный вектор прямой $\boldsymbol{r}_0$. Он удовлетворяет обоим уравнениям плоскостей
$$\begin{cases} (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}_1) = D_1 \\ (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}_2) = D_2 \end{cases}$$
Скалярные произведения $\boldsymbol{r}_0$ на векторы нормали $\boldsymbol{n}_i$ — первые две компоненты вектора $\boldsymbol{r}_0$ в базисе, взаимном к, например, $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{a}$. Будем искать $\boldsymbol{r}_0$ такой, что он лежит в плоскости, перпендикулярной искомой прямой (то есть вектору $\boldsymbol{a}$). Тогда третья компонента во взаимном базисе $(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{r}_0, [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]) = 0$.

Выпишем вектора взаимного базиса:
$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1^* = \dfrac{[\boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{a}]}{(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{a})} = \dfrac{|\boldsymbol{n}_2|^2}{|\boldsymbol{n}_1|^2 \cdot |\boldsymbol{n}_2|^2} \cdot \boldsymbol{n}_1 \\ \boldsymbol{e}_2^* = \dfrac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}_1]}{(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{a})} = \dfrac{|\boldsymbol{n}_1|^2}{|\boldsymbol{n}_1|^2 \cdot |\boldsymbol{n}_2|^2} \cdot \boldsymbol{n}_2 \\ \boldsymbol{e}_3^* = \dfrac{[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]}{(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{a})} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{n}_1|^2 \cdot |\boldsymbol{n}_2|^2} \cdot \boldsymbol{a} \end{cases}$$
(смешанное произведение $(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{a})$ можно посчитать через “бац минус цаб”; а третий вектор $\boldsymbol{e}_3^*$ можно было и не выписывать).

Поэтому для $\boldsymbol{r}_0$ получаем

$$\boldsymbol{r}_0 = D_1 \cdot \frac{|\boldsymbol{n}_2|^2}{|\boldsymbol{n}_1|^2 \cdot |\boldsymbol{n}_2|^2}\boldsymbol{n}_1 + D_2 \cdot \frac{|\boldsymbol{n}_1|^2}{|\boldsymbol{n}_1|^2 \cdot |\boldsymbol{n}_2|^2}\boldsymbol{n}_2 = \frac{D_1}{|\boldsymbol{n}_1|^2}\boldsymbol{n}_1 + \frac{D_2}{|\boldsymbol{n}_2|^2}\boldsymbol{n}_2$$

И итоговое уравнение прямой

$$\boldsymbol{r} = \left(\frac{D_1}{|\boldsymbol{n}_1|^2}\boldsymbol{n}_1 + \frac{D_2}{|\boldsymbol{n}_2|^2}\boldsymbol{n}_2\right) + [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] \cdot t$$

Дополнение.

Автор конспекта точно не знает, можно ли из уравнения прямой на плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$ получить векторное параметрическое уравнение $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$. Скорее всего, нельзя, потому что нет возможности на плоскости с помощью рассмотренных операций получить из вектора $\boldsymbol{n}$ вектор, ему перпендикулярный. Но начальную точку на прямой найти можно:

$$(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) = D$$

И, как и раньше, полагая $\boldsymbol{r}_0$ перпендикулярным прямой (то есть параллельным $\boldsymbol{n}$), получаем

$$\boldsymbol{r}_0 = \alpha\boldsymbol{n} \Rightarrow \alpha(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}) = D \Rightarrow \alpha = \frac{D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})} = \frac{D}{|\boldsymbol{n}|^2} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{r}_0 = \frac{D}{|\boldsymbol{n}|^2}\boldsymbol{n}}$$

□