

Семинар 11

Алексеев Василий

21 + 25 апреля 2023

Содержание

1	Adjo & Ortho (Diag E1)	1
1.1	Самосопряжённые преобразования	1
1.1.1	Собственные + ортогонализация, или # 29.19(7)	1
1.1.2	Кусочек теории, или Попытка принять	4
1.1.3	The symms are not what they seem, или # 29.14(1, 2, 3)	11
1.2	Ортогональные преобразования	13
1.2.1	Кусочек теории, или Многоликая ортогональность	13
1.2.2	Просто задача на ортогональные, или # 29.47(1)	14

Жирным шрифтом обозначаются как векторы линейного пространства, так и их координатные столбцы в выбранном базисе. При этом и векторы, и их координатные столбцы обозначаются, как правило, одинаковыми буквами. Например, $\mathbf{x} \in X$ (вектор) и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\dim X}$ (его координатный столбец). Таким образом, смысл зависит от контекста

1. Adjo & Ortho (Diag E1)

1.1. Самосопряжённые преобразования

1.1.1. Собственные + ортогонализация, или # 29.19(7)

Преобразование $\phi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, где \mathcal{E} — евклидово пространство, задано в некотором ортонормированном базисе $e = (e_1, e_2, e_3)$ матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -4 & 16 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Надо найти ортонормированный базис из собственных векторов преобразования ϕ , матрицу перехода S к этому базису, и матрицу A' преобразования ϕ в этом базисе.

Решение. Найдём **собственные значения** преобразования ϕ . Характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -4 & 1 \\ -4 & 16 - \lambda & -4 \\ 1 & -4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \dots = \lambda^2(18 - \lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 & (\text{кратность } 2) \\ \lambda = 18 \end{cases}$$

Видно, что все корни характеристического уравнения вещественные, поэтому они же — и собственные значения преобразования ϕ .

При этом то, что $\lambda = 0$ — собственное значение, можно бы было заметить и в самом начале, ведь у матрицы A строки уже линейно зависимы (первая и третья совпадают), то есть $\det(A - \lambda E)|_{\lambda=0} = 0$.

Найдём **собственные векторы** преобразования ϕ (максимальную линейно независимую систему собственных векторов). При $\lambda = 0$ получаем следующее уравнение для поиска собственных векторов:

$$Ax = \lambda x$$

$$(A - \lambda E)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -4 & 16 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Последнее матричное уравнение равносильно одному скалярному уравнению

$$x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$$

Из которого можно, например, выразить x_1 через x_2 и x_3 :

$$x_1 = 4t_1 - t_2, \quad x_2 = t_1 \in \mathbb{R}, \quad x_3 = t_2 \in \mathbb{R}$$

Тогда общее решение $Ax = 0$ (произвольный вектор из собственного подпространства $\text{Ker}(A - \lambda E)|_{\lambda=0}$) можно выписать в виде:

$$x = \begin{pmatrix} 4t_1 - t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = t_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Видно, что в качестве базиса в собственном подпространстве ϕ , соответствующем собственному значению $\lambda = 0$ (максимальная линейно независимая система собственных векторов для $\lambda = 0$) можно взять векторы:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Не лишним будет на всякий случай убедиться, что в самом деле $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ и $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$.)

Теперь найдём собственные векторы для $\lambda = 18$. Уравнение, определяющее соответствующее собственное подпространство:

$$\begin{pmatrix} -17 & -4 & 1 \\ -4 & -2 & -4 \\ 1 & -4 & -17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Упростим матрицу полученной однородной системы:

$$\begin{pmatrix} -17 & -4 & 1 \\ -4 & -2 & -4 \\ 1 & -4 & -17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -72 & -288 \\ 0 & -18 & -72 \\ 1 & -4 & -17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & -17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Упрощённая система будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -4x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$$

Общее решение:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} t \\ -4t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Базис в собственном подпространстве (один вектор):

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(На всякий случай убеждаемся, что $A\mathbf{x}_3 = 18\mathbf{x}_3$.)

Таким образом, мы нашли *базис из собственных векторов* преобразования ϕ :

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (1)$$

Теперь проведём **ортогонализацию** системы векторов (1). Исходный базис e ортонормированный, поэтому скалярное произведение между векторами $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ считается “по-простому”¹:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

¹Кстати, похоже, что в англоязычных источниках “скалярным произведением” называется именно эта “простая формула” скалярного произведения: сумма произведений соответствующих координат. Именуется как *dot product* или *scalar product*. Термином же *inner product* обозначается скалярное произведение вообще. То есть, ещё раз: наше “скалярное произведение” — их “inner product”, наше “скалярное произведение в ортонормированном базисе” — их “dot product” или “scalar product”. Something like this... Looks like... Anyway.

Видно, что $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) = 4 - 4 + 0 = 0$. Так же, как и $(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = -1 + 0 + 1 = 0$. То есть *собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям преобразования ϕ , ортогональны*.

Остаётся “поправить” подсистему $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$, потому что $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -4 \neq 0$. Вычтем, например, из \mathbf{x}_1 его ортогональную проекцию на \mathbf{x}_2 :

$$\mathbf{x}'_1 \equiv \mathbf{x}_1 - \frac{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_2|^2} \cdot \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

где было использовано, что $|\mathbf{x}_2|^2 = 1 + 0 + 1 = 2$.

Убеждаемся, что $(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}_2) = -2 + 0 + 2 = 0$. Так как мы считали \mathbf{x}'_1 как линейную комбинацию \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 , то должно получиться $(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}_3) = 0$ (то есть можно не проверять ортогональность с \mathbf{x}_3 ; ну, или можно проверить, но стоит понимать, что ничего удивительного в сохранении ортогональности \mathbf{x}'_1 и \mathbf{x}_3 нет). Получили ортогональную систему $\{\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ из собственных векторов преобразования ϕ ?. А остался ли вектор \mathbf{x}'_1 собственным для $\lambda = 0$? Да, ведь он получен как линейная комбинация \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 — векторов из собственного подпространства $\text{Ker}(A - \lambda E)|_{\lambda=0}$, а потому \mathbf{x}'_1 тоже лежит в указанном собственном подпространстве:

$$\phi(\mathbf{x}'_1) = \phi(\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2) = \phi(\mathbf{x}_1) + \phi(2\mathbf{x}_2) = \dots = \lambda(\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2) = \lambda\mathbf{x}'_1$$

Итого, помимо просто базиса из собственных векторов, для преобразования ϕ *существует ортогональный базис из собственных векторов* (ради однообразия обозначений положим $\mathbf{x}'_2 \equiv \mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}'_3 \equiv \mathbf{x}_3$):

$$\{\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (2)$$

Можно ещё **нормировать** базис — поделив все векторы (2) на их модули:

$$\begin{cases} |\mathbf{x}'_1| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3 \\ |\mathbf{x}'_2| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \\ |\mathbf{x}'_3| = \sqrt{1 + 16 + 1} = 3\sqrt{2} \end{cases}$$

Получим следующий *ортонормированный базис из собственных векторов*:

$$\{\mathbf{x}''_1, \mathbf{x}''_2, \mathbf{x}''_3\} = \left\{ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (3)$$

Матрица перехода S от старого ортонормированного базиса e в новому $\{\mathbf{x}''_1, \mathbf{x}''_2, \mathbf{x}''_3\}$ — это матрица, столбцы которой есть компоненты новых базисных векторов в старом базисе. То есть матрица S получается просто объединением столбцов (3) в матрицу:

$$S = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/\sqrt{2} & 1/(3\sqrt{2}) \\ 1/3 & 0 & -4/(3\sqrt{2}) \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/(3\sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

Можно заметить, что $S^T S = E$, то есть матрица перехода S ортогональная. Это потому, что S — матрица перехода от *одного ортонормированного* базиса к *другому ортонормированному* базису. Например, чему равен элемент в матрице $S^T S$ в первой строчке и втором столбце:

$$(S^T S)_{12} = \mathbf{x}_1''^T \mathbf{x}_2'' \xrightarrow{\text{старый ОНБ}} (\mathbf{x}_1'', \mathbf{x}_2'') \xrightarrow{\text{новый ОНБ}} 0$$

Чтобы найти матрицу A' преобразования ϕ в новом базисе, можно воспользоваться либо тем, что новый базис — это базис из собственных векторов (например, в новом базисе \mathbf{x}_1'' имеет координаты $(1, 0, 0)^T$, поэтому образ \mathbf{x}_1'' будет просто первым столбцом A' , а это $\lambda \mathbf{x}_1''|_{\lambda=0}$, так как вектор \mathbf{x}_1'' — собственный, соответствующий $\lambda = 0$), то есть

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

Либо тем, что уже известна матрица S перехода от старого базиса к новому:

$$A' = S^{-1} A S \xrightarrow{S^T S = E} S^T A S = \dots = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

Первый способ, очевидно, побыстрее :) Но вторым, с матрицей S , можно хотя бы проверить, что всё в порядке. Если только не ошибиться в процессе самой проверки :) \square

1.1.2. Кусочек теории, или Попытка принять

Пусть есть линейное преобразование $\phi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ евклидова пространства \mathcal{E} (то есть пространство, в котором *выбрано* скалярное произведение (\cdot, \cdot)). Тогда преобразованием, *сопряжённым* преобразованию ϕ , называется преобразование $\phi^*: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, такое что

$$(\phi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \phi^*(\mathbf{y})), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E} \quad (4)$$

Существует ли вообще для данного ϕ сопряжённое ему ϕ^* ? Пусть e — базис в \mathcal{E} . Пусть матрица Γ — матрица Грама базиса e , A — матрица преобразования ϕ в базисе e , и A^* — матрица сопряжённого преобразования ϕ^* (предполагаем, что оно существует). Тогда левую часть соотношения (4) можно переписать в таком виде:

$$(\phi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (A\mathbf{x})^T \Gamma \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot A^T \Gamma \cdot \mathbf{y}$$

А правая часть (4) будет выглядеть как

$$(\mathbf{x}, \phi^*(\mathbf{y})) = \mathbf{x}^T \Gamma (A^* \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \Gamma A^* \cdot \mathbf{y}$$

Так как (4) верно для произвольной пары (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , то равны “матрицы посередине”:

$$A^T \Gamma = \Gamma A^* \quad (5)$$

Так как Γ — матрица Грама (обязательно $\det \Gamma \neq 0$), то можно соотношение между матрицами исходного и сопряжённого преобразований переписать в таком виде:

$$A^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma$$

Получается, для произвольного преобразования ϕ евклидова пространства существует, причём единственное, сопряжённое преобразование ϕ^* .

Матрица сопряжённого преобразования в ортонормированном базисе:

$$A^* = A^T \quad (\text{ОНБ})$$

Преобразование ϕ евклидова пространства \mathcal{E} называется *самосопряжённым*, если оно совпадает со своим сопряжённым ϕ^* , то есть $\phi(x) = \phi^*(x)$, $\forall x \in \mathcal{E}$, или:

$$(\phi(x), y) = (x, \phi(y)), \quad \forall x, y \in \mathcal{E} \quad (6)$$

Матрица A самосопряжённого преобразования удовлетворяет соотношению:

$$A^T \Gamma = \Gamma A \quad (7)$$

В ортонормированном базисе:

$$A = A^T \quad (\text{ОНБ}) \quad (8)$$

Утверждение 1.1 (“Матричный критерий самосопряжённости”). Если преобразование самосопряжённое, то его матрица в любом ортонормированном базисе симметричная. Обратно, если в некотором ортонормированном базисе матрица преобразования симметричная, то оно обязательно самосопряжённое.

Оказывается, что с самосопряжёнными преобразованиями связано несколько “интересных” утверждений в контексте собственных значений и собственных векторов...

Теорема 1.1. Все корни характеристического уравнения самосопряжённого преобразования вещественные².

Пример. Убедимся в этом на примере самосопряжённого преобразования двумерного пространства, заданного матрицей в ортонормированном базисе (симметричной). Пусть матрица преобразования $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Тогда характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + (b^2 + ac) = 0$$

Дискриминант $(a + c)^2 - 4(b^2 + ac) = (a - c)^2 + b^2 \geq 0$, поэтому оба корня $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$. \square

Хорошо, с самосопряжённым преобразованием двумерного пространства понятно. А что же в случае n -мерного пространства? Как быть там? Логика-то для двумерного на n -мерное как-то “не очень” распространяется...

²При этом интересно, что корни характеристического уравнения — это характеристика именно преобразования, а свойство самосопряжённости связано с выбором скалярного произведения...

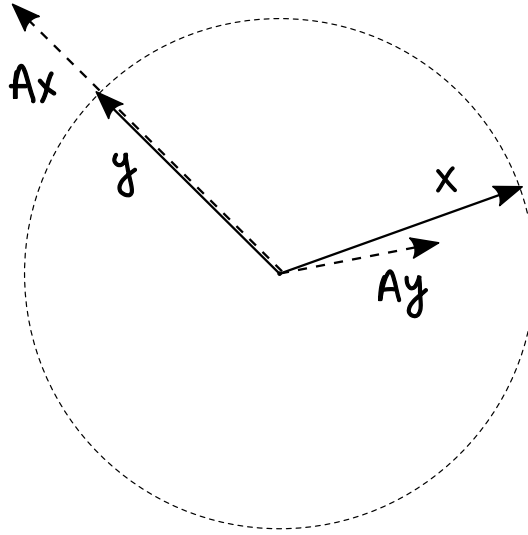


Рис. 1: Из самосопряжённости преобразования с матрицей A следует, что при фиксированном векторе x из всех векторов y единичной длины $|y| = 1$ именно при $y \uparrow\uparrow Ax$ максимально скалярное произведение (x, Ay) . Но будет ли при этом вектор Ay параллелен вектору x ?..

“Попытка принять”³

Пусть есть самосопряжённое преобразование ϕ с матрицей A (в выбранном базисе пространства \mathcal{E}). “Посмотрим” на него внимательнее.

Для некоторых (произвольно выбранных) векторов x и y выполнено:

$$(x, Ay) = (Ax, y) \quad (9)$$

Будем считать, что $|x| = |y| = 1$ (для определённости рассматриваем только нормированные векторы). Заметим, что при фиксированном x скалярное произведение (Ax, y) достигает максимума, очевидно, при $y \uparrow\uparrow Ax$. Но в силу сопряжённости преобразования ϕ имеем соотношение (9). Таким образом:

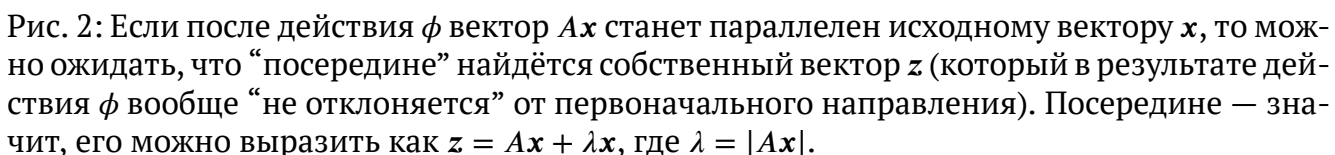
$$\begin{cases} \max_{|y|=1} (x, Ay) \Leftrightarrow y \uparrow\uparrow Ax \\ \min_{|y|=1} (x, Ay) \Leftrightarrow y \downarrow\downarrow Ax \end{cases} \quad (10)$$

то есть при любом x , $|x| = 1$ существует и единствен вектор y , $|y| = 1$, на котором достигает максимум функция от y вида (x, Ay) (кроме случая, когда $Ax = 0$ — тогда при любом y будет получаться ноль): это вектор $y \uparrow\uparrow Ax$ (1).

Будет ли вектор Ay параллелен x ? Нет, гарантировать такого нельзя. (Пока нельзя?) А что, если окажется $Ay \parallel x$? Тогда получится, что под действием ϕ вектор x переходит в Ax , который, в свою очередь, в результате применения к нему ϕ снова пойдёт по направлению вектора x . То есть как бы переход “туда-обратно”. И вследствие линейности преобразования ϕ можно предположить, что “посередине” между x и Ax окажется вектор z , который не ходит “туда-сюда” при действии ϕ , а “стоит на месте”, то есть его образ Az не “отклоняется” от исходного z , а остаётся ему параллелен: $Az \parallel z$ — этот вектор z и будет собственным (2)!

Из того, что при фиксированном x максимум и минимум скалярных произведений из обеих частей соотношения (9) достигается на том единичном векторе y , $|y| = 1$, который

³На основе joisino.net/2021/03/18/spectral.


$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (11)$$
$$|A\mathbf{x}| = |\lambda| \quad (12)$$
$$(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\lambda \mathbf{y}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \lambda$$

$$\frac{1}{\lambda}(\mathbf{x}, A^2 \mathbf{x}) = \lambda \quad \leftrightarrow \quad \boxed{(\mathbf{x}, A^2 \mathbf{x}) = \lambda^2} \quad (13)$$

$$\lambda^2 = (\mathbf{x}, A^2 \mathbf{x}) = (A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = |A\mathbf{x}|^2 \Rightarrow |A\mathbf{x}| = |\lambda|$$

но это ничего нового не говорит — длина вектора Ax уже была известна (12). Что же ещё даёт формула (13)?.. Следует ли из неё, что $|A^2x| = \lambda^2$? То есть *правда ли, что параллельны A^2x и x* ? Нет, *пока* такого утверждать нельзя...

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $x = (1, 0)^T$. Тогда:

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x$$

□

Вплоть до данного момента про выбор вектора x мы ничего не говорили: он был произвольным единичной длины. Выберем же вектор x “неслучайно”! Выберем его следующим образом:

$$|Ax| \rightarrow \max_{|x|=1}$$

то есть из всех векторов x единичной длины выберем тот x^* , длина образа $|Ax^*|$ которого максимальна. (Такой вектор в самом деле найдётся, так как подмножество $\{x \mid |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ ограничено и замкнуто, а потому компактно⁴, и функция $f: \mathbb{R}^n \ni x \mapsto |Ax| \in \mathbb{R}$ непрерывна⁵.) Положим длину образа найденного x^* равной:

$$|Ax^*| \equiv |\lambda^*|$$

Вернёмся к соотношению (13):

$$(x^*, A^2x^*) = \lambda^{*2}$$

Следует ли теперь, что $A^2x^* \parallel x^*$? Да! Потому что

$$|A^2x^*| = |A \cdot Ax^*| \leq |\lambda^*| |Ax^*| \leq \lambda^{*2}$$

$$\lambda^{*2} = (x^*, A^2x^*) = |x^*| \cdot |A^2x^*| \cdot \cos \angle(x^*, A^2x^*) \leq 1 \cdot \lambda^{*2} \cdot 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} |A^2x^*| = \lambda^{*2} \\ |Ax^*| = |\lambda^*| \end{cases} \Rightarrow \underline{A^2x^* = \lambda^{*2}x^*} \\ A^2x^* \parallel x^* \end{cases} \quad (14)$$

Что это значит? Получается, что вектор x^* под действием преобразования ϕ переходит в вектор Ax^* , который переходит в вектор A^2x^* , параллельный исходному x^* :

$$x^* \mapsto Ax^* \mapsto A^2x^* \parallel x^*$$

Если $x^* \parallel Ax^*$, то $Ax^* = \lambda^*x^*$ и вектор $z \equiv x^*$ уже и есть собственный (и тогда автоматически и $A^2x^* = \lambda^{*2}x^*$). Соответствующий собственному значению $\lambda^* \in \mathbb{R}$.

Если же $x^* \not\parallel Ax^*$, то посмотрим на вектор “посередине” между x^* и Ax^* , то есть на вектор $Ax^* + \lambda^*x^*$ (который в данном случае точно отличен от нуля). А точнее, посмотрим на его образ:

$$A(Ax^* + \lambda^*x^*) = A^2x^* + \lambda^*Ax^* = \lambda^{*2}x^* + \lambda^*Ax^* = \underline{\lambda^*(\lambda^*x^* + Ax^*)}$$

⁴См. [лемму Гейне – Бореля](#) о связи ограниченности и замкнутости с “настоящим” определением компакта.

⁵См. [теорему Вейерштрасса](#) о достижении непрерывной на компакте функцией своих точных верхней и нижней граней.

То есть вектор $z \equiv Ax^* + \lambda^* x^*$ собственный, и $\lambda^* \in \mathbb{R}$ — это соответствующее собственное значение⁶!

Итак, для самосопряжённого преобразования ϕ удалось найти собственное значение λ^* и соответствующий собственный вектор z . Но что делать дальше? Найдётся ли базис из собственных векторов? Один собственный вектор z — одномерное подпространство $L = \mathcal{L}(z)$, натянутое на этот собственный вектор z . Останется $(n - 1)$ -мерное подпространство \mathcal{E}' (до суммы со всем $\mathcal{E} = L \oplus \mathcal{E}'$). Получится ли в нём найти собственный вектор? Если вдруг окажется, что подпространство \mathcal{E}' будет инвариантным относительно ϕ , то мы сможем просто перейти к ограничению ϕ на этом \mathcal{E}' , которое, очевидно, тоже будет самосопряжённым, и у которого, таким образом, обязательно найдётся собственное значение и собственный вектор (лежащий в \mathcal{E}'). И далее процесс можно будет повторять — до тех пор, пока не соберётся базис из собственных векторов. Остаётся один вопрос: будет ли \mathcal{E}' инвариантно относительно ϕ ? Или, точнее: можно ли подобрать \mathcal{E}' , такое что $L \oplus \mathcal{E}' = \mathcal{E}$ и при этом \mathcal{E}' инвариантно?..

Представим всё пространство \mathcal{E} как сумму:

$$\mathcal{E} = L \oplus L^\perp$$

то есть как сумму одномерного подпространства L , натянутого на уже найденный собственный вектор z , и его ортогонального дополнения L^\perp .

Утверждение 1.2. Если подпространство L инвариантно относительно самосопряжённого преобразования ϕ , то и его ортогональное дополнение L^\perp тоже будет инвариантным относительно ϕ .

Доказательство. Подпространство L инвариантно:

$$y \in L \rightarrow \phi(y) \in L$$

Ортогональное дополнение L^\perp :

$$x \in L^\perp \leftrightarrow x \perp y, \forall y \in L \leftrightarrow (x, y) = 0$$

Посмотрим на образ $\phi(x)$ вектора $x \in L^\perp$. Точнее — на его скалярное произведение с произвольным вектором $y \in L$:

$$(\phi(x), y) = (x, \phi(y)) = 0$$

так как ϕ самосопряжённое и $\phi(y) \in L$, так как L инвариантно относительно ϕ . Получили, что образ $\phi(x)$ произвольного вектора $x \in L^\perp$ перпендикулярен любому вектору $y \in L$. Иными словами, L^\perp также инвариантно относительно ϕ . \square

Получается, L инвариантно, так как натянуто на собственный вектор. Значит, L^\perp тоже инвариантно. И можно рассмотреть ограничение ϕ на подпространстве $\mathcal{E}' \equiv L^\perp$, то есть преобразование вида:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}: \mathcal{E}' &\rightarrow \mathcal{E}' \\ \tilde{\phi}(x) &= \phi(x), \forall x \in \mathcal{E}' \end{aligned}$$

⁶Вспомним, что число λ^* вводилось следующим образом: $|\lambda^*| \equiv |Ax^*|$. То есть о знаке λ^* ничего не известно! Нам был важен лишь его модуль. Поэтому то, что λ^* (при условии $\lambda^* \neq 0$) оказалось собственным значением — означает на самом деле, что собственных значений целых два: $|\lambda^*|$ и $-|\lambda^*|$!.. Что это значит? Хороший вопрос) Но такая ситуация в принципе возможна. Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, собственные значения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, собственные векторы $x_1 = (1, 0)^T$, $x_2 = (0, 1)^T$. И каждый из них можно представить как сумму вида “ $Ax^* + \lambda^* x^*$ ”: $x_1 = Ax + 2x$, $x_2 = Ax - 2x$, где $x = (1/4, -1/4)^T$ и $Ax = (1/2, 1/2)^T$.

Очевидно, оно также будет самосопряжённым. То есть для него, по уже показанному ранее, найдётся собственное значение и собственный вектор. Далее можно будет перейти к ещё одному ограничению ϕ , на подпространстве размерности $(n - 2)$, найти собственный вектор там, и так далее. В итоге найдётся базис из собственных векторов.

Теорема 1.2. *Для самосопряжённого преобразования ϕ найдётся базис из собственных векторов.*

Но мало того, что найдётся базис из собственных векторов — оказывается, вектора базиса ещё можно будет ортогонализировать... (Так, что базис при этом останется базисом из собственных векторов.)

Покажем это. Пусть λ_1 и λ_2 — различные собственные значения самосопряжённого преобразования ϕ . И векторы \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 — соответствующие этим собственным значениям собственные векторы. Тогда, с одной стороны,

$$(\phi(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_2) = (\lambda_1 \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \lambda_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

С другой стороны,

$$(\phi(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_1, \phi(\mathbf{x}_2)) = (\mathbf{x}_1, \lambda_2 \mathbf{x}_2) = \lambda_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

Отсюда получаем, что

$$\lambda_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \lambda_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \Leftrightarrow (\lambda_2 - \lambda_1)(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$$

Но собственные значения по условию различны, поэтому $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$. То есть *собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям самосопряжённого преобразования, ортогональны*⁷.

Теорема 1.3. *Для самосопряжённого преобразования ϕ найдётся ортонормированный базис из собственных векторов.*

То есть, с одной стороны, по уже показанному ранее (1.2) найдётся базис из собственных векторов (даже если у характеристического уравнения будут кратные корни — каждому собственному значению будет соответствовать собственное подпространство той же размерности, что и кратность собственного значения как корня характеристического уравнения). С другой стороны, согласно (1.3) базис можно будет ортогонализировать.

Пример. Преобразование, рассмотренное в (1.1.1), было задано симметричной матрицей в ортонормированном базисе. То есть преобразование было самосопряжённым. Поэтому для него точно можно было найти ортонормированный базис из собственных векторов.

Итак, свойство самосопряжённости связано со скалярным произведением, выбранным в пространстве \mathcal{E} . Проверим, что матричное соотношение (7), хотя матрицы и зависят от выбора базиса, выполняется и при смене базиса (очевидно, должно выполняться, ведь в определении самосопряжённого преобразования (6) никакой конкретный базис не участвовал). Пусть e — “старый” базис, а $e' = eS$ — “новый” базис. Тогда матрица преобразования в новом базисе $A' = S^{-1}AS$, матрица Грама нового базиса⁸ $\Gamma' = S^T \Gamma S$, и соотношение (7), которое хотим проверить для новых матриц:

$$\begin{aligned} A'^T \Gamma' &= \Gamma' A' \Leftrightarrow (S^{-1}AS)^T (S^T \Gamma S) = (S^T \Gamma S)(S^{-1}AS) \\ &\Leftrightarrow S^T A^T \Gamma S = S^T \Gamma A S \Leftrightarrow A^T \Gamma = \Gamma A \end{aligned}$$

То есть, да, от выбора базиса самосопряжённость не зависит.

⁷ Собственные векторы ненулевые по определению, поэтому можно говорить именно об ортогональности (“угол между векторами равен 90°”).

⁸ Матрица Грама меняется, потому что базис другой. Скалярное же произведение как билинейная функция (\cdot, \cdot) остаётся прежним.

1.1.3. The symms are not what they seem, или # 29.14(1, 2, 3)

Может ли самосопряжённое преобразование в каком-то базисе иметь матрицу A_1 , A_2 или A_3 , где матрицы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$$

Решение. “Может ли иметь матрицу” — то есть может ли быть такое скалярное произведение (\cdot, \cdot) , при котором матрица A_i была бы матрицей самосопряжённого преобразования.

Матрица A_1 симметричная — поэтому, да, в ортонормированном базисе это будет матрица самосопряжённого преобразования (8).

Рассмотрим матрицу A_2 . Её характеристическое уравнение:

$$\det(A_2 - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

Очевидно, нет действительных корней. Поэтому преобразование с матрицей A_2 не может быть самосопряжённым (1.1).

Характеристическое уравнение для матрицы A_3 :

$$\det(A_3 - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 14 \\ 6 & 13 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 18\lambda - 19 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = 19 \end{cases}$$

То есть у преобразования ϕ с матрицей A_3 точно есть базис из собственных векторов. Если получится найти ортонормированный базис из собственных векторов, то в этом базисе матрица ϕ будет диагональной, а потому преобразование ϕ будет самосопряжённым (как преобразование с симметричной матрицей в ортонормированном базисе).

Будут ли собственные векторы ортогональны или нет — очевидно, как раз зависит от выбора базиса (или, точнее, от выбора скалярного произведения... от того, как скалярное произведение считается для базисных векторов). Найдём собственные векторы:

$$A_3 \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} |_{\lambda=-1} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = (7, -3)^T$$

$$A_3 \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} |_{\lambda=19} \Rightarrow \mathbf{x}_2 = (1, 1)^T$$

Пусть матрица Грама искомого базиса равна $\Gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $a > 0$, $ac - b^2 > 0$. Тогда скалярное произведение собственных векторов будет равно

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_1^T \Gamma \mathbf{x}_2 = (7 \quad -3) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Хотим найти базис, такой что $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$. Приходим к условию:

$$7a + 7b - 3b - 3c = 7a + 4b - 3c = 0$$

Итого, объединяя это с условиями-неравенствами, связанными с положительной определённой матрицей Грама, сводим поиск базиса к поиску решения следующей системы с ограничениями:

$$\begin{cases} 7a + 4b - 3c = 0 \\ a > 0 \\ ac - b^2 > 0 \end{cases}$$

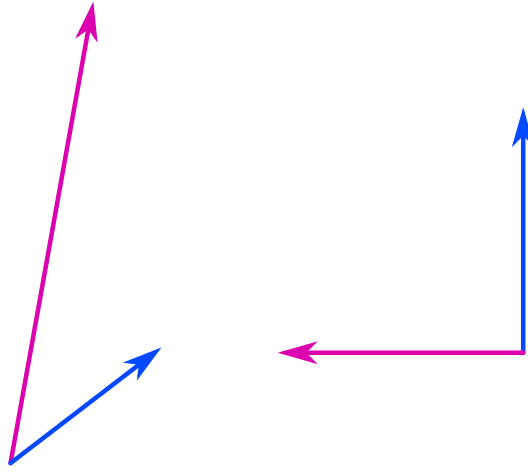


Рис. 3: Два вектора с координатами $(1, 0)$ и $(0, 1)$: не перпендикулярны в одном базисе (слева), но перпендикулярны в другом базисе (справа).

Равенство задаёт плоскость в пространстве (a, b, c) , первое неравенство — полупространство, второе — “внутренность” конуса. В качестве решения можно взять, например, следующее:

$$a = 3, \quad b = 0, \quad c = 7$$

То есть искомый базис — такой, матрица Грама которого равна, например, $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. (Вернее, искомое скалярное произведение — такое, которое в том же базисе, в котором дана матрица A_3 , имеет указанную матрицу Грама.)

Для поиска матрицы Грама базиса можно бы было идти другим путём. Матрица самосопряжённого преобразования удовлетворяет условию (7):

$$A_3^T \Gamma = \Gamma A_3$$

Если снова обозначить матрицу Грама как $\Gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $a > 0$, $ac - b^2 > 0$, то получаем

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 14 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5a + 6b & 5b + 6c \\ 14a + 13b & 14b + 13c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a + 6b & 14a + 13b \\ 5b + 6c & 14b + 13c \end{pmatrix}$$

Что равносильно

$$14a + 13b = 5b + 6c \Leftrightarrow 7a + 4b - 3c = 0$$

Получили то же, что и в прошлый раз (когда требовали ортогональность собственных векторов).

P.S. (“Объяснение”)

Итого, мы проверили на конкретном примере, что если на плоскости даны в координатах два неколлинеарных вектора, то можно найти базис, в котором векторы с такими координатами будут перпендикулярны (при фиксированном заранее выбранном скалярном произведении). Можно себе это представить как “преобразование плоскости”: если два вектора неколлинеарны, то можно немного “сжать-растянуть” (“повернуть”) всё так, чтоб стали перпендикулярны (3).

А можно было на задачу смотреть и так: векторы базиса фиксированы (“стрелки” (3) выбраны в самом начале задачи и больше не меняются), и мы просто “строим” по ним

скалярное произведение, то есть матрицу Грама Γ ... Интерпретация выходит не такой наглядной, но, тем не менее, можно было думать и так. Хотя формулировка задачи (“может ли самосопряжённое в каком-то базисе иметь матрицу”), скорее подразумевает, что скалярное произведение как раз уже выбрано (то есть что пространство евклидово, раз говорят о “самосопряжённом” преобразовании), а про базис как раз не понятно, есть ли подходящий. \square

1.2. Ортогональные преобразования

1.2.1. Кусочек теории, или Многоликая ортогональность

Преобразование ϕ евклидова пространства \mathcal{E} называется *ортогональным*, если оно сохраняет скалярное произведение. То есть если

$$(\phi(x), \phi(y)) = (x, y), \quad \forall x, y \in \mathcal{E} \quad (15)$$

Так как скалярное произведение, как симметричная билинейная форма, выражается через соответствующую квадратичную форму:

$$(x, y) = \frac{1}{2}((x + y, x + y) - (x, x) - (y, y))$$

$$(\phi(x), \phi(y)) = \frac{1}{2}((\phi(x) + \phi(y), \phi(x) + \phi(y)) - (\phi(x), \phi(x)) - (\phi(y), \phi(y)))$$

то сохранение скалярного произведения равносильно *сохранению длины*⁹. То есть преобразование ортогональное, если сохраняет длины:

$$(\phi(x), \phi(x)) = (x, x), \quad \forall x \in \mathcal{E}$$

Пусть в \mathcal{E} выбран базис $e = (e_1, \dots, e_n)$. Пусть матрица A — матрица ортогонального преобразования ϕ в этом базисе, а Γ — матрица Грама базиса. Тогда левую часть (15) можно расписать так:

$$(\phi(x), \phi(y)) = (Ax)^T \Gamma (Ay) = x^T \cdot A^T \Gamma A \cdot y$$

Правая часть (15):

$$(x, y) = x^T \Gamma y$$

Соотношение (15) выполнено при произвольных x и y , поэтому получаем следующий критерий ортогональности преобразования в матричном виде:

$$A^T \Gamma A = \Gamma$$

В ортонормированном базисе:

$$A^T A = E \quad (\text{ОНБ}) \quad (16)$$

То есть *матрица ортогонального преобразования в ортонормированном базисе ортогональна*.

⁹Сохранение длины из сохранения скалярного *следует* очевидным образом. В приведённом утверждении важно, что верно и *наоборот*: из сохранения длин следует и сохранение скалярного вообще.

Вернёмся к определению ортогонального преобразования (15). Ещё один вариант переписать то же самое — представив векторы \mathbf{x} и \mathbf{y} как линейные комбинации базисных. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — координатный столбец вектора \mathbf{x} , и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ — координатный столбец вектора \mathbf{y} . Тогда:

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n, y_1 \mathbf{e}_1 + \dots + y_n \mathbf{e}_n) \\&= x_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)y_1 + x_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)y_2 + \dots + x_n(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n)y_n \\&= \sum_{i,j=1}^n x_i(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)y_j\end{aligned}$$

В то же время:

$$\begin{aligned}(\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})) &= (\phi(x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n), \phi(y_1 \mathbf{e}_1 + \dots + y_n \mathbf{e}_n)) \\&= (x_1 \phi(\mathbf{e}_1) + \dots + x_n \phi(\mathbf{e}_n), y_1 \phi(\mathbf{e}_1) + \dots + y_n \phi(\mathbf{e}_n)) \\&= x_1(\phi(\mathbf{e}_1), \phi(\mathbf{e}_1))y_1 + x_1(\phi(\mathbf{e}_1), \phi(\mathbf{e}_2))y_2 + \dots + x_n(\phi(\mathbf{e}_n), \phi(\mathbf{e}_n))y_n \\&= \sum_{i,j=1}^n x_i(\phi(\mathbf{e}_i), \phi(\mathbf{e}_j))y_j\end{aligned}$$

Получаем, что

$$\sum_{i,j=1}^n x_i(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)y_j = \sum_{i,j=1}^n x_i(\phi(\mathbf{e}_i), \phi(\mathbf{e}_j))y_j, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$$

Это значит, что ортогональность преобразования ϕ равносильна также следующему условию:

$$\boxed{\begin{cases} (\phi(\mathbf{e}_i), \phi(\mathbf{e}_j)) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \\ i = 1 \dots n, \quad j = 1 \dots n \end{cases}} \quad (17)$$

(которое, в свою очередь, можно заметить, приводит к уже полученному ранее $A^T \Gamma A = \Gamma$). То есть сохранение ортогональным преобразованием скалярного произведения для *любой* пары векторов — это то же самое, что сохранение скалярного произведения *лишь* для $n(n-1)/2$ пар базисных векторов.

Отметим одно свойство собственных значений ортогонального преобразования ϕ . Пусть λ — собственное значение ϕ , и \mathbf{x} — соответствующий собственный вектор. Тогда

$$(\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})) = (\lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{x}) = \lambda^2 (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \stackrel{\phi \text{ ортогональное}}{=} (\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

То есть $\lambda^2 = 1$. Иными словами, *собственные значения ортогонального преобразования (если они для данного преобразования вообще существуют) по модулю обязательно равны единице*.

1.2.2. Просто задача на ортогональные, или # 29.47(1)

В евклидовом пространстве \mathcal{E} выбран ортонормированный базис. Дано преобразование ϕ , про которое известно, что оно переводит столбцы матрицы Q в столбцы матрицы P , где

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Является ли преобразование ϕ ортогональным?

Решение. Будем считать, что ϕ переводит первый столбец Q в первый столбец P , и второй столбец Q во второй столбец P (видимо, так предполагается по условию, хотя вообще это не важно, какой столбец в какой переходит).

Видно, что столбцы Q не пропорциональны (так же, как и столбцы P). Поэтому можно взять векторы x и y с координатными столбцами, совпадающими со столбцами матрицы Q , в качестве базиса в \mathcal{E} . Тогда столбцы P будут совпадать с координатными столбцами $\phi(x)$ и $\phi(y)$. И для проверки ортогональности ϕ достаточно проверить (17), то есть

$$\begin{cases} (\phi(x), \phi(x)) = (x, x) \\ (\phi(y), \phi(y)) = (y, y) \\ (\phi(x), \phi(y)) = (x, y) \end{cases}$$

Подставляя числа из матриц Q и P (и учитывая, что исходный базис ортонормированный), получаем:

$$\begin{cases} 16 + 49 = 65 = 64 + 1 \\ 4 + 1 = 5 = 4 + 1 \\ 8 + 7 = 15 = 16 - 1 \end{cases}$$

То есть, да, преобразование ϕ является ортогональным.

Можно бы было действовать по-другому. Пусть A — матрица преобразования ϕ . Преобразование будет ортогональным, если матрица A ортогональна (16) (исходный базис ОНБ). По условию сказано, что

$$\begin{cases} \phi : (4, 7)^T \mapsto (8, 1)^T \\ \phi : (2, 1)^T \mapsto (2, -1)^T \end{cases}$$

Это можно переписать как

$$\begin{cases} A \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Далее компактнее это можно записать просто как

$$AQ = P$$

Откуда получаем, что

$$A = PQ^{-1}$$

(Уже отметили, что столбцы Q не пропорциональны, поэтому точно существует Q^{-1}). Подставляя числа, находим матрицу преобразования:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Очевидно¹⁰, что $AA^T = E$, то есть, да, ϕ ортогонально.



¹⁰Матрица A из “косинусов и синусов”.