

Семинар 10

Алексеев Василий

14 + 18 апреля 2023

Содержание

| | | |
|----------|------------------------------------|----------|
| 1 | Euclid | 1 |
| 1.1 | Скалярное произведение | 1 |
| 1.2 | Матрица Грама | 2 |
| 1.3 | Модуль вектора | 3 |
| 1.4 | Угол между векторами | 3 |
| 1.5 | Унитарное пространство | 4 |
| 1.6 | Ортогональное дополнение | 5 |
| 2 | Задачи | 7 |
| 2.1 | # 25.7 | 7 |
| 2.2 | # 26.13(4) | 7 |

1. Euclid

1.1. Скалярное произведение

Вещественное линейное пространство \mathcal{E} называется *евклидовым*, если на множестве пар его векторов введена функция $(\cdot, \cdot): \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, называемая *скалярным произведением*, которая обладает следующими свойствами:

- Линейность по первому аргументу:

$$\begin{cases} (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) \\ (\alpha x, y) = \alpha(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

- Симметричность:

$$(x, y) = (y, x) \quad (2)$$

- Положительная определённость¹:

$$\begin{cases} (x, x) \geq 0 \\ (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x, x) > 0 \text{ при } x \neq 0 \quad (3)$$

(В первом и втором свойствах подразумевается, что они должны выполняться “для всего, что можно подставить”, “для любых”, то есть $\forall x_1, x_2, x, y \in \mathcal{E}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.) Скалярное произведение вида (x, x) из свойства (3) иногда называется *скалярным квадратом* вектора x .

Пример. В аналитической геометрии уже работали со скалярным произведением, определённым для векторов геометрического пространства по формуле:

$$(x, y) = |x||y| \cos \alpha$$

где $|x|$ и $|y|$ есть *модули векторов* x и y , а α означает *угол между векторами* x и y . Потом уже убедились, что такая операция обладает свойствами: симметричности (очевидно), положительной определённости (будет просто $|x|^2$), и линейности по первому аргументу (следует из линейности ортогональной проекции на направление: проекция суммы равна сумме проекций).

А теперь (в линейной алгебре), оказывается, что *любая функция, возвращающая по двум векторам число, если удовлетворяет свойствам (1, 2, 3), может быть названа скалярным произведением*. Возвращаясь к векторам геометрического пространства, несложно проверить, что и такая функция от двух векторов:

$$(x, y) = 2023|x||y| \cos \alpha$$

могла бы быть принята в качестве скалярного произведения. Однако, например, вот такая функция:

$$(x, y) = |[x, y]|$$

(то есть модуль векторного произведения) уже скалярным произведением быть не может. Потому что, например, не выполняется свойство (3): скалярный квадрат любого вектора будет нулём. \square

¹Представлены две немного разные, но равносильные формулировки.

Пример (# 25.1). Пусть \mathbf{n} есть фиксированный ненулевой вектор в геометрическом пространстве. Можно ли принять за скалярное произведение функцию $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_1 \equiv (\mathbf{n}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$? Нет, потому что, опять, скалярный квадрат вектора в таком случае $(\mathbf{x}, \mathbf{x})_1 = (\mathbf{n}, \mathbf{x}, \mathbf{x})$ равен нулю (объём параллелепипеда). Симметричность также “не работает”. Однако линейность по первому аргументу есть.

А можно ли определить скалярное произведение как $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_2 \equiv (\mathbf{x} + \mathbf{n}, \mathbf{y} + \mathbf{n})$? Снова нет, потому что, например при $\mathbf{x} = -\mathbf{n}$ получим $(\mathbf{x}, \mathbf{x})_2 = 0$. То есть нет положительной определённости. Линейности по первому аргументу также нет:

$$(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y})_2 = ((\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + \mathbf{n}, \mathbf{y} + \mathbf{n}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y} + \mathbf{n}) + (\mathbf{x}_2 + \mathbf{n}, \mathbf{y} + \mathbf{n})$$

(“не хватает” вектора \mathbf{n} как слагаемого в первом аргументе у скобки справа, поэтому, “очевидно”, в общем случае нелинейно — например, можно подставить $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{y} = \mathbf{n}$ и получить $((\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2), \mathbf{y})_2 = 6|\mathbf{n}|^2 \neq 8|\mathbf{n}|^2 = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y})_2 + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y})_2$.)

Рассмотрим следующую функцию — “кандидат” в скалярное: $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_3 \equiv (\mathbf{n}, \mathbf{x})(\mathbf{n}, \mathbf{y})$. Которая тоже не будет скалярным произведением, потому что при $\mathbf{x} \perp \mathbf{n}$ получается ноль: $(\mathbf{x}, \mathbf{x})_3 = (\mathbf{n}, \mathbf{x})(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = 0$.

Функция же $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_4 \equiv |\mathbf{n}|(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ удовлетворяет всем свойствам скалярного.

А вариант $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_5 \equiv |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$, отличающийся от “обычного скалярного” для векторов — направленных отрезков “всего лишь” тем, что нет косинуса угла, на самом деле вместе с этим “лишается” и свойства линейности. Например (при некоторых ненулевых \mathbf{x} и \mathbf{y}):

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}, \mathbf{y})_5 = |\mathbf{x} - \mathbf{x}||\mathbf{y}| = 0 \neq |\mathbf{x}||\mathbf{y}| + |-\mathbf{x}||\mathbf{y}| = (\mathbf{x}, \mathbf{y})_5 + (-\mathbf{x}, \mathbf{y})_5$$

□

1.2. Матрица Грама

Линейность по первому аргументу и симметричность (1, 2) по сути говорят о том, что *скалярное произведение — это симметричная билинейная функция*. Положительная же определённость (3) означает, что *соответствующая квадратичная функция положительно определена*. Поэтому все результаты, полученные ранее для симметричных билинейных и квадратичных функций переносятся и на скалярное произведение.

Так, скалярное тоже можно вычислять с помощью матрицы. Пусть в пространстве \mathcal{E} выбран базис $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Тогда любой вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ можно разложить по базису, а коэффициенты разложения собрать в столбец $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ (координатный столбец):

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{e}\mathbf{x}$$

Тогда, если при вычислении скалярного (\mathbf{x}, \mathbf{y}) подставить вместо векторов их разложения по базису:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n, y_1\mathbf{e}_1 + \dots + y_n\mathbf{e}_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)y_j = \mathbf{x}^T \Gamma \mathbf{y}$$

Матрица Γ билинейной функции (\cdot, \cdot) также может быть названа *матрицей Грама системы векторов* $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \dots & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & \dots & (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix}$$

Как матрица симметричной билинейной функции, матрица Γ , очевидно, симметрична: $\Gamma = \Gamma^T$. Помимо этого, так как Γ есть матрица положительно определённой квадратичной формы, то её определитель положителен $\det \Gamma > 0$. Более того, положительны все главные миноры: $\Delta_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ (критерий Сильвестра).

1.3. Модуль вектора

Определение 1.1. Модулем (длиной) $|\mathbf{x}|$ вектора \mathbf{x} называется число:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \quad (4)$$

Так как $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$, то правая часть (4) определена при любом \mathbf{x} . Наличие корня также “оправдывает” название “длина” в том смысле, что если, например, длины базисных векторов $|\mathbf{e}_i|$ измеряются в сантиметрах, то выражение (\mathbf{x}, \mathbf{x}) будет иметь размерность сантиметров в квадрате, и после извлечения из этого корня как раз получится “длина”.

С одной стороны, это очевидно, но, с другой, “неожиданно” и даже, может, “контринтуитивно”, поэтому явно отметим, что *длина вектора зависит от скалярного произведения*. В линейном пространстве может быть много способов выбрать скалярное произведение. Однако евклидовым оно становится тогда, когда этот *выбор* каким-то образом сделан. Только после этого у каждого вектора “появляется” длина. При разных выборах скалярного и длина одного и того же вектора может быть разной.

Пока ничего “неожиданного” в определении вектора больше не видно. Но мы ещё вернёмся к этому понятию...

1.4. Угол между векторами

Определение 1.2. Углом между ненулевыми векторами \mathbf{x} и \mathbf{y} называется угол α (лежащий в пределах от 0 до π), такой что:

$$\cos \alpha = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} \quad (5)$$

Почему правая часть (5) в самом деле может быть принята за косинус угла? То есть почему верно, что:

$$-1 \leq \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} \leq 1 \quad \leftrightarrow \quad \left| \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} \right| \leq 1$$

Если $\mathbf{x} \parallel \mathbf{y}$, то $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. И поэтому

$$\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} = \frac{\alpha}{|\alpha|} \in \{-1, 1\}$$

Если же $\mathbf{x} \nparallel \mathbf{y}$, то систему векторов $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ можно принять в качестве базиса на плоскости $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (плоскость, как раз таки натянутая на пару векторов \mathbf{x} и \mathbf{y}). Матрица Грама $\Gamma_{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}}$ этого базиса:

$$\Gamma_{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}} = \begin{pmatrix} (\mathbf{x}, \mathbf{x}) & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ (\mathbf{y}, \mathbf{x}) & (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

как и матрица Грама любого базиса, положительно определена. И поэтому, в частности:

$$0 < \det \Gamma_{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}} = (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - (\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2 |\mathbf{y}|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2$$

Переносим одно из двух слагаемых “налево” и извлекая квадрат, получаем:

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| < |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \rightarrow \left| \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} \right| < 1$$

Поэтому формула (5) в самом деле может служить определением косинуса угла.

1.5. Унитарное пространство

Этому в конспектах (почти) никогда не уделяли особого внимания, но линейные пространства на самом деле могут быть не только *вещественными* (те, с которыми всегда работали), но и *комплексными*. (И ещё разными, кроме вещественных и комплексных.) Разница между ними в операции умножения вектора на число (одна из двух операций, помимо сложения, которая лежит в основе определения понятия *линейное пространство*): что такое эти “числа”, на которые можно умножать векторы. Так вот, если разрешается умножать векторы на комплексные числа, то пространство и называется комплексным².

Приведём же определение скалярного произведения для случая *комплексного линейного пространства*. (Далее идёт почти “Ctrl-C” – “Ctrl-V” определения скалярного произведения из самого начала конспекта. Чтоб не играть в “найди 10 отличий”, ключевые места “подсвечены”).

Комплексное линейное пространство \mathcal{U} называется **унитарным**, если на множестве пар его векторов введена функция $(\cdot, \cdot) : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$, называемая *скалярным произведением*, которая обладает следующими свойствами:

- Линейность по первому аргументу:

$$\begin{cases} (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) \\ (\beta x, y) = \beta(x, y) \end{cases} \quad (6)$$

- “Симметричность” (Эрмитовость):

$$(x, y) = \overline{(y, x)} \quad (7)$$

- Положительная определённость:

$$\begin{cases} (x, x) \geq 0 \\ (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x, x) > 0 \text{ при } x \neq 0 \quad (8)$$

(В первом и втором свойствах подразумевается, что они должны выполняться “для всего, что можно подставить”, “для любых”, то есть $\forall x_1, x_2, x, y \in \mathcal{U}, \forall \beta \in \mathbb{C}$.)

В свойстве про положительную определённость (8), хоть ничего по сравнению с (3) как бы и не поменялось, но эта неизменность как раз и примечательна. То есть по сути свойство (8) неявно утверждает, что *скалярный квадрат вектора комплексного пространства всегда вещественен* (и при этом, да, ещё больше нуля).

Основное же, что явно поменялось — это свойство (7) про “симметричность”. Почему “понадобилось” комплексное сопряжение при перестановке аргументов?

Пример. Пусть есть вектор $x \in \mathcal{U}$, $|x| > 0$. Рассмотрим вектор βx , $\beta \equiv (1 + i)$. Чему равна длина $|\beta x|$ вектора βx ?

Посчитаем её “по-старому”, пользуясь свойством (2):

$$|\beta x|^2 = (\beta x, \beta x) \stackrel{(1)}{=} \beta(x, \beta x) \stackrel{(2)}{=} \beta(\beta x, x) \stackrel{(1)}{=} \beta^2(x, x)$$

²Вообще в качестве “чисел” может выступать произвольное *поле*. Множество элементов с двумя операциями: сложения и умножения — каждая из которых удовлетворяет ряду аксиом: ассоциативность, коммутативность, существование *нейтрального* элемента (“ноль” для сложения и “единица” для умножения) и существование для каждого элемента *обратного* (для сложения такой ещё называется *противоположным*, а по умножению наличие обратного на самом деле требуется не для всех вообще элементов пространства, а для всех кроме нуля). Помимо перечисленных аксиом, операции ещё должны обладать свойством *дистрибутивности* (“раскрытие скобок” — “связь” между сложением и умножением).

Но $\beta^2 = (1 + i)^2 = 2i$ — мнимое число! А длина вектора не может быть мнимой (на то она и “длина”). Теперь при вычислении $|\beta x|$ применим правило (7):

$$|\beta x|^2 = (\beta x, \beta x) \stackrel{(6)}{=} \beta(x, \beta x) \stackrel{(7)}{=} \beta(\overline{\beta x}, x) \stackrel{(6)}{=} \beta \overline{\beta(x, x)} = \beta \overline{\beta} \cdot \overline{(x, x)} \stackrel{(7)}{=} \beta \overline{\beta}(x, x)$$

И теперь с длиной уже “всё в порядке”: $\beta \overline{\beta} \in \mathbb{R}$. □

Упражнение. Будет ли скалярное произведение в комплексном линейном пространстве линейным по второму аргументу?

1.6. Ортогональное дополнение

Определение 1.3. Пусть есть подпространство L евклидова пространства \mathcal{E} . *Ортогональным дополнением L* называется множество векторов L^\perp , перпендикулярных всем векторам L :

$$L^\perp = \{x \in \mathcal{E} \mid (x, y) = 0, \forall y \in L\}$$

Несложно убедиться, что *ортогональное дополнение является линейным подпространством*. В чём убедиться сложнее, так это в том, что...

Утверждение 1.1. Пусть есть подпространство L евклидова пространства \mathcal{E} . Тогда

$$L \oplus L^\perp = \mathcal{E}$$

То есть сумма подпространства и его ортогонального дополнения, во-первых, прямая и, во-вторых, даёт всё пространство. Почему?

Выберем базис в L . Пусть это система векторов $p = \{p_1, \dots, p_l\}$, $l \equiv \dim L$, $1 \leq l < \dim \mathcal{E}$. (С нулевым L “всё и так понятно”: для такого ортогональным дополнением будет всё \mathcal{E} . Если же $L = \mathcal{E}$, то его ортогональным дополнением будет нулевое подпространство.) Ортогонализируем её — получим векторы $p' = \{p'_1, \dots, p'_l\}$, которые попарно ортогональны и по длине единичные. То есть соответствующая матрица Грама:

$$\Gamma_{p'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times l}$$

Достроим p' до базиса в \mathcal{E} : выберем “как-нибудь” оставшиеся $\dim \mathcal{E} - l \equiv r \geq 1$ векторов $q = \{q_1, \dots, q_r\}$, так чтобы система $p' \cup q$ была бы базисом в \mathcal{E} (должно быть очевидно, но отметим, что нумерация векторов в базисе такая: сначала векторы из p' по порядку, за ними векторы из q по порядку). Матрица Грама такого базиса:

$$\Gamma_{p' \cup q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(l+r) \times (l+r)}$$

то есть пока про неё вообще сложно сказать что-то кроме того, что первые l векторов (которые p') ортонормированы. Ортонормируем также и векторы q : сначала вычтем ортогональные проекции на векторы p' , а потом ещё и “друг с другом” их повычитаем и

отнормируем (“стандартная ортогонализация” системы векторов q). Получим векторы $q' = \{q'_1, \dots, q'_r\}$, и базис в \mathcal{E} тогда будет $p' \cup q'$, матрица Грама которого:

$$\Gamma_{p' \cup q'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(l+r) \times (l+r)}$$

“Где же” L^\perp ? Убедимся, что $L^\perp = \mathcal{L}(q'_1, \dots, q'_r)$. С одной стороны, очевидно включение: $\mathcal{L}(q'_1, \dots, q'_r) \subseteq L^\perp$ (любой вектор из линейной оболочки векторов q' ортогонален всем векторам L , потому что ортогонален базисным p'). С другой стороны... Пусть вектор $x \in L^\perp$. Разложим его по базису $p' \cup q'$:

$$x = \alpha_1 p'_1 + \dots + \alpha_l p'_l + \beta_1 q'_1 + \dots + \beta_r q'_r$$

Что значит, что $x \in L^\perp$? Это, в частности, значит, что:

$$(x, p'_1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

Аналогично можно показать и $\alpha_2 = \dots = \alpha_l = 0$. А это означает, что $x \in \mathcal{L}(q'_1, \dots, q'_r)$, то есть выполнено включение $L^\perp \subseteq \mathcal{L}(q'_1, \dots, q'_r)$.

Итого, $L^\perp = \mathcal{L}(q'_1, \dots, q'_r)$.

А по построению базисов p' и q' очевидно, что сумма

$$\mathcal{L}(p'_1, \dots, p'_l) + \mathcal{L}(q'_1, \dots, q'_r) = L + L^\perp$$

прямая и даёт всё пространство \mathcal{E} (объединение базисов $p' \cup q'$ есть базис в \mathcal{E}).

Определение 1.4. Пусть есть подпространство L евклидова пространства \mathcal{E} . Тогда $L \oplus L^\perp = \mathcal{E}$. Поэтому любой вектор $x \in \mathcal{E}$ может быть представлен как сумма:

$$x = x' + x'', \quad x' \in L, \quad x'' \in L^\perp$$

Слагаемое x' называется *ортогональной проекцией вектора x на подпространство L* .

2. Задачи

2.1. # 25.7

В линейном пространстве функций, непрерывных на отрезке $C[-1, 1]$, произвольной паре функций f и g сопоставлено число по правилу:

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$$

Надо доказать, что этим определено скалярное произведение.

Решение. Фактически надо просто проверить все свойства (1, 2, 3). Так, линейность:

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2, g) &= \int_{-1}^1 (f_1 + f_2)(t)g(t)dt \\ &= \int_{-1}^1 (f_1(t) + f_2(t))g(t)dt = \int_{-1}^1 f_1(t)g(t)dt + \int_{-1}^1 f_2(t)g(t)dt = (f_1, g) + (f_2, g)\end{aligned}\quad (9)$$

Аналогично можно показать, что $(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Далее, симметричность:

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt = \int_{-1}^1 g(t)f(t)dt = (g, f)$$

Осталось последнее — положительная определённость:

$$(f, f) = \int_{-1}^1 f^2(t)dt \geq 0$$

но почему (f, f) обязательно больше нуля при $f \neq 0$? Ноль в пространстве $C[-1, 1]$ есть, очевидно, функция — константный ноль. Раз $f \neq 0$, то найдётся *хотя бы одна* точка $x_0 \in [-1, 1]$, такая что $f(x_0) \neq 0$. Пусть, для определённости, $f(x_0) > 0$. (Но пока всё ещё не понятно, почему $(f, f) > 0$.) Так как функция f непрерывна, то вместе с x_0 функция f будет отлична от нуля и в *некоторой окрестности*³ точки x_0 (отлична от нуля и того же знака, что и в x_0), то есть $\exists \varepsilon > 0$: $f(x) > 0$ при $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ (1). За счёт этой окрестности интеграл в выражении (f, f) и будет больше нуля:

$$(f, f) = \int_{-1}^1 f^2(t)dt \geq \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} f^2(t)dt > 0$$

□

2.2. # 26.13(4)

Подпространство L евклидова пространства \mathcal{E} есть линейная оболочка векторов:

$$L = \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3), \quad \begin{cases} \mathbf{a}_1 = (4, 3, -3, 2)^T \\ \mathbf{a}_2 = (-1, 3, 2, -3)^T \\ \mathbf{a}_3 = (2, 9, 1, -4)^T \end{cases}$$

где координаты $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$ векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathcal{E}$ даны в некотором ортонормированном базисе.

Надо найти ортогональное дополнение L^\perp .

³Если уж быть совсем аккуратным, то надо бы было ещё сказать, что при $x_0 = 1$ или $x_0 = -1$ (граничные точки отрезка), окрестность знакопостоянства функции около точки x_0 была бы односторонней.

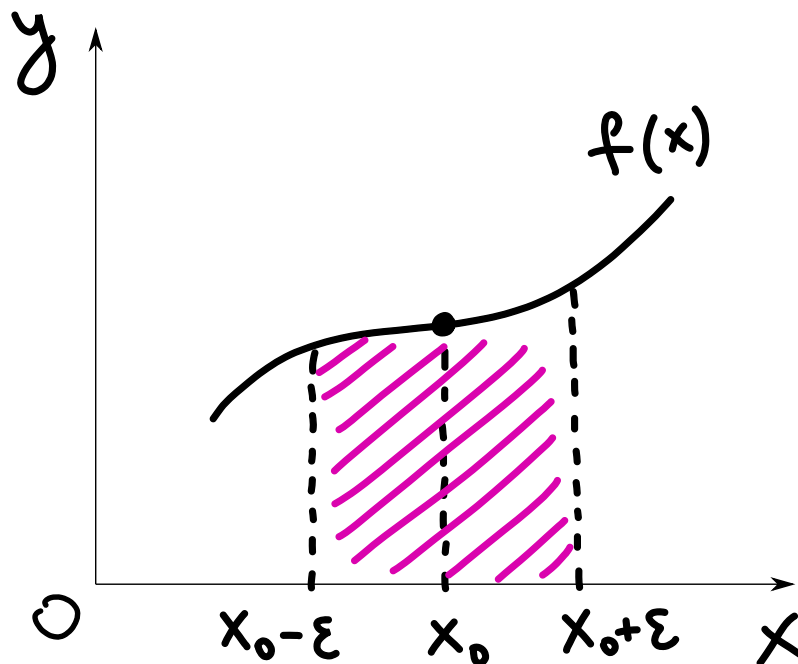


Рис. 1: Если непрерывная функция f больше нуля в точке x_0 , то она больше нуля и в некоторой её окрестности.

Решение. “Заметим”, что $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$ (и при этом \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 очевидно линейно независимы), поэтому в качестве базиса в L можно выбрать систему векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$.

Далее, найти ортогональное дополнение L^\perp — значит найти все вектора \mathbf{x} , такие что

$$\begin{cases} (\mathbf{x}, \mathbf{a}_1) = 0 \\ (\mathbf{x}, \mathbf{a}_2) = 0 \end{cases} \stackrel{\text{ОНБ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \mathbf{a}_1^T \mathbf{x} = 0 \\ \mathbf{a}_2^T \mathbf{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решая однородную систему, можем получить общее решение в виде:

$$\mathbf{x}_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} t_2, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

где векторы $\mathbf{b}_1 = (1, 0, 2, 1)^T$ и $\mathbf{b}_2 = (3, -1, 3, 0)^T$ задают базис в пространстве решений.

И тогда ортогональное дополнение можно представить как $L^\perp = \mathcal{L}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$. □