Семинар 3

Алексеев Василий

15 + 21 сентября 2020

Содержание

1. Замена базиса и системы координат

Будем обозначать векторы базиса в виде строки:

$$\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$$

для случая базиса в $\mathbb{R}^3$. Аналогично и для базисов в $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$.

При заданном базисе $\boldsymbol{e}$ любой вектор пространства $\boldsymbol{x}$ однозначно определяется его компонентами в базисе:

$$\boldsymbol{x} = x_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + x_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + x_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \Rightarrow \boldsymbol{x} \leftrightarrow (x_1, x_2, x_3)^T$$

поэтому, говоря о векторе, часто имеют в виду его компоненты в базисе (то понятия вектора как направленного отрезка и вектора как столбца из чисел взаимозаменяемы). Но это при фиксированном базисе.

В пространстве существует больше одного базиса: любая тройка некомпланарных векторов в $\mathbb{R}^3$ образует базис. Встаёт вопрос о том, как связаны компоненты одного и того же вектора в разных базисах[1]

Пусть есть два базиса: $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$. Тогда векторы любого базиса можно разложить по системе векторов другого базиса. Разложим, например, векторы $\boldsymbol{e}$ по $\boldsymbol{e}'$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = a_{11} \cdot \boldsymbol{e}'_1 + a_{12} \cdot \boldsymbol{e}'_2 + a_{13} \cdot \boldsymbol{e}'_3 \\ \boldsymbol{e}_2 = a_{21} \cdot \boldsymbol{e}'_1 + a_{22} \cdot \boldsymbol{e}'_2 + a_{23} \cdot \boldsymbol{e}'_3 \\ \boldsymbol{e}_3 = a_{31} \cdot \boldsymbol{e}'_1 + a_{32} \cdot \boldsymbol{e}'_2 + a_{33} \cdot \boldsymbol{e}'_3 \end{cases} \tag{1}$$

Запись можно представить более компактно[2]:

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}' S$$

где S называется *матрицей перехода* от базиса $\boldsymbol{e}'$ к базису $\boldsymbol{e}$:

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

во введённых ранее обозначениях (1).

Посмотрим теперь, как выражаются компоненты некоторого вектора $\boldsymbol{x}$ в одном базисе через его же компоненты, но в другом базисе. Имеем

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{e}'\boldsymbol{x}_{e'} \tag{2}$$

где $\boldsymbol{x}$ — вектор как направленный отрезок, $\boldsymbol{x}_e$ — вектор-столбец, соответствующий $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{x}_{e'}$ — вектор-столбец, соответствующий $\boldsymbol{x}'$ в базисе $\boldsymbol{e}'$.

Теперь воспользуемся тем, что нам известно представление базиса $\boldsymbol{e}$ через вектора базиса $\boldsymbol{e}'$:

$$\boldsymbol{e}\boldsymbol{x}_e = \left(e' S\right)\boldsymbol{x}_e \overset{(2)}{=} \boldsymbol{e}'\boldsymbol{x}_{e'}$$

[1] В приложениях бывает нужно переводить координаты радиусов-векторов точек из одной системы координат в другую.

[2] Под результатом умножения строки из векторов $\boldsymbol{e}'$ на матрицу из чисел S будем иметь в виду такую строку $\boldsymbol{e}$ из векторов, где каждый элемент равен линейной комбинации векторов умножаемой строки $\boldsymbol{e}'$ с коэффициентами, равными элементам соответственного столбца матрицы S. То есть по правилу умножения числовых матриц.

Так как умножение матриц ассоциативно, а также дистрибутивно относительно матричного сложения, мы можем перенести $\boldsymbol{e}'\boldsymbol{x}_{e'}$ влево и перегруппировать слагаемые:

$$\boldsymbol{e}' \cdot \left(S\boldsymbol{x}_e - \boldsymbol{x}_{e'}\right) = \boldsymbol{0}$$

Из линейной независимости системы векторов $\boldsymbol{e}'$ получаем:

$$S\boldsymbol{x}_e - \boldsymbol{x}_{e'} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x}_{e'} = S\boldsymbol{x}_e$$

Итак, в двух базисах компоненты векторов связаны так:

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}'S \\ \boldsymbol{x}_{e'} = S\boldsymbol{x}_e \end{cases}} \tag{3}$$

При этом, при переходе, наоборот, от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{e}'$ можно написать аналогичное соотношение, но уже с другой матрицей перехода, которую обозначим за S':

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S' \\ \boldsymbol{x}_e = S'\boldsymbol{x}_{e'} \end{cases}$$

Последний вопрос: как изменяются радиусы-векторы точек при смене системы координат? Очевидно,

$$\boldsymbol{r}_O(A) = \boldsymbol{r}_O(O') + \boldsymbol{r}_{O'}(A)$$

где $\boldsymbol{r}_O(A)$ — радиус-вектор точки A в системе $O; \boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{r}_{O'}(A)$ — радиус-вектор точки A в системе $O'; \boldsymbol{e}'$, и $\boldsymbol{r}_O(O')$ — радиус-вектор, определяющий положение начала отсчёта O' в системе $O; \boldsymbol{e}$. В системе $O'; \boldsymbol{e}'$ известно координатное представление вектора $\boldsymbol{r}_{O'}(A)$. Для других же двух векторов $\boldsymbol{r}_O(A)$ и $\boldsymbol{r}_O(O')$ известны компоненты в базисе $O; \boldsymbol{e}$. Как записать соотношение выше через вектор-столбцы компонент векторов в базисах? Для этого надо все векторы представить в одном базисе. Из соотношения (3) мы можем выразить вектор $\boldsymbol{r}_{O'}(A)$ в базисе $\boldsymbol{e}$:

$$\boldsymbol{r}_{O'}(A) = S'\boldsymbol{x}_{O'}(A) = \boldsymbol{x}_O(A)$$

где $\boldsymbol{x}_{O'}(A)$ — компоненты радиус-вектора точки A в $O'; \boldsymbol{e}'$ и $\boldsymbol{x}_O(A)$ — компоненты *того же* вектора в системе $O; \boldsymbol{e}$. Итого, получаем соотношение для компонент радиусов-векторов точки в разных системах координат:

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S' \\ \boldsymbol{x}_O(A) = \boldsymbol{x}_O(O') + S'\boldsymbol{x}_{O'}(A) \end{cases}} \tag{4}$$

то есть для нахождения координат точки в одной системе по её координатам в другой системе координат надо знать связь между векторами базисов и положение начала координат одной системы относительно другой.

Задача (4.5). *Есть две системы координат: $O; \boldsymbol{e}$ и $O'; \boldsymbol{e}'$. Координаты произвольной точки в первой системе обозначаются за (x, y), координаты той же точки, но во второй системе координат — (x', y'). Известна связь между (x, y) и (x', y'):*

$$\begin{cases} x = 2x' - y' + 5 \\ y = 3x' + y' + 2 \end{cases}$$

Требуется найти

- *Выражение* (x', y') *через* (x, y).
- *Координаты точки* O *и компоненты векторов* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ *в системе* $O'; \boldsymbol{e}'$.
- *Координаты точки* O' *и компоненты векторов* $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ *в системе* $O; \boldsymbol{e}$.

Решение. Перепишем связь между координатами точки в разных системах в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}^{S'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Перепишем как

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-5 \\ y-2 \end{pmatrix}$$

И решим получивщуюся систему относительно (x', y') с помощью метода Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$$

$$\Delta_{x'} = \begin{vmatrix} x-5 & -1 \\ y-2 & 1 \end{vmatrix} = x + y - 7$$

$$\Delta_{y'} = \begin{vmatrix} 2 & x-5 \\ 3 & y-2 \end{vmatrix} = -3x + 2y + 11$$

И сами координаты:

$$x' = \frac{\Delta_{x'}}{\Delta} = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y - \frac{7}{5}$$

$$y' = \frac{\Delta_{y'}}{\Delta} = -\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{11}{5}$$

Или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ -3/5 & 2/5 \end{pmatrix}}^{S} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7/5 \\ 11/5 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Вспоминая (4) или просто подставляя нулевые векторы в соотношения для координат, получаем положения начал отсчёта:

- Нулевой вектор в (5) $\Rightarrow \boldsymbol{x}_O(O') = (5, 2)^T$
- Нулевой вектор в (6) $\Rightarrow \boldsymbol{x}_{O'}(O) = (-\frac{7}{5}, \frac{11}{5})^T$

Вспоминая, что столбцы матриц S и S' есть компоненты векторов одного базиса в другом, или просто умножая матрицы S и S' на векторы $(1, 0)^T$ и $(0, 1)^T$, получаем компоненты одних базисных векторов в другом базисе:

- Столбцы S $(\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}' S)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{5}\boldsymbol{e}'_1 - \frac{3}{5}\boldsymbol{e}'_2 \\ \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{5}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{2}{5}\boldsymbol{e}'_2 \end{cases}$$

- Столбцы S' ($\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S'$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \end{cases}$$

$\square$

Задача (4.19)**.** *Треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точка M — точка пересечения медиан грани $A_1B_1C_1$. Требуется, зная координаты точки x', y', z') в системе $A_1; \overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1M}$, найти её координаты (x, y, z) в системе $A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}$.*

Решение. Что нам надо найти? Вспоминая формулы (3) или (4), получаем, что если векторы базиса связаны соотношением $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S'$, то компоненты векторов связаны соотношением $\boldsymbol{x} = S'\boldsymbol{x}'$ и координаты точек связаны соотношением $\boldsymbol{x}_O = \boldsymbol{x}_O(O') + S'\boldsymbol{x}_{O'}$. Таким образом, чтобы решить задачу, надо найти матрицу S', столбцы которой — компоненты базиса $\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1M}$ в $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}$ и координаты начала отсчёта A_1 в системе с началом отсчёта A.

Базисные векторы упорядочены. Разложим их по порядку:

$$\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3$$

$$\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$$

$$\overrightarrow{A_1M} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1C_1}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)$$

Итого,

$$(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Положение A_1 в системе $A; \boldsymbol{e}$:

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$$

Поэтому связь между координатами точек в разных системах:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}' + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

2. Скалярное произведение

Определение 2.1. Скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ определяется следующим образом:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \equiv |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi \tag{7}$$

где $|\boldsymbol{a}|$ и $|\boldsymbol{b}|$ — модули векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а ϕ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (не превосходящий π). В случае, если хотя бы один из пары векторов нулевой, скалярное произведение этих векторов полагается равным нулю.

Отметим несколько свойств скалярного произведения:

- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ — симметричность

- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|^2$ — скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины
- О равенстве нулю скалярного произведения:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = 0 \text{ или } \boldsymbol{b} = 0 \text{ или } \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$$

- Линейность по первому аргументу:

$$(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \beta(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

Первые три свойства следуют из определения. Докажем последнее свойство. Начнём с того, что при заданном направлении $\boldsymbol{l}$ любой вектор раскладывается в сумму двух:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{\parallel} + \boldsymbol{r}_{\perp}$$

где $\boldsymbol{r}_{\parallel}$ — вектор, параллельный $\boldsymbol{l}$, и $\boldsymbol{r}_{\perp}$ — вектор, перпендикулярный $\boldsymbol{l}$. Компонента $\boldsymbol{r}_{\parallel}$ называется *ортогональной векторной проекцией* вектора $\boldsymbol{r}$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{l}$, и может обозначаться так:

$$\pi_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}_{\parallel}$$

Спроецируем теперь вектор $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{c}$:

$$\pi_{\boldsymbol{c}}(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = |\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi$$

где $\pi_{\boldsymbol{c}}(\cdot)$ — скалярная проекция на направление вектора $\boldsymbol{c}$, ϕ — угол между вектором $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ и вектором $\boldsymbol{c}$. Но проекция вектора, являющегося суммой нескольких векторов, равна сумме проекций этих векторов:

$$\pi_{\boldsymbol{c}}(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = \pi_{\boldsymbol{c}}(\alpha\boldsymbol{a}) + \pi_{\boldsymbol{c}}(\beta\boldsymbol{b})$$

поэтому

$$|\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi = |\alpha\boldsymbol{a}| \cdot \cos\phi_1 + |\beta\boldsymbol{b}| \cdot \cos\phi_2$$

где ϕ_1 и ϕ_2 — углы, которые образуют векторы $\alpha\boldsymbol{a}$ и $\beta\boldsymbol{b}$ с вектором $\boldsymbol{c}$. Умножая обе части последнего равенства на модуль вектора $\boldsymbol{c}$, получаем то, что хотели доказать (при этом числовые множители можно вынести за знак модуля):

$$(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \beta(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

□

Задача (2.21)**.** *Длины базисных векторов* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ *равны соответственно* $3, \sqrt{2}$ *и* 4. *Углы между векторами* $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \angle(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 45°$, $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = 60°$.

Надо найти длины сторон и углы параллелограмма, построенного на векторах с координатами $(1, -3, 0)$ *и* $(-1, 2, 1)$ *в указанном базисе.*

Решение. Обозначим данные нам векторы за $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = (1, -3, 0) \\ \boldsymbol{b} = (-1, 2, 1) \end{cases}$$

Базис не ортонормированный, поэтому скалярные произведения надо будет считать “по-честному”.

Модули вектора $\boldsymbol{a}$:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})} = \sqrt{(\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2)} = \sqrt{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1) - 6(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) + 9(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2)} = \sqrt{9 - 18 + 18} = 3$$

Аналогично для вектора $\boldsymbol{b}$:

$$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})} = \sqrt{(-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)(-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)} = \ldots = 5$$

Косинус угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|} = \frac{(\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2)\cdot(-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)}{3\cdot 5} = \ldots = -\frac{12}{15} = -\frac{4}{5}$$

И острый угол параллелограмма можно найти как $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$. □

В случае же **ортонормированного** базиса формулы с применением скалярных произведений упрощаются:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

$$\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}$$

Задача (2.24). *Даны два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, причём $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$. Чему равна ортогональная проекция $\boldsymbol{b}$ на направление, определяемое вектором $\boldsymbol{a}$?*

Решение.

$$\pi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

где левый множитель есть скалярная проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на направление $\boldsymbol{a}$, а правый — единичный вектор в направлении $\boldsymbol{a}$. Выражение можно записать по-другому, если домножить числитель и знаменатель на $|\boldsymbol{a}|$:

$$\pi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}) = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}$$

□