Семинар 8

Алексеев Василий

27 октября 2020

Содержание

1. Касательная к кривой второго порядка

Для эллипса, заданного в канонической системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

уравнение касательной в точке (x_0, y_0) эллипса выглядит так

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1}$$

Для гиперболы, заданной в канонической системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

уравнение касательной в точке (x_0, y_0) гиперболы выглядит так

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1}$$

И для параболы, заданной в канонической системе координат уравнением

$$y^2 = 2px$$

уравнение касательной в точке (x_0, y_0) параболы выглядит так

$$\boxed{yy_0 = p(x + x_0)}$$

1.1. # 8.2(3)

Составить уравнение касательной к кривой

$$xy = k$$

Решение. Можно продифференцировать обе части уравнения кривой в некоторой точке (x_0, y_0), принадлежащей кривой:

$$d(xy)\,\Big|_{(x_0,y_0)} = d(k)$$

Откуда

$$x_0 dy + y_0 dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y_0}{x_0}$$

То есть тангенс угла наклона касательной к кривой в точке (x_0, y_0) равен $-\dfrac{y_0}{x_0}$. С другой стороны, тот же тангенс для касательной можно посчитать просто как отношение приращений $(y - y_0)$ и $(x - x_0)$ для некоторой точки (x, y) касательной:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{y_0}{x_0}$$

Проводя упрощения и учитывая, что для исходной точки выполняется $x_0 y_0 = k$, получаем

$$y_0 x + x_0 y = 2k$$

□

1.2. # 8.9(1)

Какие точки на кривой второго порядка

$$\frac{27}{28}x^2 + \frac{9}{7}y^2 = 1$$

удалены на наименьшее расстояние от прямой

$$l:\ 3x + 4y + 5 = 0$$

Найти это расстояние.

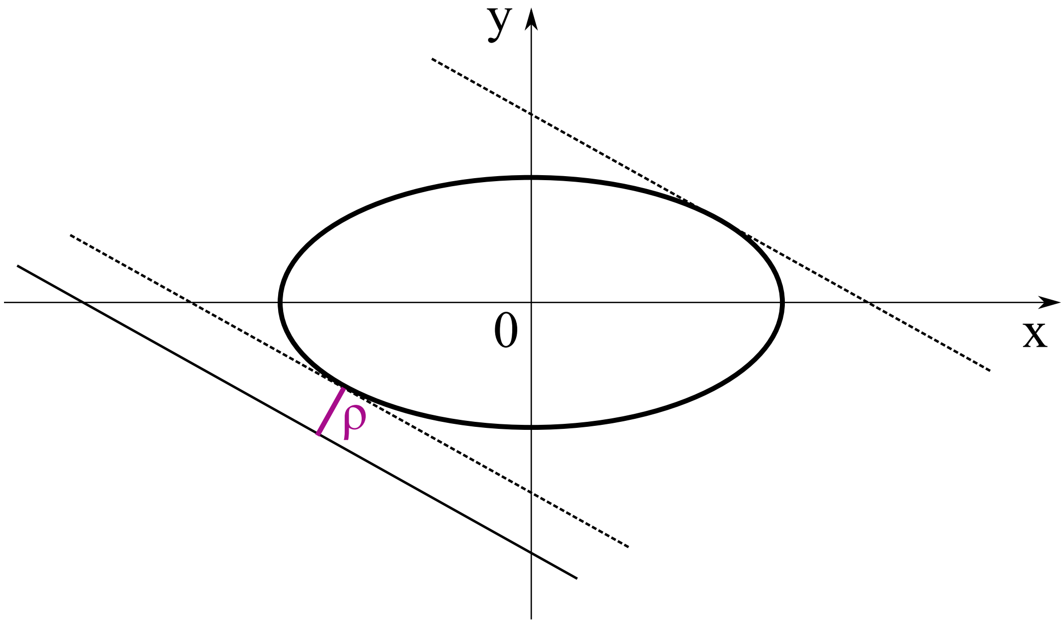

Рис. 1: Прямая l не пересекает эллипс.

Решение. Из рисунка (1) видно, что прямая l и эллипс не пересекаются, поэтому минимальное расстояние не нулевое. Также из рисунка понятно, что расстояние от точки (x_0, y_0) эллипса до прямой l будет минимальным в том случае, когда касательная к эллипсу в точке (x_0, y_0) параллельна прямой l[1]. Но таких точек, очевидно, у эллипса две (при этом если расстояние от одной из них до прямой l будет минимальным, то от другой, наоборот, расстояние будет максимальным среди точек эллипса).

Уравнение касательной к эллипсу в точке (x_0, y_0):

$$\frac{27}{28}x_0x + \frac{9}{7}y_0y = 1$$

Сравнивая уравнение касательной с уравнением прямой, получаем условие параллельности касательной и прямой:

$$\frac{27/28x_0}{3} = \frac{9/7y_0}{4}$$

Откуда получаем

$$x_0 = y_0$$

[1]Более строгое доказательство этого положения связано с тем, что эллипс выпуклый (отрезок, соединяющий любые две точки эллипса, лежит внутри эллипса) и что угол наклона касательной от точки к точке эллипса меняется непрерывно (то есть нет “пропусков” углов).

При этом (x_0, y_0) — точка эллипса:

$$\frac{27}{28}x_0^2 + \frac{9}{7}y_0^2 = 1$$

В итоге

$$\begin{cases} x_0 = \pm\frac{2}{3} \\ y_0 = \pm\frac{2}{3} \end{cases}$$

Из рисунка (1) видно, что подходит точка $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Расстояние от найденной точки до прямой l в канонической системе координат эллипса (которая прямоугольная) вычисляется по формуле:

$$\rho\big((x_0, y_0), l\big) = \frac{\left|3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 5\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \ldots = \frac{1}{15}$$

□

1.3. # 8.24(1)

Составить уравнения касательных к эллипсу, заданному в канонической системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$$

проходящих через точку $(-6, 0)$.

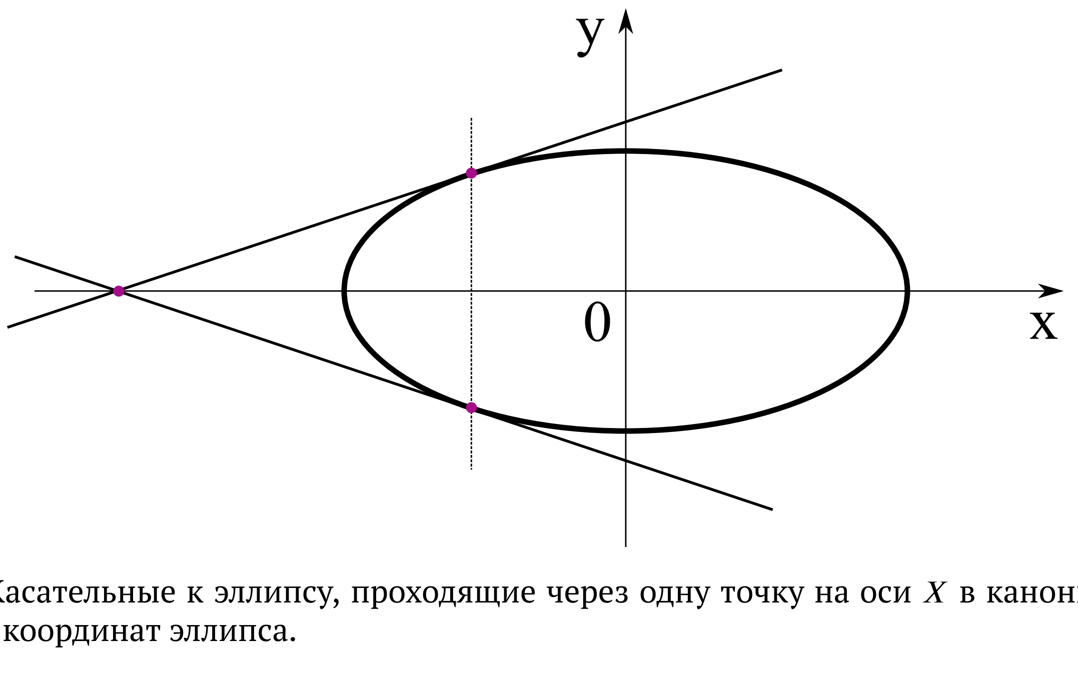

Рис. 2: Касательные к эллипсу, проходящие через одну точку на оси X в канонической системе координат эллипса.

Решение. Уравнение касательной к эллипсу в точке (x_0, y_0), которая проходит через точку $(-6, 0)$ (2):

$$\frac{-6x_0}{18} + 0 = 1 \Rightarrow x_0 = -3$$

Подставляя найденную координату x_0 в уравнение эллипса, находим координаты y_0:

$$\frac{(-3)^2}{18} + \frac{y_0^2}{8} = 1 \Rightarrow y_0 = \pm 2$$

И уравнения касательных

$$-2x \pm 3y - 12 = 0$$

□

1.4. # 8.29(3)

Доказать, что пучок света, испущенный из фокуса параболы, отразившись от её стенок, пойдёт параллельно оси параболы.

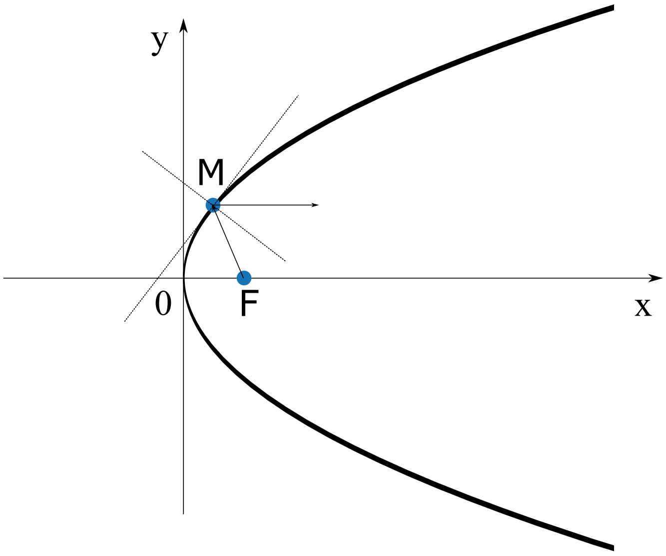

Рис. 3: Луч, исходящий из фокуса параболы.

Решение. Рассмотрим параболу в её канонической системе координат. Там она задаётся уравнением

$$y^2 = 2px$$

и уравнение касательной в точке (x_0, y_0) будет

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

или, если раскрыть скобки и перенести всё в одну часть уравнения

$$p \cdot x - y_0 \cdot y + px_0 = 0$$

Откуда получаем направляющий вектор касательной $\boldsymbol{a} = (y_0, p)$ и вектор нормали к касательной

$$\boldsymbol{n} = (p, -y_0)$$

Рассмотрим один луч, исходящий из фокуса параболы (3). Отраженный, по предположению, луч (параллельный оси параболы) параллелен вектору $\boldsymbol{v}_{\parallel} = (-1, 0)$. Вектор же

$\boldsymbol{v}$, “по которому” идёт испущенный из фокуса луч, равен $\left(x_0 - \dfrac{p}{2}, y_0 - 0\right)$. Найдём углы $\angle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n})$ и $\angle\left(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}_{\parallel}\right)$. Если они окажутся равны, то мы докажем что требуется. Итак,

$$\cos\angle\left(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}_{\parallel}\right) = -\frac{p}{\sqrt{p^2 + y_0^2}}$$

$$\cos\angle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}) = \frac{p\left(x_0 - \frac{p}{2}\right)^2 - y_0 y_0}{\sqrt{p^2 + y_0^2}\sqrt{\left(x_0 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_0^2}} = \ldots = -\frac{p}{\sqrt{p^2 + y_0^2}}$$

Небольшое замечание: благодаря удачному выбору направления $\boldsymbol{v}_{\parallel}$ косинусы углов сразу получились равными. Но если бы $\boldsymbol{v}_{\parallel}$ был выбран как $(1, 0)$, то косинусы получились бы равными с точностью до знака (то есть просто по модулю). □

2. Приведение уравнения кривой к каноническому виду

Общий вид уравнения кривой второго порядка:

$$\begin{cases} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \\ A^2 + B^2 + C^2 > 0 \end{cases} \tag{1}$$

Всего есть девять канонических уравнений кривых второго порядка[2]:

1. Эллипс
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ a \geq b > 0 \end{cases}$$
2. “Мнимый эллипс”
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$
3. “Пара мнимых пересекающихся прямых”
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$
4. Гипербола
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ a > 0,\ b > 0 \end{cases}$$
5. Пара пересекающихся прямых
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$
6. Парабола
$$y^2 = 2px, \quad p > 0$$

[2] См., например книжку Беклемишева Д. В. или задачник.

7. Пара параллельных прямых
$$y^2 = a^2, \quad a \neq 0$$

8. “Пара мнимых параллельных прямых”
$$y^2 = -a^2, \quad a \neq 0$$

9. Пара совпавших прямых
$$y^2 = 0$$

Чтобы привести кривую к каноническому виду, можно придерживаться следующего алгоритма:

0. Перейти к прямоугольной системе координат (если она ещё не прямоугольная)[3].

1. *Повернуть* систему координат так, чтобы исчез член с произведением xy.

2. Далее, в зависимости от ситуации, надо *перенести начало* системы координат так, чтобы исчезли либо линейные члены, либо свободный член.

3. И в конце, опять же в зависимости от ситуации, может потребоваться ещё одно-два небольших действия, например изменение порядка координат (чего можно достичь поворотом на $\frac{\pi}{2}$, чтобы не менялась ориентация базиса).

Центром кривой второго порядка называется точка (x_0, y_0), такая что
$$F(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) = F(x_0 - \alpha, y_0 - \beta)$$
где $F(\cdot, \cdot) = 0$ — уравнение кривой, а α и β — любые числа. Можно показать, что центр симметрии кривой — это почти то же самое, что и её центр (только центр в некоторых случая может существовать, а центр симметрии — нет). Если подставить в уравнение (1) сдвинутые на $\pm\alpha$ и $\pm\beta$ координаты (x_0, y_0) и приравнять, как в определении центра, то получим
$$\alpha(Ax_0 + Bx_0 + D) + \beta(Bx_0 + Cy_0 + E) = 0$$
откуда система уравнений для нахождения координат центра:
$$\begin{cases} Ax_0 + Bx_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Центр существует и единствен, если определитель системы отличен от нуля:
$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$$
В этом случае кривая называется *центральной*.

При этом $\delta > 0$ соответствует кривым эллиптического типа: от эллипса до гиперболы в списке кривых (1), — $\delta < 0$ соответствует кривым гиперболического типа: от гиперболы до параболы в списке кривых (4), — и $\delta = 0$ соответствует кривым параболического типа: от параболы и далее (6).

[3]В задачах изначальная система координат будет считаться прямоугольной, если не сказано противное!

2.1. # 9.4(1)

Определить тип кривой второго порядка. Составить её каноническое уравнение и найти каноническую систему координат. Изначально кривая задана в *прямоугольной системе координат*.

$$F(x, y) = 2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0 \tag{3}$$

Решение.

Способ I ("канонический").

Тип кривой можно определить либо сразу, либо в самом конце, когда получим каноническое уравнение. Давайте отложим на конец (а в другом варианте решения сделаем это сразу).

Первый шаг — надо повернуть систему координат так, чтобы исчез член со смешанным произведением переменных xy. Поворот системы координат:

$$\begin{cases} x = x' \cos\phi - y' \sin\phi \\ y = x' \sin\phi + y' \cos\phi \end{cases}$$

Подставляем в исходное уравнение и смотрим, что получается как коэффициент при $x'y'$:

$$\begin{aligned} F'(x', y') &= 2(x' \cos\phi - y' \sin\phi)^2 - 4(x' \cos\phi - y' \sin\phi)(x' \sin\phi + y' \cos\phi) \\ &+ 5(x' \sin\phi + y' \cos\phi)^2 + \ldots = (6 \sin\phi \cos\phi - 4\cos^2\phi + 4\sin^2\phi)x'y' + \ldots = 0 \end{aligned}$$

Откуда получаем условие на угол поворота ϕ, чтобы коэффициент при $x'y'$ обратился в ноль:

$$3 \sin 2\phi - 4 \cos 2\phi = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\phi = \frac{4}{3}$$

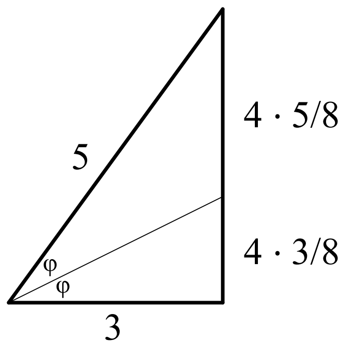

Рис. 4: К нахождению $\sin\phi$ и $\cos\phi$ по $\operatorname{tg} 2\phi$.

Из рисунка (4), например, можно найти синус и косинус для одинарного угла:

$$\begin{cases} \sin\phi = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos\phi = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

и первая замена

$$\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y' \end{cases}}$$

Снова подставляем это представление x и y через x' и y' в исходное уравнение, но на этот раз выписываем все члены, кроме $x'y'$ (так как он обязан занулиться при замене x, y на x', y')

$$F'(x', y') = \ldots = x'^2 + 6y'^2 + \frac{14x'}{\sqrt{5}} - \frac{12y'}{\sqrt{5}} + 9 = 0$$

Далее можно выделить полные квадраты, чтобы избавиться от линейных членов

$$\left(x'^2 + 2\cdot\frac{7}{\sqrt{5}}x' + \frac{49}{5}\right) - \frac{49}{5} + \left(\left(\sqrt{6}y'\right)^2 - 2\cdot\sqrt{6}y\cdot\frac{6}{\sqrt{30}} + \frac{36}{30}\right) - \frac{36}{30} + 9 = 0$$

$$\left(x' + \frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\sqrt{6}y' - \frac{6}{\sqrt{30}}\right)^2 = 2$$

$$\left(x' + \frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2 + 6\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2$$

Откуда видна следующая замена[4]:

$$\boxed{\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{7}{\sqrt{5}} \\ y'' = y' - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}}$$

Уравнение при этом в переменных x'', y'' примет вид:

$$x''^2 + 6y''^2 = 2$$

или, уже каноническое:

$$\frac{x''^2}{2} + \frac{y''^2}{1/3} = 1$$

Видно, что крива второго порядка — эллипс. Осталось задать каноническую систему координат, связав её и исходной. Надо вывести замену x и y сразу на x'' и y'', тогда станет известна матрицы перехода от исходного базиса к новому и положение новой (канонической) системы координат относительно исходной.

Выражая и подставляя из одной замены в другую, получаем

$$\begin{cases} x = \ldots = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x'' - \dfrac{1}{\sqrt{5}}y'' - 3 \\ y = \ldots = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x'' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y'' - 1 \end{cases}$$

Откуда видны компоненты новых базисных векторов в старом базисе и положение нового начала:

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ \boldsymbol{e}'_2 = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) \\ O'(-3, -1) \end{cases}$$

[4]Множитель 6 вынесен за скобку с y' намеренно!

Способ II (“через центр”).

Если у кривой есть центр, то удобнее начинать замены с переноса начала координат в этот центр. Из системы уравнений (2) можно понять, есть у кривой центр или нет И, если есть, найти его координаты

$$\begin{cases} 2x_0 - 2y_0 + 4 = 0 \\ -2x_0 + 5y_0 - 1 = 0 \end{cases}$$

Определитель системы

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

(из того, что определитель больше нуля, сразу можно заключить, что кривая эллиптического типа). Решая далее, например, по методу Крамера, находим

$$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = -1 \end{cases}$$

И первая замена — перенос начала координат в центр:

$$\begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' - 1 \end{cases}$$

Подставляя в уравнение (3), получаем

$$2x'^2 + 5y'^2 - 4x'y' = 2$$

то есть линейные члены ушли. Осталось повернуть систему координат. Поворот должен быть таким же, как в первом способе решения. И в итоге

$$x''^2 + 6y''^2 = 2$$

Получили то же самое, что и в первый раз, но вычислений пришлось проводить в разы меньше (и вероятность совершить какую-нибудь ошибку тоже меньше). И координаты нового центра стали известны уже на стадии первой замены переменных. □

3. Дополнение

3.1. Про конические сечения

Кривые второго порядка можно получать, пересекая двойной круговой конус (не обязательно прямой) плоскостью, не проходящей через вершину конуса (5).

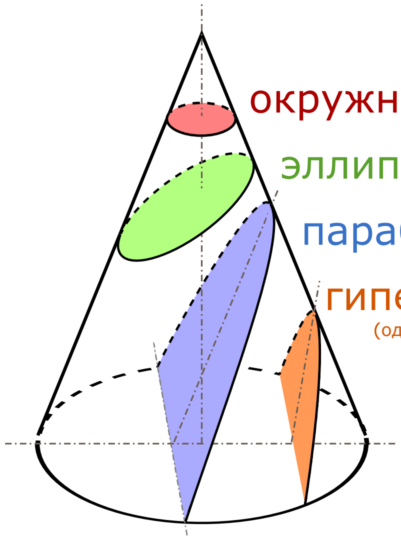

Рис. 5: Кривые второго порядка (эллипс, гипербола и парабола) — как конические сечения (wikipedia.org/wiki/Conic_section).

Можно заметить, что эксцентриситет увеличивается в ряду “окружность, эллипс, парабола, гипербола” (6). Таким образом, эксцентриситет выражает некую меру кривизны кривой: от максимальной у окружности до минимальной у гиперболы.

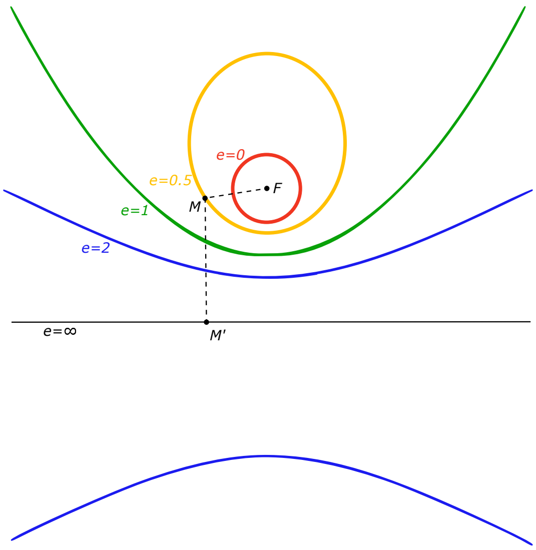

Рис. 6: Эксцентриситет — как число, отражающее кривизну линии второго порядка (wikipedia.org/wiki/Conic_section). Кривизна уменьшается с увеличением эксцентриситета.

Мы определяли эксцентриситет для эллипса и гиперболы через отношение c к a (к слову, c ещё называют *линейным эксцентриситетом* или *фокальным расстоянием* — расстояние между центром и фокусом). У параболы же нет c (так как нет центра), но у неё эксцентриситет был равен одному как отношение расстояние от точки параболы до фокуса к расстоянию от той же точки до директрисы. Существует более общее определение эксцентриситета, которое подходит как для окружности, так и для эллипса, гиперболы и параболы — через конические сечения (7):

$$\begin{cases} \varepsilon = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} \\ 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \beta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

где β — угол наклона секущей конус плоскости, а α — угол между образующей конуса и его основанием.

В пределе $\alpha \to +\infty$ (сплющенный конус) в сечении в пределе получается прямая, поэтому для прямой можно считать эксцентриситет $\varepsilon \to +\infty$ (6).

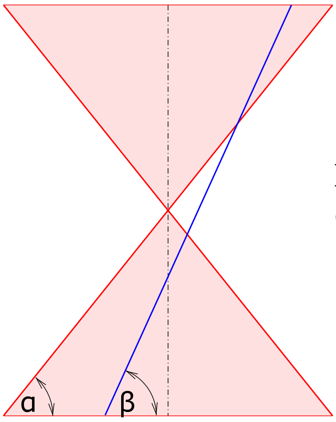

Рис. 7: К определению эксцентриситета через конические сечения (wikipedia.org/wiki/Eccentricity).

3.2. Про $2p$

В каноническом уравнении параболы

$$y^2 = 2px, \quad p > 0$$

двойка на самом деле "не просто так": p — половина так называемого *latus rectum*[5] (8). То есть p — это длина части перпендикуляра к оси параболы, проходящего через фокус, от фокуса до параболы. Точно так же p определяется и в случае эллипса и гиперболы.

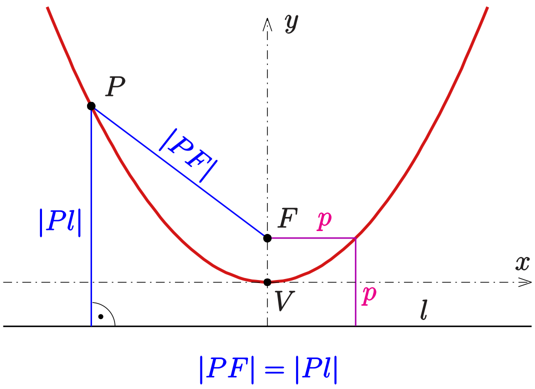

Рис. 8: Число p из канонического уравнения параболы (wikipedia.org/wiki/Parabola).

[5]Latus переводится с латинского как "прямой", а rectum — "кишка"?.. Или это всё вместе переводится как "прямая сторона" (по другим источникам)?.. Автор конспекта доунт ноу.