Семинар по аналитической геометрии: «Прямая на плоскости (и в пространстве)»

Алексеев Василий

МФТИ

6 октября 2020

Теория

Теория

- Векторное уравнение в параметрической форме:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{a}t, \quad \boldsymbol{a} \neq \mathbf{0},\ t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Теория

- Векторное уравнение в параметрической форме:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{a}t, \quad \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0},\ t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

В общей декартовой системе координат:

$$x = x_0 + \alpha t,\ y = y_0 + \beta t, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$$

- Векторное уравнение в параметрической форме:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{a}t, \quad \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0},\ t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

В общей декартовой системе координат:

$$x = x_0 + \alpha t,\ y = y_0 + \beta t, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$$

Каноническая форма:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}, \quad \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$$

Теория

- Векторное уравнение в параметрической форме:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{a}t, \quad \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0},\ t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

  В общей декартовой системе координат:

$$x = x_0 + \alpha t,\ y = y_0 + \beta t, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$$

  Каноническая форма:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}, \quad \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$$

- Нормальное векторное уравнение:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{n}) = 0, \quad \boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0} \tag{2}$$

Теория

- Векторное уравнение в параметрической форме:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{a}t, \quad \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0},\ t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

  В общей декартовой системе координат:

$$x = x_0 + \alpha t,\ y = y_0 + \beta t, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$$

  Каноническая форма:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}, \quad \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$$

- Нормальное векторное уравнение:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{n}) = 0, \quad \boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0} \tag{2}$$

  Можно переписать как

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D, \quad \boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}$$

Теория

Общее уравнение прямой в декартовой системе координат:

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0 \tag{3}$$

Теория

Общее уравнение прямой в декартовой системе координат:

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0 \tag{3}$$

- Направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ может быть выбран как $(-B, A)$.

Теория

Общее уравнение прямой в декартовой системе координат:

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0 \tag{3}$$

- Направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ может быть выбран как $(-B, A)$.
- Нормальный вектор в **прямоугольной** системе координат:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = -B \cdot n_x + A \cdot n_y = 0 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{n} \propto (A, B)}$$

Теория

Общее уравнение прямой в декартовой системе координат:

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0 \tag{3}$$

- Направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ может быть выбран как $(-B, A)$.
- Нормальный вектор в **прямоугольной** системе координат:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = -B \cdot n_x + A \cdot n_y = 0 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{n} \propto (A, B)}$$

Расстояние от точки $A = (x_1, y_1) = \boldsymbol{r}_1$ до прямой l:

- с начальной точкой $\boldsymbol{r}_0$ и вектором нормали $\boldsymbol{n}$

$$\rho(A, l) = \frac{\left|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})\right|}{|\boldsymbol{n}|}$$

Теория

Общее уравнение прямой в декартовой системе координат:

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0 \tag{3}$$

- Направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ может быть выбран как $(-B, A)$.
- Нормальный вектор в **прямоугольной** системе координат:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = -B \cdot n_x + A \cdot n_y = 0 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{n} \propto (A, B)}$$

Расстояние от точки $A = (x_1, y_1) = \boldsymbol{r}_1$ до прямой l:

- с начальной точкой $\boldsymbol{r}_0$ и вектором нормали $\boldsymbol{n}$

$$\rho(A, l) = \frac{\left|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})\right|}{|\boldsymbol{n}|}$$

- в **прямоугольной** системе координат, где прямая l может быть задана уравнением $Ax + By + C = 0$:

$$\rho(A, l) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Теория

Общее уравнение прямой в декартовой системе координат:

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0$$

Определение

Алгебраическая линия на плоскости:

$$A_1 x^{k_1} y^{l_1} + \ldots + A_s x^{k_s} y^{l_s} = 0, \quad k_i, l_i \in \mathbb{N}_{\geqslant 0} \tag{4}$$

Степень уравнения (порядок алгебраической линии):

$$\max \left\{ k_1 + l_1, \ldots, k_s + l_s \right\}$$

Теорема

Алгебраическая линия порядка p на плоскости в *любой* декартовой системе координат может быть задана уравнением вида (4) порядка p.

Содержание

6.1(2, 3)

Условие

2. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t \xrightarrow{?} [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$
3. $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b} \xrightarrow{?} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$

6.1(2, 3)

Условие

2. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t \xrightarrow{?} [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$
3. $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b} \xrightarrow{?} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$

Решение

2.

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{a}t \Leftrightarrow (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \parallel \boldsymbol{a} \Leftrightarrow [\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{0}$$

$$[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}] \equiv \boldsymbol{b}$$

6.1(2, 3)

Условие

2. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t \xrightarrow{?} [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$
3. $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b} \xrightarrow{?} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$

Решение

2. $$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{a}t \Leftrightarrow (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \parallel \boldsymbol{a} \Leftrightarrow [\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{0}$$
$$[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}] \equiv \boldsymbol{b}$$
3. $$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r})$$
$$\boldsymbol{r} = \frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{|\boldsymbol{a}|^2} + \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\left(\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \cdot \boldsymbol{r}\right) = \frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{|\boldsymbol{a}|^2} + \boldsymbol{a}t$$

Содержание

5.17

Условие

Треугольник. Две медианы: $x + y = 3$ и $2x + 3y = 1$. Вершина $A(1, 1)$. Уравнения сторон?

5.17

Условие

Треугольник. Две медианы: $x + y = 3$ и $2x + 3y = 1$. Вершина $A(1, 1)$. Уравнения сторон?

Решение

1. Вершина не лежит на медианах: $1 + 1 \neq 2$, $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \neq 3$

5.17

Условие

Треугольник. Две медианы: $x + y = 3$ и $2x + 3y = 1$. Вершина $A(1, 1)$. Уравнения сторон?

Решение

1. Вершина не лежит на медианах: $1 + 1 \neq 2$, $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \neq 3$
2. *Пусть* B — вершина, соответственная медиане $x + y = 3$

5.17

Условие

Треугольник. Две медианы: $x + y = 3$ и $2x + 3y = 1$. Вершина $A(1, 1)$. Уравнения сторон?

Решение

1. Вершина не лежит на медианах: $1 + 1 \neq 2$, $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \neq 3$
2. *Пусть B* — вершина, соответственная медиане $x + y = 3$
3. Пусть M_{AC} и M_{AB} — середины сторон AC и AB соответственно:

$$M_{AC} = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right), M_{AB} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

5.17

Условие

Треугольник. Две медианы: $x + y = 3$ и $2x + 3y = 1$. Вершина $A(1, 1)$. Уравнения сторон?

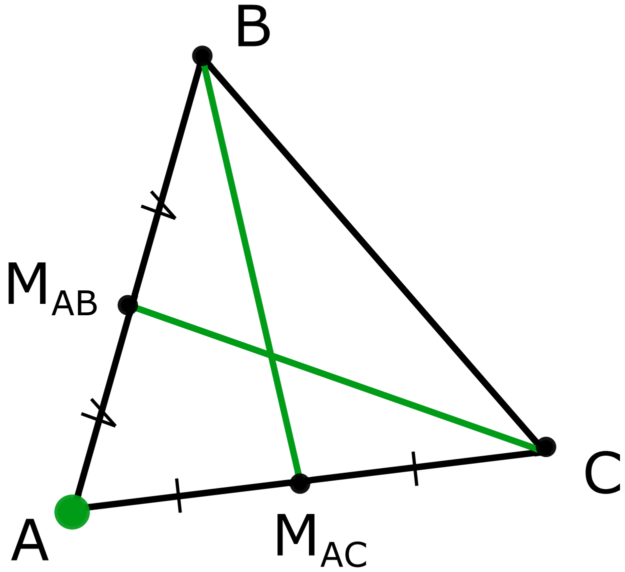
Решение

1. Вершина не лежит на медианах: $1 + 1 \neq 2$, $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \neq 3$
2. *Пусть B* — вершина, соответственная медиане $x + y = 3$
3. Пусть M_{AC} и M_{AB} — середины сторон AC и AB соответственно:

$$M_{AC} = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right), M_{AB} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

4. Тогда

$$\begin{cases} x_B + y_B = 3 \\ x_{M_{AC}} + y_{M_{AC}} = 3 \end{cases}, \begin{cases} 2x_C + 3y_C = 1 \\ 2x_{M_{AB}} + 3y_{M_{AB}} = 1 \end{cases}$$


B
M_{AB}
A
M_{AC}
C

Решение

Координаты вершин: $A(1, 1), B(12, -9), C(11, -7)$

Решение

Координаты вершин: $A(1,1), B(12,-9), C(11,-7)$

5. Уравнение прямой AB:

$$\widetilde{A}_{AB}x + \widetilde{B}_{AB}y + \widetilde{C}_{AB} = 0$$

$$\begin{cases} \widetilde{A}_{AB} + \widetilde{B}_{AB} + \widetilde{C}_{AB} = 0 \\ 12\widetilde{A}_{AB} - 9\widetilde{B}_{AB} + \widetilde{C}_{AB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widetilde{A}_{AB} = -\dfrac{10}{21}\widetilde{C}_{AB} \\ \widetilde{B}_{AB} = -\dfrac{11}{21}\widetilde{C}_{AB} \end{cases}$$

$$-10x - 11y + 21 = 0$$

6. Аналогично для сторон BC, AC.

Содержание

5.19

Условие

Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1, 5)$ и равноудалённых от точек $B(3, 7)$ и $C(1, -1)$.

Условие

Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1,5)$ и равноудалённых от точек $B(3,7)$ и $C(1,-1)$.

Решение

Расстояние от точки до прямой: $\rho = \frac{\left|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})\right|}{|\boldsymbol{n}|}$
Прямая a равноудалена от $B(3,7)$ и $C(1,-1)$:

$$\frac{\left|((3,7)-(-1,5),\boldsymbol{n})\right|}{|\boldsymbol{n}|} = \rho_{a,B} = \rho_{a,C} = \frac{\left|((1,-1)-(-1,5),\boldsymbol{n})\right|}{|\boldsymbol{n}|}$$

5.19

Условие

Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1, 5)$ и равноудалённых от точек $B(3, 7)$ и $C(1, -1)$.

~~Решение~~

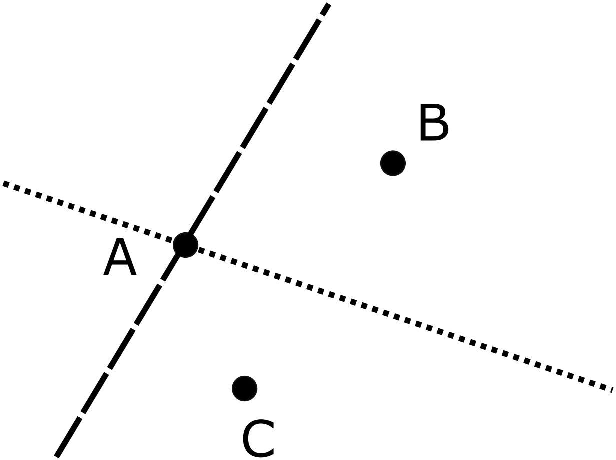
Расстояние от точки до прямой: $\rho = \dfrac{\left|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})\right|}{|\boldsymbol{n}|}$
Прямая a равноудалена от $B(3, 7)$ и $C(1, -1)$:

$$\frac{\left|((3, 7) - (-1, 5), \boldsymbol{n})\right|}{|\boldsymbol{n}|} = \rho_{a,B} = \rho_{a,C} = \frac{\left|((1, -1) - (-1, 5), \boldsymbol{n})\right|}{|\boldsymbol{n}|}$$

Но система координат не прямоугольная!

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &= (x_u \boldsymbol{e}_1 + y_u \boldsymbol{e}_2, x_v \boldsymbol{e}_1 + y_v \boldsymbol{e}_2) \\ &= x_u x_v (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + y_u y_v (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) + (x_u y_v + y_u x_v)(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\end{aligned}$$

5.19



5.19

Решение

1. Прямая a параллельна $\boldsymbol{BC} = (1 - 3, -1 - 7) = (-2, -8)$:

$$a : -8x - (-2)y + C = 0$$

$$A \in a \Rightarrow -8 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 + C = 0 \Rightarrow C = -18$$

$$\boxed{4x - y + 9 = 0}$$

5.19

Решение

1. Прямая a параллельна $\boldsymbol{BC} = (1-3, -1-7) = (-2, -8)$:

$$a: -8x - (-2)y + C = 0$$

$$A \in a \Rightarrow -8 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 + C = 0 \Rightarrow C = -18$$

$$\boxed{4x - y + 9 = 0}$$

2. Прямая a проходит между точками B и C.
Пусть M – середина BC: $M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{-1+7}{2}\right) = (2, 3)$
Прямая, проходящая через две точки $A(-1, 5)$ и $M(2, 3)$:

$$\frac{x - x_M}{x_A - x_M} = \frac{y - y_M}{y_A - y_M} \Rightarrow \frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-3}{5-3}$$

$$\boxed{2x + 3y - 13 = 0}$$

Содержание

5.34(2) (р)

Условие

Точка $A(1, 2)$ и прямая $a : 3x - y + 9 = 0$. Найти координаты

1. $A_{\perp}$ – проекции A на прямую a
2. A' – точки, симметричной с A относительно прямой a

5.34(2) (p)

Условие

Точка $A(1,2)$ и прямая $a : 3x - y + 9 = 0$. Найти координаты

1. $A_\perp$ – проекции A на прямую a
2. A' – точки, симметричной с A относительно прямой a

Решение

1. Точка A не лежит на прямой: $3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 9 \neq 0$

5.34(2) (р)

Условие

Точка $A(1, 2)$ и прямая $a : 3x - y + 9 = 0$. Найти координаты

1. $A_\perp$ – проекции A на прямую a
2. A' – точки, симметричной с A относительно прямой a

Решение

1. Точка A не лежит на прямой: $3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 9 \neq 0$
2. Система прямоугольная $\Rightarrow \boldsymbol{n} = (3, -1)$.

5.34(2) (р)

Условие

Точка $A(1,2)$ и прямая $a : 3x - y + 9 = 0$. Найти координаты

1. $A_\perp$ – проекции A на прямую a
2. A' – точки, симметричной с A относительно прямой a

Решение

1. Точка A не лежит на прямой: $3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 9 \neq 0$
2. Система прямоугольная $\Rightarrow \boldsymbol{n} = (3, -1)$.
3. $A_\perp = (x, y)$, $A_\perp \in a$, $\boldsymbol{A_\perp A} \parallel \boldsymbol{n}$:

$$\begin{cases} 3x - y + 9 = 0 \\ \dfrac{1-x}{2-y} = \dfrac{x_A - x_{A_\perp}}{y_A - y_{A_\perp}} = \dfrac{n_x}{n_y} = \dfrac{3}{-1} \end{cases}$$

$$\boxed{A_\perp = (-2, 3)}$$

Решение

4. $A, A_\perp, A'$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{AA_\perp} = \boldsymbol{A_\perp A'} \\ \boldsymbol{AA_\perp} = (-2, 3) - (1, 2) = (-3, 1) \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{A_\perp A'} = (-3, 1)$$

$$\boldsymbol{A_\perp A'} = A' - A_\perp \Rightarrow A' = \boldsymbol{A_\perp A'} + A_\perp = (-3, 1) + (-2, 3)$$

$$\boxed{\boldsymbol{A_\perp A'} = (-5, 4)}$$

Содержание

Условие

Две прямые: $x - 7y = 1$ и $x + y = -7$. Угол с точкой $A(1, 1)$ внутри. Уравнение биссектрисы?

5.53 (р)

Условие

Две прямые: $x - 7y = 1$ и $x + y = -7$. Угол с точкой $A(1, 1)$ внутри. Уравнение биссектрисы?

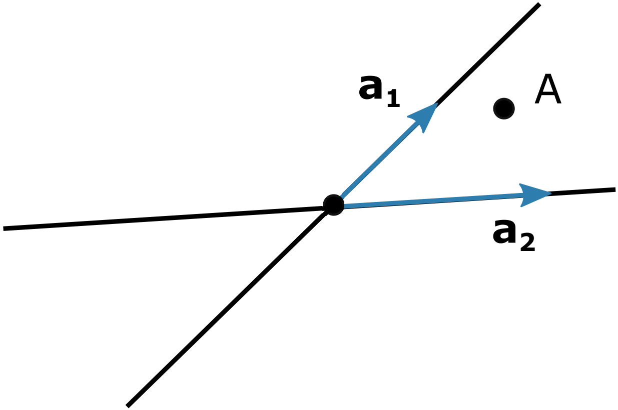
Решение

1. Прямые пересекаются, точка A не лежит ни на одной прямой.
2. Точка пересечения прямых $X(x, y)$:

$$\begin{cases} x - 7y = 1 \\ x + y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{X = (-6, -1)}$$

5.53 (p)



5.53 (p)

Решение

3. Выберем направляющие векторы прямых $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ так, чтобы они образовывали угол с точкой A внутри.

$$[\boldsymbol{a_i}, \overrightarrow{XA}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_{ix} & a_{iy} & 0 \\ XA_x & XA_y & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{k} \cdot (a_{ix} \cdot XA_y - XA_x \cdot a_{iy})$$

$$\overrightarrow{XA} = (1, 1) - (-6, -1) = (7, 2)$$

$$\boldsymbol{a_1} = (7, 1) \Rightarrow \operatorname{sgn}(7 \cdot 2 - 7 \cdot 1) = +$$

$$\boldsymbol{a_2} = (-1, 1) \Rightarrow \operatorname{sgn}(-1 \cdot 2 - 7 \cdot 1) = -$$

$$\boxed{\boldsymbol{a_1} = (7, 1),\ \boldsymbol{a_2} = (-1, 1)}$$

Решение

4. Пусть $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y)$ – направляющий вектор биссектрисы. Точки на биссектрисе равноудалены от сторон угла:

$$\frac{(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a_1}||\boldsymbol{b}|} = \cos\angle(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b}) = \cos\angle(\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{b}) = \frac{(\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a_2}||\boldsymbol{b}|}$$

$$\frac{7b_x + b_y}{|\boldsymbol{a_1}|} = \frac{-b_x + b_y}{|\boldsymbol{a_2}|} \Rightarrow \boldsymbol{b} = \big(|\boldsymbol{a_1}| - |\boldsymbol{a_2}|, 7|\boldsymbol{a_2}| + |\boldsymbol{a_1}|\big)$$

$$|\boldsymbol{a_1}| = \sqrt{50},\ |\boldsymbol{a_2}| = \sqrt{2} \Rightarrow \boldsymbol{b} = (5 - 1, 7 + 5) = (4, 12)$$

5.53 (р)

Решение

4. Пусть $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y)$ – направляющий вектор биссектрисы. Точки на биссектрисе равноудалены от сторон угла:

$$\frac{(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a_1}||\boldsymbol{b}|} = \cos\angle(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b}) = \cos\angle(\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{b}) = \frac{(\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a_2}||\boldsymbol{b}|}$$

$$\frac{7b_x + b_y}{|\boldsymbol{a_1}|} = \frac{-b_x + b_y}{|\boldsymbol{a_2}|} \Rightarrow \boldsymbol{b} = \big(|\boldsymbol{a_1}| - |\boldsymbol{a_2}|, 7|\boldsymbol{a_2}| + |\boldsymbol{a_1}|\big)$$

$$|\boldsymbol{a_1}| = \sqrt{50},\ |\boldsymbol{a_2}| = \sqrt{2} \Rightarrow \boldsymbol{b} = (5 - 1, 7 + 5) = (4, 12)$$

5. Уравнение биссектрисы:

$$\frac{x - (-6)}{4} = \frac{y - (-1)}{12} \Rightarrow \boxed{3x - y + 17 = 0}$$

Содержание

5.35

Условие

Составить уравнение прямой, симметричной прямой $a: 3x - y + 5 = 0$ относительно прямой $l: x + y - 1 = 0$.

5.35

Условие

Составить уравнение прямой, симметричной прямой $a: 3x - y + 5 = 0$ относительно прямой $l: x + y - 1 = 0$.

Решение

1. Точка пересечения прямых X:

$$\begin{cases} 3x - y + 5 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = (-1, 2)$$

5.35

Условие

Составить уравнение прямой, симметричной прямой $a: 3x - y + 5 = 0$ относительно прямой $l: x + y - 1 = 0$.

Решение

1. Точка пересечения прямых X:

$$\begin{cases} 3x - y + 5 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = (-1, 2)$$

2. Точка A на прямой $3x - y + 5 = 0$:

$$3 \cdot 0 - 5 + 5 = 0 \Rightarrow A = (0, 5)$$

Решение

3. Проекция $\pi_{\overrightarrow{XA}}$ вектора $\overrightarrow{XA} = (1, 3)$ на прямую l с направляющим вектором $\boldsymbol{l} = (-1, 1)$:

$$\pi_{\overrightarrow{XA}} = \overrightarrow{XA} \cdot \cos\angle(\overrightarrow{XA}, l) = \frac{(\overrightarrow{XA}, \boldsymbol{l})}{|\boldsymbol{l}|} = (1, 3) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1) = \sqrt{2}$$

Решение

3. Проекция $\pi_{\overrightarrow{XA}}$ вектора $\overrightarrow{XA} = (1, 3)$ на прямую l с направляющим вектором $\boldsymbol{l} = (-1, 1)$:

$$\pi_{\overrightarrow{XA}} = \overrightarrow{XA} \cdot \cos\angle(\overrightarrow{XA}, l) = \frac{(\overrightarrow{XA}, \boldsymbol{l})}{|\boldsymbol{l}|} = (1, 3) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1) = \sqrt{2}$$

4. Проекция π_A точки A на l:

$$\pi_A = X + \frac{\boldsymbol{l}}{l} \cdot \pi_{\overrightarrow{XA}} = (-1, 2) + (-1, 1) = (-2, 3)$$

5.35

Решение

3. Проекция $\pi_{\overrightarrow{XA}}$ вектора $\overrightarrow{XA} = (1, 3)$ на прямую l с направляющим вектором $\boldsymbol{l} = (-1, 1)$:

$$\pi_{\overrightarrow{XA}} = \overrightarrow{XA} \cdot \cos\angle(\overrightarrow{XA}, l) = \frac{(\overrightarrow{XA}, \boldsymbol{l})}{|\boldsymbol{l}|} = (1, 3) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1) = \sqrt{2}$$

4. Проекция π_A точки A на l:

$$\pi_A = X + \frac{\boldsymbol{l}}{l} \cdot \pi_{\overrightarrow{XA}} = (-1, 2) + (-1, 1) = (-2, 3)$$

5. Точка A', симметричная точке A относительно l:

$$A' = \pi_A + (\pi_A - A) = (-4, 1)$$

Решение

6. Прямая, проходящая через две точки $X(-1, 2)$ и $A'(-4, 1)$:

$$\frac{x-(-1)}{y-2} = \frac{-4-(-1)}{1-2} \Rightarrow \boxed{x - 3y + 7 = 0}$$