Семинар 4

Алексеев Василий

25 февраля + 26 февраля 2020

Содержание

1. Линейные пространства: сумма и пересечение

2. Задачи

2.1. # 20.23(4)

Составить систему уравнений, определяющую линейную оболочку системы столбцов:

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) = \{\alpha \boldsymbol{c}_1 + \beta \boldsymbol{c}_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{c}_1 = (1, 1, 1, 1)^T \\ \boldsymbol{c}_2 = (1, 2, 1, 3)^T \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Переходим к системе скалярных уравнений (относительно α, β):

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = \alpha + 2\beta \\ x_3 = \alpha + \beta \\ x_4 = \alpha + 3\beta \end{cases} \tag{1}$$

Можно сразу заметить, что $x_1 = x_3$ — это будет одним из уравнений искомой системы. Из второго и третьего уравнений можно получить $\beta = x_4 - x_2$. Из третьего уравнения (используя только что полученное выражение для β): $\alpha = x_3 - (x_4 - x_2)$. Теперь можно "заменить" в правых частях всех уравнений α и β на их выражения через x_i:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 - (x_4 - x_2) + 2(x_4 - x_2) \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_3 - (x_4 - x_2) + 3(x_4 - x_2) \end{cases}$$

Третье уравнение можно "выкинуть". То же самое — например, с четвёртым (так как оно такое же, как второе). В итоге получаем систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Другой способ работы с системой (1)

Можно бы было находить условия на x_i из системы (1) "более системно": рассмотрев расширенную матрицу системы. После упрощения, приравнивание нулю компонент в последнем столбце, соответствующих нулевым строкам в основной матрице, дало бы условия на x_i[1]:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 1 & x_1 \\ 1 & 2 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 3 & x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & \mathbf{1} & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 2 & x_4 - x_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2x_1 - x_2 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & x_4 + x_1 - 2x_2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_3 - x_1 = 0 \\ x_4 + x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

□

[1]Теорема Кронекера-Капелли.

2.2. # 15.94

Показать, что любую квадратную матрицу можно разложить в сумму симметрической и кососимметрической. Единственно ли такое разложение?

Решение. Симметрическая матрица A — такая что $A = A^T$. Кососимметрическая матрица A — такая что $A = -A^T$.

Можно заметить, что множества симметрических и кососимметрических матриц образуют линейные подпространства в пространстве всех квадратных матриц. Покажем это, например, для случая симметрических матриц. При умножении на число, очевидно, свойство симметричности сохраняется:

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A$$

При сложении двух симметрических тоже получим симметрическую:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{ij} = (a_{ji} + b_{ji})_{ij} = (A + B)^T$$

Как теперь представить произвольную матрицу в виде суммы симметрической и кососимметрической?..

Способ 1 (“простой”)

В предыдущем номере задачника предлагают показать, что матрица $A + A^T$ симметрическая, а матрица $A - A^T$ кососимметрическая. Если это в самом деле так, то, очевидно:

$$A = \frac{1}{2}\big((A + A^T) + (A - A^T)\big) = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

То есть разложение произвольной матрицы A в виде суммы двух найдено.

Остаётся в таком случае проверить, что $A - A^T$ в самом деле кососимметрическая (а $A + A^T$ — симметрическая):

$$A - A^T = (a_{ij} - a_{ji})_{ij} = -(a_{ji} - a_{ij})_{ij} = -(A - A^T)^T$$

Аналогично и с симметричностью матрицы $A + A^T$.

Способ 2

Можно же по-честному записать, что хотим найти:

$$A = X + Y, \quad \begin{cases} X = X^T \\ Y = -Y^T \end{cases}$$

Представление матрицы A в виде суммы двух и ограничения на матрицы-слагаемые (симметричность одной и кососимметричность другой) можно объединить в одну систему:

$$\begin{cases} A = X + Y \\ X = X^T \\ Y = -Y^T \end{cases}$$

Пусть у матрицы A размер $n \times n$. Тогда сейчас в системе $2 \cdot n^2$ неизвестных (количество элементов в матрицах X и Y) и $3 \cdot n^2$ уравнений (каждое матричное уравнение равносильно n^2 скалярным уравнениям).

Рассмотрим сначала отдельно уравнение $X = X^T$. Соответствующая система скалярный уравнений:

$$\begin{cases} x_{11} = x_{11} \\ x_{12} = x_{21} \\ \dots \\ x_{21} = x_{12} \\ x_{22} = x_{22} \\ \dots \end{cases}$$

Таким образом, на самом деле n уравнений вообще ничего не дают (которые для диагональных элементов). Другие же позволяют сразу сократить число переменных x_{ij}: вместо n^2 их теперь (диагональные плюс в одной из половин)

$$n + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Теперь посмотрим на $Y = -Y^T$:

$$\begin{cases} y_{11} = -y_{11} \\ y_{12} = -y_{21} \\ \dots \\ y_{21} = -y_{12} \\ y_{22} = -y_{22} \\ \dots \end{cases}$$

В этот раз уравнения для диагональных элементов информативны и дают: $y_{11} = \ldots = y_{nn} = 0$. Число неизвестных в матрице Y после учёта уравнений $Y = -Y^T$ (половинка без диагонали):

$$\frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Остаётся посмотреть на уравнения, соответствующие $A = X + Y$:

$$\begin{cases} \begin{cases} a_{11} = x_{11} + y_{11} \\ a_{12} = x_{12} + y_{12} \\ \dots \\ a_{1n} = x_{1n} + y_{1n} \end{cases} \\ \begin{cases} a_{21} = x_{21} + y_{21} = x_{12} - y_{12} \\ a_{22} = x_{22} + y_{22} \\ \dots \\ a_{2n} = x_{2n} + y_{2n} \end{cases} \\ \dots \\ \begin{cases} a_{n1} = x_{n1} + y_{n1} \\ a_{n2} = x_{n2} + y_{n2} \\ \dots \\ a_{nn} = x_{nn} + y_{nn} \end{cases} \end{cases}$$

Сначала опять стоит обратить внимание на уравнения с диагональными элементами. С их помощью можно сразу найти диагональные элементы матрицы X! Например $a_{11} = x_{11} + y_{11} \Leftrightarrow a_{11} = x_{11}$. То есть $x_{ii} = a_{ii}$. Поэтому общее число неизвестных в матрице X

становится равным тоже

$$\frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

И общее число неизвестных на данный момент (в обеих матрицах X и Y):

$$2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1)$$

И "неиспользованными" остались следующие уравнения (с недиагональными элементами матрицы A):

$$\begin{cases} \begin{cases} a_{12} = x_{12} + y_{12} \\ \dots \\ a_{1n} = x_{1n} + y_{1n} \end{cases} \\ \begin{cases} a_{21} = x_{12} - y_{12} \\ \dots \\ a_{2n} = x_{2n} + y_{2n} \end{cases} \\ \dots \end{cases}$$

И их тоже всего $n(n-1)$.

Теперь можно заметить, что оставшаяся (до сих пор не очень маленькая) система на самом деле "распадается" на много систем из двух уравнений с двумя неизвестными. Например, объединяя уравнения с a_{12} и a_{21}, получаем:

$$\begin{cases} a_{12} = x_{12} + y_{12} \\ a_{21} = x_{12} - y_{12} \end{cases}$$

Откуда можно найти x_{12} и y_{12}:

$$x_{12} = \frac{a_{12} + a_{21}}{2}, \quad y_{12} = \frac{a_{12} - a_{21}}{2}$$

И аналогичным образом можно найти все недиагональные элементы в матрицах X и Y. На самом деле, формулы будут верны и для диагональных элементов. Таким образом,

$$x_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}, \quad y_{ij} = \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2}$$

Матрицы X и Y найдены. Решение единственное. □

2.3. # 21.6(5)

Найти проекцию вектора $\boldsymbol{x}$ из $\mathbb{R}^4$ на подпространство $\mathscr{P}$ параллельно $\mathscr{Q}$[2]. Где $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ — линейные оболочки векторов:

$$\mathscr{P} = \mathscr{L}\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\} = \mathscr{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-5\\7\\2\end{pmatrix}\right\} \quad \mathscr{Q} = \mathscr{L}\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2\} = \mathscr{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$$

а сам вектор $\boldsymbol{x}$ равен

$$\boldsymbol{x} = (1, -7, 5, -2)^T$$

[2]То есть предполагается, что $\mathbb{R}^n = \mathscr{P} \oplus \mathscr{Q}$.

Решение. Если $\mathbb{R}^4 = \mathscr{P} \oplus \mathscr{Q}$ (что следует из условия задачи), то существует единственное представление вектора $\boldsymbol{x}$ как:

$$\boldsymbol{x} = \underbrace{\alpha \boldsymbol{p}_1 + \beta \boldsymbol{p}_2}_{\pi_{\mathscr{P}}(\boldsymbol{x})} + \underbrace{\gamma \boldsymbol{q}_1 + \zeta \boldsymbol{q}_2}_{\pi_{\mathscr{Q}}(\boldsymbol{x})}$$

где $\pi_{\mathscr{P}}(\boldsymbol{x})$ — искомая проекция вектора $\boldsymbol{x}$ на $\mathscr{P}$ параллельно $\mathscr{Q}$. Остаётся составить систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta + \gamma + \zeta = 1 \\ \alpha - 5\beta + \gamma + \zeta = -7 \\ \alpha + 7\beta + 2\gamma + \zeta = 5 \\ \alpha + 2\beta + 2\gamma + 3\zeta = -2 \end{cases}$$

И решить её методом Гаусса...

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & -7 \\ 1 & 7 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Поэтому искомая проекция $\pi_{\mathscr{P}}(\boldsymbol{x})$ равна:

$$\pi_{\mathscr{P}}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\square$