Семинар 6

Алексеев Василий

13 + 17 октября 2022

Содержание

1. Прямая и плоскость в пространстве

Линейное уравнение от координат точки на плоскости

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A^{2022} + B^{2022} > 0 \end{cases}$$

задавало прямую (на плоскости). Плоскость — двумерное пространство, одно линейное равнение — одна "связь" между координатами, в итоге — прямая, одномерное подпространство.

Если же мы рассмотрим линейное уравнение от координат точки в общей декартовой системе координат (ОДСК) *в пространстве*

$$\boxed{\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ |A| + \left(e^{|B|} - 1\right) + 17.5C^2 > 0 \end{cases}} \tag{1}$$

то оно будет описывать плоскость. Пространство трёхмерное, снова одно линейное уравнение, получается плоскость — двумерное подпространство...

Рассмотрим ещё несколько способов задать плоскость. Например, векторный. Будем считать, что мы знаем радиус-вектор $\boldsymbol{r}_0$ некоторой точки плоскости. А также два вектора $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$, параллельных плоскости (направляющие векторы плоскости), но неколлинеарных. Тогда можно заметить, что для радиусов-векторов $\boldsymbol{r}$ точек плоскости и только таких точек верно, что разница $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ раскладывается по $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ (1):

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = t_1\boldsymbol{p} + t_2\boldsymbol{q}$$

для некоторых $t_1 \in \mathbb{R}$ и $t_2 \in \mathbb{R}$ (то есть для любой точки плоскости найдутся подходящие коэффициенты t_1 и t_2, и в то же время, какие бы t_1 и t_2 ни подставили в формулу, получим радиус-вектор именно какой-то точки плоскости). Или, если перенести $\boldsymbol{r}_0$ направо и начать "варьировать" t_1 и t_2, получим *векторное параметрическое уравнение плоскости*:

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t_1\boldsymbol{p} + t_2\boldsymbol{q}, \quad t_1,\, t_2 \in \mathbb{R}} \tag{2}$$

Одно векторное уравнение равносильно системе из трёх скалярных уравнений:

$$\begin{cases} x = x_0 + t_1 p_x + t_2 q_x \\ y = y_0 + t_1 p_y + t_2 q_y \\ z = z_0 + t_1 p_z + t_2 q_z \end{cases}$$

где введены обозначения x, y, z для компонент $\boldsymbol{r}$; x_0, y_0, z_0 для компонент $\boldsymbol{r}_0$; и p_x, p_y, p_z и q_x, q_y, q_z для компонент векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ соответственно.

Ещё один вариант переписать уравнение (2) исходит из того, что векторы $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ компланарны. То есть объём параллелепипеда, построенного на них, равен нулю. То есть:

$$\boxed{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = 0}$$

Как и для прямой на плоскости, для плоскости в пространстве, из аналогичных рассуждений, можно выписать *нормальное векторное уравнение*:

$$\boxed{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) = 0} \tag{3}$$

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D, \quad D \in \mathbb{R}$$

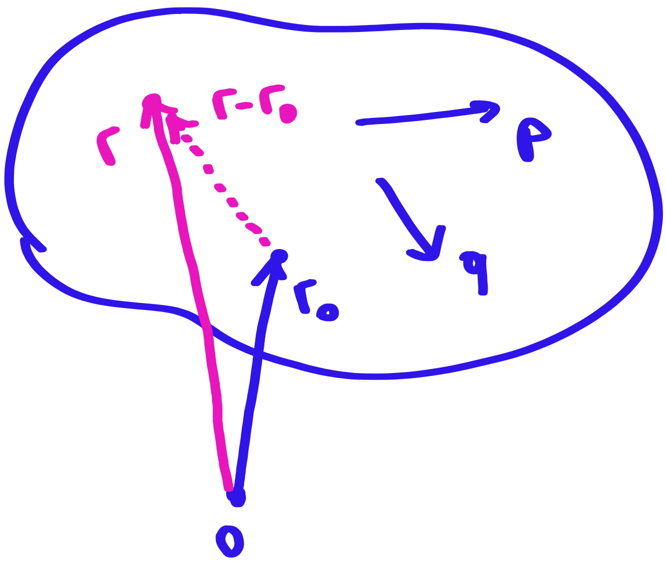

Рис. 1: Два направляющих вектора $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$, таких что $\boldsymbol{p} \nparallel \boldsymbol{q}$, и начальная точка $\boldsymbol{r}_0$ однозначно задают плоскость.

где $\boldsymbol{n}$ — нормальный вектор плоскости, то есть вектор, перпендикулярный плоскости.

От нормального векторного уравнения можно перейти к “популярной задачке” на нахождение расстояния от точки до плоскости. Пусть есть точка $M(x, y)$ и плоскость α, заданная нормальным векторным уравнением (3). Тогда расстояние $\rho(M, \alpha)$, находится точно так же, как в прошлый раз для случая точки и прямой:

$$\rho(M, \alpha) = \left| \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})}{|\boldsymbol{n}|} \right| \tag{4}$$

Если система координат декартова прямоугольная (ПДСК) и известно уравнение плоскости α в виде (1), то, точно так же, как и в прошлый раз, формула для вычисления расстояния преобразуется в следующую:

$$\rho(M, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Зададимся теперь вопросом о связи разных представлений одной и той же плоскости в пространстве. Так, если, например, известно уравнение плоскости вида (1), то как из него получить направляющие векторы, необходимые, например, для уравнения (2)? Это можно сделать так же, как в прошлый раз для прямой. Пусть есть две различные точки на плоскости: $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$. Тогда направляющий вектор можно выбрать в виде $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Запишем, что значит, что точки P и Q лежат на плоскости — их координаты удовлетворяют уравнению плоскости:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \end{cases}$$

Нам нужны разности координат — тогда вычтем из второго уравнения первое. Получим:

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0$$

Но нам не нужны сами точки P и Q. Мы хотим найти только направляющий вектор плоскости. Допустим, у искомого направляющего вектора координаты (α, β, γ). Тогда для поиска этих координат можно использовать уравнение:

$$\boxed{A\alpha + B\beta + C\gamma = 0} \tag{5}$$

По виду это уравнение напоминает полученное в прошлый раз для поиска компонент направляющего вектора прямой (что в принципе не удивительно, ведь рассуждения были проведены те же самые). В прошлый раз получилось довольно быстро подобрать направляющий вектор прямой — подошёл вектор вида $(-B, A)$. Здесь же… всё уже не так очевидно, поэтому обычно направляющие векторы плоскости ищут отдельно в каждой конкретной задаче, просто "внимательно вглядываясь" в соотношение (5). Но вообще… можно попытаться найти направляющие векторы и в общем виде. Сделаем же это (почему бы и нет)!

(…Внимательно смотрим на (5), при этом понимая, что хотя бы одна компонента у направляющего вектора обязана быть отлична от нуля.)

Не сложно видеть, что направляющие векторы плоскости могут быть выбраны в общем случае как следующие векторы:

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} B + C \\ -A - C \\ -A + B \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} B - C \\ -A + C \\ A - B \end{pmatrix} \tag{6}$$

Но запоминать эти формулы не стоит) Проще каждый раз "подбирать".

Теперь вернёмся ещё раз к прямой. Как на прямую "можно смотреть" в пространстве? Векторное параметрическое уравнение

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t, \quad t \in \mathbb{R}} \tag{7}$$

и в пространстве, очевидно, описывает прямую ("сдвиг в $\boldsymbol{r}_0$", а потом "сдвиг вдоль $\boldsymbol{a}$"). Правда, в скалярном виде получается система из *трёх* уравнений:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t \\ y = y_0 + a_y t \\ z = z_0 + a_z t \end{cases}$$

Выражая из каждого уравнения системы параметр t и приравнивая, получаем *каноническое уравнение прямой в пространстве*:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$$

Уравнение (7) фактически говорит о том, что для точек прямой и только для них верно, что $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 \parallel \boldsymbol{a}$. В пространстве условие коллинеарности двух векторов можно записать таким образом:

$$[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{0}$$

$$[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$$

В пространстве также появляется ещё один, совершенно новый, способ описать прямую. Как пересечение двух непараллельных плоскостей (2):

$$\boxed{\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}} \tag{8}$$

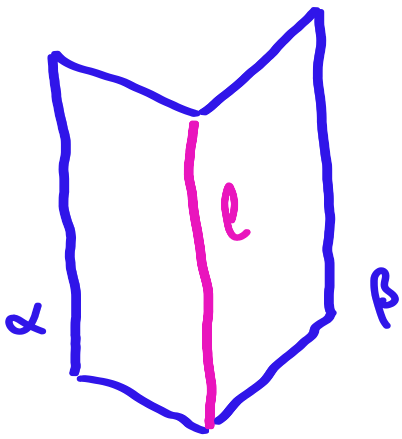

Рис. 2: Две непараллельных плоскости пересекаются по прямой.

2. Задачи

Последний рассмотренный сюжет (про прямую как пересечение плоскостей) плавно перетекает в номер

2.1. # 6.15

Задача. *Доказать, что направляющий вектор* $\boldsymbol{a}$ *прямой, заданной системой (8), может быть найден по формуле*[1]*:*

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}} \tag{9}$$

Решение. Распишем компоненты вектора:

$$\boldsymbol{a} = \left\{B_1C_2 - C_1B_2, C_1A_2 - A_1C_2, A_1B_2 - B_1A_2\right\}$$

Можно теперь просто подставить эти компоненты в соотношения (5), выписанные для обеих плоскостей, и убедиться, что $\boldsymbol{a}$ в самом деле им обеим параллелен. А значит, параллелен и прямой, по которой плоскости пересекаются. То есть может быть выбран её направляющим вектором.

Проверить было несложно. Сложнее... понять, как вообще дошли до того, чтобы искать $\boldsymbol{a}$ в описанном виде) Некоторую интуицию за всем этим можно подметить из того, что “разности” между коэффициентами, соответствующими одной и той же плоскости, стоят в компонентах $\boldsymbol{a}$ в целом так же, по “такой же схеме”, как мы получили в (6)... □

2.2. # 6.3

Задача. *Выписать необходимое и достаточное условие, при котором прямые* $l_1 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_1 t$ *и* $l_2 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a}_2 t$

- *пересекаются в одной точке*
- *скрещиваются*

[1] В общей декартовой системе это **не** векторное произведение. На формулу надо смотреть именно так, как она написана: определитель некоторой матрицы.

- *параллельны, но не совпадают*
- *совпадают*

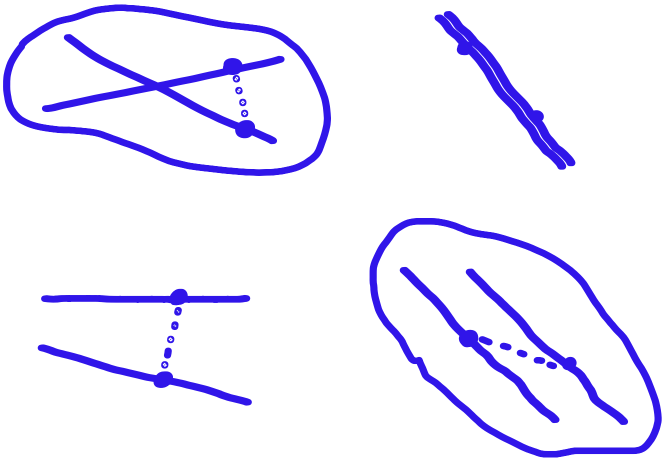

Рис. 3: Возможные случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве.

Решение. Для пересечения надо потребовать $\boldsymbol{a}_1 \nparallel \boldsymbol{a}_2$ (3).

На плоскости этого было достаточно. В пространстве же это условие подходит ещё и для скрещивания. Надо как-то "разделить" пересечение и скрещивание. Прямые скрещиваются, если не лежат в одной плоскости. Отсюда можно заметить, что для скрещивающихся прямых векторы $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ будут некомпланарны. И наоборот: если указанные векторы компланарны, то прямые будут лежать в одной плоскости. Итого, условие скрещивания:

$$\begin{cases} [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] \neq \boldsymbol{0} \\ (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \neq 0 \end{cases}$$

где воспользовались тем, что условие $\boldsymbol{a}_1 \nparallel \boldsymbol{a}_2$ можно переписать в пространстве как $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] \neq \boldsymbol{0}$.

Пересечение в одной точке определяется такими условиями:

$$\begin{cases} [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] \neq \boldsymbol{0} \\ (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 0 \end{cases}$$

Чтобы перейти к следующим случаям взаимного расположения прямых в пространстве (параллельность и совпадение), можно сразу обратить условие неколлинеарности направляющих векторов. То есть в оставшихся случаях имеем $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = \boldsymbol{0}$. На самом деле мы уже как бы перешли в плоскость, а с плоскостью уже разобрались в прошлый раз. Поэтому можно сразу написать, что параллельность, но не совпадение — это

$$\begin{cases} [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = \boldsymbol{0} \\ [\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1] \neq \boldsymbol{0} \end{cases}$$

И совпадение:

$$\begin{cases} [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = \boldsymbol{0} \\ [\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1] = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

□

2.3. # 6.10(1)

Задача. *Составить уравнение проекции l' прямой $l: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$ $(t \in \mathbb{R})$, не перпендикулярной плоскости $\alpha: (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$, на эту плоскость.*

Решение. Раз прямая l и плоскость α не перпендикулярны, то проекцией l на α также будет прямая (а не точка).

Случай 1: пересечение. Допустим, прямая l и плоскость α пересекаются в некоторой точке $M(\boldsymbol{r}_1)$ (см. рисунок 4). Найдём её:

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t_1 \\ (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) = D \end{cases}$$

$$(\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t_1, \boldsymbol{n}) = D \Rightarrow t_1 = \frac{D - (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})}$$

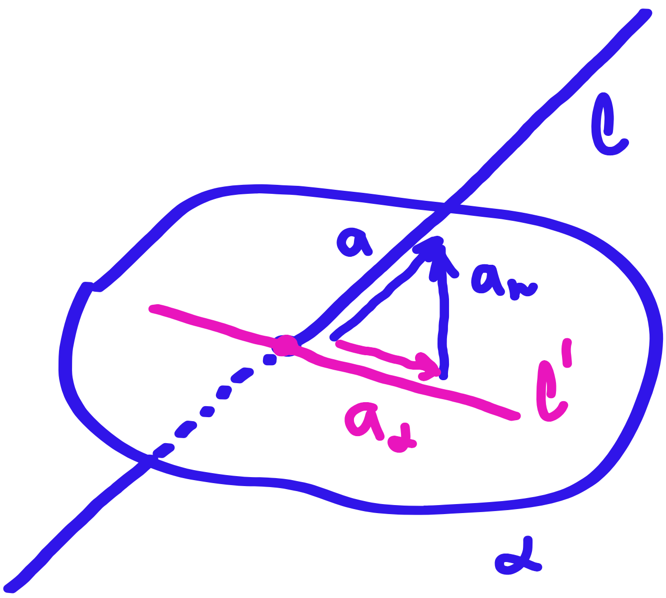

Рис. 4: Проекция прямой на плоскость в случае пересечения прямой и плоскости.

Чем определяется прямая l'? Точка M принадлежит также и l'. Таким образом, для "полного понимания" l' не хватает только направляющего вектора. Но его можно найти, зная направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ прямой l. Действительно, упомянутый $\boldsymbol{a}$ можно представить как сумму двух векторов: $\boldsymbol{a}_n$, параллельного $\boldsymbol{n}$, и $\boldsymbol{a}_\alpha$, перпендикулярного ему (то есть лежащего в плоскости α):

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_\alpha, \quad \boldsymbol{a}_n \parallel \boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}_\alpha \perp \boldsymbol{n}$$

Но составляющая $\boldsymbol{a}_\alpha$ — и есть направляющий вектор l':

$$\boldsymbol{a}_\alpha = \boldsymbol{a} - \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})}{|\boldsymbol{n}|^2}\boldsymbol{n}$$

И тогда уравнение прямой l':

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_\alpha t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Случай 2: нет пересечения. Но возможен и такой случай, когда прямая l *параллельна* плоскости α (5). В этом случае уже нет никакой "особой" точки, за которую можно бы

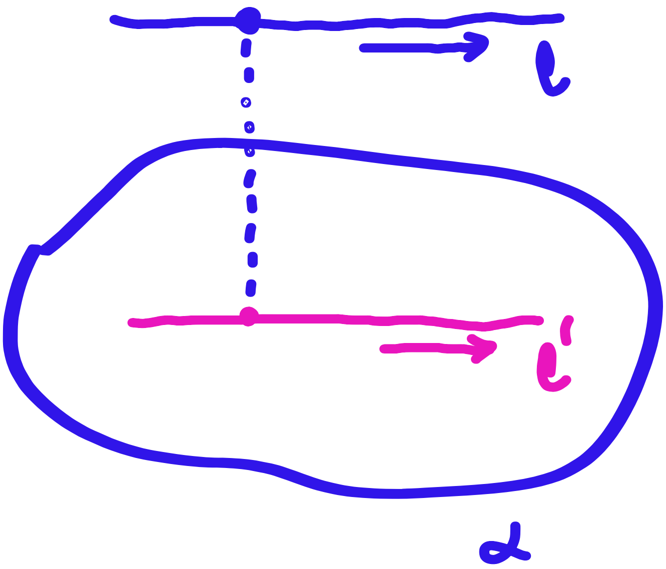

Рис. 5: Проекция прямой на плоскость в случае, когда прямая и плоскость не пересекаются.

было "зацепиться". Но можно... просто взять некоторую случайную точку с прямой l и спроецировать её на α. Получим точку с l'. А направляющий вектор l' будем таким же, как у l.

Спроецируем на α точку $\boldsymbol{r}_0$. Пусть радиус-вектор ортогональной проекции есть $\boldsymbol{r}_0'$. Тогда условия, однозначно задающие $\boldsymbol{r}_0'$:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_0') \parallel \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{r}_0' \in \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_0' = k\boldsymbol{n} \\ (\boldsymbol{r}_0', \boldsymbol{n}) = D \end{cases}$$

$$(\boldsymbol{r}_0 - k\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}) = D \Rightarrow k = \frac{(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) - D}{|\boldsymbol{n}|^2}$$

Уравнение проекции l':

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0' + \boldsymbol{a}t, \quad t \in \mathbb{R}$$

□

2.4. # 6.10(4) + # 6.11(8)

Задача. *Составить уравнение прямой, пересекающей две скрещивающиеся прямые*

$$l_1 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_1 t$$

$$l_2 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a}_2 t$$

под прямыми углами (общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым). Найти расстояние между прямыми l_1 и l_2.

Решение.

Способ 1: "понятный, но долгий". Пусть прямая – общий перпендикуляр пересекает прямые l_1 и l_2 в точках $P(\boldsymbol{r}_p)$ и $Q(\boldsymbol{r}_q)$ соответственно. Эти точки можно найти. Они однозначно определяются следующим набором условий:

$$\begin{cases} P \in l_1 \\ Q \in l_2 \\ \overrightarrow{PQ} \perp \boldsymbol{a}_1 \\ \overrightarrow{PQ} \perp \boldsymbol{a}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{r}_p = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_1 t_p \\ \boldsymbol{r}_q = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a}_2 t_q \\ (\boldsymbol{r}_q - \boldsymbol{r}_p, \boldsymbol{a}_1) = 0 \\ (\boldsymbol{r}_q - \boldsymbol{r}_p, \boldsymbol{a}_2) = 0 \end{cases}$$

При подстановке $\boldsymbol{r}_p$ и $\boldsymbol{r}_q$ из первого и второго уравнений в третье и четвёртое, получаем систему линейных уравнений 2×2 относительно t_p и t_q. Её точно можно будет решить (в процессе решения должно будет "вылезти" условие того, что прямые должны скрещиваться). Найдя t_p и t_q, можно будет вычислить $\boldsymbol{r}_p$ и $\boldsymbol{r}_q$. А далее можно уже получить и уравнение общего перпендикуляра (на тот момент будем знать и начальную точку, и направляющий вектор), и длину $PQ = |\boldsymbol{r}_q - \boldsymbol{r}_p|$ — расстояние между прямыми l_1 и l_2. Но… есть способ решения покороче.

Способ 2 (перпендикуляр): "непонятный, но покороче", или "а так вообще… можно?.." Найдём уравнение общего перпендикуляра как прямой, являющейся пересечением двух плоскостей α и β (6). Первая плоскость α проходит через прямую l_1 и общий перпендикуляр. Вторая плоскость β проходит через прямую l_2 и общий перпендикуляр. (Очевидно, плоскости α и β пересекаются по искомому перпендикуляру.) Какие уравнения описывают указанные плоскости?

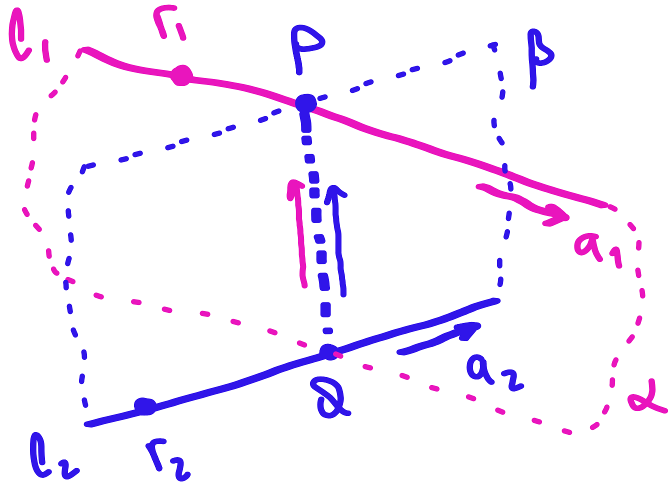

Рис. 6: К поиску общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым.

Ещё раз посмотрим на α. Раз $l_1 \subset \alpha$, то и точка с радиусом-вектором $\boldsymbol{r}_1$ (начальная точка прямой l_1) лежит на α. В то же время $\boldsymbol{a}_1$ и направляющий вектор общего перпендикуляра будут направляющими векторами плоскости α (неколлинеарными). Направляющий вектор общего перпендикуляра можно выбрать как $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$. Таким образом, для точки плоскости α с радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$ и только для такой точки верно, что векторы $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{a}_1$, $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ оказываются компланарны. Аналогично, компланарны будут векторы $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{a}_2$ и $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ для любой точки с радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$ на плоскости β. Объединяя уравнения описанных плоскостей в систему, получаем… "уравнение" общего перпендикуляра:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]) = 0 \\ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}_2, [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]) = 0 \end{cases}$$

Способ 2 (расстояние).

Перейдём к вопросу о расстоянии между скрещивающимися прямыми. Один возможный вариант решения уже разобрали (через поиск радиусов-векторов $\boldsymbol{r}_p$ и $\boldsymbol{r}_q$). Рассмотрим ещё один несложный способ.

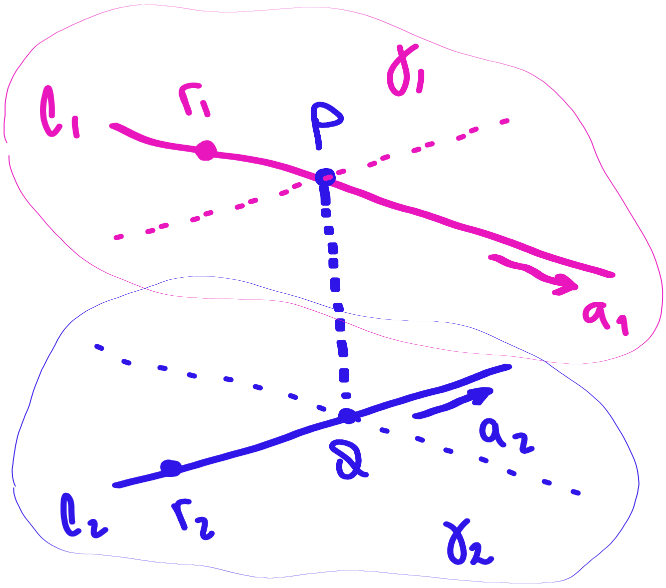

Рис. 7: К поиску расстояния между скрещивающимися прямыми.

Перенесём параллельно прямую l_2 до пересечения с l_1. Получим плоскость γ_1, проходящую через l_1 и параллельную также l_2 (7). Перенесём также параллельно l_1 до пересечения с l_2, получим плоскость γ_2. Не сложно видеть, что расстояние между l_1 и l_2 есть расстояние между γ_1 и γ_2. Которое равно расстоянию от некоторой точки плоскости γ_2 (например, точки $\boldsymbol{r}_2$) до плоскости γ_1. Но это просто "расстояние от точки до плоскости", которое можно посчитать по формуле (4). При этом точка, от которой считаем расстояние — это $\boldsymbol{r}_2$; начальная точка плоскости γ_1 — это $\boldsymbol{r}_1$; а вектор нормали к плоскости γ_1 можно взять как $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$:

$$\rho(l_1, l_2) = \left| \frac{(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2])}{|[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]|} \right|$$

Если посмотреть теперь внимательнее на полученную формулу, то можно увидеть за ней ещё такой смысл. Искомое расстояние — это высота параллелепипеда, построенного на векторах $(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$. Высота, проведённая к основанию, соответствующему векторам $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$. □

2.5. # 6.18(1)

Задача. *Составить уравнение прямой l, проходящей через точку $A(1, 3, 1)$ и параллельной прямой l_2, заданной как пересечение плоскостей:*

$$l_2: \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ 2x + 3y + z \phantom{{}+2} = 0 \end{cases}$$

Решение. Уже дана начальная точка $\boldsymbol{r}_0$ прямой l. Не хватает только, например, направляющего вектора. Который, очевидно, надо искать из условия параллельности l и l_2.

Раз прямые параллельны, то в качестве направляющего l можно взять направляющий l_2. Его же можно найти по формуле (9):

$$\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (4, -3, 1)$$

Итого, уравнение прямой l:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$$

Расписывая в координатах:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Или в каноническом виде:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-1}{1}$$

□

2.6. # 6.17(1)

Задача. *Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $A(1, -1, 2)$ и параллельной плоскости α_2, заданной уравнением в общей декартовой системе координат:*

$$\alpha_2 : \; x - 3y + 2z + 1 = 0$$

Решение. Раз плоскости параллельны, то должны быть пропорциональны коэффициенты A, B, C в их уравнениях вида (1). Почему так — можно понять из такого наблюдения. Если известен нормальный вектор плоскости $\boldsymbol{n}$, то её можно описать уравнением:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) = 0$$

Разложим радиус-вектор точки плоскости $\boldsymbol{r}$ по базису:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$$

Теперь подставим в нормальное уравнение плоскости:

$$\underbrace{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{n})}_{A} x + \underbrace{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{n})}_{B} y + \underbrace{(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{n})}_{C} z - (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) = 0$$

Отсюда видно, что при параллельных векторах нормали коэффициенты перед переменными в уравнениях плоскостей пропорциональны.

Итак, уравнение плоскости α можно искать в виде:

$$x - 3y + 2z + D = 0$$

Подставляя координаты точки A, находим D:

$$1 - 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow D = -8$$

Итоговое уравнение:

$$x - 3y + 2z - 8 = 0$$

□