Семинар 2

Алексеев Василий

8 сентября 2022

Содержание

1. Вектора (-ы?)

Вектор — направленный отрезок (1). Вектор можно обозначать одной строчной буквой, например $\boldsymbol{a}$, или двумя: началом и концом, например $\overrightarrow{AB}$.

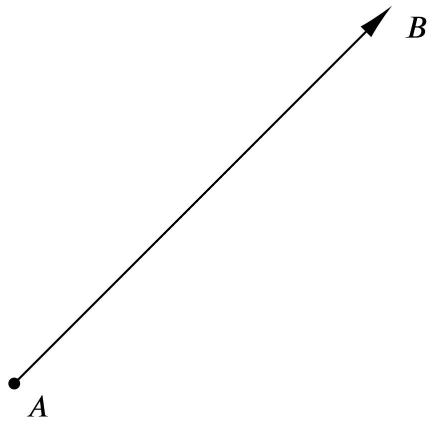

Рис. 1: Вектор характеризуется направлением и величиной.

Определение 1.1 (Коллинеарность)**.** Два ненулевых вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются *коллинеарными*, если существует прямая, которой они параллельны (2). Коллинеарность обозначается $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$. Если при этом $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ направлены в одну сторону, то можно писать $\boldsymbol{a} \upuparrows \boldsymbol{b}$, если в разные стороны — $\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{b}$. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

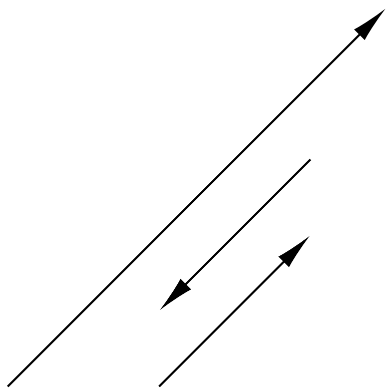

Рис. 2: Коллинеарные вектора.

Определение 1.2 (Компланарность)**.** Три ненулевых вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны (3). Три вектора, два из которых ненулевые, а третий нулевой, всегда компланарны.

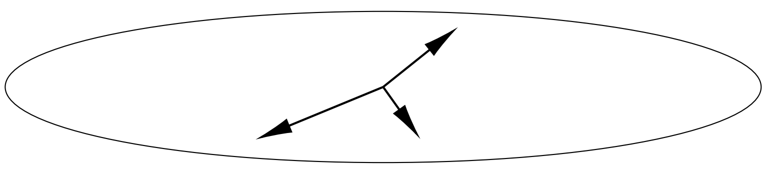

Рис. 3: Компланарные вектора.

Определение 1.3 (Равенство векторов)**.** Будем считать два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равными, если они

- равны по длине $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$
- одинаково направлены $\boldsymbol{a} \upuparrows \boldsymbol{b}$

(То есть, хоть у вектора есть ещё "начало" и "конец", при сравнении они не учитываются.)

На множестве векторов можно определить следующие операции:

- Сложение векторов (по правилу треугольника):
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$
- Умножение вектора $\boldsymbol{a}$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$. Результирующий вектор обозначается как $\alpha\boldsymbol{a}$ и определяется свойствами:
$$\begin{cases} |\alpha\boldsymbol{a}| = |\alpha| \cdot |\boldsymbol{a}| \\ \begin{cases} \alpha\boldsymbol{a} \upuparrows \boldsymbol{a}, \alpha > 0 \\ \alpha\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{a}, \alpha < 0 \end{cases} \end{cases}$$
(при $\alpha = 0$ будет нулевой вектор, и которого нет определённого направления).

Множество векторов в $\mathbb{R}^3$ с введёнными операциями сложения и умножения на число из $\mathbb{R}$ образуют линейное пространство[1].

Замечание. В чём можно убедиться, проверив следующие свойства операций, введённых на множестве векторов (обозначим за V векторы трёхмерного пространства):

1. $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}, \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ (ассоциативность сложения).
2. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}, \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ (коммутативность сложения).
3. $\exists \boldsymbol{0} \in V \,:\, \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}, \forall \boldsymbol{a} \in V$.
4. $\forall \boldsymbol{a} \in V \, \exists {-\boldsymbol{a}} \in V \,:\, \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$.
5. $\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{a} \in V$ (ассоциативность умножения на скаляр).
6. $1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}, \forall \boldsymbol{a} \in V$.
7. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \boldsymbol{a} \in V$ (дистрибутивность умножения матрицы на число относительно сложения чисел).
8. $\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ (дистрибутивность умножения матрицы на число относительно сложения матриц).

Но рассмотрим векторы на одной прямой: сложение и умножение на число не выводят с прямой. То же самое с векторами на плоскости: сложение и умножение на число даёт вектор, также лежащий в той же плоскости. Таким образом, не только векторы из всего $\mathbb{R}^3$ образуют линейное пространство, но и векторы, параллельные одной прямой, и векторы, параллельные одной плоскости. Множество векторов из одного нулевого вектора также образуют линейное пространство. Таким образом,

[1] Формально $\mathbb{R}^3$ — это не векторы как направленные отрезки, а столбцы из чисел. Но мы иногда будем использовать обозначения $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ не только для векторов-столбцов, но и для векторов — направленных отрезков на плоскости и в трёхмерном пространстве соответственно.

- нульмерное векторное пространство — нулевой вектор
- одномерное векторное пространство

$$\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{v} \parallel l\}, \quad l \text{ — прямая}$$

- двумерное векторное пространство

$$\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{v} \parallel \alpha\}, \quad \alpha \text{ — плоскость}$$

- трёхмерное векторное пространство — $\mathbb{R}^3$

Определение 1.4. Линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ с коэффициентами $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n$$

Нетривиальная линейная комбинация — когда хотя бы один их коэффициентов α_i отличен от нуля: $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 0$.

Определение 1.5 (Линейно зависимая система векторов)**.** Система векторов $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ называется линейно зависимой, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору:

$$\begin{cases} \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n = \mathbf{0} \\ \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 > 0 \end{cases}$$

Пример. Система из одного нулевого вектора линейно зависима.

Теорема 1.1. *Система из $k > 1$ вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов системы представим как линейная комбинация остальных.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ — линейно зависимы. Это значит, что

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$$

и некоторый $\alpha_j \neq 0$. Поэтому

$$\alpha_j = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq j}} -\frac{\alpha_i}{\alpha_j} \boldsymbol{a}_i$$

И наоборот, пусть некоторый $\boldsymbol{a}_j$ представим как линейная комбинация остальных векторов из набора с коэффициентами α_i':

$$\boldsymbol{a}_j = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq j}} \alpha_i' \boldsymbol{a}_i$$

Тогда

$$\alpha_1' \boldsymbol{a}_1 + \ldots + (-1) \cdot \boldsymbol{a}_j + \ldots + \alpha_n' \boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$$

и по крайней мере один коэффициент -1 при разложении нуля $\mathbf{0}$ в линейную комбинацию векторов $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1}^n$ не равен нулю. □

Теорема 1.2. *Критерии линейной зависимости систем векторов:*

- *Один вектор линейно зависим ⇔ это нулевой вектор.*
- *Два вектора линейно зависимы ⇔ эти векторы коллинеарны.*
- *Три вектора линейно зависимы ⇔ эти векторы компланарны.*
- *Любые четыре вектора линейно зависимы.*

Определение 1.6 (Базис)**.** Базисом в пространстве называется система векторов, которая:

- упорядоченная (векторы перенумерованы)
- линейно независимая (только тривиальная линейная комбинация векторов равна нулевому вектору)
- полная (любой вектор пространства можно представить как линейную комбинацию векторов системы)

Из теоремы (1.2) следует, что

- В нулевом пространстве не существует базиса.
- В одномерном пространстве ненулевой вектор образует базис.
- В двумерном пространстве пара неколлинеарных векторов образует базис.
- В трёхмерном пространстве тройка некомпланарных векторов образует базис.

Замечание. При заданном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ каждому вектору можно поставить в соответствие набор чисел — коэффициентов при разложении вектора по базису $\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \dots + \alpha_n \boldsymbol{e}_n$:

$$\boldsymbol{a} \leftrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$$

Соответствие взаимно однозначное (каждому вектору соответствует один координатный столбец и каждому столбцу соответствует один вектор), потому что базисная система векторов линейно независима. Более того, сложение векторов — направленных отрезков соответствует сложению их координатных столбцов (у вектора — результата сложения координатный столбец в базисе равен сумме координатных столбцов векторов-слагаемых). И умножение вектора на число соответствует умножению его координатного столбца на это же самое число. То есть между векторами — направленными отрезками и векторами — координатными столбцами соответствие не просто взаимно однозначное, но такое, при котором ещё сохраняются линейные операции.

Таким образом, выбор базиса, с одной стороны, позволяет *однозначно определить* вектор как набор компонент. С другой стороны, выбор базиса также даёт возможность *проводить операции* (сложения, умножения на число) уже не с векторами, а с их координатными столбцами.

Определение 1.7 (Система координат)**.** Декартовой системой координат[2] называется совокупность точки и базиса $O; \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$. Точка O называется началом системы координат.

Замечание. При заданной системе координат $O; \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ каждой точке A можно поставить в соответствие набор чисел — компонент радиуса-вектора точки в базисе $\overrightarrow{OA} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n$:

$$A \leftrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$$

[2] Помимо декартовой, есть и другие системы координат. Например полярная, когда положение точки на плоскости определяется по расстоянию r от начала координат O и по углу ϕ, которое направление из начала координат на точку образует с выбранным направлением $\boldsymbol{l}$: $\boldsymbol{a} \leftrightarrow (r, \phi)$.

1.1. Задачи

Задача (1.6)**.** $\boldsymbol{a}(-5,-1)$, $\boldsymbol{b}(-1,3)$ — *проверить, что система из двух векторов образует базис. Разложить* $\boldsymbol{c}(-1,2)$ *и* $\boldsymbol{d}(2,-6)$ *по этому базису.*

Решение. Все векторы заданы компонентами в некотором неизвестном базисе $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$.

Для доказательства того, что $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ вместе образуют базис, достаточно проверить их линейную независимость. Для проверки же линейной независимости векторов, можно проверить линейную независимость соответствующих им столбцов. Иными словами, надо проверить, что координатные столбцы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$ неколлинеарны:

$$\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \in \varnothing$$

Теперь разложим, например, вектор $\boldsymbol{c}$ по $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (с вектором $\boldsymbol{d}$ будет аналогично):

$$\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$$

Это то же самое, что разложить координатный столбец вектора $\boldsymbol{c}$ по столбцам векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\alpha-\beta\\-\alpha+3\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5 - 1\\-1 + 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$$

Решаем получившуюся систему (например, методом Крамера):

$$\Delta = \begin{vmatrix}-5 & -1\\-1 & 3\end{vmatrix} = -16$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix}-1 & -1\\-2 & 3\end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix}-5 & -1\\-1 & 2\end{vmatrix} = -11$$

И коэффициенты разложения:

$$\begin{cases}\alpha = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{1}{16}\\[2mm] \beta = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{11}{16}\end{cases}$$

Таким образом, имеем следующие представления одного и того же вектора $\boldsymbol{c}$ в разных базисах:

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)} = \begin{pmatrix}1/16\\11/16\end{pmatrix}_{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}$$

□

Задача (1.11(2))**.** *Компланарны ли* $\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$*?*

$$\begin{cases}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{m} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\end{cases} \tag{1}$$

(про векторы $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ при этом известно, что они некомпланарны).

Решение.

Способ 1.

Векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ некомпланарны $\Rightarrow$ они линейно независимы, и в трёхмерном пространстве образуют базис. Компланарность $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ равносильна их линейной зависимости:

$$\alpha \boldsymbol{l} + \beta \boldsymbol{m} + \gamma \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$$

Что, в свою очередь, равносильно линейной зависимости (с теми же коэффициентами) их координатных столбцов в выбранном базисе:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Или, в более компактном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$

Очевидно, определитель матрицы системы не равен нулю ($\Delta = 1$). То есть, по Крамеру, решение системы существует и единственно. Но нулевой вектор $(\alpha, \beta, \gamma)^T = (0, 0, 0)^T$ точно является решением (система однородная). Поэтому решение системы:

$$(\alpha, \beta, \gamma)^T = (0, 0, 0)^T$$

Но это значит, что система векторов $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ линейно независима (только их тривиальная линейная комбинация, где все коэффициенты нулевые, может быть равна нулевому вектору). То есть векторы некомпланарны.

Способ 2.

Можно же было просто… попробовать решить исходную векторную систему (1). В системе этой участвуют не числа (как обычно), а векторы (направленные отрезки). Но так как линейные операции (сложение и умножение на число) работают одинаково, что с векторами, что с числами, то мы можем попробовать решить систему относительно векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Что нам это даст, если получится выразить $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ через $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ (или если не получится)? Система $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ образует базис. То есть они линейно независимы и любой вектор пространства можно представить как их линейную комбинацию. Если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ выражаются через $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$, то потому и любой вектор пространства тоже разложится по $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$. То есть система векторов $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ тоже полная.

(…Внимательно смотрим на систему из условия задачи, понимаем, что она решается относительно $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, и $\boldsymbol{c}$…)

Могут ли теперь $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ быть линейно зависимыми? Допустим, да. Тогда максимальное количество линейно независимых векторов среди $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ — это два вектора или вообще один. В любом случае, если $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ линейно зависимы, то они компланарны (1.2). Но тогда в трёхмерном пространстве можно будет найти вектор, который по $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ разложен быть не может (который не лежит в плоскости $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$). Получаем противоречие с уже доказанной полнотой.

То есть $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$, линейно независимы, а потому некомпланарны. □

Задача (1.24(1))**.** *Даны три точки O, A, B, не лежащие на одной прямой. В качестве базиса на плоскости выбираются векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.*

Надо найти координаты вектора $\overrightarrow{OM}$, если $M \in [AB]$ и $|AM| : |MB| = m : n$.

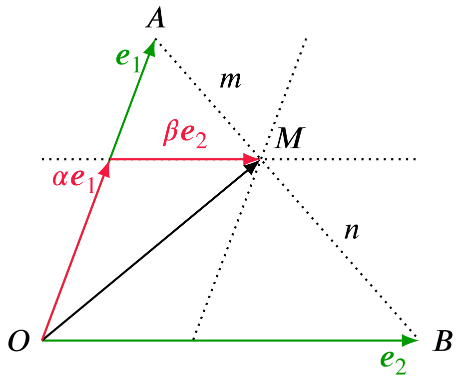

Рис. 4: Точка M лежит на отрезке AB и делит его в заданном отношении. Коэффициенты α и β — координаты вектора с началом в точке O и концом в M в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$.

Решение. Очевидно, векторы $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$, которые предлагается взять в качестве базисных, неколлинеарны, а потому в самом деле образуют базис на плоскости (4).

Векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$ отложены от одной точки — для нахождения координат $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$ можно бы было воспользоваться правилом треугольника сложения векторов: $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ (4). Решение уже "видно":

$$\overrightarrow{OM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{n+m}\overrightarrow{OB}$$

Можно бы было решить и без рисунка, "формулами", раскладывая $\overrightarrow{OM}$ по другим векторам и приходя в итоге к базисным:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})\\ &= \boldsymbol{e}_1 + \frac{m}{m+n}(-\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = \frac{n}{m+n}\boldsymbol{e}_1 + \frac{m}{m+n}\boldsymbol{e}_2\end{aligned}$$

□

Задача (1.28(2)). *Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Принимая за начало координат вершину A, а за базисные векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$, найти координаты точек K и L — середин рёбер A_1B_1 и CC_1 соответственно (см. рисунок 5).*

Решение. Координаты точек — это компоненты их радиусов-векторов в выбранном базисе. Например, координаты точки K можно найти так:

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1K} = \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1B_1} = \boldsymbol{e}_3 + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$$

Можно бы было "идти" из A в K и по-другому. Например, ещё вариант:

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1K} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$$

□

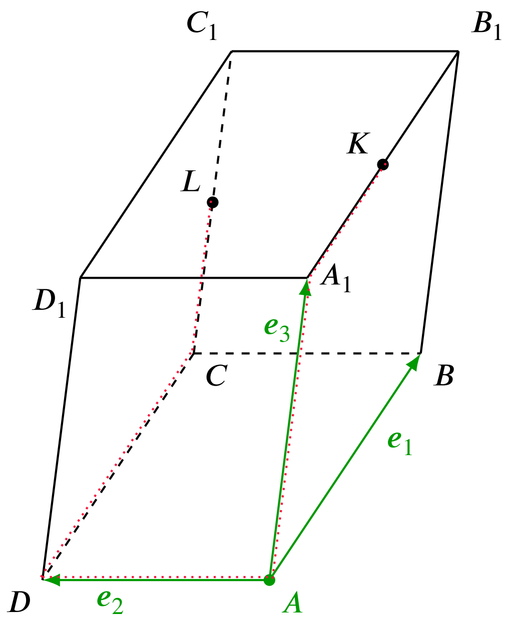

Рис. 5: Параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и выбранная система координат $A; (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.

2. Дополнение

2.1. Про матричное умножение

Почему матричное умножение введено именно так?

$$C_{m\times n} = A_{m\times p} B_{p\times n},\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kn},\ 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$$

Пусть есть ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$. То есть базис, в котором вектора взаимно перпендикулярны и по длине равны единице 1. Повернём вектор $\boldsymbol{v}$ с компонентами $(1, 0)$ на угол 45 градусов против часовой стрелки (6).

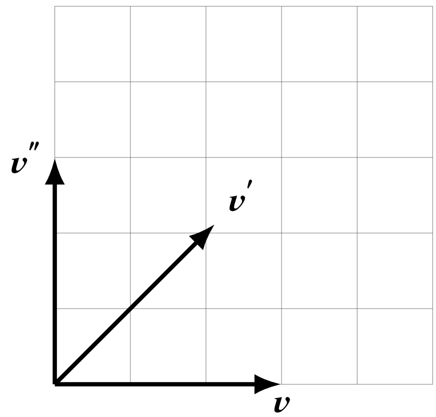

Рис. 6: Несколько поворотов вектора $\boldsymbol{v}$ на 45 градусов против часовой стрелки.

Получим вектор $\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$. Проверим, что матрица $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ как раз задаёт нужное преобразование (умноженная на исходный вектор даёт вектор — результат поворота):

$$v' = A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Снова повернём вектор на угол 45 градусов против часовой стрелки. Должны получить вектор с компонентами $(0, 1)$:

$$v'' = A\boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Какой матрицей задаётся поворот сразу на 90 градусов против часовой стрелки? Как из вектора $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ сразу получить вектор $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$?

Возведём матрицу, задающую поворот на 45 против часовой стрелки, в квадрат:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и умножим её на исходный вектор $\boldsymbol{v}$:

$$A^2\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, благодаря введённому матричному умножению, матрица композиции линейных преобразований получилась равна произведению матриц этих преобразований.

2.2. Ещё задача

Задача (1.36). *Имея радиус-векторы вершин треугольника $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$, найти радиус-вектор центра окружности, вписанной в треугольник.*

Решение. Пусть O — точка пересечения биссектрис $\triangle ABC$ (то есть центр вписанной окружности). Пусть OH — перпендикуляр, опущенный из O к стороне AC (то есть $|OH| = r$, где r — радиус вписанной окружности) (7). Обозначим угол $\angle BAC$ за α: $\angle BAC = \alpha$.

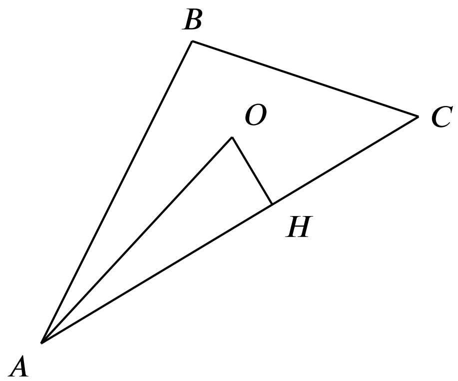

Рис. 7: Точка O пересечения биссектрис $\triangle ABC$.

Будем искать радиус вектор точки O как $\vec{O} = \vec{A} + \overrightarrow{AO}$: положение A известно, поэтому при таком пути решения надо получить $\overrightarrow{AO}$.

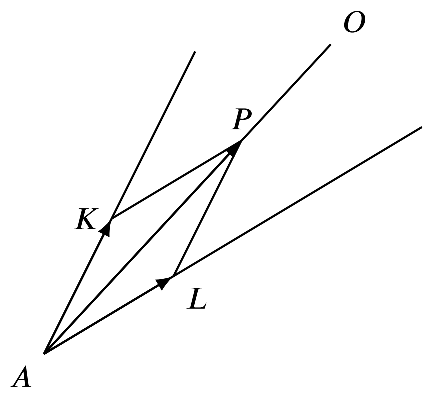

Рис. 8: Вектор $\boldsymbol{l} = \overrightarrow{AP}$ в направлении прямой AO — сумма единичных векторов $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AL}$, направленных соответственно вдоль сторон AB и AC треугольника ABC.

Начнём с того, что вектор в направлении прямой AO (8) можно получить как

$$\boldsymbol{l} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|AC|} \tag{2}$$

Но вектор не нормирован: $|\boldsymbol{l}| \neq 1$. И сходу посчитать его модуль мы не можем (базис в задаче общий, не обязательно ортонормированный, поэтому скалярное произведение не выражается *только* через компоненты векторов). Но модуль можно так выразить через угол α с помощью теоремы синусов для треугольника APL (8):

$$\frac{AP}{\sin\angle ALP} = \frac{PL}{\sin\angle PAL}$$

или, переходя к обозначениям $\boldsymbol{l}$ и α и пользуясь тем, что $|PL| = 1$ по построению:

$$\frac{|\boldsymbol{l}|}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

В итоге получаем

$$|\boldsymbol{l}| = \frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} \tag{3}$$

Рассмотрим $\triangle AOH$ (7). Сторона AO:

$$AO = \frac{OH}{\sin\angle OAH} = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Вектор $\overrightarrow{AO}$:

$$\overrightarrow{AO} = \frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|} \cdot |AO| \overset{(3)}{=} \frac{\boldsymbol{l}}{\sin\alpha \big/ \sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \boldsymbol{l} \cdot \frac{r}{\sin\alpha} = \bigstar$$

Радиус r можно выразить через формулы для нахождения площади треугольника $\triangle ABC$:

$$S_{\triangle ABC} = pr = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin\alpha \Rightarrow \frac{bc\sin\alpha}{2p}$$

где p — полупериметр $\triangle ABC$, $b \equiv AC$, $c \equiv AB$.

И тогда, возвращаясь к нахождению вектора $\overrightarrow{AO}$:

$$\bigstar = \boldsymbol{l} \cdot \frac{r}{\sin\alpha} = \boldsymbol{l} \cdot \frac{bc}{2p} = \blacktriangledown$$

Далее можно подставить вместо $\boldsymbol{l}$ его выражение через вектора $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A$ и $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A$ (2) и вместо p его выражение через длины сторон $\triangle ABC$ ($BC \equiv a$):

$$\blacktriangledown = \left(\frac{\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A}{b} + \frac{\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A}{c}\right) \cdot \frac{bc}{a+b+c} = \frac{c(\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A) + b(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A)}{a+b+c}$$

И в итоге для радиуса-вектора центра вписанной окружности O получаем выражение:

$$\boldsymbol{r}_O = \boldsymbol{r}_A + \overrightarrow{AO} = \frac{a\boldsymbol{r}_A + b\boldsymbol{r}_B + c\boldsymbol{r}_C}{a+b+c} = \frac{|\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_B|\boldsymbol{r}_A + |\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A|\boldsymbol{r}_B + |\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B|\boldsymbol{r}_C}{|\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_B| + |\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A| + |\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B|}$$

$\square$