Семинар 12

Алексеев Василий

1 + 5 декабря 2022

Содержание

1. Матрицы: “Вспомнить всё”

С матрицами мы уже познакомились на самом первом семинаре. Вспомним же, “что там было”, и обсудим ещё кое-что сверх.

Вещественная матрица A размера $m \times n$ — это “таблица” из чисел размера m строк на n столбцов $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ($i = 1 \dots m$, $j = 1 \dots n$):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

1.1. Операции с матрицами

Определение 1.1 (Сложение матриц)**.** Пусть $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Суммой $A + B$ называется матрица $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, такая что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = 1 \dots m$, $j = 1 \dots n$).

Определение 1.2 (Умножение матрицы на число)**.** Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Произведением матрицы A на число α называется матрица $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, такая что $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ ($i = 1 \dots m$, $j = 1 \dots n$).

Замечание. Множество матриц одного размера с введёнными операциями сложения и умножения на число образуют *линейное пространство*.

Определение 1.3 (Умножение матриц)**.** Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Тогда матрица $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ называется произведением матриц A и B, если

$$\begin{cases} c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \\ 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{cases}$$

и обозначается $C = AB$.

Замечание. Почему матричное умножение введено именно так?

$$C_{m \times n} = A_{m \times p} B_{p \times n}, \; c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kn}, \; 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$$

Пусть есть ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$. То есть базис, в котором вектора взаимно перпендикулярны и по длине равны единице 1. Повернём вектор $\boldsymbol{v}$ с компонентами $(1, 0)$ на угол 45 градусов против часовой стрелки (1).

Получим вектор $\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$. Проверим, что матрица $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ как раз задаёт нужное преобразование (умноженная на исходный вектор даёт вектор — результат поворота):

$$v' = A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

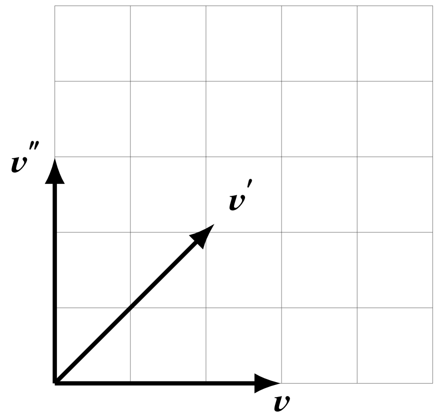

Рис. 1: Несколько поворотов вектора $\boldsymbol{v}$ на 45 градусов против часовой стрелки.

Снова повернём вектор на угол 45 градусов против часовой стрелки. Должны получить вектор с компонентами $(0, 1)$:

$$v'' = A\boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Какой матрицей задаётся поворот сразу на 90 градусов против часовой стрелки? Как из вектора $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ сразу получить вектор $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$?

Возведём матрицу, задающую поворот на 45 против часовой стрелки, в квадрат:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

и умножим её на исходный вектор $\boldsymbol{v}$:

$$A^2\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, благодаря введённому матричному умножению, матрица композиции линейных преобразований получилась равна произведению матриц этих преобразований.

Приведём ещё пару небесполезных определений, связанных с матрицами.

Определение 1.4 (Единичная матрица)**.** Матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется единичной, если она нулевая, кроме главной диагонали ($\{a_{ij} \mid i = j\}$), на которой стоят единицы. То есть $a_{ij} = 1$ при $i = j$ и $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица обычно обозначается E или I.

Определение 1.5 (Транспонирование матрицы)**.** Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Тогда транспонированной по отношению к матрице A называется матрица $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$, такая что $c_{ij} = a_{ji}$ $(i = 1 \dots n,\ j = 1 \dots m)$. Транспонированная матрица обозначается A^T.

Пример. О транспонировании можно думать как о замене строк матрицы на столбцы и наоборот. Либо как об отражении элементов матрицы относительно главной диагонали:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}^T$$

Определение 1.6 (След матрицы). Следом квадратной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется сумма элементов, находящихся на главной диагонали $\{a_{ij} \mid i = j,\ i = 0 \dots n\}$:

$$\begin{cases} \mathrm{Sp}: \ \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} \\ \mathrm{Sp}: \ A \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} \end{cases}$$

У следа есть несколько возможных обозначений. Ещё одно, например, $\operatorname{Tr} A$.

1.2. Определитель матрицы

Об определителе можно думать как об особой числовой функции на множестве квадратных матриц, обозначаемой det или $|\cdot|$

$$\det: \ \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$

Существует несколько эквивалентных способов определения det: через свойства функции, конкретную формулу вычисления по элементам матрицы (6) при произвольном n. Мы пока опустим строгое определение det и просто посмотрим, как его можно вычислять для квадратных матриц размерностей 2 и 3.

Определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Определитель третьего порядка. Способ вычисления "разложением по первой строке" (перебираем элементы первой строки; чередуем знаки начиная с плюса; домножаем на определитель матрицы, остающейся после вычёркивания строчки и столбца, где стоит текущий элемент первой строки):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 \end{aligned} \tag{2}$$

Но и при более высоких порядках (четыре и далее) можно использовать тот же алгоритм разложения по первой строке, сводя вычисление определителя порядка n к вычислению нескольких определителей порядка $n - 1$. Даже если мы ещё раз посмотрим на определитель второго порядка, то увидим, что он тоже может быть посчитан разложением по первой строке, если положить определитель матрицы размера 1×1 из одного элемента равным этому самому элементу:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot |d| - b \cdot |c| \xrightarrow{|x| \equiv x} ad - cb$$

Таким образом, мы уже фактически пришли к следующему варианту определить функцию det:

Определение 1.7 (Определитель (рекурсивный вариант определения через разложение по первой строке))**.** Положим определитель матрицы из одного элемента равным этому самому элементу

$$\det\left(a\right) \equiv a$$

Пусть M_{ij} — определитель подматрицы матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, которая получается при вычёркивании i-ой строки и j-го столбца (*дополнительный минор*, соответствующий элементу a_{ij}). Тогда определитель матрицы A:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} \tag{3}$$

Утверждение 1.1. Оказывается, не обязательно раскладывать определитель только по первой строчке. Можно раскладывать *по любой*. При этом получится *то же самое*, что и при разложении по первой строке. Только знаки надо чередовать по-разному: то начиная с "плюса", то начиная с "минуса" (зависит от номера строки). Итак, формула *разложения определителя по i-ой строке*:

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}} \tag{4}$$

Более того, раскладывать можно не только по строчке, но и *по столбцу*. И тоже — по любому. Формула *разложения по j-ому столбцу*:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \tag{5}$$

Определение 1.8 (Вырожденная матрица (возможный вариант определения))**.** Матрица A называется вырожденной, если её строки линейно зависимы.[1] В противном случае матрица A называется невырожденной.

Утверждение 1.2. Матрица A вырождена тогда и только тогда, когда $\det A = 0$.

"Другой взгляд" на определитель даёт следующая теорема (можно бы было взять утверждение этой теоремы в качестве определения детерминанта, но тогда рекурсивное определение до этого было бы "теоремой" — суть в том, что детерминант получается "одинаковый", каким бы способом его ни считать).

Теорема 1.1 (Формула полного разложения определителя)**.** *Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Тогда определитель* $\det A$ *матрицы равен*

$$\det A = \sum_{(j_1,\ldots,j_n)} (-1)^{N(j_1,\ldots,j_n)} a_{1j_1} \ldots a_{nj_n} \tag{6}$$

где $N(j_1, \ldots, j_n)$ — число нарушений порядка в перестановке чисел $j_1, \ldots, j_n$[2]*. Сумма в формуле берётся по всем перестановкам чисел $1, \ldots, n$*[3]*.*

[1] Можно сложить с не равными нулю одновременно коэффициентами так, чтобы получилась нулевая строка.

[2] Нарушение порядка — когда правее большего элемента стоит меньший элемент. Например, перестановка $(2, 1)$, в ней $j_1 = 2 > 1 = j_2$.

[3] Например, перестановки чисел $1, 2, 3$: $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$.

Пример. Вспомним формулу вычисления определителя для матрицы размера 3:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 \tag{7}$$

Элементы в каждом слагаемом упорядочены по номеру столбца. Поэтому посмотрим на число беспорядков по строкам (неважно, как считать беспорядки, по строкам или по столбцам, потому что $\det A = \det A^T$). В первом слагаемом: $N(1,2,3) = 0$. Во втором: $N(1,3,2) = 1$ (тройка и двойка). В третьем: $N(2,1,3) = 1$ (двойка и единица). В четвёртом: $N(3,1,2) = 2$ (два беспорядка с тройкой и единицей и тройкой и двойкой). В пятом: $N(2,3,1) = 1+1 = 2$ (для двойки и единицы и для тройки и единицы). В шестом: $N(3,2,1) = 2+1 = 3$ (тройка-двойка, тройка-единица, двойка-единица).

Доказательство. "Поймём", почему работает формула полного разложения, откуда она берётся. На самом деле идея, как можно будет заметить, не очень сложная. При разложении определителя по первой строке чередуется знак: "плюс", "минус", "плюс" и т.д. То есть первый элемент — "плюс". Но с ним и не будет связано ни одного беспорядка! (Ведь первый элемент первой строки домножается на определитель подматрицы, где все элементы из столбцов "правее" первого.) Второй элемент — перед ним стоит "минус". Но он и создаёт ровно один беспорядок. (В определителе подматрицы, на который домножается второй элемент первой строки, будут все столбцы, что правее второго в исходной матрице и *ещё первый столбец*, у которого номер меньше, но который в перестановке тоже окажется правее.) И так далее для других элементов первой строки. Аналогично раскручиваем определители подматриц, и приходим к формуле полного разложения.

Это было "идейно". "По-нормальному" же формулу можно доказать с помощью математической индукции. База уже есть: формула полного разложения верна для определителей второго — и даже третьего, как проверили в примере (7) — порядка. Теперь переход. Разложим определитель $n > 3$ порядка по первой строке (3), при этом считая верной формулу полного разложения для определителей всех порядков меньше n.

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_{n-1}) \\ k_1,\ldots,k_{n-1} \neq j}} (-1)^{N(k_1,\ldots,k_{n-1})} a_{2k_1} \cdot \ldots \cdot a_{nk_{n-1}} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_{n-1}) \\ k_1,\ldots,k_{n-1} \neq j}} (-1)^{1+j+N(k_1,\ldots,k_{n-1})} a_{1j} a_{2k_1} \cdot \ldots \cdot a_{nk_{n-1}} \end{aligned} \tag{8}$$

Очевидно, "сумма" $\sum_{j=1}^{n} \sum_{(k_1,\ldots,k_{n-1})}$ есть то же самое, что просто сумма по всем перестановкам столбцов: $\sum_{(j,k_1,\ldots,k_{n-1})}$. Или, если переименовать: $\sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}$.

Но как преобразовать показатель $1+j+N(k_1,\ldots,k_{n-1})$? Сколько в перестановке $(k_1,\ldots,k_{n-1})$, где все $k_l \neq j$, находится элементов, которые *меньше j-го*? (Ведь именно столько элементов будет определять число беспорядков, связанных с номером j, в перестановке $(j,k_1,\ldots,k_{n-1})$, где все оставшиеся номера стоят правее j, и те, что больше, и те, что меньше.) Очевидно, их $j-1$. Таким образом, общее число беспорядков в перестановке $(j,k_1,\ldots,k_{n-1})$ есть сумма того числа беспорядков, что были в перестановке $(k_1,\ldots,k_{n-1})$, плюс "новые" за счёт j:

$$N(j,k_1,\ldots,k_{n-1}) = N(k_1,\ldots,k_{n-1}) + j - 1$$

Но при этом, очевидно,

$$(-1)^{N(k_1,\dots,k_{n-1})+j-1} = (-1)^{N(k_1,\dots,k_{n-1})+j+1}$$

Поэтому "можно считать", что в показателе у (-1) в формуле стоит именно $N(j, k_1, \dots, k_{n-1})$. Или, если переименовать: $N(j_1, j_2, \dots, j_n)$.

Таким образом, складывая одно с другим (как "переписать" сумму и показатель (-1)), получаем формулу полного разложения и для определителя порядка n. □

1.2.1. Свойства

Теорема 1.2. *Некоторые свойства определителя (матрицы в формулах ниже представляются столбцами $\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^n$):*[4]

1. *Линейность по столбцу (строке) — полилинейность:*

$$\begin{cases} \det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \underbrace{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{a}_i}, \dots, \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{p}, \dots, \boldsymbol{a}_n) + \det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{q}, \dots, \boldsymbol{a}_n) \\ \det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \underbrace{\alpha\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{a}_i}, \dots, \boldsymbol{a}_n) = \alpha \det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{p}, \dots, \boldsymbol{a}_n) \end{cases} \tag{9}$$

2. *При перестановке двух столбцов (строк) матрицы её определитель меняет знак (кососимметричность, антисимметричность по столбцам/строкам):*

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_n) = -\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_n) \tag{10}$$

3. *Если два столбца (две строки) матрицы совпадают, то её определитель равен нулю:*

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{p}, \dots, \boldsymbol{p}, \dots, \boldsymbol{a}_n) = 0 \tag{11}$$

Свойство (9) очевидным образом следует из формулы полного разложения (6). Свойство (11) несложно вывести из свойства (10). Свойство же (10)... тоже следует из (6). Поймём же, почему. Пусть между столбцами i и j было ещё $k \geq 0$ столбцов. Среди этих k столбцов было $k_{>i}$ тех, номера которых больше i, а также $k_{<i}$ с номерами меньше i (то есть $k_{<i} = k - k_{>i}$). Аналогично, было $k_{>j}$ и $k_{<j} = k - k_{>j}$ столбцов среди тех же k, номера которых были соответственно больше и меньше j. Число беспорядков до перестановки столбцов i и j было равно $k_{<i} + k_{>j}$ плюс, возможно, ещё один беспорядок, если $j < i$. После же интересующей нас перестановки столбцов беспорядков станет $k_{>i} + k_{<j} = 2k - (k_{<i} + k_{>j})$ и *минус тот возможный беспорядок, который был при $j < i$*. Несложно видеть, что именно беспорядок из-за пары i и j (или возникающий, или пропадающий) и меняет знак определителя при перемене мест столбцов i и j.

И ещё пара более частных утверждений, которые следуют из/являются подслучаями свойств выше:

- Общий множитель элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя:

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \alpha\boldsymbol{p}, \dots, \boldsymbol{a}_n) = \alpha \cdot \det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{p}, \dots, \boldsymbol{a}_n) \tag{12}$$

[4] Отметим, что, вообще говоря, это зависит от способа введения понятия "определитель": те ли это свойства, которые "надо доказывать" (теорема), или же те, которые "просто принимаются как верные" (аксиома). В текущем конспекте "базовым определением" детерминанта считается рекурсивный способ (разложение по строке или столбцу). Который (отметили, но не доказывали) равносилен способу, связанному с числами беспорядков (полное разложение). Итого, вывод — надо смотреть, как детерминант определяли на лекции :) И отталкиваться от этого.

- К любой строке (столбцу) матрицы можно прибавлять линейную комбинацию других строк (столбцов) — определитель при этом не изменится:

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}} \alpha_j \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_n) \tag{13}$$

- При вычислении определителя матрицы вида αA скаляр α можно выносить за знак det следующим образом:

$$\det \alpha A = \alpha^n \det A \tag{14}$$

Пример. Определитель единичной матрицы:

$$\det E = 1^n = 1$$

Утверждение 1.3. Определитель транспонированной матрицы

$$\det A^T = \det A$$

Теорема 1.3. *Определитель произведения двух квадратных матриц:*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B \tag{15}$$

1.3. Обратная матрица

Определение 1.9. Для невырожденной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *обратной* называется матрица $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, такая что

$$AB = BA = E$$

Обратная к матрице A обозначается как A^{-1}.

Замечание. На самом деле для того, чтобы B была обратной к A, достаточно выполнения *лишь одного* из условий $AB = E$ или $BA = E$ (и тогда второе будет выполнено автоматически). При желании можно это проверить :)

Утверждение 1.4. Определитель матрицы, обратной к *невырожденной* матрице

$$\det A^{-1} = \left(\det A\right)^{-1}$$

Доказательство. Из определения обратной матрицы:

$$AA^{-1} = E$$

Возьмём определитель от обеих частей равенства, и преобразуем левую часть, пользуясь свойством (15) определителя:

$$\det\left(AA^{-1}\right) = \det(E) \Leftrightarrow \det A \det A^{-1} = 1 \Leftrightarrow \det A^{-1} = 1/\det A$$

□

Оказывается, что для данной невырожденной матрицы обратную можно сразу найти по специальной формуле. Придём же к этой формуле, например, для матрицы размера 3×3 в общем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Будем искать обратную в виде:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Мы знаем, что, раз B обратная к A, то верно, например, следующее:

$$AB = E$$

Это выражение можно рассматривать как матричное уравнения для поиска B. Чему равносильно одно такое матричное уравнение? Девяти скалярным. Девять уравнений, девять неизвестных (составляющие B)... Получится решить? Может быть, но иметь дело с системой 9 на 9 "не очень хочется"...

Посмотрим ещё раз, внимательнее, что происходит в сточке $AB = E$. Каждый элемент на позиции ij матрицы – результата произведения AB вычисляется с помощью i-ой строки A и j-го столбца B. Таким образом, элементы первого столбца B участвуют при "составлении" только первого столбца матрицы E. Аналогичная ситуация — и со всеми оставшимися столбцами (в нашем случае это, очевидно, второй и третий столбцы, а вообще, если бы матрица A была порядка n, то это бы были все столбцы вплоть до n-го). Выходит, выражение $AB = E$ на самом деле приводит нас не просто к "какой-то" системе 9 на 9, а к системе, состоящей из трёх подсистем 3×3! Которые, стоит надеяться, мы уже сможем решить...

Рассмотрим такую подсистему для поиска первого столбца $\boldsymbol{b}_1$ матрицы B:

$$A\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1$$

где $\boldsymbol{e}_1$ означает первый столбец единичной матрицы E. Система в "развёрнутом виде":

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = 0 \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} = 0 \end{cases}$$

Определитель этой системы есть просто определитель исходной матрицы $\det A$! Причём, так как A невырожденная, то $\det A \neq 0$. Поэтому систему можно решить методом Крамера:

$$b_{11} = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{1+1} M_{11}}{\det A}$$

$$b_{21} = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{1+2} M_{12}}{\det A}$$

$$b_{31} = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{1+3} M_{13}}{\det A}$$

Где при вычислении определителей пользовались разложением по "нужному" столбцу (тому, где всего одна единица). Также использовано обозначение M_{ij} для *дополнительного минора* элемента a_{ij} матрицы A (определитель подматрицы, получающейся из A вычёркиванием строки и столбца, где стоит a_{ij}, то есть вычёркиванием i-ой строки и j-го столбца).

Не сложно заметить закономерность, верную для всех элементов первого столбца B ($i = 1, 2, 3$, $j = 1$). А также и для всех столбцов B ($j = 1, 2, 3$). То есть получаем формулу для нахождения элементов обратной матрицы:

$$\boxed{b_{ij} = \frac{(-1)^{j+i} M_{ji}}{\det A}} \tag{16}$$

Упражнение. Какие формулы для вычисления элементов b_{ij} получатся, если "отталкиваться" от соотношения $BA = E$?

2. Задачи

2.1. # 14.23(11)

Вычислить определитель порядка n:

$$\Delta_n = \det A_n$$

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.

~~После 100 грамм~~ Можно "увидеть", что суммы элементов матрицы A_n по строкам и по столбцам одинаковы...

Но в таком случае сразу понятно, что стоит попробовать сделать: прибавим к одной строке, например, к первой, все остальные. Получим строку из одинаковых элементов. Определитель при этом не изменится (13). Далее вынесем общий множитель элементов первой строки "за определитель" (12) — получим строку из единиц. И потом попытаемся "упростить" все остальные строки, используя эту первую.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix} &= \big(2(n-1)+1\big) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \big(2(n-1)+1\big) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(2n-1) \end{aligned}$$

□

2.2. # 14.24(1)

Вычислить определитель порядка n (полезно получить рекуррентную формулу):

$$\Delta_n = \det A_n$$

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. По первой строчке, очевидно, раскладывать не стоит. Но по первому столбцу — вполне можно попробовать:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Первый из определителей справа уже “считается” (его самого можно разложить по первой строке, потом тот, который останется после него и т.д.). А второй, очевидно, “совсем как” исходный, только на порядок меньше. Итого, получаем формулу:

$$\Delta_n = 1 - \Delta_{n-1}$$

Но как теперь вычислить Δ_n?.. Сразу из формулы это не совсем очевидно. Поэтому посмотрим на определители меньших порядков и попытаемся “увидеть” закономерность (помня про полученную формулу):

$$\Delta_1 = |1| = 1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 = 1 - \Delta_1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 = 1 - \Delta_2$$

Кажется, теперь должно быть понятно, “что происходит”. “Прыжки” с единицы на ноль и обратно. Таким образом, приходим к формуле (не рекуррентной) для определителя порядка n:

$$\Delta_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 0 \pmod 2 \\ 1, & \text{если } n = 1 \pmod 2 \end{cases}$$

Или так:

$$\Delta_n = \frac{1 - (-1)^n}{2}$$

А можно и так:

$$\Delta_n = \left|\sin \frac{n\pi}{2}\right|$$

Или даже так:

$$\Delta_n = 1 - D\left(\sqrt{2^{|2022-n|}}\right)$$

где $D(x)$ — функция Дирихле (“индикатор” множества рациональных чисел). □

2.3. # 14.24(7)

Вычислить определитель Вандермонда порядка n (полезно получить рекуррентную формулу):

$$\Delta_n = \det V_n$$

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Решение. Решим задачу несколькими способами.

Способ 1: *“рассуждающий”.*

Вспомним формулу полного разложения (6). В случае определителя Вандермонда она примет вид:

$$\det V_n = \sum_{(j_1,\dots,j_n)} (-1)^{N(j_1,\dots,j_n)} 1 \cdot \lambda_{j_2}^1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{j_n}^{n-1} \tag{17}$$

Иными словами, сумма слагаемых, каждое из которых есть произведение элементов из разных строк и столбцов. А потому обязательно будет множитель 1 (элемент из первой строки), “какой-то λ” в первой степени (вторая строка) “какой-то λ” во второй и т.д. Суммарная степень всех лямбд в каждом из слагаемых одинакова и равна:

$$0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Таким образом, на $\det V_n$ можно смотреть как на многочлен от лямбд $p(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ степени $n(n-1)/2$.

Что ещё можно заметить “интересного”? Лямбды (n штук) — это как параметры, выбор которых определяет конкретное значение детерминанта. И если окажется так, что какая-то пара лямбд одинаковы (например, $\lambda_1 = \lambda_2$), то определитель в таком случае, по свойству (11), будет равен нулю! Сколько всего есть пар лямбд с разными номерами? Их всего

$$C_n^2 \equiv \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Получается, что определитель как многочлен от лямбд $\det V_n = p(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ должен быть кратен разностям $(\lambda_j - \lambda_i)$ при $j \neq i$:

$$p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \underbrace{(\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_{n-1} - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot (\lambda_n - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda_{n-1})}_{\prod_{j>i}(\lambda_j - \lambda_i)} \cdot q(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

где $q(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — какой-то другой многочлен от лямбд. Что можно сказать про этот многочлен? Произведение “скобок” $\prod_{j>i}(\lambda_j - \lambda_i)$ уже даёт многочлен степени $n(n-1)/2$. Поэтому многочлен q не может быть ничем иным, кроме как константой $q(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = C \in \mathbb{R}$. Чему равна эта константа? Чтобы это понять, можно либо посмотреть на определители V_n при небольших n:

$$\Delta_1 = \det V_1 = 1$$

$$\Delta_2 = \det V_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot 1$$

(Уже “создаётся впечатление”, что $C = 1$. Хотя, возможно, C просто как-то не очевидно зависит от n...)

Либо начать раскрывать скобки в выражении для $p(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, и посмотреть на член, получающийся при перемножении всех уменьшаемых:

$$p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = C \cdot \lambda_n^{n-1} \cdot \ldots \cdot \lambda_3^2 \lambda_2 + \dots$$

Но ведь это произведение $\lambda_n^{n-1} \cdot \ldots \cdot \lambda_3^2 \lambda_2$ — это ведь одно из слагаемых в формуле полного разложения (17)! Причём такое, в котором совсем нет беспорядков. Значит, $C = 1$. Итого, определитель Вандермонда порядка n:

$$\Delta_n = \det V_n = \prod_{j>i} (\lambda_j - \lambda_i) \tag{18}$$

Способ 2: “догадавшийся и преобразующий”.

Попробуем “по-честному” вычислить Δ_n. Но перед тем, как вычислять, надо как-то упростить... Можно, например, попробовать занулить как можно больше элементов в первом столбце (чтоб потом по нему разложить). Это можно сделать следующим образом. Будем из каждой строчки, начиная с последней и вплоть до второй, вычитать предыдущую, умноженную на λ_1. Определитель не поменяется (13), но первый столбец станет “проще”:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \dots & \lambda_n - \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2^2 - \lambda_2\lambda_1 & \lambda_3^2 - \lambda_3\lambda_1 & \dots & \lambda_n^2 - \lambda_n\lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda_2^{n-1} - \lambda_2^{n-2}\lambda_1 & \lambda_3^{n-1} - \lambda_3^{n-2}\lambda_1 & \dots & \lambda_n^{n-1} - \lambda_n^{n-2}\lambda_1 \end{vmatrix}$$

Теперь можно разложить по первому столбцу (упрощённому в результате преобразований) получившийся определитель, а потом вынести общий множитель из каждого столбца:

$$\Delta_n = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_2^{n-2} & \lambda_3^{n-2} & \dots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Но ведь оставшийся определитель — он “почти как исходный”, только без λ_1 (и порядок на единицу меньше). Значит, его можно преобразовать точно так же, “исключив” в результате λ_2. И так далее, до конца, пока не останется определитель два на два $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_{n-1} & \lambda_n \end{vmatrix}$. Очевидно, итоговая формула получается такая же, как раньше (18).

Способ 3: “взявший что-то от второго (некоторая догадка в начале) и от первого (рассуждения)”.

Считая все лямбды параметрами, заменим λ_n на λ (почему бы и нет). И рассмотрим следующий *многочлен от* λ:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda^{n-1} \end{vmatrix}$$

Как и раньше, замечаем, что при $\lambda = \lambda_1$ получается ноль, при $\lambda = \lambda_2$ — тоже, и т.д. Значит, многочлен $p(\lambda)$ имеет корни в точках $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то есть представим как

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_{n-1}) \cdot q(\lambda)$$

где $q(\lambda)$ — какой-то другой многочлен. Какой? Мы ведь ещё точно знаем, что в точке λ_n многочлен p равен значению определителя Δ_n:

$$p(\lambda_n) = (\lambda_n - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \cdot q(\lambda_n) = \Delta_n$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$\Delta_n = \lambda_n^{n-1} q(\lambda_n) + \ldots$$

где выделено слагаемое с λ_n в степени $n-1$. На что оно умножается? Вспоминая формулу полного разложения (17), понимаем, что если собрать все слагаемые со множителем λ_n^{n-1} и вынести его за скобку, то в скобках останется ровно D_{n-1}! То есть сумма всех возможных комбинаций произведений элементов по одному из каждой строчки и столбца, кроме последних строчки и столбца (где стоит как раз λ_n^{n-1}). Итого, получаем рекуррентную формулу:

$$\Delta_n = (\lambda_n - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \cdot \Delta_{n-1}$$

которая в результате "раскручивания" даёт то же, что получали ранее. □

2.4. # 15.11(7)

Вычислить матрицу в степени:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$$

Решение.

Способ 1*: "в лоб".*

Приведём лишь общий план вполне рабочего, но "не очень интересного" способа решения. Можно найти ответ для $n = 2$, $n = 3$. И увидеть некоторую "закономерность". Которую далее по индукции можно будет строго обосновать.

Способ 2*: "поинтереснее".*

Матрица, которую просят возвести в степень — это матрица поворота. То есть в некоторой прямоугольной системе координат она задаёт поворот вокруг начала на угол α. Но возведение этой матрицы в степень n есть матрица преобразования, являющегося композицией n последовательных поворотов (1)! Таким образом, можно сразу выписать ответ:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$$

□

2.5. # 15.45(1)

Вычислить:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}^{-1}$$

Решение. Исходная матрица A, очевидно, невырожденная. И её определитель равен:

$$\det A = 3 \cdot 9 - 5 \cdot 5 = 2$$

Значит, обратная матрица B существует. Её можно найти, просто пользуясь формулами (16):

$$\begin{cases} b_{11} = \dfrac{9}{2}, \quad b_{12} = \dfrac{-5}{2} \\ b_{21} = \dfrac{-5}{2}, \quad b_{22} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Итого:

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Проверяя, убеждаемся, что B — в самом деле обратная к A:

$$AB = BA = E$$

□

2.6. # 15.48(1)

Проверить, справедливо ли тождество:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Решение. Можно, пользуясь формулами (16), вычислить обратные и сравнить поэлементно матрицу слева и справа.

А можно пойти от определения. Что значит, что $(A^{-1})^T$ — обратная для A^T? (Ведь именно это по сути просят проверить.)

$$\begin{cases} A^T \cdot (A^{-1})^T \stackrel{?}{=} E \\ (A^{-1})^T \cdot A^T \stackrel{?}{=} E \end{cases}$$

Не сложно убедиться, что, да, так и есть. Значит, $(A^{-1})^T$ — обратная для A^T. □

2.7. # 15.48(6)

Проверить, справедливо ли тождество:

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$$

Решение. Кажется, что это просто не может быть верно. (Иначе, скорее всего, это бы уже обсудили при разговоре об обратной матрице.) Значит, стоит думать о том, какой бы контрпример привести. Но такой придумать не очень сложно. Например:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Хорошо, если всё-таки считать, что на вход (тождеству!) надо обязательно подавать такие матрицы, чтоб левая и правая части как минимум существовали, то можно взять, например:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

□

2.8. # 15.65(1)

Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Очевидно, матрица X состоит из 2 строк и 2 столбцов.

Можно бы было ввести обозначения для элементов матрицы X, переписать матричное уравнение в виде системы скалярных и решить (решить точно получится, причём единственным образом, потому что матрица системы невырождена). А можно поступить иначе.

Раз матрица – левый множитель невырождена, значит, для неё существует обратная. Домножим на неё *слева* обе части уравнения:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{E} X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Упражнение. Что можно бы было сделать (и можно ли вообще было бы что-то сделать), чтоб найти X, если бы в уравнении матрица – известный множитель была вырожденной?

$$A_{2\times 2} X = B_{2\times 2}, \quad \det A = 0$$

□

3. Дополнение

3.1. “Время определить определитель ещё раз — Yes honey...”

Есть ещё пара способов ввести определитель, которые основаны на *перечислении свойств, которыми должна обладать функция* det.[5] (Это всё даёт “тот же самый” определитель, что и рекурсивная формула (3), и формула полного разложения (6).)

Определение 3.1 (Вариант 1[6]). Функция $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ называется определителем (детерминантом) и обозначается det, если

- Функция f является линейным однородным многочленом от элементов любой строки:
$$\begin{cases} f(A) = h_1 a_{i1} + \ldots + h_n a_{in} \\ 1 \leq i \leq n \\ h_j = h_j(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n),\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$
то есть коэффициенты в разложении по элементам строки не зависят от этой самой строки.

- Значение f на вырожденной матрице[7] равно нулю 0.

- Значение f на единичной матрице $E_{n\times n}$ равно единице 1.

Определение 3.2 (Вариант 2[8]). Функция $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ называется определителем (детерминантом) и обозначается det, если

- Функция f полилинейна по строкам матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (9).

- Функция f кососимметрична по строкам матрицы A (10).

- Значение f на единичной матрице $E_{n\times n}$ равно единице 1.

Определение 3.3 (Вариант 3[9]). Функция $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ называется определителем (детерминантом) и обозначается det, если

- Функция f полилинейна по строкам матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (9).

- Значение f на матрице с двумя одинаковыми строками равно нулю 0 (11).

- Значение f на единичной матрице $E_{n\times n}$ равно единице 1.

[5] Да, про это уже было в дополнении к самому первому семинару, но вспомним ещё раз в дополнении и здесь, раз снова тема определители.

[6] Беклемишев Д. В. «Курс аналитической геометрии и линейной алгебры».

[7] Если определять вырожденную матрицу как такую, у которой строки линейно зависимы.

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Determinant.

[9] Hans Schneider, George Phillip Barker. «Matrices and Linear Algebra».

3.2. # 14.23(16) (“Решение, о котором никто не просил”)

Вычислить определитель порядка n:

$$\Delta_n = \det A_n$$

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение.

“Скетч” способа 1*: “не хватающего звёзд с неба, но честного; рабоче-крестьянского”.*

Знаем, как считать определитель треугольной матрицы. Но A_n не треугольная. Однако до треугольной ей не хватает “немного”. Так, видно, что смежные строки матрицы отличаются “не сильно”, и можно попытаться “поправить” матрицу, вычитая, например, с некоторым коэффициентом из данной строки предыдущую...

Способ 2*: “где вначале всё стандартно, а потом следует не самый очевидный выкрутас, и аналитическая геометрия отходит на второй план”.*

В первой строчке всего два ненулевых элемента — попробуем же разложить по ней определитель:

$$\Delta_n = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Второй определитель справа можно разложить по первому столбцу (там всего одна единица и все нули):

$$\Delta_n = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Иными словами:

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \tag{19}$$

Получили некоторое рекуррентное соотношение. Его решение *можно искать в следующем виде*:

$$\Delta_n = C\lambda^n$$

где C — константа (ненулевая, иначе все Δ_n нули, что не так), а λ — *корень характеристического уравнения*, которое можно получить, подставив выражение для Δ_n в соотношение (19). Получим:

$$C\lambda^n = 2C\lambda^{n-1} - C\lambda^{n-2}$$

Откуда характеристическое уравнение:

$$\boxed{\lambda^2 = 2\lambda - 1} \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 1$$

Два совпавших корня. Значит, общее решение Δ_n надо искать в виде:

$$\Delta_n = (C_1 n + C_2)\lambda^n \xrightarrow{\lambda=1} C_1 n + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

(можно подставить в соотношение (19) и убедиться, что "работает"; но если бы корни характеристического уравнения были разные, то решение надо бы было искать в другом виде).

Чтобы найти константы, можно выписать *начальные условия*:

$$\begin{cases} \Delta_1 = |2| = 2 = C_1 + C_2 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 = 2C_1 + C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Таким образом,

$$\Delta_n = n + 1$$

□

3.3. # 15.45(2) ("Для всех, кроме потока И. А. Чубарова")

Вычислить обратную для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Найдём обратную с помощью метода Гаусса. В основе метода лежит следующее понятие и связанные с ним "наблюдения".

Определение 3.4. Элементарные преобразования строк матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

- умножение строки на число, отличное от нуля;
- прибавление к строке другой строки.

Утверждение 3.1. Каждое элементарное преобразование строк матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ можно задать в виде невырожденной матрицы $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$, которую надо умножить слева на A, чтобы провести преобразование. При этом матрица S не зависит от A.

Утверждение 3.2. "Более сложные" преобразования, которые сводятся к последовательности элементарных:

- перестановка строк;
- прибавление к строке другой строки, умноженной на число;
- прибавление к строке линейной комбинации других строк.

Утверждение 3.3. Если строки матрицы были линейно зависимы (независимы), то после элементарного преобразования строк они останутся линейно зависимы (независимы).

Утверждение 3.4. Для любой невырожденной матрицы A существует последовательность элементарных преобразований строк $\{S_i\}_{i=1}^N$, такая что она переводит матрицу A в единичную:

$$S_N \dots S_1 A = E$$

Вернёмся к решению задачи. Далее фиолетовым цветом будем выделять элемент в столбце, с помощью которого будем зanулять другие элементы в том же столбце. Те, которые зануляем на данном шаге, будем отмечать красным цветом. Когда столбец "готов" (остался один ненулевой — фиолетовый), переходим к другому столбцу и снова выбираем ненулевой элемент для "зачищения столбца", но *из строчек, откуда ещё не выбирали*. Сначала можно занулять все элементы ниже главное диагонали (*прямой ход* метода Гаусса), а потом — выше главной диагонали (*обратный ход* метода Гаусса).

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\overset{(1)\leftrightarrow(3)}{\widetilde{}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{-1} & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\overset{(3)=(3)+2\cdot(1)}{\widetilde{}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)
\overset{(2)=(2)/2}{\widetilde{}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & \mathbf{-3} & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)
$$

$$
\overset{(3)=(3)+3\cdot(2)}{\widetilde{}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mathbf{-1/2} & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1/2} & 1 & 3/2 & 2 \end{array}\right)
\underset{\substack{(1)=(1)-2\cdot(3)\\(2)=(2)+(3)}}{\widetilde{}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & \mathbf{-1} & 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 3/2 & 2 \end{array}\right)
$$

$$
\underset{\substack{(1)=(1)+(2)\\(3)=2\cdot(3)}}{\widetilde{}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)
\overset{(1)=-1\cdot(1)}{\widetilde{}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)
$$

Таким образом,

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}
$$

Можно (стоит) проверить:

$$
AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Почему преобразования строк у "сдвоенной" матрицы позволило найти A^{-1}? Каждый шаг метода Гаусса можно рассматривать как умножение слева на некоторую невырожденную матрицу S_i, задающую соответствующее элементарное преобразование строк:

$$
(A \mid E) \to (S_1 A \mid S_1 E) \to \ldots \to (\overbrace{S_N \ldots S_1 A}^{E} \mid \overbrace{S_N \ldots S_1 E}^{B})
$$

где единичная матрица $E = S_N \dots S_1 A$ — то, что стремимся получить слева, справа же получается матрица $B = S_N \dots S_1 E = S_N \dots S_1$. Выходит, $E = BA$, что равносильно[10] тому, что $B = A^{-1}$.

Найдём ещё интереса ради какую-нибудь S_i. Например, S_1, которая задаёт перестановку строк. Правда, перестановка строк — не совсем элементарное преобразование. Разложим его сначала на элементарные.

Мы хотим задать преобразование перестановки строк (первой и третьей):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Это преобразование можно представить как композицию преобразований (над-под каждой стрелочкой обозначено элементарное преобразование и его матрица[11]):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)=(3)+(1)]{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(1)=(1)-(3)]{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)=(3)+(1)]{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(1)=-1\cdot(1)]{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

И в итоге, S_1, задающая первую перестановку строк:

$$S_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \dots$$

□

[10] Можно показать, что при $BA = E$ обязательно выполняется также и $AB = E$.

[11] Матрица, которую можно получить, например, из единичной, проведя над её строками аналогичное преобразование.