

Полулагранжев метод адвекции контуров в задаче взаимодействия вихря с изолированной топографической особенностью на β -плоскости

Баранов А.А., Пермяков М.С.

Дальневосточный федеральный университет
Школа естественных наук

Кафедра информатики, математического и компьютерного моделирования

Владивосток, 2014

Введение

Метод контурной динамики:

- 1979 — **Zabusky N.J., Hughes M.H., Roberts K.V.** *Contour Dynamics for the Euler equations in two dimensions.*
- 1983 — **Козлов В.Ф.** *Метод контурной динамики в модельных задачах о топографическом циклогенезе в океане.*
- 1989 — **Dritschel D.G.** *Contour Dynamics and Contour Surgery: Numerical algorithms for extended, high-resolution modelling of vortex dynamics in two-dimensional, inviscid, incompressible flows.*
- 2011 — **Соколовский М.А., Веррон Ж.** *Динамика вихревых структур в стратифицированной вращающейся жидкости.*

Метод адвекции контуров:

- 1994 — **Waugh D.W., Plumb R.A.** *Contour Advection with Surgery: A Technique for Investigating Finescale Structure in Tracer Transports.*
- 1997 — **Dritschel D.G., Ambaum M.H.P.** *A Contour-Advective Semi-Lagrangian Numerical Algorithm for simulating fine-scale conservative dynamical fields.*
- 2006 — **Dritschel D.G., Ambaum M.H.P.** *The Diabatic Contour Advective Semi-Lagrangian model.*
- 2009 — **Fontane J., Dritschel D.G.** *The HyperCASL algorithm: A new approach to the numerical simulation of geophysical flows.*

Математическая модель

Рассматривается двумерное течение идеальной несжимаемой жидкости в условиях переменной топографии на вращающейся Земле.

Уравнение переноса потенциальной завихренности:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} = 0.$$

Определение потенциальной завихренности:

$$q = \frac{\omega + f}{H},$$

где $\omega(x, y, t)$ – относительная завихренность, $H(x, y)$ – глубина жидкости,
 $f = f_0 + \beta y$ – параметр Кориолиса в приближении β -плоскости.

Диагностическое уравнение для функции тока:

$$\Delta\psi = H\omega + \frac{1}{H} (\nabla H \cdot \nabla\psi).$$

Определение функции тока:

$$Hu = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad Hv = \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Условия задачи

Рассматривается начально-краевая задача в области $D = (-10, 10) \times (-10, 10)$ на временном интервале $(0, 50]$ [J.H.G.M. van Geffen, P.A. Davies (2000)].

Начальное распределение задано полем относительной завихренности:

$$\omega(x, y, 0) = \begin{cases} J_0(kr) \frac{(ka)\Gamma}{2\pi a^2 J_1(ka)}, & r \leq a \\ 0, & r > a, \end{cases}$$

где r – расстояние до центра вихря, расположенного в точке $(3, -3)$, J_0 и J_1 – функции Бесселя 1-го рода, $\Gamma = 4$ – циркуляция, $a = 0.5$ – радиус вихря; $ka \approx 2.4048$ – соответствует наименьшему отличному от нуля корню функции J_0 .

Топография:

$$H(x, y) = \begin{cases} 1 - h_0 \cos(\pi r/2), & r \leq R \\ 1, & r > R, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $R \in (0, 2]$ – предельный радиус.

Другие параметры задачи:

$L_0 = 2a^*$ – характерный пространственный масштаб (равен диаметру вихря);

$T_0 = 0.3/L_0\beta^*$ – характерный временной масштаб;

$\beta^* = \beta/L_0 T_0 = 2\Omega_e \cos(\varphi_0)/R_e$, $f_0^* = f_0/T_0 = 2\Omega_e \sin(\varphi_0)$, где Ω_e – угловая скорость вращения Земли, R_e – радиус Земли, φ_0 – положение начала координат ($y = 0$);

$y_0 = -f_0/\beta$ – положение экватора в текущей системе координат.

Дискретизация

В лагранжевом представлении поле потенциальной завихренности определяется на множестве жидкых контуров.

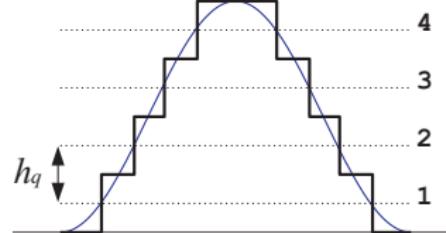
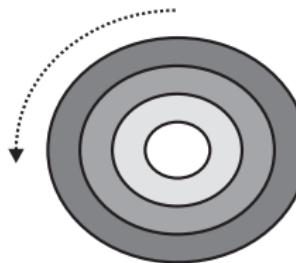
Квантование поля потенциальной завихренности:

$$z_1 = \min_D \{q(x, y, 0)\}, \quad z_l = z_{l-1} + h_q, \quad l = 2, 3, \dots, L.$$

Контуры (изолинии) поля потенциальной завихренности:

$$C_l(t) = \{(x, y) : q(x, y, t) = z_l\}.$$

Опорные точки (узлы) контура: $\vec{X}_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$.



Адвекция контуров

Задача адвекции контура сводится к переносу частиц жидкости, связанных с его опорными точками.

Уравнения движения частиц:

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i(t), \quad \frac{dy_i}{dt} = v_i(t).$$

Начальные условия:

$$x_i(0) = x_i^0, \quad y_i(0) = y_i^0.$$

Для численного решения указанной задачи используется схема Рунге-Кутты 4-го порядка.

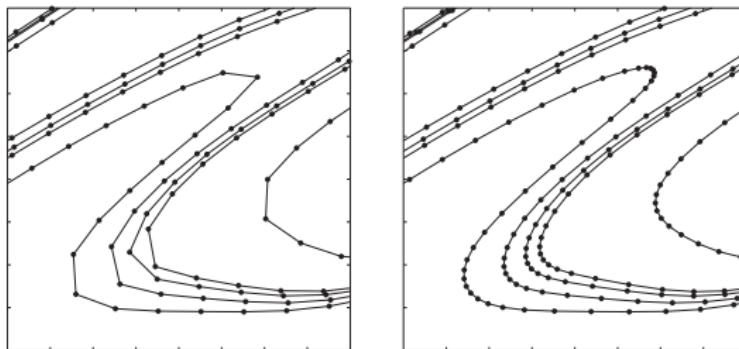
Адвекция контуров

Перераспределение опорных точек на контуре:

$$N = \oint_C \rho \cdot dl \approx \sum_{i=1}^n \rho_i |\vec{X}_{i+1} - \vec{X}_i|.$$

N – новое число точек на контуре,

ρ – плотность распределения точек (зависит от кривизны).

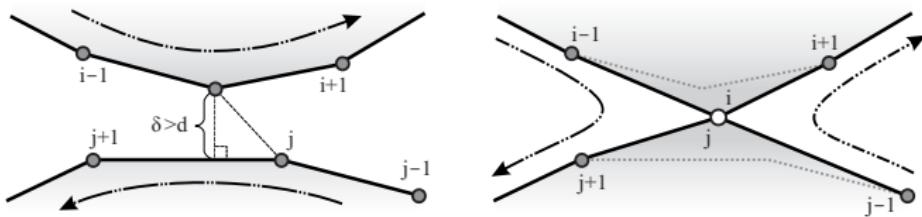


Положение опорных точек на контуре до (слева) и после (справа) выполнения процедуры перераспределения.

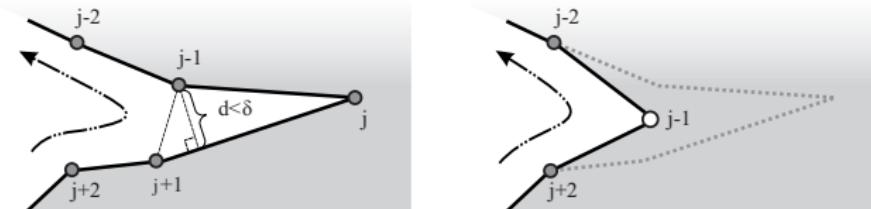
Адвекция контуров

Процедура «хирургии» удаляет детали контуров, которые меньше установленного масштаба $\delta > 0$, предотвращая тем самым катастрофический рост числа опорных точек.

Случай 1 (связывание контуров):



Случай 2 (удаление тонких нитей):



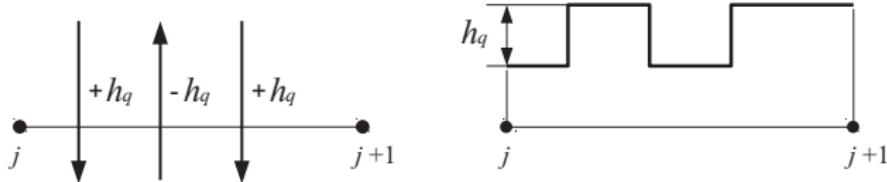
Расчет скоростей

Расчет скоростей происходит в узлах прямоугольной эйлеровой сетки, покрывающей расчетную область:

$$\Omega = \{x_i = -10 + i h_x, i = \overline{1, n_x}\} \times \{y_j = -10 + j h_y, j = \overline{1, n_y}\},$$

где $h_x = 20/n_x$, $h_y = 20/n_y$ – шаги сетки по x и y соответственно.

Интерполяция потенциальной завихренности с контуров на сетку:



Каждый контур, проходящий через ребро $[j, j + 1]$, вносит свой вклад в прирост поля q при переходе между его вершинами (стрелками показано направление обхода).

Вычислительная сложность $O(N + M)$,
где N – число узлов контура, M – число узлов сетки.

На сетке получим поле относительной завихренности $\omega = Hq - f$.

Расчет скоростей

Решение диагностического уравнения для функции тока.

На первом шаге выполняется решение уравнения Пуассона:

$$\Delta\psi^0 = H\omega.$$

В условиях двойной периодичности для его решения воспользуемся прямым методом на основе БПФ.

Далее используется следующая итерационная схема:

$$\Delta\psi^{i+1} = H\omega + \frac{1}{H} (\nabla H \cdot \nabla\psi^i).$$

Процесс продолжается до тех пор, пока $\|\psi^{i+1} - \psi^i\| \geq \varepsilon \|\psi^i\|$.

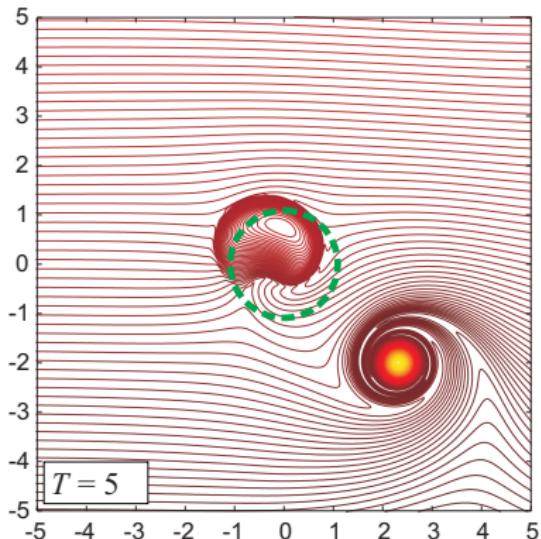
Значения поля скорости в узлах сетки получим по определению функции тока.

Значения скоростей в опорных точках контуров находятся путем *билинейной интерполяции* из близлежащих узлов
эйлеровой сетки.

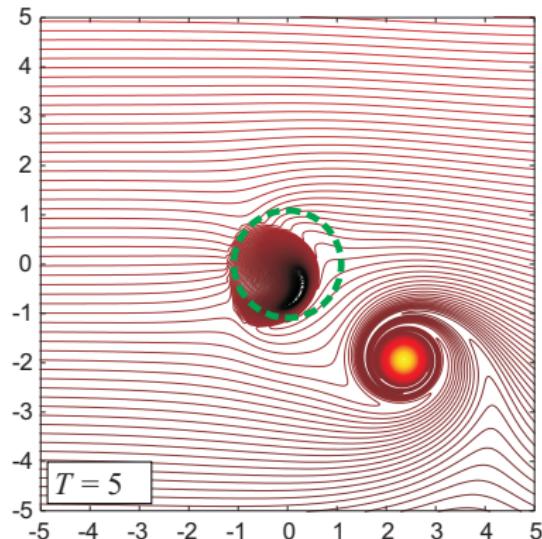
Результаты численных расчетов

Результаты расчетов на сетке $[256 \times 256]$ с шагом по времени $\tau = 0,025$:

Впадина ($h_0 = -0.4$)



Возвышенность ($h_0 = +0.4$)

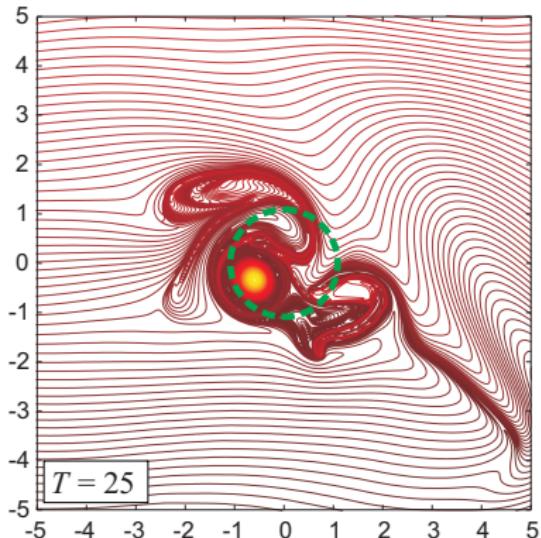


Положение контуров потенциальной завихренности вблизи топографической особенности радиуса $R = 1$ в условиях южного полушария ($f_0 = -5$) на момент времени $T = 5$.

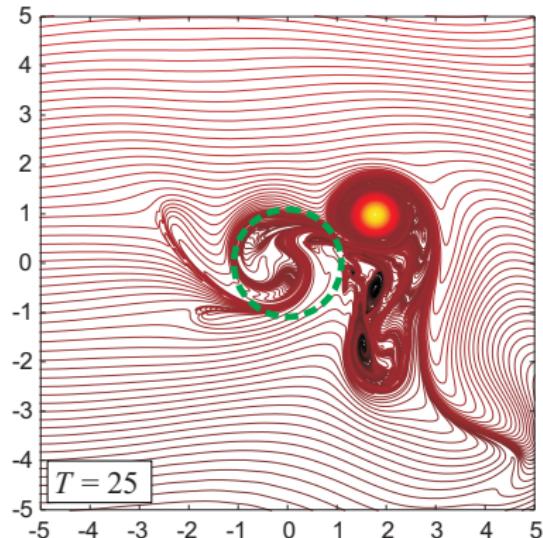
Результаты численных расчетов

Результаты расчетов на сетке $[256 \times 256]$ с шагом по времени $\tau = 0,025$:

Впадина ($h_0 = -0.4$)



Возвышенность ($h_0 = +0.4$)

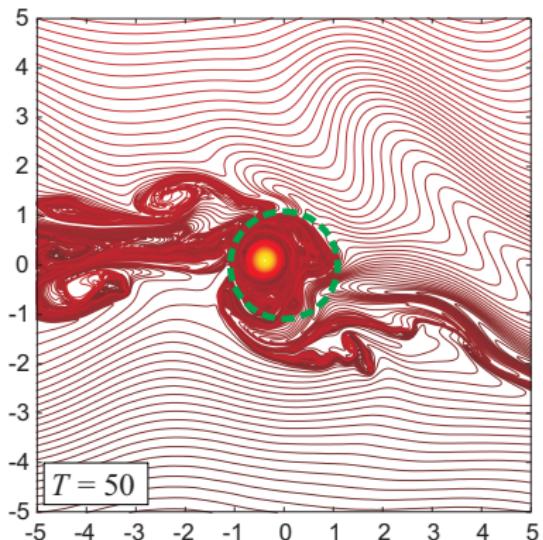


Положение контуров потенциальной завихренности вблизи топографической особенности радиуса $R = 1$ в условиях южного полушария ($f_0 = -5$) на момент времени $T = 25$.

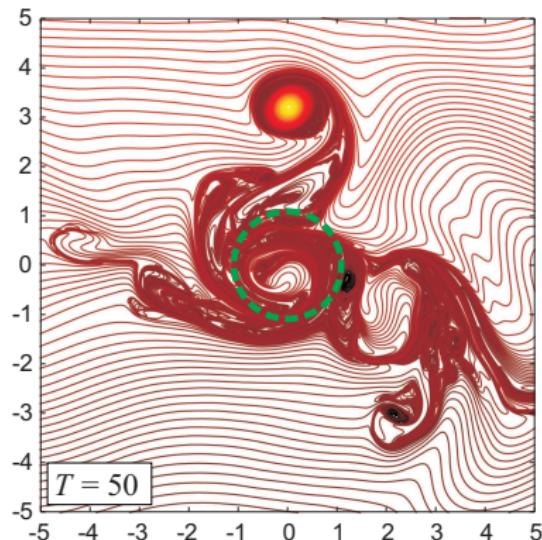
Результаты численных расчетов

Результаты расчетов на сетке $[256 \times 256]$ с шагом по времени $\tau = 0,025$:

Впадина ($h_0 = -0.4$)



Возвышенность ($h_0 = +0.4$)

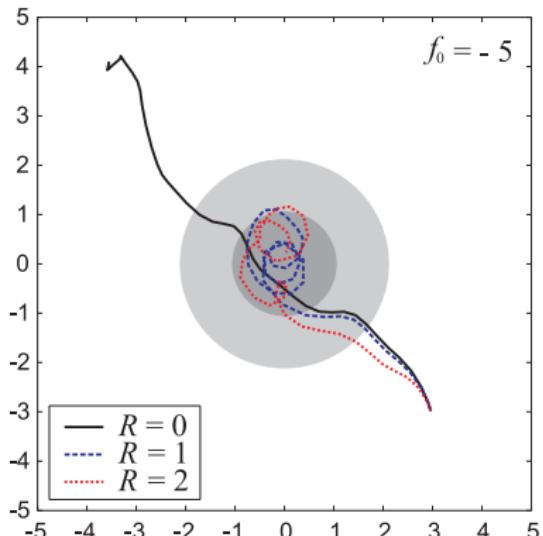


Положение контуров потенциальной завихренности вблизи топографической особенности радиуса $R = 1$ в условиях южного полушария ($f_0 = -5$) на момент времени $T = 50$.

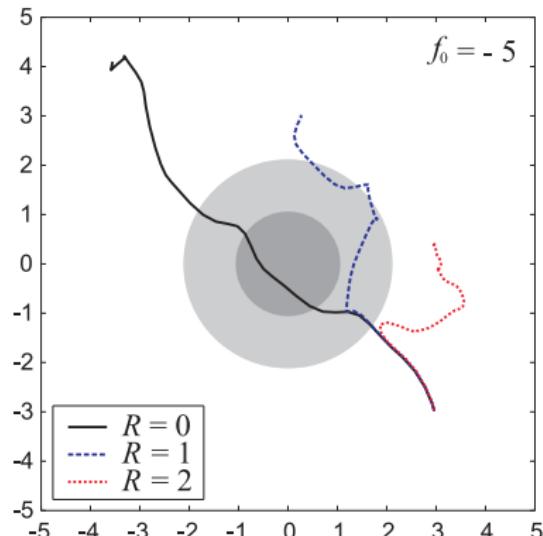
Результаты численных расчетов

Результаты расчетов на сетке $[256 \times 256]$ с шагом по времени $\tau = 0,025$:

Впадина ($h_0 = -0.4$)



Возвышенность ($h_0 = +0.4$)

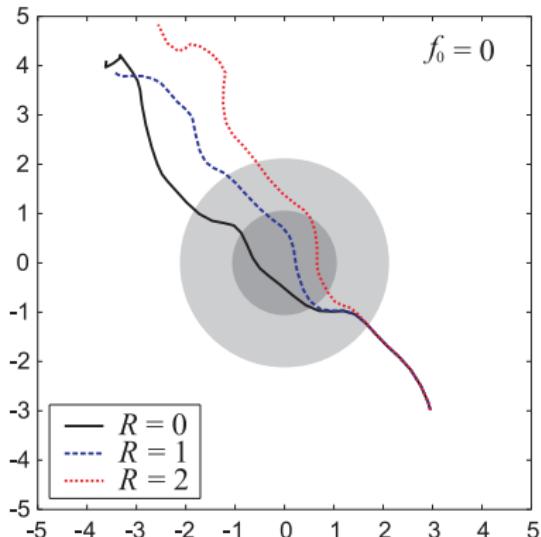


Траектории движения центра вихря в условиях южного полушария при различных значениях радиуса топографической особенности R на временном интервале $[0, 50]$.

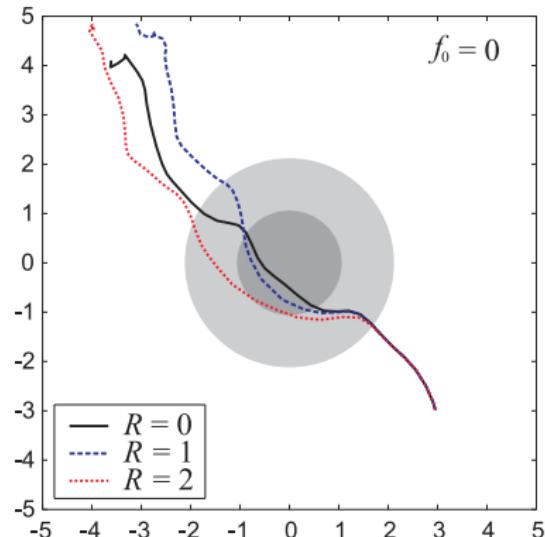
Результаты численных расчетов

Результаты расчетов на сетке $[256 \times 256]$ с шагом по времени $\tau = 0,025$:

Впадина ($h_0 = -0.4$)



Возвышенность ($h_0 = +0.4$)

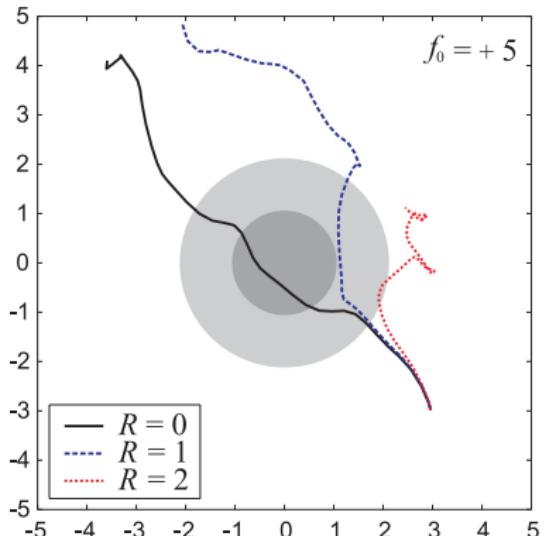


Траектории движения центра вихря в условиях экватора
при различных значениях радиуса топографической особенности R
на временном интервале $[0, 50]$.

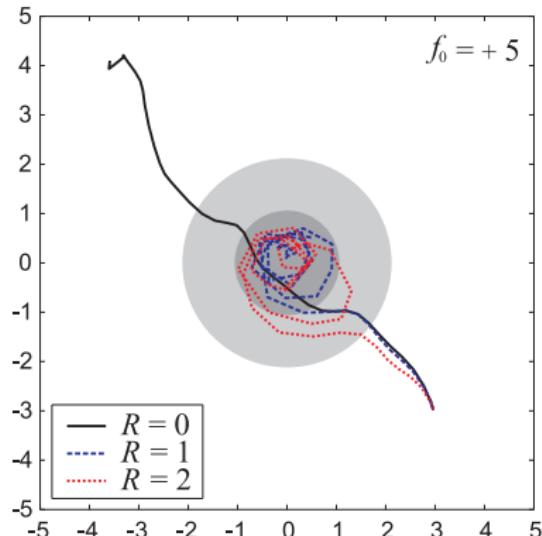
Результаты численных расчетов

Результаты расчетов на сетке $[256 \times 256]$ с шагом по времени $\tau = 0,025$:

Впадина ($h_0 = -0.4$)



Возвышенность ($h_0 = +0.4$)



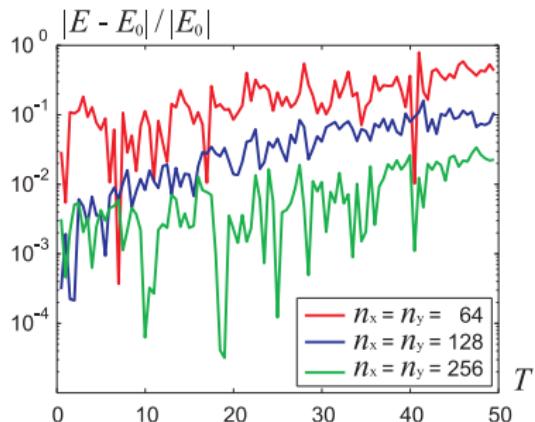
Траектории движения центра вихря в условиях северного полушария при различных значениях радиуса топографической особенности R на временном интервале $[0, 50]$.

Оценка точности метода

Оценим точность сохранения интегральных характеристик потока:

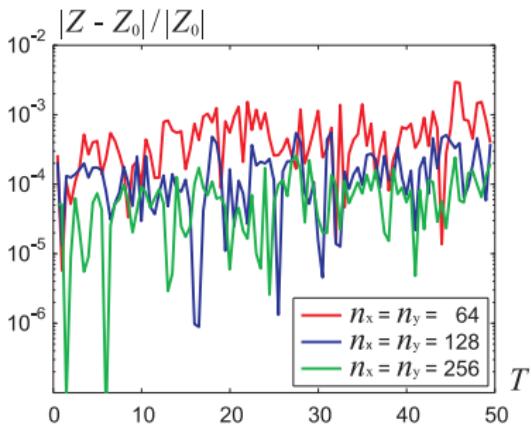
Кинетическая энергия:

$$E = \frac{1}{2} \iint_D (u^2 + v^2) H(x, y) dx dy,$$



Энстрофия:

$$Z = \iint_D q^2 H(x, y) dx dy.$$

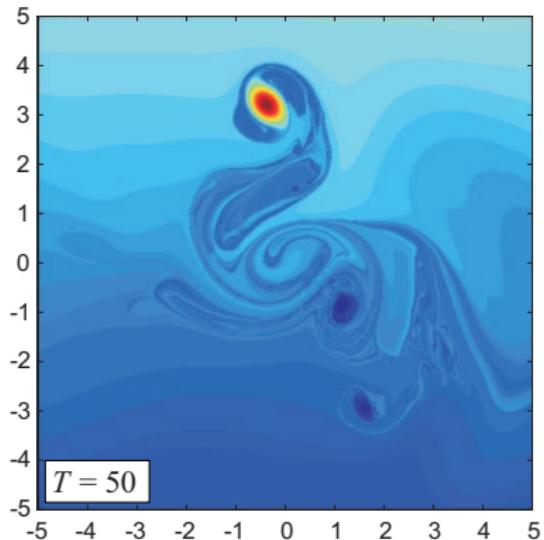


Временные изменения относительной погрешности для энергии (слева) и энстрофии (справа). Показаны результаты при разных разрешениях расчетной сетки $[n_x \times n_y]$.

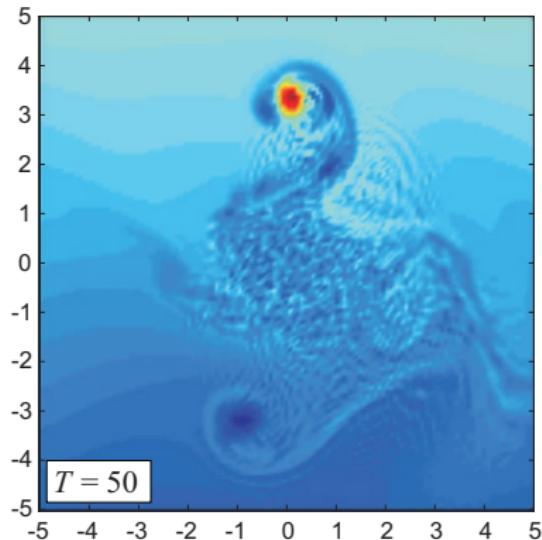
Оценка точности метода

Результаты расчетов на сетке $[256 \times 256]$ с шагом по времени $\tau = 0,025$:

МАК



МКР



Распределение потенциальной завихренности

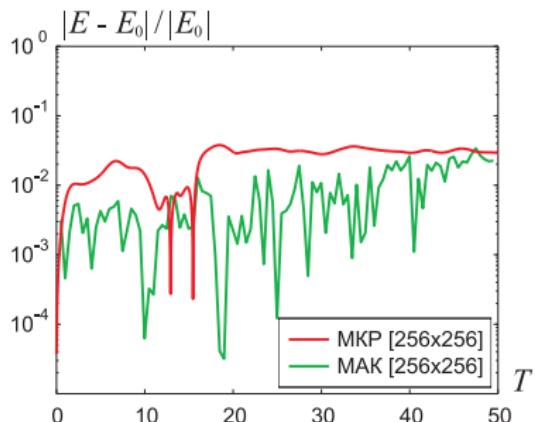
на момент времени $T = 50$.

Оценка точности метода

Сравнение точности методов МАК и МКР:

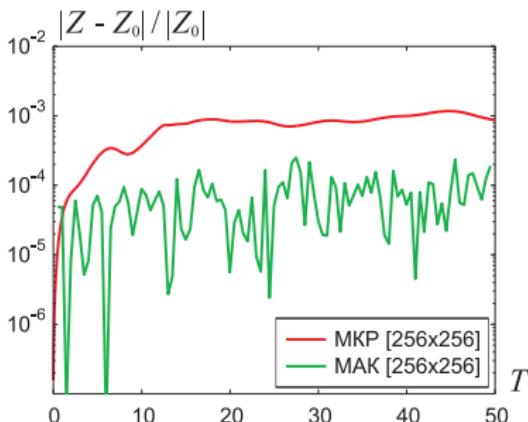
Кинетическая энергия:

$$E = \frac{1}{2} \iint_D (u^2 + v^2) H(x, y) dx dy,$$



Энстрофия:

$$Z = \iint_D q^2 H(x, y) dx dy.$$



Временные изменения относительной погрешности для энергии (слева) и энстрофии (справа). Показаны результаты при разрешении расчетной сетки $[256 \times 256]$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!