$\boxed{1.3.51}$ Fie B o mulțime finită cu $|B| = m$. Să se determine numărul tuturor submulțimilor lui B cu n elemente.

(Indicație: Numărul căutat este $\binom{m}{n} = C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$)

Soluție: În primul rând dacă $n > m$ NU vor exista submulțimi, deci discutăm în continuare cazul $n \leq m$.

Dacă $C \subseteq B$, cu $|C| = n$, atunci avem funcția de incluziune
$$i : C \to B$$
$$i(x) = x, \forall x \in C \quad (\text{Im } i = C \subseteq B)$$

Obs. i este o funcție injectivă:

Dacă pt. $x, y \in C$ avem $i(x) = i(y) \Rightarrow x = y \Rightarrow i$ este injectivă

În exercițiul 1.3.49, am văzut că avem $\frac{m!}{(m-n)!}$ funcții injective de la o mulțime cu n elemente la una cu m elemente (aici $n \leq m$). Acum, fiecare funcție injectivă numărată va avea ca și imagine o submulțime a lui B de n elemente:

Dacă $f : C \to B$ este injectivă, atunci dacă considerăm $f : C \to \text{Im} f \subseteq B$ obținem o funcție bijectivă $\Rightarrow$ $|C| = |\text{Im} f|$, dar $|C| = n \Rightarrow |\text{Im} f| = n \Rightarrow \text{Im} f$ este o submulțime de n elemente a lui B.

Astfel, ar părea că dacă numărăm toate funcțiile injective posibile de la C la B obținem și numărul de submulțimi de n elemente a lui B, însă problema este că anumite astfel de funcții injective conduc la aceeași submulțime de n elem. a lui B. (practic cele care au aceeași imagine).

Deci, se pune problema câte dintre funcțiile injective numărate au aceeași imagine (submulțimea $C \subseteq B$) $\Longleftrightarrow$ pentru $C \subseteq B$ fixat cu $|C| = n$ câte funcții injective definite pe o mulțime cu n elemente și valori în B cu imaginea $= C$ putem avea $\overset{|C|=n}{\Longleftrightarrow}$ câte funcții injective $f: C \to B$ cu $\operatorname{Im} f = C$ putem avea

Dar cum $f: C \to B$ injectivă poate fi privită ca o funcție bijectivă $f: C \to \operatorname{Im} f$. $\Rightarrow$

ajunge să numărăm câte funcții bijective $f: C \to C$ putem avea $\xrightarrow[|C|=n]{\boxed{1.3.50}}$ avem $n!$ factorial astfel de funcții.

Așadar, avem $\frac{m!}{(m-n)!}$ funcții injective a căror imagine ne indică câte o submulțime a lui B, însă fiecare $n!$ dintre aceste funcții indică aceeași submulțime.

$\Rightarrow$ Nr-ul submulțimilor de n elemente a lui B este $\frac{m!}{(m-n)!} : n! = \frac{m!}{n!(m-n)!}$.

- Legătura cu „mulțimi ordonate".

Avem $\frac{m!}{(m-n)!}$ funcții injective $f : \{1, 2, \dots, n\} \to B$.

dar o astfel de funcție este o mulțime ordonată cu componente din B (distincte!)

(mulțimea ordonată $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ este de fapt funcția $f : \{1, 2, \dots, n\} \to B$, unde $f(1) = b_1$, $f(2) = b_2$, ... $f(n) = b_n$)

prima componentă   a doua componentă

Deci avem $\frac{m!}{(m-n)!}$ mulțimi ordonate cu comp. din B.

Dar împărțim la $n!$, deoarece dacă renunțăm la ordine vom avea $n!$ mulțimi ordonate care duc la aceeași mulțime (fără ordine).

$$n! \text{ mult. ord.} \left\{ \begin{matrix} (b_1, b_2, \dots, b_n) \\ (b_2, b_1, \dots, b_n) \\ \dots \\ (b_n, b_{n-1}, \dots, b_1) \end{matrix} \right\} \longrightarrow \{b_1, b_2, \dots, b_n\}.$$