Seminar 2

$\boxed{1.3.36}$

(2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{dacă } x \leq 0 \\ -x+2, & \text{dacă } 0 < x \end{cases}$

Inj: Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, a.î. $f(x_1) = f(x_2)$

caz 1: dacă $x_1, x_2 \leq 0 \Rightarrow x_1^2+1 = x_2^2+1 \Rightarrow x_1 = x_2$

caz 2: dacă $x_1, x_2 > 0 \Rightarrow -x_1+2 = -x_2+2 \Rightarrow x_1 = x_2$

caz 3: dacă $x_1 \leq 0$ și $x_2 > 0$

$x_1^2+1 = -x_2+2$

$x_1 = 0, x_2 = 1 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f$ NU este injectivă $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ nu este bijectivă

Surj:

dacă $x \le 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0] \Rightarrow x^2 \in [0, +\infty) \Rightarrow x^2+1 \in [1, +\infty)$

dacă $x > 0 \Rightarrow -x < 0 \mid +2 \Rightarrow -x+2 \in (-\infty, 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow Im_f = (-\infty, 2) \cup [1, +\infty) = \mathbb{R} \Rightarrow f$ este surjectivă

<u>Recap</u>: Restricția unei funcții:

Fie $f: A \to B$ funcție. $X \subseteq A$

$f_{|X}: X \to B$

└ restricția lui f la mulțimea X

$f_{|X}(x) = f(x), \ \forall x \in X$

$\boxed{1.3.38.}$ Fie A, B, C mulțimi și $C \subseteq A$. Fie $f: A \to B$ o funcție. Săac $f_{|C} = f \circ i$, unde $i: C \to A$ este funcția de incluziune.

$i: C \to A, \ i(x) = x, \ \forall x \in C$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

$f \circ i: \underline{C} \to \underline{\underline{B}}$

$f_{|C}: \underline{C} \to \underline{\underline{B}}$

Fie $x \in C$. Vrem să arătăm $(f \circ i)(x) = (f_{|C})(x)$

$$\left.\begin{array}{l} (f \circ i)(x) = f(i(x)) = f(x) \\ (f_{|C})(x) = f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f \circ i = f_{|C}$$

Recap. Imaginea și contraimaginea unei mulțimi printr-o funcție

Fie $f: A \to B$ o funcție și $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$

$f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \} \subseteq B$

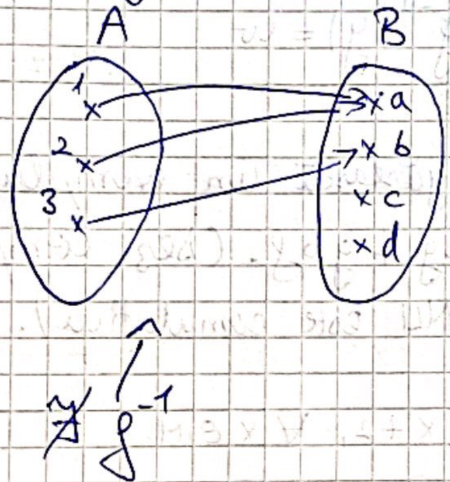
$\hookrightarrow$ imaginea mulț. X prin f

(Fie $b \in f(X) \Rightarrow \exists\, x \in X$ a.î. $f(x) = b$

$f^{-1}(Y) = \{ x \in A \mid f(x) \in Y \}$

$\hookrightarrow$ contraimaginea mulțimii Y prin f

ex:



$f^{-1}(\{a\}) = \{1, 2\}$

$f^{-1}(\{a, b\}) = \{1, 2, 3\}$

$f^{-1}(\{c\}) = \emptyset$

$\boxed{1.3.39}$ Fie $f: A \to B$ o funcție <u>inversabilă</u>. și fie $Y \subseteq B$. Atunci prin $f^{-1}(Y)$ putem înțelege fie contraimaginea lui Y prin f, fie imaginea lui Y prin f^{-1}. Ssac cele două noțiuni nu intră în conflict.

$f: A \to B$ inv $\Rightarrow \exists\, f^{-1}: B \to A$

$V = f^{-1}(Y)$ ca și imagine $= \{ f^{-1}(y) \mid y \in Y \}$

$W = f^{-1}(Y)$ ca și contraimagine $= \{ x \in A \mid f(x) \in Y \}$

Vrem: $V = W$

„$V \subseteq W$"

Fie $v \in V$. Vrem: $v \in W \Rightarrow \begin{cases} v \in A \\ f(v) \in Y \end{cases}$

$\exists y \in Y$ a.î. $v = f^{-1}(y) \} \Rightarrow v \in A$

$f^{-1}: B \to A$

$f(v) = y \in Y$

„$W \subseteq V$" Fie $w \in W$. Vrem: $w \in V$

$w \in A$ și $f(w) \in Y$ $\qquad \Leftrightarrow \qquad \exists y \in Y$ a.î. $f^{-1}(y) = w$

Notăm $y = f(w) \in Y$ $\Big| f^{-1}$

$\Downarrow$

$f^{-1}(y) = w$

$\boxed{1.3.40}$ Să se găsească un exemplu de două funcții $f, g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a.î. $f \circ g \neq g \circ f$. (Deși compunerea este definită bilateral, ea NU este comutativă).

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x + 2$, $\forall x \in \mathbb{N}$

$g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{N}$.

$f \circ g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 2$

$g \circ f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+2) = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$

$\boxed{1.3.45}$ Fie $f: A \to B$ funcție și fie $X, X_1, X_2 \subseteq A$ și $Y, Y_1, Y_2 \subseteq B$.

(1) $X \subseteq f^{-1}(f(X))$

Fie $a \in X$. Vrem: $a \in f^{-1}(f(X))$

$\overset{\Downarrow}{f(a)} \in f(X) \Rightarrow \{f(a)\} \subseteq f(X) \Rightarrow f^{-1}(\underbrace{\{f(a)\}}_{\ni}) \subseteq f^{-1}(f(X))$

$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in A \mid f(x) = y\}$

$f(a) = y \Rightarrow a \in f^{-1}(\{y\})$

$\underbrace{(2), (3), (4), (5), (6)}_{\text{TEMĂ}}$ (intră la examen probleme de genul)