Seminar 9 24.XI.2021

2.1.58 Să se găsească un exemplu de un grup a cărui reuniune NU este subgrup.

$2\mathbb{Z} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} \leq (\mathbb{Z}, +)$

$3\mathbb{Z} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} \leq (\mathbb{Z}, +)$

$2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} \not\leq (\mathbb{Z}, +)$ pt. că

$\underset{2}{\underset{\cup}{\,}} \quad \underset{3}{\underset{\cup}{\,}}$

$2 + 3 = 5 \notin 2\mathbb{Z}$, $\notin 3\mathbb{Z}$ $\Rightarrow 5 \notin 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$.

2.1.59 Fie $(G, +)$ un grup abelian și $H, K \leq G$. Să se arate că $\langle H \cup K \rangle = H + K$, unde $H + K = \{x + y \mid x \in H, y \in K\}$

$\langle H \cup K \rangle = H + K \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ H + K \leq G \\ 2)\ H \cup K \subseteq H + K \\ 3)\ L \leq G,\ H \cup K \subseteq L \end{cases}$

$\Rightarrow H + K \leq L$.

1) $H+K \leq G$.

I $H, K \leq G \Rightarrow 0 \in H, K$

$$\underset{\in H}{0} + \underset{\in K}{0} = \boxed{\underset{\in H+K}{0}}$$

II $\forall x, y \in H+K$ Vrem $x+y \in H+K$

$\Downarrow$

$\exists h_x, h_y \in H$, $k_x, k_y \in K$.

a.î. $x = h_x + k_x$

$y = h_y + k_y$

$$x+y = (h_x + k_x) + (h_y + k_y) \underset{\text{asoc, com}}{=} \underbrace{(h_x + h_y)}_{\overset{not}{=} h \in H} + \underbrace{(k_x + k_y)}_{\overset{not}{=} k \in K} \in H+K$$

pt că $h_x, h_y \in H \leq G$ pt că $k_x, k_y \in K \leq G$.

III Dacă $x \in H+K$ atunci $-x \in H+K$

$\Downarrow$

$\exists h_x \in H$, $k_x \in K$ a.î. $x = h_x + k_x$.

$$-x = -h_x - k_x = (-h_x) + (-k_x) \in H+K$$

$x+(-x) = h_x + k_x + (-h_x) + (-k_x)$

$+\text{comut}$ $\quad 0+0=0$

$(-x)+x=0$

2) $H \cup K \subseteq H+K$

Fie $h \in H$ și $k \in K$. Vrem $h \in H+K$

$k \in H+K$

$H+K \leq G$

$H, K \leq G \Rightarrow \begin{cases} 0 \in H \\ 0 \in K \end{cases}$

$h = \underset{\in H}{h} + \underset{\in K}{0} \Rightarrow h \in H+K \Rightarrow H \subseteq H+K$

$k = \underset{\in H}{0} + \underset{\in K}{k} \Rightarrow k \in H+K \Rightarrow K \subseteq H+K$

$\Rightarrow H \cup K \subseteq H+K$

III Dacă $L \leq G$ ai $H \cup K \subseteq L$

atunci $H+K \leq L$

Cum $L,\ H+K \leq G$ ajunge să arăt că $\boxed{H+K} \subseteq L$

Fie $x \in H+K \Rightarrow \exists h \in H,\ k \in K$ a.î.
$x = h + k$ Vrem $x \in L$

$h \in H \subseteq H \cup K \subseteq L$
$k \in K \subseteq H \cup K \subseteq L$ $\xrightarrow[L \leq G]{L\ p.s.} h + k \in L$

$\underline{2.1.6.1}$ Fie $n, m \in \mathbb{Z}$. Spac

(a) $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} \Longleftrightarrow m \mid n$

(b) $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = k\mathbb{Z}$, unde $k = \mathrm{lcm}(n,m)$

(c) $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$, unde $d = \gcd(n,m)$.

(a) $\text{"}\Longrightarrow\text{"}$

$n\mathbb{Z} = \{n \cdot x \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

$m\mathbb{Z} = \{m \cdot x \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

Stim $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$ Vrem $m \mid n$

$n = n \cdot \underset{\in \mathbb{Z}}{1} \in n\mathbb{Z} \Rightarrow n \in m\mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ a.î. $n = m \cdot k \Rightarrow m \mid n$.

„$\Leftarrow$" Știm $m \mid n$. Vrem $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$

Fie $x \in n\mathbb{Z}$. Vrem $x \in m\mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$\exists\, k \in \mathbb{Z}$ a.î. $x = n \cdot k$

$m \mid n \Rightarrow \exists\, t \in \mathbb{Z}$ a.î. $n = m \cdot t$ $\Bigg| \Rightarrow$

$x = m \cdot \underbrace{t \cdot k}_{\in \mathbb{Z}} \in m\mathbb{Z}$.

Temă (b) și (c)

Temă 2.1.62

Inele și corpuri

$\boxed{2.2.33}$ Fie mulț. A și un inel R.

Pe mulțimea $R^A = \{ f : A \to R \mid f$ funcție$\}$

se def. operațiile:

$+, \cdot : R^A \times R^A \to R^A$

$(f+g)(x) = \underbrace{f(x)}_{\in R} + \underbrace{g(x)}_{\in R}, \forall x \in A$

$(f \cdot g)(x) = f(x)^{\in R} \cdot g(x), \forall x \in A$

Se arată că R^A este un inel și că R^A este comutativ / unitar exact atunci când R este comutativ / unitar

---

Pas 1 Vrem $(R^A, +)$ grup comutativ.

1) Asociativ „+":

$\forall f, g, h \in \underbrace{R^A}_{: A \to R}$. Vrem $\underbrace{(f+g)+h}_{: A \to R} = \underbrace{f+(g+h)}_{: A \to R}$

Fie $x \in A$.

$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) \overset{\text{din } R}{+} h(x)$

din R^A

$= (f(x)+g(x)) + h(x)$

$(f+(g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x)$

$= f(x) + (g(x) + h(x))$

$+$ în R este asoc.

2) Comutativitate:

$\forall f, g : A \to \mathbb{R}$ Vrem $f+g = g+f$

(temă)

3) Elem. neutru

$e : A \to \mathbb{R}$ $e(x) = 0, \forall x \in A$

Vrem $f+e = e+f = f, \forall f \in \mathbb{R}^A$

4) Orice elem să fie simetrizabil

Fie $f \in \mathbb{R}^A$. $-f$?

$-f : \mathbb{R} \to A$ $(-f)(x) = \underbrace{-f(x)}_{\in \mathbb{R}}$

Vrem $\boxed{f + (-f) = e} = (-f) + f$

$$(f \oplus (-f))(x) = e(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) + (-f)(x) = 0 \Leftrightarrow (-f)(x) = -f(x)$$

Pas 2 Vrem asociativ „·":

$\forall f, g, h : A \to R$, $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$

(~~tem~~)

Pas 3 Vrem op de „·" să fie distrib față de „+".

$\forall f, g, h : A \to R$, $f(g+h) = f \cdot g + f \cdot h$

$(f+g) \cdot h = f \cdot h + g \cdot h$.

Pas 4 Dacă R este inel unitar $\Rightarrow 1 \in R$

a.î. $1 \cdot x = x, \forall x \in R$.

Fie $u : A \to R$ $u(x) = 1$, $\forall x \in R$

Vrem $f \cdot u = u \cdot f = f$, $\forall f \in R^A$.

2.3.37) Să se det. toate subinelele lui $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

R subinel în $(\mathbb{Z}, +, \cdot) \Leftrightarrow \begin{cases} R \neq \emptyset \\ (R, +) \leq (\mathbb{Z}, +) \\ \forall x, y \in R, x \cdot y \in R \end{cases}$

$Sub(\mathbb{Z},+) = \{n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Verificăm dacă $n\mathbb{Z}$ este subinel în $(\mathbb{Z},+,\cdot)$

Ajungem să verificăm dacă

$\forall x, y \in n\mathbb{Z}$ atunci $x \cdot y \in n\mathbb{Z}$

$x \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \exists x' \in \mathbb{Z}$ a.î. $x = n \cdot x'$

$y \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \exists y' \in \mathbb{Z}$ a.î. $y = n \cdot y'$

$$x \cdot y = n\underbrace{(x' \cdot n \cdot y')}_{\in \mathbb{Z}} \in n\mathbb{Z}$$

Temă 2.2.38, 2.2.39, 2.2.55, 2.2.75