Seminar 8 — 17.XI.2021

Temă: 1.4.40, 1.4.41, 1.4.42, 1.4.53, 1.4.54, 1.4.52 !

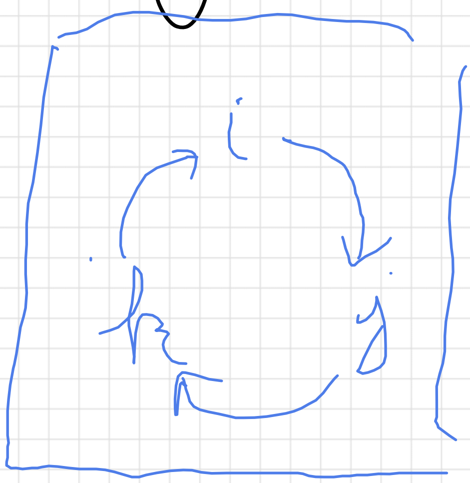
$\boxed{2.1.52}$ (Grupul quaternionilor)

Pe mulțimea $H=\{1,-1,i,-i,j,-j,k,-k\}$ se def. în felul următor o op. de înmulțire:

- 1 este elem neutru
- Regula semnelor: $x(-y)=(-x)y=-xy$.
- $\boxed{i^2}=j^2=k^2=-1$
- $ij=k=-ji$

$jk=i=-kj$

$ki=j=-ik$

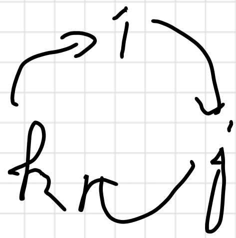


Spre $(H, \cdot)$ este un grup.

Calculăm tabla Cayley/op.

$\cdot$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

$(-i)\cdot(-i) = i^2 = -1$



Pt. ca $(H, \cdot)$ să fie grup rămâne să verificăm asoc. op. de „$\cdot$”

Metoda 1 Computațional.

$\forall x, y, z \in H$, $x\cdot(y\cdot z) \stackrel{?}{=} (x\cdot y)\cdot z$

$8\cdot 8\cdot 8 = 8^3 = 512$ cazuri.

eliminând despre semne: $4^3 = 64$ cazuri

Metoda 2: Considerăm matricea din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$\left.\begin{aligned}
1 &\longrightarrow I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
i &\longrightarrow I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
j &\longrightarrow J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
k &\longrightarrow K = IJ = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}
\end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned}
I^2 &= J^2 = K^2 = -I_2 \\
IJ &= K = -JI \\
JK &= I = -KJ \\
KI &= J = -IK
\end{aligned}\right\} \text{(prin calcul)}$$

$$\Rightarrow (\{I_2, -I_2, I, -I, J, -J, K, -K\}, \cdot) \cong (H, \cdot)$$

Cum înmulțirea în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ este asoc $\Rightarrow$ "$\cdot$" în H este asociativă

Metoda 3 $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2.1.53}$ Să se arate că grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ sunt izomorfe.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$

1) Vrem f morfism

$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$
$\forall x, y \in \mathbb{R}$

2) Vrem f injectivă

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ dacă $f(x_1) = f(x_2)$ vrem $x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow a^{x_1} = a^{x_2} \mid \log_a \Rightarrow x_1 = x_2$

3) Verif. f = surjectivă

$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \overset{?}{\exists} x \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) = y$

$f(x) = y \Leftrightarrow a^x = y \mid \log_a \Rightarrow \boxed{x = \underbrace{\log_a y}_{\in \mathbb{R}}}$

Așadar f izomorfism $\Rightarrow$

$$(\mathbb{R}, +) \simeq (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$$

$f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \quad f^{-1}(y) = \log_a y$.

2.1.54 Sără $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arg x$ este un morf. de grupuri de la $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ la $(\mathbb{R}, +)$

Det $\operatorname{Ker} f$ și $\operatorname{Im} f$

GREȘEALĂ : $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$

$x = y = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow x \cdot y = \cos 3\pi + i \sin 3\pi$

$f(x \cdot y) = \pi \Rightarrow f$ NU e morfism

$f(x) + f(y) = \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 3\pi$

$$f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot) \quad f(x) = \cos x + i \sin x$$

1) Vrem f morfism

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$f(x+y) = \cos(x+y) + i \sin(x+y)$$

$$f(x) \cdot f(y) = (\cos x + i \sin x) \cdot (\cos y + i \sin y) = \cos(x+y) + i \sin(x+y)$$

2) $$\operatorname{Ker} f = \{ x \in \underset{\text{dom de def}}{\mathbb{R}} \mid f(x) = \underbrace{1}_{\text{el. n. din codomeniu}} \}$$

$$f(x) = 1 \Rightarrow \cos x + i \sin x = 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{Ker} f = \{ 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

3) $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}) = \{ f(x) \mid x \in \mathbb{R} \}$.

$f(x) = \cos x + i \sin x$

$\underline{\text{Recap}}$ $z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = r(\cos x + i \sin x)$

$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} = d(O, z)$ $\quad z = a + bi$

$|f(x)| = |\cos x + i \sin x| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x}$

$= \sqrt{1} = 1 = d(O, f(x))$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathcal{C}(O, 1)$

$O = (0,0)$

$\boxed{2.1.57}$ Să se găsească toate subgrupurile lui $(\mathbb{Z}, +)$.

Indicație: $\operatorname{Sub}(\mathbb{Z}, +) = \{ n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N} \}$.

$n\mathbb{Z} = M_n = \{ n \cdot x \mid x \in \mathbb{Z} \}$.

Pas 1 $\boxed{n\mathbb{Z}} \leq (\mathbb{Z},+)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}}$

- $0 = n \cdot 0 \Rightarrow 0 \in n\mathbb{Z}$
- $\forall x, y \in n\mathbb{Z} \overset{?}{\Rightarrow} x+y \in n\mathbb{Z}$

$x \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \exists a \in \mathbb{Z}$ a.î. $x = na$

$y \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \exists b \in \mathbb{Z}$ a.î. $y = n \cdot b$

$x+y = na+nb = n\underbrace{(\underset{\in\mathbb{Z}}{a}+\underset{\in\mathbb{Z}}{b})}_{\in\mathbb{Z}} \in n\mathbb{Z}$.

- $\forall x \in n\mathbb{Z}$ vrem $-x \in n\mathbb{Z}$

$x \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \exists a \in \mathbb{Z}$ a.î. $x = na$

$\boxed{-x} = -na = n(-1) \cdot a = n \cdot (\underset{\in\mathbb{Z}}{-a}) \in n\mathbb{Z}$

Așadar avem că $n\mathbb{Z} \leq (\mathbb{Z},+)$.

Pas 2 Fie $H \leq (\mathbb{Z},+)$. Vrem să arătăm că

$\exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $H = n\mathbb{Z}$

$H \leq (\mathbb{Z},+) \Rightarrow 0 \in H$

Cazul I Dacă $H=\{0\} \Rightarrow H = 0\cdot\mathbb{Z}$ ✓

Cazul II Dacă $H \neq \{0\} \Rightarrow \exists x \in H$ a.î.

$x \neq 0$

$x \in H$ și $H \leq (\mathbb{Z}, +) \Rightarrow -x \in H$

$\Rightarrow$ H conține nr. întregi pozitive nenule

$\Rightarrow$ H conține nr. naturale nenule.

$(\mathbb{N}, \leq)$ orice submulțime admite $\Rightarrow$ un cel mai mic element

Putem alege în H un cel mai mic nr. natural nenul $\overset{\text{not}}{=} n$

Vrem $H = n\mathbb{Z}$

$n \in H \Rightarrow \underbrace{n+n+\ldots+n}_{x \cdot \text{ori}} \in H, \forall x \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \boxed{n \cdot x \in H, \forall x \in \mathbb{N}^*}$

- $\boxed{0 \in H}$
- $n \in H \Rightarrow -n \in H \Rightarrow$

$$\underbrace{(-n)+(-n)+\ldots+(-n)}_{x \text{ ori}} \in H, \forall x \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \boxed{(-n)\cdot x \in H, \forall x \in \mathbb{N}^*}$$

$$\Rightarrow n\mathbb{Z} \subseteq H$$

Rămâne să arăt că $H \subseteq n\mathbb{Z}$.

Pp. RA că $\exists x \in H$ a.î. $x \notin n\mathbb{Z}$

$\Downarrow$ $H \leq (\mathbb{Z},+)$ $\qquad$ $\Downarrow$ $n \nmid x$

$-x \in H$ $\qquad$ $\Downarrow$ $n \nmid -x$

Putem pp. că $x > 0$, $n \nmid x$

$\Rightarrow \exists q, r \in \mathbb{N}$ a.î. $x = n \cdot q + r$

$0 < r < n$

$x \in H$ | $H \leq (\mathbb{Z},+)$ $\Rightarrow$ $x - \underbrace{n - n - \dots - n}_{q \text{ ori}} \in H$.
$n \in H$ |

$\Rightarrow x - n \cdot q \in H \Rightarrow r \in H$,

contradicție cu alegerea lui n

$\Rightarrow H \subseteq n\mathbb{Z}$ | $\Rightarrow H = n\mathbb{Z}$.
$n\mathbb{Z} \subseteq H$ |

$\square$

(2.158, 2.159, 2.161, 2.162)