Seminar 7 10.XI.2021

$\boxed{2.1.51}$ (Grupul diedral de grad n)

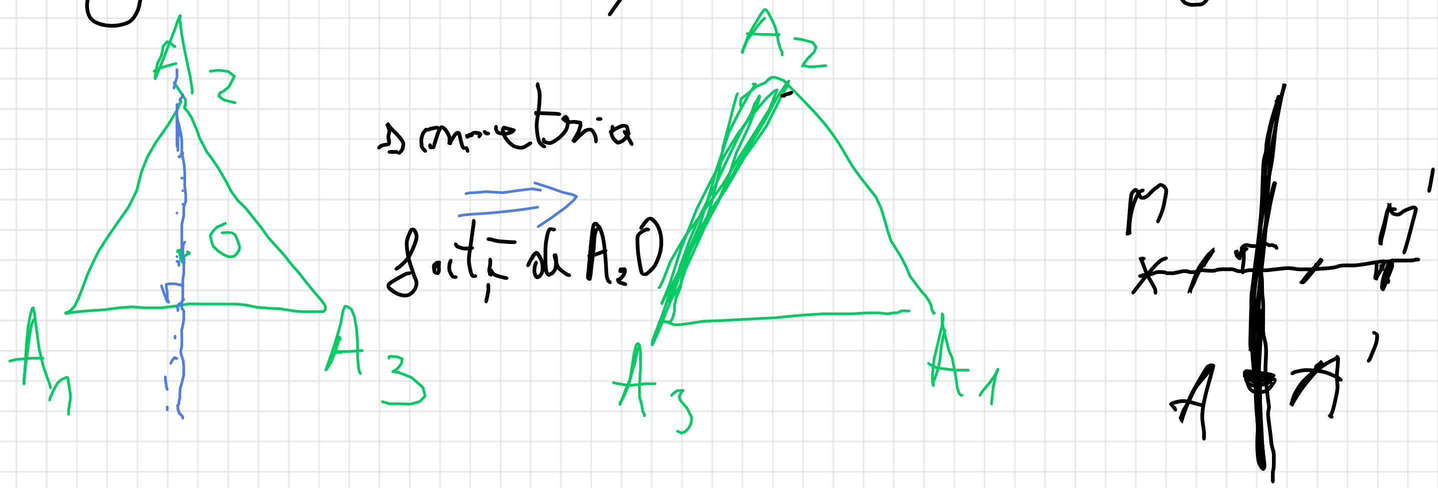
Fie $A_1A_2\dots A_n$ un poligon regulat cu centrul O într-un plan α. O izometrie este o funcție $f:\alpha\to\alpha$ cu propr.

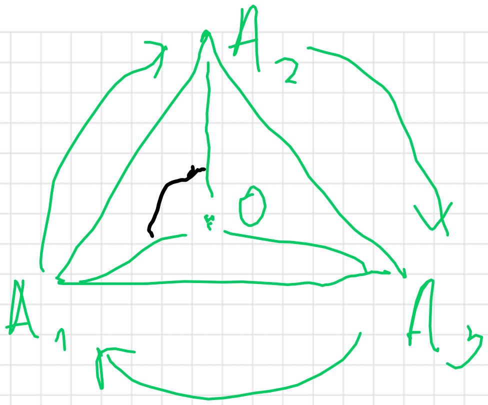
$$\forall X, Y \in \alpha: \quad |XY| = |f(X)f(Y)|$$

$$\mathrm{Izom}(\alpha) \overset{\text{not}}{=} \{ f:\alpha\to\alpha \mid f \text{ izometrie} \}$$

$$D_n \overset{\text{not}}{=} \{ f:\alpha\to\alpha \mid f \text{ izometrie și } f(A_1A_2\dots A_n) = A_1A_2\dots A_n \}$$

(grupul diedral de grad n)





rotația în jurul O de 120°

Notăm cu s = rotația în jurul centrului O cu $\frac{2\pi}{n}$ radiani (de la A_1 către A_2)

t = simetria axială față de axa A_1O.

Se obs. că $\underline{s, t} : \alpha \to \alpha$ sunt izometrii

Sosac

(1) $\underline{s^n = 1} = t^2$ ($1 = 1_\alpha$ funcția identitate a planului α)

(2) $ts = s^{n-1}t$

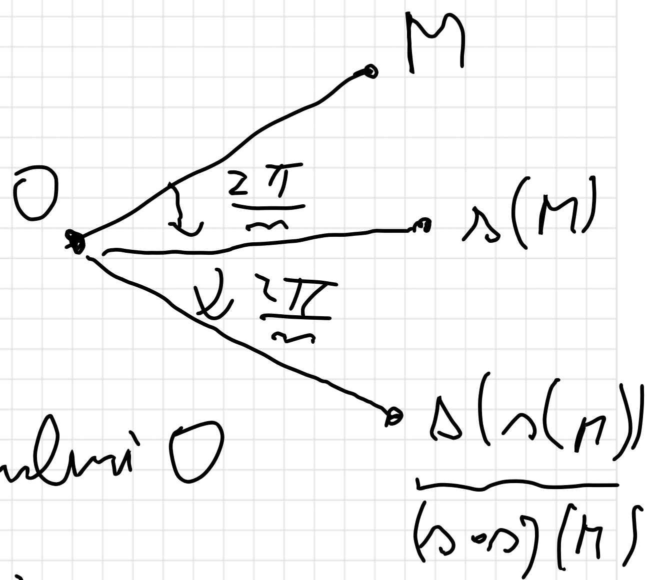
(3) $D_n = \{1, s, s^2, s^3, \dots, s^{n-1}, t, st, s^2t, \dots, s^{n-1}t\}$

(4) D_n este un grup în raport cu op. de compunerea funcțiilor

(5) Det. $\langle s \rangle$, $\langle t \rangle$, $\langle s, t \rangle$

(6) Să se const. tablele op. pt D_3 și D_4

(1) s = rot. în jurul centrului O cu $\frac{2\pi}{n}$ radiani.



Vrem $s^n = 1$.

$$s^2 = s \circ s$$

= rot în jurul centrului O cu $2 \cdot \frac{2\pi}{n}$ radiani

$$s^n = \underbrace{s \circ s \circ s \circ \ldots \circ s}_{n \text{ ori}} =$$

= rot în jurul centrului O cu $n \frac{2\pi}{n} = 2\pi$ radiani

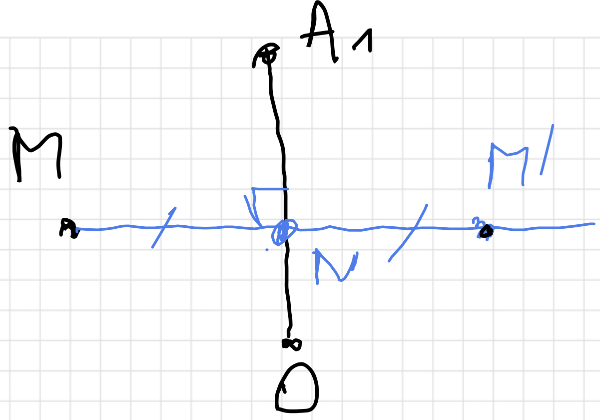
$= 1$

t = sim axială față de axa $A_1 O$

Vrem $t^2 = 1$

$$t^2(M) = (t \circ t)(M) = t(t(M)) = t(M') = M$$

$$= 1(M)$$



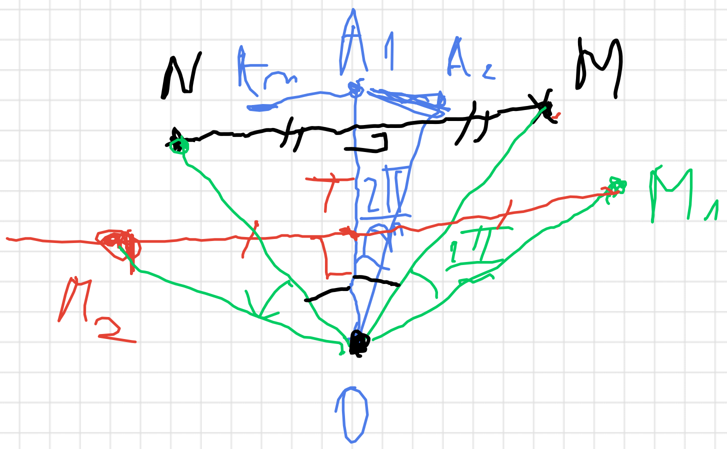
$$t(M) = M'$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} MN = NM' \\ MM' \perp A_1O \end{cases}$$
$$t(M') = M$$

$$\Rightarrow \boxed{t^2 = 1_\alpha}$$

(2) $t_s = s^{n-1} \cdot t$

Fie $M \in \alpha$ arbitrar $\quad \forall m \; (t_s)(M) = (s^{n-1} \cdot t)(M)$

$$(ts)(M) = (t \circ s)(M) = t(s(M)) = t(M_1) \overset{?}{=} M_2$$



$$s(M) = M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} m(\sphericalangle MOM_1) = \frac{2\pi}{n} \\ OM = OM_1 \end{cases}$$

$$t(M_1) = M_2 \Leftrightarrow \begin{cases} M_1M_2 \perp A_1O \\ M_1T = M_2T \end{cases}$$

M_2

$$(s^{n-1}t)(M) = (s^{n-1}\circ t)(M) = s^{n-1}(\underline{t(M)}) \quad \underbrace{s^{n-1}(N)}_{||}$$

$$t(M) = N \Leftrightarrow \begin{cases} MN \perp A_1O, \text{ iar } \{P\} = MN \cap A_1O \\ MP \equiv NP \end{cases}$$

s^{n-1} = rotație în jurul lui O cu $(n-1)\cdot\frac{2\pi}{n}$ radiani (de la A_1 către A_2)

= rotația în jurul lui O cu $\frac{2\pi}{n}$ radiani (de la A_2 la A_1)

Așadar ajungem să arătăm că

$m(\sphericalangle M_2ON) = \frac{2\pi}{n}$ rad și $M_2O \equiv ON$

Avem că A_1O este mediat pt MN și M_1M_2

$\Rightarrow \triangle MON$ și $\triangle M_1OM_2$ isoscele $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_1O$ este bisect pt $\sphericalangle MON$ și $\sphericalangle M_1OM_2$

$\Rightarrow MO \equiv ON$ și $M_1O \equiv OM_2$

$\Rightarrow MO \equiv ON \equiv M_1O \equiv OM_2 \Downarrow$

$\sphericalangle MOA_1 \equiv \sphericalangle A_1ON$

$\sphericalangle M_1OA_1 \equiv \sphericalangle A_1OM_2$

$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}\ (-)$

$\underbrace{m(\sphericalangle MOM_1)}_{\frac{2\pi}{n}} = m(\sphericalangle NOM_2) = \frac{2\pi}{n}$

---

(4) Prus 1 $(\mathrm{Izom}(\alpha), \circ)$ grup

Se dem că orice izometrie $f: \alpha \to \alpha$ este o fct bijectivă

Injectivitate

Fie $X, Y \in \alpha$ a.î. $f(X) = f(Y)$ Vrem $X = Y$

$\Downarrow$

$|f(X)f(Y)| = 0$

$\Downarrow f$ izometrie

$|XY| = 0$

Surj (temă)

Vom arăta $Izom(\alpha) < S(\alpha) =$

$= \{ f : \alpha \to \alpha \mid f \text{ bij} \}$

- $1_\alpha : \alpha \to \alpha \in Izom(\alpha)$

$X, Y \in \alpha \quad |1_\alpha(X) 1_\alpha(Y)| = |X \cancel{Y}|$

- $f, g \in Izom(\alpha) \Rightarrow f \circ g \in Izom(\alpha)$

$X, Y \in \alpha$

$|(f \circ g)(X) (f \circ g)(\cancel{X})| = |f(\overbrace{g(X)}^{A}) f(\overbrace{g(Y)}^{B})|$

$= |f(A) f(B)| \overset{f \text{ izom}}{=} |AB| = |g(X) g(\cancel{X})|$

$\overset{f \text{ izom}}{=} |XY| \Rightarrow f \circ g \in Izom(\alpha)$

- $f \in Izom(\alpha) \Rightarrow f^{-1} \in Izom(\alpha)$

Fie $X, Y \in \alpha$

$|f^{-1}(X) f^{-1}(Y)| \overset{f \text{ izom}}{=} |f(f^{-1}(X)), f(f^{-1}(Y)$

$= |X \times|$

Așadar Izom(α) grup.

$D_n = \{ f : \alpha \to \alpha \mid f$ izom. ai $f(A_1A_2, \ldots, A_n) = A_1A_2A_3 \ldots A_n \}$

Vom dem că $D_n \leq$ Izom(α)

- $1_\alpha : \alpha \to \alpha$ izom.
  $1_\alpha(A_1A_2 \ldots A_n) = A_1A_2 \ldots A_n$ $\Rightarrow$
  $1_\alpha \in D_n$
- Dacă $f, g \in D_n \overset{?}{\Rightarrow} f \circ g \in D_n$

$(f \circ g)(A_1A_2, \ldots A_n) = f(g(A_1A_2 \ldots A_n))$ $\overset{g \in D_n}{=} f(A_1A_2 \ldots A_n) \overset{f \in D_n}{=} A_1A_2 \ldots A_n$

$\Rightarrow f \circ g \in D_n$

• Dacă $f \in D_n \overset{?}{\Rightarrow} f^{-1} \in D_n$.

$f^{-1}(A_1 A_2 \dots A_n)$ $\underline{f(A_1A_2 \dots A_n) = A_1A_2 \dots A_n}$

$= f^{-1}(f(A_1A_2 \dots A_n)) = A_1A_2 \dots A_n$.

$\Rightarrow f^{-1} \in D_n \Rightarrow D_n \leq (\mathrm{Izom}, \circ)$

$\Rightarrow (D_n, \circ)$ grup.

---

(3) $D_n = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1},$
$t, rt, r^2t, \dots, r^{n-1}t\}$

Fie $f \in D_n \Rightarrow \underline{f \text{ izometrie}}$
$\Rightarrow f(A_1A_2 \dots A_n) = A_1A_2 \dots A_n$

$\Rightarrow f(A_1) \in \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$

Pp $\boxed{f(A_1) = A_k}$ $k \in \overline{1,n}$

$f(A_2) = ?$ f izometrie $\{A_{k-1}, A_{k+1}\}$

$A_0 = A_n$

$A_{n+1} = A_1$

Cazul I Dacă $\boxed{f(A_2) = A_{k+1}}$

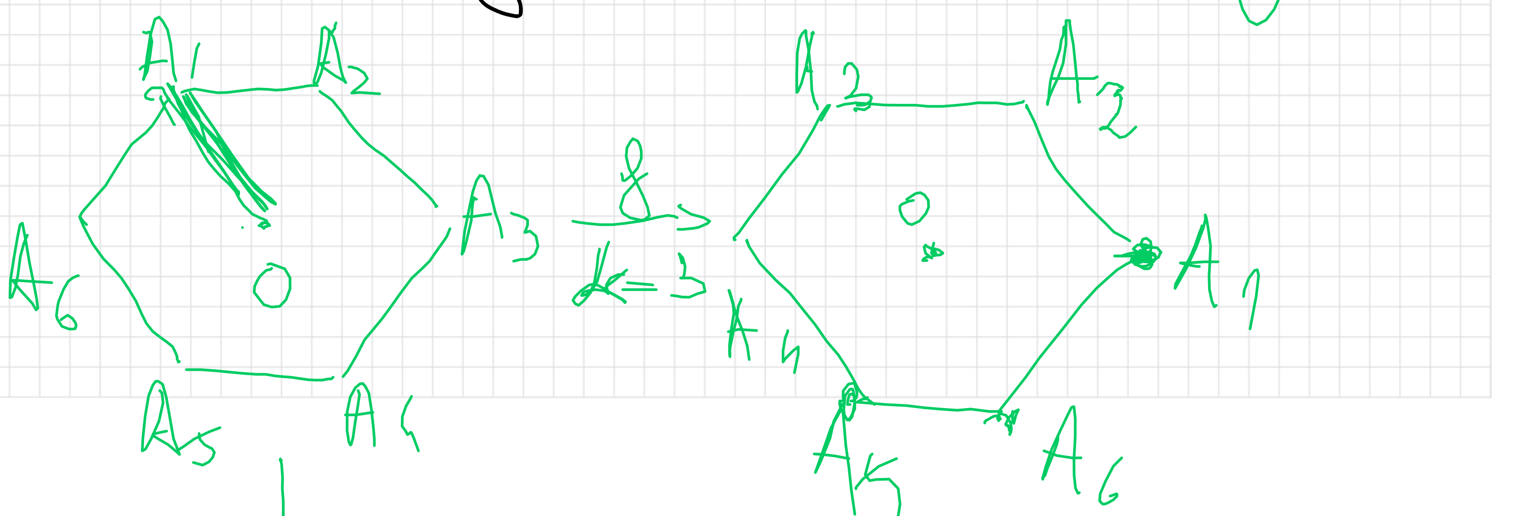
$f(A_i) = A_{k+i}$ (suma este modulo n)

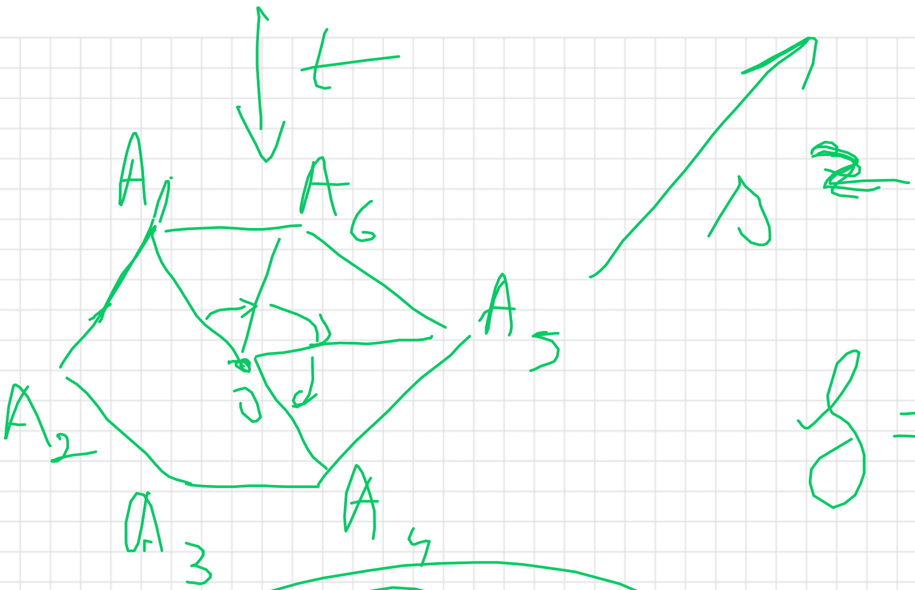
$\Rightarrow f =$ rotația în jurul centrului O cu $\frac{2\pi}{n} k$ radiani $= \rho^k$

$\Rightarrow \langle \rho \rangle \subseteq D_n$

$\langle \rho \rangle = \{1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}\}$ (pt că $\rho^n = 1$)

Cazul II $f(A_2) = A_{k-1} \Rightarrow f = \rho^{k-1} \cdot t$





$g = s^2 \circ t$

Obs $|D_n| = 2 \cdot n$.

$\langle t \rangle = \{1, t\}$

$\langle s, t \rangle = \{1, s, s^2, \dots, s^{n-1}, t, st, s^2t, \dots, s^{n-1}t\} = D_n$

$t \cdot s = s^{n-1} t$

$t \cdot s^2 = s^{n-2} \cdot t$

$\dots$

$(st)^2 = st\, st = s\, s^{n-1} t \cdot t = s^n t^2 = 1$

$\boxed{(s^k \cdot t)^2} \overset{\text{Temă}}{=} 1$.

$$\boxed{D_n = \langle s, t \mid s^n = 1 = t^2,\ ts = s^{n-1} t \rangle}$$

$D_3 = \langle s, t \mid s^3 = 1 = t^2, \boxed{ts = s^2 \cdot t} \rangle$

$= \{1, s, s^2, t, st, s^2t\}$

	1	s	s^2	t	st	s^2t
1	1	s	s^2	t	st	s^2t
s	s	s^2	1	st	s^2t	t
s^2	s^2	1	s	s^2t	t	st
t	t	s^2t	st	$\boxed{1}$	s^2	s
st	st	t	s^2t	s	$\boxed{1}$	s^2
s^2t	s^2t	st	t	s^2	s	$\boxed{1}$

$ts = s^2t$

$t \cdot s^2 = t \cdot s \cdot s = s^2t \cdot s = s^2 \cdot s^2 \cdot t = st$

$t \cdot s \cdot t = s^2 \cdot t \cdot t = s^2 \cdot t^2 = s^2 \cdot 1 = s^2$

$st\,s = s \cdot s^2t = s^3 \cdot t = 1 \cdot t = t$

$st \cdot s^2 = st \cdot s \cdot s = s\,s^2t \cdot s = \underbrace{s^3}_{1} t \cdot s$

$= ts = s^2t$

$st\,st = s\cdot s^2\cdot t\cdot t = s^3t^2 = 1$

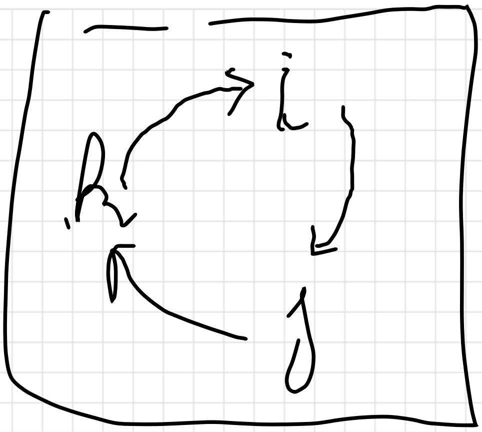
$\boxed{\text{Temă pt D4}}$

2.1.52 (Grupul quaternionilor)

Pe mulțimea $H = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ se def. în felul următor o op. de înmulțire.

- 1 este elem. neutru
- înmulțirea respectă regula semnelor: $(-x)y = x(-y) = -xy$.
- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

- $ij = k = -ji$
  $jk = i = -kj$
  $ki = j = -ik$



Deci $(H, \cdot)$ este un grup.
(grupul quaternionilor)

	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1					
j	j	-j	-k					
-j	-j	j	k					
k	k	-k	j					
-k	-k	k	-j					