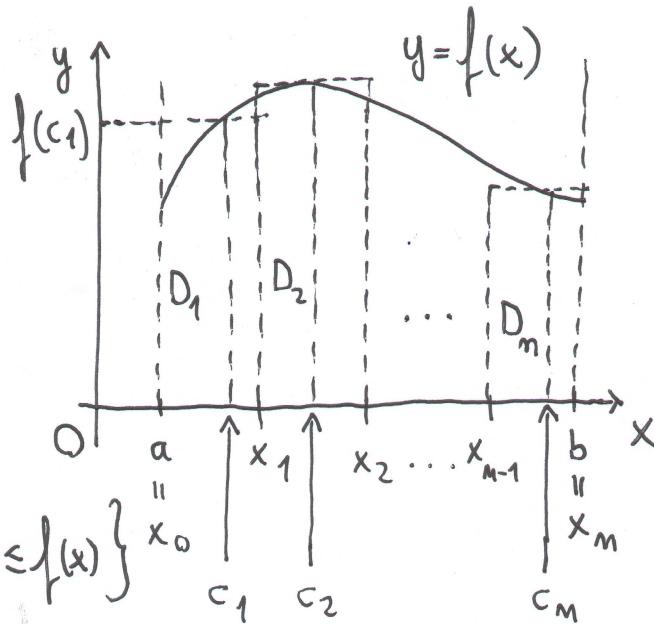
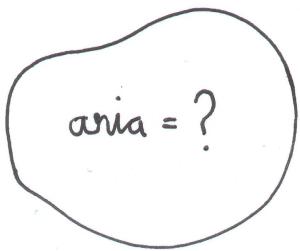


## 6. Integrala Riemann



$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$S[a, b] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

subgraficul functiei  $f$ .

Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ ,  $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ,

$\forall k = \overline{1, n}$ ,  $D_k$  - dreptunghiul de laturi  $x_k - x_{k-1}$  si  $f(c_k)$ ,  $k = \overline{1, n}$

$$\text{aria } S[a, b] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \text{aria}(D_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Def: Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o functie mărginită și  $n \in \mathbb{N}^*$ .

a) Un sir finit  $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  cu proprietatea

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  se numeste divizuire a intervalului  $[a, b]$ .

b) Numarul real  $\|\Delta\| = \max\{x_k - x_{k-1} \mid k = \overline{1, n}\}$  se numeste norma divizuirii  $\Delta$ .

c) Un sir finit  $\xi = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  cu proprietates  $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ,  $k = \overline{1, n}$  se numeste sistem de puncte intermediare (s.p.i.) asociat divizuirii  $\Delta$ .

d) Numărul real  $\sigma_f(\Delta, \xi) = \sum_{k=1}^M f(c_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$

se numește suma Riemann a funcției  $f$  corespunzătoare direcției  $\Delta$  și s.p.i.  $\xi$ .

e) Funcția  $f$  se numește integrabilă Riemann pe  $[a, b]$

dacă  $\exists I = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sigma_f(\Delta, \xi) \in \mathbb{R}$ , iar valoarea lui  $I$  nu

depinde de alegera s.p.i.  $\xi$ . Numărul  $I$  se numește integrală Riemann a funcției  $f$  pe  $[a, b]$  și se notează cu  $\int_a^b f(x) dx$ .

Obs: a) Sigurăl finit  $x_k = a + (b-a) \cdot \frac{k}{M}$ ,  $k=0, M$  formeză o direcție a intervalului  $[a, b]$  numită direcție echidistantă.

b) Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă Riemann pe  $[a, b]$  atunci

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{b-a}{M} \cdot \sum_{k=1}^M f\left(a + (b-a) \cdot \frac{k}{M}\right)$$

Dem:

a)  $x_0 = a$ ,  $x_M = b$ ,  $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{M} > 0$ .

b)  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^M f(c_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$

Alegem direcția echidistantă  $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_M)$  și  $c_k = x_k$ ,  $\|\Delta\| = \frac{b-a}{M} \rightarrow 0$  ( $M \rightarrow \infty$ )

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \frac{b-a}{n}$$

Ex: a)   $f(x) = 2, \forall x \in [a, b]$

Fișe  $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  o divizuire și  $\xi = (c_1, c_2, \dots, c_n)$

D.P.I.

$$\sigma_f(\Delta, \xi) = \sum_{k=1}^n 2 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 2 \cdot (x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_n - x_{n-1}) = 2(x_n - x_0) = 2 \cdot (b-a) \Rightarrow \int_a^b 2 dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sigma_f(\Delta, \xi) = 2 \cdot (b-a)$$

$\Rightarrow f$  integrabilă Riemann pe  $[a, b]$

$$b) f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}, f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

Fișe  $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  o divizuire oricare a intervalei  $[0, 1]$ ,

$\exists c_k \in [x_{k-1}, x_k] \cap \mathbb{Q}$  și  $c'_k \in [x_{k-1}, x_k] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

$\Rightarrow \xi = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ ,  $\xi' = (c'_1, c'_2, \dots, c'_n)$  sunt două D.P.I. ale lui  $\Delta$ .

$$\sigma_f(\Delta, \xi) = \sum_{k=1}^n 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 1, \sigma_f(\Delta, \xi') = \sum_{k=1}^n 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0$$

$\Rightarrow \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sigma_f(\Delta, \xi)$  depinde de  $\xi \Rightarrow f$  nu este int. Riemann pe  $[0, 1]$

Prop: Orice funcție continuă pe  $[a, b]$  este integrabilă Riemann pe  $[a, b]$ .

$$\text{Ex: } f(x) = x, \forall x \in [a, b] \quad \int_a^b f(x) dx = ?$$

$$f \text{ continuă pe } [a, b] \Rightarrow \exists \int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sigma_f(\Delta, \xi)$$

Fie  $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_M)$  diviziunea echidistantă,

$x_k = a + (b-a) \cdot \frac{k}{M}$ ,  $k \in \overline{0, M}$  și  $\xi = (x_1, x_2, \dots, x_M)$  P.P.C.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{b-a}{M} \sum_{k=1}^M f(x_k) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{b-a}{M} \sum_{k=1}^M \left( a + (b-a) \cdot \frac{k}{M} \right) = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{b-a}{M} \left( \sum_{k=1}^M a + (b-a) \cdot \sum_{k=1}^M \frac{k}{M} \right) = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{b-a}{M} \left( a \cdot M + (b-a) \cdot \frac{M(M+1)}{2M} \right) = (b-a) \cdot \left( a + \frac{b-a}{2} \right) = \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2} \end{aligned}$$

Prop: Fie  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funcții integrabile Riemann pe  $[a, b]$ .

Au loc afirmațiile:

1. (monotonie integrabilă)

Dacă  $f(x) \leq g(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$  atunci  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

2. (liniaritate integrabilă)

$\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x) dx + \beta \cdot \int_a^b g(x) dx$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

3. (aditivitate integrabilă)

$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ ,  $\forall c \in (a, b)$

Cons: Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este funcție continuă pe  $[a, b]$  atunci

au loc afirmațiile:

1. Dacă  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$  atunci  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

$$2^{\circ} \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$3^{\circ} \quad \inf f([a, b]) \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx \leq \sup f([a, b])$$

Def: Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție și  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție derivabilă cu proprietatea că  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . Atunci  $F$  se numește primitivă (antiderivata) lui  $f$ .

Obs: a) Orice primitivă a funcției nule este o funcție constantă  
 b) Orice două primitive ale unei funcții date diferență  
 primitivă constantă.

Dem: a)  $f(x) = 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$  și  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F'(x) = 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$

$\Rightarrow$  aplicăm teorema de medie a lui Lagrange funcției  $F$  pe intervalul  $[a, x]$ ,  $x \in (a, b]$ ,  
 $\exists c \in (a, x)$  a.î.  $F(x) - F(a) = \underbrace{F'(c)}_{=0} \cdot (x-a) \Rightarrow F(x) = F(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow F$  constantă pe  $[a, b]$ .

b) Fie  $F, G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a.î.  $F'(x) = G'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$

unde  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție dată.

$\Rightarrow F'(x) - G'(x) = 0$ ,  $\forall x \in [a, b] \Rightarrow F - G$  este o primitive a funcției nule  $\stackrel{a)}{\Rightarrow} F - G = \text{constantă}$ .

**T** (teorema fundamentală a calculului integral)

Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă pe  $[a, b]$  atunci au loc afirmațiile:

1º Funcție  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ,  $\forall x \in [a, b]$   
este o primitive a lui  $f$ .

2º Dacă  $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este o primitive oricare a lui  $f$   
atunci are loc formula

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) \stackrel{\text{nat}}{=} G(x) \Big|_a^b$$

Prop (formula de integrare prin părți)

Dacă  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sunt funcții derivabile și derivatele lor sunt funcții continue pe  $[a, b]$  atunci

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

Prop (formula schimbării de variabilă)

Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă pe  $[a, b]$ , iar  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  este derivabilă cu derivata funcție continuă pe  $[\alpha, \beta]$  și  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$  atunci

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

Dem: Dacă  $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este o primitive a lui  $f$  atunci

$G \circ \varphi$  este o primitive a lui  $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$  deoarece

$$(G \circ \varphi)'(t) = G'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t), \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = G(\varphi(\beta)) - G(\varphi(\alpha)). \quad \text{și}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = (G \circ \varphi)(\beta) - (G \circ \varphi)(\alpha) = G(\varphi(\beta)) - G(\varphi(\alpha)).$$