~ SEMINAR 2

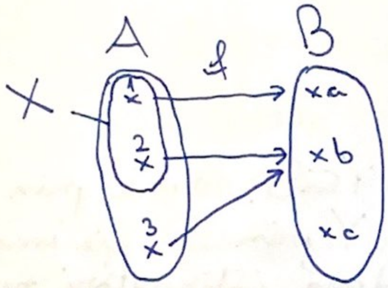
Restricția unei funcții:

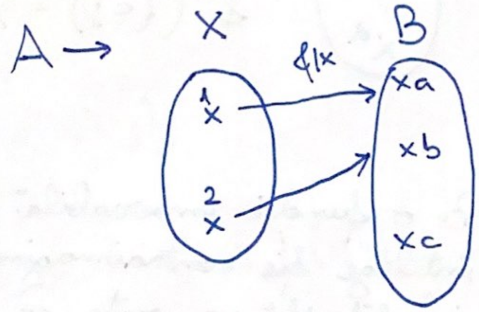
Fie $f: A \to B$ funcție

$X \subseteq A$

$f|_X : X \to B$

$f|_X(x) = f(x), \ (\forall) x \in X$





$\boxed{1.3.38}$

Fie $A, B, C$ mulțimi a.î. $C \subseteq A$

și fie $f$ o funcție $: A \to B$. Să se arate că restricția lui $f$ la mulțimea $C = f \circ i$, unde $i: C \to A$ este funcția de incluziune

$i: C \to A, \ i(x) = x, \ (\forall) x \in C$

$f|_C : \underset{\approx}{C} \to \underset{\approx}{B}$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right, "f \circ i"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

$f \circ i : \underset{\approx}{C} \to \underset{\approx}{B}$

Fie $x \in C$. Vrem $(f|_C)(x) = (f \circ i)(x)$

$$\left.\begin{array}{l} (f \circ i)(x) = f(i(x)) = f(x) \\ (f|_C)(x) = f(x) \end{array}\right\} \text{„A"}$$

Imaginea și contraimaginea unei mulțimi printr-o funcție:

Fie $f: A \to B, \ X \subseteq A, \ Y \subseteq B$

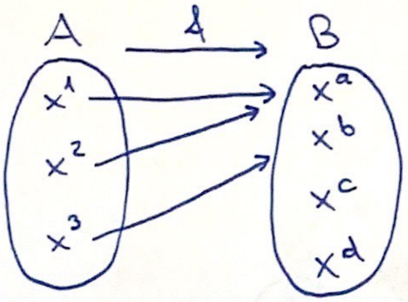
$f(X) := \{ f(x) / x \in X \}$

imaginea lui $X$ prin $f$

(Fie $b \in f(X) \Rightarrow \exists \, x \in X$ a.î. $f(x) = b$)

$f^{-1}(Y) := \{x \in A \,/\, f(x) \in Y\}$

contraimaginea lui Y prin f




$f^{-1}(\{a\}) = \{1, 2\}$

$f^{-1}(\{a, b\}) = \{1, 2, 3\}$

$f^{-1}(\{c\}) = \emptyset$

$\boxed{1.3.39}$

Fie $f: A \to B$ o funcție inversabilă și fie $Y \subseteq B$. Atunci prin $f^{-1}(Y)$ putem înțelege fie contraimaginea lui Y prin f, fie imaginea lui Y prin $f^{-1}$. Să se arate că cele două interpretări nu intră în conflict

$f: A \to B \qquad f^{-1}: B \to A$

$U = f^{-1}(Y)$ ca și contraimagine $= \{x \in A \,/\, f(x) \in Y\}$

$V = f^{-1}(Y)$ ca și imagine $= \{f^{-1}(y) \,/\, y \in Y\}$

Vrem să arătăm că $U = V \iff U \subseteq V$ și $V \subseteq U$

„$U \subseteq V$". Fie $x \in U$. Vrem $x \in V$

$\Rightarrow x \in A$ și $f(x) \in Y \quad f(x) = \boxed{y \in Y}$

$\Rightarrow \boxed{f^{-1}(y) = x} \quad \Rightarrow x \in V$

„$V \subseteq U$". Fie $v \in V$. Vrem $v \in U$

$\Rightarrow \exists y \in Y$ a.î. $\boxed{v = f^{-1}(y)} \Rightarrow \boxed{v \in A}$

$\Rightarrow f(v) = y \Rightarrow \boxed{f(v) \in Y} \Rightarrow v \in U$

$\boxed{1.3.40}$

Să se găsească un exemplu de două funcții $f, g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a.î. $g \circ f \neq f \circ g$ (deși compunerea este definită bilateral, ea nu este comutativă)

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \; f(x) = 2x$

$g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \; g(x) = x + 1$

$f \circ g: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad (f \circ g)(x) = 2x + 2$

$g \circ f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad (g \circ f)(x) = 2x + 1$

pt. $x = 7$ $\left.\begin{array}{l} (f \circ g)(7) = 16 \\ (g \circ f)(7) = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow f \circ g \neq g \circ f$

$\boxed{1.3.45}$

Fie $f: A \to B$ funcție. Fie $X, X_1, X_2 \subseteq A$ și $Y, Y_1, Y_2 \subseteq B$

Să se arate că:

1) $X \subseteq f^{-1}(f(X))$

Fie $a \in X$. Vrem $a \in f^{-1}(f(X))$

$X \subseteq A \Rightarrow a \in A \Rightarrow f(a) \in B$

$a \in X \Rightarrow f(a) \in f(X)$

$f(a) = y \Rightarrow y \in f(X)$

$f^{-1}(\{y\}) = \{u \in A \mid f(u) = y\}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow a \in f^{-1}(\{y\}) \\ y \in f(X) \Rightarrow \{y\} \subseteq f(X) \Rightarrow f^{-1}(\{y\}) \subseteq f^{-1}(f(X)) \end{array}\right\} \Rightarrow a \in f^{-1}(f(X))$$

2) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$

$^*$ $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$

$f(X_1 \cup X_2) \subseteq f(X_1) \cup f(X_2)$

Fie $b \in f(X_1 \cup X_2)$. Vrem $b \in f(X_1) \cup f(X_2)$

$\Rightarrow \exists\ a \in X_1 \cup X_2$ a.î. $f(a) = b$

$\Downarrow$

$a \in X_1$ sau $a \in X_2$

$\Rightarrow f(a) \in f(X_1)$ sau $f(a) \in f(X_2)$

$\Rightarrow b \in f(X_1) \cup f(X_2)$

$f(X_1) \cup f(X_2) \subseteq f(X_1 \cup X_2)$

Fie $b \in f(X_1) \cup f(X_2)$. Vrem $b \in f(X_1 \cup X_2)$

$\Rightarrow b \in f(X_1)$ sau $b \in f(X_2)$

$\Rightarrow \exists\ a_1 \in X_1$ a.î. $f(a_1) = b$ sau $a_2 \in X_2$ a.î. $f(a_2) = b$

$\xRightarrow{X_1, X_2 \subset X_1 \cup X_2} \exists\ a_1 \in X_1 \cup X_2$ a.î. $f(a_1) = b$ sau

$\exists\ a_2 \in X_1 \cup X_2$ a.î. $f(a_2) = b$

$\Rightarrow \exists\ a \in X_1 \cup X_2$ a.î. $f(a) = b \Rightarrow b \in X_1 \cup X_2$.

3) $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$

Fie $b \in f(X_1 \cap X_2)$. Vrem $b \in f(X_1) \cap f(X_2)$

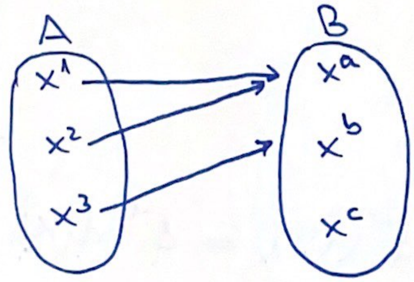
$\Rightarrow \exists \underline{a \in X_1 \cap X_2}$ a.î. $f(a) = b$

$\Downarrow$

$a \in X_1$ și $a \in X_2$

$\Rightarrow b \in f(X_1)$ și $b \in f(X_2)$

$\Rightarrow b \in f(X_1) \cap f(X_2)$




$\left.\begin{array}{l} f(\{1\}) = \{a\} \\ f(\{2\}) = \{a\} \end{array}\right| \Rightarrow f(\{1\}) \cap f(\{2\}) = \{a\}$

$f(\{1\} \cap \{2\}) = f(\emptyset) = \emptyset$