Seminar 4 20 oct 2021

$\boxed{1.3.52}$ Să se arate că $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$

$\Leftrightarrow C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$

Dem. Var 2 („cu submulțimi")

În 1.3.51. C_n^k = nr-ul de submulțimi de k elem ale unei mulț de n elemente $\Rightarrow$

$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$ = nr-ul total de submulț ale unei mulțimi cu n elemente.

Vrem să o mulțime cu n elemente are 2^n submulțimi

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ $|B| = n$

$C \subseteq B$

Putem avea că $b_1 \in C$ și $b_1 \notin C$

$\longrightarrow$ 2 posib.

Putem avea că $b_2 \in C$ și $b_2 \notin C$

$\longrightarrow$ 2 posib

$\boxed{\ldots}$

Putem avea că $b_n \in C$ și $b_n \notin C$

$\longrightarrow$ 2 posib

Regula produsului $\Longrightarrow$ pt construcția lui $C \subseteq B$

avem $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ ori}} = 2^n$ posib.

Formal: ind matem după n (temă)

Recap:

Fie $f: A \to B$

f bij $\Leftrightarrow$ f inv $\Leftrightarrow$ $\exists\, g : B \to A$

a.î. $\underset{B \to A \to B}{f \circ g} = 1_B$

$g \circ f = 1_A$

f surj $\Leftrightarrow$ g este o inv la dr pt f

f inj $\Leftrightarrow$ g este o inv la st pt f

Obs Pot $\exists$ mai multe inverse la st sau la dr

$\boxed{1.3.42}$ Să se găsească un exemplu de funcție $f : A \to B$ a.î.

(1) f este inj dar NU admite inversă la dreapta.

Obs f NU adm inv la dr $\Leftrightarrow$ f NU este surj

$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$\boxed{f(x) = x + 1}$

Fie $x_1, x_2 \in [0, 1]$ a.î. $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow \boxed{f \text{ inj}}$

$\operatorname{Im} f = [1, 2] \subsetneq \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ NU este surj

Dem că f NU adm inversă la dr

Pp. R.A. că f adm inversă la dr

$\Rightarrow \exists \boxed{g : \mathbb{R} \to [0, 1]}$ a.î. $\underline{\underline{f \circ g = 1_{\mathbb{R}}}}$

Fie $\underline{\underline{x \in \mathbb{R}}} \Rightarrow$

$(f \circ g)(x) = 1_{\mathbb{R}}(x) \Rightarrow$

$f(g(x)) = x \Rightarrow$

$g(x) + 1 = x \Rightarrow g(x) = x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$g : \mathbb{R} \to [0, 1]$

$g(x) = x - 1$

$g(5) = 4 \notin [0, 1]$ contrad.

$\Rightarrow f$ NU admite inv la dr

$\boxed{f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 1}$

f inj $\Leftrightarrow$ f admite inv la st

$\Leftrightarrow \exists\, g : \mathbb{R} \to [0, 1]$ a.î. $g \circ f = 1_{[0,1]}$

Fie $x \in [0, 1]$

$(g \circ f)(x) = 1_{[0,1]}(x) \Rightarrow$

$g(f(x)) = x \Rightarrow$

$\underline{g(x+1)} = \underline{x}, \forall x \in [0,1]$

$\in [1,2]$ $\qquad g : \mathbb{R} \to \underline{[0,1]}$

$$\underline{g(x)} = \begin{cases} x-1, & x \in [1,2] \\ \underline{\text{orice}}\ 0, & x \notin [1,2] \\ 0 & \to [0,1] \end{cases}$$

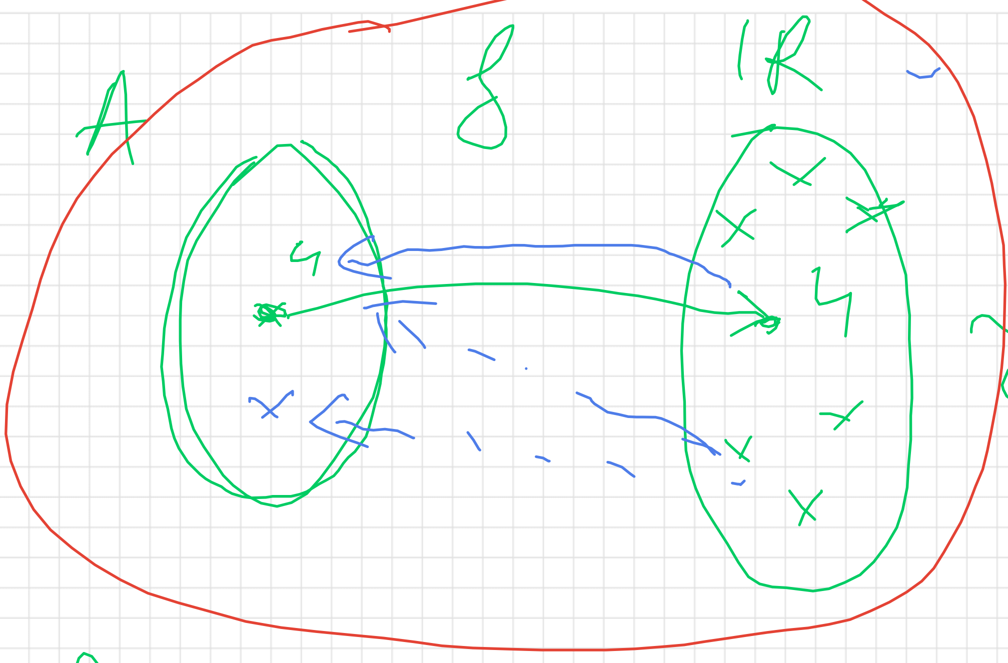
este o fct inv la st pt f

$\Rightarrow$ am creat o ∞ de fct inv la st pt f

(2) f are exact o inversă la stânga, dar NU este bij.

Obs f are inv la st $\Rightarrow f$ inj

f NU este bij $\Rightarrow$ $\underline{f\ \text{NU este surj}}$



f inj.

$\mathrm{Im}\, f = \{4\} \subsetneq \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f nu e surj.

f inj $\Rightarrow$ $\exists$ inv la st $\Rightarrow$

$$\exists\, \boxed{g : \mathbb{R} \to \{4\}} \text{ a.î. } \underline{g \circ f = 1_{\{4\}}}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(4) = 1_{\{4\}}(4) \Rightarrow$$

$$g(f(4)) = 4 \Rightarrow$$

$$\boxed{g(4) = 4} \checkmark$$

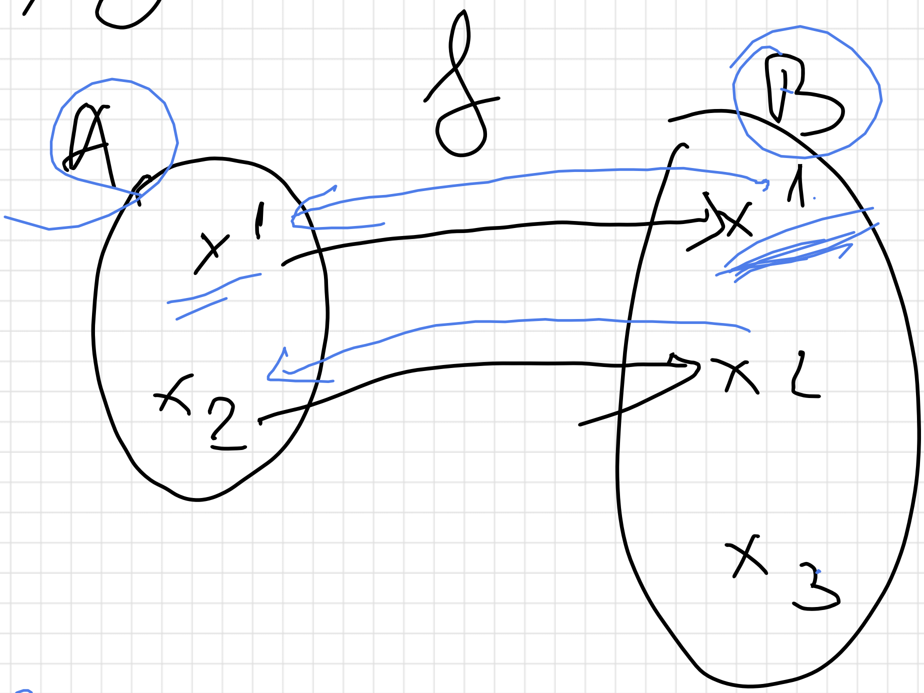
$$g(1) = 4$$

$$\boxed{g(x) = 4,\ \forall x \in \mathbb{R}}$$

este inv la st pt f

$\Rightarrow$ <u>f are o unică inv la st</u>

(3) f are exact 2 inverse la st.



f inj ✓

f NU e surj

$3 \notin \operatorname{Im} f$

f inj $\Rightarrow \exists$ inv la st pt f $\Rightarrow$

$\exists\, g : B \to A$ a.î. $g \circ f = 1_A$

$(g \circ f)(1) = 1_A(1) \Rightarrow$

$g(f(1)) = 1 \Rightarrow \boxed{g(1) = 1}$

$(g \circ f)(2) = 1_A(2) \Rightarrow$

$g(f(2)) = 2 \Rightarrow \boxed{g(2) = 2}$

$g(3) \in \{1, 2\}$

Așadar avem 2 fct inv la st pt f

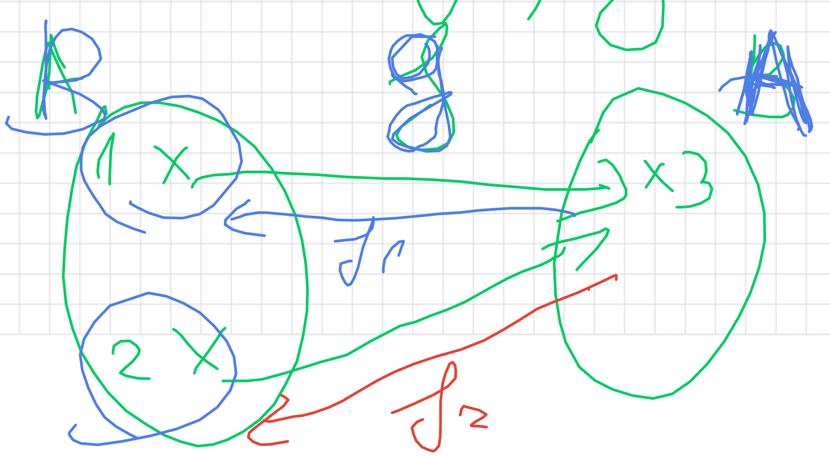
x	1	2	3
$g_1(x)$	1	2	1
$g_2(x)$	1	2	2

$\boxed{1.3.93}$ Să se dea un ex. de fct $g: B \to A$ a.î.

(1) g are exact 2 inverse la dr

Obs: g are inv la dr $\Rightarrow g$ surj

Vrem o fct g surj, care NU e inj



$g(1) = g(2) = 3$

$\Rightarrow g$ NU e inj.

$\operatorname{Im} g = \{3\} = B \Rightarrow g$ surj.

g surj $\Rightarrow$ g adm inv la dr $\Rightarrow$

$\exists\, f : A \to B$ a.î. $\boxed{g \circ f = 1_A}$

$(g \circ f)(3) = 1_A(3) \Rightarrow$

$g(f(3)) = 3 \Rightarrow \boxed{f(3) \in \{1,2\}}$

Avem exact 2 f-ct inv la dr

$f : A \to B$

x	3
$f_1(x)$	1
$f_2(x)$	2

(2) g are o ∞ de inv la dr

(temă)

Deci g are exact o inversă la st $\Longleftrightarrow$ g este bij $\quad g: B \to A$

"$\Rightarrow$" Pp că g are exact o inv la st

Vrem g bij

g are inv la st $\Rightarrow$ g surj

Rămâne să ar că g este inj

Fie $x_1, x_2 \in B$ a.î. $g(x_1) = g(x_2) = a_1 \in A$

Vrem $x_1 = x_2$

g are inv la st $\Rightarrow \exists f: A \to B$ a.î.

$g \circ f = 1_A$

Fie $a \in A \Rightarrow (g \circ f)(a) = 1_A(a)$

$\Rightarrow g(f(a)) = a \Rightarrow f(a) \in \{x_1, x_2, \dots\}$ V sau

Dacă $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$ putem avea ul

pt-ăi 2 funcții inverse la dreapta bilaterale (una când $f(a) = x_1$
alta când $f(a) = x_2$)

contrazice injectivitatea $\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$

f inj $\xrightarrow{f \text{ surj}}$ f bij

"$\Leftarrow$" Știm că f bij

Vrem să arătăm că are exact o inv la dr.

$f: A \to B$

f bij $\Rightarrow$ f inv $\Rightarrow \exists f^{-1}: B \to A$

f^{-1} inv la dr pt f EXISTENȚA

UNICITATEA

Pp RA că $\exists$ cel puțin 2 f.ct inv la dr pt f bilaterale

$g_1 \neq g_2 : B \to A$

$f^{-1} \circ \;|\; f \circ g_1 = 1_B = f \circ g_2 \Rightarrow$

$$\boxed{g_1 = f^{-1} = g_2}$$

contr $\Rightarrow$ inv la dr este unic și este chiar f^{-1}

<u>Temă</u> 1.3.44, 1.3.46, 1.3.47