Seminar 6 — 03.11.2021

Relații de ordine

Recap: Fie A, B mulțimi $R \subseteq A \times B$

Spunem că $r = (A, B, R)$ o rel. binară

- Dacă $A = B \Rightarrow r$ este o rel. omogenă

- Fie $r = (A, A, R)$ $(R \subseteq A \times A)$, sp. că

rel. de preordine

→ reflexivă: $\forall x \in A \quad x r x$

→ tranzitivă: $\forall x, y, z \in A$

dacă $x r y$ și $y r z$ atunci $x r z$.

→ antisimetrie: $\forall x, y \in A$

dacă $x r y$ și $y r x$ atunci $x = y$

Atunci sp. că r este o rel. de ordine

(A, r) este o mult. ordonată

- Dacă $(A, \leq)$ mult. ordonată
Spunem că A este un **lanț** dacă
$\forall x, y \in A$ avem că $x \leq y$ sau $y \leq x$

- Fie $(A, \leq)$ mult. ord. $a \in A$. Sp. că
a este

→ $\boxed{\text{elem. minimal}}$ dc.
$\forall x \in A$: dacă $x \leq a$ atunci $x = a$

→ elem. maximal dc.
$\forall x \in A$ dacă $a \leq x$ atunci $x = a$

→ cel mai mic elem. dc.
$\boxed{\forall x \in A : \quad a \leq x}$

→ cel mai mare elem. dc.
$\forall x \in A \quad x \leq a$

1.7.46 Să se det. toate rel. de ordine care se pot defini pe o mult. $A = \{a, b, c\}$. În fiecare să se precizeze elem. minimale maximale, cel 2mai mic/mare elem.

$\leq$ rel de ordine pe A (R, T, AS)

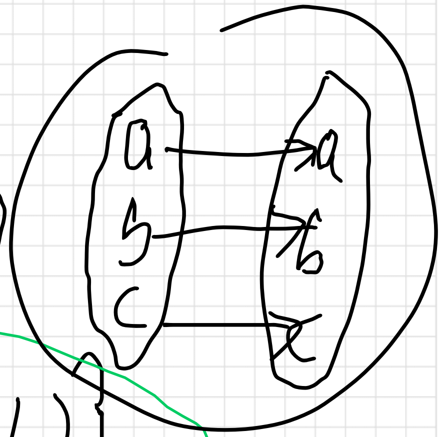
(R): $\forall x \in A: x \leq x \Rightarrow$

$a \leq a,\ b \leq b,\ c \leq c$

(AS): $\forall\ x, y \in A$, dc $x \leq y$ și $y \leq x$ at $x = y$

Obs. Daca $\underline{a \leq b}$ și $\underline{b \leq a} \overset{AS}{\Rightarrow} a = b$

fals.



$R_1 = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$

$R_2 = \{$ —//— $, (a,b)\}$

$a \leq a$ și $a \leq b \Rightarrow a \leq b$ ✓

$a \leq b$ și $b \leq b \Rightarrow a \leq b$ ✓

⋮

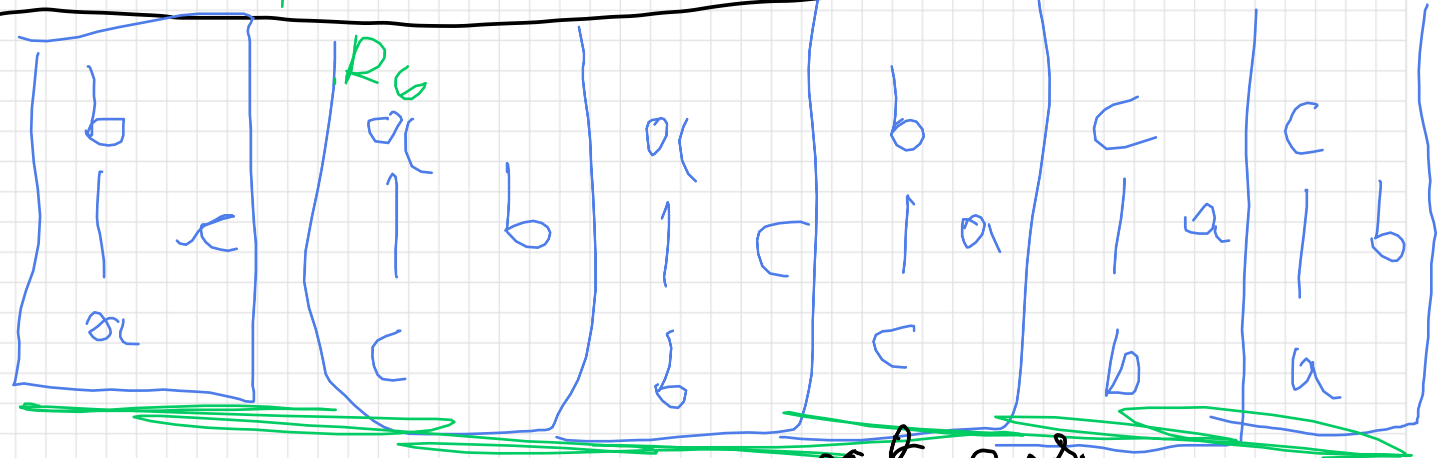
$R_3 = \{$ —//— $, \underbrace{(\boxed{a}, b)}_{\leq}, \underbrace{(\boxed{a}, c)}_{\leq}\}$

$R_4 = \{ -//- , (a, \boxed{b}), (c, \boxed{b}) \}$

$R_5 = \{ -//- , (a, b), (b, c), (a, c) \}$

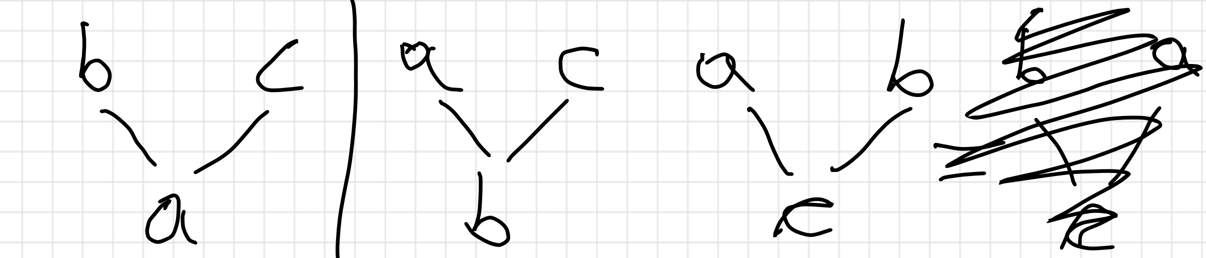
$a \le b \wedge b \le c \Rightarrow a < c$

R_2

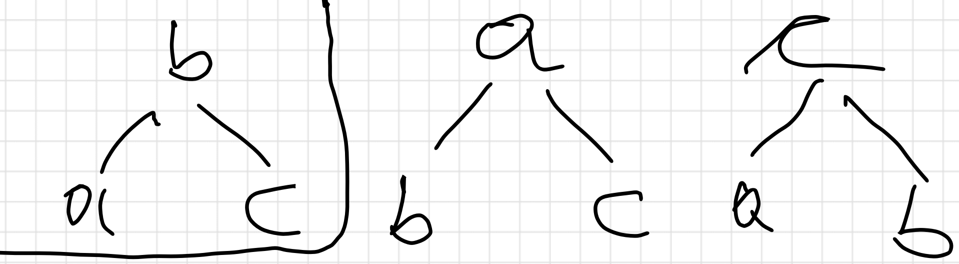


$R_6 = \{ (a,a), (b,b), (c,c), (c,a) \}$

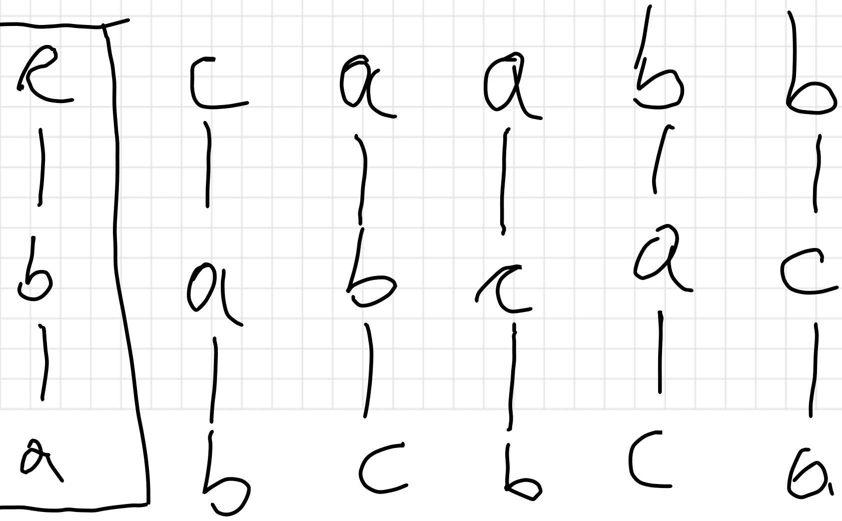
R_3



R_4

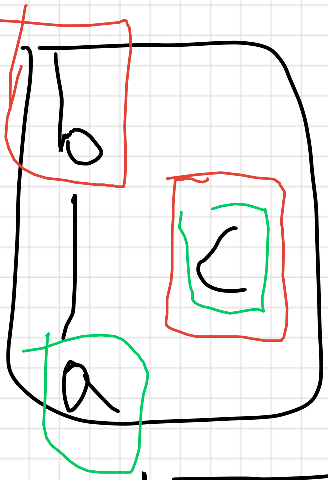


R_5



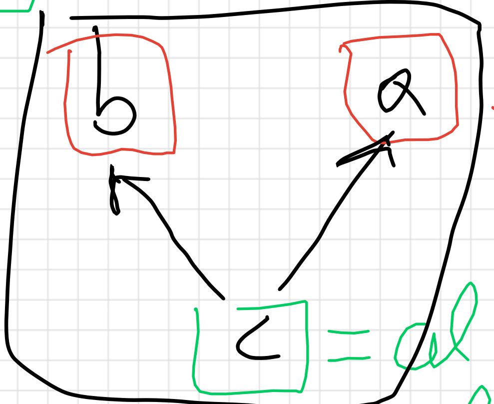
R_1 a b c

R_2



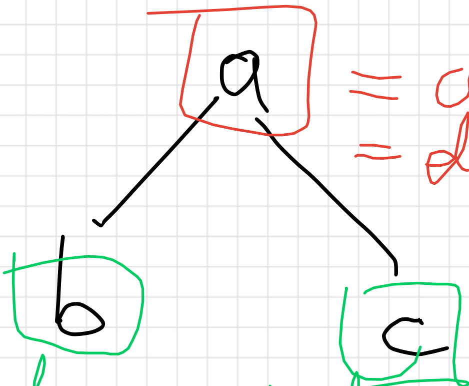
NU ∃ cel mai mic elem
cel mai mare elem

R_3



NU ∃ cel mai mare elem.
elem maximale

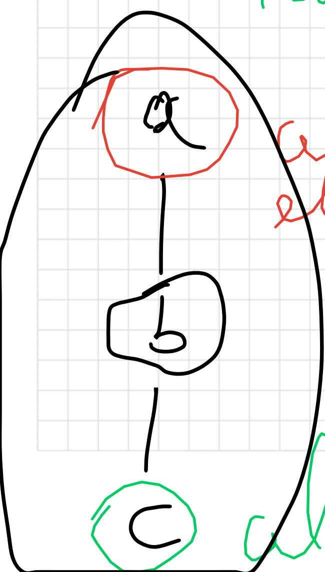
c = cel mai mic elem.
= elem minimale



a = cel mai mare elem
= elem maximal.

NU ∃ cel mai mic elem

elem minimal elem minimal



cel mai mare elem
elem max

cel mai mic elem, elem minimal.

a b c

Nu ∃ el maxim elem / el minimale elem

Elem max: a, b, c

Elem minimale: a, b, c.

1.4.48 Dacă $(A, \leq)$ este o mulț. ordonată, atunci $(A, \geq)$ este tot o mulț. ordonată, unde $\geq = \leq^{-1}$.

Verif $(A, \geq)$ mulț. ord. (R, T, AS).

Reflexivitate: $\forall\, a \in A$, verif $a \geq a$

$(A, \leq)$ m. ord $\xrightarrow{R} \forall a \in A \Rightarrow a \leq a$

Tranzitiv $\forall\, a, b, c \in A$

Dacă $\boxed{a \geq b}$ și $\boxed{b \geq c}$ atunci $\boxed{a \geq c}$

$\geq = \leq^{-1}$

$b \leq a$ $c \leq b$

$\Downarrow$ T rel. „$\leq$"

$c \leq a$ $\qquad$ $\geq \; = \; \leq^{-1}$

Antisim $\forall a, b \in A$

dacă $\boxed{a \geq b}$ și $\boxed{b \geq a}$ atunci $\boxed{a = b}$

$\Downarrow \quad \leq^{-1} = \geq \qquad \Downarrow$

$b \leq a$ și $a \leq b \xrightarrow{AS\ \leq} b = a$

Având $(A, \geq)$ este o mult. ord.

Recap: Fie $(A, \leq)$ o mult. ordonată și $X \subseteq A$. Spunem că un elem $a \in A$ [...]

- margine inferioară pt X dacă $a \leq x$ $\forall x \in X$
- margine superioară pt X dacă $x \leq a$ $\forall x \in X$
- infimumul mult X dacă el este cea mai mare margine inferioară

$$a = \inf_A X \iff \begin{cases} a \le x, \forall x \in X \\ \text{dacă } a' \in A \text{ ai } a' \le x, \forall x \in \cancel{X} \text{ atunci } a' \le a \end{cases}$$

- supremumul mult. X dacă el este cea mai mică majorantă

$$a = \sup_A X \iff \begin{cases} x \le a, \forall x \in X \\ \text{dacă } a' \in A \text{ ai } x \le a', \forall x \in \cancel{X} \text{ atunci } a \le a' \end{cases}$$

A este latice dacă

$\forall x, y \in A, \exists \sup_A \{x, y\} = x \vee y$

$\inf_A \{x, y\} = x \wedge y$

A este latice completă dacă

$\forall X \subseteq A, \exists \sup_A X, \inf_A X$

$\boxed{1.4.50}$ Să se arate că orice lanț este o latice. Este orice lanț o latice completă?

Fie $(A, \leq)$ lanț, i.e. $\forall x, y \in A$, $x \leq y$ sau $y \leq x$

Verif $(A, \leq)$ latice $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in A$, $\exists \inf_A\{x,y\}$, $\sup_A\{x,y\}$

Fie $x, y \in A \xrightarrow{A \text{ lanț}} x \leq y$ sau $y \leq x$

Cazul I Dacă $x \leq y$

$\inf_A\{x,y\} = x \in A$

$\sup_A\{x,y\} = y \in A$

Cazul II Dacă $y \leq x$

$\inf_A\{x,y\} = y$

$\sup_A\{x,y\} = x$

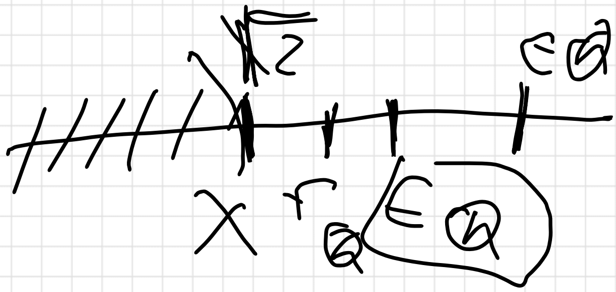
$\Longrightarrow$ A este latice

Ex Pentru $(\mathbb{Q}, \leq)$ lanț

$X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subseteq \mathbb{Q}$

$\sup_{\mathbb{R}} X = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\boxed{\sup_{\mathbb{Q}} X}$ nu $\exists$



Aşadar $(\mathbb{Q}, \leq)$ latice

NU este latice completă