Seminar 6 03.11.2021

Relații ordinare

Recap. Fie A, B mulțimi. O rel binară este o structură

$$r = (A, B, R), \quad R \subseteq A \times B$$

Dacă $A = B$, ($r = (A, A, R)$, $R \subseteq A \times A$) este o rel omogenă.

r este o rel de ordine pe A dc

rel de preordine

- r reflexivă: $\forall a \in A$ $a r a$
- r tranzitivă: $\forall a, b, c \in A$ dacă $a r b$, $b r c$ atunci $a r c$
- r antisimetrică: $\forall a, b \in A$ dacă $a r b$, $b r a$ atunci $a = b$

Spunem că (A, r) este o mult ordonată

- Dacă $(A, \leq)$ este o mulț. ordonată atunci spunem că A este un lanț dacă $\forall x, y \in A$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$
- Dacă $(A, \leq)$ este mulț ord. ș. $a \in A$ atunci spunem că a este
  - → elem. minimal dc:
    - $\forall x \in A$ cu $\boxed{x \leq a}$ atunci $x = a$
  - → elem maximal dc.
    - $\forall x \in A$ cu $a \leq x$ atunci $x = a$
  - → cel mai mic elem.
    - $\forall x \in A$: $a \leq x$
  - → cel mai mare elem
    - $\forall x \in A$: $x \leq a$

$\boxed{1.4.46}$ Să se det toate rel de ordine care se pot defini pe o mulț $A = \{a, b, c\}$ în fiecare caz să se precizeze elem.

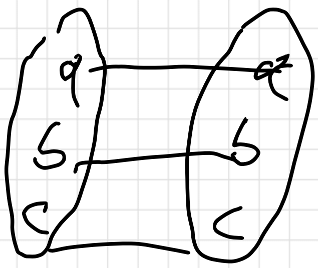
minimale, maximale și al mai mic/mare elem

$\leq$ rel ord $\Rightarrow$ $\leq$ R, T, AS

$$\boxed{a \leq a,\ b \leq b,\ c \leq c}$$

Obs (AS): $\forall x, y \in A$: dacă $x \leq y$ și $y \leq x$ atunci $x = y$

Prin urmare NU putem avea simultan și $a \leq b$ și $b \leq a$



$R_1 = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$

$R_2 = \{ \text{—//—}, (a,b)\}$

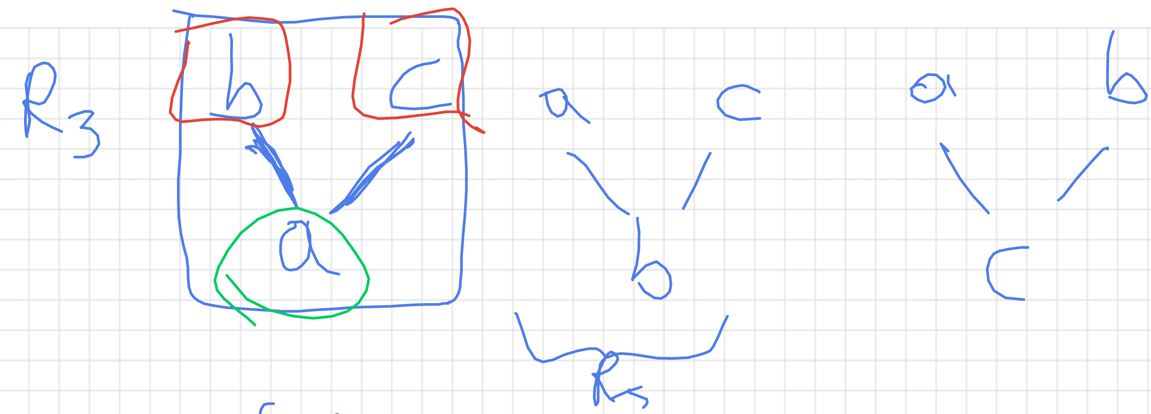
$a \leq a$ și $a \leq b \Rightarrow a \leq b$

$a \leq b$ și $b \leq b \Rightarrow a \leq b$

$R_3 = \{ \text{—//—}, (a,b), (a,c)\}$

$R_4 = \{ \text{—//—}, (a,b), (b,c), (a,c)\}$

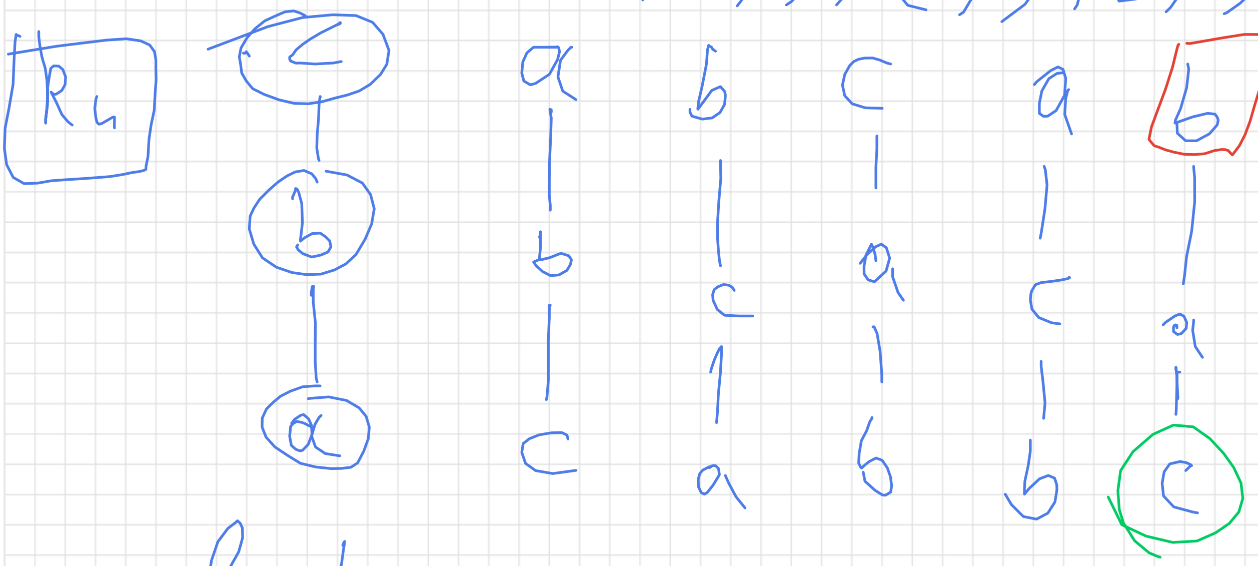
R_3



elem maxi
NU ∃ el maxi
maximal elem

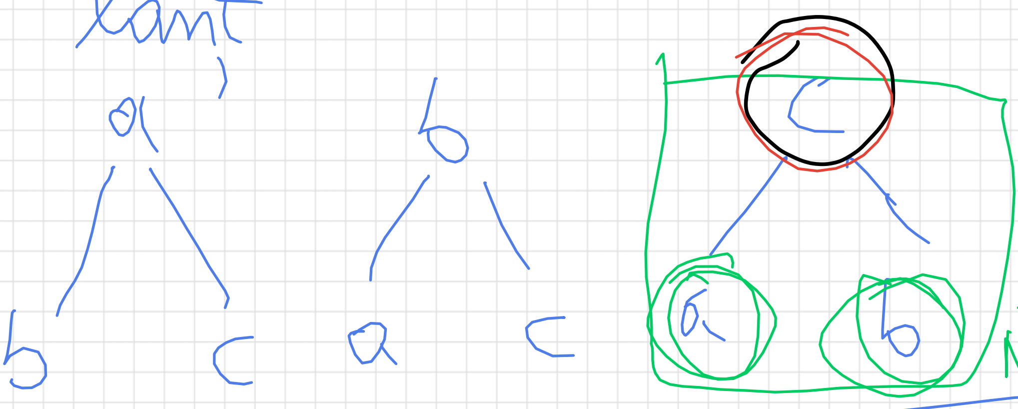
$R_5 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(b,a),(b,c)\}$

R_4

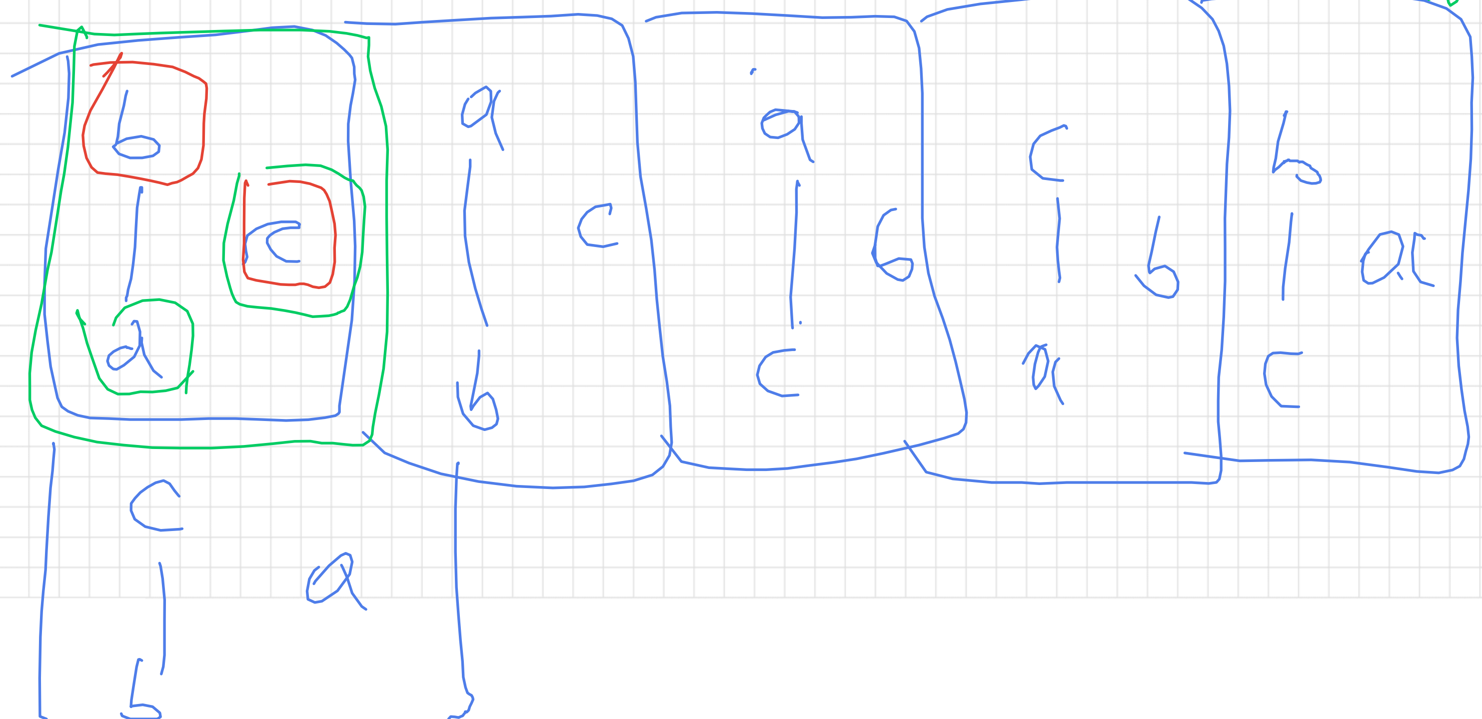


el max
max
elem maxim

lanț



elem minimal
NU ∃ el min



$\boxed{\boxed{\boxed{a}}}$ $\boxed{\boxed{\boxed{b}}}$ $\boxed{\boxed{\boxed{c}}}$

$\boxed{1.4.48}$ Dacă $(A, \leq)$ mulț ord atunci $(A, \geq)$ este tot mulț. ord unde $\geq \; = \; \leq^{-1}$

Vrem $(A, \geq)$ mult. ord $\Leftrightarrow$

„$\geq$" este $\underbrace{R, T}_{\text{preord}}$, AS

Reflexiv: $\forall a \in A$ avem $a \geq a$

Știm că $\leq$ este rel de ord

$\overset{R}{\Rightarrow} \forall a \in A, \; a \leq a$ $\qquad \geq \; = \; \leq^{-1}$

Tranzitiv: $\forall a, b, c \in A$

dacă $\boxed{a \geq b}$ și $\boxed{b \geq c}$ atunci $\boxed{a \geq c}$

$b \leq a \qquad c \leq b$

$c \leq b$ și $b \leq a \xRightarrow{\text{Tranz „}\leq\text{"}} c \leq a$

Antisim $\forall a, b \in A$

dacă $\boxed{a \geq b}$ și $\boxed{b \geq a}$ atunci $\boxed{a = b}$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$\underbrace{b \leq a \qquad a \leq b}$

$\Downarrow$ AS „$\leq$"

$b = a$

Aşadar $(A, \geq)$ este o mulț. ord □

Recap: Fie $(A, \leq)$ o mulț ord și $X \subseteq A$.

Atunci $a \in A$ se numește

- margine inferioară pt X de $\forall x \in X$ avem că $a \leq x$
- margine superioară pt X $\forall x \in X$ avem că $x \leq a$

• infimum pt X dc. a este cea mai mare margine inferioară.

$$a = \inf_A X \iff \begin{cases} \forall x \in X \quad a \le x \\ \text{dacă } a' \in A \text{ ai } \forall x \in X,\ a' \le x \text{ atunci } a' \le a \end{cases}$$

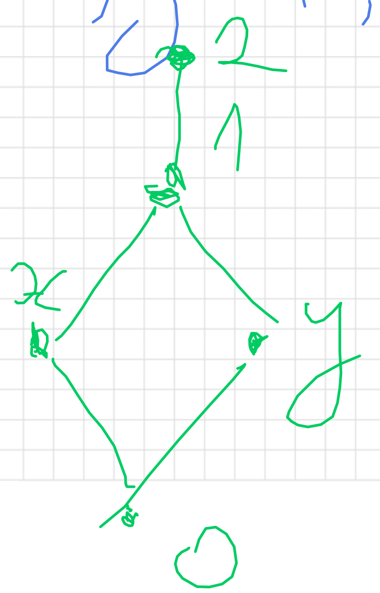
• supremum pt X dc a este cea mai mică margine superioară

$$a = \sup_A X \iff \begin{cases} \forall x \in X,\ x \le a \\ \text{dacă } a' \in A \text{ ai } \forall x \in X,\ x \le a' \text{ atunci } a \le a' \end{cases}$$

• Spunem că A este o <u>latice</u> dc

$\forall x, y \in A$, $\exists \inf_A \{x, y\} = x \wedge y$

$\exists \sup_A \{x, y\} = x \vee y$



$\inf_A \{x, y\} = 0$

$\sup_A \{x, y\} = 1$

A este o latice completă dc

$\forall S \subseteq A$, $\exists \inf_A S$
$\exists \sup_A S$

$\boxed{1.4.50}$ Să se arate că orice lanț este o latice. Este orice lanț o latice completă?

Fie $(A, \leq)$ lanț $\Rightarrow \forall x, y \in A$:
$x \leq y$ sau $y \leq x$.

Vrem A este latice $\Leftrightarrow$
$\forall x, y \in A$, $\exists \sup_A \{x, y\}$
$\inf_A \{x, y\}$

Fie $x, y \in A$ arbitrare $\xRightarrow{A \text{ lanț}}$
$\underline{x \leq y}$ sau $\underline{y \leq x}$

<u>Cazul I</u> Dacă $\underline{x \leq y}$

$\inf_A \{x, y\} = x \in A$
$\sup_A \{x, y\} = y \in A$

Cazul II Dacă $y \leq x$.

$\inf_A \{x, y\} = y$

$\sup_A \{x, y\} = x$

$\Longrightarrow (A, \leq)$ latice.

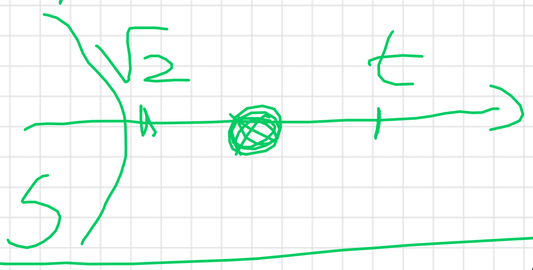
Obs. Nu orice lanț este o latice completă

Ex $(\mathbb{Q}, \leq)$ lanț

$S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subseteq \mathbb{Q}$.

$\sup_{\mathbb{R}} S = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$\sup_{\mathbb{Q}} S = t \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} < t$



$\boxed{1.4.52}$ Să se $(\mathbb{N}, |)$ este o latice.

Vrem $(\mathbb{N}, |)$ mulț. ord (R, T, AS).

Reflexivitate $\forall x \in \mathbb{N} \quad x \mid x$.

reflexiv pt căi $z = x \cdot 1$

Tranzitiv $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$ dacă

$\boxed{x \mid y}$ și $y \mid z$ atunci $x \mid z$

$\Downarrow$

$\exists p \in \mathbb{N}$ a.î. $y = p x$

$y \mid z \Rightarrow \exists q \in \mathbb{N}$ a.î. $z = q \cdot y \Rightarrow$

$z = \underbrace{(p \cdot q)}_{\in \mathbb{N}} \cdot x \Rightarrow x \mid z$

Antisimetric $\forall x, y \in \mathbb{N}$

Dacă $x \mid y$ și $y \mid x$ atunci $x = y$

$x \mid y \Rightarrow \exists p \in \mathbb{N}$ a.î. $\boxed{y = p x}$

$y \mid x \Rightarrow \exists q \in \mathbb{N}$ a.î. $x = q \cdot y \Rightarrow$

$x = p \cdot q \cdot x$

Cazul I $x \neq 0 \Rightarrow p \cdot q = 1 \xRightarrow{\mathbb{N}} p = q = 1$

$\Downarrow$

Cazul II $x = 0 \xRightarrow{y = p \cdot x} y = 0 \Longrightarrow x = y$

Anodar $(\mathbb{N}, |)$ este o mulțime ordonată

Vrem $(\mathbb{N}, |)$ latice $\Longleftrightarrow$

$\forall x, y \in \mathbb{N}$, $\exists \sup_{\mathbb{N}}\{x,y\}$

$\exists \inf_{\mathbb{N}}\{x,y\}$

$\underbrace{\inf_{\mathbb{N}}\{x,y\}}_{a \in \mathbb{N}} \overset{def}{=} \begin{cases} a \mid x \wedge a \mid y \\ \text{dacă } a' \in \mathbb{N} \text{ ai } a' \mid x \wedge a' \mid y \text{ atunci } a' \mid a \end{cases}$

$= \text{cmmdc}\{x,y\}$

$\sup_{\mathbb{N}}\{x,y\} = \text{cmmmc}(x;y)$

Temă 1.4.53 și 1.4.54!

---

cont.

$\boxed{P} = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ prim}\}$ $\sup_{\mathbb{N}} P = 0$

produsul nu plănd

$\notin \mathbb{N}$

$\sup_{\mathbb{N}}\{2,3\} = 6$

$\inf_{\mathbb{N}}\{2,3\} = 1$

Maj {2,3} = 0 (cea mai mică majorant

6 este majorant

$\boxed{0 \mid 6 \quad 8 \; \text{etc}}$