Seminar 5

27.10.2021

Relatii binare

Recap:

Def: Fie A și B mulțimi, $R \subseteq A \times B$

Structura dată de $r = (A, B, R)$ este o rel binară.

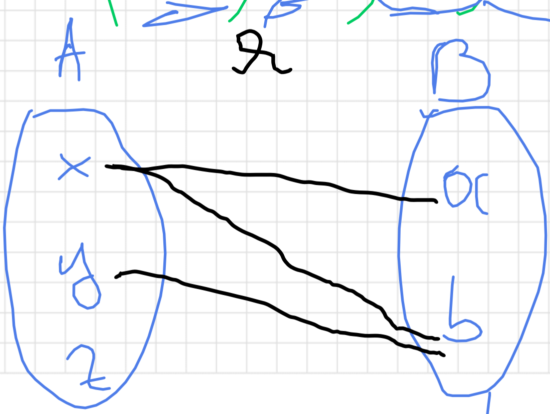
Ex: $A = \{x, y, z\}$ $B = \{a, b\}$.

$A \times B = \{(x,a), (x,b), (y,a), (y,b), (z,a), (z,b)\}$

$R = \{(x,a), (x,b), (y,b)\} \subseteq A \times B$

$r = (A, B, R)$ o relație

$R \rightarrow$ grafic



domeniu   codomeniu

Notație: $(u, v) \in R \iff u \, r \, v$

Ex: $x \, r \, a$, $x \, r \, b$, $y \, r \, b$

$f: A \to B$ funcție

$G_f = \{(\underbrace{x}_{\in A}, \underbrace{f(x)}_{\in B}) \mid x \in A\} \subseteq A \times B$

$f = (A, B, G_f)$ o relație

O rel de tipul $r = (A, A, R)$ este o rel omogenă ($R \subseteq A \times A$)

Def Spunem că rel omogenă $r = (A, A, R)$ este

- reflexivă dc. $\forall a \in A \quad a r a$
- tranzitivă dc. $\forall a, b, c \in A$ dacă $a r b$ și $b r c$ atunci $a r c$
- simetrică dc. $\forall a, b \in A$ dacă $a r b$ atunci $b r a$
- antisimetrică dc. $\forall a, b \in A$ dacă $a r b$ și $b r a$ atunci $a = b$

rel de preordine

- reflexivă
- tranzitivă

simetrică → rel de echivalență

antisim → rel de ordine

[1.4.36] Sa se arate că relația de divizibilitate pe $\mathbb{Z}$ este o preordine care nu este nici simetrică, nici antisimetrică.

$a \mid b \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists r \in \mathbb{Z}$ a.î. $b = a \cdot r$

$(0 = 0 \cdot 3 \Rightarrow 0 \mid 0)$

$\rho = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mid)$

Reflexivitate: Vrem $a \mid a$, $\forall a \in \mathbb{Z}$

$a = a \cdot 1$

?

Tranzitiv

Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Dacă $a|b$ și $b|c$ atunci $a|c$

$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z} \text{ ai } b = a \cdot x \\ b|c \Rightarrow \exists y \in \mathbb{Z} \text{ ai } c = b \cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = a \cdot \underbrace{(x \cdot y)}_{\in \mathbb{Z}} \Rightarrow a|c$$

Refl + Tranz $\Rightarrow$ „|" este o preordine

Simetric (dacă $a|b$ at $b|a$)

contraex: $3|6$, dar $6 \nmid 3$

$\Rightarrow$ NU avem simetric $\mathbb{Z}$

Antisim (dacă $a|b$ și $b|a$ atunci $a=b$)

contraex:

$3|-3$, dar $3 \neq -3$

$-3|3$ $\Rightarrow$ NU avem antisim

1.4.37] Să se det. toate rel de echiv care se pot defini pe $A = \{a, b, c\}$

$r = (A, A, R)$ rel de echiv $\Rightarrow$

- r reflexivă $\Rightarrow \forall x \in A$, $x r x \Rightarrow \begin{cases} a r a \\ b r b \\ c r c \end{cases}$

  $\Rightarrow (a,a), (b,b), (c,c) \in R$

- r tranzitivă $\Rightarrow \forall x, y, z \in A$

  dacă $x r y$ și $y r z$ atunci $x r z$

- r simetrică $\Rightarrow \forall x, y \in A$

  dacă $x r y$ atunci $y r x$

$R_1 = \{(a,a), (b,b), (c,c)\} \subseteq A \times A$

$R_2 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a)\}$

$R_3 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,c), (c,a)\}$

$R_4 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (b,c), (c,b)\}$

$R_5 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b)\} = \underbrace{A \times A}_{9 \text{ elem.}}$

$a r b \quad b r a \Rightarrow a r a$ ✓

$b r a \quad a r c \Rightarrow b r c$

1.438 Sunt urm. rel. sunt echiv. și să se calculeze mulțimile factor.

(1) $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, \equiv)$ $\quad x \equiv y \Leftrightarrow |x| = |y|$

Recap: $r = (A, A, R)$ rel. de echiv.

Fie $a \in A \Rightarrow \underbrace{[a]}_{\text{clasa lui } a} = \{y \in A \mid \underline{a r y}\}$

$R_3 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,c), (c,a)\}$

$[a] = \{a, c\} = [c]$

$[b] = \{b\}$

a și c sunt reprezentanți pt. aceeași clasă

$\left(\dot{\mathbb{Z}}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\} \qquad \hat{1} = \hat{5} = \hat{9} = \ldots = \{1, 5, 9, \ldots\} \right)$

Clasele date de o rel. de echiv. sunt disjuncte la o partiție a lui A

$$A/_{\pi} = \{ [x] \mid x \in A \}$$

mult. factor

Ex $A/_{R_3} = \{[a], [b]\}$

$= \{\{a, c\}, \{b\}\}$

Reflexivitate Vrem $x \equiv x$, $\forall x \in \mathbb{C}$.

$\Updownarrow$

$|x| = |x|$ adevăr.

Tranzitivitate Dacă $x, y, z \in \mathbb{C}$

dacă $x \equiv y$, și $y \equiv z$ Vrem $x \equiv z$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$|x| = |y|$ $|y| = |z|$

$\Downarrow$

$|x| = |z|$

?

Simetric $\forall x, z \in \mathbb{C}$ Dacă $x \equiv z$ atunci $z \equiv x$

$|x| = |y| \Rightarrow |z| = |x|$

$\Rightarrow$ "$\equiv$" este o rel. de echiv

Fie $x \in \mathbb{C}$

$[x] \overset{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{C} \mid x \equiv y\}$

$= \{y \in \mathbb{C} \mid |x| = |y|\}$

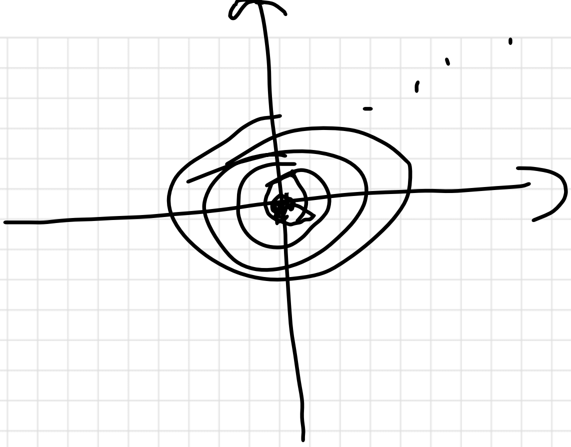
$= \{y \in \mathbb{C} \mid d(0,y) = \underbrace{d(0,x)}_{r}\}$

$= \mathcal{C}(0, |x|)$

$\mathbb{C}/_{\equiv} \overset{\text{def}}{=} \{[x] \mid x \in \mathbb{C}\}$

$= \{\mathcal{C}(0,|x|) \mid x \in \mathbb{C}\}$

$= \{\mathcal{C}(0,r) \mid r \geq 0\}.$



b) temă

1.4.39 | Să se arate că rel dată prin

$$(a,b)\sim(c,d) \Leftrightarrow a\cdot d = b\cdot c$$

este o echivalență pe $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$

și să se det mult factor $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/_{\sim}$

Reflexivă: Vrem $(a,b)\sim(a,b), \forall (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$

$\Leftrightarrow$ $a\cdot b = a\cdot b$ evident.

Tranzitivitate: $\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$

Dacă $(a,b)\sim(c,d)$ și $(c,d)\sim(e,f)$

Vrem $(a,b)\sim(e,f) \Leftrightarrow a\cdot f = b\cdot e$

$(a,b)\sim(c,d) \Rightarrow a\cdot d = bc \mid \cdot f \Rightarrow$

$(c,d) \sim (e,f) \Rightarrow e \cdot f = d \cdot e$

$\underline{a\,d\,f = b\,c\,f} \Rightarrow a\,d\,f = b\,d\,e \quad \Big| : d,\ d \neq 0$

$\Rightarrow af = be$

Simetrica (temă)

$[(a,b)] = \{(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (a,b) \sim (c,d)\}$

$[(1,2)] = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8), \ldots\} \overset{def}{=} \frac{1}{2}$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \sim \ \overset{def}{=} \mathbb{Q}$

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} =$

Temă $\boxed{1.4.33 \longrightarrow 1.4.45}$