Seminar 9 24.XI.2021

$\boxed{2.1.58}$ Să se găsească un ex de 2 subgrupuri ale unui grup a căror reuniune NU este subgrup.

$3\mathbb{Z} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} \leq (\mathbb{Z}, +)$

$4\mathbb{Z} = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\} \leq (\mathbb{Z}, +)$

$7 + 3$

$3 + 4 + 3$

$3 + 3 + 4$

$\underbrace{3\mathbb{Z} \cup 4\mathbb{Z}} \not\leq (\mathbb{Z}, +)$ pt. că

$$\underset{\in 3\mathbb{Z} \subseteq 3\mathbb{Z}\cup 4\mathbb{Z}}{3} + \underset{\in 4\mathbb{Z} \subseteq 3\mathbb{Z}\cup 4\mathbb{Z}}{4} = 7$$

, dar $7 \notin 3\mathbb{Z} \cup 4\mathbb{Z}$ pt. că $3 \nmid 7$, și $4 \nmid 7$.

$\boxed{2.1.59}$ Fie $(G, +)$ grup abelian și $H, K \leq G$. Să se arate că $\langle H \cup K \rangle = H + K$

unde $H + K = \{x + y \mid x \in H, y \in K\}$

$\langle H \cup K \rangle = H + K \iff \begin{cases} 1)\ H+K \le G \\ 2)\ H \cup K \subseteq H+K \\ 3)\ \text{dacă } L \le G \end{cases}$

subgrupul generat de $H \cup K$

= cel mai mic subgrup

care conține $H \cup K$ a.î. $H \cup K \subseteq L$ atunci $H+K \le L$.

1) Vrem $H+K \le G$.

I $\underset{\in H \le G}{0} + \underset{\in K \le G}{0} = 0 \in H+K$

II Fie $x, y \in H+K$. Vrem $x+y \in H+K$

$\Downarrow$

$\exists\, x_1 \in H,\ x_2 \in K$ a.î. $x = x_1 + x_2$

$\exists\, y_1 \in H,\ y_2 \in K$ a.î. $y = y_1 + y_2$

$x+y = (\underset{\in H}{x_1} + \underset{\in K}{x_2}) + (y_1 + y_2) \overset{+\ \text{comut, asoc}}{=}$

$= \underbrace{(\underset{\in H}{x_1} + \underset{\in H}{y_1})}_{\in H \le G} + \underbrace{(\underset{\in K}{x_2} + \underset{\in K}{y_2})}_{\in K \le G} \Rightarrow x+y \in H+K$

III Fie $x \in H+K$. Vrem $-x \in H+K$

$\Downarrow$

$\exists\, a \in H,\ b \in K$ ai $x = a + b \Rightarrow$

$-x = \overbrace{-a}^{\in H} + \overbrace{(-b)}^{\in K}$

$a \in H \xRightarrow{H \leq G} -a \in H$

$b \in K \xRightarrow{K \leq G} -b \in K$

$\Rightarrow -x \in H+K$.

II $H \cup K \subseteq H+K$

Fie $x \in H \cup K$. Vrem $x \in H+K$

$\Downarrow$

$x \in H$ sau $x \in K$

Cazul I Dacă $x \in H$

$x = \underset{\in H}{x} + \underset{\in K \leq G}{0} \Rightarrow x \in H+K$

Caz. II Dacă $x \in K$

$x = \underset{\in H \leq G}{0} + \underset{\in K}{x} \Rightarrow x \in H+K$

III Dacă $\boxed{L \leq G}$ a.î. $\boxed{H \cup K \subseteq L}$

atunci $H + K \leq L$

$\leq G \qquad \leq G$

Ajunge să dem că $H + K \subseteq L$

$A \subseteq B \overset{def}{\iff} \forall x \in A$ avem că $x \in B$

$\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 4, 3, 5\}$

Fie $x \in H + K$. Vrem. $x \in L$.

$\exists h \in H, k \in K$ a.î. $x = h + k$

$h \in H \subseteq H \cup K \subseteq L$

$k \in K \subseteq H \cup K \subseteq L$

$\left.\right| \underline{L \leq (G, +)} \implies h + k \in L \implies$

$\implies x \in L \implies H + K \subseteq L$

$\Downarrow$

$H + K \leq L$

$\boxed{2.1.61}$ Fie $n, m \in \mathbb{Z}$. Să se arate că:

(a) $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} \iff m \mid n$

(b) $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = k\mathbb{Z}$, unde $k = \text{lcm}(n, m)$

(c) $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$, unde $d = \gcd(n; m)$

(a) „$\Rightarrow$" Știm $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$. Vrem $m \mid n$

$n = n \cdot 1 \in n\mathbb{Z}$ $\Rightarrow n \in m\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ a.î. $n = m \cdot k \Rightarrow m \mid n$

„$\Leftarrow$" Știm $m \mid n$. Vrem $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$

$\exists k \in \mathbb{Z}$ a.î. $n = m \cdot k$

Fie $x \in n\mathbb{Z}$ Vrem $x \in m\mathbb{Z}$

$\exists y \in \mathbb{Z}$ a.î. $x = n \cdot y$

$$\Rightarrow x = m \cdot \underbrace{(\underset{\in\mathbb{Z}}{k} \cdot \underset{\in\mathbb{Z}}{y})}_{\in\mathbb{Z}} \in m\mathbb{Z}.$$

(b) $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = k\mathbb{Z}$, $k = \operatorname{lcm}(n; m)$

Dem. prin dublă incluziune.

„$n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} \subseteq k\mathbb{Z}$"

Fie $x \in n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$. Vrem $x \in k\mathbb{Z}$

$\Downarrow$ $\Uparrow$

$x \in n\mathbb{Z}$ și $x \in m\mathbb{Z}$ $\qquad k \mid x$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$\exists a \in \mathbb{Z}$ a.î. $x = n \cdot a$ $\qquad \exists b \in \mathbb{Z}$ a.î. $x = m \cdot b$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$n \mid x \qquad m \mid x$

x este multiplu comun pt n, m.

$k = \text{lcm}(n, m) \Rightarrow$ $\{ n \mid k$ și $m \mid k$ (multiplu comun)

(dacă $l \in \mathbb{Z}$ a.î. $n \mid l$ și $m \mid l$ atunci $k \mid l$

$\Rightarrow k \mid x$

1. „$k\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$"

Fie $x \in k\mathbb{Z}$. Vrem $x \in m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$\exists j \in \mathbb{Z}$ a.î. $x = k \cdot j \Rightarrow k \mid x$

$k = \operatorname{lcm}(m, n) \Rightarrow \underline{m \mid k \text{ și } n \mid k}$

$m \mid k$ și $k \mid x \Rightarrow m \mid x \Rightarrow x \in m\mathbb{Z}$

$n \mid k$ și $k \mid x \Rightarrow n \mid x \Rightarrow x \in n\mathbb{Z}$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$x \in m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$.

(c) $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$, unde $d = \gcd(m, n)$

Dem prin dublă incluziune

„$m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} \subseteq d\mathbb{Z}$"

Fie $x \in m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$. Vrem $x \in d\mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$\exists a \in m\mathbb{Z}, b \in n\mathbb{Z}$ a.î. $x = a + b$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\exists a' \in \mathbb{Z}$ a.î. $a = n \cdot a'$ $\quad \exists b' \in \mathbb{Z}$ a.î. $b = m \cdot b'$

$x = n a' + m \cdot b'$

$d = \gcd(n, m) \Rightarrow \begin{cases} d \mid n \wedge d \mid m \\ \exists d' \in \mathbb{Z} \text{ a.î.} \\ d' \mid n \wedge d' \mid m \Rightarrow d' \mid d \end{cases}$

$d \mid n \Rightarrow \exists t \in \mathbb{Z}$ a.î. $n = d \cdot t$

$d \mid m \Rightarrow \exists u \in \mathbb{Z}$ a.î. $m = d \cdot u$

$x = d t a' + d u b' = d(\underbrace{t a' + u b'}_{\in \mathbb{Z}}) \in d\mathbb{Z}$.

„ $d\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}$ ".

$\left.\begin{array}{l} n\mathbb{Z} \leq (\mathbb{Z}, +) \\ m\mathbb{Z} \leq (\mathbb{Z}, +) \end{array}\right| \Rightarrow n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} \leq (\mathbb{Z}, +)$

$\Downarrow$

$\exists x \in \mathbb{Z}$ a.î. $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = x\mathbb{Z}$.

Vrem $d\mathbb{Z} \subseteq x\mathbb{Z} \overset{d}{\Longleftrightarrow} \boxed{x \mid d}$?

$n\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z}=x\mathbb{Z} \overset{a)}{\Longrightarrow} x \mid n$

$m\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z}=x\mathbb{Z} \overset{a)}{\Longrightarrow} x \mid m$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ x este un divizor comun pt n, m

$d=$ cel mai mare div. comun pt n, m $\Rightarrow$

$x \mid d$

$\boxed{2.1.62}$ Saac pt $n, m \in \mathbb{N}$ cu

$d=\gcd(n,m) \Rightarrow \exists\, s, t \in \mathbb{Z}$

ai $d=n\cdot s+m\cdot t$

In particular $\gcd(n,m)=1 \Longleftrightarrow$

$\exists\, s, t \in \mathbb{Z}$ ai $1=n\cdot s+m t$

$n, m \in \mathbb{N}$ $d=\gcd(n,m)$

$\boxed{c)}$ $\Rightarrow$ $n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z}=d\mathbb{Z}$

$d \mid d$ $\Rightarrow$

$d \in n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z} \Rightarrow$

$\exists\, s,t \in \mathbb{Z}$ a.î. $d = n\cdot s + m\cdot t$

În particular dacă $d = 1 \Rightarrow$

$\exists\, s,t \in \mathbb{Z}$ a.î. $1 = n\cdot s + m\cdot t$

"$\Leftarrow$" P.p. că $\exists\, s,t \in \mathbb{Z}$ a.î. $\boxed{1 = n\cdot s + m\cdot t}$.

Vrem $(n,m) = 1$.

Fie $d = \gcd(n,m) \Rightarrow d \mid n$ și $d \mid m$

$$\frac{d \mid n\cdot s \qquad d \mid m\cdot t}{d \mid n\cdot s + m\cdot t} \Rightarrow d \mid 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{d = 1}$$