Seminar 5

27.10.2021

Relații binare

Recap:

Def: Fie A, B mulțimi, $R \subseteq A \times B$. Spunem că structura $\rho = (A, B, R)$ este o relație binară.

Ex: $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{x, y\}$

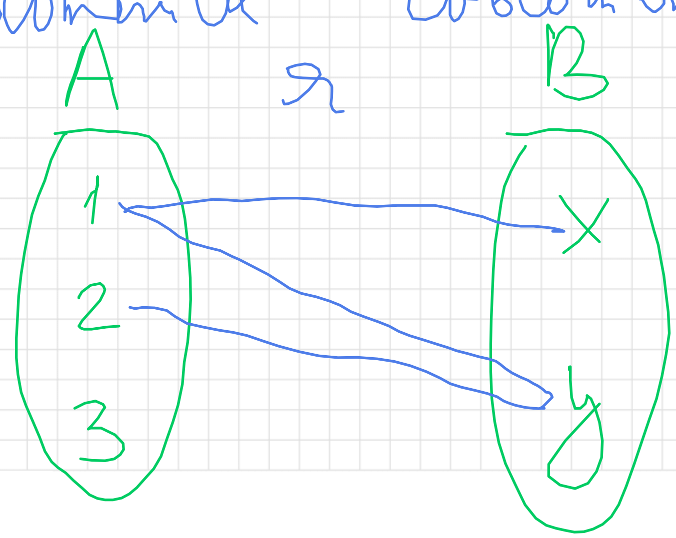
$A \times B = \{(1,x), (1,y), (2,x), (2,y), (3,x), (3,y)\}$

$R = \{(1,x), (1,y), (2,y)\} \subseteq A \times B$

grafic

$\rho = (A, B, R)$

domeniul codomeniu



Notație:

$(u, v) \in R \iff u \rho v$

Ex: $1 \rho x$, $1 \rho y$, $2 \rho y$

Dacă $f : A \to B$ funcție

$$G_f = \{(\underbrace{x}_{\in A}, \underbrace{f(x)}_{\in B}) \mid x \in A\} \subseteq A \times B$$

$f = (A, B, G_f)$ relație binară

O rel de tipul $r = (A, A, R)$ este o <u>rel omogenă</u> ($R \subseteq A \times A$)

<u>Def</u> Spunem că rel $r = (A, A, R)$ este

- reflexivă dc: $\forall a \in A$ $\quad ara$
- tranzitivitate dc: $\forall a, b, c \in A$

  arb și $brc \Rightarrow arc$
- simetrie dc: $\forall a, b \in A$

  dacă arb atunci bra
- antisimetrie dc: $\forall a, b \in A$

  dacă arb și bra atunci $a = b$

rel de preordine

- reflexivă
- tranzitivă

· simetrie — rel de echivalență

· antisimetrie — rel de ordine

1.4.36 | Spac rel de divizib pe $\mathbb{Z}$ este o preordine, care NU este nici simetrică, nici antisimetrică

$a \mid b \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists c \in \mathbb{Z}$ a.î. $b = a \cdot c$

$\mid = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mid)$

Reflexivitate — Vrem $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a \mid a$ (adev.)

pt că $a = 1 \cdot a \Rightarrow a \mid a$

Tranzitivitate — Dacă $a \mid b$, $b \mid c$.

Vrem $a \mid c$.

$a|b \Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{Z}$ a.î. $b = a \cdot x$
$b|c \Rightarrow \exists\, y \in \mathbb{Z}$ a.î. $c = y \cdot b$ $\Rightarrow$

$c = y \cdot a \cdot x \Rightarrow c = a \cdot \underbrace{(xy)}_{\in \mathbb{Z}} \Rightarrow a|c$

$\Longrightarrow$ „|" este o rel de preordine

<u>Simetrică</u> $(\forall a, b \in \mathbb{Z}$ dacă $a|b$ atunci $b|a)$

contraex:

$2|4$ dar $4 \nmid 2$

<u>Antisimetrie</u> $(\forall a, b \in \mathbb{Z}$, dc $a|b$, $b|a$ atunci $a = b)$

Contraex:

$4|-4$
$-4|4$ dar $4 \neq -4$

$\boxed{1.4.37}$ Să se det toate rel de echiv care se pot defini pe mult $A = \{a, b, c\}$

$r = (A, A, R)$ rel de echiv :)

r reflexivă $\Rightarrow \forall x \in A$ avem $x\,r\,x \Rightarrow (x,x) \in R$

$\{(a,a), (b,b), (c,c)\} \subseteq R$

r tranz $\Rightarrow \forall x, y, z \in A$ dacă $x\,r\,y$ și $y\,r\,z$ atunci $x\,r\,z$

r sim $\Rightarrow \forall x, y \in A$ dc $x\,r\,y$ at $y\,r\,x$

$R_1 = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$ ✓

$R_2 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,c), (c,a)\}$ ✓

$R_3 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a)\}$

$R_4 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (b,c), (c,b)\}$

$R_5 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,c), (c,a),$
$(a,b), (b,a), (c,b), (b,c)\} \subseteq A \times A$

Idem

(c,a) și (a,b)

$c\,r\,a$ și $a\,r\,b \overset{t}{\Rightarrow} c\,r\,b$

1.4.38 Scoateți urm. rel sunt echivalente și să se calculeze respectivele mult. factor.

x) $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, \equiv)$ $\underline{x \equiv y} \Longleftrightarrow \underline{|x| = |y|}$

Recap $\mathcal{R} = (A, A, R)$ rel de echivalenţă

Fie $a \in A$, $\underbrace{[a]}_{\text{clasa lui } a} = \{ y \mid y \mathcal{R} a \}$

$R_3 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a)\}$

$[a] = \underline{\{a, b\}} = [b]$

reprezentanţi pt. aceeaşi clasă

$[c] = \underline{\{c\}}$

Clasele distincte $\longrightarrow$ dau o partiţie a lui A

$A = \{a, b, c\} = [a] \cup [c]$

$\underbrace{A/_{\mathcal{R}}}_{\text{mult factor}} = \{ [x] \mid x \in A \}$

$\boxed{A/_{R_3} = \{[a], [c]\}}$

Refl Vrem $\forall x \in \mathbb{C},\ x \equiv x$.

$|x| = |x|$ adev

Tranz Vrem $\forall x, y, z \in \mathbb{C}$?

Dacă $x \equiv y$ și $y \equiv z \Longrightarrow x \equiv z$

$\boxed{|x| = |y|}$ și $\boxed{|y| = |z|} \Longrightarrow |x| = |z|$

Simetrie $\forall x, y \in \mathbb{C}$?

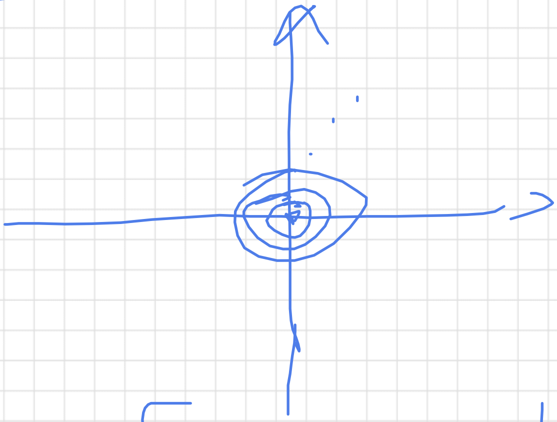
Dacă $x \equiv y$ atunci $y \equiv x$

$|x| = |y| \Longrightarrow |y| = |x|$

Așadar „$\equiv$" este o rel de echiv

$$\underline{[x]} \overset{def}{=} \{ y \in \mathbb{C} \mid x \equiv y \}$$
$$= \{ \underline{y \in \mathbb{C}} \mid \underline{|x|} = \underline{|y|} \}$$
$$= \mathcal{C}(0, |x|) = C_{|x|}$$

$\mathbb{C}/_{\equiv} \stackrel{def}{=} \{[x] \mid x \in \mathbb{C}\}$



$\bigcup_{x\in\mathbb{C}} [x] = \mathbb{C}$

$= \{ \mathcal{C}(0,r) \mid r \geq 0 \}$.

Tema 6)

1.4.39 | Să se arate că relația dată prin

$(a,b) \sim (c,d) \iff ad = bc$.

este o echivalență pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ și să se det. mult. factor $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* /_{\sim}$

Reflex: $\forall a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*$.

Vrem $(a,b) \sim (a,b) \iff$

$a b = a \cdot b$ adev.

Tranz $\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$

Dovē $(a,b)\sim(c,d)$ și $(c,d)\sim(e,f)$

Vrem $(a,b)\sim(e,f) \Leftrightarrow af = be$.

$(a,b)\sim(c,d) \Rightarrow a\cdot d = bc \mid \cdot f \Rightarrow$

$(c,d)\sim(e,f) \Rightarrow cf = de \mid \cdot b \Rightarrow$

$adf = bcf$

$adf = bde \Rightarrow d(af-be)=0$

$\overset{d\neq 0}{\Rightarrow} af - be = 0 \Rightarrow af = be$

Simetria $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$

Dovē $(a,b)\sim(c,d)$ Vrem $(c,d)\sim(a,b)$

$a\cdot d = bc \Rightarrow c\cdot b = a\cdot d$

$(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$

$[(a,b)] \overset{def}{=} \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \mid (a,b)\sim(x,y)$

ex $[(1,2)] = \{(1,2), (2,4), (3,6), \ldots\}$

$\underline{\text{not}}$ $\frac{1}{2}$

$\cancel{2 \times 2^{*} \, \textcircled{\sim}} = \cancel{\textcircled{\text{Q}}}$

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

$(1,2)$ & $(2,4)$ rep pt ~~ocean~~ cla

Ex 1.4.33 → 1.4.45