Seminar 4 20 oct. 2021

$\boxed{1.3.42}$ Să se găsească un ex de funcție $f : A \to B$ a.î. :

(1) f este injectivă dar NU are o inversă la ~~stânga~~ dreapta

Recap :

* $f : A \to B$. UASE

(1) f este injectivă

(2) f are o inversă la stânga

$\exists g : B \to A$ a.î. $g \circ f = 1_A$

Obs. 1) În general $f \circ g \neq 1_B$

2) g NU e neapărat unică

* $f : A \to B$. UASE

(1) f este surjectivă

(2) f are o inversă la dreapta

$\exists\, g: B \to A$ a.î. $f \circ g = 1_B$

$f: [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x+1$

Fie $x_1, x_2 \in [1,2]$ a.î. $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ inj

$\operatorname{Im} f = [2,3] \subsetneq \mathbb{R} \Rightarrow f$ NU e surj

$\Downarrow$

f NU admite inv. la dreapta

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$g(x) = x - 1$

$g \circ f = 1_{[1,2]}$

$g: \mathbb{R} \to [1,2]$

$g(x) = \begin{cases} x-1, & x \in [2,3] \\ 1, & \text{altfel} \end{cases}$

inv la st pt f.

Fie $x \in [1,2]$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(\underbrace{x+1}_{\in[2,3]}) = x$$

$f\circ g = ?$ $\qquad f\circ g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

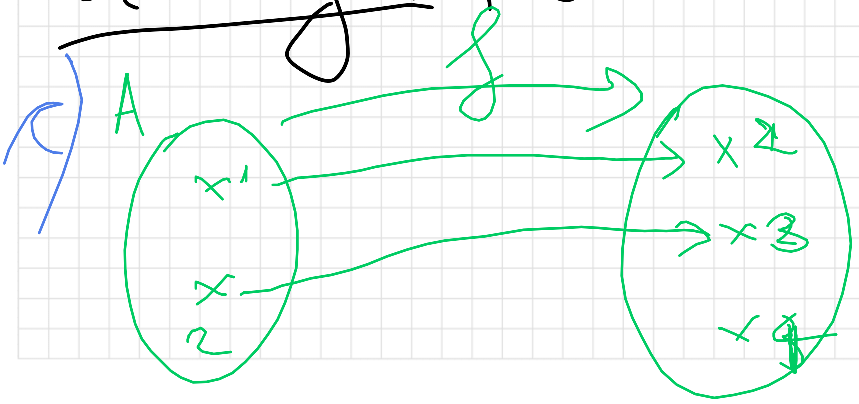
Fie $x\in\mathbb{R}$.

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} f(x-1), & \text{dc } x\in[2,3] \\ f(1), & \text{altfel}\end{cases}$$

$$= \begin{cases} x, & \text{dc } x\in[2,3] \\ 2, & \text{altfel}\end{cases} \neq 1_{\mathbb{R}}(x)$$

---

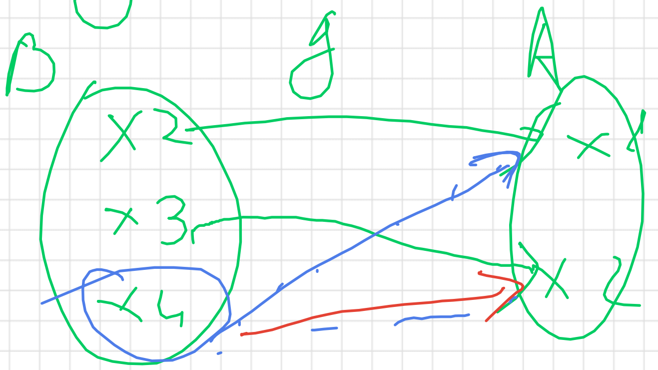
(2) f are exact o inversă la stânga, dar NU este bij.



$f(x) = x+1$

f inj., NU e surj.

$g : B \to A$ ai $g \circ f = 1_A$

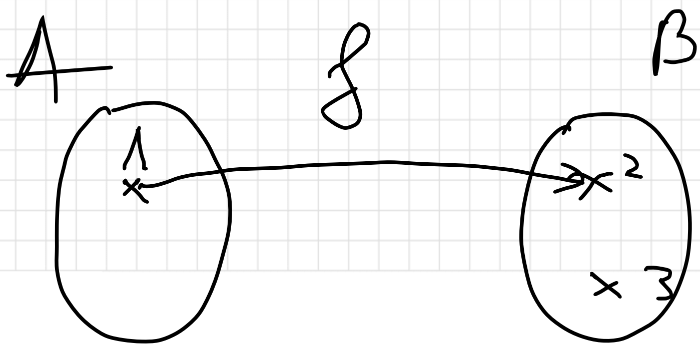


$$(g \circ f)(1) = 1_A(1)$$
$$\Downarrow$$
$$g(f(1)) = 1_A(1)$$
$$g(2) = 1$$

$$(g \circ f)(2) = 1_A(2) \Rightarrow$$
$$g(f(2)) = 1_A(2) \Rightarrow$$
$$g(3) = 2$$

Aici avem exact 2 inverse la st

x	2	3	4
$g_1(x)$	1	2	1
$g_2(x)$	1	2	2



$$f(1) = 2$$

$g : B \to A \qquad g(2) = 1 \Rightarrow g$ inv. la st

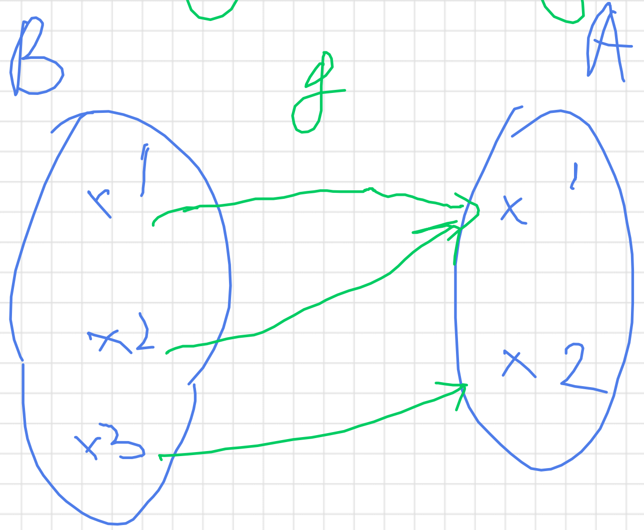
$g(3) = 1 \qquad \underline{g \circ f = 1_A}$

Aici avem exact o inv la stânga

$\boxed{1.3.43}$ Un exemplu de f și $g : B \to A$ a.î.?

(1) g are exact 2 inverse la dreapta.

Obs g este surj dar NU este inj



$g(1) = g(2)$

$\Rightarrow g$ NU este inj

$\operatorname{Im} g = A \Rightarrow g$ surj $\Leftrightarrow$

$\exists$ inv la dr

$f : A \to B$ a.î. $\boxed{g \circ f = 1_A}$

$A = \{1, 2\}$

$(g \circ f)(1) = 1_A(1) \Rightarrow$

$g(f(1)) = 1 \Rightarrow g(1) \in \{1, 2\}$

$(g \circ f)(2) = 1_A(2) \Rightarrow$

$g(f(2)) = 2 \Rightarrow f(2) = 3$

$f : A \to B$

x	1	2
$f_1(x)$	1	3
$f_2(x)$	2	3

(2) g are o ∞ de inv la dr.
(temă)

Snac. $g : B \to A$ are exact o inversă la dreapta $\Longleftrightarrow$ g bij.

„$\Rightarrow$" Pp. g are exact o inv la dr:

$f: A \to B$ $\boxed{g \circ f = 1_A}$

Vrem g bij

g are inv la dr $\Rightarrow$ g este surj.

Rămâne să dem că g este inj.

Obs g este inv la stânga pt f

$\Rightarrow f$ injectivă.

$x_1, x_2 \in B$ ai $g(x_1) = g(x_2)$

Pp R.A că g NU este inj $\Rightarrow$

$\exists x_1 \neq x_2 \in B$ ai $g(x_1) = g(x_2) = a \in A$

$g \circ f = 1_A$

$(g \circ f)(a) = 1_A(a) =$

$g(\boxed{f(a)}) = a$

Atunci avem cel puțin 2 inverse la dreapta pt g :

1. dacă $f(a) = x_1$
2. dacă $f(e) = x_2$

contr $\Rightarrow g$ inj $\xrightarrow{g \text{ surj}} g$ bij

„$\Leftarrow$" Pp g bij $\Rightarrow g$ inv $\Rightarrow \exists g^{-1} : B \to A$

Vrem să $\exists$ exact o inv la dr.

g^{-1} este inv. la dr pt $g \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ cel puțin o inv la dr

Rămâne să dem că aceasta este unică.

PpRA că $\exists f_1 \neq f_2 : A \to B$ inv la dr pt g

$g^{-1} \,|\, g \circ f_1 = g \circ f_2 = 1_A \Rightarrow$

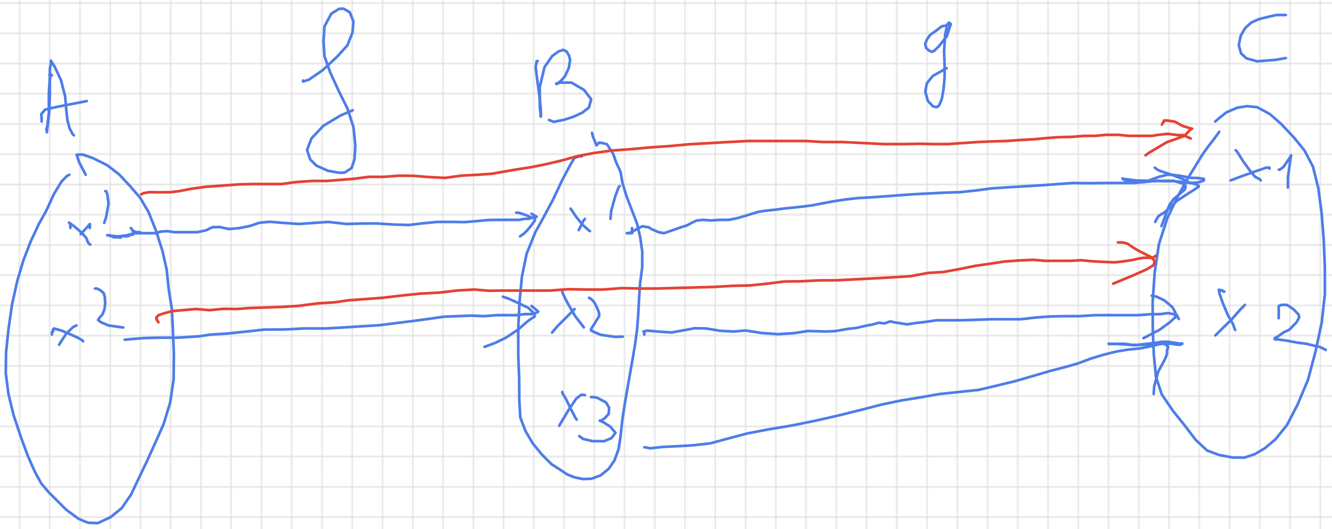
$f_1 = f_2 = g^{-1}$

contr $\Rightarrow$ UNICITATE.

$\boxed{1.3.44}$ Să se găsească exemple de f, g:

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ a.î.

(1) $g \circ f$ injectivă, dar g NU e inj.



$g \circ f = 1_A = 1_C$ inj (bij)

$g(2) = g(3) = 2 \Rightarrow g$ NU este inj.

(2) și (3) temă.

$\boxed{1.3.46}$ Funcția $f : A \to B$ UASE

(i) f este inj.

contraimaginea lui f

(ii) $X = f^{-1}(f(X))$, $\forall X \subseteq A$

(iii) $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$
$\forall X_1, X_2 \subseteq A$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) P.p. f injectivă

Vrem: $\forall X \subseteq A$, $X = f^{-1}(f(X))$

Am deja (sem. trecut) că $X \subseteq f^{-1}(f(X))$

Ajunge să dem. că $f^{-1}(f(X)) \subseteq X$

Fie $a \in f^{-1}(\underbrace{f(X)}_{M \subseteq B})$ Vrem $a \in X$

$\Downarrow$

$f(a) \in M$

$\exists\, b \in M$ a.î. $f(a) = b$.

$b \in M = f(X) \Rightarrow$

$\exists\, x \in X$ a.î. $f(x) = b$ $\Big\}$ f inj. $\Rightarrow$

$\Rightarrow a = x$ $\Big\} \Rightarrow a \in X$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Știm că

$\forall X \subseteq A,\ X = f^{-1}(f(X))$. $(*)$

Vrem f injectivă

Fie $x_1, x_2 \in A$ a.î. $f(x_1) = f(x_2)$ y

Vrem $x_1 = x_2$

În $(*)$ luăm $X = \{x_1, x_2\} \Rightarrow$

$\{x_1, x_2\} = f^{-1}(f(\{x_1, x_2\}))$ $\Rightarrow$

$\{x_1, x_2\} = f^{-1}(\{y\})$