## Seminar 1. Funcții injective, surjective, bijective

• Def. O funcție / aplicație este un triplet $(A, B, f)$ unde $A, B$ sunt mulțimi, iar $f$ este o lege de coresp. a.î. fiecărui elem din $A$ îi coresp un unic elem. din $B$.

Not. $f: A \to B$, $A \xrightarrow{f} B$, $A$ = domeniul de def.

$B$ = codomeniul

• Funcția $f: A \to B$ s.n. inj. dacă $\forall x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in A$ avem $f(x_1) \neq f(x_2)$

Obs. $f$ inj $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A$ dacă avem $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

• Funcția $f: A \to B$ s.n. surj. dacă $\forall y \in B \ \exists$ cel puțin un $x \in A$ a.î. $f(x) = y$

• Funcția $f: A \to B$ s.n. bij. $\Leftrightarrow$ $f$ este inj și $f$ este surj.

$\forall y \in B \ \exists! x \in A$ a.î. $f(x) = y$

$\Leftrightarrow \exists f^{-1}: B \to A$, $f^{-1}(y) = x$.

Probleme 1.3.35/11

Se consid. funct.: Inject, surj, bij, $f^{-1}$?

1. $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2$

2. $f_2: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $f_2(x) = x^2$

3. $f_3: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ $f_3(x) = x^2$

4. $f_4: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ $f_4(x) = x^2$

1. pt. $x_1 = 1, x_2 = -1$ $(x_1 \neq x_2)$ $f(x_1) = f(x_2) = 1$ ($f$ nu este inj)

$f(x) = y \Rightarrow x^2 = y$, $y \in [0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$ $\operatorname{Im} f_1 = [0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$

($f$ nu este surj)

2. $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow |x_1| = |x_2|$

$x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ $\Rightarrow x_1 = x_2$

($f_2$ este inj)

$f_2$ nu este surj. , $f_2$ nu e bij.

3. $f_3$ nu este inj.

$f(x) = y \Rightarrow x^2 = y \Rightarrow |x| = \sqrt{y}$

$\forall y \in [0, +\infty) \Rightarrow x = \pm\sqrt{y} \Rightarrow f_3$ surj.

4. $f_4$ este bij , $f_4^{-1}(y) = \sqrt{y}$ $f_4^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$

Ex 1.3.36/11.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 1 \\ x+2, & x > 1 \end{cases}$ (continuitatea în 1)

$f$ cont. pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dat. op. cu f. elem. (1)

Fie $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$

Pp $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ inj pe $(-\infty, 1]$

Fie $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$

Pp $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ inj. pe $(1, +\infty)$

Fie $x_1 \in (-\infty, 1]$, $x_2 \in (1, +\infty)$

Pp. că $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 + 1 = x_2 + 2 \Leftrightarrow 2x_1 = x_2 + 1$

$x_1 \in (-\infty, 1] \Rightarrow 2x_1 \in (-\infty, 2]$

$x_2 \in (1, +\infty) \Rightarrow x_2 \in (2, +\infty)$

$\forall x_1 \in (-\infty, 1], x_2 \in (1, +\infty)$ $f(x_1) \neq f(x_2)$

$\Rightarrow f$ inj.

$f(1-0) = 2 \cdot 1 + 1 = 3 = f(1)$

$f(1+0) = 1 + 2 = 3$

$\Rightarrow f$ cont în $x = 1$ (2)

Fie $f_1 : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ $f_1(x) = 2\cdot x + 1$, $f_1$ cont.

analog pt. $f_2 : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ $f_2(x) = 2 + x$, $f_2$ cont

Din (1) + (2) $\Rightarrow$ $f$ cont. pe $\mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Im} f_1 = (-\infty, 3] \\ \operatorname{Im} f_2 = (3, +\infty) \end{array}\right| \Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f_1 \cup \operatorname{Im} f_2 = \mathbb{R} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f \text{ surj.} \\ f \text{ inj.} \end{array}\right| \Rightarrow f \text{ bij}$

$f_1(x) = y \Leftrightarrow 2x_1 + 1 = y \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$ $\quad f_1^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$

$f_2(x) = y \Leftrightarrow x + 2 = y \Rightarrow x = y - 2$ $\quad f_2^{-1}(y) = y - 2$

$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y-1}{2}, & y \in (-\infty, 3] \\ y - 2, & y \in (3, +\infty) \end{cases}$

(Ex. 1.3.37) Compunerea funcțiilor

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

$g \circ f : A \to C$ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $\forall x \in A$

Ex. 1.3.37

2. $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ $f(x) = |x|$

$g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ $g(x) = 1/x$

3. $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ $f(x) = x^2 + 1$

$g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ $g(x) = \sqrt{x}$

2. $f \circ g : \mathbb{N}^* \to [0, +\infty)$ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x}$

$g \circ f$ nu este def.

3. $f \circ g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) =$

$= (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$

$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$

## Compunerea funcțiilor.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

$g \circ f : A \to C$, $(g\circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$.

Ex. 1.3.37/11. Să se precizeze dacă urm. comp.: $f\circ g$ și $g\circ f$ sunt def., și în caz afirm. det. compusa.

2.) $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$, $f(x) = |x|$

$g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

3.) $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$, $f(x) = x^2+1$.

$g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$.

---

2.) $f\circ g : \mathbb{N}^* \to [0,\infty)$, $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \left|\frac{1}{x}\right|$.

$g\circ f$ nu este definita.

3.) $f\circ g : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = x+1$.

$g\circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = \sqrt{x^2+1}$.

1.) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x \le -1 \\ x-1, & -1 < x. \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 3 \\ x-2, & 3 \le x. \end{cases}$

$f\circ g$, $g\circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} \cancel{g^2(x)-1, \quad g(x) \le -1} \\ \cancel{g(x)-1}, \quad g(x) > 1. \end{cases}$

$\cancel{g^2(x)-1 =}$

$= \begin{cases} f(-x+1), & x < 3 \\ f(x-2), & x \ge 3. \end{cases} = \Bigg\{$

I. Dacă $x<3 \Rightarrow -x>-3 \quad |+1$
$1-x>-2$

MEMO

i.) $1-x\in(-2,-1] \Rightarrow 1-x\le -1 \Rightarrow x\ge 2$
$f(1-x)=(1-x)^2-1 = \cancel{1}-2x+x^2-\cancel{1} = x^2-2x. \quad , x\in[2,3)$

ii.) $1-x\in(-1,3) \Rightarrow 1-x>-1 \Rightarrow x<2. \Rightarrow x\in(-\infty,2)$
$(f\circ g)(x)=g(x)-1=-x+\cancel{1}-\cancel{1}=-x \quad , x\in(-\infty,2)$

II. Dacă $3\le x$ i.) $x-2\le -1 \Rightarrow x\le 1 \Rightarrow$ cazul nu poate avea loc.

ii.) $x-2>-1 \Rightarrow x>1 \Rightarrow x\in[3,+\infty).$

$\Rightarrow (f\circ g)(x)=g(x)-1=x-2-1=x-3, \ x\in[3,\infty).$

$$\Rightarrow (f\circ g)(x)=\begin{cases} -x, & x\in(-\infty,2) \\ x^2-2x, & x\in[2,3) \\ x-3, & x\in[3,\infty). \end{cases}$$

---

$g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \ (g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases} g(x^2-1), & x\le -1 \\ g(x-1), & x>-1. \end{cases}$

I. $x\le -1 \quad \uparrow^2$
$x^2\ge 1 \,|-1 \Rightarrow x^2-1\ge 0$

$$g(x^2-1)=\begin{cases} -(x^2-1)+1, & x^2-1<3. \\ x^2-1-2, & x^2-1\ge 3. \end{cases}$$

i) $x^2-1<3$
$x^2<4 \Rightarrow x\in(-2,2)\cap(-\infty,-1] \Rightarrow x\in(-2,-1]$

ii) $x^2-1\ge 3$
$x^2\ge 4 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty) \\ x\le -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x\in(-\infty,-2]$

II. $x > -1 \mid -1 \Rightarrow x-1 > -2.$

$$g(x-1) = \begin{cases} -(x-1)+1, & x-1 < 3. \\ x-1-2, & x-1 \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} 2-x, & x < 4 \\ x-3, & x \geq 4 \end{cases} \cap (-1, \infty) \begin{matrix} \xrightarrow{x\in} (-1,4) \\ \to x \in [4, \infty) \end{matrix}$$

$$g(f(x)) = \begin{cases} x^2-3, & x \in (-\infty, -2) \\ 2-x^2, & x \in (-2, -1] \\ 2-x, & x \in (-1, 4) \\ x-3, & x \in [4, \infty). \end{cases}$$

Ex. 1.3.36 $|_{11} \rightarrow 2), 3)$