13 oct 2021

Seminar 3

1.3.45 Fie $f : A \to B$ funcție, $X_1, X_2 \subseteq A$, $Y_1, Y_2 \subseteq B$

(2) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$

"$\subseteq$" Dem că $f(X_1 \cup X_2) \subseteq f(X_1) \cup f(X_2)$

Fie $b \in f(X_1 \cup X_2)$.

Vrem $b \in f(X_1) \cup f(X_2)$

$b \in f(X_1 \cup X_2) \Rightarrow \exists\, a \in X_1 \cup X_2$ a.î. $f(a) = b$

$a \in X_1 \cup X_2 \Rightarrow a \in X_1$ sau $a \in X_2$

Cazul I Dc $a \in X_1 \Rightarrow f(a) \in f(X_1)$
$\Rightarrow f(a) \in f(X_1) \cup f(X_2) \Rightarrow$
$b \in f(X_1) \cup f(X_2)$

Cazul II Dc $a \in X_2 \Rightarrow f(a) \in f(X_2)$

$\Rightarrow f(a) \in f(X_1) \cup f(X_2) \Rightarrow$

$b \in f(X_1) \cup f(X_2)$

"$\supseteq$" Vrem $f(X_1) \cup f(X_2) \subseteq f(X_1 \cup X_2)$

Fie $b \in f(X_1) \cup f(X_2)$ Vrem $b \in f(X_1 \cup X_2)$

$\Downarrow$

$b \in f(X_1)$ sau $b \in f(X_2)$

Dc $b \in f(X_1) \Rightarrow \exists\, c \in X_1$ a.î. $f(c) = b$

Dc $b \in f(X_2) \Rightarrow \exists\, d \in X_2$ a.î. $f(d) = b$

$\Rightarrow \exists\, z \in X_1 \cup X_2$ a.î. $f(z) = b$

$\Rightarrow b \in f(X_1 \cup X_2)$

(6) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(X_1) \cap f^{-1}(X_2)$

"$\subseteq$" Fie $a \in f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$

Vrem $a \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$

$a \in f^{-1}(\underbrace{Y_1 \cap Y_2}) \Rightarrow \exists\, b \in Y_1 \cap Y_2$

a.î. $f(a) = b$

$\left(f^{-1}(M) = \{a \in A \mid \exists\, b \in M \text{ a.î. } f(a) = b\}\right)$

$b \in Y_1 \cap Y_2 \Rightarrow b \in Y_1$ și $b \in Y_2$

Vrem $a \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \Leftrightarrow$

$a \in f^{-1}(Y_1)$ și $a \in f^{-1}(Y_2)$

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ și $x \in B$

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ sau $x \in B$

$(\exists\, t \in Y_1$ a.î. $f(a) = t)$ și

$(\exists\, u \in Y_2$ a.î. $f(a) = u)$

Din $f(a) = b$ și $b \in Y_1 \Rightarrow a \in f^{-1}(Y_1)$

Din $f(a) = b$ și $b \in Y_2 \Rightarrow a \in f^{-1}(Y_2)$

$\boxed{a \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)}$

" $\supseteq$ " Vrem $f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$

Fie $a \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$

Vrem $a \in f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$

$a \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \Rightarrow$

$\underline{a \in f^{-1}(Y_1)}$ și $\underline{a \in f^{-1}(Y_2)}$

$a \in f^{-1}(Y_1) \Rightarrow \underline{\exists\, b \in Y_1 \text{ a.î. } f(a) = b}$

$a \in f^{-1}(Y_2) \Rightarrow \underline{\exists\, c \in Y_2 \text{ a.î. } f(a) = c}$

$\Rightarrow \underline{f(a)} = \underbrace{b}_{\in Y_1} = \underbrace{c}_{\in Y_2} \Rightarrow f(a) \in Y_1 \cap Y_2$

$\Rightarrow a \in f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$ $\square$

$B^n = \overbrace{B \times B \times \dots \times B}^{n \text{ ori}}$ $n \in \mathbb{N}$

1.3.48 Fie A și B mulț. finite cu $|A| = n$ și $|B| = m$. Să se obț. $|B^{A}|$.

($B^A = \{ f \mid f : A \to B$ funcții$\}$)

Hint: $|B^A| = m^n$.

Var I $|A| = n$ $|B| = m$

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$

$f(a_1) \in \{b_1, \dots, b_m\}$ ⟶ m pos

$f(a_2) \in \{b_1, \dots, b_m\}$ ⟶ m pos

$\vdots$

$f(a_n) \in \{b_1, \dots, b_m\}$ ⟶ m pos

Reg. prod.

$\underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{n \text{ ori}} = m^n$ pos.

Var II Dem prin inducție după n:

$P(n)$: Dacă $|A| = n$, atunci $|B^A| = m^n$.

$P(1)$: $|A| = 1 \Rightarrow A = \{a_1\}$

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$

$\left.\begin{array}{l} f_i : A \to B \\ f(a_1) = b_i \end{array}\right\}$ m funcții

$|B^A| = m = m^1$ ✓

Pp că $P(n)$ este adev.

Dem $P(n+1)$ adev.:

$A' = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$

$B = \{b_1, \dots, b_m\}$ $\quad |B^{A'}| = m^{n+1}$

$f : A' \to B$

$f|_A : A \to B \rightsquigarrow m^n$ pos.

$f(a_{n+1}) \in \{b_1, \dots, b_m\} \rightsquigarrow m$ pos.

$\Rightarrow$ Total : $m \cdot m^n = m^{n+1}$ functii

1.3.49 Fie A și B mult finite cu $|A|=n$
$|B|=m$. Să se obt nr-ul funcțiilor
injective $f : A \to B$.

(H $|m-1$. R. $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$)

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$
$B = \{b_1, \dots, b_m\}$

$f(a_1) \in B \longrightarrow m$ pos.
$f(a_2) \in B \setminus \{f(a_1)\} \longrightarrow m-1$ pos.
$f(a_3) \in B \setminus \{f(a_1), f(a_2)\} \longrightarrow m-2$ pos
...
$f(a_n) \in B \setminus \{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_{n-1})\}$
$\longrightarrow m-n+1$ pos.

Obs. Dacă $n > m \Rightarrow$ avem 0 funcții injective: $A \to B$

Dacă $n \leq m$.

R: $m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) =$

$$= \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)\cdot(m-n)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(m-n)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} =$$

$$= \frac{m!}{(m-n)!}$$

$\boxed{1.3.50}$ Fie A mulț. finită cu $|A| = n$. Să se det. nr-ul tuturor f-ct bij. $f: A \to A$ (nr-ul tuturor permutărilor lui A)

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$

$f: A \to A$ inj.

$f(a_1) \in \{a_1, \ldots, a_n\}$ ⟶ n pos.

$$\frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

$f(a_2) \in \{a_1, \dots, a_n\} \setminus \{f(a_1)\} \rightsquigarrow n-1$ pos.

$\vdots$

$f(a_n) \in \{a_1, \dots, a_n\} \setminus \{f(a_1), \dots, f(a_{n-1})\}$

$\rightsquigarrow 1$ pos.

f inj $\xrightarrow{\text{Reg prod}} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$ pos.

$f : A \to A$

---

f inj $\Rightarrow f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)$ distincte 2 câte 2

$\Rightarrow \{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\} = \operatorname{Im} f$

$\left.\begin{array}{l} |\operatorname{Im} f| = n \\ \operatorname{Im} f \subseteq A \\ |A| = n \end{array}\right| \Rightarrow \operatorname{Im} f = A \Rightarrow$

f surj $\Rightarrow f$ bij

R. $n!$

Obs Dacă $f : A \to B$ este inj (sau surj) și $|A| = |B| < +\infty \Rightarrow f$ bij.

1.3.51 Fie B o mulț. finită cu $|B| = m$. Să se det nr-ul tuturor submulț lui B cu n elemente.

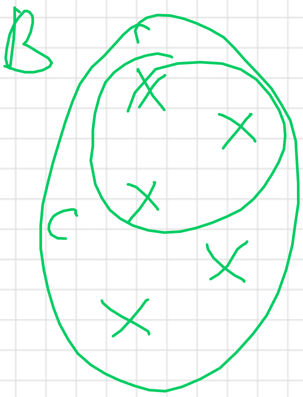
Hint $\binom{m}{n} = C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$

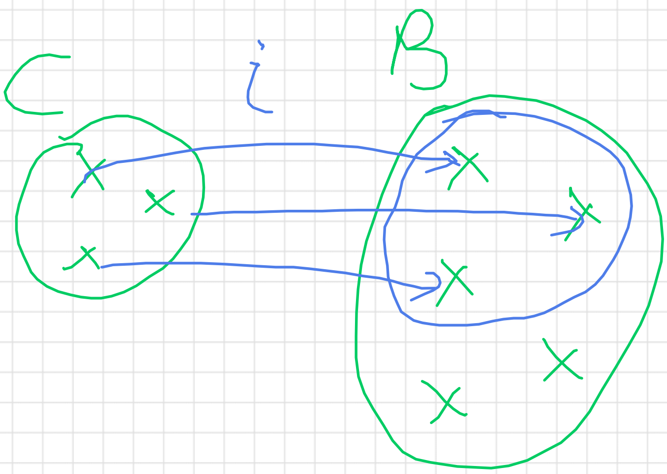
$C \subseteq B$ a.î. $|C| = n$.

$\Updownarrow$

$i : C \to B$ ← funcția de incluziune

$i(x) = x$





Obs i este inj.

Nr-ul funcțiilor injective (mulț. Ard) este $\frac{m!}{(m-n)!}$

Nr. al submulț. $\frac{n!}{a!(n-a)!}$

$\boxed{13.52}$ $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$

$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$

$\boxed{V1}$ Inducție după n. temă

$C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + \dots + C_{n+1}^{n+1} = 2^{n+1}$

$1 = C_0^0$

$1 = C_1^0 \quad 1 = C_1^1$

$C_2^1 = C_1^0 + C_1^1$

$1 = C_2^0 \quad 2 = C_2^1 \quad 1 = C_2^2$

$C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$

1 3 3 1

1 4 6 4 1

(temă)

$\boxed{V2}$ Submulț.