alegem $p=2>1$,

$\Rightarrow I(\alpha)$ conv.

Seminar 10 (Sem 8 ex)

Cont ext. ant.

e) $\Gamma(n+1)=n!,\ \forall n\in\mathbb{N}$

temă

(5) Expr. cu aj. fct. $\Gamma$ val. urm.:

a) $\int_0^\infty e^{-x^2}dx \underset{x^2=t,\ x=\sqrt{t}}{=} \int_0^\infty e^{-t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt =$

$dx=\frac{1}{2\sqrt{t}}dt$

$x=0,\ t=0$

$x\to\infty,\ t\to\infty$

$=\frac{1}{2}\cdot\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=2\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \underset{x=\sqrt{2t}}{\overset{\Gamma}{=}}$

① Fie
...

c) $\int_0^1 (\ln x)^{\frac{1}{3}}\, dx$

$\ln x = t \Rightarrow x = e^t,\ dx = e^t dt \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} t^{\frac{1}{3}} \cdot e^{t} dt =$

$x \searrow 0 \Rightarrow t \to -\infty$

$x = 1 \Rightarrow t = 0$

$$\underset{t=-u}{=} \int_{\infty}^{0} (-u)^{\frac{1}{3}} \cdot e^{-u} (-du) = \int_0^{\infty} u^{\frac{1}{3}} \cdot e^{-u} du =$$

$$= -\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

Sem 3. ex

(1) Fie $x = (1, 0, -1)$, $y = (3, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Calc $x+y$, $x \cdot y$, $\|x\|$, $\|-2y\|$ și $\|x-y\|$, $\|\ \|$ norma

$x+y = (1+3, 0-1, -1+1) = (4, -1, 0)$

$x \cdot y = 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = 2$

$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\|-2y\| = |-2| \cdot \|y\| = 2 \cdot \sqrt{y \cdot y} = 2\sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2} = 2\sqrt{9+1+1} =$
$= 2\sqrt{11}$

$\|x-y\| = \sqrt{(1-3)^2 + (0+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{9} = 3$

(2) Fie $x, y \in \mathbb{R}^m$ și not. $a = x \cdot y$, $b = \|x\|$, $c = \|y\|$. Expr. urm. mărimi în fct. de $a, b, c$:

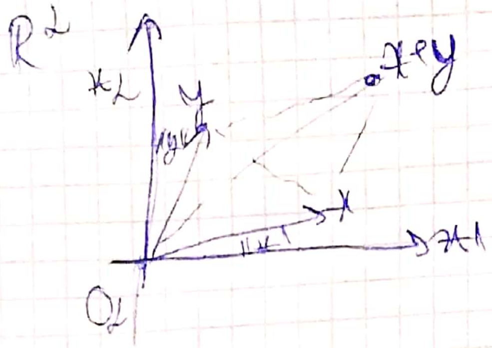
a) $(x+y) \cdot y = x \cdot y + y \cdot y = a + c^2$

b) $x \cdot (2x - y) = 2x^2 - xy = 2b^2 - a$

c) $\|x-y\| = \sqrt{(x-y)(x-y)} = \sqrt{x \cdot x - y \cdot x + y y - x \cdot y} = \sqrt{\|x\|^2 - 2xy + \|y\|^2} = \sqrt{b^2 - 2a + c^2}$

(3) Fie $x, y \in \mathbb{R}^m$. Dem. identitatea paralelogramului.

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$



$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=(x+y)(x+y)+(x-y)(x-y)=x\cdot x+x\cdot y+y\cdot x+y\cdot y+x\cdot x-x\cdot y-y\cdot x+y\cdot y=2x\cdot x+2y\cdot y=2(x\cdot x+y\cdot y)$

$=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$

① Def int A, fr A precum și dacă A este mulț. deschisă

Fie $x\in\mathbb{R}^n$, și $r>0$, $B(x,r)\rightarrow$ bila desch. $=\{y\in\mathbb{R}^n / \|y-x\|<r\}$

int $A=\{x\in\mathbb{R}^n / \exists r>0$, a.î. $B(x,r)\subseteq A\}$

fr $A=\{x\in\mathbb{R}^n / \forall r>0$ $B(x,r)\cap A=\emptyset$ și $B(x,r)\cap(\mathbb{R}^n\setminus A)\neq$

A desch. $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall x\in A$: $\underbrace{\exists r>0 \text{ a.î. } B(x,r)\subseteq A}_{x\in \text{int}A}$

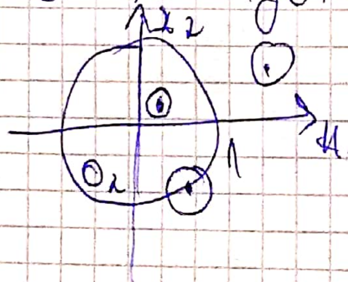
A închisă $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\mathbb{R}^n\setminus A$ deschisă

$\begin{cases} A \text{ deschisă} \Leftrightarrow A\cap \text{fr}A=\emptyset \\ A \text{ închisă} \Leftrightarrow \text{fr}A\subseteq A \end{cases}$

Dacă doar o parte din fr A ⊆ A ⇒ A nu e nici deschisă, nici închisă

a) $=B(O_2,1)\subseteq\mathbb{R}^2$

$B(O_2,1)=\{y\in\mathbb{R}^2 / \|y-O_2\|<1\}=\{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 / (y_1)^2+(y_2)^2<1\}$



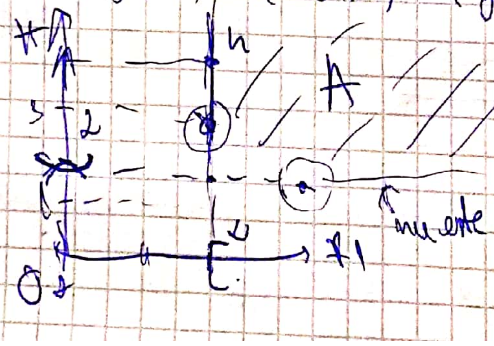
int $A=A$

fr $A=\{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 / (y_1)^2+(y_2)^2=1\}$

A deschisă

b) $A=(2;+\infty)\times(2,+\infty)\subseteq\mathbb{R}^2$

~~$A[2;+\infty)\times(2;+\infty)=\{y\in\mathbb{R}^2/$~~



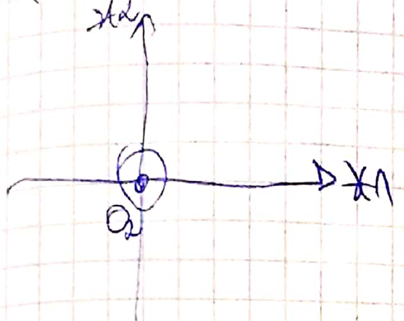
int $A=(2;+\infty)\times(2;+\infty)$

fr $A=([2;+\infty)\times\{2\}$

$\cup\{2\}\times[2;+\infty))$

fr $A\not\subseteq A$ ⇒ A nu este nici

c) $A = \mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}$




$\text{int } A = \emptyset$

$\text{fr } A = A$

$A$ închisă ($\text{fr } A \subseteq A$)

d) temă ; $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$

(5) $\forall A \subseteq \mathbb{R}^m$ mulț. nevidă, au loc af.:

a) $\text{int } A \subseteq A$

fie $x \in \text{int } A \Rightarrow \exists r > 0$ a.î. $B(x, r) \subseteq A$, $x \in B(x, r)$ $\Rightarrow$

$0 = \|x - x\| < r$

$\Rightarrow x \in A$

b) $\text{int } A \cap \text{fr } A = \emptyset$

Pres. prin abs. că $\exists\, x \in \text{int } A \cap \text{fr } A \Rightarrow$

- $x \in \text{int } A \Rightarrow \exists\, r_0 > 0$ a.î. $B(x, r_0) \subseteq A \Rightarrow B(x, r_0) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) = \emptyset$
- $x \in \text{fr } A \Rightarrow \forall r > 0 : B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ și $B(x, r) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \emptyset$

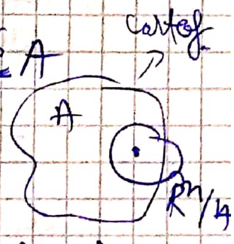
$\Rightarrow$ contradicție $\Rightarrow \text{int } A \cap \text{fr } A = \emptyset$

c) $A \subseteq \text{int } A \cup \text{fr } A$ (cu egalitate dacă $A$ este închisă)

fie $x \in A$

Putem pres. că $x \notin \text{int } A \Rightarrow \forall r > 0 : B(x, y) \not\subseteq A$

$\Rightarrow \forall r > 0 : B(x, r) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \emptyset$




$x \in \text{fr } A \Leftrightarrow \forall r > 0 : B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ și $B(x, r) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \emptyset$

$x \in B(x, r)$ | $\Rightarrow x \in B(x, r) \cap A \neq \emptyset$

$x \in A$

$\Rightarrow x \in \text{fr } A \quad \Rightarrow A \subseteq \text{int } A \cup \text{fr } A$

Dacă $A$ închisă, avem $\text{int } A \subseteq A$, $\text{fr } A \subseteq A \Rightarrow \boxed{A = \text{int } A \cup \text{fr } A}$

d) temă: $\text{int } A \cup \text{fr } A \cup \text{int}(\mathbb{R}^m \setminus A) = \mathbb{R}^m$