



*Elaborato finale per il conseguimento
della Laurea Triennale in Ingegneria Meccanica*

Breve introduzione alla Magnetofluidodinamica:
impianto teorico e fenomenologia

Candidato: Andrea Patrizi
Matricola: 1742937

Relatore: Paolo Gualtieri
SSD: ING-IND/06

Abstract

Lo scopo di questo elaborato é fornire una panoramica del campo della fisica noto come Magnetofluidodinamica, non di rado indicata con MHD (Magnetohydrodynamics), esaminandone gli aspetti ritenuti piú significativi e peculiari. In primis, saranno brevemente esposti e descritti i diversi campi della fisica che confluiscono in essa e ne rappresentano le colonne portanti; si ripercorrono quindi, brevemente, i modelli propri di Fluidodinamica, Termodinamica e, soprattutto, Elettromagnetismo. Partendo da tali premesse, si entrerà nel merito della MHD, riportandone e descrivendone l'impianto teorico.

Si riporterá inizialmente il sistema generale magnetofluidodinamico, ottenuto per mera sintesi degli impianti teorici provenienti da Fluidodinamica, Termodinamica ed Elettromagnetismo. A seguito di ciò si discuteranno le semplificazioni e le supposizioni che portano al sistema MHD semplificato, sul quale verrá costruita tutta la trattazione successiva. In un primo momento si porrá l'accento sulla cinematica magnetofluidodinamica e le sue principali caratteristiche, per poi passare alla dinamica ed ai piú rappresentativi fenomeni MHD; quest'ultima parte costituisce la sezione terminale dell'elaborato.

Si precisa che per le grandezze fisiche verranno utilizzate le unitá del S.I., anche se non di rado nell'ambito della MHD vengono utilizzate le unitá gaussiane.

Contenuti

| | |
|---|-----------|
| 1 Magnetofluidodinamica | 5 |
| 1.1 Introduzione | 5 |
| 1.2 Cenni storici | 5 |
| 1.3 Sunto dei modelli fisici coinvolti | 6 |
| 1.3.1 Fluidodinamica | 6 |
| 1.3.2 Termodinamica | 11 |
| 1.3.3 Elettromagnetismo | 15 |
| 1.4 Il sistema MHD | 21 |
| 1.4.1 La forma generale | 21 |
| 1.5 Il sistema semplificato MHD | 22 |
| 1.5.1 Le equazioni dell'Elettrodinamica classica | 22 |
| 1.5.2 Forma ridotta equazione di Navier-Stokes ed equazione di Beltrami | 24 |
| 1.5.3 Termodinamica | 24 |
| 1.5.4 L'equazione dell'induzione | 24 |
| 1.6 Gruppi adimensionali | 25 |
| 1.7 Gli sforzi di Maxwell | 26 |
| 1.8 Cinematica magnetofluidodinamica: avvezione e diffusione del campo d'induzione magnetico | 29 |
| 1.8.1 Diffusione | 29 |
| 1.8.2 Avvezione nei conduttori ideali | 30 |
| 1.8.3 Convezione | 32 |
| 1.9 Dinamica a basso numero di Reynolds magnetico | 36 |
| 1.9.1 Approssimazioni a basso Re | 36 |
| 1.9.2 Soppressione del moto | 37 |
| 1.9.3 Eccitazione del moto | 40 |
| 1.9.4 Lo strato di Hartmann | 42 |
| 1.10 Dinamica a medio ed alto numero di Reynolds magnetico | 45 |
| 1.10.1 Onde di Alfvén | 46 |
| 1.10.2 Onde magnetostrofiche | 48 |
| 2 Conclusioni e ringraziamenti | 50 |

Liste delle immagini

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Interpretazioni dell'azione della forza di Lorentz sulle linee di campo magnetiche. | 27 |
| 1.2 | Passaggio di un fluido ad elevata conducibilità attraverso un campo magnetico esterno | 28 |
| 1.3 | Elongazione di un tubo di flusso che provoca un incremento di B | 31 |
| 1.4 | Rappresentazione schematica della formazione delle macchie solari | 32 |
| 1.5 | Esempio di trascinamento del campo | 33 |
| 1.6 | Espulsione del campo provocata da un vortice orario | 33 |
| 1.7 | Distorsione ed espulsione del campo provocata da rotazione differenziale | 34 |
| 1.8 | Distorsione ed espulsione del campo provocata da rotazione differenziale | 35 |
| 1.9 | Divisione e riconnessione di un tubo di flusso, provocata da rotazione differenziale | 35 |
| 1.10 | Distruzione flusso bidimensionale | 38 |
| 1.11 | Distruzione flusso tridimensionale | 40 |
| 1.12 | Eccitazione magnetica tramite campo rotante | 40 |
| 1.13 | Iniezione di corrente in un mezzo conduttore | 42 |
| 1.14 | Strato di Hartmann in un flusso monodimensionale | 43 |
| 1.15 | Strato di Hartmann in un flusso monodimensionale tra due piani paralleli | 44 |
| 1.16 | Pompa MHD (a) e pistola MHD(b) | 44 |
| 1.17 | Eruzione solare (in alto) e azione vento solare sul campo magnetico terrestre (in basso) | 45 |
| 1.18 | Confinamento del plasma. Principio(a) ed instabilità (b) | 46 |
| 1.19 | Onde di Alfvén smorzate ad alto Rm (sinistra) e basso Rm (destra) | 48 |

1. Magnetofluidodinamica

1.1. Introduzione

La MHD é una teoria fisica che nasce dalla sintesi di Fluidodinamica, Elettromagnetismo e Termodinamica. Essa rappresenta, essenzialmente, una teoria del moto dei fluidi elettricamente conduttori, in presenza di campi magnetici esterni. Il moto del fluido stesso, in conseguenza del trasporto delle cariche elettriche, fa sì che si generino delle correnti elettriche le quali, a loro volta, producono un campo magnetico che si sovrappone a quello esterno; viceversa, il campo magnetico esterno influisce, tramite la forza di Lorentz, sul moto del fluido conduttore. Da quest'interazione mutua tra campo magnetico e moto del fluido scaturiscono una varietá di fenomeni, detti magnetofluidodinamici. A seconda delle caratteristiche del moto e del fluido stesso, si distinguono la Magnetoidrodinamica (liquidi), Magnetogasdinamica (gassiformi), Magnetoplasmadinamica (plasma). Tra le applicazioni piú rimarchevoli, oltre quelle legate alle tecnologie a metalli liquidi, si annoverano lo studio della ionosfera, della magnetosfera terrestre, del nucleo terrestre e della superficie solare, della radiazione cosmica e della stabilitá di determinate configurazioni magnetofluidodinamiche (vedasi il confinamento del plasma per la realizzazione della fusione a freddo).

1.2. Cenni storici

L' individuazione di una data di nascita precisa risulta essere una questione piuttosto oscura e soggettiva.

Alcuni attribuiscono la sua nascita al 1832, quando Faraday condusse un esperimento sul ponte di Waterloo, con lo scopo di misurare le variazioni di altezza del letto del fiume Tamigi, per via elettromagnetica (le acque del fiume erano ricche di ioni). Altri attribuiscono l'origine della MHD alle scoperte pionieristiche compiute da E. F. Northrup, Julius Hartmann, Hannes Alfvén ed altri durante la prima metá del ventesimo secolo

In ogni caso, dopo il 1950, essa conobbe un notevole e rapido sviluppo, venendo presto riconosciuta ufficialmente come un campo di ricerca di grande importanza ed utilitá.

1.3. Sunto dei modelli fisici coinvolti

La Magnetofluidodinamica é una disciplina che combina alcuni dei principali campi della fisica: Fluidodinamica, Termodinamica ed Elettromagnetismo. Per questo motivo, prima di addentrarsi nello specifico della materia, si ritiene opportuno riportare un breve excursus dei suddetti campi. Si esporranno sinteticamente i modelli fisici e l'impianto teorico di ciascuno di essi, ponendo l'accento sugli aspetti piú significativi ed utili alla trattazione successiva, limitando allo stretto necessario l'inserimento di trattazioni teoriche ed equazioni.

1.3.1. Fluidodinamica

La Fluidodinamica si occupa dello studio del moto di fluidi soggetti a campi di forze esterni di varia natura. I fluidi presentano particolari proprietà: non posseggono una configurazione di riferimento, presentano deformazioni apprezzabili anche per sollecitazioni teoricamente infinitesime e non riacquistano la loro configurazione iniziale, una volta cessata la sollecitazione. A questa categoria appartengono un'enorme quantità di sottocategorie, come liquidi e gassiformi. Data la grande generalità della definizione, posso essere trattati come fluidi (sotto le opportune ipotesi), anche enti fisici meno convenzionali rispetto ad i precedenti, come il plasma (Magnetoplasmadinamica).

Tutta l'impalcatura teorica della Fluidodinamica si basa su una fondamentale assunzione, sintetizzata dall'adozione del cosiddetto modello della "Meccanica del Continuo": si suppone, infatti, che tutte le proprietà fisiche del fluido varino con continuità nello spazio occupato dal fluido. Se si ipotizza che il cammino libero medio dei costituenti del fluido stesso sia molto minore delle dimensioni caratteristiche, è lecito supporre che in un determinato volume siano contenute un gran numero di molecole, ed è perciò possibile definire con relativa facilità delle funzioni fisiche e cinematiche continue (quantomeno a tratti) che siano rappresentative e descrittive delle proprietà fisiche del fluido stesso (densità, temperatura, velocità e posizione). Per quanto riguarda la modalità di rappresentazione del moto del fluido stesso, si distinguono due approcci: quello lagrangiano, nel quale si "segue" la singola particella fluida nel suo moto, e quello euleriano, detto anche "di campo", nel quale ci si concentra sull'evoluzione globale del fluido, perdendo di vista i singoli costituenti. Inoltre, è importante sottolineare come tutte le equazioni riportate in seguito, laddove non esplicitamente specificato, facciano riferimento e siano scritte in un'ottica "classica": vengono trascurati, cioè, tutti i fenomeni relativistici che diventano apprezzabili per velocità prossime a quelle della luce e tutti i fenomeni di meccanica quantistica che emergono a scale spaziali subatomiche (per le quali, ad esempio, viene a cadere l'ipotesi del continuo poc'anzi riportata).

1.3.1.1. Conservazione della massa

Un principio generale sul quale si basa la fisica classica, ed in particolare la trattazione di quest'elaborato, é che la massa si conserva: se si trascurano reazioni nucleari e chimiche, i.e. conversione di materia in energia e viceversa, la massa contenuta all'interno di un volume materiale deve necessariamente rimanere costante.

Adottando una descrizione euleriana per la densitá di massa $\rho(X, t)$, quanto espresso precedentemente si traduce in:

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(Bn, t)} \rho(X, t) dV = 0$$

Dove $\chi(Bn, t)$ rappresenta il volume localizzato dalla mappa di moto calcolata su Bn al tempo t .

Utilizzando il teorema del trasporto di Reynolds é possibile scrivere:

$$\int_{\chi} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot u \right] dV = 0$$

Con $\frac{D\rho}{Dt}$ si intende la derivata materiale della densitá di massa, mentre $\nabla \cdot u$ rappresenta l'operatore divergenza applicato al campo vettoriale di velocitá v . Si precisa che da questo paragrafo in poi sar utilizzata la lettera maiuscola in qualit di notazione vettoriale, ove questo non crei ambiguit, altrimenti la si riterr implicita, laddove il carattere vettoriale della grandezza sia facilmente desumibile dal contesto.

Tale equazione integrale deve valere \forall arbitrario dominio $\chi(Bn, t)$; di conseguenza, ci implica la seguente relazione locale:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot u = 0$$

(1.1)

La quale rappresenta il principio di conservazione della massa in forma differenziale, detta anche equazione di continuit della massa.

1.3.1.2. Bilancio della quantit di moto ed equazione di Cauchy

Un ulteriore mattone fondamentale sul quale ´ costruita la fisica classica ´ il bilancio della quantit di moto: la variazione della quantit di moto di un corpo ´ pari alla risultante delle forze esterne agenti su di esso. Applicando tale principio ad un arbitrario volume materiale $\chi(Bn, t)$, si ottiene l'espressione integrale:

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(Bn, t)} \rho(X, t) u(X, t) dV = \sum_{i,1}^{n+1} F_{est}^i$$

Le forze esterne possono essere distinte, senza perdita di generalit, in forze di volume e forze di superficie.

Le prime possono essere descritte da una distribuzione volumetrica $\rho(X, t)_i$ (di massa, carica, o di altra natura) e da un campo vettoriale f_i (accelerazione gravitazionale, di Coriolis, di Lorentz...).

Nel caso specifico di presenza del solo campo gravitazionale $\rho(X, t)_i \equiv \rho(X, t)$ ed $f_i \equiv g$.

Le seconde sono caratterizzate da una densità vettoriale superficiale di forza t^n , distribuita sulla frontiera delineata dal dominio materiale (con normale positiva convenzionalmente orientata verso l'esterno). Imponendo la validità locale dell'equazione della quantità di moto (il che equivale ad imporne la consistenza puntuale), utilizzando il lemma di Cauchy e le considerazioni legate al tetraedro di Cauchy, si deduce che t deve soddisfare: $t^n = T \cdot \hat{n}$, dove T è un tensore del secondo ordine, detto "tensore degli sforzi".

Inserendo l'espressione così ricavata per le forze esterne, applicando il teorema di Gauss-Green all'integrale superficiale ed infine la seconda forma del teorema del trasporto di Reynolds si ottiene:

$$\int_{\chi} \rho \frac{Du}{Dt} dV = \sum_{i,1}^n \int_{\chi} \rho_i f_i dV + \int_{\chi} \nabla \cdot T dV$$

Tale equazione deve valere \forall volume χ , arbitrariamente minuto, perciò si ottiene la relazione locale, detta anche equazione di Cauchy:

$$\boxed{\rho \frac{Du}{Dt} = \sum_{i,1}^n \rho_i f_i + \nabla \cdot T} \quad (1.2)$$

1.3.1.3. Bilancio momento della quantità di moto

Il bilancio del momento della quantità di moto rappresenta sostanzialmente un bilancio dinamico alla rotazione di un corpo: la variazione temporale del momento della quantità di moto $L(Bn, t)$ è pari alla risultante dei momenti esterni $\sum_{i=1}^{n+1} M_{ext}$ agenti sul sistema. Esplicitando il tutto in linguaggio matematico:

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi} \rho X \times u dV = \sum_{i=1}^n \int_{\chi} \rho_i X \times f_i dV + \oint_{\partial\chi} X \times t^n dS$$

Inserendo l'espressione per il tensore delle tensioni:

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi} \rho X \times u dV = \sum_{i=1}^n \int_{\chi} \rho_i X \times f_i dV + \oint_{\partial\chi} X \times (T \cdot \hat{n}) dS$$

Applicando in sequenza il teorema del trasporto, Gauss-Green, rimaneggiando l'equazione e sfruttando la validità dell'equazione di Cauchy, si giunge alla fondamentale conclusione che

$$T^T = T$$

Cioé il tensore delle tensioni è simmetrico.

1.3.1.4. Relazioni costitutive e fluidi newtoniani

La simmetria del tensore delle tensioni, ricavata dal bilancio alla rotazione dell'elemento infinitesimo di fluido, riduce i termini incogniti di T a 6. Resta quindi da determinare la natura delle restanti 6 componenti; tale natura non può essere determinata univocamente, in quanto dipendente dalle caratteristiche del fluido stesso. Esiste un'intera branca della meccanica, la Reologia, che si occupa di fornire ed ipotizzare relazioni costitutive per il tensore delle tensioni. In genere le relazioni costitutive si assegnano tenendo presente i tre assiomi fondamentali di Noll, dei quali, per brevità, non si entra nel merito: il principio di determinismo, quello di effetto locale e quello di covarianza. In particolare, un fluido è detto "stokesiano" se:

- T dipende solo dallo stato deformativo (rappresentato dal tensore simmetrico del secondo ordine e) e da quello termodinamico.
- $T(u = 0)$ è diagonale, i.e. gli sforzi a riposo sono solo normali.
- La relazione funzionale tra T , stato deformativo e termodinamico è omogenea.
- La relazione funzionale tra T , stato deformativo e termodinamico è isotropa.

Un fluido è invece detto "newtoniano" se è stokesiano ed in più la dipendenza di T dalla deformazione locale è rappresentabile tramite una relazione lineare. Sotto queste ipotesi l'espressione di T assume la forma:

$$T = -pI + \lambda\nabla \cdot E I + 2\mu e \quad (1.3)$$

Dove p è detta pressione, λ coefficiente di viscosità ed infine μ viscosità dinamica (questi ultimi entrambi costanti). In questo modo, le incognite in T si riducono a 3 funzioni scalari, da determinare con ulteriori relazioni esterne (equazioni di stato, relazioni empiriche, sperimentali, etc...). Questa è una legge costitutiva che ben si adatta a numerose tipologie di liquidi comuni (ad esempio l'acqua); tuttavia sono presenti numerose altre relazioni costitutive, di origine sperimentale o meno, che sono particolarmente adatte allo studio del moto di altri fluidi.

1.3.1.5. L'equazione di Navier-Stokes

L'equazione di Navier-Stokes è una relazione differenziale alle derivate parziali, descrittiva del moto di un fluido newtoniano in un campo di forze esterne.

Essa è semplicemente ricavabile a partire dall'equazione di Cauchy, inserendo la legge costitutiva 1.3 ed effettuando alcune manipolazioni vettoriali.

L'equazione, nella sua forma più generale, assume la forma:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \sum_{i,1}^n \rho_i f_i - \nabla p + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot u) + \mu \nabla^2 u \quad (1.4)$$

Tale equazione presenta soluzioni analitiche solamente per casistiche notevolmente semplici, mentre nella maggior parte delle applicazioni, le soluzioni vengono ricavate in via approssimata tramite metodi numerici.

Nel caso di fluido incompressibile, i.e. con densità costante, l'equazione di conservazione della massa fornisce $\nabla \cdot u = 0$ e l'equazione diviene:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \sum_{i,1}^n \rho_i f_i - \nabla p + \mu \nabla^2 u \quad (1.5)$$

Per fluidi non viscosi, sia comprimibili che non, i coefficienti viscosi λ e μ sono nulli e gli sforzi sono solo normali:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \sum_{i,1}^n \rho_i f_i - \nabla p \quad (1.6)$$

Si noti come l'espressione delle forze esterne volumetriche non sia stata esplicitata; normalmente, nella scrittura dell'equazione di Navier-Stokes ci si limita alla pura forza gravitazionale. A questo proposito, nel paragrafo 1.5.2 si riporterà l'espressione per il caso della forza di Lorentz.

1.3.1.6. L'equazione di Beltrami

L'equazione di Navier-Stokes descrive la dinamica d'evoluzione del campo di velocità u .

Tuttavia, esiste un'altra grandezza vettoriale cinematica di notevole interesse fluidodinamico, la *vorticità* $\xi := \nabla \times u$. L'equazione evolutiva della vorticità si ricava a partire dall'equazione di Navier-Stokes utilizzando la forma di Lagrange della derivata materiale, applicando l'operatore rotore all'equazione stessa e rimaneggiando i termini con dell'algebra vettoriale (per questioni di brevità si omettono i passaggi matematici).

In questa maniera si giunge alla cosiddetta *equazione di Beltrami*:

$$\frac{D(\xi/\rho)}{Dt} = \nabla u \cdot \frac{\xi}{\rho} + \frac{1}{\rho} \left(\nabla \times \sum_i f_i + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} \right) + \frac{\nu}{\rho} \nabla^2 \xi \quad (1.7)$$

Dove ν è detta *viscosità cinematica*.

1.3.2. Termodinamica

La Termodinamica é quel campo della fisica che si occupa di descrivere e modellizzare la dinamica degli scambi energetici, attraverso l'utilizzo di un numero ristretto di parametri macroscopici, ritenuti sufficienti ad individuare univocamente lo stato di un sistema, detto appunto, termodinamico.

L'origine di questa branca si fa risalire al diciottesimo secolo, quando J. P. Joule ne gettò le basi, verificando l'equivalenza tra calore e lavoro, prima ritenuti due enti scissi. Negli anni 20 dello stesso secolo, in seguito allo studio delle macchine termiche, S. N. L. Carnot pubblicó un trattato che si puó ritenere di fatto l'inizio della termodinamica classica. Altro importante passo si ebbe oltre vent'anni piú tardi, quando W. Thomson, futuro lord Kelvin, introdusse il concetto di temperatura termodinamica. Un ulteriore contributo venne da R. J. E. Clausius il quale, oltre alla formulazione della suo enunciato del secondo principio della termodinamica, introdusse il concetto di entropia. Negli anni settanta dello stesso secolo, J.W. Gibbs pose l'accento su come la termodinamica fosse estendibile e generalizzabile applicandola, nello specifico, alla chimica. Il lavoro di Gibbs e Clausius venne raccolto ed integrato da M. Plank, le cui *Vorlesungen über Thermodynamic*, costituiscono la formulazione piú compiuta della termodinamica classica. Nel corso del ventesimo secolo conobbe una rapida evoluzione, perdendo progressivamente il carattere puramente macroscopico con il quale era nata ed ampliandosi anche al mondo microscopico. Alcune delle menti piú illustri del secolo, tra le quali si citano (senza pretesa di completezza) W. Nerst, M. Born, L. Boltzmann ed A. Einstein, contribuirono al suo sviluppo.

Nonostante i rimarchevoli sviluppi e la notevole evoluzione cui é stata soggetta, la Termodinamica classica é tutt'oggi adatta allo studio di molti sistemi fisici, che non evolvano su scale particolarmente ridotte, ed é pertanto agevolmente applicabile alla Fluidodinamica classica. Si riporta di seguito un breve accenno ai principi della Termodinamica, ponendo l'attenzione prevalentemente sulle equazioni e sulle considerazioni che derivano dalla loro applicazione, limitatamente a quelle ritenute utili ai fini della trattazione del paragrafo 1.4 .

1.3.2.1. Primo principio e secondo principio della Termodinamica

Il primo principio della Termodinamica é essenzialmente una legge di conservazione ed asserisce che, in un sistema isolato, l'energia totale si mantiene costante. Ora, senza addentrarsi eccessivamente nella sua discussione, si riporta la sua specializzazione locale, nel caso fluidodinamico. La formulazione matematica originale del primo principio possiede un'ottica macroscopica e prescinde totalmente dalla variabile tempo; tale forma non si presta all'applicazione fluidodinamica, dove i valori delle grandezze fisiche, sotto le supposizioni ed approssimazioni esplicitate nel paragrafo 1.3.1, sono definiti puntualmente, in maniera continua ed evolvono col tempo. Tuttavia, con relativa facilitá, é possibile estendere tale principio localmente ed arrivare ad una definizione coerente e consistente di energia totale di un sistema, o meglio, volume materiale.

La considerazione fondamentale per poter compiere lecitamente tale passo riguarda la minutezza dei tempi microscopici rispetto a quelli macroscopici, i.e. quelli nei quali il fluido evolve. Supposto ciò vero, tutte le grandezze microscopiche "hanno il tempo di adattarsi" alle mutate configurazioni del fluido, e la loro definizione univoca e coerente con la termodinamica è possibile. Ciò detto, tralasciando i passaggi che portano al risultato, l'espressione dell'energia totale di un generico dominio materiale $\chi(Bn, t)$ assume la forma:

$$E(Bn, t) = \int_{\chi(Bn, t)} \rho \left(\frac{|u|^2}{2} + U \right) dV$$

Dove u rappresenta la velocità del singolo elemento fluido ed U la sua energia interna, relativa all'agitazione termica ed ai potenziali microscopici. Il sistema fluidodinamico non è però isolato, pertanto la variazione dell'energia totale lungo un qualsiasi atto di moto è in generale non nulla; essa, applicando il principio di conservazione dell'energia (o in questo caso più propriamente il bilancio delle potenze), dovrà essere necessariamente uguale alla somma algebrica delle potenze globalmente spese sull'elemento fluido.

Introducendo la potenza spesa dalle sorgenti di calore interne per unità di massa Q , distribuite all'interno del volume, ed il flusso termico superficiale h^n , utilizzando ancora una volta gli argomenti del tetraedro di Cauchy, il teorema della divergenza e quello del trasporto, si giunge alla seguente formulazione del primo principio della termodinamica per un continuo:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(U + \frac{|u|^2}{2} \right) = \left(\sum_{i=1}^n \rho_i f_i \right) u + \nabla \cdot (Tu) + \rho Q - \nabla \cdot q \quad (1.8)$$

Nella quale q è il cosiddetto vettore flusso termico, derivante dall'imposizione della consistenza puntuale del bilancio e dall'applicazione delle considerazioni del tetraedro di Cauchy.

Partendo da tale relazione, sottraendole l'equazione di Cauchy (opportunamente rimaneggiata), inserendo la legge costitutiva per T e la definizione di entalpia, ed infine utilizzando il postulato di Fourier, si ottiene la forma termica del primo principio:

$$\boxed{\rho C_p \frac{D\theta}{Dt} - \beta\theta \frac{Dp}{Dt} = \rho Q + k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j} + \sigma_{ij} e_{ij}} \quad (1.9)$$

L'equazione, per comodità di notazione, è stata scritta in forma indiciale;

- C_p : calore specifico a pressione costante del fluido
- θ e p : rispettivamente, temperatura e pressione locale
- β : coefficiente di dilatazione volumica
- k : coefficiente di conducibilità termica
- $\sigma_{ij} := \lambda e_{pp} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$, con δ_{ij} delta di Kronecker

Tale equazione risulta essere più rappresentativa, in un'ottica globale, della 1.8, poiché contiene in maniera esplicita tutte le variabili termodinamiche in gioco.

A questo punto é utile introdurre brevemente il secondo principio della Termodinamica, poiché esso permette di aggiungere informazioni sulla maggior parte dei coefficienti fin'ora introdotti. Il secondo principio della termodinamica presenta più formulazioni, ciascuno dei quali ne mette in luce un differente aspetto. Tra i più noti si annoverano l'enunciato secondo Kelvin-Plank, secondo Clausius (concettualmente equivalente al precedente) e quello basato sulla definizione della funzione di stato entropia.

Per quanto concerne le finalità di quest'elaborato, il più significativo é il terzo, il quale afferma che l'entropia di un sistema termodinamico lontano dall'equilibrio tende ad aumentare nel tempo, finché tale configurazione d'equilibrio non sia raggiunta. In ogni caso, ci si soffermerà solamente sulle implicazioni dirette di questo principio, in particolare su alcuni dei coefficienti introdotti.

Avendo definito la funzione entropia per unità di massa s ed utilizzando una formulazione del primo principio della Termodinamica che risulta dall'applicazione degli stessi passaggi matematici che portano alla 1.9,

fermandosi prima dell'introduzione dell'espressione per l'entalpia, si ottiene il sistema (v rappresenta il volume specifico):

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{DU}{Dt} + p \frac{Dv}{Dt} \right) = \rho Q - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \sigma_{ij} e_{ij} \\ dU + pdV = \theta ds \end{cases}$$

Introducendo la seconda equazione nella prima, previa manipolazione differenziale, integrando sul generico volume materiale e rimaneggiando i termini relativi al vettore flusso termico si giunge all'espressione:

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi} \rho s dV = \int_{\chi} \frac{\rho Q}{\theta} dV - \oint_{\partial\chi} \frac{q_j n_j}{\theta} dS + \int_{\chi} \left(\frac{\sigma_{ij} e_{ij}}{\theta} - \frac{q_j}{\theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) dV$$

Nella quale il primo termine rappresenta la variazione d'entropia dell'intero volume materiale, mentre l'ultimo é relativo alla produzione entropica, composto dai contributi delle forze viscose e dei gradienti interni di temperatura; i primi due termini a destra del simbolo d'uguaglianza sono relativi, rispettivamente, agli sviluppi volumetrici di calore ed agli scambi termici con l'esterno. Il termine di produzione entropica rappresenta ed é il risultato delle irreversibilità interne al dominio materiale considerato.

La diseguaglianza di Clausius:

$$\frac{d}{dt} S(Bn, t) > \int_{\chi} \frac{\rho Q}{\theta} dV - \oint_{\partial\chi} \frac{q_j n_j}{\theta} dS$$

dev'essere valida \forall atto di moto concesso al fluido e \forall volume materiale; perciò il termine di produzione entropica dev'essere necessariamente > 0 .

Ques'importante considerazione permette di gettare luce sull'identità dei coefficienti viscosi e sulla conducibilità termica. In particolare, utilizzando la decomposizione in termine deviatorio e sferico del tensore delle deformazioni e sfruttando la validità della diseguaglianza \forall atto di moto, si giunge alla conclusione che

$$\boxed{\begin{cases} \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0 \\ \mu > 0 \end{cases}}$$

Analogamente, sostituendo in q l'espressione conseguente dal postulato di Fourier, si conclude che necessariamente deve valere $k > 0$.

1.3.2.2. Equazione di stato

L'equazione di stato é una relazione funzionale, che lega le principali variabili termodinamiche, cioè temperatura, pressione e densitá (o equivalentemente volume specifico): $f(p, \rho, \theta) = 0$.

Tale relazione funzionale puó essere sperimentale o analitica, come nel caso del gas perfetto ($pv = R\theta$). Essa é necessaria e sufficiente, almeno teoricamente, per poter chiudere il sistema fluidodinamico classico, nel quale siano presenti le sole forze gravitazionali, una volta fornite le opportune condizioni al contorno.

Tuttavia, nel caso specifico in cui siano presenti forze elettromagnetiche tale relazione non é sufficiente a chiudere il sistema, come é il caso della MHD, ed é necessario fornire ulteriori relazioni costitutive.

Nel caso specifico dell'elettromagnetismo tali relazioni sono fornite dalle celeberrime equazioni di Maxwell.

Segue, pertanto, un fugace riepilogo della teoria dell'Elettromagnetismo, dopo il quale ci si addentrerá nella vera e propria Magnetofluidodinamica.

1.3.3. Elettromagnetismo

L’Elettromagnetismo é quella branca della fisica che studia una delle quattro interazioni fondamentali, detta appunto interazione elettromagnetica. Esso scaturisce dall’unificazione di due tipologie di forze, quelle elettriche e quelle magnetiche, realizzata e formulata da J. C. Maxwell negli anni settanta del diciannovesimo secolo.

I fenomeni elettromagnetici si manifestano in natura con un’ampia varietá e complessitá. Le prime attestazioni storiche di osservazioni fenomenologiche risalgono all’antica Grecia, ad opera del filosofo Talete (vissuto attorno al 500 a.c.). Nel corso dei successivi venticinque secoli, la consapevolezza e la padronanza di questo campo si sono evoluti, fino ad arrivare alla teoria dell’elettromagnetismo, cosiddetto “classico”, ad opera di Maxwell ed alla sua successiva estensione relativistica e quantistica ad opera, rispettivamente, di A. Einstein e P. Dirac.

Si sottolinea sin da subito che la teoria presentata successivamente riguarda il solo Elettromagnetismo classico di Maxwell e prescinde, pertanto, dalle estensioni apportate alla teoria nella prima metá del ventesimo secolo.

1.3.3.1. Legge di conservazione della carica

Analogamente al caso fluidodinamico, l’Elettromagnetismo si basa su di un principio fondamentale di origine sperimentale, secondo il quale la carica totale Q di un sistema isolato si conserva; nel caso in cui il sistema non sia isolato, l’eventuale variazione di carica dovrá necessariamente essere stata causata da flussi esterni.

In quest’ottica, si definisce il vettore densitá di corrente J in modo che

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_{\partial V} J \cdot \hat{n} \, dS$$

dove ∂V é il contorno di un arbitrario dominio *libero*. Sostituendo in Q la sua espressione (con ρ_c densitá volumica di carica elettrica), cioé

$$Q(t) = \int_V \rho_c(X, t) \, dV$$

sfruttando il fatto che V sia un dominio libero, i.e. indipendente dal tempo, applicando il teorema della divergenza all’integrale circuitale e considerando l’arbitrarietá del dominio d’integrazione si giunge alla relazione locale

$$\nabla \cdot J + \frac{\partial \rho_c}{\partial t} = 0$$

(1.10)

Tale equazione differenziale alle derivate parziali rappresenta l’equazione di continuitá della carica.

1.3.3.2. Forze elettromagnetiche

In conseguenza della definizione del campo elettrico E , la forza agente F_e agente su di una carica immersa in un campo elettrico esterno é pari a

$$F_e = qE \quad (1.11)$$

L'evidenza sperimentale derivante dal moto di circuiti percorsi da corrente (I), inseriti in un campo d'induzione magnetica esterno (B), porta a scrivere espressione della forza dF_B agente sul singolo elemento infinitesimo di filo dl , detta seconda legge di Laplace:

$$dF_B = Idl \times B \quad (1.12)$$

La 1.12 puó essere estesa facilmente al caso di un volume finito τ percorso da corrente:

$$F_B = \int_{\tau} J \times B \, d\tau \quad (1.13)$$

Esplicitando l'espressione di J e dividendo per il numero di portatori di carica si giunge all'espressione della forza subita da una carica q in moto in un campo d'induzione magnetica:

$$F_B = q u \times B \quad (1.14)$$

A titolo di completezza, si noti come sia la 1.12 che la 1.14 possano essere utilizzata per la definizione di B .

In definitiva, una carica immersa in un generico campo elettromagnetico subisce una forza

$$F = q(E + u \times B) \quad (1.15)$$

1.3.3.3. Legge di Ohm locale

La legge di Ohm locale rappresenta, essenzialmente, una relazione costitutiva tra la densitá di corrente J ed il campo elettrico E . Nel caso in cui il mezzo conduttore sia in moto in un campo d'induzione magnetica B essa assume la forma

$$J = f(E, u, B)$$

In particolare, se il mezzo é lineare, si riduce a

$$J = \|\sigma\| (E + u \times B) \quad (1.16)$$

dove $\|\sigma\|$ é il *tensore di conducibilitá*, con termini non necessariamente costanti. Se, infine, il mezzo é anche isotropo la 1.16 si riduce a

$$J = \sigma (E + u \times B) \quad (1.17)$$

dove σ é uno scalare.

1.3.3.4. Le equazioni di Maxwell

Si riportano ora le equazioni di Maxwell, nella loro forma piú generale, almeno per quanto concerne l'Elettromagnetismo classico. Per questioni di brevitá se ne ommette la dimostrazione, limitandosi ad un rapido commento delle variabili fisiche coinvolte ed al significato delle stesse.

1.3.3.4.1. Prima equazione

La prima equazione stabilisce una relazione tra il flusso elettrico attraverso qualsiasi una superficie chiusa e la carica totale contenuta nella superficie stessa. In particolare, si riporta il caso generale nel quale si abbia la presenza di un dielettrico, i.e. un materiale che si polarizza, se sottoposto ad un campo elettrico esterno.

A questo proposito, si introduce la definizione del vettore *polarizzazione elettrica* (*o intensità di polarizzazione*) P , definito come il vettore momento di dipolo elettrico p_i per unità di volume τ posseduto dal materiale:

$$P = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sum_i p_i}{\tau} \quad (1.18)$$

Tenendo conto delle cariche aggiuntive di polarizzazione ρ_{cp} la prima equazione nel caso della presenza di dielettrico si scrive a partire dalla validità della

$$\int_{\partial V} E \cdot \hat{n} dS = \int_V \frac{\rho_c' + \rho_{cp}}{\epsilon_0} dV$$

che esprime la proporzionalità diretta tra flusso del campo elettrico E attraverso una superficie e la carica contenuta al suo interno (ρ_c' sono le cariche libere all'interno del volume ed ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto, legata alla permeabilità magnetica assoluta μ_0 da $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$).

Applicando il teorema della divergenza, per l'arbitrarietà del dominio d'integrazione, si ottiene

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho_c' + \rho_{cp}}{\epsilon_0} \quad (1.19)$$

A partire dalla definizione 1.18 è possibile dimostrare che $\rho_{cp} = -\nabla \cdot P$. Sostituendo quest'ultima relazione all'interno della 1.19 si ricava

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 E + P) = \rho_c$$

dove con ρ_c , per semplicità, si indicano le cariche libere.

Introducendo il vettore *spostamento elettrico* $D := \epsilon_0 E + P$ la prima equazione di Maxwell in presenza di dielettrici prende la forma

$$\boxed{\nabla \cdot D = \rho_c} \quad (1.20)$$

L'espressione esplicita di P e la sua relazione con il campo elettrico E verranno approfondite nel paragrafo 1.3.3.4.5 .

1.3.3.4.2. Seconda equazione

La seconda equazione di Maxwell stabilisce una fondamentale proprietà: il campo d'induzione magnetica B è solenoidale. Ciò significa che il flusso di B attraverso una qualsivoglia superficie chiusa S è sempre nullo. In formule:

$$\boxed{\nabla \cdot B = 0} \quad (1.21)$$

Tale proprietà discende dall'evidenza sperimentale, fin'oggi mai contraddetta, che non esiste l'equivalente magnetico della carica elettrica, cioè il tanto agognato (per questioni di simmetria della teoria) monopolo magnetico. In conseguenza di questa constatazione, le linee di forza di B sono chiuse ed i tubi di flusso di B non presentano né inizio, né fine.

1.3.3.4.3. Terza equazione

La terza equazione discende da un'importante legge sperimentale, la cosiddetta legge di Faraday-Neumann-Lenz.

Essa asserisce che in un circuito immerso in un campo d'induzione magnetica, il cui flusso $\Phi(B)$ concatenato con il circuito stesso vari nel tempo, si genera una forza elettromotrice indotta f_i tale che:

$$f_i = -\frac{d\Phi(B)}{dt} \quad (1.22)$$

dove $f_i = \oint_l E_i \cdot \vec{dl}$, con E_i campo elettrico indotto, tale che $E_i = E + u \times B$ ($u \times B$ rappresenta il contributo della forza di Lorentz).

Nel caso generico di circuito non rigido in moto qualunque, esplicitando nella 1.22 tutti i termini e rimaneggiando opportunamente l'equazione, si giunge alla relazione

$$\oint_l (E_i - u \times B) \cdot dl = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \hat{n} dS$$

Riconoscendo la presenza di E come integrando del termine a sinistra dell'equazione, applicando il teorema di Stokes e notando l'arbitrarietà di S , si ottiene la terza equazione di Maxwell:

$$\boxed{\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}} \quad (1.23)$$

1.3.3.4.4. Quarta equazione

La quarta equazione di Maxwell, detta anche legge di Ampère-Maxwell, stabilisce una relazione tra campo d'induzione magnetica e corrente elettrica. A partire dalla cosiddetta *legge fondamentale della magnetostatica nel vuoto* è relativamente agevole dimostrare che

$$\nabla \times B_0 = \mu_0 J \quad (1.24)$$

Dove B_0 e μ_0 sono, rispettivamente, il campo d'induzione magnetica nel vuoto e la permeabilità magnetica assoluta del vuoto, pari a $4\pi \cdot 10^{-7} H/m$.

Nel caso generale (stazionario) in cui sia presente materia, sia essa para-, dia- o ferro- magnetica, è possibile tener conto delle correnti atomiche aggiuntive presenti nel materiale, introducendo il vettore *densità di corrente microscopica* J_m . In questa maniera la 1.24 diviene

$$\nabla \times B_0 = \mu_0 (J + J_m) \quad (1.25)$$

Introducendo il vettore *polarizzazione magnetica* (*o intensitá di magnetizzazione*) M , definito come il vettore momento magnetico m_i per unitá di volume τ , posseduto dal materiale:

$$M = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sum_i m_i}{\tau} \quad (1.26)$$

é possibile dimostrare che la densitá di corrente microscopica volumetrica J_{mv} é legata ad M da $J_{mv} = \nabla \times M$. Potendo la 1.25 essere scritta solo all'interno del materiale, $J_m \equiv J_{mv}$ Di conseguenza, sostituendo nella 1.25 l'espressione di J_m si ottiene

$$\nabla \times \left(\frac{B - \mu_0 M}{\mu_0} \right) = J$$

Introducendo il vettore *campo magnetico* $H := \frac{B - \mu_0 M}{\mu_0}$ la quarta equazione, nel caso stazionario assume la forma

$$\nabla \times H = J \quad (1.27)$$

Applicando l'operatore divergenza ad entrambi i membri si vede come essa possa essere valida solo nel caso $\nabla \cdot J = 0$. Nel caso non stazionario, é necessario rendere quest'equazione coerente con l'equazione di continuitá. Sostituendo in quest'ultima l'espressione per ρ_c data dalla prima equazione di Maxwell e sfruttando il teorema di Schwartz si ottiene:

$$\nabla \cdot (J + \frac{\partial D}{\partial t}) = 0 \quad (1.28)$$

Pertanto, se si sostituisce J con $J + \frac{\partial D}{\partial t}$, l'impianto teorico torna ad essere coerente anche nel caso non stazionario; quello che puó sembrare un semplice espediente matematico risulta essere in perfetto accordo con le osservazioni sperimentali.

Il termine $\frac{\partial D}{\partial t}$ viene detto *densitá di corrente di spostamento*.

In conclusione, l'espressione della quarta equazione di Maxwell nel caso non stazionario e in presenza di materia assume la forma:

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (1.29)$$

L'equazione 1.29 verrá integrata nel paragrafo 1.3.3.4.5 con la discussione sulle relazioni tra M e B (o equivalentemente H).

1.3.3.4.5. Relazioni strutturali

Le relazioni strutturali sono dei modelli sperimentali che esplicitano il legame funzionale tra variabili d'interesse, in questo caso elettromagnetiche.

Esse permettono, almeno teoricamente, contestualmente all'applicazione di opportune condizioni al contorno e di raccordo (paragrafo 1.3.3.4.6), di chiudere il sistema elettromagnetico.

La prima delle relazioni d'interesse é la 1.16, gi discussa.

La seconda relazione di necessaria introduzione é tra il campo elettrico E ed il

vettore polarizzazione elettrica P (o equivalentemente D). In generale, la relazione $P = f(E)$ può assumere qualsiasi forma ed essere pertanto non lineare:

$$P = \|\alpha\| E \quad (1.30)$$

con $\|\alpha\|$ detto *tensore di polarizzazione*, ad elementi costanti solo se il dielettrico è *perfetto*.

Nel caso più semplice. i.e. dielettrico perfetto ed isotropo,

$$P = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 E \quad (1.31)$$

con ϵ_r costante dielettrica relativa del materiale.

Un discorso analogo vale per la relazione tra M ed H , che nel caso più generale assume la forma:

$$M = \|\chi_m\| H \quad (1.32)$$

con $\|\chi_m\|$ detto *tensore di magnetizzazione*. Nel caso di materiale perfetto ed isotropo essa si riduce a:

$$M = (\mu_r - 1)H \quad (1.33)$$

con μ_r permeabilità magnetica relativa del materiale.

1.3.3.4.6. Condizioni di raccordo dei campi

L'ultimo tassello mancante per completare l'impalcatura teorica necessaria e d'uso alla MHD è rappresentato dalle condizioni di raccordo dei campi, imprescindibili nel caso di transizione tra materiali di differente natura. Per la scrittura di tali condizioni, si utilizza lo stesso procedimento sia per le grandezze elettriche, che magnetiche. Si sfruttano le relazioni integrali fornite dalle equazioni di Maxwell, applicate su superfici chiuse degeneri per le grandezze contenute dall'operatore divergenza e su circuiti chiusi degeneri per quelle contenute dall'operatore rotore. Dovendo le 1.20 e 1.21 valere al contorno dei due materiali, se le si applica ad un cilindro di altezza tendente a zero e di superficie infinitesima, considerando che all'interfaccia dev'essere $\rho_c = 0$, si ottiene:

$$D_{n1} = D_{n2} \quad (1.34)$$

$$B_{n1} = B_{n2} \quad (1.35)$$

Analogamente, dovendo le 1.23 e 1.29 valere sulla discontinuità dei due materiali, se le si applica ad un circuito pseudo-rettangolare con altezze (ortogonalni all'interfaccia) tendenti a zero e lati infinitesimi (paralleli all'interfaccia), si giunge a:

$$E_{t1} = E_{t2} \quad (1.36)$$

$$H_{t1} = H_{t2} \quad (1.37)$$

1.4. Il sistema MHD

Avendo introdotto tutti gli elementi teorici costituenti le fondamenta della Magnetofluiddodinamica, si riporta ora un paragrafo riassuntivo, nel quale si inserisce il sistema d'equazioni completo, necessario alla soluzione del più generale problema di MHD classica, i.e. non relativistica, né quantistica.

A seconda della tipo di fluido sarà necessario inserire un'opportuna legge costitutiva per T , tensore delle tensioni, ed adattare di conseguenza la forma termica del primo principio della Termodinamica. Tale sistema non sarà quello utilizzato nella pratica, poiché di difficile gestione teorica; verranno infatti apportate notevoli semplificazioni al modello, le quali verranno discusse nel paragrafo 1.5. Tuttavia si ritiene comunque utile riportare il sistema completo, che fornisce una suggestiva visione d'insieme della teoria. Si sottolinea come a tale sistema d'equazioni vadano aggiunte le opportune condizioni al contorno, di raccordo dei campi (nel caso di transizione tra più materiali) ed iniziali.

1.4.1. La forma generale

- Fluidodinamica:

$$\begin{cases} \rho \frac{Du}{Dt} = \rho g + \rho_c (u \times B + E) + \nabla \cdot T \\ T = \|F(e, \rho, \theta, p, X, etc..)\| \\ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot u = 0 \end{cases}$$

- Termodinamica:

$$\begin{cases} \rho \frac{D}{Dt} \left(U(p, \rho, \theta) + \frac{|u|^2}{2} \right) = (\rho g + \rho_c E) u + \nabla \cdot (Tu) + \rho Q - \nabla \cdot q \\ q = k \nabla \theta \\ f(p, \rho, \theta) = 0 \end{cases}$$

- Elettromagnetismo:

$$\begin{cases} \nabla \cdot D = \rho_c \\ \nabla \cdot B = 0 \\ \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} D := \epsilon_0 E + P \\ H := \frac{B - \mu_0 M}{\mu_0} \\ J = \|\sigma\| (E + u \times B) \\ P = \|\alpha\| E \\ M = \|\chi_m\| H \end{cases}$$

1.5. Il sistema semplificato MHD

Ai fini della trattazione teorica della Magnetofluidodinamica, il precedente sistema d'equazioni è completo, tuttavia eccessivamente complesso.

Nella MHD si è solitamente interessati allo studio di fluidi conduttori e non polarizzabili. Nella trattazione seguente si assumerà, inoltre, che tutte le proprietà dei materiali (conduttività, coefficienti di viscosità, etc..) siano spazialmente costanti ed i fluidi d'interesse siano incompressibili.

Questa sezione è dedicata alla semplificazione dei modelli teorici (relativamente generali) precedentemente introdotti ed alla loro specializzazione.

1.5.1. Le equazioni dell'Elettrodinamica classica

1.5.1.1. Conservazione della carica e forza di Lorentz volumetrica

Nella Magnetofluidodinamica si è in genere interessati alle forze agenti su porzioni finite di fluido, piuttosto che su singole particelle; ciò considerato, la forza di Lorentz per unità di volume può essere scritta sfruttando la definizione di vettore densità di corrente J :

$$f_b = J \times B \quad (1.38)$$

detta *forza di Lorentz volumetrica*.

La forza elettomagnetica agente su di una porzione infinitesima di fluido è dunque:

$$f = \rho_c E + J \times B \quad (1.39)$$

Sfruttando l'equazione di continuità della carica 1.10, eseguendo la divergenza di entrambi i membri della legge di Ohm locale 1.17 ed inserendo la legge di Gauss 1.20 (per fluidi non polarizzati) si ottiene:

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \frac{\rho_c}{\tau_c} + \sigma \nabla \cdot (u \times B) = 0 \quad (1.40)$$

con $\tau_c := \frac{\epsilon_0}{\sigma}$, detto *tempo di rilassamento*, che per un conduttore tipico assume valori intorno a $10^{-18}s$.

Si consideri il caso in cui $u = 0$. La 1.40 diviene $\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \frac{\rho_c}{\tau_c} = 0$, con soluzione $\rho_c = \rho_c(0) \exp[-t/\tau_c]$, nella quale τ_c rappresenta il tempo nel quale la densità di carica diviene trascurabile; essendo tale tempo estremamente minuto, qualsiasi carica contenuta in un conduttore a riposo si distribuisce pressoché istantaneamente sulla sua superficie.

Nella MHD i tempi caratteristici sono generalmente molto maggiori di τ_c ; perciò è lecito trascurare il termine $\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$ nella 1.40.

Si ottiene, quindi, la seguente equazione pseudo-statica:

$$\frac{\rho_c}{\tau_c} + \sigma \nabla \cdot (u \times B) = 0 \quad (1.41)$$

L'unico modo per poter sostenere una densità di carica non nulla all'interno di un conduttore, é che esso sia in moto; si verifica, tuttavia, come tale densità non sia sufficiente a produrre alcuna apprezzabile forza elettrica volumetrica $\rho_c E$. Dall'analisi dimensionale della 1.41 e della 1.17 si verifica agevolmente che:

$$\rho_c E \sim [\epsilon_0 u B / l][J/\sigma] \sim \frac{u \tau_c}{l} J B \quad (1.42)$$

dove l é una lunghezza di riferimento. Vista la piccolezza di τ_c é possibile trascurare le forze elettriche. Conseguentemente la forza volumetrica totale agente sull'elemento materiale e la legge i conservazione della massa assumono la forma:

$$f = J \times B \quad (1.43)$$

$$\nabla \cdot J = 0 \quad (1.44)$$

Inoltre, essendo ρ_c presente unicamente nella legge di Gauss, si trascura semplicemente quest'ultima equazione.

1.5.1.2. Legge di Ampére

La quarta equazione di Maxwell, sotto le ipotesi effettuate ad inizio capitolo assume la forma:

$$\nabla \times B = \mu_0 \left(J + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \quad (1.45)$$

L'analisi dimensionale del termine relativo alla densità di corrente di spostamento fornisce:

$$\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \sim \frac{\epsilon_0}{\sigma} \frac{\partial J}{\partial t} \sim \tau_c \frac{\partial J}{\partial t} \ll J \quad (1.46)$$

Ciò considerato, la legge di Ampére diviene:

$$\nabla \times B = \mu_0 J \quad (1.47)$$

Si noti, eseguendo la divergenza della 1.47, come essa sia consistente con la 1.44.

1.5.1.3. Sistema elettrodinamico semplificato per la MHD

Considerando quanto detto nei precedenti paragrafi circa le supposizioni ed approssimazioni lecite nello studio della MHD, si ottiene il seguente impianto teorico elettrodinamico:

| | |
|----------------------|--|
| $\nabla \cdot B = 0$ | $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ |
|----------------------|--|

| | |
|-----------------------------|----------------------|
| $\nabla \times B = \mu_0 J$ | $\nabla \cdot J = 0$ |
|-----------------------------|----------------------|

| | |
|------------------------------|------------------|
| $J = \sigma(E + u \times B)$ | $f = J \times B$ |
|------------------------------|------------------|

Si noti come $\nabla \cdot J = 0$ sia in realtà dipendente dalle altre equazioni, tuttavia la si é riportata per completezza.

1.5.2. Forma ridotta equazione di Navier-Stokes ed equazione di Beltrami

Supposto il fluido newtoniano ed incompressibile, le implicazioni dei paragrafi precedenti sulle forze elettromagnetiche portano alla seguente equazione della dinamica del fluido:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = J \times B - \nabla p + \mu \nabla^2 u \quad (1.48)$$

Nella MHD, piuttosto che con la velocità v , è spesso più proficuo lavorare con la vorticità $\xi := \nabla \times u$.

Esplicitando nella 1.7 la forma delle forze di volume, i.e. la forza di Lorentz volumetrica, applicando le condizioni di incompresibilità e le identità vettoriali $\nabla \times (u \times \xi) = u \nabla \cdot \xi - \xi \nabla \cdot u + \nabla u \cdot \xi - \nabla \xi \cdot u$ e $\nabla \cdot (\nabla \times \xi) = 0$, si ottiene:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \nabla \times (u \times \xi) + \nabla \times (J \times B) / \rho + \nu \nabla^2 \xi \quad (1.49)$$

la quale rappresenta l'equazione evolutiva per la vorticità, specializzata per l'applicazione alla MHD.

1.5.3. Termodinamica

Per quanto riguarda l'espressione in forma termica del primo principio della Termodinamica, si noti come essa, supposta ρ costante e nota, fornisca di fatto unicamente una relazione tra quest'ultima variabile e la temperatura θ , che non compare in altre equazioni. Di conseguenza, alla stregua di quanto fatto con la legge di Gauss, è possibile semplicemente non considerare la relazione fornita dal primo principio; infatti, essendo una relazione tra ρ e θ , essa risulta utile solamente nel caso si sia interessati alla valutazione della temperatura.

1.5.4. L'equazione dell'induzione

Si riporta ora una delle equazioni fondamentali della Magnetofluidodinamica, la cosiddetta *equazione dell'induzione*, più propriamente detta *equazione di avvezione-diffusione per il campo d'induzione magnetica*.

Combinando, nell'ordine, l'equazione di Faraday, la legge di Ohm e di Ampére:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times E = -\nabla \times [J/\sigma - u \times B] = \nabla \times [u \times B - \nabla \times B / \mu_0 \sigma]$$

e sfruttando , essendo B solenoidale, la validità di $\nabla \times \nabla \times B = -\nabla^2 B$, si ottiene:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (u \times B) + \lambda \nabla^2 B \quad (1.50)$$

dove $\lambda := 1/(\mu_0 \sigma)$ è detta *diffusività magnetica* (come ogni diffusività, misurata in m^2/s).

La discussione e le implicazioni derivanti da quest'equazione verranno esposte e trattate nel paragrafo 1.8; la sua precoce presentazione è dovuta alla scelta di introdurre tutti i parametri adimensionali nel paragrafo 1.6.

1.6. Gruppi adimensionali

Nella letteratura della MHD, sono quattro i principali gruppi adimensionali che ricorrono con frequenza. Tre di loro rappresentano il rapporto tra le intensità di diversi termini di forza della 1.48, mentre il quarto riguarda la 1.50.

Il primo di essi é il noto *numero di Reynolds* (Re):

$$Re := ul/\nu$$

dove l é una lunghezza caratteristica del moto ed u una velocitá caratteristica. Come ben noto, esso rappresenta il rapporto tra le forze d'inerzia, i.e. $(\nabla u) \cdot u$, e quelle viscose, i.e. $\nu \nabla^2 u$.

Il secondo gruppo adimensionale é il cosiddetto *parametro d'interazione* (N):

$$N := \sigma B^2 l / \rho u = l / u \tau$$

dove τ é detto *tempo di smorzamento magnetico*. Quest'ultimo é apprezzabile nei casi in cui J sia principalmente composta dal termine di Lorentz della legge di Ohm. N rappresenta il rapporto tra la forza di Lorentz per unitá di massa $J \times B / \rho$ e quella d'inerzia.

Il terzo parametro adimensionale é chiamato il *numero di Hartmann* (Ha):

$$Ha := (N Re)^{1/2} = Bl(\sigma / \rho \nu)^{1/2}$$

é una combinazione di Re ed N e rappresenta il rapporto tra la forze di Lorentz e le forze viscose. Il quarto ed ultimo parametro é detto *numero di Reynolds magnetico* (Rm):

$$Rm = ul / \lambda = \mu \sigma u l$$

dá un indicazione del rapporto di forza tra i termini di adduzione e diffusione nell'equazione dell'induzione 1.5.

La scelta delle dimensioni caratteristiche dev'essere eseguita con cura ed attenzione. In ogni caso, l'utilitá dei parametri adimensionali é indiscussa; in molti casi, essi consentono di semplificare notevolmente le equazioni attraverso la riduzione dei parametri indipendenti dai quali dipende la soluzione fisica (si esaltano i termini dinamicamente rilevanti delle equazioni).

Si riportano ora le forme adimensionali delle equazioni 1.50 ed 1.48, ottenute secondo il consueto procedimento di adimensionalizzazione:

$$\frac{\partial B'}{\partial t'} = \nabla' \times (u' \times B') + \frac{1}{Rm} \nabla'^2 B' \quad (1.51)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + (\nabla' u') u' = NJ' \times B' - \nabla' p' + \frac{1}{Rm} \nabla'^2 u' \quad (1.52)$$

1.7. Gli sforzi di Maxwell

Questa sezione è interamente dedicata alla caratterizzazione ed all'approfondimento della forza di Lorentz.

Utilizzando la legge di Amperé è possibile riscrivere la forza di Lorentz unicamente in funzione di B .

Si parte dall'identità vettoriale $\nabla(B^2/2) = (\nabla B)B + B \times \nabla \times B$; inserendo la legge di Ampère semplificata $\nabla \times B = \mu_0 J$ si ottiene:

$$J \times B = \nabla \left(\frac{B}{\mu_0} \right) B - \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \quad (1.53)$$

Il secondo termine nella 1.53 è completamente analogo a $-\nabla p$; è infatti irrotazionale e di conseguenza non fornisce contributi all'equazione di Beltrami. Nei flussi che non presentano superfici libere esso contribuisce unicamente all'aumento della pressione.

Per queste ragioni $B^2/2\mu_0$ è chiamato *pressione magnetica* ed in molti casi presenta scarsa significatività dinamica.

Il primo termine è invece equivalente ad un insieme di sforzi fittizi, agenti sulla superficie degli elementi fluidi.

Questo può essere provato agevolmente integrando il termine su un arbitrario volume V , sfruttando il teorema di Gauss e la solenoidalità di B nella relazione vettoriale $\nabla \cdot (B_i B) = B \cdot \nabla B_i + B_i \nabla \cdot B$ (ove si è usata la notazione indiciale):

$$\int_V [B \cdot \nabla (B_i/\mu_0)] dV = \oint_{\partial V} (B_i/\mu_0) B \cdot \hat{n} dS \quad (1.54)$$

L'integrale di superficie a destra della 1.54 è uguale all'effetto cumulato del sistema di sforzi dato del *tensore delle tensioni elettrodinamico* $B_i B_j / \mu_0$, del tutto analogo a quello fluidodinamico, agente sulla superficie di V . L'equazione 1.54, inoltre, suggerisce come tale distribuzione superficiale di sforzi sia equivalente all'effetto integrato della forza di volume $\nabla(B/\mu_0)B$; dovendo questo essere vero \forall arbitrario V , ciò implica la completa equivalenza meccanica dei due termini. Di conseguenza, si può sostituire la forza di Lorentz volumetrica $J \times B$ con un *tensore delle tensioni elettrodinamico fittizio* T^e tale che:

$$T_{ij}^e = \tau_{ij}^e = (B_i B_j / \mu_0) - (B^2 / 2\mu_0) \delta_{ij} \quad (1.55)$$

Gli elementi del tensore elettrodinamico sono chiamati *sforzi di Maxwell-Faraday* e la loro utilità risiede nel possesso di poter rappresentare l'effetto complessivo di una forza di volume (forza di Lorentz) in maniera sintetica attraverso un insieme di soli sforzi superficiali.

Un'ulteriore utile rappresentazione della forza di Lorentz si ottiene scomponendo il termine $(\nabla B)B$ lungo il versore normale e_n e tangente e_t alla linea di campo di B .

In particolare:

$$(\nabla B)B = |B| \frac{\partial |B|}{\partial s} e_t - \frac{B^2}{R} e_n$$

dove s è un'ascissa curvilinea misurata lungo le linee di campo di B ed R è il raggio di curvatura locale delle linee stesse.

Inserendo l'espressione all'interno della forza di Lorentz volumetrica si ottiene:

$$J \times B = \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) e_t - \frac{B^2}{\mu_0 R} e_n \right] - \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \quad (1.56)$$

In conclusione, in un fluido incompressibile e newtoniano, considerato un generico tubo di flusso magnetico, l'azione della forza di Lorentz può essere interpretata sia come sforzi tensionali agenti al suo estremo (figura 1.1-a), che attraverso delle forze tangenziali e normali, in ogni punto, al tubo stesso (figura 1.1-b). In questo senso, le linee di campo si comportano come delle corde elastiche in tensione.

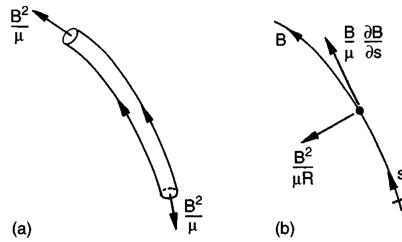


Figura 1.1: Interpretazioni dell'azione della forza di Lorentz sulle linee di campo magnetiche.

In seguito si caratterizzeranno delle casistiche nelle quali è possibile ritenere le linee di campo "congelate" all'interno del fluido; supposto ciò, è ragionevole pensare che le deformazioni delle linee di campo magnetico avvengano in concomitanza con quelle materiali. Si pensi ad esempio al caso in cui si provasse a spingere una regione fluida ad alta conducibilità (il che, come si vedrà in seguito, assicura il congelamento delle linee di campo) attraverso un campo magnetico esterno (figura 1.2). È intuitibile come il passaggio del fluido debba trascinare le linee di campo con esso ed è pertanto ipotizzabile la generazione di oscillazioni (le cosiddette *onde di Alfvén*, di cui si parlerà in seguito) dovute al ritorno elastico delle linee di campo.

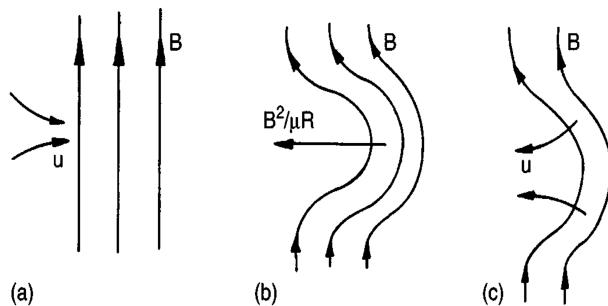


Figura 1.2: Passaggio di un fluido ad elevata conducibilità attraverso un campo magnetico esterno

1.8. Cinematica magnetofluidodinamica: avvezione e diffusione del campo d'induzione magnetico

Si considera, ora, una metà dei fenomeni d'accoppiamento tra B ed u . In particolare si tratterà l'influenza di u su B , senza porsi il problema della provenienza del campo di velocità o della contoreazione della forza di Lorentz sul fluido. Di fatto, ciò significa considerare u come un campo prescritto, tralasciando l'equazione di Navier-Stokes ed interessandosi unicamente all'interazione tra u e le equazioni di Maxwell.

Ci si riferisce a quest'approccio indicandolo come *cinematica magnetofluidodinamica*.

Innanzitutto, si noti la completa analogia tra l'equazione dell'induzione 1.50 e la 1.49 (scritta in assenza della forza di Lorentz):

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (u \times B) + \lambda \nabla^2 B$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \nabla \times (u \times \xi) + \nu \nabla^2 \xi$$

Ciò suggerisce che molti dei teoremi relativi alla vorticità siano applicabili anche al campo d'induzione magnetico e, pertanto, la loro dinamica sia del tutto simile (ad esempio B diffonde in maniera del tutto analoga alla vorticità). In realtà tale affermazione dev'essere effettuata con cautela, poiché ξ è legata ad u in maniera differente da come lo è B .

1.8.1. Diffusione

Per $u = 0$ la 1.50 diviene:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \lambda \nabla^2 B \quad (1.57)$$

del tutto analoga all'equazione di diffusione del calore,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \nabla^2 \theta \quad (1.58)$$

Di conseguenza, il campo d'induzione magnetica diffonde attraverso un mezzo ad una velocità finita; ciò significa che non è possibile imporre istantaneamente una distribuzione di B attraverso un mezzo, bensì è necessario specificarne i valori al contorno ed "aspettare" che esso diffonda. In completa analogia con la diffusione del calore, si verifica come B diffonda ad una distanza dell'ordine di $\sqrt{\lambda t}$, in un tempo t .

1.8.2. Avvezione nei conduttori ideali

1.8.2.1. Teorema di Alfvén

Si consideri ora il caso opposto, nel quale sia $\lambda = 0$ ed u sia finita, come per fluidi ad elevata conducibilità.

Stabilendo ancora una volta l'analogia tra vorticité e campo d'induzione magnetico:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (u \times B) \quad (1.59)$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \nabla \times (u \times \xi)$$

é possibile comprendere immediatamente i due enunciati noti con il nome complessivo di *Teorema di Alfvén*:

1. *"Gli elementi fluidi che giacciono su di una linea di campo ad un qualche istante di tempo iniziale, continuano a giacere su tale linea per tutti i tempi successivi, i.e. le linee di campo sono congelate all'interno del fluido"*
2. *"Il flusso magnetico relativo ad un qualsiasi circuito materiale è costante"*

Infatti, 1. é del tutto analogo alla *legge di Helmholtz*, mentre 2. al *teorema di Kelvin*. Il fenomeno di trasporto delle linee di campo magnetico ad opera del fluido é detto *avvezione del campo d'induzione magnetico*.

Il congelamento del campo magnetico é un fenomeno di cruciale importanza nell'astrofisica (nella quale solitamente R_m é elevato), laddove tale fenomeno consente di spiegare l'origine del campo magnetico posseduto da molte stelle. L'analogia tra ξ e B é presente anche per quanto riguarda la possibilità di elongazione dei tubi di flusso. Infatti, nel caso di flussi tridimensionali, ovunque sia presente una densificazione delle linee di campo si ha anche un'intensificazione di B .

In questo caso l'analogia tra vorticité e campo magnetico é, però, unicamente matematica: mentre nella dinamica della vorticité tale fenomeno é dovuto alla conservazione del momento angolare, nel caso del campo magnetico discende dalla combinazione della legge di conservazione della massa e del flusso magnetico (figura 1.3). Se un tubo di flusso viene allungato, la sezione decresce e di conseguenza B cresce per conservarne il flusso.

1.8.2.2. Le macchie solari

Si riporta ora un fenomeno che puó essere giustificato in parte dalla teoria trattata precedente, e fornisce un esempio di congelamento del campo magnetico ed elongazione dei tubi di flusso. Se si guarda il Sole attraverso del vetro oscurato é possibile distinguere piccole macchie nere, presenti sulla sua superficie; tali macchie presentano una vita tipica dell'ordine dei giorni, appaiono in coppia e prevalentemente sul piano equatoriale ed hanno un diametro di circa $10^4 km$. La superficie del Sole ha un aspetto granulare, dovuto allo stato di turbolenza convettiva cui é soggetto il suo strato piú esterno (spesso circa $2 \times 10^5 km$), il

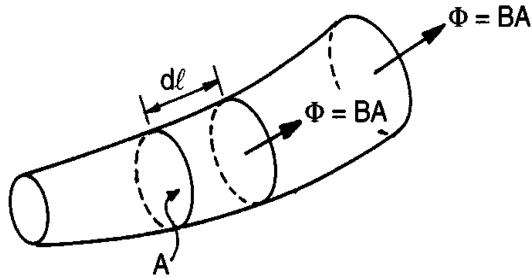


Figura 1.3: Elongazione di un tubo di flusso che provoca un incremento di B

quale é composto da celle di convezione analoghe a quelle di Bénard. Nei punti nei quali il fluido solare sale in superficie il sole appare brillante, altrimenti nero. La velocitá tipica di convezione nelle celle é di 1 km/s , che porta ad una stima di $Re \sim 10^{11}$ e di $Rm \sim 10^8$.

Il campo magnetico superficiale del Sole é dell'ordine del Gauss, come quelle terrestre; tuttavia, vista la grandezza di Rm , tale campo magnetico tende ad essere congelato nella zona convettiva. La rotazione differenziale su grande scala fa sí che il campo si intensifichi (tramite l'elongazione dei tubi di flusso) azimutalmente. La pressione all'interno dei tubi di flusso é minore di quella presente nell'ambiente convettivo, essenzialmente perché la forza di Lorentz é diretta radialmente al tubo. Di conseguenza la densitá é relativamente piccola ed il tubo di flusso risente di una forza di galleggiamento, che porta i tubi di flusso piú piccoli (instabili) verso la superficie. Le macchie solari si formano in corrispondenza dell'intersezione tra tubo e superficie, dove il campo magnetico dei tubi di flusso sopprime, localmente, il moto convettivo, raffreddando il fluido (figura 1.4).

Tutto il fenomeno é possibile grande al parziale congelamento del campo magnetico all'interno del fluido, che produce il necessario innalzamento dello stesso, necessario alla comparsa delle forze di galleggiamento.

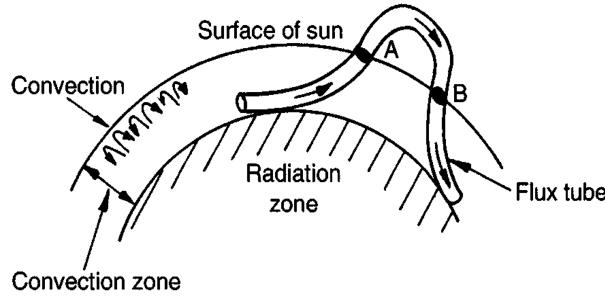


Figura 1.4: Rappresentazione schematica della formazione delle macchie solari

1.8.3. Convezione

La *convezione* rappresenta il fenomeno risultante dalla combinazione di avvezione e diffusione.

L'equazione della convezione per B è la 1.50:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (u \times B) + \lambda \nabla^2 B$$

Per semplicità, si considerano flussi bidimensionali, per i quali i fenomeni d'elongazione dei tubi di flusso non sono presenti. In questi casi è conveniente lavorare con la *funzione flusso* per B , A , tale che $B = (\partial A / \partial y, -\partial A / \partial x, 0)$ e con la *funzione di corrente* per u , ψ , tale che $u = (\partial \psi / \partial y, -\partial \psi / \partial x, 0)$. Si noti come $B = \nabla \times (A \hat{e}_z)$, di conseguenza $A \hat{e}_z$ coincide con il *potenziale vettore* di B . Inserendo l'espressione della funzione di flusso nell'equazione dell'induzione si giunge all'equazione scalare:

$$\frac{DA}{Dt} = \lambda \nabla^2 A \quad (1.60)$$

Si noti come le curve ad A costante rappresentino linee di campo (B è ortogonale al gradiente di A). Ciò detto, si riportano brevemente alcuni esempi caratteristici di convezione magnetica.

1.8.3.1. Trascinamento del campo

Dall'equazione 1.60 si nota ancora una volta la totale analogia tra A e θ . Un fenomeno rappresentativo della convezione di B è dato da un flusso bidimensionale di un fluido con modesta conducibilità, che attraversa un filo sottile percorso da corrente (considerato infinitesimo ed ortogonale al piano del foglio).

Il fenomeno é descritto dalla figura 1.5. Si evidenzia come nei pressi del filo, dove $Rm \ll 1$, il fenomeno preponderante sia la diffusione, mentre a distanza sufficiente, dove $Rm \gg 1$, predomini l'avvezione. Si evita la trattazione matematica della soluzione, che coinvolge le funzioni di Bessel, in quanto il fenomeno risulta essere notevolmente intuitivo.

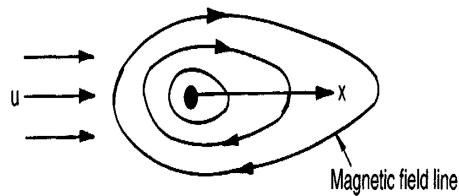


Figura 1.5: Esempio di trascinamento del campo

1.8.3.2. Espulsione del flusso

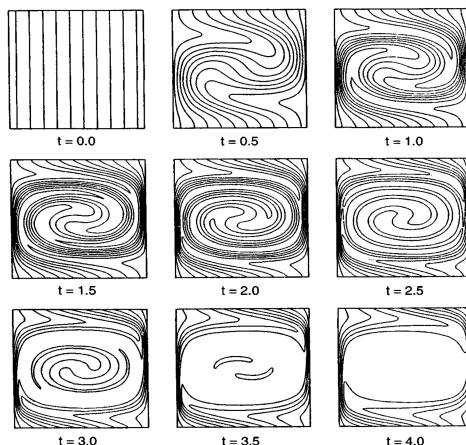


Figura 1.6: Espulsione del campo provocata da un vortice orario

Il fenomeno dell'espulsione del flusso non é nient'altro che il teorema di Prandtl-Batchelor applicato al potenziale vettore A (il flusso é bidimensionale e quindi A coincide con il potenziale vettore), invece che ad ξ . Il teorema afferma che un flusso laminare bidimensionale ad alto Re e con linee di corrente chiuse deve avere vorticité uniforme.

Analogamente, considerando un flusso laminare bidimensionale ad alto Rm e

con linee di corrente chiuse, si verifica che il potenziale assume valore uniforme, i.e. il campo d'induzione magnetica è nullo.

Quando Rm è grande si ha che A è quasi costante lungo le linee di corrente; tuttavia, una piccola ma finita diffusione annichilisce i gradienti non paralleli alla corrente di A , finché quest'ultimo non diviene perfettamente uniforme ($B = 0$). È infatti teoricamente sufficiente una diffusività λ infinitamente piccola, ma comunque diversa da zero, per eccitare fenomeni d'adduzione, che smorzano progressivamente il campo d'induzione magnetica interno alle linee di corrente chiuse. Si omette la dimostrazione dell'equivalente MHD del teorema di Helmholtz per questioni di brevità. La figura 1.6 mostra l'evoluzione del suddetto fenomeno in un campo d'induzione inizialmente uniforme, eccitato da un vortice orario. La figura 1.7 mostra la distorsione e l'espulsione di un campo magnetico per rotazione differenziale.

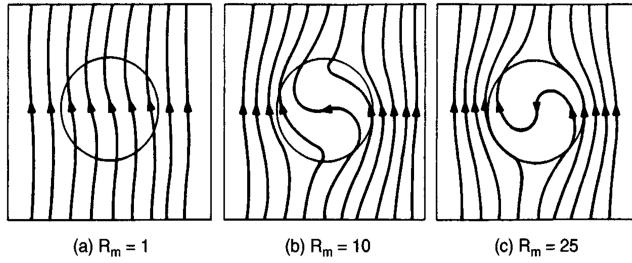


Figura 1.7: Distorsione ed espulsione del campo provocata da rotazione differenziale

1.8.3.3. Generazione azimutale di campo dovuta a rotazioni differenziali

Questo è un fenomeno rilevante soprattutto per quanto concerne l'astrofisica, o più in generale il moto rotatorio di fluidi permeati da campi magnetici. Ad esempio, sembra che il Sole non ruoti alla stessa velocità al variare della latitudine. Si consideri una stella rotante (non uniformemente) che possegga un campo magnetico poloidale, i.e. $B_p(r, z) = (B_r, 0, B_z)$ in coordinate cilindriche. Si suppona, inoltre, che la stella ruoti più velocemente all'equatore che ad i poli, con $u = (0, \Omega(z)r, 0)$. Sfruttando il teorema di Alfvén, si deduce che le linee di campo poloidali tenderanno ad essere trasportate, come mostrato in figura 1.8. Le linee di campo si distorceranno finché la diffusione generata non equilibrerà gli effetti del trascinamento del campo. In questo modo si è generata un componente di campo magnetico azimutale non nulla.

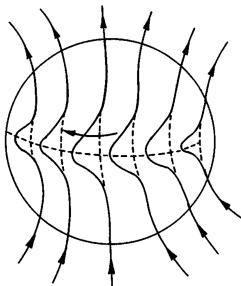


Figura 1.8: Distorsione ed espulsione del campo provocata da rotazione differenziale

1.8.3.4. Riconnessione magnetica

Infine si accenna ad un'ulteriore fenomeno magnetofluidodinamico, la cosiddetta *riconnessione magnetica*. Questo avviene quando è presente una finita, seppur piccola, diffusività: si consideri un tubo di flusso circolare che per $t = 0$ giaccia in un fluido con rotazioni differenziali (figura 1.9). Nel momento in cui due rami vengono in contatto, le linee di flusso si comprimono localmente ed i gradienti di B diventano così grandi che, nonostante la piccola diffusività magnetica, si eccitano rilevanti fenomeni di diffusione. Il risultato di tutto ciò porta alla connessione delle linee di campo ed alla formazione di due tubi di flusso circolari, di dimensioni inferiori.

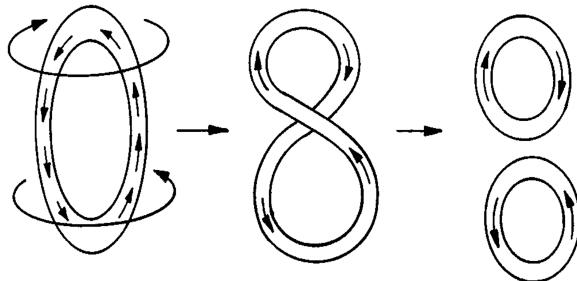


Figura 1.9: Divisione e riconnessione di un tubo di flusso, provocata da rotazione differenziale

Questo fenomeno risulta essere molto importante nella *Magnetofluidodinamica solare* ed in particolare nella teoria delle eruzioni solari, dove nonostante i grandi valori di Rm , le riconnessioni dei tubi di flusso rivestono un ruolo di primo piano.

1.9. Dinamica a basso numero di Reynolds magnetico

Nella sezione 1.8 si è discusso l'effetto del moto del fluido sul campo d'induzione magnetica, senza preoccuparsi della controreazione di B su u . In questa sezione, invece, si considera il problema inverso, cioè l'influenza di B sul campo di velocità. Si formula l'ipotesi che la perturbazione, per così dire, di "contro-controreazione" del campo B ad opera di u sia del tutto trascurabile. Ciò, di fatto, significa studiare l'effetto di un prescritto campo d'induzione magnetica esterno su u . Affiché la suddetta ipotesi sia valida è necessario che il numero di Reynolds magnetico Rm sia piccolo, ossia

$$Rm = ul/\lambda = \mu_0\sigma ul \ll 1 \quad (1.61)$$

la quale, in realtà non è un'ipotesi eccessivamente restrittiva, applicabile in gran parte dei casi d'interesse per la magnetoidrodinamica. Tipici valori di Rm in molti esperimenti di laboratorio si assestano intorno a 0.1. Un discorso a parte è da farsi per quanto riguarda la *teoria della dinamo*, dove le grandi scale spaziali portano Rm a valori intorno a 100.

Ci sono tre modi in cui un campo magnetico può alterare un campo di velocità: sopprimendo il moto caotico, eccitandolo o alterando la struttura degli strati limite. Nei seguenti paragrafi si accennerà brevemente alla fenomenologia di tutti e tre i casi.

1.9.1. Approssimazioni a basso Re

L'essenza dell'ipotesi precedentemente fatta sulla minutezza di Rm , i.e. dell'effetto di u su B , consiste nel considerare trascurabile il contributo al campo magnetico proveniente dalle correnti indotte $J \sim \sigma u \times B$ (dove si è comunque trascurato il contributo del campo elettrico, vedasi paragrafo 1.5.1.1).

Tale ipotesi è verificata agevolmente in tre casi notevoli:

- Il campo magnetico imposto è statico, il flusso fluido è indotto da qualche azione esterna e le forze viscose mantengono u minuta, in modo che valga $|u| \ll \lambda/l$.
- Il campo magnetico esterno viaggia o ruota con uniformità ed abbastanza lentamente da mantenere $|u_B| \ll \lambda/l$, inducendo un campo di velocità u , in modulo minore della velocità di B .
- Il campo magnetico esterno oscilla in maniera estremamente rapida, in modo che la profondità $\delta = (2/\mu_0\sigma\omega)$ del noto effetto pelle sia molto minore della lunghezza caratteristica l . In questo modo il campo magnetico è espulso dall'interno del conduttore e la combinazione di inerzia e frizione assicura che $|u| \ll \omega l$.

Di fatto la seconda casistica, previo cambio di sistema di riferimento, é del tutto analoga alla seconda; per questo motivo é possibile considerare B stazionario, senza perdita di generalitá.

Supponendo ciò, si riportano ora le equazioni semplificate che governano i fenomeni a basso Rm . Siano E_0, J_0, B_0 i campi che esisterebbero se $u = 0$ e, rispettivamente, siano e, j, b le perturbazioni infinitesime prodotte dalla presenza di un campo di velocitá piccolo, al limite infinitesimo. Il sistema di equazioni che governa tali campi é:

$$\nabla \times E_0 = 0 \quad J_0 = \sigma E_0 \quad (1.62)$$

$$\nabla \times e = -\partial b / \partial t \quad j = \sigma (e + u \times B_0) \quad (1.63)$$

dove si é trascurato il termine del secondo ordine $u \times B$ nella seconda delle 1.63. Inoltre l'equazione di Faraday fornisce $e \ll ub$ e di conseguenza la perturbazione nel campo elettrico e puó essere trascurata nella seconda delle 1.63. Pertanto la legge di Ohm assume la forma:

$$J = J_0 + j = \sigma (E_0 + u \times B_0)$$

Essendo in aggiunta E_0 irrotazionale, puó essere scritto in termini di un *potenziale elettrostatico* V . Conseguentemente, la versione finale della legge di Ohm diviene:

$$J = \sigma (-\nabla V + u \times B_0) \quad (1.64)$$

mentre il termine dominante della forza di Lorentz é:

$$F = J \times B_0 \quad (1.65)$$

La 1.64 e la 1.65 sono tutto ciò che serve per valutare la forza di Lorentz, principale attore nelle interazioni $B - u$, nella Magnetofluidodinamica a basso Rm . Inoltre non é necessario il calcolo di b , dato che non appare nella forza stessa e J é univocamente determinato dalla 1.64. Infatti vale che

$$\nabla \cdot J = 0 \quad \nabla \times J = \sigma \nabla \times (u \times B_0)$$

ed un campo vettoriale é univocamente determinato se la sua divergenza e rotore sono noti, insieme alle opportune condizioni al contorno.

D'ora in avanti si indicherá B_0 semplicemente con B , sottintendendo che ci si riferisce al campo d'induzione magnetica imposto.

1.9.2. Soppressione del moto

In molte applicazioni, come nella colata continua di grandi lastre d'acciaio o in misurazioni chimiche di laboratorio, si sfruttano le proprietá elettriche del fluido per sopprimere qualsiasi tipo di moto non desiderato. Per semplicitá si considererá un fluido infinitamente esteso (o circondato da una superficie elettricamente isolante) e si trascureranno le forze viscose. Sono riportati, per questioni di brevitá, due semplici esempi di questo tipo di fenomeno.

1.9.2.1. Distruzione di energia meccanica tramite dissipazione elettrica

Il moto del fluido attraverso le linee di campo magnetico induce una corrente, la quale dissipa energia cinetica per effetto Joule e la converte in calore.

Ciò può essere reso matematicamente evidente calcolando la potenza per unità di volume spesa dalla forza di Lorentz ed utilizzando le 1.64 ed 1.65:

$$(J \times B) \cdot u = -J \cdot (u \times B) = -(J^2/\sigma) - \nabla \cdot [VJ]$$

Il prodotto dell'equazione di Navier-Stokes inviscida per u fornisce invece:

$$\frac{D}{Dt} \left[\frac{1}{2} \rho u^2 \right] = (J \times B) \cdot u - \nabla \cdot [pu]$$

Combinando le due equazioni si giunge al seguente bilancio di potenza:

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho u^2 dV = -\frac{1}{\sigma} \int_V J^2 dV \quad (1.66)$$

il quale mostra come la corrente indotta dalla forza di Lorentz generi una diminuzione di energia cinetica nel fluido.

1.9.2.2. Distorsione e smorzamento di un flusso bidimensionale

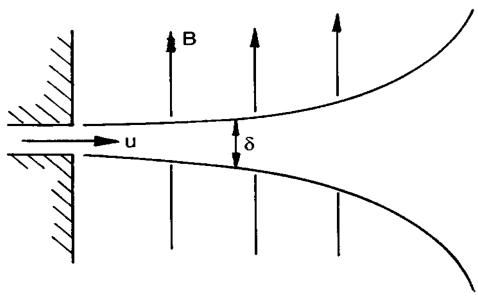


Figura 1.10: Distruzione flusso bidimensionale

La forza di Lorentz per unità di massa agente sul flusso bidimensionale rappresentato in figura 1.2 è, sfruttando 1.64:

$$F = (J \times B) / \rho = -u_\perp - \nabla V \times (\sigma B / \rho) \quad (1.67)$$

dove u_\perp rappresenta la componente normale a B e $\tau := (\sigma B^2 / \rho)^{-1}$ è il tempo di smorzamento magnetico. Dall'espressione di F si nota il carattere anisotropo della forza.

Ogni particella decelera, trascurando il contributo delle forze di pressione e di

V , su una scala temporale dell'ordine di τ ; infatti

$$\frac{Du_{\perp}}{Dt} \sim -\frac{u_{\perp}}{\tau}$$

È come se ogni elemento fluido che tentasse di attraversare una linea di campo sperimentasse una resistenza viscosa.

Come esempio di questo fenomeno si può esaminare il caso di un flusso bidimensionale sottile $u(x, y) = (u_x, u_y, 0)$, diretto lungo l'asse x e passante attraverso un campo di induzione magnetica imposto lungo la direzione y .

Eseguendo la divergenza della legge di Ohm, sfruttando la definizione di voricità e la legge di Ampère-Maxwell, si ottiene:

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot (u \times B) = B \cdot \xi = 0 \quad (1.68)$$

Di conseguenza V è costante ed in particolare, se non è presente alcun campo elettrostatico imposto dal contorno, nullo.

La terza parte dell'equazione 1.68 implica che B sia contenuto nel piano nel moto; perciò, considerando la legge di Ohm, la corrente indotta J dev'essere necessariamente diretta ortogonalmente al piano e la forza di Lorentz, $J \times B = -\sigma u_x B^2 \hat{e}_x$, agisce decelerando il flusso. Inoltre, il fluido intorno al flusso è in quiete per ipotesi e di conseguenza $\nabla p = 0$ al suo esterno. Attraverso l'ipotesi di sottilezza del flusso, cioè $\delta/l \ll 1$ con δ spessore ed l lunghezza caratteristica del getto, si può supporre che ∇p sia trascurabile anche all'interno del getto (se le linee di corrente sono teoricamente parallele e dritte non può esserci alcun gradiente di pressione significativo in direzione ortogonale). In questo particolare esempio, allora, sia le forze di pressione che il secondo termine della 1.67 sono nulli. Quest'ultima equazione si riduce a:

$$u \cdot \nabla u_x = -u_x/\tau \quad (1.69)$$

la quale è risolvibile analiticamente.

Tralasciando i passaggi matematici, la soluzione assume la forma:

$$u_x = [U - x/\tau] \operatorname{sech}^2(y/\delta) \quad (1.70)$$

che rappresenta la distribuzione di velocità nel getto fluido. Si noti come il flusso sia completamente annichilito dopo una distanza finita $L = U\tau$ (figura 1.10), anche se in realtà la soluzione cessa di essere valida nell'intorno di tale valore. In realtà, nel caso di getti tridimensionali, la rappresentazione in figura è fuorviante; infatti, un getto tridimensionale mantiene costante la propria quantità di moto e pertanto, essendo il fluido incomprimibile, esso non può arrestarsi (figura 1.11).

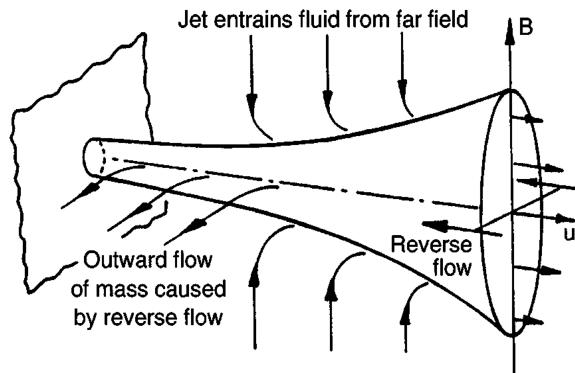


Figura 1.11: Distruzione flusso tridimensionale

1.9.3. Eccitazione del moto

In contrapposizione al paragrafo 1.9.2, si riportano ora due brevi esempi di moto di un fluido eccitato dal campo magnetico.

1.9.3.1. Campo magnetico rotante

Si consideri un fluido contenuto in un cilindro lungo, al limite infinito, di raggio R ed un campo magnetico uniforme rotante con velocità angolare Ω come mostrato in figura 1.12 . Di fatto si è in presenza di un motore magnetofluido-

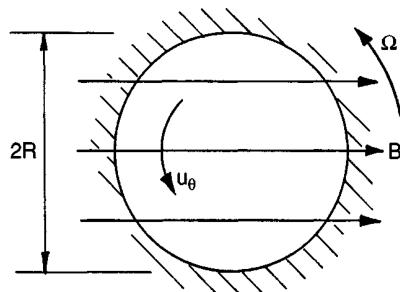


Figura 1.12: Eccitazione magnetica tramite campo rotante

dinamico, analogo ad un motore ad induzione magnetica, con il fluido che fa la parte del rotore.

Una delle applicazioni industriali di tale tecnologia é rappresentata, ancora una volta, dalla colata continua di acciaio. Per semplicitá si suppone che il rapporto di rotazione del campo sia piccolo, i.e. $\Omega R \ll \lambda/R$ e si cambia il sistema di

riferimento in modo che ruoti alla stessa velocit del campo. In questo moto B diviene stazionario ed il fluido ruota in verso orario di $u = (\Omega r - u_\theta)$. Con questi accorgimenti, si soddisfano le ipotesi della dinamica a basso Rm e pertanto:

$$\begin{aligned} J &= \sigma(-\nabla V + u \times B) \\ F &= J \times B \end{aligned}$$

Ancora una volta, la divergenza della prima equazione fornisce $\nabla^2 V = 0$, il che implica $V = cost = 0$. Per questo motivo la forza di Lorentz assume l'espressione:

$$F = J \times B = \sigma(u_\theta \times B) \times B = -\sigma B^2 u_\perp \quad (1.71)$$

che in coordinate cilindriche e:

$$F = \sigma B^2 (\Omega r - u_\theta) \cos \theta (\sin \theta, \cos \theta) \quad (1.72)$$

Tale equazione puo essere riscritta convenientemente in due sottoparti:

$$F = \frac{1}{2} \sigma B^2 (\Omega r - u_\theta) \hat{e}_\theta + \frac{1}{4} \sigma B^2 (\Omega - u_\theta/r) \nabla (r^2 \sin 2\theta) \quad (1.73)$$

Molte applicazioni ingegneristiche sono caratterizzate dalla doppia disuguaglianza:

$$u_\theta \ll \Omega R \leq \lambda/R$$

Si puo dimostrare che la 1.72 vale anche per $\Omega R \sim \lambda/R$, cosicche e possibile utilizzare la 1.72 nella forma:

$$F = \frac{1}{2} \sigma B^2 \Omega r \hat{e}_\theta \quad (1.74)$$

considerato che il secondo termine della 1.72 contribuisce solamente all'aumento di pressione e non alla dinamica del moto. Utilizzando la componente azimutale dell'equazione di Navier-Stokes stazionaria e l'espressione della legge di Newton per gli sforzi viscosi (valida solo per flussi laminari), previa integrazione, si giunge alla seguente espressione per la distribuzione di velocit:

$$u_\theta/r = \frac{\sigma B^2 \Omega}{16 \rho \nu} (R^2 - r^2) \quad (1.75)$$

che mostra l'andamento cubico della velocit. Nonostante tale equazione sia di scarsa applicabilit pratica, e comunque fenomenologicamente rilevante. La generalizzazione a flussi turbolenti e ricavabile in maniera analoga utilizzando l'espressione degli *Sforzi di Reynolds*, invece che quelli di Newton.

1.9.3.2. Moto innescato dall'inezione di corrente

Esiste un'ulteriore modalità di innescio del moto in un fluido conduttore: si può anche iniettare direttamente la corrente all'interno del fluido; la conseguente forza di Lorentz produrrà, in generale, del moto. Si riporta ora brevemente un esempio di tale tecnica.

Si consideri una vasca emisferica contenente del metallo liquido, con bordi conduttori, nel quale una corrente elettrica I sia introdotta mediante un elettrodo di raggio r_0 , a contatto con la superficie (figura 1.13).

La corrente, per la simmetria del problema, è poloidale e perciò da origine ad

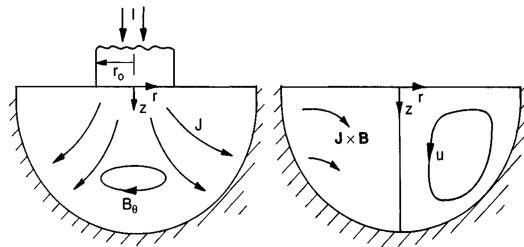


Figura 1.13: Iniezione di corrente in un mezzo conduttore

un campo magnetico azimuthale B_θ , legato alla densità di corrente J_z dalla legge d'Ampére:

$$2\pi r B_\theta = \mu_0 \int_0^r 2\pi r J_z dr \quad (1.76)$$

Sostituendo la legge di Ampére all'interno della forza volumetrica di Lorentz e sfruttando dell'algebra vettoriale si ottiene:

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}/\rho = -\nabla (B_\theta^2/2\rho\mu_0) - [B_\theta^2/\rho\mu_0 r] \hat{e}_r \quad (1.77)$$

Il termine relativo alla pressione magnetica, come più volte accennato, non contribuisce all'evoluzione della dinamica del sistema, perciò si può scrivere:

$$\mathbf{F} = \frac{B_\theta^2}{\rho\mu_0 r} \hat{e}_r \quad (1.78)$$

Com'è ovvio questa forza sarà alla base di una corrente di ricircolo che converge verso la superficie, dove B_θ è maggiore, e diverge sulla base della vasca.

1.9.4. Lo strato di Hartmann

Fin'ora si è considerata l'influenza di $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ unicamente sull'interno di un fluido, senza considerarne l'effetto di bordo. Si accenna in questo paragrafo ad un fenomeno che riveste una certa importanza nella MHD dei metalli liquidi: *Lo strato limite di Hartmann* (figura 1.14).

Il fenomeno é del tutto analogo all'equivalente fluidodinamico, con la differenza che un campo magnetico stazionario ortogonale al bordo puó completamente cambiare la natura dello strato limite modificandone, ad esempio, lo spessore. Data la completa analogia con la fluidodinamica non ci si soffrema sulla trattazione matematica, del tutto simile.

Si supponga di avere un flusso rettilineo sottile $u(y)$ su di una superficie piana

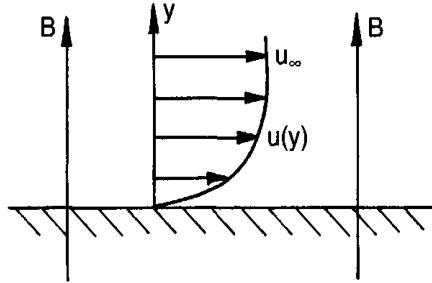


Figura 1.14: Strato di Hartmann in un flusso monodimensionale

infinita. Lontano dal muro la velocitá é supposta uniforme, pari a u_∞ , mentre sul muro si applica la consueta condizione di non slittamento. Sia presente un campo d'induzione magnetica $B\hat{e}_y$. Ora, $B \cdot \xi = 0$ e quindi la 1.68 implica che $V = 0$. La 1.71 nel caso specifico si scrive:

$$F = -\sigma B^2 u \hat{e}_x$$

cioé la solita forza di smorzamento.

L'equazione di Navier-Stokes, considerando la stazionarietá del problema e l'ortogonalitá del gradiente di velocitá rispetto alla velocitá stessa, assume la forma:

$$\rho\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sigma B^2 u = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.79)$$

La 1.79 puó essere trasformata in

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (u - u_\infty) - \frac{u - u_\infty}{\delta^2} = 0 \quad (1.80)$$

con $\delta^2 = (\rho\nu/\sigma B^2)$.

La soluzione é:

$$u = u_\infty \left[1 - e^{-y/\delta} \right]$$

del tutto analoga al caso fluidodinamico, nella quale pertanto δ assume il ruolo di spessore dello strato limite. Il caso di flusso tra due pareti piane é notevolmente simile al precedente e non si ritiene necessario riportarne la trattazione matematica. L'aspetto dello strato in quest'ultimo caso é indicato in figura 1.15.

Indicando con w la distanza tra i due piani la soluzione in questo caso può essere scritta direttamente in funzione del *numero di Hartmann* $Ha = w/\delta = Bw(\sigma/\rho\nu)^{1/2}$, che rappresenta il rapporto tra la forza di Lorentz e quelle viscole:

$$u = u_0 \left[1 - \frac{\cosh[(Ha)y/w]}{\cosh(Ha)} \right] \quad (1.81)$$

La figura 1.15 mostra la conformazione del profilo di velocità nei casi di alti

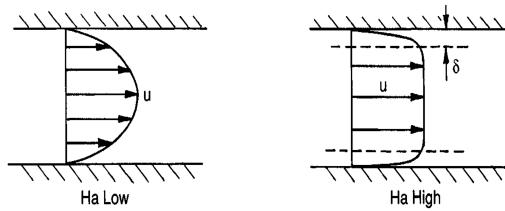


Figura 1.15: Strato di Hartmann in un flusso monodimensionale tra due piani paralleli

Ha , per cui il profilo presenta un comportamento esponenziale alla Hartmann nei pressi delle pareti ed uno uniforme al centro, e bassi Ha , per cui il profilo tende a quello di Poiseuille.

In figura 1.16-a è invece sinteticamente schematizzato il funzionamento di una pompa MHD, evidenziando l'innalzamento di pressione(p) prodotto. In figura 1.16-b si riporta infine un esempio di una particolare pompa magnetoidrodinamica che non utilizza campi elettrici esterni, in alcuni casi detta pistola magnetica, che sfrutta il campo associato alla circolazione di corrente elettrica per indurre una forza di Lorentz propulsiva all'interno di un plasma, la quale spinge il proiettile.

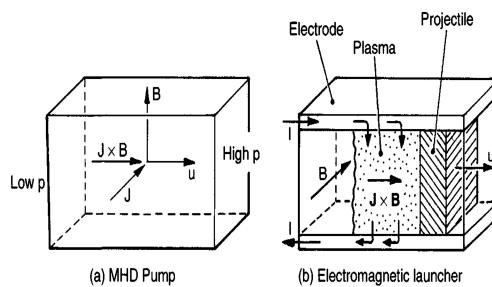


Figura 1.16: Pompa MHD (a) e pistola MHD(b)

1.10. Dinamica a medio ed alto numero di Reynolds magnetico

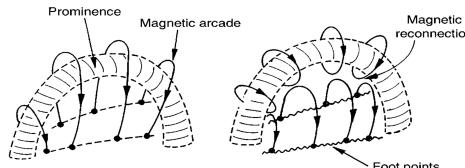


Figure 6.14 (b) A cartoon of a two-ribbon solar flare.

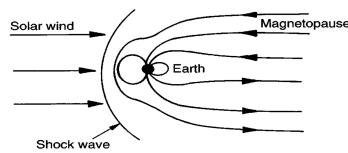


Figura 1.17: Eruzione solare (in alto) e azione vento solare sul campo magnetico terrestre (in basso)

Nei casi in cui Rm sia alto l'influenza di u su B é notevole; questa tendenza di B ad essere influenzato da u , in particolare tramite avvezione, dà vita ad un fenomeno del tutto particolare: *l'onda di Alfvén*.

Quest'ultimo é solamente uno dei numerosi fenomeni e campi caratterizzanti la dinamica a medio-alto Rm , tra i quali si annoverano anche le cosiddette *onde magnetostrofiche*, l'effetto *dinamo* e lo studio dell'equilibrio MHD.

In particolare si effettuerá un rapida trattazione di onde di Alfvén e magnetostrofiche.

Una delle proprietá notevoli dei campi magnetici nella MHD é che possono, sotto opportune condizioni, trasmettere onde inerziali trasversali, in completa analogia con una corda pizzicata. Tali onde possono essere generate e trasmesse, come precedentemente accennato, sotto la condizione che la conducibilitá σ sia grande, al limite infinita.

Non si affronteranno invece, per non appesantire eccessivamente il contenuto, la dinamo MHD e la stabilitá delle configurazioni MHD.

Basti sapere che la teoria della dinamo autoeccitata é alla base del pú accreditato modello di generazione del campo magnetico terrestre e consente di gettare luce su molti fenomeni solari, come macchie ed eruzioni solari (figura 1.17).

Come gi accennato, invece, lo studio della stabilitá delle configurazioni MHD é alla base del confinamento del plasma (figura 1.18). Per l'approfondimento di questi argomenti si rimanda a [4].

Nei seguenti paragrafi si suppor l'utilizzo di coordinate cilindriche, che ben si prestano alla rappresentazione di campi poloidali.

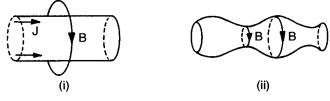


Figura 1.18: Confinamento del plasma. Principio(a) ed instabilitá (b)

1.10.1. Onde di Alfvén

Ci si riferisce, ancora una volta, alla figura 1.2. Un fluido ad alta conducibilitá, trascinato lateralmente in un campo magnetico esterno é soggetto ad una forza di richiamo B^2/μ_0 . Man mano che la curvatura cresce le forze di richiamo crescono fino ad arrestare il moto; tuttavia la forza di Lorentz, ancora presente, inverte il moto della particella e della linea di campo. La linea di campo ripasserá per la sua posizione d'equilibrio e la oltrepasserá, per via dell'accelerazione acquisita. Il processo si ripete sull'estremo opposto ed il risultato é un onda trasversale.

Si formalizza ora il tutto in linguaggio matematico. Sia B_0 il campo magnetico stazionario, perturbato da una velocitá infinitesima u ; siano j e b le conseguenti perturbazioni in, rispettivamente, J e B .

Conseguentemente i termini di ordine dominante dell'equazione dell'induzione e della legge di Ampére sono, rispettivamente:

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \nabla \times (u \times B_0) + \lambda \nabla^2 b$$

$$\nabla \times b = \mu_0 j$$

Rotorizzando la prima equazione, inserendo la seconda ed effettuando delle manipolazioni vettoriali si giunge a:

$$\frac{\partial j}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \xi) B_0 + \lambda \nabla^2 j \quad (1.82)$$

Analogamente, trascurando il termine "quadratico" in u della derivata materiale nell'equazione di Navier-Stokes, si giunge a:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = j \times B_0 - \nabla p + \rho \nu \nabla^2 u \quad (1.83)$$

la quale porta all'equazione per la vorticitá:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{1}{\rho} (\nabla j) B_0 + \nu \nabla^2 \xi \quad (1.84)$$

Eseguendo la derivata temporale di entrambi i membri e sostituendo a $\partial j / \partial t$ l'espressione fornita dalla 1.82, previa manipolazione algebrica, si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho \mu_0} (\nabla^2 \xi) B_0 + (\lambda + \nu) \nabla^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) - \lambda \nu \nabla^4 \xi \quad (1.85)$$

Ora, si cercano soluzioni per onde piane nella forma:

$$\xi \sim \xi_0 \exp [i(k \cdot x - 2\pi f t)]$$

(dove il vettore k é il *numero d'onda*). Sostituendo quest'espressione nella 1.85 si ottiene la relazione di dispersione:

$$2\pi f = -[(\nu + \lambda) k^2/2] i \pm \left[B_0^2 k_{//}^2 / (\rho \mu_0) - (\nu - \lambda)^2 k^4/4 \right]^{1/2} \quad (1.86)$$

con $k_{//}$ componente parallela a B_0 di k . Nel caso di fluido perfetto, i.e. $\lambda = \nu = 0$, si ottiene:

$$2\pi f = \pm v_a k_{//} \quad (1.87)$$

dove $v_a = \frac{B_0}{\sqrt{\rho \mu_0}}$ é la cosiddetta *velocitá di Alfvén*. La 1.87 rappresenta la propagazione di onde inerziale trasversali con velocitá di fase v_a .

Nel caso $\nu = 0$ e λ sia piccolo ma finito la 1.86 si scrive, trascurando i termini di ordine superiore:

$$2\pi f = -(\lambda k^2/2) i \pm v_a k_{//} \quad (1.88)$$

la quale rappresenta un'onda piana che si propaga con velocitá v_a , smorzata da una dissipazione ohmica (termine immaginario).

Questo tipo di onda fornisce una buona approssimazione di quanto accade nelle stelle.

Infine, se Rm é piccolo, i.e $\nu = 0$ e $\lambda \rightarrow \infty$ si ottengono le equazioni di dispersione:

$$2\pi f = -i\tau^{-1} k_{//}^2/k^2 \quad (1.89)$$

$$2\pi f = -i\lambda k^2 \quad (1.90)$$

La 1.90 é di scarso significato e rappresenta un'onda non oscillatoria smorzata rapidamente dalla dissipazione, mentre la 1.89 rappresenta un'onda non oscillatoria, ma smorzata lentamente dalle dissipazioni ohmiche (τ , come noto, é usualmente $\sim 10^{-18} s$). La 1.89 e la 1.90 caratterizzano la maggior parte dei fenomeni concernenti la MHD dei metalli liquidi.

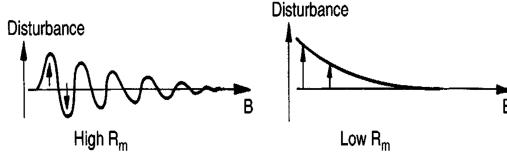


Figura 1.19: Onde di Alfvén smorzate ad alto Rm (sinistra) e basso Rm (destra)

I casi della 1.88 e della 1.89 sono rappresentati in figura 1.19. Le onde di Alfvén rivestono un ruolo di primo piano nella MHD astrofisica, dove forniscono un modello efficace per la propagazione di energia e momento.

1.10.2. Onde magnetostrofiche

Esiste un secondo tipo moto ondoso inerziale sostenibile tramite campi magnetici: quello causato dalle cosiddette *onde magnetostrofiche*.

Esse coinvolgono sia effetti magnetici che rotazionali. Si supponga, in aggiunta a quanto fatto nel paragrafo 1.10.1, che il fluido sia in rotazione con velocità angolare Ω e si scelga il sistema di riferimento in maniera che sia solidale al fluido rotante. Trascurando, questa volta, gli effetti dissipativi, ciò si traduce nell'aggiunta di un'accelerazione centripeta (che può non essere considerata, dato che fornisce unicamente un aumento di pressione) ed un'accelerazione di Coriolis $2u \times \Omega$. Le equazioni del moto divengono:

$$\begin{aligned}\frac{\partial b}{\partial t} &= \nabla \times (u \times B_0) \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= 2\rho u \times \Omega + j \times B_0 - \nabla p\end{aligned}$$

L'equivalente delle 1.82 ed 1.84 sono allora:

$$\begin{aligned}\frac{\partial j}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} (\nabla \xi) B_0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= 2(\nabla u) \Omega + \frac{1}{\rho} (\nabla j) B_0\end{aligned}$$

Si procede come nel paragrafo precedente, eliminando j :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 2 \left(\nabla \frac{\partial u}{\partial t} \right) \Omega + \frac{1}{\rho \mu_0} (\nabla^2 \xi) B_0$$

Nel caso di $\Omega = 0$ si ottiene la già discussa onda di Alfén non smorzata, se $B_0 = 0$ si ottengono le convenzionali onde inerziali in fluidi rotanti, mentre per

B_0 e Ω finiti, ma $f \ll |\Omega|$, si ottengono le cosiddette *onde lente*.

In questo caso, operando in maniera analoga al paragrafo precedente ed utilizzando la suddetta ipotesi, la 1.95 diviene:

$$2 \left(\nabla \frac{\partial u}{\partial t} \right) \Omega + \frac{1}{\rho \mu_0} (\nabla^2 \xi) B_0 = 0$$

Applicando l'operatore $\left(\nabla \frac{\partial}{\partial t} \omega \right)$ ed imponendo la soluzione ondulatoria (si omettono i passaggi) si arriva alla seguente equazione di dispersione:

$$2\pi f = \pm \frac{1}{\rho \mu} (B_0 \cdot k)^2 k / [2\Omega \cdot k] \quad (1.91)$$

che, se $f \ll |\Omega|$, è relativa alle onde magnetostrofiche non smorzate.

Le onde magnetostrofiche sono rilevanti nella MHD solare e geofisica, dove la forza di Coriolis assume un ruolo preponderante.

2. Conclusioni e ringraziamenti

Quest'ultima sezione conclude l'excursus dell'elaborato sul campo della *Magnetofluidodinamica*. Si sono ripercorsi tutti i modelli teorici che confluiscono in questa disciplina ed ottenuto il sistema generale MHD. Utilizzando quest'ultimo come base, si sono attuate e discusse tutte le modifiche ed approssimazioni necessarie all'ottenimento dell'impianto teorico elettrodinamico della Magnetofluidodinamica. Ottenuto il sistema d'equazioni semplificato MHD, è stato possibile iniziare la trattazione della fenomenologia, evidenziando in un primo momento gli aspetti cosiddetti "cinematici", per poi passare alla vera propria dinamica magnetofluidodinamica. Quest'ultima è la parte più ampia e rilevante della MHD; per questo motivo, e per brevità, si è trattata solamente una ristretta selezione di fenomeni, ritenuti particolarmente rappresentativi. La dinamica magnetofluidodinamica, come accennato nell'ultima sezione, fornisce una moltitudine di spunti ed osservazioni interessanti. A questo proposito, si rimanda a [3] per l'approfondimento di fenomeni e tematiche non contenute o trattate marginalmente in quest'elaborato.

Ovviamente esso non ha la pretesa di essere esaustivo nei confronti di un ambito della fisica ampio ed in continua evoluzione come la MHD, tutt'altro. Il documento è concepito con lo scopo di fornire una visione quanto più possibile generale ed ampia della Magnetofluidodinamica, cosicché un eventuale lettore possa essere in grado, dopo averlo letto, di affrontarne lo studio e l'approfondimento con relativa agevolezza.

Si ringrazia il prof. Paolo Gualtieri, relatore di questa tesi, per la disponibilità e l'aiuto fornito nella sua scelta ed impostazione; sentiti ringraziamenti sono dovuti anche all'autore di [3], cui ci si è riferito per la scrittura dei paragrafi successivi all'1.5 e da cui si sono tratte tutte le immagini inserite all'interno dell'elaborato.

Bibliografia

- [1] S. Molokov R. Moreau H.K. Moffatt. *Magnetohydrodynamics, Historical Evolutions and Trends*. Springer, 2007. Volume 80.
- [2] Mencuccini C. Silvestrini V. *Fisica, Elettromagnetismo ed Ottica*. Casa Editrice Ambrosiana, gennaio 2017. prima edizione.
- [3] P. A. Davidson. *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press, 2001.
- [4] Andreas Schafelner. *Introduction to Magnetohydrodynamics*. PhD thesis, Johannes Kepler Universitat Linz, Marzo 2016.