
Mathematisches Seminar

Klimawandel

Leitung: Andreas Müller

Matthias Baumann, Oliver Dias-Lalcaca, Matthias Dunkel
Flurina Hoby, Sebastian Lenhard, Silvio Marti, Michael Müller
Hansruedi Patzen, Melina Staub, Martin Stypinski, Nicolas Tobler
Raphael Unterer

Inhaltsverzeichnis

I Grundlagen	3
1 Wetter und Klima	5
1.1 Klima	5
1.2 Physikalische Eigenschaften des Klimasystems	6
1.2.1 Wärme, Konvektion, Kondensation	6
1.2.2 Strahlung	9
1.2.3 Erdrotation und atmosphärische Zirkulation	12
1.2.4 Periodische Einflüsse	19
1.3 Anforderungen an Klima-Modelle	20
1.3.1 Validierung von Klimamodellen	21
1.3.2 Klimageschichte der Erde	22
2 Fluiddynamik	23
2.1 Fluiddynamik	23
2.1.1 Kontinuitätsgleichung	23
2.1.2 Inkompressible Strömung	25
2.1.3 Bewegungsgleichung	25
2.1.4 Zustandsgleichungen	30
2.1.5 Boussinesq-Approximation	30
2.1.6 Inkompressible zweidimensionale Strömung	30
2.2 Lorenz-Modell	37
2.2.1 Modellbeschreibung	37
2.2.2 Grundgleichungen	40
2.2.3 Umwandlung in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem	41
2.2.4 Dimensionslose Schreibweise	43
3 Differentiagleichungen	45
3.1 Grundlagen	45
3.1.1 Autonome Differentialgleichungen	46
3.2 Gleichgewichtslösungen und kritische Punkte	47
3.2.1 Stabilität	47
3.2.2 Zeitumkehr	48
3.3 Bifurkationen eindimensionaler Systeme	48
3.3.1 Sattel-Knoten-Bifurkation	50
3.3.2 Heugabel-Bifurkation	50
3.3.3 Transkritische Bifurkation	51

3.3.4	Ein Beispiel zur globalen Mitteltemperatur	51
3.4	Linearisierung und Stabilität	53
4	Termohaline Zirkulation	55
4.1	Salinität und Dichte	55
4.2	Ein Modell für die thermohaline Zirkulation	57
4.2.1	Ein einfaches Box-Modell	57
4.2.2	Modell-Gleichungen	58
4.2.3	Antrieb der Zirkulation	58
4.2.4	Anomalie-Gleichungen	59
4.2.5	Differenzgleichungen	60
4.2.6	Zeitkonstanten	60
4.3	Dynamik der thermohalinen Zirkulation	61
4.3.1	Elimination von Prozessen mit kurzer Zeitkonstante	61
4.3.2	Eine dimensionslose Beschreibung	61
4.3.3	Gleichgewicht	62
4.3.4	Bifurkation	65
5	Zonenmodelle	67
5.1	Bilanzmodelle	67
5.2	Zonenmodelle	67
5.3	Spektrale Methoden	67
6	Fourier-Analysis	69
7	El Niño Southern Oscillation	71
7.1	El Niño	71
7.2	Oszillator-Modell	71
7.3	Rossby- und Kelvin-Wellen	71
8	Datenassimilation	73
II	Anwendungen und Weiterführende Themen	75
9	Eis	79
9.1	Abschnitt	79
9.2	Schlussfolgerung	79
10	Extreme Ereignisse	81
10.1	Abschnitt	81
10.2	Schlussfolgerung	81
11	Datenassimilation für das Lorenz-System	83
11.1	Abschnitt	83
11.2	Schlussfolgerung	83

12	Machine Learning und Klimamodelle	85
12.1	Abschnitt	85
12.2	Schlussfolgerung	85
13	Lorenz-Attraktor	87
13.1	Abschnitt	87
13.2	Schlussfolgerung	87
14	Höherdimensionales Lorenzsystem	89
14.1	Abschnitt	89
14.2	Schlussfolgerung	89
15	Achsneigung und Eiszeiten	91
15.1	Abschnitt	91
15.2	Schlussfolgerung	91
16	Klima auf anderen Planeten	93
16.1	Einführung	93
16.2	Das Klima auf dem Mars	93
16.2.1	Temperatur	93
16.2.2	Albedo	93
16.2.3	Energieerhaltungs Gleichungen	93
16.2.4	Atmosphärische Eigenschaften	93
16.3	Den Mars terraformen	94
16.3.1	Aussetzen von Treibhausgasen	94
16.4	Schlussfolgerung	94
17	3-Box-Modell der Thermohalinen Zirkulation	95
17.1	Abschnitt	95
17.2	Schlussfolgerung	95
18	Vegetation	97
18.1	Abschnitt	97
18.2	Schlussfolgerung	97
19	Numerische Lösung einer verzögerten Differentialgleichung	99
19.1	Abschnitt	99
19.2	Schlussfolgerung	99

Vorwort

Dieses Buch entstand im Rahmen des Mathematischen Seminars im Frühjahrssemester 2018 an der Hochschule für Technik Rapperswil. Die Teilnehmer, Studierende der Abteilungen für Elektrotechnik, Informatik und Bauingenieurwesen der HSR, erarbeiteten nach einer Einführung in das Themengebiet jeweils einzelne Aspekte des Gebietes in Form einer Seminararbeit, über deren Resultate sie auch in einem Vortrag informierten.

Im Frühjahr 2018 war das Thema des Seminars der Klimawandel.

Im zweiten Teil dieses Skripts kommen dann die Teilnehmer selbst zu Wort. Ihre Arbeiten wurden jeweils als einzelne Kapitel mit meist nur typographischen Änderungen übernommen. Diese weiterführenden Kapitel sind sehr verschiedenartig. Eine Übersicht und Einführung findet sich in der Einleitung zum zweiten Teil auf Seite 77.

In einigen Arbeiten wurde auch Code zur Demonstration der besprochenen Methoden und Resultate geschrieben, soweit möglich und sinnvoll wurde dieser Code im Github-Repository dieses Kurses¹ abgelegt.

Im genannten Repository findet sich auch der Source-Code dieses Skriptes, es wird hier unter einer Creative Commons Lizenz zur Verfügung gestellt. Auf der beiliegenden DVD befinden sich die Testdaten und Programme zu zwei der simulationsintensiveren Artikel im zweiten Teil.

¹<https://github.com/AndreasFMueller/SeminarKlima.git>

Teil I

Grundlagen

Kapitel 1

Wetter und Klima

US Präsident Donald Trump war schon immer ein Klimaverweigerer, wie Tweets aus der Zeit lange bevor er Präsident wurde:



Donald J. Trump 
@realDonaldTrump

Folgen

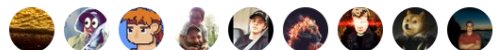


It's freezing in New York—where the hell is global warming?

 Original (Englisch) übersetzen

12:37 - 23. Apr. 2013

478 Retweets 300 „Gefällt mir“-Angaben



390



478



300



Ganz offensichtlich versteht Trump den Unterschied zwischen Wetter und Klima nicht. Ziel dieses Kapitels ist, den Unterschied zwischen Wetter und Klima zu klären. Es ist allgemein bekannt, dass auch die besten Wetterprognosen im günstigsten Fall für einige Tage zutreffen. Daher soll in diesem Kapitel auch gezeigt werden, wann trotz dieser Schwierigkeit das Klima sehr wohl langfristig modelliert und prognostiziert werden kann. Aus diesen Überlegungen wird auch klar, auf welche Aspekte des Klimasystems sich ein Klima-Modell fokussieren muss, wenn eine langfristige Prognose ermöglicht werden soll.

1.1 Klima

In der Wikipedia kann man die folgenden Definitionen für die Begriffe Wetter und Klima finden:

Definition 1.1. Als Wetter bezeichnet man den spürbaren, kurzfristigen Zustand der Atmosphäre (auch: messbarer Zustand der Troposphäre) an einem bestimmten Ort der Erdoberfläche, der unter anderem als Sonnenschein, Bewölkung, Regen, Wind, Hitze oder Kälte in Erscheinung tritt [skript:wetter].

Definition 1.2. Das Klima steht als Begriff für die Gesamtheit aller meteorologischen Vorgänge, die für die über Zeiträume von mindestens 30 Jahren regelmässig wiederkehrenden durchschnittlichen Zustände der Erdatmosphäre an einem Ort verantwortlich sind [skript:klima].

Was also Donald Trump in seinem Tweet beschrieben hat ist das Wetter. Selbst wenn die Temperatur in New York unter den Gefrierpunkt fällt, heisst das nicht, dass die mittlere Temperatur in New York über mehrere Jahre nicht doch ansteigen kann. Tatsächlich bedeutet “globale Erwärmung” nicht, dass die mittlere Temperatur an jedem Punkt der Erde zunehmen wird. Im Gegenteil ist es durchaus möglich, dass zwar die mittlere Temperatur der Erde ständig zunimmt, wie wir in den letzten Jahren auch messtechnisch nachweisen konnten, dass aber auch die Temperaturunterschiede stark zunehmen, so dass es am Ende an einzelnen Stelle der Erdoberfläche zu einer Abkühlung kommen kann. Um dieser Komplexität Rechnung zu tragen, spricht man nicht mehr von der “globalen Erwärmung”, sondern vom Klimawandel.

Auch wenn das Wetter nur sehr eingeschränkt vorhersagen lässt, bedeutet das noch lange nicht, dass das Klima nicht doch sehr genau vorhergesagt werden kann. Eine Analogie kann den Unterschied zwischen der Vorhersagbarkeit von Wetter und Klima verdeutlichen. Wenn man in einem Kochtopf Wasser zum Kochen bringt, stellt sich eine unvorhersagbare chaotische Bewegung kleiner und grosser Gasblasen ein. Es ist unmöglich vorherzusagen, wann und wo sich die nächste Blase bilden wird und welchen Weg sie an die Oberfläche des Wasser nehmen wird. Wenn wir aber nur die mittlere Temperatur betrachten, können wir aus der Heizleistung der Kochplatte, der Masse und der spezifischen Wärmekapazität des Wassers genau berechnen, welche Temperatur zu welcher Zeit im Wasser herrschen wird und wir können den Zeitpunkt exakt vorhersagen, wann das Wasser zu kochen beginnt. Die mittlere Temperatur des Wassers beschreibt das “Klima” in der Pfanne, die kleinräumigen und kurzfristigen Blasen und anderen Turbulenzen beschreiben das “Wetter”.

1.2 Physikalische Eigenschaften des Klimasystems

In diesem Abschnitt stellen wir die physikalischen Eigenschaften aller wesentlicher Komponenten des Klimasystems zusammen. Dabei geht es zunächst nur darum, die grundlegende Physik in Erinnerung zu rufen und die Naturgesetze, die die Wechselwirkungen zwischen den Komponenten beschreiben. Auf die Details der mathematischen Modellierung der zukünftigen Veränderung dieser Grössen werden wir erst später eingehen.

1.2.1 Wärme, Konvektion, Kondensation

Die wohl wichtigste Klima-Grösse ist die Temperatur. Sie drückt aus, wieviel Energie in Form von Wärme ein Körper enthält.

Wärmekapazität

Die spezifische Wärme C gibt an, wie die innere Energie sich bei einer Temperaturänderung ΔT verändert:

$$\Delta E = C \cdot \Delta T.$$

Der Körper speichert Energie in Form der thermischen Bewegung der einzelnen Atome. Schwerere Atome können bei gleicher Bewegungsgeschwindigkeit mehr Energie speichern. Stoffe mit grösserer Dichte können mehr Atome und damit auch mehr Wärmeenergie in einem kleineren Volumen unterbringen. Die spezifische Wärmekapazität c gibt an, welche Wärmekapazität ein Kilogramm eines Stoffes hat. Ein Körper der Masse m hat also die Wärmekapazität $C = cm$.

Wärmeleitung

Herrschen in einem Körper Temperaturunterschiede, ist T nicht mehr nur eine konstante, sondern eine Funktion der Koordinaten und auch der Zeit. Temperaturunterschiede werden sich ausgleichen, indem Energie von wärmeren zu kälteren Teilen des Körpers fliegt. Dies geschieht umso schneller, je grösser die Unterschiede sind. Die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T \quad (1.1)$$

beschreibt die Entwicklung der Funktion $T(x, y, z, t)$ an jedem Ort des Raumes [**skript:waermeleitung**]. Der Koeffizient κ ist eine Materialkonstante, die beschreibt, wie schnell sich die Temperaturunterschiede ausgleichen können. Ist $\kappa = 0$, folgt $\partial T / \partial t = 0$, die Temperatur ändert sich nicht, es findet keine Wärmeleitung statt.

Die rechte Seite von (1.1) kann mit dem sogenannten Laplace-Operator gemäss der folgenden Definition geschrieben werden.

Definition 1.3. *Der Operator*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

heisst der Laplace-Operator.

Die Wärmeleitungsgleichung erhält damit die Form

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T. \quad (1.2)$$

Konvektion

Wärmeleitung kann Wärmeenergie nur vergleichsweise langsam transportieren. Das einleitende Beispiel des Kochtopfs zeigt auch, wie ein effizienterer Energietransport funktionieren kann. In der Atmosphäre dehnt sich warme Luft aus. Dank der geringeren Dichte können warme Luftblasen aufsteigen und damit Wärme viel effizienter in die obere Atmosphäre transportieren als dies mit Wärmeleitung möglich wäre. Dieser Prozess heisst *Konvektion* [**skript:konvektion**].

Wir wollen den Fall eines strömenden Mediums mathematisch etwas genauer ausarbeiten. Bewegt sich das Medium mit der Geschwindigkeit \vec{v} , dann ändert sich die Temperatur des Mediums, welches sich über dem Punkt $P = (x, y, z)$ befindet. Nach der Zeit Δt befindet sich derjenige Teil des Mediums über dem Punkt P , der sich vorher über dem Punkt $P - \Delta t \cdot \vec{v}$ befand. Die Temperatur zur Zeit $t + \Delta t$ ist daher $T(P, t + \Delta t) = T(P - \Delta t \cdot \vec{v}, t)$. Die Temperaturänderung

$$\begin{aligned} T(P, t + \Delta t) &= T(P, t) + (T(P, t + \Delta t) - T(P, t)) = T(P, t) + T(P - \vec{v}\Delta t, t) - T(P, t) \\ \frac{T(P, t + \Delta t) - T(P, t)}{\Delta t} &= \frac{T(P - \vec{v}\Delta t, t) - T(P, t)}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Beim Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ wird aus der linken Seite die partielle Ableitung nach t . Die rechte Seite kann mit Hilfe der Kettenregel berechnet werden. Es wird

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial T}{\partial x}v_x - \frac{\partial T}{\partial y}v_y - \frac{\partial T}{\partial z}v_z. \quad (1.3)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite kann vektoriell mit der folgenden Definition etwas eleganter geschrieben werden.

Definition 1.4. Der vektorielle Operator

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

heißt der Nabla-Operator. Der Vektor

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \text{grad } f$$

heißt der Gradient von f .

Die Temperaturänderung in Folge der Strömung (1.3) wird

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla T. \quad (1.4)$$

Man nennt diese Temperaturänderung durch die Strömung auch *Advektion*. Die Wärmeleitungsgleichung kann damit zu einem umfassenderen Modell

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla T + \kappa \Delta T \quad (1.5)$$

zusammengefasst werden. Es ist geeignet für die Beschreibung sowohl der Atmosphäre wie auch des Wärmeaustausches in den Ozeanen.

Phasenübergänge

Um ein Kilogramm Wasser bei 20°C zu verdunsten, ist eine latente Wärme von 2480 kJ nötig. Um ein Kilogramm Luft um ein Grad zu erwärmen, sind dagegen nur 1.005 kJ notwendig. Anders herum bedeutet dies, dass eine mit Wasserdampf angereicherte Atmosphäre sehr viel mehr Energie in Form von latenter Wärme speichern kann, als allein durch die Wärmekapazität trockener Luft möglich wäre.

Wir haben damit zwei Mechanismen identifiziert, wie eingestrahlte und in der Erdkruste als Wärme gespeicherte Energie in die Atmosphäre transportiert werden kann. Einerseits kann Luft über aufgewärmten Landmassen oder dem Meer erwärmt werden und als Konvektionsströmung aufsteigen. Andererseits kann Wasser an der Oberfläche verdampft werden damit die latente Wärme in die Atmosphäre übergehen. Man nennt diese Mechanismen auch turbulente Flüsse [skript:wiefunktioniertdas].

Der Wassergehalt der Luft kann höchstens einige wenige Prozente betragen. Zwar ist die Wärmespeicherung durch Verdunstung über 2000 mal effizienter, aber weil nur wenig Wasser dafür zur Verfügung steht, übernimmt die Verdunstung doch nicht einen derart grossen Teil des Energietransports von der Oberfläche in die Atmosphäre. In der Tat finden etwa 30% des Energietransports von der Erdkruste in die Atmosphäre durch turbulente Flüsse statt, davon etwa 7% durch Konvektion und 23% durch latente Wärme [skript:wiefunktioniertdas]. Höhere Temperaturen begünstigen die Verdunstung und verschieben diesen Anteil zugunsten der latenten Wärme. Man darf also davon ausgehen, dass höhere Oberflächentemperaturen zu einem überproportional höheren Energietransport in die Atmosphäre führen.

In der Atmosphäre kann die Energie über grosse Distanzen transportiert und später wieder freigesetzt werden, wie Hurricanes und Tornados eindrucklich demonstrieren können. Damit ein Klimamodell Aussagen machen kann über das Auftreten von extremen Wetterphänomenen muss es also den Wassergehalt der Atmosphäre modellieren.

1.2.2 Strahlung

Der bedeutendste Energietransportmechanismus in der Atmosphäre ist die Strahlung. In diesem Abschnitt stellen wir die Strahlungsgesetze zusammen und studieren die Strahlungsbilanz der Atmosphären.

Schwarzkörperstrahlung

Die Strahlung der Sonne wie auch der Erde kann als Strahlung eines schwarzen Körpers modelliert werden. Ein schwarzer Körper ist ein idealisierter Körper, der alle auftretende Strahlung absorbieren kann. Er befindet sich im thermischen Gleichgewicht mit dem Strahlungsfeld, seine Strahlung hängt daher nur von der Temperatur ab.

Stefan-Boltzmann-Gesetz

Das *Stefan-Boltzmann-Gesetz* gibt Auskunft darüber, wieviel Energie insgesamt von einem schwarzen Körper abgestrahlt wird. Die gesamte Strahlung hängt natürlich von der Oberfläche A des Strahlers ab, aber die Strahlungsleistung pro Flächeneinheit hängt nur noch von der Temperatur ab. Die gesamte Strahlungsleistung ist

$$P = \sigma AT^4 \quad \text{mit} \quad \sigma = 5.670367 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}. \quad (1.6)$$

Die Strahlung der Sonne nimmt dem Quadrat der Entfernung ab. Von der Strahlungsleistung σT^4 pro Flächeneinheit der Sonnenoberfläche bleibt in der Entfernung der Erde die Leistung

$$P_{\odot} = \sigma T^4 \cdot \left(\frac{R_{\odot}}{a_{\odot}} \right)^2 \quad (1.7)$$

übrig, wobei $R_{\odot} = 6.957 \cdot 10^8 \text{m}$ der Radius der Sonne ist und $a_{\odot} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{m}$ die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne. Setzt man diese Werte und die Temperatur $T = 5778 \text{K}$ in die Gleichung (1.7) ein, erhält man

$$P_{\odot} = 1366.8 \text{W/m}^2,$$

auch bekannt als die *Solarkonstante*.

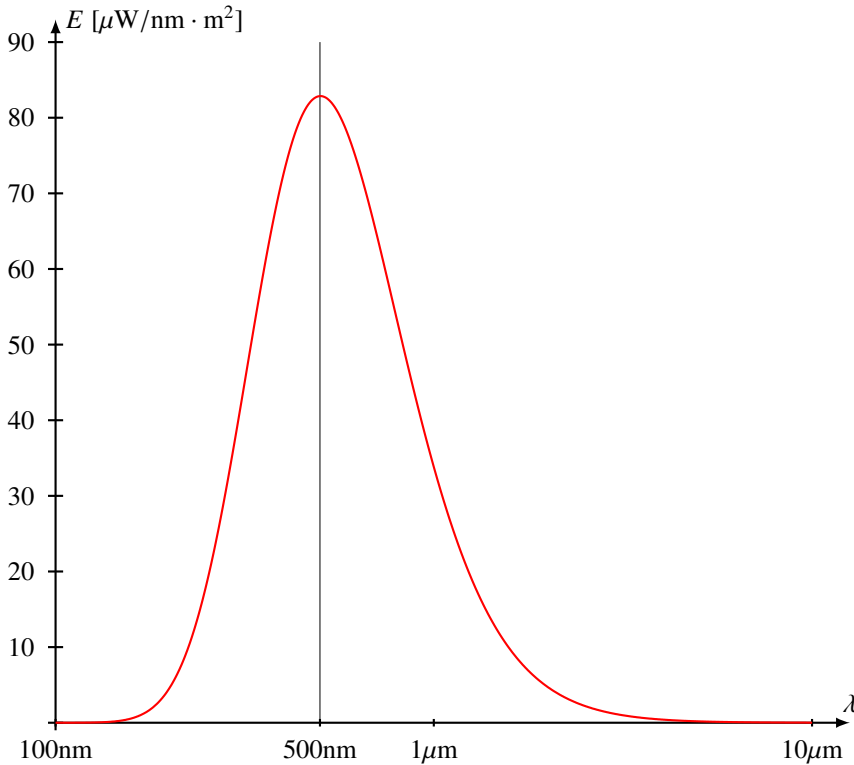


Abbildung 1.1: Plancksches Strahlungsgesetz für die Sonne

Wiensches Verschiebungsgesetz

Die Strahlungsleistung ist nicht über alle Wellenlängen gleichmässig verteilt. Das *Wiensche Verschiebungsgesetz* besagt, dass die maximale Strahlungsleistung bei einer Wellenlänge abgestrahlt wird, die umgekehrt proportional zur Temperatur ist:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T} \quad \text{mit} \quad b = 2.897 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}. \quad (1.8)$$

Für die Oberfläche der Sonne mit $T = 5778 \text{ K}$ findet man die Wellenlänge $\lambda_{\max} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 500 \text{ nm}$, dies entspricht grünem Licht. Die Strahlung der Erde mit ihrer mittleren Temperatur von 287 K hat dagegen ihr Maximum bei $\lambda_{\max} = 10 \mu\text{m}$, also im Infrarotbereich.

Strahlung und Reflektion in der Atmosphäre

Die Intensität in Abhängigkeit von der Wellenlänge wird durch das Plancksche Strahlungsgesetz

$$E(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad (1.9)$$

pro Flächeneinheit des Strahlers und pro Wellenlängeneinheit. Die Strahlungsdichte in Abhängig-

chapters/1/einfall.pdf

Abbildung 1.2: Einfluss des Einstrahlungswinkels auf die pro Flächeneinheit der Erdoberfläche einfallende Strahlungsleistung. Ein Strahlenbündel mit Querschnitt q , welches im Winkel α zur Vertikalen einfällt, bedeckt die Fläche $q / \cos \alpha$ auf der Erdoberfläche.

Material	Albedo
Frischer Schnee	0.8 – 0.9
Wolken	0.6 – 0.9
Wüste	0.3
Rasen	0.18–0.23
Wald	0.05–0.18
Wasserfläche	0.05–0.22 (winkelabhängig)
Erde	0.306
Mond	0.11

Tabelle 1.1: Albedo verschiedener Oberflächen und Himmelskörper (aus [skript:albedo])

keit von der Wellenlänge ist in Abbildung 1.1 dargestellt. Die gesamte Strahlungsleistung ist das Integral

$$P = \int_0^{\infty} E(\lambda, T) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}.$$

Man beachte aber, dass in den graphischen Darstellungen des Strahlungsspektrums eine logarithmische λ -Skala verwendet wird. Bei grossen Wellenlängen (“rechts”) wird die Kurve also in Wahrheit viel stärker ausgedehnt. Will man die Flächeninhalte unter den Kurven vergleichen, muss man die vertikale Achse mit dem Faktor λ skalieren.

Einstrahlungswinkel

Warum ist es in den Tropen wärmer als in gemässigten Breiten oder an den Polen? Die Sonne strahlt doch überall mit der gleichen Intensität.

Der Unterschied stammt natürlich vom Einstrahlungswinkel. Der Ausdruck (1.7) für P_{\odot} beschreibt die Strahlungsleistung pro Flächeneinheit, doch diese Flächeneinheit wird senkrecht auf die Ausbreitungsrichtung der Strahlung gemessen. In gemässigten Breiten und an den Polen fällt die Strahlung in viel kleinerem Winkel auf die Erdoberfläche. Die einfallende Energie verteilt sich daher auf eine grössere Fläche. Ist α der Winkel zwischen der Vertikalen und der Strahlungsrichtung, dann ist die auf einer Erdoberfläche einfallende Strahlungsdichte nur noch $P_{\odot} \cdot \cos \alpha$.

Albedo

Die Strahlung der Erde ist nicht allein die Schwarzkörperstrahlung der Erde. Sie ist überlagert von der Strahlung, die vom Erdboden oder von Wolken reflektiert wird. Die *Albedo* ist der Anteil der



chapters/1/vergleich.pdf

Abbildung 1.3: Strahlung der Sonne (rot) und der Erde (blau). Das Maximum der Strahlung der Sonne ist im sichtbaren Bereich, das Maximum der Wärmestrahlung der Erde im Infraroten.

reflektierten Strahlung, also ein Wert zwischen 0 und 1. Tabelle 1.1 stellt einige interessante Albedo-Werte von verschiedenen Oberflächen zusammen.

Die Albedo hat eine direkte Auswirkung auf das Klima, umgekehrt hängt die Albedo aber auch vom Klima ab. Nimmt die Bewölkung zu, steigt die Albedo, es erreicht weniger Strahlung die Erdoberfläche. Schneefall erhöht ebenfalls die Albedo. Umgekehrt reduziert das Abschmelzen der Polkappen oder der Schneedecke in Permafrostgebieten die Albedo, so dass mehr Strahlung von der Erdoberfläche absorbiert wird.

Strahlungsbilanz

In Abbildung 1.3 sind die Planckschen Strahlungskurve für die Sonne und Erde dargestellt. Die rote Kurve zeigt die spektrale Strahlungsleistung, die von der Sonne auf den Querschnitt πR_{\oplus}^2 der Erde eingestrahlt wird, also

$$E(\lambda, T_{\odot}) \cdot 2\pi R_{\odot}^2 \cdot \left(\frac{R_{\odot}}{a_{\oplus}}\right)^2$$

mit $T_{\odot} = 5778\text{K}$. Die dunkelblaue Kurve zeigt das Ausstrahlungsspektrum der ganzen Erde mit einer Temperatur von $T = 279\text{K}$, also

$$E(\lambda, T_{\oplus}) \cdot 4\pi R_{\oplus}^2.$$

Die Fläche unter der Kurve ist ein Mass für die gesamte Energie. Offenbar halten sich Einstrahlung und Ausstrahlung die Waage.

Die Einstrahlung kann sich zum Beispiel dann verändern, wenn mehr Strahlung reflektiert wird. Die Ausstrahlung verändert sich, wenn die Atmosphäre für infrarote Strahlung grösser wird. Wird die Atmosphäre durch erhöhte CO_2 -Konzentration für infrarote Strahlung undurchsichtiger, dann sinkt die Ausstrahlung der Erde. Damit wieder ein Gleichgewicht entsteht, muss die Temperatur der Erde sich erhöhen, damit die Ausstrahlung ebenfalls höher wird (obere hellblaue Kurve). Sinkt der Gehalt an Treibhausgasen, wird die Atmosphäre transparenter für Wärmestrahlung. Ein Gleichgewicht ist möglich bei tieferer Temperatur (untere hellblaue Kurve). Diese Abhängigkeit der Temperatur von der Transparenz der Atmosphäre für Wärmestrahlung ist bekannt als der *Treibhauseffekt*.

Tatsächliches Strahlungsspektrum

In Abbildung 1.4 ist das tatsächlich gemessene Strahlungsspektrum der Sonne dargestellt. Es fällt auf, dass Wasserdampf und CO_2 für bedeutende Absorptionsbänder verantwortlich ist, während im sichtbaren Bereich die Absorption sehr gleichmässig ist.

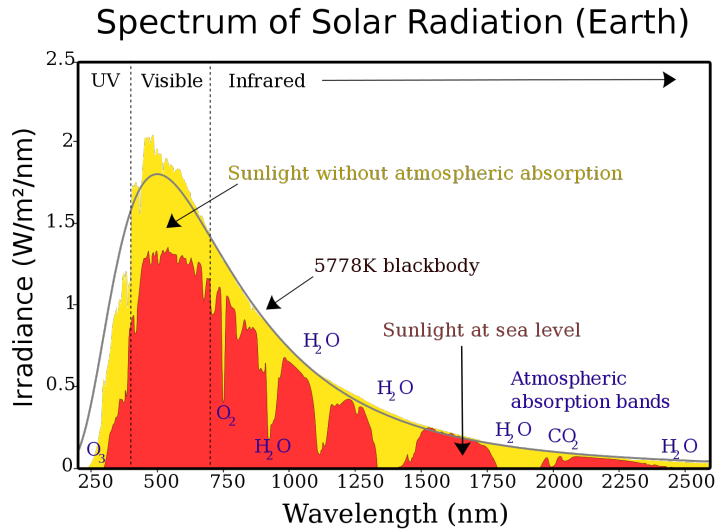


Abbildung 1.4: Tatsächliches Spektrum der Sonnenstrahlung mit (rot) und ohne (gelb) atmosphärische Absorption im Vergleich mit dem Spektrum der Schwarzkörperstrahlung [**skript:sunlight**].

1.2.3 Erdrotation und atmosphärische Zirkulation

Die Einstrahlung ist naturgemäss am grössten am Äquator, während an den Polen die Ausstrahlung überwiegt. Dies führt dazu, dass die Temperatur an den Polen tiefer ist. Der Temperaturunterschied bedeutet aber auch, dass Prozesse in der Atmosphäre Energie aus niedrigen Breiten zu den Polen transportieren. Die Temperaturunterschiede sind jedoch zu klein dafür, dass Wärmeleitung den Transport bewerkstelligen könnte. Die Energie muss daher durch Advektion (S. ??) unterstützt von latenter Wärme transportiert werden. Um den Energiehaushalt des globalen Klimasystems zu verstehen, muss man daher die globalen Strömungen in der Atmosphäre aber auch in den Ozeanen verstehen.

In Kapitel 2 werden die Grundgleichungen der Fluidodynamik besprochen. In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf eine qualitative Diskussion der globalen Zirkulation. Die globale Zirkulation unterscheidet sich von Strömungen, die in technischen Anwendungen üblicherweise studiert werden dadurch, dass sie zwar im allgemeinen langsamer ist, dafür aber ein viel grösseres Volumen und grössere Distanzen umfasst. Die Windsysteme, die für die Wetterphänomene verantwortlich sind, haben typische Abmessungen von hunderten oder sogar tausenden von Kilometern.

Druckunterschiede und Euler-Wind

Windströmungen in der Atmosphäre werden von Druckunterschieden hervorgerufen. Die Sonnenstrahlung erwärmt die Erdoberfläche und mittelbar die Atmosphäre. Die warme Luft hat geringere Dichte und steigt daher auf. Damit nimmt die Kraft ab, die die Luft auf darunterliegenden Schichten ausüben kann, es entsteht ein Unterdruck. Man nennt eine Luftströmung, die nur durch Druckunterschiede unter Vernachlässigung von Corioliskraft, Zentrifugalkraft und Reibung entsteht den *Euler-Wind*. Lokale Wind-Systeme wie Land-See-Wind oder Berg-Tal-Wind sind von dieser Art.

Coriolis-Effekt

Die Erde dreht sich in 23 Stunden 56 Minuten und 4.091 Sekunden oder einmal um sich selber. Die Drehung kann mit dem Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\Omega}$ beschreiben werden, der die Richtung der Erdachse vom Süd- zum Nordpol hat und als Länge die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = |\vec{\Omega}| = \frac{2\pi}{86164.091 \text{ s}}.$$

Ein Körper, der sich relativ zu einem mit der Erde verbundenen Koordinatensystem mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegt, erlebt eine durch die Drehung verursachte Beschleunigung

$$\vec{a} = -2\vec{\Omega} \times \vec{v}.$$

Ein Flugzeug, welches mit 880 km/h über den Nordpol fliegt, erfährt dort die Beschleunigung

$$|\vec{a}| = \left| -2 \cdot \frac{2\pi}{86164.091 \text{ s}} \cdot 244.44 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right| = 0.01782 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Diese Beschleunigung ist viel zu klein, dass sie einen wesentlichen Einfluss auf die Bahn eines Flugzeugs haben könnte. Der Luftwiderstand und die von den Steuerflächen des Flugzeugs erzeugten Kräfte und die daraus resultierenden Beschleunigungen sind um Grössenordnungen grösser. In der freien Atmosphäre wirkt auf die Luft jedoch nur die Druckkraft, so dass die Coriolis-Beschleunigung einen dominanten Einfluss bekommt.

Die grossräumige Strömung in der Erdoberfläche ist im Wesentlichen parallel zur Erdoberfläche. Daher interessiert für die Beschreibung der Wirkung des Coriolis-Effekts vor allem die Komponente der Beschleunigung parallel zur Erdoberfläche interessant. In einem Punkt B der Erdoberfläche verwenden wir daher ein Koordinatensystem in der Tangentialebene so, dass die x -Achse tangential zum Breitenkreis in B ist und die y -Achse tangential zum Längenkreis (Abbildung 1.5). Die tangentielle Geschwindigkeit wird in diesem Koordinatensystem durch die Komponenten u in U -Richtung und v in V -Richtung beschrieben.

Wir berechnen die Coriolis-Beschleunigung in diesem Koordinatensystem. Für einen Geschwindigkeitsvektor \vec{v} parallel zu V hat das Vektorprodukt $\vec{\Omega} \times V$ bereits die Richtung U , er muss also nicht mehr in die Tangentialebene projiziert werden. Der Winkel zwischen $\vec{\Omega}$ und V ist die geographischen Breite α . Die Coriolis-Beschleunigung ist daher $2\omega \sin(\alpha)u \cdot V$.

Für einen Geschwindigkeitsvektor \vec{v} parallel zu U steht das Vektorprodukt $-2\vec{\Omega} \times \vec{v}$ senkrecht auf der Erdachse. Da U und $\vec{\Omega}$ senkrecht stehen ist der Betrag der Coriolis-Beschleunigung

$$|-2\vec{\Omega} \times \vec{v}| = 2\omega u.$$

Aus Abbildung 1.6 kann man ablesen, dass die Komponente der Coriolis-Beschleunigung parallel zur Tangentialebene $2\omega u \sin(\alpha)$ ist.

Setzen wir die beiden Resultate zusammen finden wir, dass die Coriolis-Beschleunigung im U - V -Koordinatensystem

$$\underbrace{2\omega \sin \alpha}_{=f} \begin{pmatrix} v \\ -u \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

ist. Die Coriolis-Beschleunigung ist proportional zu $f = 2\omega \sin \alpha$, auch bekannt als der *Coriolis-Parameter*. Das Koordinatensystem in der Tangentialebene im Punkt B heisst auch die β -Ebene.

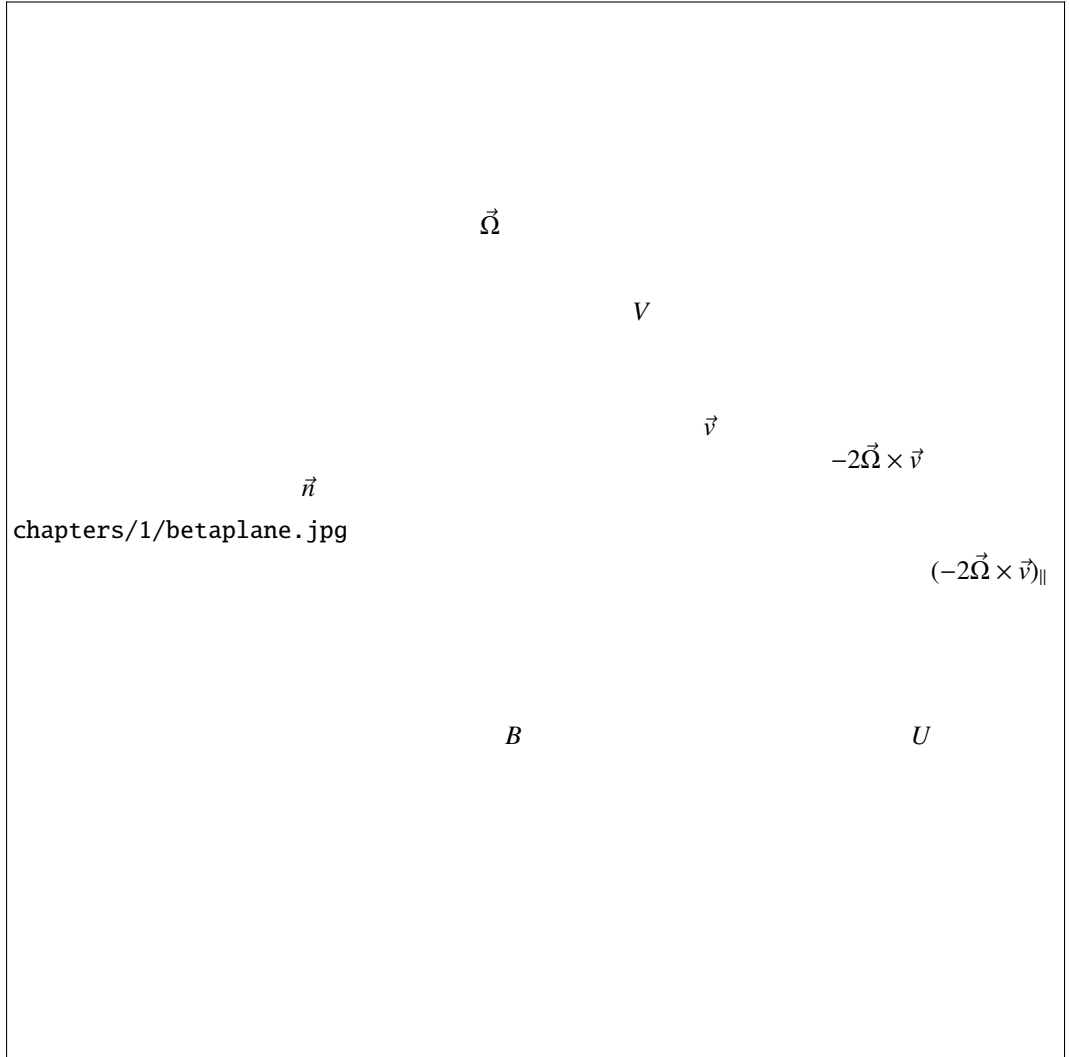


Abbildung 1.5: β -Ebene: Koordinatensystem in der Tangentialebene an die Kugel im Punkt B mit Achsen U parallel zu Breitenkreisen und V parallel zu Längenkreisen. Die Normale der Tangentialebene ist \vec{n} . Ebenfalls eingezeichnet die Coriolis-Beschleunigung $-2\vec{\Omega} \times \vec{v}$ zur Geschwindigkeit \vec{v} und die Komponente $(-2\vec{\Omega} \times \vec{v})_{\parallel}$ parallel zur Tangentialebene.

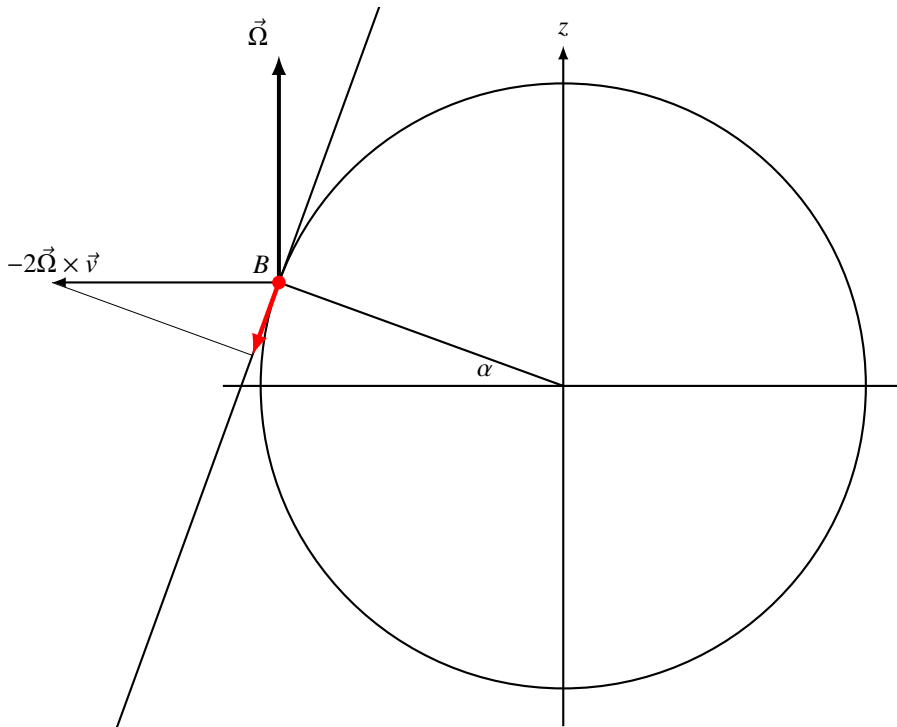


Abbildung 1.6: Berechnung der Coriolis-Beschleunigung für einen Geschwindigkeitsvektor in U -Richtung.

Globale Zirkulation

Die bisher besprochenen Prinzipien sollten uns ermöglichen, die globale Zirkulation qualitativ zu beschreiben. Veränderungen der globalen Zirkulation erfolgen erst über mehrere Tage. Es ist daher gerechtfertigt, die täglichen Schwankungen der Einstrahlung infolge der Erdrotation durch eine mittlere Einstrahlung zu ersetzen. Die Bedingungen für die globale Zirkulation sind daher rotations-symmetrisch um die Erdachse. Wir suchen daher nach einem globalen Strömungsmuster, welches ebenfalls rotationssymmetrisch ist.

Die grösste Einstrahlung erfolgt am Äquator, erwärmt die Luft und lässt sie aufsteigen. Der entstehenden Unterdruck in Äquaturnähe erzeugt eine Ausgleichsströmung in Bodennähe. Die aufsteigende Luft kann nicht beliebig hoch aufsteigen und weicht daher in grosser Höhe in Richtung der Pole aus. Die Höhenströmung nach Norden wird von der Coriolis-Beschleunigung nach rechts abgelenkt, sie kann also nicht beliebig weit nach Norden strömen, bevor sie wieder absinkt. Es entsteht je eine geschlossene Konvektionszelle wie in Abbildung 1.7, die sogenannte Hadley-Zelle [skript:hadley].

Im Anschluss an die Hadley-Zellen entstehen auf Grund des gleichen Mechanismus weitere Zellen. Die Breite der Zellen hängt offenbar von der Stärke des Coriolis-Effektes ab. Auf einem Planeten mit grösserer Rotationsgeschwindigkeit erwartet man vergleichsweise schmalere Zellen. Dies ist genau was man am Beispiel der globalen Strömung auf dem Jupiter in Abbildung 1.8 beobachten kann.

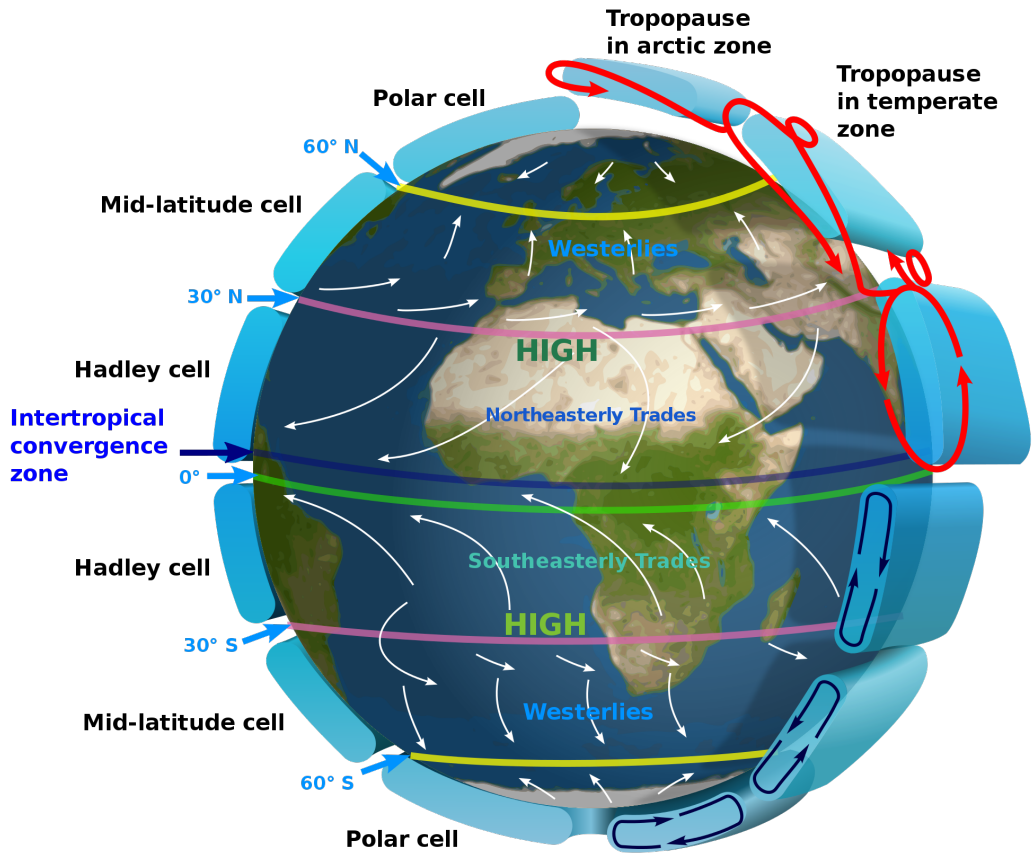


Abbildung 1.7: Global Zirkulation der Erde

Äquatorialzone

Nahe am Äquator ist die geographische Breite α klein und damit auch der Coriolis-Parameter f . Die Strömung in Äquatornähe ist daher praktisch unbeeinflusst vom Coriolis-Effekt. Entlang des Äquators kann die Luft oder das Meer also unbeeinflusst durch die Coriolis-Beschleunigung strömen.

Mit Hilfe der β -Ebene können wir jetzt aber auch modellhaft die Bewegung eines Massepunktes in Äquatornähe berechnen. Wenn die Coriolis-Beschleunigung der einzige Einfluss ist, dann

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} v \\ -u \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Der Coriolis-Parameter $f = 2\omega \sin \alpha$ ist proportional zur geographischen Breite. Für nicht zu grosse geographische Breiten können wir $\sin \alpha$ durch die y -Koordinate ersetzen. Wir müssen also die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f_{yv} \\ -f_{yu} \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

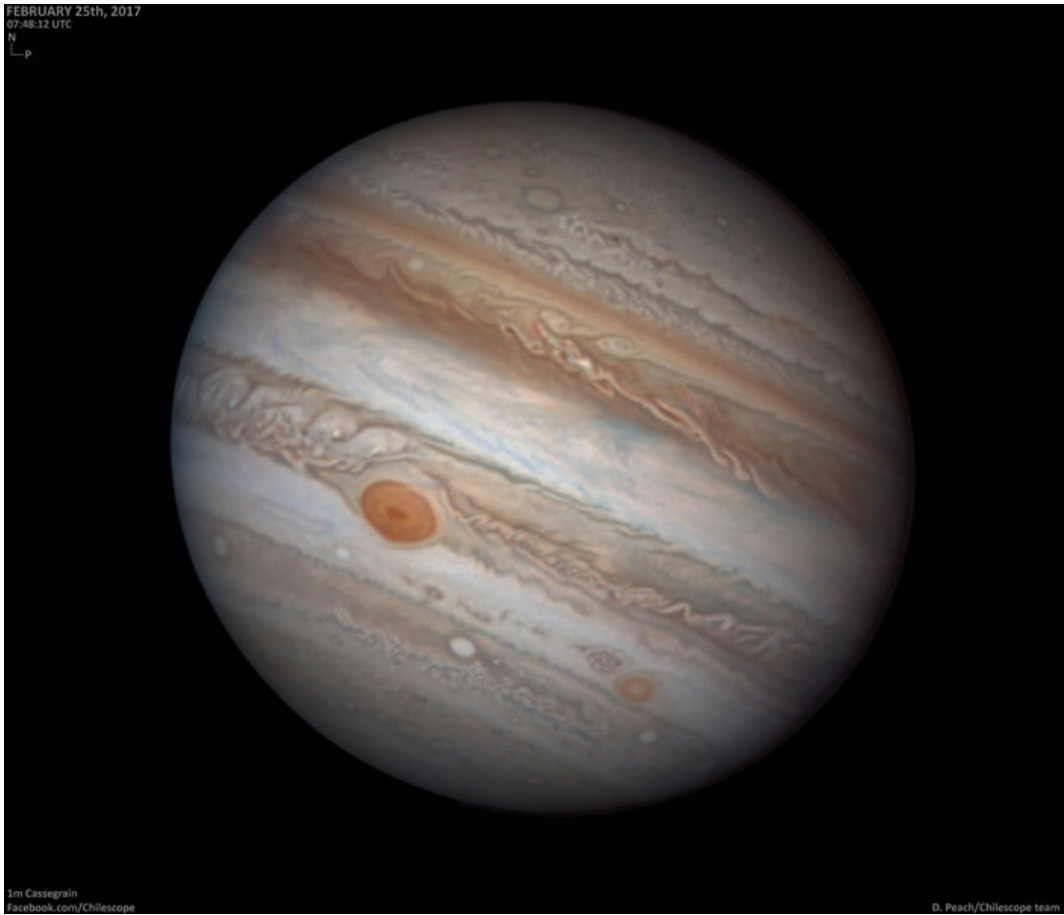
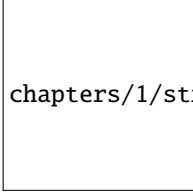


Abbildung 1.8: Jupiter mit Wolkenbändern, Aufnahme von Damian Peach [**skript:jupiter**]

lösen. Die Gestalt der Lösungskurven hängt von der Anfangsgeschwindigkeit und vom Parameter f ab. Für $f = 0$ fällt die Coriolis-Beschleunigung ganz weg, in diesem Fall sind die Lösungskurven Geraden.

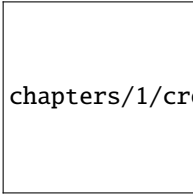
Um einen Überblick über die möglichen Lösungskurven zu erhalten, berechnen wir numerisch die vom Punkt $(0, 4)$ ausgehenden Lösungskurven der Differentialgleichung 1.12. Je grösser f ist, desto stärker gekrümmt sind die Lösungskurven. Solange die Kurven in der oberen Halbebene $y > 0$ liegen sind die Kurven nach rechts gekrümmt. Für genügend grosses f bleiben alle Kurven in der oberen Halbebene wie in Abbildung 1.9, unabhängig von der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit. Für kleinere Werte von f wie in Abbildung 1.10 gelangen einzelne Bahnkurven in die untere Halbebene wo die Krümmung der Kurve von rechts auf links kehrt.

Man beachte, dass diese Bahnkurven nicht Stromlinien einer Strömung sind, da sich diese nicht kreuzen können. Dieses einfache Modell ist also nicht geeignet, die tatsächliche Bewegung der Luftmassen darzustellen, dazu müssen wir die Gleichungen der Fluidodynamik in Kapitel 2.



chapters/1/stream.pdf

Abbildung 1.9: Lösungen der Differentialgleichung ausgehend vom Punkt $(0, 4)$ mit Anfangsgeschwindigkeit $|\vec{v}| = 1$ und $f = 0.26$. Die Bahnkurven sind immer nach rechts gekrümmt und bleiben in der oberen Halbebene.



chapters/1/cross.pdf

Abbildung 1.10: Lösungen der Differentialgleichung ausgehend vom Punkt $(0, 4)$ mit Anfangsgeschwindigkeit $|\vec{v}| = 1$ und $f = 0.22$. Einzelne Bahnkurven kreuzen die x -Achse und krümmen sich in der unteren Halbebene dann links.

Meeresströmungen

Meeresströmungen leisten einen bedeutenden Beitrag zum Klima, weil sie dank der hohen Wärmekapazität von Wasser auch bei kleiner Strömungsgeschwindigkeit und sehr viel kleinerem bewegtem Volumen als bei den atmosphärischen Strömungen eine grosse Energiemenge transportieren können.

1.2.4 Periodische Einflüsse

Das Klimasystem ist einer Reihe von sich periodisch verändernden Einflüssen ausgesetzt. Viele dieser Einflüsse erscheinen auf den ersten Blick geringfügig und damit vernachlässigbar. Doch wenn ein solcher periodischer Einfluss mit einer Frequenz auftritt, der einer Eigenfrequenz des Klimasystems entspricht, dann kann sich in Folge eines Resonanzeffektes über längere Zeit ein bedeutender Einfluss auf das Klima manifestieren. Es ist daher wichtig, auch kleine Einflüsse zu kennen und insbesondere alle Aspekte des Klimasystems zu modellieren, die eine Eigenfrequenz in der Nähe ihrer Anregungsfrequenzen haben.

Sonnenfleckenzyklus

Die Strahlung der Sonne ist nicht konstant. Wie bei jedem Stern dieser Klasse nehmen Durchmesser und Temperatur der Sonne über die Jahrtausende zu, dass neben der Fusion von Wasserstoff zu Helium auch noch Fusionsprozesse schwerer Elemente eine Rolle zu spielen beginnen. Dieser sehr langfristige Einfluss ist jedoch nur wesentlich für den Vergleich von Klimamodellen mit Daten über das Klima auf der sehr jungen Erde.

Für kurzfristige Prognosen von Bedeutung sind dagegen die Schwankungen der Sonnenaktivität. Die Zahl der Sonnenflecken ist ein leicht zu messender Indikator dafür, für den Aufzeichnung seit dem 17. Jahrhundert existieren. Die Sonnenfleckenzahl schwankt mit einer Periode von etwa

elf Jahren. Die daraus resultierende Änderung der Einstrahlung ist jedoch nur 0.07%, so dass die Sonnenaktivität nicht für den Klimawandel verantwortlich gemacht werden kann. Die schwankende Sonnenaktivität muss jedoch bei der Validierung von Klimamodellen berücksichtigt werden.

Bahnänderungen der Erde

Nach Kepler bewegen sich die Planeten auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. Die keplerschen Gesetze der Planetenbahnen können aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz hergeleitet werden [skript:joos]. Die Bahnelemente beschreiben die Ebene, in der sich der Planet bewegt, die Richtung und der Zeitpunkt der grössten Annäherung an die Sonne und die Exzentrizität der Ellipse.

Es trifft exakt jedoch nur dann zu, wenn keine anderen Kräfte auf den Planeten wirken als die Anziehungskraft der Sonne. Newtons Gravitationsgesetz besagt jedoch, dass auch alle anderen Planeten durch ihre Schwerkraft auf die Erde einwirken. Dies äussert sich darin, dass die Bahnelemente, sich mit der Zeit ändern. Diese langsame Veränderung der Bahnelemente war schon Newton bekannt, er hat daraus geschlossen, dass das Sonnensystem mit der Zeit völlig zerfallen würde. Genauere Untersuchungen und numerische Rechnungen zeigen jedoch, dass unser Sonnensystem über lange Zeit stabil ist. Die Exzentrizität zum Beispiel der Erdbahn kann sich tatsächlich verändern, aber über längere Zeit wird die Veränderung auch wieder rückgängig gemacht.

Veränderungen der Erdbahn, insbesondere der Exzentrizität, oder der Neigung der Erdachse zur Bahn äussern sich darin, dass die Einstrahlung über das Jahr stärker oder weniger stark schwankt oder auch im Mittel grösser oder kleiner wird. Dadurch können sich die Temperaturunterschiede zwischen den Polgebieten und äquatorialen Breiten verändern und damit die Intensität des Wettergeschehens beeinflusst werden. Ein langfristiges Klimamodell muss also auch diese Änderungen modellieren.

Es stellt sich allerdings heraus, dass diese Veränderungen sehr viel langfristiger sind als der die meisten Klimapolitiker interessierenden Zeitraum von wenigen Jahrhunderten. Die Berücksichtigung dieser Effekte dient daher vor allem dazu die Klima-Modelle mit der Klimageschichte der Erde zu vergleichen und damit zu validieren. In Kapitel 6 wird gezeigt, wie periodische Einflüsse modelliert und mit Hilfe der Fourier-Theorie analysiert werden können.

1.3 Anforderungen an Klima-Modelle

Aus der vorangegangenen Diskussion können wir einige Anforderungen ableiten, was Klimamodelle können müssen, was sie berücksichtigen müssen und welche Aspekte sie vernachlässigen können.

Das Ziel ist die Modellierung der Klima-Entwicklung über wenige hundert Jahre. Es ist jedoch nicht erforderlich, den vollständigen Zustand der Atmosphäre von Tag zu Tag zu modellieren. Es genügt diejenigen Eigenschaften zu modellieren, die für den Energiehaushalt der Erde wesentlich sind. Dazu gehören die folgenden Eigenschaften.

1. Der Strahlungshaushalt der Erde muss korrekt modelliert werden, da dies die global Mitteltemperatur bestimmt. Dies bedeutet insbesondere auch, dass die Albedo sowie der Gehalt an Treibhausgasen korrekt wiedergegeben werden.
2. Die Albedo der Erde muss modelliert sein. D. h. der durchschnittliche Vereisungsgrad und die Häufigkeit und Dichte von Bewölkung muss korrekt wiedergegeben sein.

3. Strahlungs- und Wasserhaushalt der Atmosphäre unterscheiden sich über Kontinenten und über den Ozeanen. Das Modell muss daher räumlich genügend aufgelöst sein, dass die für den Energiehaushalt wesentlichen Unterschiede abgebildet werden können.
4. Die Energietransportmechanismen müssen für Zeitskalen in der Grössenordnung von Jahren und Jahrzehnten korrekt modelliert sein, weil dies die Verteilung der Energie über die Erdoberfläche festlegt.
5. Wasser in der Atmosphäre hat einerseits einen grossen Einfluss auf den Treibhauseffekt, übernimmt aber auch für einen wesentlichen Teil des Energietransports in der Atmosphäre. Daher muss der Wassergehalt
6. Der Salzgehalt der Meere treibt die thermohaline Zirkulation an, welche auf einer Zeitskala von Jahrzehnten einen wesentlichen Beitrag zum Energietransport in den Ozeanen leistet. Salzgehalt und Verdunstung an der Meeresoberfläche muss so genau modelliert sein, dass diese Energieströme korrekt modelliert werden.

Um die Auswirkungen des Klimawandels zu verstehen muss man vorhersagen, wie sich kurzfristige Wetterphänomene verändern. Dazu kann man gewöhnliche Wettermodelle verwenden, die sowohl zeitlich wie auch räumlich eine bessere Auflösung haben. Man kann aber gewisse qualitative Aussagen auch ohne solche detaillierten Modelle machen. Ein höherer Wassergehalt der Atmosphäre wird zum Beispiel zunächst zu stärkeren Niederschlägen führen. Da aber auch mehr Energie in Form von latenter Wärme zur Verfügung steht, muss man auch mit stärkeren Winden rechnen. Zum Beispiel muss man also damit rechnen, dass Hurrikane intensiver werden.

1.3.1 Validierung von Klimamodellen

Wie können wir überprüfen, ob wir die wesentlichen Einflussfaktoren auf das Klimasystem und ihre Auswirkungen verstanden haben? Warum sollen wir den Prognosen der Klimamodelle überhaupt glauben? Wir können ja nicht wie bei einem Laborexperiment ein paar Parameter verändern, nachmessen, wie das System sich verändert, und überprüfen, ob die Änderungen mit den Vorhersagen des Modells übereinstimmen.

Vergleich mit anderen Planeten

Im Sonnensystem stehen uns die sechs Planeten Venus, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun mit einer Atmosphäre und der Saturnmond zur Verfügung, um Klimamodelle damit zu überprüfen. Die Verhältnisse auf diesen Planeten sind zwar zum Teil extrem verschieden von der Situation auf der Erde. Die grundlegenden physikalischen Prozesse sind jedoch die selben. Die Modelle, die wir für die Erde entwickeln, sollten daher auch die Situation auf diesen Planeten wiedergeben können. Tun sie dies nicht, ist dies in Indiz dafür, dass uns ein wesentlicher Klimafaktor entgangen ist, der zum Beispiel in der zukünftigen Klimaentwicklung eine Rolle spielen könnte.

Als Beispiel betrachten wir den Planeten Venus. Die Venus ist etwa gleich gross wie die Sonne, ist aber von Wolken bedeckt und hat daher eine wesentlich höhere Albedo. Die mittleren Entfernungen von Venus und Erde zur Sonne verhalten sich wie

$$a_{\text{V}} : a_{\text{E}} = 0.72,$$

die Solarkonstante für die Venus ist also 1.92 mal grösser. Nach dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz müsste die Venus im Vergleich zur Erde nur etwa 17% wärmer sein, um die im visuellen Bereich

absorbiert Energie im infraroten wieder abstrahlen. Wir würden also eine Temperatur von $1.17 \cdot 287\text{K}) = 336\text{K}$ erwarten. Die tatsächlich Oberflächentemperatur ist mit 737K jedoch viel höher. Daran kann man bereits erkennen, dass die Venus einen wesentlich stärkeren Treibhauseffekt haben muss, der nach einer Erklärung verlangt.

Andererseits hat der Planet Mars eine 1.52mal grössere mittlere Entfernung und damit ist die Einstrahlung dort nur 43% von der Einstrahlung auf der Erde. Wieder nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz würde dies verlangen, dass die Temperatur etwa 80% der Temperatur der Erde betragen müsste, also etwa $0.8 \cdot 287\text{K} = 224.9\text{K}$, was recht genau der beobachteten Temperatur von 218K entspricht. Der Treibhauseffekt ist auf dem Mars also wesentlich geringer, was vor allem auf die sehr viel dünnere Atmosphäre zurückzuführen ist.

Tatsächlich besteht die Venusatmosphäre zu 96% aus Kohlendioxid und hat eine sehr viel höhere Dichte, was den intensiveren Treibhauseffekt erklären kann.

Vergleich mit der Vergangenheit

Die Erdatmosphäre hat sich im Laufe der Erdgeschichte stark verändert. Die jüngere Geschichte kann zum Beispiel aus Bohrkernen aus antarktischem Eis rekonstruiert werden. Für die Frühgeschichte der Erdatmosphäre gibt es keine solchen direkten Messungen.

Die chemischen Verwitterungsprozesse hängen jedoch von der chemischen Zusammensetzung und Temperatur der Atmosphäre ab. Aus der beobachteten Zusammensetzung von Verwitterungsprodukten und Sedimenten kann man also Rückschlüsse darauf ziehen, was für Verhältnis im Zeitpunkt der Entstehung dieser Sedimente vorgeherrscht haben müssen.

1.3.2 Klimageschichte der Erde

Kapitel 2

Fluiddynamik

Die Atmosphäre und die Ozeane unterscheiden sich in ihren für das Studium von Wetter und Klima wesentlichen Eigenschaften ganz beträchtlich. Das Wasser der Ozeane ist fast inkompressibel, seine Dichte hängt aber von der Temperatur und dem Salzgehalt ab. Wasser hat eine sehr grosse Wärmekapazität, ausserdem kann Wärme durch Verdunstung aus den Ozeanen in die Atmosphäre übergehen, wobei gleichzeitig die Salzkonzentration steigt.

Die Atmosphäre auf der anderen Seite hat eine wesentlich geringere Dichte und Wärmekapazität, ihre Temperatur kann sich daher sehr viel schneller ändern. Sie ist stark kompressibel. Wegen der geringeren Dichte kann die Atmosphäre sehr viel höhere Strömungsgeschwindigkeiten erreichen.

Trotz dieser grossen Unterschiede lassen sich Atmosphäre und Ozeane beide als Fluide mit den gleichen partiellen Differentialgleichungen beschreiben, die im folgenden hergeleitet werden sollen. Die Unterschiede äussern sich vor allem in den Zustandsgleichungen, die die Zustandsgrössen Druck, Temperatur, Dichte und Salzgehalt miteinander in Beziehung setzen. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels sollen die Grundgleichungen der Fluiddynamik zusammengestellt werden. Im zweiten Teil wird am Beispiel des Lorenz-Systems gezeigt, dass die Gleichungen der Fluiddynamik trotzdem nur beschränkt eine exakte Prognose des Wetters gestatten können.

2.1 Fluiddynamik

In diesem Abschnitt gehen wir davon aus, dass das Fluid beschrieben wird durch Funktionen der Raumkoordinaten (x, y, z) und der Zeit t , wobei wir meistens darauf verzichten, die unabhängigen Variablen auszuschreiben. Die Temperatur T ist also zu lesen als die Funktion $T(x, y, z, t)$. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen stellen eine Verbindung zwischen Masse, Beschleunigung und Kraft her, wir können daher davon ausgehen, dass die Bewegungsgleichungen eines Fluides nur die Dichte ϱ und den Geschwindigkeitsvektor \vec{v} involvieren. Den Zusammenhang zwischen Druck, Temperatur, Dichte und möglicherweise weiteren Eigenschaften wird durch Zustandsgleichungen vermittelt.

2.1.1 Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung drückt aus, dass Materie nicht einfach neu entstehen oder verschwinden kann. Um sie herzuleiten, betrachten wir ein Volumen V des Fluids. Die Masse im Inneren des

Volumens wird bestimmt durch das Volumenintegral

$$m = \iiint_V \varrho \, dx \, dy \, dz.$$

Ein kleiner Quader mit den Abmessungen Δx , Δy und Δz enthält die Masse

$$m = \varrho \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Wenn sich die Masse in dem Quader ändert, dann muss Materie durch die Wände zu- oder abfließen. Wir berechnen daher für jede Wand des Quaders, wie gross der Massefluss durch die Wand in einer Zeiteinheit Δt ist.

Durch eine Rechteck mit Abmessungen $\Delta y \times \Delta z$ senkrecht zur x -Achse fliesst in der Zeit Δt die das Volumen $v_x \Delta x \Delta y \Delta z$ und damit die Masse

$$\varrho v_x \Delta y \Delta z. \quad (2.1)$$

Die Dichte ϱ und die Geschwindigkeit v_x sind dabei an der Koordinate x zu nehmen. Durch die Wand des Quaders bei $x + \Delta x$ fliesst eine Masse, die ebenfalls durch den Ausdruck (2.1) beschrieben werden kann, jedoch für die x -Koordinaten $x + \Delta x$. Um die Massenänderung im Quader zu bestimmen, sind diese beiden Ausdrücke als mit entgegengesetzten Vorzeichen zu berücksichtigen.

Die Massenänderung ist daher

$$\begin{aligned} \Delta m = & \varrho(x, y, z, t) v_x(x, y, z, t) \Delta y \Delta z \Delta t - \varrho(x + \Delta x, y, z, t) v_x(x + \Delta x, y, z, t) \Delta y \Delta z \Delta t \\ & + \varrho(x, y, z, t) v_y(x, y, z, t) \Delta x \Delta z \Delta t - \varrho(x, y + \Delta y, z, t) v_y(x, y + \Delta y, z, t) \Delta x \Delta z \Delta t \\ & + \varrho(x, y, z, t) v_z(x, y, z, t) \Delta x \Delta y \Delta t - \varrho(x, y, z + \Delta z, t) v_z(x, y, z + \Delta z, t) \Delta x \Delta y \Delta t. \end{aligned}$$

Wir fassen die Terme zu gegenüberliegenden Wänden zusammen wobei wird das Produkt $\Delta x \Delta y \Delta z$ ausklammern können. Wir teilen ausserdem durch Δt , um die zeitliche Massenänderungsrate zu erhalten.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta m}{\Delta t} = & - \left(\frac{\varrho(x + \Delta x, y, z, t) v_x(x + \Delta x, y, z, t) - \varrho(x, y, z, t) v_x(x, y, z, t)}{\Delta x} \right. \\ & + \frac{\varrho(x, y + \Delta y, z, t) v_y(x, y + \Delta y, z, t) - \varrho(x, y, z, t) v_y(x, y, z, t)}{\Delta y} \\ & \left. + \frac{\varrho(x, y, z + \Delta z, t) v_z(x, y, z + \Delta z, t) - \varrho(x, y, z, t) v_z(x, y, z, t)}{\Delta z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t. \end{aligned}$$

Da $\Delta m = \varrho \Delta x \Delta y \Delta z$ können wir auf beiden Seiten durch $\Delta x \Delta y \Delta z$ dividieren. Um die zeitliche Änderung zu bestimmen, müssen wir ausserdem durch Δt dividieren. Lassen wir die Inkremente Δx , Δy , Δz und Δt gegen 0 gehen, werden aus den Differenzenquotienten Ableitungen. Wir erhalten daher die *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \varrho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \varrho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \varrho v_z}{\partial z} \right). \quad (2.2)$$

Die rechte Seite kann mit Hilfe des *Nabla-Operators*

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

kürzer geschrieben werden. Der Nabla-Operator wird wie ein Vektor behandelt. Für eine (skalare) Funktion f ist ∇f ein Vektor, der *Gradient* der Funktion f . Das Skalarprodukt $\nabla \cdot \vec{v}$ ist ein Skalar, die *Divergenz* eines Vektorfeldes \vec{v} , sie wird manchmal auch $\text{div } \vec{v}$ geschrieben. Aus (2.2) wird dann

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\varrho \vec{v})$$

geschrieben werden. So erhält die Kontinuitätsgleichung die kompakte Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho = -\nabla \cdot (\varrho \vec{v}).$$

2.1.2 Inkompressible Strömung

Bei einem inkompressiblen Fluid ist die Dichte eine Konstante, alle Ableitungen von ϱ verschwinden. Die Kontinuitätsgleichung wird damit zu

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\varrho \vec{v}) = -\nabla \varrho \cdot \vec{v} - \varrho \nabla \cdot \vec{v} = -\varrho \nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

In einer inkompressiblen Strömung verschwindet daher die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes.

Verallgemeinerung

Die Herleitung der Kontinuitätsgleichung für die Massedichte funktioniert auch für jede andere Erhaltungsgrösse, die im Fluid mit einer Dichte $a(x, y, z, t)$ vorhanden ist und mit der Strömung mittransportiert wird. Die *verallgemeinerte Kontinuitätsgleichung* für die Erhaltungsgrösse a ist daher

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\nabla \cdot (a \vec{v}). \quad (2.3)$$

2.1.3 Bewegungsgleichung

Das zweite Newtonsche Gesetz $F = ma$ besagt, dass Kraft und Beschleunigung proportional sind. Dies gilt jedoch nur, wenn die Masse unveränderlich ist. Da ein Volumen des Fluides wegen veränderlicher Dichte jedoch seine Masse verändern kann, müssen wir verwenden, dass die Kraft die zeitliche Änderung des Impulses ist.

Impulsdichte

Die Impulsdichte des Fluids wird an jeder Stelle durch die Grösse $\vec{p} = \varrho \vec{v}$ gegeben. Das zweite Newtonsche Gesetz besagt dann, dass die Änderung von \vec{p} durch die äusseren Kräfte \vec{b} bestimmt wird, die auf das Fluid wirkt. Der Impuls in einem Volumen kann aber auch ändern, dass das Fluid Impuls in das Volumen hinein- oder aus dem Volumen heraustransportiert. Jede Komponente des Impulses ist eine Erhaltungsgrösse, für die ohne Wirkung äusserer Kräfte die verallgemeinerte Kontinuitätsgleichung (2.3) gilt. Für die x -Komponente des Impulses gilt daher die Gleichung

$$\frac{\partial \varrho v_x}{\partial t} = -\nabla \cdot (\varrho v_x \vec{v}) + \varrho b_x,$$

und analog für die anderen Komponenten ϱv_y und ϱv_z der Impulsdichte.

Innere Kräfte

Damit sind aber innere Kräfte im Fluid noch nicht berücksichtigt. Das Fluid widersetzt sich zum Beispiel der Kompression, dies äussert sich im Druck, der jeweils senkrecht auf den Wänden des Volumens wirkt. In einem zähen Medium sind aber auch Kräfte parallel zu den Wänden möglich, sogenannte *Scherkräfte*. Im Allgemeinen wirkt auf ein $\Delta y \times \Delta z$ -Rechteck senkrecht zur x -Achse die Kraft

$$\vec{\tau}_x \Delta y \Delta z = \begin{pmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} \Delta y \Delta z$$

und analog für die Wände senkrecht auf der y - bzw. z -Achse. Die diagonalen Komponente τ_{ii} beschreiben die Druckkraft auf die jeweilige Seitenfläche, während die ausserdiagonalen Elemente Scherkräfte beschreiben.

Die Matrix τ mit Komponenten τ_{ij} heisst auch der *Cauchy-Spannungstensor*. Wir werden weiter unten (Seite 27) zeigen, dass τ_{ij} symmetrisch sein muss, Dass τ_{ij} ein Tensor ist, ist für die weiteren Erörterungen nicht von Bedeutung, wir werden daher diesen Begriff verwenden, ohne ihn wirklich zu definieren.

Die resultierende Kraft \vec{F} auf einen Quader mit den Kantenlängen Δx , Δy und Δz hat daher die i -Komponente

$$\begin{aligned} F_x &= (\tau_{xx}(x + \Delta x, y, z, t) - \tau_{xx}(x, y, z, t))\Delta y \Delta z \\ &\quad + (\tau_{yx}(x, y + \Delta y, z, t) - \tau_{yx}(x, y, z, t))\Delta x \Delta z \\ &\quad + (\tau_{zx}(x, y, z + \Delta z, t) - \tau_{zx}(x, y, z, t))\Delta x \Delta y \\ &= \left(\frac{\tau_{xx}(x + \Delta x, y, z, t) - \tau_{xx}(x, y, z, t)}{\Delta x} + \frac{\tau_{yx}(x, y + \Delta y, z, t) - \tau_{yx}(x, y, z, t)}{\Delta y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau_{zx}(x, y, z + \Delta z, t) - \tau_{zx}(x, y, z, t)}{\Delta z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z. \end{aligned}$$

Die Kraftdichte f_i erhalten wir nach Division durch $\Delta x \Delta y \Delta z$ und Grenzübergang, sie ist

$$f_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}. \quad (2.4)$$

Wir können damit die vollständige Bewegungsgleichung für das Fluid hinschreiben, sie lautet

$$\frac{\partial \varrho v_x}{\partial t} = -\nabla \cdot (\varrho v_x \vec{v}) + \varrho b_x + f_x. \quad (2.5)$$

Vektorschreibweise

Die Schreibweise (2.5) für die Bewegungsgleichungen ist sehr schwerfällig und passt nicht zu der deutlich elegantere vektoriellen Schreibweise zum Beispiel der Kontinuitätsgleichung. Die linke Seite von (2.5) und der mittlere Term auf der rechten Seite können natürlich sofort in eine vektorielle Schreibweise überführt werden, nicht jedoch die anderen zwei Terme.

Der Term $\nabla \cdot (\varrho v_x \vec{v})$ ist ausgeschrieben

$$\nabla \cdot (\varrho v_x \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x}(\varrho v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho v_x v_z).$$

Dieser Ausdruck sieht ganz ähnlich aus wie der Ausdruck (2.4) für die x -Komponente der Kraftdichte der inneren Kräfte. Wir können die Ähnlichkeit formal noch etwas klarer machen. Schreiben wir $A_{xy} = \varrho v_x v_y$, dann ist

$$\nabla \cdot (\varrho v_x \vec{v}) = \frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{xz}}{\partial z} = \sum_i \frac{\partial A_{xi}}{\partial i}.$$

Da es offenbar auf die Reihenfolge der Indizes von A nicht ankommt, ist dies auch das gleiche wie

$$\nabla \cdot (\varrho v_x \vec{v}) = \frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zx}}{\partial z} = \sum_i \frac{\partial A_{ix}}{\partial i}.$$

Wir können daher die Wirkung des Nabla-Operators ∇ auf einer symmetrischen Matrix A wie folgt definieren:

Definition 2.1. Ist A_{ij} eine symmetrische Matrix, dann ist die Divergenz $\nabla \cdot A$ von A der Vektor mit den Komponenten

$$(\nabla \cdot A)_x = \sum_i \frac{\partial A_{ix}}{\partial i}.$$

Falls die Matrix τ_{ij} symmetrisch ist, kann diese Definition auch auf τ angewendet werden. Die x -Komponente der Divergenz von τ ist dann

$$(\nabla \cdot \tau)_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = f_x.$$

Dies ist genau der letzte Term in der Gleichung (2.5).

Wir brauchen jetzt nur noch eine kompaktere Notation für die Matrix $\varrho v_x v_y$.

Definition 2.2. Das Kronecker-Produkt zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist die Matrix $\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a} \vec{b}^t$ mit den Komponenten

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})_{ij} = a_i b_j = (\vec{a} \vec{b}^t)_{ij}$$

Abgekürzt erlauben wir die Schreibweise $\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a} \vec{b}$.

Mit diesen Notationen bekommen wir jetzt die Bewegungsgleichungen in Vektorform. Sie lauten

$$\frac{\partial \varrho \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\varrho \vec{v} \vec{v}) + \varrho \vec{b} + \nabla \cdot \tau. \quad (2.6)$$

Dies ist die *Navier-Stokes Gleichung*. Die drei Terme beschreiben die Impulsänderung durch den Zu- oder Abtransport von Impuls durch die Strömung, durch die äusseren Kräfte bzw. die inneren Spannungen.

Symmetrie des Spannungstensors

In diesem Abschnitt wollen wir nachweisen, dass der Spannungstensor symmetrisch ist. Dazu betrachten wir das Drehmoment, welches die Scherkräfte auf einen kleinen Würfel mit Kantenlänge $2l$ ausüben (Abbildung 2.1).

Der Würfel hat die Masse $m = \varrho(2l)^3$. Das Trägheitsmoment eines Würfels mit Masse m und Kantenlänge $2l$ ist

$$I_z = \frac{1}{12} m((2l)^2 + (2l)^2) = \frac{1}{12} \varrho 8l^3 \cdot 8l^2 = \frac{16}{3} \varrho l^5.$$

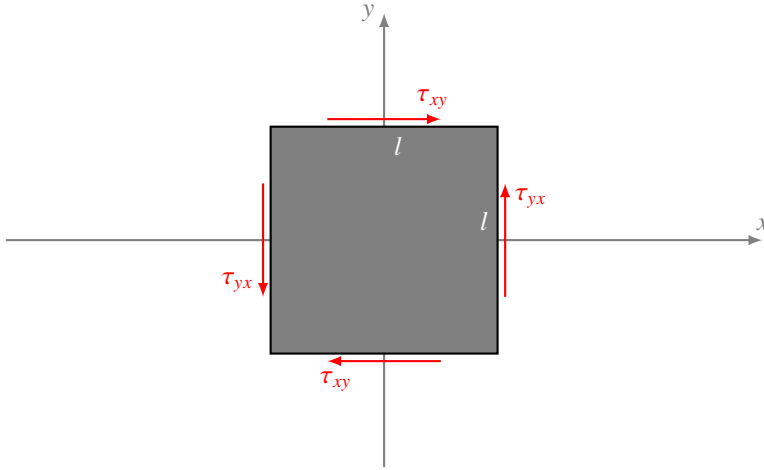


Abbildung 2.1: Drehmoment um die z -Achse der Schwerkkräfte auf einen Würfel mit Kantenlänge $2l$. Gezeigt sind nur die Komponenten von τ , die zu einem Drehmoment führen.

Der Drehimpuls um die z -Achse ist $L_z = I_z \omega$.

Aus Abbildung 2.1 kann man die Scherkräfte auf den Seitenflächen ablesen, sie sind $\tau_{xy} 4l^2$ bzw. $\tau_{yx} 4l^2$, ihr Hebelarm ist l . Das resultierende Drehmoment um die z -Achse ist daher

$$M_z = 8l^3 \tau_{xy} - 8l^3 \tau_{yx}.$$

Die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers besagen jetzt, dass für die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Würfels um die z -Achse die Gleichung

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \quad \Rightarrow \quad I_z \dot{\omega} = M_z \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{M_z}{I_z} = \frac{8l^3(\tau_{xy} - \tau_{yx})}{\frac{16}{3}l^5} = \frac{3}{2l^2}(\tau_{xy} - \tau_{yx}).$$

Wir nehmen an, es sei $\tau_{xy} \neq \tau_{yx}$. Lässt man l gegen 0 gehen, folgt die Aussage, dass die Winkelgeschwindigkeit eines sehr kleinen Würfels im Fluid sich mit beliebig schnell anwachsender Winkelgeschwindigkeit drehen müsste. Dieses unphysikalische Resultat erlaubt zu schliessen, dass $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ sein muss und dass nur ein symmetrischer Spannungstensor ein physikalisches Fluid beschreibt.

Druck und Spannungen

Die Diagonalelemente des Spannungstensors τ beschreiben Normalkräfte auf ein Volumenelement des Fluids. Im Gleichgewicht sind sie alle gleich gross und stimmen mit dem negativen (*hydrostatischen*) *Druck* überein, wir setzen daher

$$p = -\frac{1}{3} \text{Spur } \tau.$$

Wir können daher τ zerlegen in eine Diagonalmatrix mit Elementen $-p$ auf der Diagonalen und eine spurlose Matrix

$$\tau = -pE + \sigma,$$

E ist die Einheitsmatrix. Die spurlose symmetrische Matrix σ heisst auch *Spannungsdeviator*.

Für die Bewegungsgleichung brauchen wir die Divergenz beider Terme. Die Druckterme sind alle gleich, nach Definition 2.1 ist

$$(\nabla \cdot (pE))_x = \sum_i \frac{\partial p \delta_{xi}}{\partial i} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot (pE) = \nabla p.$$

Damit wird die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \varrho \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\varrho \vec{v} \vec{v}) + \varrho \vec{b} - \nabla p + \nabla \cdot \sigma \quad (2.7)$$

Die Scherkräfte sind in einem newtonschen Fluid proportional zu den Schergeschwindigkeiten. Man kann zeigen (siehe [skript:kaperengler]), dass σ geschrieben werden kann als

$$\sigma = 2\nu \left(\varepsilon - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \vec{v})E \right) \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^t).$$

Die spezielle Form von ε ist notwendig, damit die Matrix ε symmetrisch wird. Der zweite Term im Ausdruck von σ ist nötig, damit die Spur

$$\text{Spur } \sigma = 2\nu(\varepsilon - \nabla \cdot \vec{v}) = 2\nu \frac{1}{2} \left(\sum_i \frac{\partial v_i}{\partial i} + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial i} - \nabla \cdot \vec{v} \right) = 0$$

von σ verschwindet.

Die Divergenz $\nabla \cdot \sigma$ von σ kann damit explizit durch die Geschwindigkeit ausgedrückt werden. Wir berechnen die Divergenz der einzelnen Terme:

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \varepsilon)_x &= \sum_i \frac{\partial \varepsilon_{ix}}{\partial i} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial i} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial i} + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 v_x}{\partial i^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \vec{v}) + \frac{1}{2} \Delta v_x \\ \nabla \cdot \varepsilon &= \frac{1}{2} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) + \frac{1}{2} \Delta \vec{v} \\ (\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{v})E)_x &= \sum_i \frac{\partial}{\partial i} (\nabla \cdot \vec{v})_{xi} = \sum_i \frac{\partial}{\partial i} (\nabla \cdot \vec{v} \delta_{xi}) = \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \vec{v}) \\ \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{v})E &= \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \end{aligned}$$

und erhalten so für die Divergenz von σ :

$$\nabla \cdot \sigma = 2\nu \left(\nabla \cdot \varepsilon - \frac{1}{3} \nabla \cdot ((\nabla \cdot \vec{v})E) \right) = 2\nu \left(\frac{1}{2} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) + \frac{1}{2} \Delta \vec{v} - \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \right) \quad (2.8)$$

$$= \nu \Delta \vec{v} + \frac{\nu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}). \quad (2.9)$$

Inkompressible Strömung

In einem inkompressiblen Fluid ist $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, dann fällt der zweite Term in (2.9) weg. Die Strömungsgleichung eines inkompressiblen Fluids erhält damit die einfache Form

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{v} \vec{v}) + \vec{b} - \frac{1}{\varrho} (\nabla p - \nu \Delta \vec{v}), \quad (2.10)$$

die klassische Navier-Stokes Gleichung.

2.1.4 Zustandsgleichungen

Die Dichte hängt vor allem auch von der Temperatur ab. In den Ozeanen ändert die Dichte des Wassers mit dem Salzgehalt. Eine vollständige Beschreibung der Strömung in Ozeanen oder der Atmosphäre muss daher auch noch weitere Variablen modellieren. In Kapitel 1 haben wir bereits auf die Wärmeleitungsgleichungen hingewiesen.

Die Felder T , p und ϱ sind bei einem idealen Gas miteinander durch die Zustandsgleichung

$$p = \varrho T R_s$$

mit der spezifischen Gaskonstante R_s verbunden. Für den Zusammenhang von Dichte, Temperatur und Salzgehalt gibt es jedoch kein derart einfaches Modell. Eine weitere Kopplung zwischen der Temperatur und der Strömung entsteht durch die Viskosität ν , die sehr stark von der Temperatur abhängt. Auch dafür gibt es keine einfachen Modell.

In vielen Fällen schwanken die physikalischen Größen nur geringfügig um einen Mittelwert. Zum Beispiel hängt die Dichte ϱ von Meerwasser sowohl von der Temperatur T als auch vom Salzgehalt h ab, die Dichte ist also eine Funktion $\varrho(T, h)$. Wir können ϱ als Taylorreihe um die mittlere Temperatur T_0 und den mittleren Salzgehalt h_0 entwickeln:

$$\varrho(T, h) = \varrho_0 - \alpha(T - T_0) + \beta(h - h_0).$$

In Klimamodellen betrachten wir typischerweise nur kleine Abweichungen von Mittelwerten, so dass ein solches Modell sehr erfolgreich sein kann.

2.1.5 Boussinesq-Approximation

Die Strömung in der Erdatmosphäre kann offensichtlich nicht als inkompressibel betrachtet werden, die Dichte ist offenbar nicht konstant. Der Zustand der Atmosphäre weicht jedoch nur wenig einem mittleren Dichteprofil ϱ_0 ab, welches im wesentlichen durch das Temperaturprofil festgelegt ist. Im Normalzustand nimmt die Temperatur der Atmosphäre ziemlich genau linear ab bis zur Höhe der Thermopause. Auf die horizontale Komponente der Strömung hat eine Abweichung des Temperaturprofils kaum einen Einfluss, denn andere Terme der Navier-Stokes-Gleichung (2.7) sind bedeutender. Für die vertikale Bewegung ist der Term der äusseren Kräfte, nämlich die Schwerkraft, dominant. Wir können dies berücksichtigen, indem wir die Erdbeschleunigung g durch

$$g \frac{\varrho}{\varrho_0} \tag{2.11}$$

ersetzen. Diese Approximation ist bekannt als die Boussinesq-Approximation. Für unsere Zwecke hier brauchen wir nicht mehr als (2.11). Dies wird bei der Herleitung der Lorenz-Gleichung in Abschnitt 2.2 benötigt. Für die vollständigen Boussinesq-Gleichungen siehe [skript:kaperengler].

2.1.6 Inkompressible zweidimensionale Strömung

Die Kontinuitätsgleichung und die Navier-Stokes-Gleichung gelten auch für eine zweidimensionale Strömung. Im Allgemeinen ist die Strömung nicht wesentlich leichter zu berechnen. Nur im Falle einer inkompressiblen Strömung oder der Boussinesq-Approximation spielt die Dichte in den Gleichungen keine Rolle, was erlaubt, sie weiter zu vereinfachen:

$$0 = -\nabla \cdot \vec{v} \tag{2.12}$$

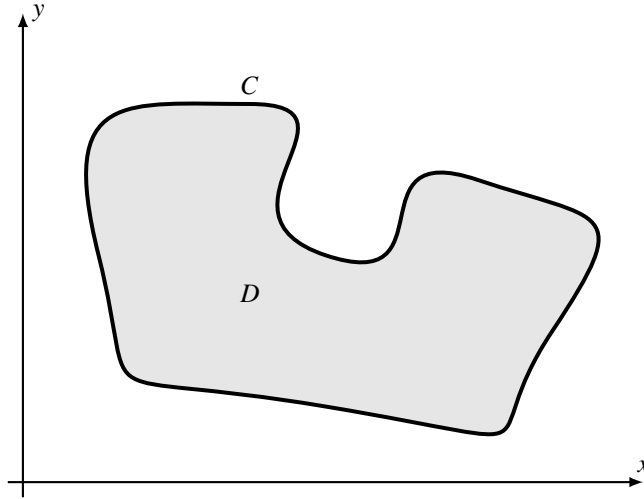


Abbildung 2.2: Satz von Green: Das Wegintegral entlang der Randkurve C stimmt mit dem zweifachen Integral über D überein.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{v}\vec{v}) + \vec{b} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \tau. \quad (2.13)$$

Im Falle der Boussinesq-Approximation kommt auf der rechten Seite noch ein Term für die Auftriebskraft hinzu.

Die Gleichungen (2.12) und (2.13) bilden ein System von partiellen Differentialgleichungen für die zwei unbekannten Funktionen v_x und v_y , die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit. Wir werden im Folgenden zeigen, dass die (2.12) ermöglicht, das System auf eine einzelne partielle Differentialgleichung für nur eine einzige Funktion zu reduzieren.

Satz von Green

Die Kontinuitätsgleichung (2.12) ist ausgeschrieben

$$0 = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}.$$

Die Divergenz auf der rechten Seite kommt auch im Satz von Green vor:

Satz 2.3 (Green). *Sei D in kompaktes Gebiet in der x - y -Ebene mit Rand $\partial D = C$. Weiter seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die in D stetig differenzierbar sind. Dann gilt*

$$\iint_D \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (f(x, y) dx + g(x, y) dy) \quad (2.14)$$

(Abbildung 2.2).

Das Integral auf der rechten Seite wird mit Hilfe einer Parametrisierung $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ der Randkurve C definiert.

$$\oint_C f(x, y) dx = \int_a^b f(\gamma_x(t), \gamma_y(t)) \dot{\gamma}_x(t) dt,$$

$$\oint_C g(x, y) dy = \int_a^b g(\gamma_x(t), \gamma_y(t)) \dot{\gamma}_y(t) dt.$$

Es kann auch vektoriell mit dem Skalarprodukt als

$$\oint_C \underbrace{\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}}_{=\vec{w}} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_x \\ \dot{\gamma}_y \end{pmatrix} dt = \oint_C \vec{w} \cdot \dot{\gamma}(t) dt =: \oint_C \vec{w} \cdot d\vec{s}$$

geschrieben werden kann.

Stromfunktion

Wir wenden den Satz 2.3 von Green auf die Funktionen $f(x, y) = -v_y(x, y)$ und $g(x, y) = v_x(x, y)$ an. Die Formel (2.14) ergibt

$$\oint_C (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy) = \iint_D \underbrace{\frac{\partial v_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(x, y)}{\partial y}}_{=0} dx dy = 0. \quad (2.15)$$

Man kann dieses Resultat auch wie folgt interpretieren. Wenn C_1 und C_2 zwei Kurven sind, die den Punkt A mit dem Punkt B verbinden, dann lässt sich eine geschlossene Kurve C konstruieren, indem zuerst die Kurve C_1 von A nach B durchlaufen wird und dann die Kurve C_2 in umgekehrter Richtung von B nach A . Die Formel (2.15) besagt dann, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_C (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy) \\ &= \int_{C_1} (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy) - \int_{C_2} (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy) \end{aligned}$$

oder

$$\Rightarrow \int_{C_1} (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy) = \int_{C_2} (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy).$$

Das Wegintegral hängt also nicht von der Wahl des Weges ab, jeder Weg von A nach B führt auf den gleichen Wert des Integrals.

Wir halten den Punkt A fest und definieren die Funktion

$$\psi(B) = \int_C (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy)$$

für einen beliebigen Weg von A nach B . Zum Beispiel können für die Berechnung die Kurven C_1 oder C_2 in Abbildung 2.3 verwendet werden. Damit lassen sich die Integrale ausschreiben:

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \int_{C_1} (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy) = - \int_{x_0}^x v_y(\xi, y_0) d\xi + \int_{y_0}^y v_x(x, \eta) d\eta \\ &= \int_{C_2} (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy) = \int_{y_0}^y v_x(x_0, \eta) d\eta - \int_{x_0}^x v_y(\xi, y) d\xi. \end{aligned}$$

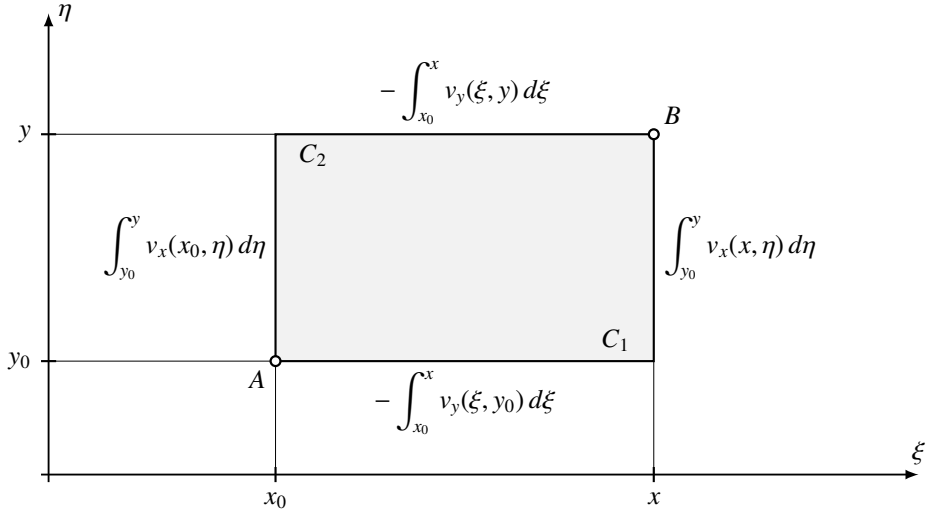


Abbildung 2.3: Verschiedene Pfade zur Berechnung der Funktion $\psi(B)$ führen auf den gleichen Wert von $\psi(B)$ und ermöglichen, die partiellen Ableitungen zu berechnen.

Diese Ausdrücke erlauben uns, die partiellen Ableitungen von $\psi(x, y)$ zu berechnen. Für die Ableitung nach x verwenden wir den zweiten Ausdruck, für die Ableitung nach y den ersten. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x v_y(\xi, y) d\xi = -v_y(x, y), \\ \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_0}^y v_x(x, \eta) d\eta = v_x(x, y).\end{aligned}$$

In vektorieller Form kann man dies auch als

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= J} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{pmatrix} = J \nabla \psi \quad (2.16)$$

schreiben. Aus der Funktion ψ lässt sich das Vektorfeld \vec{v} also wieder rekonstruieren. Sie heisst die *Stromfunktion* des Vektorfeldes \vec{v} . Natürlich ist $\psi(x, y)$ nur bis auf eine Konstante bestimmt.

Umgekehrt ist für jede beliebige Funktion $\varphi(x, y)$ das Vektorfeld $\vec{u} = J \nabla \varphi$ divergenzfrei:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = 0.$$

Die Darstellung (2.16) des Geschwindigkeitsfeldes erlaubt eine geometrische Interpretation. Der Gradient $\nabla \psi$ ist ein Vektorfeld, welches auf den Niveaulinien der Funktion ψ senkrecht steht. Je schneller die Zunahme von ψ , desto grösser ist der Vektor $\nabla \psi$.

Die Matrix J ist eine Drehmatrix, sie dreht Vektoren um 90° im Gegenuhrzeigersinn. Die Vektoren $J \nabla \psi$ sind also tangential an die Niveaulinien, die Niveaulinien sind also gleichzeitig die Stromlinien der Strömung. Ist die Strömung auf ein kompaktes Gebiet beschränkt, dann ist der Rand des Gebietes eine Stromlinie, also eine Niveaulinie von ψ . Da ψ nur bis auf eine Konstante festgelegt

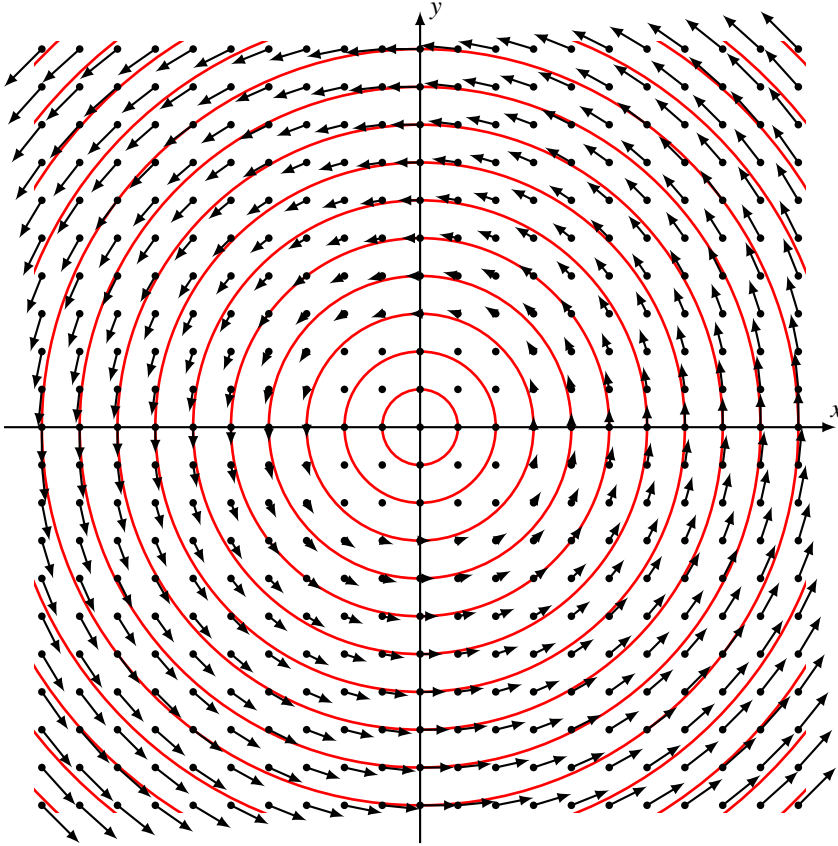


Abbildung 2.4: Strömungsfunktion $\psi(x, y) = a(x^2 + y^2)$ und das zugehörige Vektorfeld. Die Strömungsgeschwindigkeit ist proportional zum Radius, es handelt sich also um eine starre Drehung um den Nullpunkt.

ist, kann man ψ so wählen, dass der Rand des Gebietes durch die Gleichung $\psi(x, y) = 0$ beschrieben wird.

Die Funktion $\psi(x, y) = a(x^2 + y^2)$ führt auf das Vektorfeld

$$\vec{v} = J\nabla\psi = 2a\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

(Abbildung 2.4). Die Strömungsgeschwindigkeit ist $2a\sqrt{x^2 + y^2} = 2ar$, es handelt sich also um eine starre Drehung um den Nullpunkt des Koordinatensystems mit Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2a$.

Vorticity

Wir suchen eine Grösse, mit der wir das Ausmass messen können, wie schnell sich das Fluid dreht. Die Winkelgeschwindigkeit bei der Drehung um den Punkt (x, y) können wir durch Vergleich der

Geschwindigkeit an den Punkten $(x \pm h, y)$ und $(x, y \pm h)$ finden. Es ist

$$\omega = \frac{v_y(x+h, y) - v_y(x-h, y)}{2h} = \frac{-v_x(x, y+h) + v_x(x, y-h)}{2h}.$$

Beim Grenzübergang $h \rightarrow 0$ erhalten wir

$$\omega = \frac{\partial v_y(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial v_x(x, y)}{\partial y} \quad \text{oder} \quad 2\omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Damit haben wir eine Grösse gefunden, die als Mass für die Drehgeschwindigkeit dienen kann.

Definition 2.4. Ist \vec{v} das Geschwindigkeitsfeld der Strömung, dann schreiben wir

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \zeta.$$

Die Funktion ζ heisst die Vorticity des Strömungsfeldes.

Beschreibt man die Strömung mit Hilfe der Strömungsfunktion, dann gilt für die Vorticity

$$\zeta = \nabla \times \vec{v} = \nabla \times J \nabla \psi = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = -\Delta \psi. \quad (2.17)$$

Der Laplace-Operator verbindet also die Strömungsfunktion direkt mit der Vorticity. Für die Strömung in einem kompakten Gebiet Ω ist der Rand eine Niveaulinie von ψ . Wie früher dargelegt können wir ψ so wählen, dass $\psi = 0$ gilt auf dem Rand. Bei gegebener Vorticity ζ ist daher ψ die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta \psi = -\zeta \quad \text{in } \Omega \quad \psi = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (2.18)$$

Die Theorie der elliptischen partiellen Differentialgleichungen sagt, dass ψ eindeutig bestimmt ist. Statt die Strömungsgleichungen für ψ zu lösen, können wir also auch versuchen, eine Gleichung für die Vorticity ζ aufzustellen und dann mit Hilfe des elliptischen partiellen Randwertproblems (2.18) die Strömungsfunktion und schliesslich \vec{v} bestimmen.

Um die Differentialgleichung für ζ zu finden, wenden wir den Operator $\nabla \times$ auf die Bewegungsgleichung (2.13) an:

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \times (\nabla \cdot (\vec{v} \vec{v})) + \nabla \times \vec{b} + \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \tau \right).$$

Die linke Seite ist die Zeitableitung der Vorticity. Die Divergenz von $\vec{v} \vec{v}$ ist

$$(\nabla \cdot (\vec{v} \vec{v}))_j = \sum_i \frac{\partial}{\partial i} v_i v_j = \left(\sum_i \frac{\partial v_i}{\partial i} \right) v_j + \sum_i v_i \frac{\partial v_j}{\partial i} = \underbrace{(\nabla \cdot \vec{v})}_{=0} v_j + \vec{v} \cdot \nabla v_j.$$

Es folgt

$$\nabla \cdot (\vec{v} \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}.$$

Daraus kann man jetzt auch die Vorticity berechnen:

$$\nabla \times (\nabla \cdot (\vec{v} \vec{v})) = \nabla \times (\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \nabla v_y) - \frac{\partial}{\partial y} (\vec{v} \cdot \nabla v_x)$$

$$\begin{aligned}
 &= \vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \cdot \nabla v_y - \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \cdot \nabla v_x \\
 &= \vec{v} \cdot \nabla \zeta + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial y} \\
 &= \vec{v} \cdot \nabla \zeta + \frac{\partial v_x}{\partial x} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial v_y}{\partial y} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\
 &= \vec{v} \cdot \nabla \zeta + (\nabla \cdot \vec{v}) \zeta = \vec{v} \cdot \nabla \zeta.
 \end{aligned}$$

Wir waren also nicht ganz erfolgreich, die Geschwindigkeit aus der Bewegungsgleichung zu eliminieren. Wir haben nur die Form

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla \zeta + \nabla \times \vec{b} + \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \tau \right)$$

erreicht. Ausserdem ist es möglich, dass die Spannungen τ ebenfalls von den Geschwindigkeiten abhängig sind.

Wir können aber die Vorticity auch noch durch die Strömungsfunktion ausdrücken. Ersetzen wir $\zeta = -\Delta\psi$ in der Bewegungsgleichung, erhalten wir

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} = -J\nabla\psi \cdot \nabla\Delta\psi + \nabla \times \vec{b} + \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \tau \right). \quad (2.19)$$

Jetzt ist die Strömung vollständig durch die einzige unbekannte Funktion ψ .

Der erste Term auf der rechten Seite von (2.19) kann noch etwas kompakter geschrieben werden. Es ist

$$(J\nabla f) \cdot (\nabla g) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite kommt auch in anderem Zusammenhang vor.

Definition 2.5. Seien f und g Funktionen der Variablen x und y . Dann heisst

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$$

die Funktionaldeterminante oder Jacobische Determinante von f und g .

Mit dieser Definition wird die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} = \nabla \times \vec{b} + \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \tau \right) - \frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x, y)}. \quad (2.20)$$

Im Falle der Boussinesq-Näherung kommt noch ein Term für den Auftrieb hinzu.

Spannungen und Stromfunktion

Für eine newtonsche Flüssigkeit haben wir in (2.10) bereits den Spannungstensor durch den Druck und die Spannungen ausgedrückt. Aus der Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit haben wir

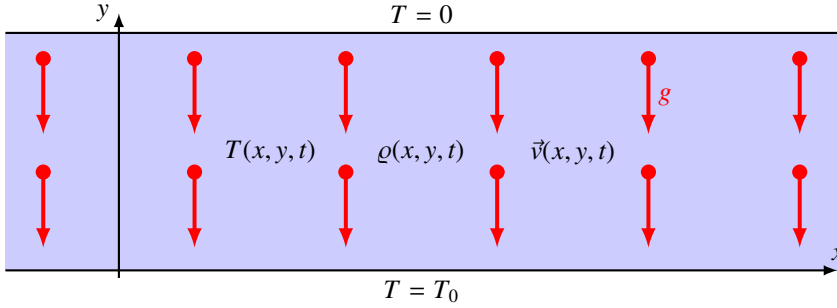


Abbildung 2.5: Definitionsbereich für das Lorenz-Modell der Atmosphäre. Gesucht sind Temperatur $T(x, y, t)$, Dichte $\rho(x, y, t)$ und Geschwindigkeit $\vec{v}(x, y, t)$ in einem Rechteckgebiet $\mathbb{R} \times [0, \pi]$. Die Temperatur ist an den Rändern vorgegeben, es gilt $T(x, 0, t) = T_0$ und $T(x, \pi, t) = 0$. Im Inneren Gebiet wird die Schwerkraft g auf die Luft.

die Differentialgleichung (2.20) erhalten, indem wir den Operator $\nabla \times$ angewendet haben. Wir müssen jetzt also

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} (\nabla p - \nu \Delta \vec{v}) \right) = \frac{1}{\rho} (\nabla \times \nabla p - \nu \nabla \times \Delta \vec{v}) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \Delta \nabla \times \vec{v} \right)$$

berechnen. Der erste Term fällt weg, weil es auf die Reihenfolge der zweiten Ableitungen nicht ankommt. Im zweiten Term haben wir angekommen, dass ν nicht vom Ort abhängt. Dies ist genau genommen nicht richtig, da ν zum Beispiel stark von der Temperatur abhängt, die ebenfalls nicht konstant sein muss. Der zweite Term in der Klammer ist natürlich einfach $\nu \Delta \zeta = -\nu \Delta^2 \psi$. Damit bekommen wir die Bewegungsgleichung für ψ in der Form

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = \nabla \times \vec{b} + \frac{\nu}{\rho} \Delta^2 \psi - \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(x, y)}. \quad (2.21)$$

2.2 Lorenz-Modell

Sowohl die Atmosphäre als auch die Ozeane werden durch die hydrodynamischen Gleichungen beschrieben. Es stellt sich damit die Frage, in welchem Masse sich daraus eine praktikable Vorhersage sowohl von Wetter also auch des Klimas ableiten lässt. In den Sechzigerjahren hat Edward Lorenz versucht, diese Frage mit einem vereinfachten Modell zu beantworten. Ziel dieses Abschnittes ist, das Lorenz-Modell aus den Gleichungen der Fluiddynamik herzuleiten.

2.2.1 Modellbeschreibung

Es soll ein dünner Schnitt durch die Atmosphäre modelliert werden. Da Atmosphäre im Vergleich zur Krümmung der Erdoberfläche sehr dünn ist, können wir sie als eben annehmen. Wir verwenden die Koordinate x parallel zur Erdoberfläche und y als Höhe (Abbildung 2.5). Gesucht ist also die Temperatur $T(x, y, t)$ und die Dichte $\rho(x, y, t)$ in Abhängigkeit von Position und Zeit sowie der Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(x, y, t) \\ v_y(x, y, t) \end{pmatrix}.$$

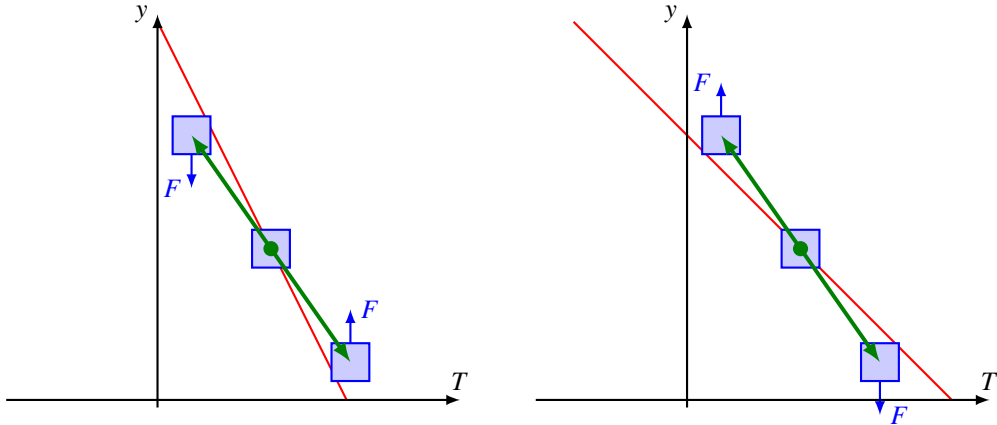


Abbildung 2.6: Stabilität der Atmosphäre: bewegt sich ein Luftpaket in der Atmosphäre nach oben oder unten, expandiert oder kontrahiert es und verändert seine Temperatur adiabatisch (grün). Ist diese Temperaturänderung grösser als der aktuelle Temperaturgradient (links), ändert sich die Dichte der Luft weniger stark als die der Umgebungsluft, die Bewegung wird gestoppt, die Atmosphäre ist im Gleichgewicht. Andernfalls wird die Bewegung beschleunigt, die Atmosphäre ist instabil (rechts).

Die Funktionen T , ϱ , v_x und v_y sind definiert in einem Streifen. Der Einfachheit halber wählen wir die Höhe des Streifens als π . Wir können dies erreichen, indem wir die Längeneinheit geeignet wählen: ist h die "Dicke" der Atmosphäre¹, wählen wir h/π als Längeneinheit. Das Definitionsgebiet für die Funktionen ist daher $R = \mathbb{R} \times [0, \pi]$.

Die Temperatur der Atmosphäre an der Erdoberfläche wird im wesentlichen von der Temperatur des Bodens bestimmt, der von der einfallenden Strahlung erwärmt wird, es soll also $T(x, 0, t) = T_0$ gelten. Am oberen Rand des Schnittes schliesst die sehr dünne Hochatmosphäre an, die im Wesentlichen in einem Strahlungsgleichgewicht mit der Umgebung steht. Da wir die Dichte im wesentlichen als konstant ansehen wollen und damit den Einfluss der Temperatur auf die Dichte nicht exakt modellieren wollen, sind wir nicht gezwungen, eine bestimmte Temperaturskala zu verwenden. Wir können daher willkürlich die Temperatur am oberen Rand als $T(x, \pi, t) = 0$ festlegen.

Auf das Medium im Streifen wirkt natürlich die Erdbeschleunigung, die wir ebenfalls als konstant annehmen dürfen, da die Dicke der Atmosphäre im Vergleich zum Erdradius sehr klein ist.

Stabile Atmosphäre

Die Temperatur muss im Gebiet von unten nach oben abnehmen. Aber auch der Druck muss mit zunehmender Höhe abnehmen. Wenn ein Luftpaket aufsteigt, wird es wegen des geringer werdenden Druckes expandieren und damit adiabatisch abkühlen. Wenn die Temperatur der umgebenden Luft schneller abnimmt als die adiabatische Abkühlung, dann ist das Luftpaket in seiner neuen Höhe wärmer und damit leichter als die Umgebung, es wird weiter ansteigen (Abbildung 2.6). Wenn die

¹Die Konvektion in der Atmosphäre, welche vom Lorenz-Modell vor allem beschrieben wird, findet im Wesentlichen nur im untersten Teil der Atmosphäre, der sogenannten Troposphäre statt. Die Troposphäre zeichnet sich aus durch mehr oder weniger lineare Temperaturabnahme bis zur Höhe der sogenannten Tropopause in etwa 10km Höhe. Wir können also die Höhe der Tropopause als h verwenden.

Temperatur der umgebenden Luft langsamer abnimmt als die adiabatische Abkühlung, dann ist das Luftpaket in der neuen Höhe kälter und damit Dichter als die Umgebung, es wird wieder absinken. Solange der Temperaturunterschied nicht zu gross ist, wird sich also ein Zustand einstellen, in dem die Luft in Ruhe bleibt, der Wärmetransport erfolgt ausschliesslich durch Wärmeleitung.

Instabilität

Bei genügend grosser Temperaturdifferenz wird die Atmosphäre jedoch instabil, der Wärmetransport wird zusätzlich von Konvektion übernommen. Die entstehenden Konvektionszellen können wegen der Translationssymmetrie entlang der x -Achse an einer beliebigen Stelle entstehen, es gibt also unendlich viele Lösungen, von denen eine gewählt werden muss. In der Realität würden kleine Temperaturfluktuationen dies unterstützen, kleine Unterschiede in den Anfangsbedingungen führen also zu völlig verschiedenen Strömungen. Diese sensitive Abhängigkeit der Lösung von Anfangsbedingungen wird oft als ein Kennzeichen von Chaos angesehen.

Im folgenden sollen zunächst die Gleichungen der Fluiddynamik auf die vorliegende Situation spezialisiert werden. Mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes soll dann die partielle Differentialgleichung weiter auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen reduziert werden. In numerischen Simulationen soll schliesslich gezeigt werden, dass die Lorenz-Gleichungen tatsächlich chaotische Lösungen haben.

Temperaturgleichung

Wir haben in (1.5) bereits eine Gleichung gefunden, welche den Wärmetransport in einem Fluid beschreibt. Wir können daraus aber noch eine etwas einfacher zu handhabende Form gewinnen, indem wir nur die Anomalie der Temperatur betrachten, also die Abweichung vom Temperaturprofil, welches sich bei einem ruhenden Fluid einstellt. Aufgrund der gewählten Geometrie ist

$$T_0(x, y, t) = T_0 \left(1 - \frac{y}{\pi} \right)$$

in einem ruhenden Fluid, wir setzen daher

$$\vartheta(x, y, t) = T(x, y, t) - T_0 \left(1 - \frac{y}{\pi} \right) \quad \text{oder} \quad T(x, y, t) = T_0 \left(1 - \frac{y}{\pi} \right) + \vartheta(x, y, t)$$

und setzen dies in die Gleichung (1.5) ein. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \frac{\partial T}{\partial t} & \Delta T &= \Delta \vartheta \\ -\vec{v} \cdot \nabla T &= -\vec{v} \cdot \nabla \vartheta + v_y \frac{T_0}{\pi} \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= -\vec{v} \cdot \nabla \vartheta + v_y \frac{T_0}{\pi} + \kappa \Delta \vartheta. \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit kann mit Hilfe von $\vec{v} = -\nabla \psi$ wieder durch die Stromfunktion ausgedrückt werden.

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -J \nabla \psi \cdot \nabla \vartheta + \frac{T_0}{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \kappa \Delta \vartheta = \kappa \Delta \vartheta + \frac{T_0}{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \kappa \Delta \vartheta + \frac{T_0}{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \vartheta)}{\partial(x, y)}. \quad (2.22)$$

Man beachte, dass die Gleichung bis auf den letzten Term linear in ψ und ϑ ist.

Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung haben wir in (2.21) bereits in die für ein zweidimensionales inkompressibles Fluid geeignete Form gebracht. Da die Schwerkraft konstant ist, fällt der Term $\nabla \times \vec{b}$ weg.

Aus der Boussinesq-Näherung (2.11) erhalten wir noch einen Term, der den Auftrieb beschreibt. Auftrieb entsteht offenbar genau dann, wenn die Temperatur vom linearen Temperaturprofil abweicht. Wir nehmen an, dass die Dichteabweichung proportional zur Temperaturabweichung ist, also

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g(1 - c\vartheta) \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla \times \vec{b} = c \frac{\partial \vartheta}{\partial x}.$$

Damit erhalten wir die Bewegungsgleichung in der Form

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = \nu \Delta^2 \psi + c \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(x, y)}. \quad (2.23)$$

Man beachte, dass die Gleichung bis auf den letzten Term linear in ψ und ϑ ist.

2.2.2 Grundgleichungen

In den Gleichungen (2.22) und (2.23) haben wir ein partielles Differentialgleichungssystem für die beiden unbekannten Funktionen ψ und ϑ gefunden, die wir der besseren Übersicht halber nochmals als

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} &= \nu \Delta^2 \psi + c \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(x, y)} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \kappa \Delta \vartheta + \frac{T_0}{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \vartheta)}{\partial(x, y)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

hinschreiben. Allerdings ist das System von dritter Ordnung, da erste Ableitungen von ψ und $\Delta \psi$ vorkommen. Man sieht aber auch, dass keine anderen Ableitungen vorkommen als erste Ableitungen von ψ oder $\Delta \psi$. Dies ist geeignet, die Diskussion zu vereinfachen, weshalb wird darauf achten, diese Struktur nicht zu zerstören. Wir können die linke Seite der Gleichungen zum Beispiel vektoriell schreiben als

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Delta \psi \\ \vartheta \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= D} \underbrace{\begin{pmatrix} \psi \\ \vartheta \end{pmatrix}}_{= u} = \frac{\partial}{\partial t} D u$$

Entsprechend lassen sich die ersten zwei Terme auf der rechten Seite schreiben als

$$\begin{pmatrix} \nu \Delta^2 & c \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{T_0}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} & \kappa \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \vartheta \end{pmatrix} = A u.$$

Die Operatoren D und A sind beide linear.

Für die Diskussion der Zeitentwicklung der Lösungen ist es nützlich, die linearen Terme von den nichtlinearen zu trennen. Wie bereits bemerkt treten Nichtlinearitäten nur in den Funktionaldeterminanten auf. Wir schreiben

$$N u = \begin{pmatrix} -\frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(x, y)} \\ -\frac{\partial(\psi, \vartheta)}{\partial(x, y)} \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir das Differentialgleichungssystem in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} Du = Au + Nu \quad (2.25)$$

mit den linearen Operatoren D und A und dem nichtlinearen Operator N schreiben.

Die allgemeine Form (2.25) eines Klimamodells ermöglicht uns, das Klimavorhersageproblem in dem etwas allgemeineren Rahmen der Vorhersage für ein beliebiges nichtlineares dynamisches System zu studieren. Zwar ist (2.25) immer noch ein partielles Differentialgleichungssystem und die Operatoren D , A und N sind partielle Differentialoperatoren. Wenn es aber gelingt, die Funktionen zu diskretisieren und durch Vektoren in einem endlichdimensionalen Vektorraum zu ersetzen, dann werden D und A zu linearen Abbildungen, die durch Matrizen beschrieben werden können, und N wird zu einer nichtlinearen Funktion auf einem endlichdimensionalen Vektorraum. Das Klimamodell wird also zu einer nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichung in einem endlichdimensionalen Raum. Solche Differentialgleichungen sind im Detail studiert worden und ihre Eigenschaften sind sehr gut verstanden. In Kapitel 3 werden wir einen Teil der gut ausgebauten Theorie zusammenfassen. Den Weg von (2.25) zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung in nur drei Dimensionen soll im folgenden Abschnitt 2.2.3 vorgeführt werden.

2.2.3 Umwandlung in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem

Ausgehend von (2.24) versuchen wir nun, eine gewöhnliche Differentialgleichung zu gewinnen, welche näherungsweise wiedergibt, was passiert, wenn im betrachteten System Konvektion einsetzt. Eine einzelne Konvektionszelle hat Stromlinien, wie sie in Abbildung 2.7 dargestellt sind. Vernachlässigt man in der ersten der Differentialgleichungen (2.24) ϑ und den nichtlinearen Term, bleibt eine Wärmeleitungsgleichung für $\Delta\psi$. Die Wärmeleitungsgleichung auf einem Rechteckgebiet einer solchen Zelle könnte man mit einem Separationsansatz zu lösen versuchen, dies würde auf Lösungen der Form $\sin(ax)\sin(y)$ führen. Wir versuchen daher eine Lösung für $\psi(x, y, t)$ in der etwas allgemeineren Form

$$\psi(x, y, t) = X(t) \sin(ax) \sin(y) \quad (2.26)$$

zu finden. Die Konvektion sorgt dafür, dass im Bereich grosser Strömungsgeschwindigkeit der Temperaturgradient stark vom linearen Verlauf abweicht. Die vertikale Strömungsgeschwindigkeit ist bei 0 und π hoch, also dort wo $\cos(ax)$ gross ist. Wir setzen daher die Lösung für die Temperatur $\vartheta(x, y, t)$ an in der Form

$$\vartheta(x, y, t) = Y(t) \cos(ax) \sin(y) - Z(t) \sin(2y). \quad (2.27)$$

Das Ziel ist, für die drei Funktionen $X(t)$, $Y(t)$ und $Z(t)$ gewöhnliche Differentialgleichungen aufzustellen, also die Ortsabhängigkeit der Lösungsfunktionen vollständig zu eliminieren. Diese Technik heisst in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen auch die Transformationsmethode.

Wir können allerdings nicht erwarten, dass dies exakte Lösungen sind. Beim Einsetzen in die Differentialgleichungen werden auch noch andere Terme entstehen. Unter der Annahme, dass die genannten Terme die Gestalt der Stromlinien genau genug wiederzugeben in der Lage sind, vernachlässigen wir alle Terme, die sich nicht als Vielfache der Funktionen

$$\sin(ax) \sin(y), \quad \cos(ax) \sin(y) \quad \text{und} \quad \sin(2y) \quad (2.28)$$

schreiben lassen.

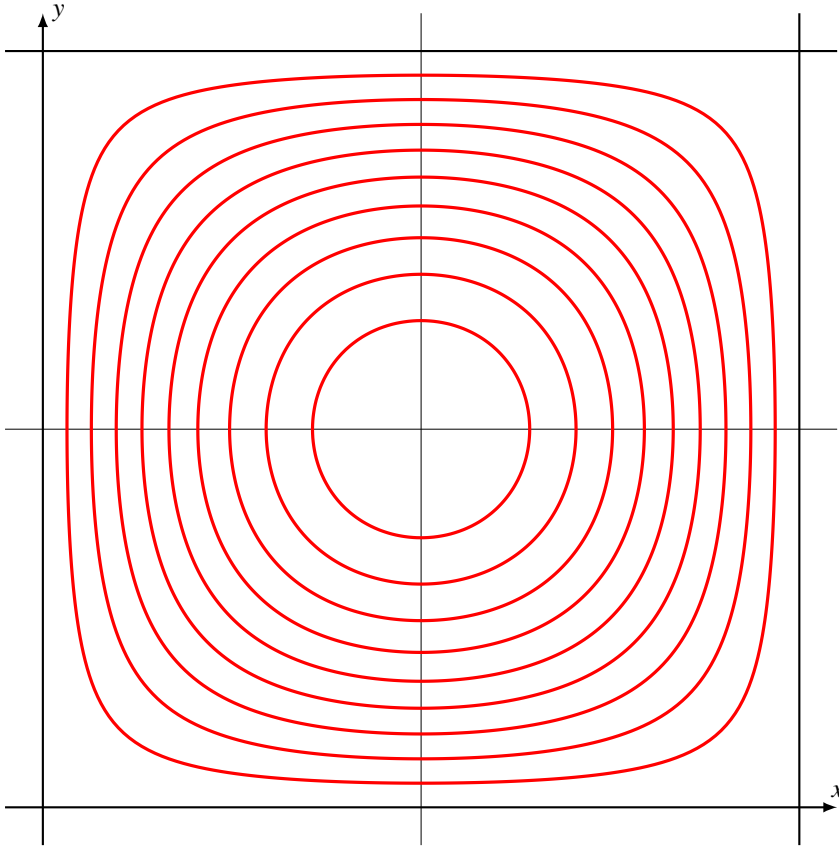


Abbildung 2.7: Stromlinien in einer einzelnen Konvektionszelle

Wir müssen jetzt also die Lösungsansätze (2.26) und (2.27) in die Differentialgleichungen (??) einsetzen. Die linke Seite ist jeweils einfach, da die Zeitabhängigkeit nur noch in den Funktion $X(t)$, $Y(t)$ und $Z(t)$ steckt. Auf der linken Seite können wir daher einfach $X(t)$ durch $\dot{X}(t)$ ersetzen und analog für die anderen beiden Koeffizientenfunktionen.

Die Ortsableitungen geben etwas mehr zu tun:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\psi &= X(t)a \cos(ax) \sin(y) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi &= -X(t)a^2 \sin(ax) \sin(y) \\ \Delta\psi &= -(a^2 + 1)\psi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\psi &= X(t) \sin(ax) \cos(y) \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi &= -X(t) \sin(ax) \sin(y) \\ \Delta^2\psi &= (a^2 + 1)^2\psi.\end{aligned}$$

für ψ und

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\vartheta &= -aY(t) \sin(ax) \sin(y) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\vartheta &= -a^2Y(t) \cos(ax) \sin(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\vartheta &= Y(t) \cos(ax) \cos(y) - 2Z(t) \cos(2y) \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\vartheta &= -Y(t) \cos(ax) \sin(y) + 4Z(t) \sin(2y)\end{aligned}$$

$$\Delta\vartheta = -(a^2 + 1)Y(t) \cos(ax) \sin(y) + 4Z(t) \sin(2y)$$

für ϑ . In den Differentialgleichungen brauchen wir aber noch die Funktionaldeterminanten für die nichtlinearen Terme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} = -(a^2 + 1) \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial(\psi, \vartheta)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\vartheta}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \\ &= X(t) \left(a \cos(ax) \sin(y) (Y(t) \cos(ax) \cos(y) - 2Z(t) \cos(2y)) \right. \\ &\quad \left. - \sin(ax) \cos(y) (-aY(t) \sin(ax) \sin(y)) \right) \\ &= X(t) \left(\underbrace{a(\cos^2(ax) + \sin^2(ax))}_{=1} Y(t) \underbrace{\sin(y) \cos(y)}_{\frac{1}{2} \sin(2y)} - 2a \cos(ax) \sin(y) Z(t) \cos(2y) \right) \\ &= \frac{1}{2} a X(t) Y(t) \sin(2y) - 2a X(t) Z(t) \cos(ax) \sin(y) \cos(2y) \\ &= \frac{1}{2} a X(t) Y(t) \sin(2y) - 2a X(t) Z(t) \cos(ax) \frac{1}{2} (\sin(-y) + \sin(3y)) \\ &= \frac{1}{2} a X(t) Y(t) \sin(2y) + 2a X(t) Z(t) \cos(ax) \sin(y) - 2a X(t) Z(t) \cos(ax) \sin(3y). \end{aligned}$$

Der letzte Term kann nicht durch Funktionen aus der Liste (2.28) ausgedrückt werden, und muss daher vernachlässigt werden. Setzen wir jetzt diese Ableitungen in die Differentialgleichungen ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} -(a^2 + 1)\dot{X}(t) \sin(ax) \sin(y) &= \nu(a^2 + 1)^2 X(t) \sin(ax) \sin(y) - acY(t) \sin(ax) \sin(y) \\ \dot{Y}(t) \cos(ax) \sin(y) - \dot{Z}(t) \sin(2y) &= -\kappa(a^2 + 1)Y(t) \cos(ax) \sin(y) + 4\kappa Z(t) \sin(2y) \\ &\quad + \frac{T_0}{\pi} X(t) a \cos(ax) \sin(y) \\ &\quad - \frac{a}{2} X(t) Y(t) \sin(2y) - 2a X(t) Z(t) \cos(ax) \sin(y). \end{aligned}$$

Wir vergleichen die Koeffizienten der Funktionen aus der Liste (2.28) dann erhalten wir das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= -\nu(a^2 + 1)X(t) + \frac{ac}{a^2 + 1} Y(t) \\ \dot{Y}(t) &= \frac{aT_0}{\pi} X(t) - (a^2 + 1)\kappa Y(t) - aX(t)Z(t) \\ \dot{Z}(t) &= -4\kappa Z(t) + \frac{a}{2} X(t)Y(t) \end{aligned} \tag{2.29}$$

für die Koeffizientenfunktionen $X(t)$, $Y(t)$ und $Z(t)$.

2.2.4 Dimensionslose Schreibweise

Die Form (2.29) der Lorenz-Gleichungen ist für eine Diskussion der Lösungen nicht besonders gut geeignet. Die komplizierte Form der Koeffizienten erschwert den Überblick. Ein übersichtlicheres

System erhält man, wenn man die folgenden Ersetzungen vornimmt:

$$\begin{aligned}x &= \frac{a}{\kappa(a^2 + 1) \sqrt{2}} X, \\y &= \frac{a^2 c}{\kappa \nu(a^2 + 1) \sqrt{2}} Y, \\z &= \frac{a^2 c}{\kappa \nu(a^2 + 1)^3} Z, \quad \text{und} \\t' &= \kappa(a^2 + 1) t.\end{aligned}$$

Damit werden die Differentialgleichungen zu

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= \varrho x - y - xz \\ \dot{z} &= -\beta z + xy\end{aligned}$$

mit den Konstanten

$$\sigma = \frac{\nu}{\kappa}, \quad \varrho = \frac{a^2 c T_0}{\kappa \nu \pi (a^2 + 1)^3}, \quad \text{und} \quad \beta = \frac{4}{a^2 + 1}.$$

Es stellt sich heraus, dass gewisse Lösungen dieser Differentialgleichung chaotisches Verhalten zeigen. Damit sind der Verhersagbarkeit von Wetterphänomenen bereits prinzipielle Grenzen gesetzt. Dies besagt aber nicht, dass sich das Klima nicht vorhersagen lässt, sondern nur, dass das Lorenzmodell nicht dazu geeignet ist, den Wärmetransport durch Konvektion in der Atmosphäre über längere Zeit zu modellieren. Die in Kapitel 5 dargestellten Modelle sind dazu durchaus in der Lage.

Kapitel 3

Differentiagleichungen

Modelle für das Klima oder für einzelne Teilaspekte des Klimas werden häufig in der Form einer Differentialgleichung formuliert. Die kurzfristigen Schwankungen einer Lösung entsprechen eher den Wettererscheinungen, die für unsere Betrachtungen nicht interessant sind. Für Klima-Betrachtungen suchen wir Lösungen der Differentialgleichungen, die über lange Zeit konstant sind, sogenannte Gleichgewichtslösungen. Diese werden natürlich von Parametern wie der CO_2 -Konzentration oder dem Salzgehalt der Meere abhängig sein. Die interessante Frage wird daher sein, wie sich die Gleichgewichtslösungen verändern, wenn die Parameter sich ändern.

In diesem Kapitel sollen die wichtigsten Eigenschaften von Vektor-Differentialgleichungen und der einfachsten Bifurkationen zusammengestellt werden. Das Thema Differentialgleichungen wurde 2016 im Mathematischen Seminar behandelt. Das Seminar-Buch [**skript:mathsem-dgl**] enthält eine vertiefte Diskussion der Theorie.

3.1 Grundlagen

Eine Differentialgleichung ist eine Beziehung zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen. Wir betrachten Funktionen der Zeit t mit Werten in \mathbb{R}^n und schreiben sie $x(t)$. Sei f eine Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : (x, t) \mapsto f(x, t).$$

Definition 3.1. Eine Funktion $x(t)$ heisst Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \tag{3.1}$$

zur Anfangsbedingung x_0 , wenn gilt $x(0) = x_0$ und

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t)$$

für alle $t > 0$.

Unter einigermaßen milden Bedingungen an die Funktion $f(x, t)$ ist sichergestellt, dass eine Differentialgleichung immer eine Lösung hat.

3.1.1 Autonome Differentialgleichungen

Wenn die Funktion f von der Zeit abhängt, wird es im allgemeinen keine konstanten Lösungen geben. Für die Klimadiskussion sind wir allerdings daran interessiert, ob ein Modell Lösungen hat, die sich mit der Zeit nicht ändern. Solche Lösungen zeigen uns, dass wir alle kurzfristigen Schwankungen, die wir dem Wetter zuordnen würden, ausgemittelt haben.

Definition 3.2. Eine Differentialgleichung der Form (3.1) heisst autonom, wenn die Funktion f nicht von der Zeit abhängt. Eine autonome Differentialgleichung kann als

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

geschrieben werden.

Die Forderung, dass die Differentialgleichung autonom sein soll, ist allerdings auf triviale Art zu erfüllen, indem man zu einer neuen unabhängigen Variablen übergeht und die bisherige Zeitvariable als letzte Komponente der Funktion $x(t)$ hinzufügt. Wir schreiben die Lösungsfunktionen als

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{und erweitern dies zu} \quad \bar{x}(s) = \begin{pmatrix} x_1(s) \\ \vdots \\ x_n(s) \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung, also die Funktion $f(x, t)$ schreiben wir

$$f(x, t) = f(x_1, \dots, x_n, t) \quad \text{mit Anfangsbedingung} \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$$

und erweitern dies nun zu einer Funktion \bar{f} für eine autonome Differentialgleichung für \bar{x}

$$\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}) \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit Anfangsbedingung} \quad \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Differentialgleichung für \bar{x} ist

$$\frac{d\bar{x}}{ds} = \bar{f}(\bar{x}), \tag{3.2}$$

dies ist offensichtlich eine autonome Differentialgleichung. Die letzte Komponenten von (3.2) ist die Differentialgleichung für \bar{x}_{n+1}

$$\frac{d\bar{x}_{n+1}}{ds} = 1$$

mit der Anfangsbedingung $x_{n+1}(0) = 0$, sie hat die Lösung $\bar{x}_{n+1}(s) = s$. Die Koordinate \bar{x}_{n+1} ist also nichts anderes als die ursprüngliche Zeitkoordinate. Aus der Lösung $\bar{x}(s)$ der autonomen Differentialgleichung kann die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung gewonnen werden, indem man einfach die letzte Koordinate weglässt:

$$x(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \vdots \\ \bar{x}_n(t) \end{pmatrix}.$$

Der Übergang zur autonomen Differentialgleichung erhöht die Dimension des Vektors. Dadurch wird die Diskussion kritischer Punkte und Gleichgewichtslösungen leider nicht vereinfacht. Statt eine Differentialgleichung nachträglich autonom zu machen ist daher im allgemeinen anzustreben, dass sie von vornherein autonom ist. In den nachfolgenden Beispielen gehen wir daher immer von autonomen Differentialgleichungssystemen aus.

3.2 Gleichgewichtslösungen und kritische Punkte

Wir gehen in diesem Abschnitt von einer autonomen Differentialgleichung der Form

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (3.3)$$

aus mit einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die Funktion f wird im Allgemeinen von weiteren Parametern abhängen wie zum Beispiel dem CO_2 -Gehalt der Atmosphäre oder der Salinität der Meere. Sofern nötig machen wir diese mit der Schreibweise $f(x, p)$ mit $p \in \mathbb{R}^m$ explizit sichtbar.

Definition 3.3. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heisst Gleichgewichtslösung wenn die konstante Funktion $x(t) = x_0$ eine Lösung der Differentialgleichung 3.3 ist.

Eine Gleichgewichtslösung ist daher eine Nullstelle der Funktion f , $f(x_0) = 0$.

Definition 3.4. Eine Nullstelle von f heisst kritischer Punkt der Differentialgleichung 3.3.

Da f ausserdem von den Parametern $p \in \mathbb{R}^m$ abhängt, wird die Menge der Nullstellen von f von p abhängen. Wir schreiben

$$N(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x, p) = 0\}$$

für die Menge der Nullstellen. Im Allgemeinen werden sich die Mengen $N(p)$ für verschiedene p unterscheiden.

Sei also $p_0 \in \mathbb{R}^m$ ein Parametervektor und x_0 eine Gleichgewichtslösung von f , also $f(x_0, p_0) = 0$. Unter zusätzlichen Annahmen über die Funktion f kann man zeigen, dass x_0 in einer Umgebung von p_0 zu einer Funktion $x_0(p)$ erweitert werden kann, derart dass $x_0(p)$ jeweils ein kritischer Punkt von f ist für die Parameterwerte p , also $f(x_0(p), p) = 0$. Diese Theorie ist für allerdings nicht besonders nützlich, denn sie sagt uns nur, dass sich kritische stetig in Abhängigkeit vom Parametervektor bewegen. Besonders interessant für die Diskussion des Klimawandels sind Fälle, wo Gleichgewichtslösungen sich sprunghaft ändern.

3.2.1 Stabilität

Wir betrachten eine Gleichgewichtslösung $x(t) = x_0$ der Differentialgleichung (3.3).

Definition 3.5. Die Gleichgewichtslösung $x(t) = x_0$ heisst stabil, wenn eine Lösung zu einer Anfangsbedingung \bar{x}_0 , die $|x_0 - \bar{x}_0| < \varepsilon$ erfüllt, für alle Zeiten nahe bei x_0 bleibt, also $|\bar{x}(t) - x_0| < \varepsilon$.

Beispiel. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = ax.$$

Sie hat die Gleichgewichtslösung $x(t) = 0$. Eine Lösung, die die Anfangsbedingung $x(0) = \varepsilon$ erfüllt, ist $x(t) = \varepsilon e^{at}$, denn

$$\frac{d}{dt} \varepsilon e^{at} = a \varepsilon e^{at}.$$

Wenn $a > 0$, dann wächst die Lösung exponentiell an, die Gleichgewichtslösung ist also nicht stabil. Für $a < 0$ dagegen nimmt $x(t) = \varepsilon e^{at}$ exponentiell schnell ab, die Gleichgewichtslösung ist stabil. \circ

Für eindimensionale Systeme ist Stabilität besonders einfach zu diskutieren, wir tun dies im Rahmen der Diskussion der wichtigsten Bifurkationstypen in Abschnitt 3.3.

3.2.2 Zeitumkehr

Wir gehen wieder von der autonomen Differentialgleichung (3.3) mit der Lösung $x(t)$ mit Anfangsbedingung x_0 aus. Ersetzen wir t durch $-s$, erhalten wir die autonome Differentialgleichung

$$-\frac{dx}{ds} = f(x), \quad (3.4)$$

mit der gleichen Anfangsbedingung. Die Funktion $s \mapsto x(-s)$ ist eine Lösung.

Die Zeitumkehr verändert den Stabilitätscharakter einer Gleichgewichtslösung. Ist x_0 eine stabile Gleichgewichtslösung, dann nehmen Lösungen mit Anfangsbedingungen in der Nähe von x_0 nicht weiter zu, sondern höchstens ab. Es ist also möglich, dass die Lösung nach Zeitumkehr instabil wird.

Bei zweidimensionalen Systemen ist es aber durchaus möglich, eine Gleichgewichtslösung in beiden Zeitrichtungen instabil sind. Als Beispiel betrachten wir das zweidimensionale Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Sie hat die beiden Lösungen

$$x_1(t) = \varepsilon \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_2(t) = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

zu den Anfangsbedingungen

$$x_1(0) = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Die Lösung $x_1(t)$ wächst für $t > 0$ exponentiell an, die Gleichgewichtslösung $x(t) = 0$ kann also für $t > 0$ nicht stabil sein. Für $t \rightarrow -\infty$ nimmt $x_1(t)$ exponentiell ab, aber trotzdem ist die Nulllösung nicht stabil, dann die Lösung $x_2(t)$ nimmt für $t \rightarrow -\infty$ exponentiell zu.

3.3 Bifurkationen eindimensionaler Systeme

In diesem Abschnitt betrachten wir eindimensionale Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda), \quad (3.6)$$

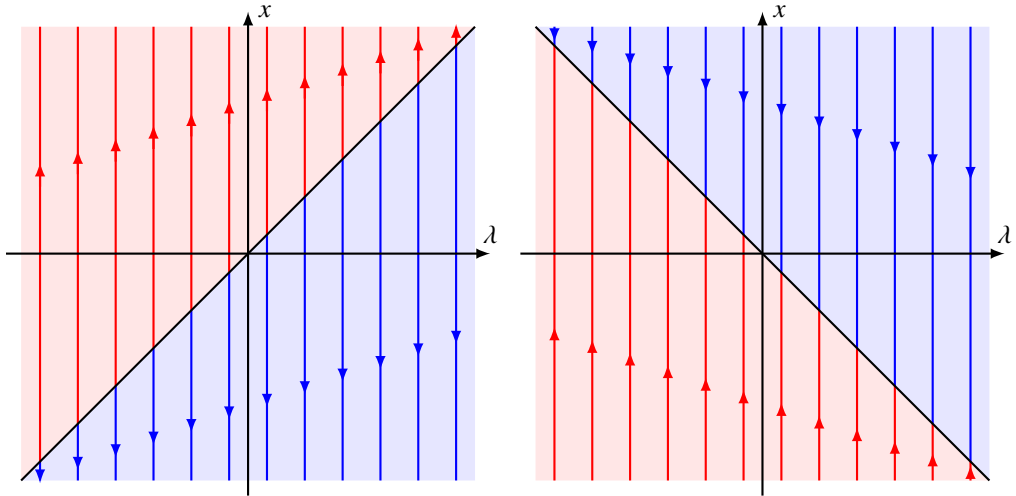


Abbildung 3.1: Phasendiagramm der Differentialgleichung $\dot{x} = x - \lambda$ links und $\dot{x} = -x - \lambda$ rechts. Die Gleichgewichtslösung $x = \lambda$ ist im linken Fall instabil, während $x = -\lambda$ im rechten Fall eine stabile Gleichgewichtslösung ist.

die ausserdem von einem Parameter λ abhängt. Wir fragen nach den Gleichgewichtslösungen in Abhängigkeit vom Parameter λ .

Die nachfolgenden prototypischen Bifurkationen können in vielen weiteren Differentialgleichungen beobachtet werden. Für alle Werte des Parameters ist 0 ein kritischer Wert, es gilt also $f(0, \lambda) = 0$. Wir können die f in eine Taylor-Reihe

$$f(x, \lambda) = \sum_{k,l} \frac{1}{(k+l)!} \frac{\partial^{k+l} f(0,0)}{\partial t^k \partial \lambda^l} x^k \lambda^l = a_{10}x + a_{01}\lambda + a_{20}x^2 + a_{11}x\lambda + a_{02}\lambda^2 + \dots \quad (3.7)$$

entwickeln. Die verschiedenen Bifurkationen lassen sich charakterisieren durch die führenden Terme in dieser Entwicklung. Insbesondere können wir verlangen, dass der führende Term für λ immer linear in λ sein soll. Ist dies nämlich nicht der Fall, ist also der führende Term in λ von der Form λ^α , ersetzen wir den Parameter einfach durch $\tau = \lambda^\alpha$.

Beispiel. Der einfachste Fall ist bis auf eine Skalierung

$$f(x, \lambda) = x - \lambda. \quad (3.8)$$

f hat nur einen einzigen kritischen Punkt, nämlich $x_0 = -\lambda$. Das Phasendiagramm dafür ist in Abbildung 3.1. Man erkennt, dass Lösungen, die bei x -Werten $x > \lambda$ beginnen, anwachsen und sich von der Gleichgewichtslösung entfernen. Umgekehrt nehmen Lösungen ab, die bei x -Werten $x < \lambda$ beginnen, und entfernen sich damit ebenfalls von der Gleichgewichtslösung. Die Differentialgleichung mit rechter Seite 3.8 hat keine stabilen Lösungen.

Die analoge Analyse für die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -x - \lambda$$

ist in Abbildung 3.8 dargestellt. Die Gleichgewichtslösung $x_0 = -\lambda$ ist stabil. ○

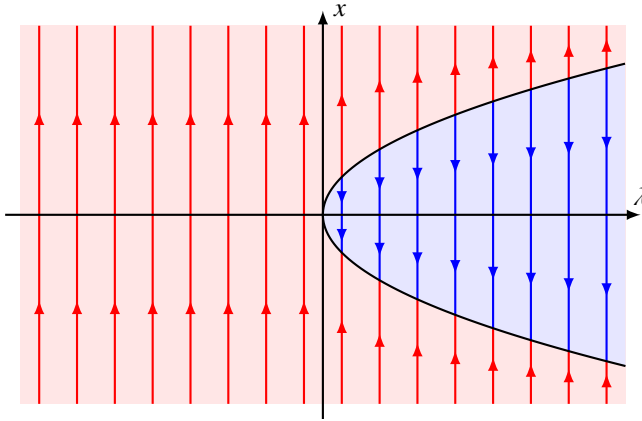


Abbildung 3.2: Phasendiagramm der Sattel-Knoten-Bifurkation zur Differentialgleichung 3.9. Für $\lambda > 0$ gibt es zwei Gleichgewichtslösungen $\pm \sqrt{\lambda}$, eine ist stabil, die andere instabil.

Dieses Beispiel zeigt, dass interessante Bifurkationsereignisse erst dann auftreten, wenn der führende Term in x der Taylor-Entwicklung von f von höherer als linearer Ordnung ist.

3.3.1 Sattel-Knoten-Bifurkation

Die *Sattel-Knoten-Bifurkation* tritt auf in der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - \lambda. \quad (3.9)$$

Für $\lambda > 0$ hat die Gleichung 3.9 zwei Gleichgewichtslösungen $\pm \sqrt{\lambda}$. In Abbildung 3.2 ist das Phasendiagramm dargestellt. Daraus geht hervor, dass die Gleichgewichtslösung $q \sqrt{\lambda}$ instabil ist, während $-\sqrt{\lambda}$ stabil ist.

3.3.2 Heugabel-Bifurkation

Die *Heugabel-Bifurkation* tritt bei der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = x^3 - \lambda x \quad (3.10)$$

auf, bei der der führende Term dritter Ordnung in x ist. Die Differentialgleichung kann auch in der Form

$$\frac{dx}{dt} = x(x^2 - \lambda)$$

geschrieben werden. Sie hat 0 als Gleichgewichtslösung für alle λ . Für $\lambda > 0$ hat sie zusätzlich die Gleichgewichtslösungen $\pm \sqrt{\lambda}$.

Das Phasendiagramm 3.10 zeigt, dass die einzige Gleichgewichtslösung bei $x_0 = 0$ instabil ist. Beim Übergang zu $\lambda > 0$ wird die Gleichgewichtslösung $x_0 = 0$ stabil. Die beiden neuen Gleichgewichtslösungen $\pm \sqrt{\lambda}$ sind beide instabil.

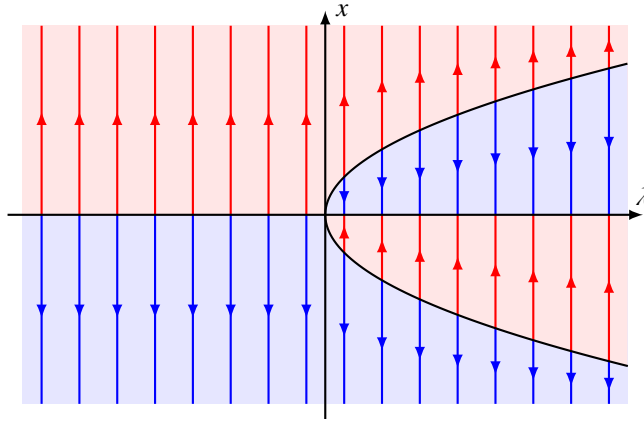


Abbildung 3.3: Phasendiagramm der Heugabel-Bifurkation.

Die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 + \lambda x$$

hat die gleichen Gleichgewichtslösungen, jedoch ist 0 für $\lambda < 0$ eine stabile Lösung, die beim Übergang zu $\lambda > 0$ instabil wird. Die Gleichgewichtslösungen $\pm \sqrt{\lambda}$ für $\lambda > 0$ sind stabil.

3.3.3 Transkritische Bifurkation

Die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + \lambda x = x(x + \lambda) \quad (3.11)$$

hat Gleichgewichtslösung 0 und $-\lambda$. Das Phasendiagramm in Abbildung 3.4 zeigt, dass für $\lambda < 0$ die Gleichgewichtslösung 0 stabil ist, die Gleichgewichtslösung $-\lambda$ hingegen instabil. Beim Übergang zu $\lambda > 0$ wird die Gleichgewichtslösung 0 instabil und die Gleichgewichtslösung $-\lambda$ wird instabil.

3.3.4 Ein Beispiel zur globalen Mitteltemperatur

Das Budyko-Modell versucht, die globale Mitteltemperatur in Abhängigkeit von der Einstrahlung und der Albedo zu modellieren. Mehr zu diesen Ansätzen wird in Kapitel 5 dargestellt.

Als Beispiel für die Diskussion eines solchen Modells betrachten wir die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}(x^3 - 9x) - \lambda. \quad (3.12)$$

Die Gleichgewichtslösungen sind die Nullstellen der kubischen Gleichung

$$f(x, \lambda) = x^3 - 9x - 3\lambda = 0.$$

Diese sind für beliebiges λ nicht so leicht zu finden. Für $\lambda = 0$ sind die kritischen Punkte 0 und ± 3 . Die Funktion $f(x)$ hat lokale Minima bei den $\pm \sqrt{3}$ mit Funktionswerten $\pm 2\sqrt{3}$. Daher gibt es im Intervall $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ drei Gleichgewichtslösungen, ausserhalb jedoch jeweils nur eine.

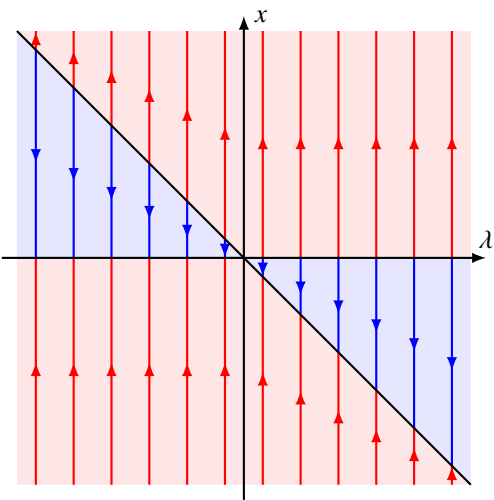


Abbildung 3.4: Phasendiagramm der transkritischen Bifurkation in der Differentialgleichung (3.11).

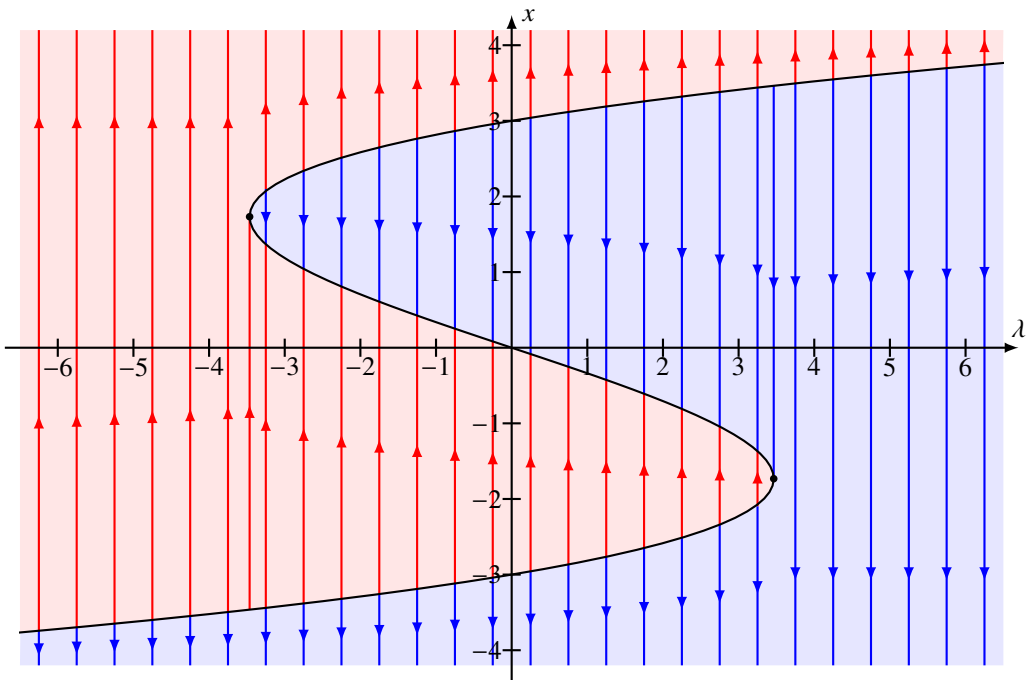


Abbildung 3.5: Phasendiagramm der Differentialgleichung (3.12).

Das zugehörige Phasendiagramm ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Die Gleichgewichtslösungen oben und unten auf der S-Kurve sind instabil, nur der Ast zwischen den beiden lokalen Extrema von $f(x)$ besteht aus stabilen Gleichgewichtslösungen.

Wächst der Parameter λ über den kritischen Wert $2\sqrt{3}$ hinaus, gibt es keinen stabilen Gleichgewichtszustand mehr, das System divergiert nach $-\infty$. Analog strebt das System gegen $+\infty$ wenn der Parameter den Werte $-2\sqrt{3}$ unterschreitet.

Die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -f(x, \lambda) \quad (3.13)$$

hat die gleichen Gleichgewichtslösungen wie (3.12), jedoch sind die stabilen Gleichgewichtslösungen von (3.12) instabile Gleichgewichtslösungen von (3.13). Beim Anstieg des Parameters λ über den Wert $2\sqrt{3}$ springt das System, falls es sich im unteren Gleichgewichtszustand befand, in den oberen. Sinkt der Wert von λ wieder unter $2\sqrt{3}$ wird, bleibt es jedoch auf dem oberen Gleichgewichtspunkt.

3.4 Linearisierung und Stabilität

Kapitel 4

Termohaline Zirkulation

Der Salzgehalt des Meerwassers ist nicht konstant, beeinflusst aber wie die Temperatur die Dichte. Dies führt zu einer grossräumigen Zirkulationsströmung in den Weltmeeren, genannt die thermohaline Zirkulation, und damit zu einem weiteren bedeutenden Energietransportmechanismus. Abbildung 4.1 zeigt den Umfang der Zirkulation. Auf einer Zeitskala von Jahrzehnten bis Jahrhunderten wird Meerwasser und damit auch Wärmeenergie über Distanzen umgewälzt, welche mehrfach die Erde umspannen. Die Organismen, die in den oberen Wasserschichten absterben, sinken langsam auf den Meeresgrund. Ohne eine umfassende Umwälzung der Weltmeere würden die oberen Wasserschichten mit der Zeit an Nährstoffen verarmen. Die thermohaline Zirkulation stellt also auch die Versorgung der Weltmeere mit Nährstoffen sicher.

Der Golfstrom ist ein kleiner Ausschnitt des globalen Förderbandes. Die gut bekannte Bedeutung des Golfstroms für das europäische Klima deutet an, wie wichtig die thermohaline Zirkulation für das globale Klima ist. Es ist daher unerlässlich zu verstehen, was die Zirkulation antreibt und wie sich der Klimawandel darauf auswirken könnte.

In diesem Kapitel soll die thermohaline Zirkulation modelliert werden. Besonderes Augenmerk liegt dabei auf der Tatsache, dass dieses System kippen kann. Bei einer genügend grossen Änderung der Klimaparameter kann die Zirkulation sich auf irreversible Art ändern. Ein solches Ereignis hätte katastrophale Auswirkungen für das Klima.

4.1 Salinität und Dichte

Der Salzgehalt des Meerwassers ist nicht konstant. Er steigt an, wenn Wasser verdampft oder sich Eis bildet. Er sinkt, wenn das Salz durch Niederschläge verdünnt wird. Mit der Veränderung des Salzgehaltes geht auch eine Änderung der Dichte einher.

Den genauen Zusammenhang zwischen Salinität, Temperatur und Dichte kann nicht aus Naturgesetzen abgeleitet werden. Verschiedene Untersuchungen haben empirische Formeln für die Dichte in Abhängigkeit von Temperatur und Salinität zu Tage gefördert. Zum Beispiel in der Form

$$\varrho = \varrho_0(T) + A(T) \cdot S + B(T) \cdot S^{\frac{3}{2}} + C \cdot S^2,$$

wobei die Koeffizienten $A(T)$ und $B(T)$ Polynome der Temperatur T in $^{\circ}\text{C}$ sind:

$$A(T) = 0.824493 - 0.0040899 T + 0.000076438 T^2 - 0.00000082467 T^3 + 0.0000000053875 T^4$$

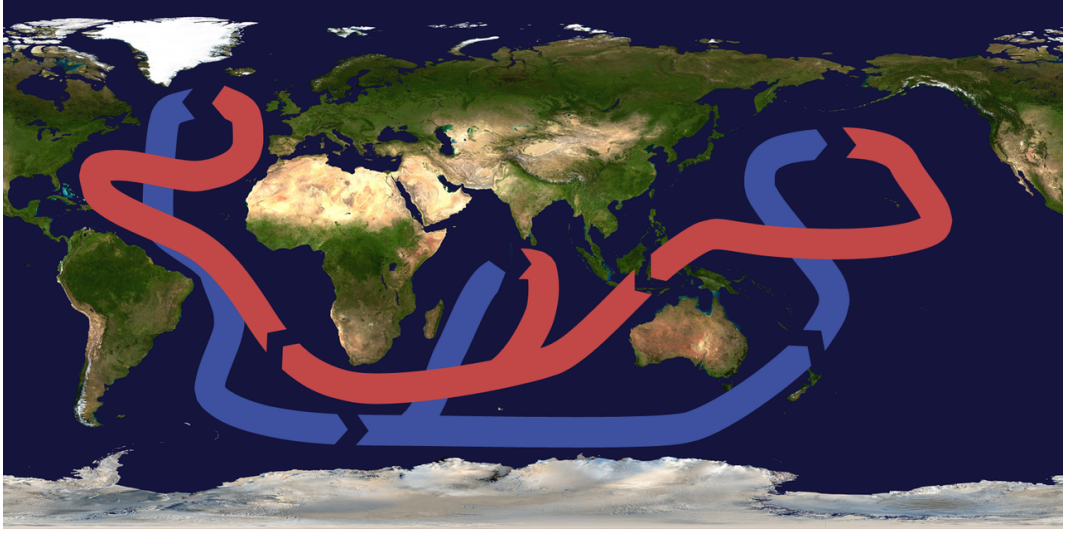


Abbildung 4.1: Das globale Förderband der thermohalinen Zirkulation.

$$B(T) = -0.00572466 + 0.00010227 T - 0.0000016546 T^2$$

$$C = 0.00048314$$

$$\varrho_0(T) = 0.824493 - 0.0040899 T + 0.000076438 T^2 - 0.00000082467 T^3 + 0.0000000053875 T^4,$$

die man etwa in [skript:millero] findet. Diese Formeln geben die Dichte über einen weiten Parameterbereich mit einem relativen Fehler < 0.001 wieder. Für unsere qualitativen Überlegungen ist diese Genauigkeit nicht nötig.

Im Folgenden betrachten wir die Dichte-Anomalie $\varrho - \varrho_0$ in Abhängigkeit von der Temperatur-Anomalie $T - T_0$ und der Salinitäts-Anomalie $S - S_0$. Man kann die Dichte-Anomalie immer als Taylor-Reihe

$$\varrho = \varrho_0 + \frac{\partial \varrho}{\partial T}(T - T_0) + \frac{\partial \varrho}{\partial S}(S - S_0) + \text{Terme höherer Ordnung.}$$

Solange $T - T_0$ und $S - S_0$ nicht allzu gross sind, kann man sich auf die linearen Terme beschränken und

$$\varrho = \varrho_0(1 - \alpha(T - T_0) + \beta(S - S_0)) \quad (4.1)$$

schreiben. Darin sind α und β positive Zahlen, die Vorzeichen in (4.1) sind so gewählt, dass die Dichte mit höherer Temperatur abnimmt und mit höherer Salinität zunimmt. Typische Werte sind

$$\alpha = 1.5 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{K}} \quad \text{und} \quad \beta = 8 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{psu}}.$$

Mit diesem Modell für die Dichte könnten wir jetzt versuchen, die Bewegungsgleichungen der Fluidynamik und die Wärmeleitungsgleichung zu lösen. Wegen der komplizierten Form der Weltmeere ist das eine Aufgabe, die ausschliesslich numerisch gelöst werden kann. Ausserem benötigen wir detaillierte Informationen über den Wärmeaustausch mit der Atmosphäre oder dem Meeresboden. Eine derart detaillierte Modellierung scheint daher aussichtslos. Für eine qualitative Aussage über die Zirkulation benötigen wir daher ein dramatisch vereinfachtes Modell.

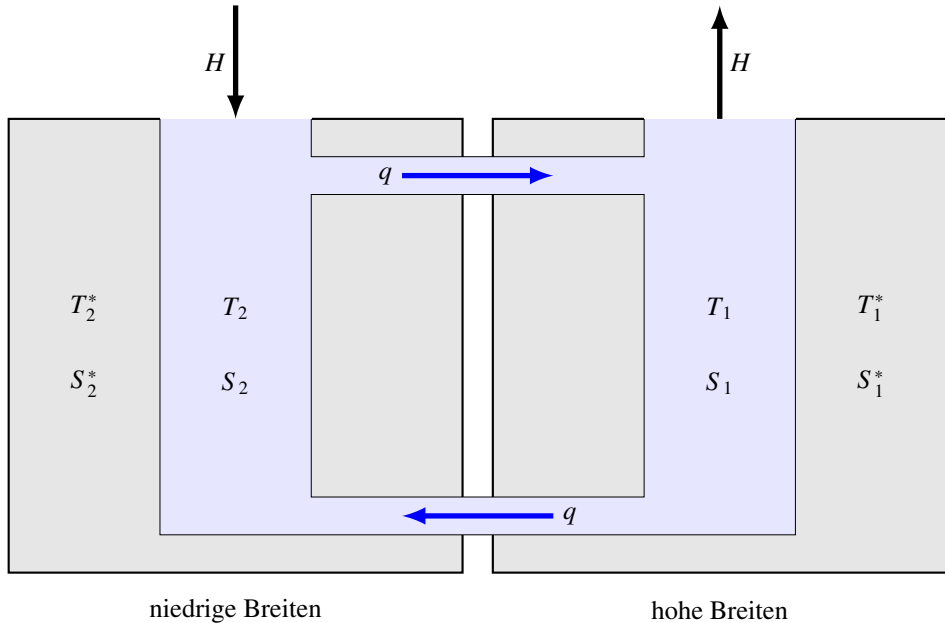


Abbildung 4.2: Einfaches Modell der thermohalinen Zirkulation

4.2 Ein Modell für die thermohaline Zirkulation

Jedes numerische Modelle der Zirkulation basiert auf einer Diskretisation des Gebietes. Der Ozean wird also in kleine Teilgebiete aufgeteilt. Gesucht sind Temperatur und Salinität in jedem Teilgebiet. Dann werden Gleichungen aufgestellt, die den Austausch von Salz und Wärme zwischen den Teilgebieten beschreiben. Die Lösung dieser Gleichungen wird uns das Ausmass der Zirkulation zeigen und erlauben abzuschätzen, wie sich die Zirkulation ändert, wenn sich die äusseren Bedingungen verschieben.

4.2.1 Ein einfaches Box-Modell

Um einen ersten Eindruck von der Dynamik der thermohalinen Zirkulation zu erhalten, verwenden wir ein Modell mit genau zwei Teilgebieten. Wir modellieren den Atlantik nördlich des Äquators als zwei Gebiete. Gebiet 1 ist das Polargebiet mit typischerweise tieferen Temperaturen, Gebiet 2 ist das Gebiet in der Nähe des Äquators. In jedem dieser Gebiet modellieren wir nur das Wasser, welches tatsächlich von der Zirkulation umgewälzt wird. Wir nehmen an, dass es sich durch die zwei Parameter Temperatur und Salinität beschreiben lässt. Wir nennen die Variablen im Gebiet i T_i und S_i .

Das Wasser welches an der Zirkulation teilnimmt ist umgeben von einem viel grösseren Wasserreservoir, welches mit dem strömenden Wasser im Wärme- und Salzaustausch steht. Wir bezeichnen die konstanten Parameter dieses Reservoirs mit T_i^* und S_i^* . In Abbildung ?? sind die beiden Gebiete grau dargestellt, das in Zirkulation befindliche Wasser hellblau.

Die Zirkulation ist charakterisiert durch den Massefluss q der Tiefenströmung. Da kein Wasser verloren gehen kann, muss in Oberflächennähe der gleiche Fluss herrschen. Da auch kein Salz

verloren gehen kann, müssen sich auch die Salzflüsse zwischen den beiden Gebieten ausgleichen. Die Salinität wird zum Beispiel durch die Verdunstung erhöht, während Niederschlag sie erniedrigt. Süßwasserflüsse von Kontinenten reduzieren ebenfalls die Salinität. Dies bedeutet, dass zusätzlich zum Massestrom q ein virtueller Salzstrom zwischen den beiden Gebieten herrscht, den wir mit H bezeichnen.

4.2.2 Modell-Gleichungen

Wir müssen jetzt Differentialgleichungen aufstellen, welche die zeitliche Entwicklung von Temperatur $T_i(t)$ und Salinität $S_i(t)$ beschreiben kann. Die Temperaturentwicklung wird bestimmt einerseits durch den Energietransport durch den Fluss q und andererseits durch den Wärmeaustausch mit dem umgebenden Wasser. Der Fluss q hat zur Folge, dass sich die Temperaturen T_1 und T_2 angleichen. Die beiden Flüsse oben und unten in Abbildung 4.2 transportieren die gleiche Menge Wasser pro Zeiteinheit. Es wird also gleichviel Wasser mit Temperatur T_1 ins Gebiet 2 transportiert wie Wasser mit Temperatur T_2 ins Gebiet 1. Das Vorzeichen von q spielt dabei keine Rolle, denn ändert das Vorzeichen von q , fließt das Wasser mit Temperatur T_1 einfach durch den anderen Kanal. Die Temperaturänderung von T_1 ist also proportional zu $|q|(T_2 - T_1)$.

Der Wärmeaustausch mit dem umgebenden Wasser ist proportional zur Temperaturdifferenz, wir bezeichnen den Proportionalitätsfaktor mit c .

$$\begin{aligned}\frac{dT_1}{dt} &= c(T_1^* - T_1) + |q|(T_2 - T_1) \\ \frac{dT_2}{dt} &= c(T_2^* - T_2) + |q|(T_1 - T_2).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Analoge Überlegungen müssen wir jetzt auch noch für die Salinität anstellen. Der Ausgleich der Salinität S_i mit der Salinität S_i^* des umgebenden Meeresbeckens ist proportional zur Differenz, der Proportionalitätsfaktor, den wir mit d bezeichnen, ist bestimmt durch die Diffusionsgeschwindigkeit und die turbulente Durchmischung des zirkulierenden Wassers mit der Umgebung. Dazu kommt noch der virtuelle Salzfluss H :

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{dt} &= H + d(S_1^* - S_1) + |q|(S_2 - S_1) \\ \frac{dS_2}{dt} &= -H + d(S_2^* - S_2) + |q|(S_1 - S_2).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Man beachte, dass die Temperaturgleichungen 4.2 und die Salinitätsgleichungen 4.3 gekoppelt sind, da der Fluss q angetrieben wird vom Dichteunterschied, der wiederum von Temperatur und Salinität abhängt.

4.2.3 Antrieb der Zirkulation

Die Zirkulation wird wie gesagt vom Dichteunterschied angetrieben. Es gibt also einen Proportionalitätsfaktor k derart, dass

$$q = k \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_0}.$$

Setzt man die Formel 4.1 ein, findet man

$$q = k(-\alpha(T_1 - T_2) + \beta(S_1 - S_2)) = k(\alpha(T_2 - T_1) + \beta(S_1 - S_2)) = k(\alpha(T_2 - T_1) - \beta(S_2 - S_1)).$$

Schreiben wir $\Delta T = T_2 - T_1$ und $\Delta S = S_2 - S_1$, dann ist der Fluss nur von den Differenzen abhängig

$$q = k(\alpha \Delta T - \beta \Delta S). \quad (4.4)$$

4.2.4 Anomalie-Gleichungen

Die absoluten Werte von T_i und S_i sind nicht wirklich wichtig, viel wichtiger sind die Unterschiede ΔT_i und ΔS_i . Verschwinden die Differenzen, kommt die Zirkulation zum Erliegen, und dies sind die Phänomene, die wir mit den Gleichungen prognostizieren können möchten. Wir streben daher an, die Gleichungen (4.2) und (4.3) in eine Form zu bringen, die nur von Differenzen und Anomalien abhängt.

Wir schreiben

$$T_0 = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) \quad \text{und} \quad S_0 = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$$

für die Mittelwerte von Temperatur und Salinität. Indem wir den Mittelwert der Temperaturgleichungen (4.2) bzw. der Salinitätsgleichung (4.3) bilden, bekommen wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dT_0}{dt} &= c(T_0^* - T_0) \\ \frac{dS_0}{dt} &= d(S_0^* - S_0), \end{aligned} \quad (4.5)$$

wobei $T_0^* = \frac{1}{2}(T_1^* + T_2^*)$ und $S_0^* = \frac{1}{2}(S_1^* + S_2^*)$. Die Differentialgleichungen ?? besagen, dass die mittlere Temperatur des zirkulierenden Wassers gegen die mittlere Temperatur des umliegenden Meeresbeckens strebt.

Da die Mitteltemperatur langfristig gegen die Mitteltemperatur der umliegenden Meeresbecken strebt liegt es nahe, Temperatur und Salinität auf diese Mitteltemperatur zu beziehen. Wir ersetzen also

$$\begin{aligned} \bar{T}_1 &= T_1 - T_0^*, & \bar{T}_2 &= T_2 - T_0^* & \Rightarrow & \bar{T}_0 &= T_0 - T_0^* \\ \bar{S}_1 &= S_1 - S_0^*, & \bar{S}_2 &= S_2 - S_0^* & \Rightarrow & \bar{S}_0 &= S_0 - S_0^* \end{aligned} \quad (4.6)$$

Die Differentialgleichungen (4.5) für die Mittelwerte wird damit zu

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}_0}{dt} &= -c\bar{T}_0 \\ \frac{d\bar{S}_0}{dt} &= -d\bar{S}_0. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen für $T_i = \bar{T}_i + T_0^*$ und $S_i = \bar{S}_i + S_0^*$ sind

$$\begin{aligned} \frac{dT_i}{dt} &= \frac{d\bar{T}_i}{dt} = c(T_i^* - T_i) + |q|\Delta\bar{T} = c(T_i^* - \bar{T}_i - T_0^*) + |q|\Delta\bar{T} \\ \frac{dS_i}{dt} &= \frac{d\bar{S}_i}{dt} = \pm H + d(S_i^* - S_i) + |q|\Delta\bar{S} = \pm H + d(S_i^* - \bar{S}_i - S_0^*) + |q|\Delta\bar{S} \end{aligned}$$

Die Differenzen $T_i^* - T_0^*$ und $S_i^* - S_0^*$ können wir vereinfacht als

$$\begin{aligned} T_1^* - T_0^* &= T_1^* - \frac{1}{2}(T_2^* - T_1^*) = -\frac{1}{2}(T_2^* - T_1^*) = -T^* \\ T_2^* - T_0^* &= T_2^* - \frac{1}{2}(T_2^* - T_1^*) = \frac{1}{2}(T_2^* - T_1^*) = T^* \end{aligned}$$

schreiben und analog für $S^* = \frac{1}{2}(S_2^* - S_1^*)$. Damit werden die Differentialgleichungen zu

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{T}_1}{dt} &= c(-T^* - \bar{T}_1) + |q|(\bar{T}_2 - \bar{T}_1) \\ \frac{d\bar{T}_2}{dt} &= c(T^* - \bar{T}_2) + |q|(\bar{T}_1 - \bar{T}_2) \\ \frac{d\bar{S}_1}{dt} &= -H + d(-S^* - \bar{S}_1) + |q|(\bar{S}_2 - \bar{S}_1) \\ \frac{d\bar{S}_2}{dt} &= H + d(S^* - \bar{S}_2) + |q|(\bar{S}_1 - \bar{S}_2)\end{aligned}\tag{4.7}$$

Man beachte, dass die T^* und S^* konstant sind.

In den Gleichungen (4.7) hängt q von den Temperatur- und Salinitätsdifferenzen ab. Wegen $\Delta\bar{T} = \Delta\bar{T}$ und $\Delta\bar{S}$ ist nach (4.4)

$$q = k(\alpha\Delta\bar{T} - \beta\Delta\bar{S}).\tag{4.8}$$

4.2.5 Differenzgleichungen

Wir können die Anomaliegleichungen (4.7) noch etwas weiter umformen und die einzelnen Anomalien vollständig durch die Differenzen ersetzen. Die Differenzen und Summen der Gleichungen sind

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta\bar{T}}{dt} &= c(2T^* - \Delta\bar{T}) - 2|q|\Delta\bar{T} & \frac{d\bar{T}_0}{dt} &= -c\bar{T}_0 \\ \frac{d\Delta\bar{S}}{dt} &= 2H + d(2S^* - \Delta\bar{S}) - 2|q|\Delta\bar{S} & \frac{d\bar{S}_0}{dt} &= -d\bar{S}_0.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Die Gleichungen rechts drücken aus, dass die mittleren Anomalien exponentiell gegen 0 gehen. Die linken Gleichungen beschreiben die Zeitentwicklung der Differenz der Anomalien. Man beachte, dass q ebenfalls von den Anomalie-Differenzen abhängt.

4.2.6 Zeitkonstanten

Der Koeffizienten c beschreibt, wie schnell der Temperatureausgleich durch Wärmeleitung oder turbulente Durchmischung erfolgt. Der Koeffizient d beschreibt, wie schnell der Salinitätsausgleich durch Durchmischung und Diffusion stattfinden kann. Je grösser diese Koeffizienten, desto schneller erfolgt der Prozess. In den rechten Gleichungen von (4.9) ist dies ganz offensichtlich. Vernachlässigen wir für den Moment den Einfluss der Zirkulation, was wir durch $k = 0$ im Ausdruck für q beschreiben können, dann sehen wir, dass die Differenzgleichungen beide von der Form einer linearen inhomogenen Differentialgleichung

$$\frac{d\Delta X}{dt} = X^* - cX$$

sind, wobei X^* eine Konstante ist. Die Lösung der Gleichung ist

$$X(t) = \frac{X^*}{c} + C_0 e^{-ct}$$

mit einer Konstanten C_0 , die aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen ist. Die Terme T^* , S^* und H verschieben also nur die Lösung, die Differenzen $\Delta\bar{T}$ und $\Delta\bar{S}$ streben exponentiell wie e^{-ct} bzw. e^{-dt} gegen diese Gleichgewichtswerte.

Die Grössen $1/c$ und $1/d$ haben die Dimension einer Zeit, wir nennen sie die *Zeitkonstanten* des Prozesses, den c bzw. d beschreiben. Ist zum Beispiel die Zeitkonstante $1/c$ der Temperatur sehr viel kleiner als die Zeitkonstanten $1/d$ der Salinität, dann bedeutet dies, dass sich die Temperaturdifferenzen sehr viel schneller ausgleichen als die Salinitätsdifferenzen. Für die langfristige Entwicklung der Zirkulation ist in diesem Fall die Salinitätsentwicklung ausschlaggebend, die Temperaturfunktionen können durch konstante ersetzt werden.

4.3 Dynamik der thermohalinen Zirkulation

In diesem Abschnitt wollen wir die Bewegungsgleichung 4.9 etwas vereinfachen mit dem Ziel, einzelne Szenarien durchspielen zu können. Eine vertiefte Diskussion solcher Modelle ist in Kapitel 17 zu finden.

4.3.1 Elimination von Prozessen mit kurzer Zeitkonstante

Die Diskussion in Abschnitt 4.2.6 ist es zulässig, Variablen mit sehr kleiner Zeitkonstanten durch Konstanten zu ersetzen. Tatsächlich erfolgt der Temperatúrausgleich im Wasser sehr viel schneller als der Salinitätsausgleich. Wir können daher davon ausgehen, dass die Temperaturgleichungen die Temperaturanomalien sehr schnell gegen eine Gleichgewichtstemperatur streben lassen und dass wir für die Lösung der Salinitätsgleichungen mit dieser konstanten Temperatur arbeiten können.

Wir gehen also davon aus, dass $\Delta\bar{T} = 2T^*$ konstant ist und reduzieren damit das Gleichungssystem (4.9) auf die eine Gleichung

$$\frac{d}{dt}\Delta\bar{S} = 2H + d(2S^* - \Delta\bar{S}) - 2|q|\Delta\bar{S} \quad \text{mit} \quad q = k(2\alpha T^* - \beta\Delta\bar{S}). \quad (4.10)$$

Diese Gleichungen beschreiben also die Salinitätsentwicklung unter der Annahme, dass der Temperatúrausgleich sehr schnell erfolgt. Dieser Ausgleich kann nicht primär durch Durchmischung erfolgen, denn dieser Mechanismus würde auch die Salinität mit gleicher vergleichbarer Geschwindigkeit ausgleichen. Dies bedeutet, dass der dominante Term in der Temperaturgleichung der Term mit c ist, nicht der Term mit q .

Die Gleichung (4.10) kann noch nicht auf einfache Weise gelöst werden. Wir vereinfachen wir sie daher weiter indem wir ausnutzen, dass der Salinitätsausgleich so viel langsamer ist als der Temperatúrausgleich, dass der Term mit d im Vergleich zum Term mit q vernachlässigbar ist. Wir setzen also $d = 0$ und erhalten damit

$$\frac{d}{dt}\Delta\bar{S} = 2H - 2|q|\Delta\bar{S} \quad \text{mit} \quad q = k(2\alpha T^* - \beta\Delta\bar{S}) \quad (4.11)$$

als vereinfachte Differentialgleichung zur Modellierung der thermohalinen Zirkulation. Dies ist eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung, die nicht in geschlossener Form gelöst werden kann.

4.3.2 Eine dimensionslose Beschreibung

Die Gleichung (4.11) ist wegen der vielen Konstanten unübersichtlich. Ausgeschrieben lautet sie

$$\frac{d}{dt}\Delta\bar{S} = 2H - 2k|\alpha\Delta\bar{T} - \beta\Delta\bar{S}|\Delta\bar{S} \quad (4.12)$$

Die meisten der Konstanten können wir aber los werden, indem wir die unabhängigen Variablen und die Zeit neu skalieren. Dies ist gleichbedeutend mit einem Wechsel der Masseinheiten. Wir verwenden:

$$x = \frac{\beta \Delta \bar{S}}{\alpha \Delta \bar{T}}, \quad \tau = 2\alpha k |\Delta \bar{T}| t \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{\beta H}{\alpha^2 k \Delta \bar{T} |\Delta \bar{T}|}. \quad (4.13)$$

Die Ableitung nach t kann durch die Ableitung nach τ ausgedrückt werden vermöge der Ersetzung

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{1}{2\alpha k |\Delta \bar{T}|} \frac{d}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} = 2\alpha k |\Delta \bar{T}| \frac{d}{d\tau}.$$

Setzen wir dies in die Gleichung (4.13) ein, erhalten wir

$$2\alpha k |\Delta \bar{T}| \frac{d}{d\tau} \Delta \bar{S} = 2H - 2k |\alpha \Delta \bar{T} - \beta \Delta \bar{S}| \Delta \bar{S}. \quad (4.14)$$

Wir erweitern mit $\beta/\alpha \Delta \bar{T}$, damit wird die Differentialgleichung zu

$$\begin{aligned} 2\alpha k |\Delta \bar{T}| \frac{d}{d\tau} \frac{\beta \Delta \bar{S}}{\alpha \Delta \bar{T}} &= \frac{2\beta H}{\alpha \Delta \bar{T}} - 2k |\alpha \Delta \bar{T} - \beta \Delta \bar{S}| \frac{\beta \Delta \bar{S}}{\alpha \Delta \bar{T}} \\ \alpha k |\Delta \bar{T}| \frac{d}{d\tau} x &= \frac{\beta H}{\alpha \Delta \bar{T}} - k |\alpha \Delta \bar{T} - \beta \Delta \bar{S}| x \\ k \frac{d}{d\tau} x &= \frac{\beta H}{\alpha^2 \Delta \bar{T} |\Delta \bar{T}|} - k \left| 1 - \frac{\beta \Delta \bar{S}}{\alpha \Delta \bar{T}} \right| x \\ \frac{d}{d\tau} x &= \frac{\beta H}{k \alpha^2 \Delta \bar{T} |\Delta \bar{T}|} - \left| 1 - \frac{\beta \Delta \bar{S}}{\alpha \Delta \bar{T}} \right| x \\ \frac{dx}{d\tau} &= \lambda - |1 - x| x. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Damit haben wir die ursprüngliche Gleichung (4.12) in eine dimensionslose Gleichung mit dem einen Parameter λ umgewandelt. Das Verhalten der Lösung hängt vom Parameter λ ab.

4.3.3 Gleichgewicht

Um das Verhalten der Lösungen von (4.15) besser zu verstehen, suchen wir zunächst nach Gleichgewichtslösungen. Diese hängen nicht von der Zeit ab, es gilt also

$$\frac{dx}{d\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda - |1 - x|x = 0 \quad \Rightarrow \quad |1 - x|x = \lambda. \quad (4.16)$$

In Abbildung 4.3 ist der Graph der Funktion $|1 - x|x$ dargestellt. Je nach dem Wert von λ hat die dimensionslose Differentialgleichung (4.15) bis zu drei Gleichgewichtslösungen.

Für Werte von λ zwischen 0 und 0.25 gibt es drei verschiedene Werte x , die die Gleichung (4.16) erfüllen (Abbildung 4.5). Für $x \leq 1$ ist $1 - x \geq 0$ und damit muss x die Gleichung $(1 - x)x = \lambda$ erfüllen, für $x \geq 1$ ist es die Gleichung $(x - 1)x = \lambda$. Diese beiden Gleichungen haben die folgenden Lösungen

$$\begin{array}{ll} \text{Fall } x \leq 1: & (1 - x)x = \lambda \\ & x^2 - x + \lambda = 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{Fall } x \geq 1: & (x - 1)x = \lambda \\ & x^2 - x - \lambda = 0 \end{array}$$

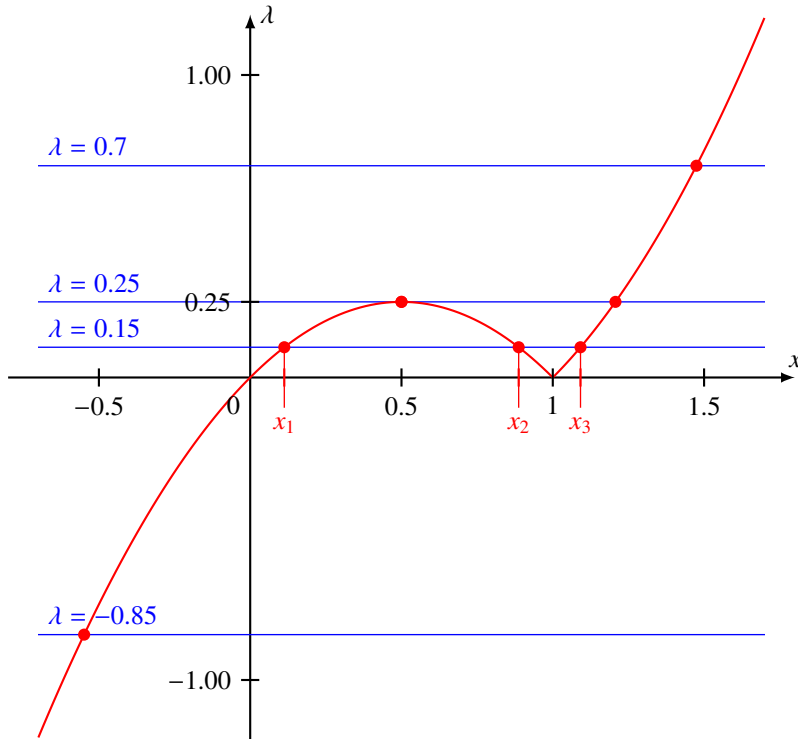


Abbildung 4.3: Graph der Funktion $|1-x|x$ und Gleichgewichtslösungen der dimensionslosen Differentialgleichung (4.15)

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda} \qquad x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}.$$

Die rechte Gleichung hat für alle Werte $\lambda > 0$ zwar auch noch eine Lösung < 1 , diese ist aber ausgeschlossen, daher nur das positive Zeichen vor der Wurzel in diesem Fall. Für $\lambda > 0.25$ hat die linke Gleichung keine Lösung. Für $\lambda < 0$ ist die Lösung mit dem positiven Zeichen der linken Gleichung ausgeschlossen.

Wir berechnen die Lösung der Differentialgleichung für einen gegebenen Wert von λ (Abbildung 4.4). Für $\lambda > \frac{1}{4}$ gibt es nur einen Gleichgewichtspunkt, wir nennen ihn x_3 . Falls $x(\tau) < x_3$, dann ist

$$\frac{dx}{d\tau} = \lambda - |1-x|x > 0,$$

die Lösung $x(\tau)$ ist also monoton wachsend. Für $x(\tau) > x_3$ ist hingegen

$$\frac{dx}{d\tau} = \lambda - |1-x|x < 0,$$

die Lösung ist also monoton wachsend. Lösungskurven, die bei x -Werten $> x_3$ beginnen nehmen monoton ab und konvergieren gegen x_3 , solche, die bei x -Werten $< x_3$ beginnen, nehmen monoton zu und konvergieren von unten gegen x_3 . Die Gleichgewichtslösung $x(\tau) = x_3$ ist also eine stabile Lösung, alle anderen Lösungen konvergieren gegen diese Lösung.

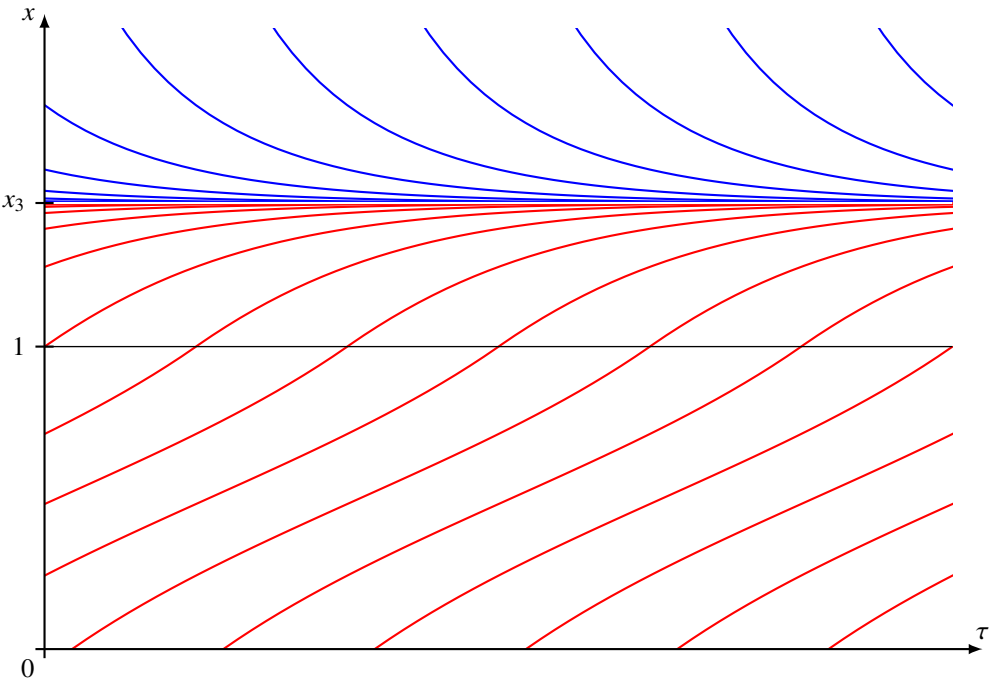


Abbildung 4.4: Lösungen im Fall $\lambda > \frac{1}{4}$: der einzige Gleichgewichtspunkt x_3 ist stabil.

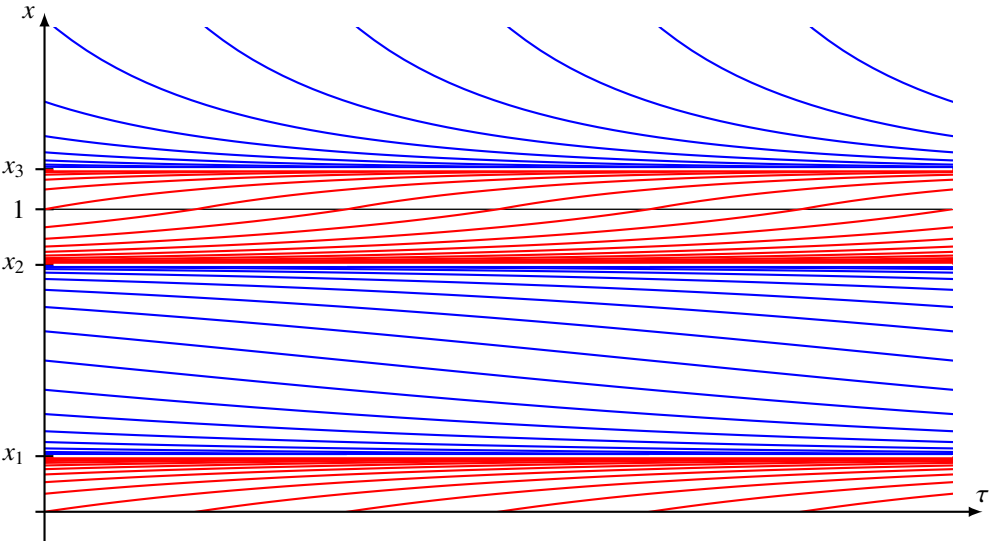


Abbildung 4.5: Lösungen im Fall $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{4}$: die beiden Gleichgewichtspunkte x_1 und x_3 sind stabil, x_2 ist instabil.

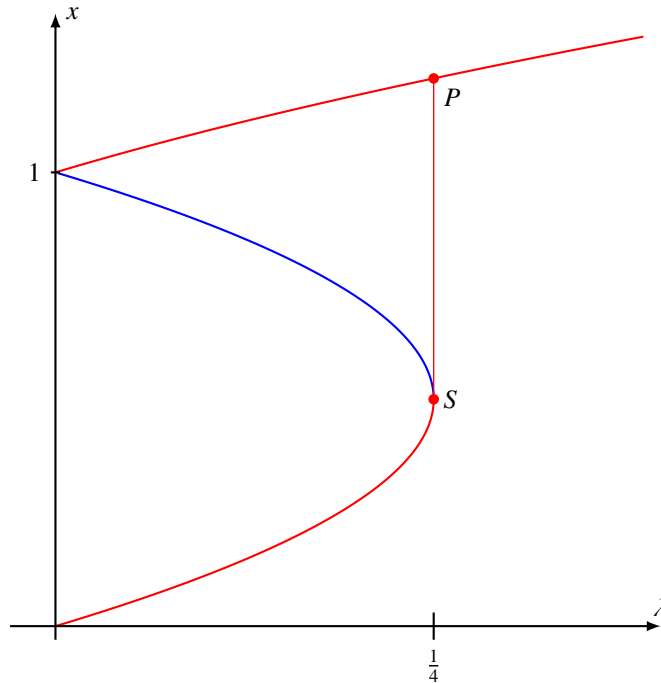


Abbildung 4.6: Bifurkationsdiagramm für die Differentialgleichung (4.16)

Für $0 < \lambda < \frac{1}{4}$ seien x_1 , x_2 und x_3 die drei Gleichgewichtspunkte (Abbildung /refskript:thc:drei). Wir untersuchen wieder die Vorzeichen von $dx/d\tau$. Für x -Werten zwischen x_1 und x_2 und für x -Werte grösser als x_3 ist die Ableitung positiv, die Lösungen konvergieren monoton wachsend gegen die Gleichgewichtslösungen x_1 bzw. x_3 . Lösungen, die bei $x < x_1$ oder $x_2 < x < x_3$ beginnen, konvergieren dagegen monoton wachsend gegen x_1 bzw. x_3 . Die Gleichgewichtslösung x_2 ist daher nicht stabil, die Gleichgewichtslösungen x_1 und x_3 sind dagegen stabil.

4.3.4 Bifurkation

Für Parameterwerte $\lambda < \frac{1}{4}$ gibt es drei mögliche Gleichgewichtspunkte, für $\lambda > \frac{1}{4}$ jedoch nur noch einen. Wir möchten untersuchen, wie sich die Lösung verhält, wenn der Parameter langsam verändert wird. Dies ist in Abbildung 4.6 dargestellt.

Sei jetzt also zunächst $\lambda < \frac{1}{4}$. Wir betrachten also eine Lösung, die in Nähe von

$$x_1(\lambda) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}$$

beginnt. Vergrössern wir λ , verschiebt sich der Gleichgewichtspunkt $x_1(\lambda)$ ebenfalls nach oben. Da $x_1(\lambda)$ aber ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist, wird die Lösung gegen den neuen Gleichgewichtspunkt konvergieren. Das gleiche passiert auch, wenn die Lösung in der Nähe von

$$x_3(\lambda) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}$$

beginnt. Bei einer Vergrößerung folgt das System den roten Kurven in Abbildung 4.6.

Wenn jetzt aber der Parameter λ die Schwelle $\frac{1}{4}$ überschreitet, dann wird die Lösung zum einzigen verbleibenden stabilen Gleichgewichtspunkt $x_3(\lambda)$ konvergieren. Die Lösung springt also vom Punkt S zum Punkt P auf dem oberen roten Ast in Abbildung 4.6.

Wenn man den Parameter λ wieder verkleinert, dann wird eine Lösung in der Nähe von $x_3(\lambda)$ wieder gegen $x_3(\lambda)$ konvergieren. Es ist aber nicht mehr möglich, dass die Lösung gegen $x_1(\lambda)$ konvergiert, da nach Abbildung 4.5 nur Lösungen, die bei x -Werten $< x_2$ beginnen, gegen $x_1(\lambda)$ konvergieren können.

Dieses einfache Modell der thermohalinen Zirkulation hat also die überraschende Eigenschaft, dass das System beim Überschreiten des kritischen Wertes $\lambda = \frac{1}{4}$ in einen Zustand kippt, aus dem es nicht mehr zurück kommen kann. Wegen

$$\lambda = \frac{\beta H}{\alpha^2 k \Delta \bar{T} |\Delta \bar{T}|}$$

kann dies passieren wenn entweder der Betrag des virtuellen Salzflusses H ansteigt oder die Temperaturanomaliedifferenz $\Delta \bar{T}$ klein wird. Eine Klimaerwärmung könnte zum Beispiel die Verdunstung im Gebiet 2 erhöhen, den virtuellen Salzfluss erhöhen und damit das System in den Zustand mit einer wesentlich grösseren Anomaliedifferenz $\Delta \bar{T}$ kippen lassen.

Kapitel 5

Zonenmodelle

Die Erdrotation ist schnell im Vergleich zu den für typische Klimamodelle wesentlichen Zeitspannen. Wesentliche Aspekte der Klimaentwicklung sollten sich daher immer noch modellieren lassen, wenn man den Zustand des Klimasystems über die Erdrotation mittelt. In diesem Kapitel werden daher vereinfachte Modelle diskutiert, die nur die geographischen Länge als geometrischen Parameter haben.

5.1 Bilanzmodelle

5.2 Zonenmodelle

5.3 Spektrale Methoden

Kapitel 6

Fourier-Analysis

Im Kapitel 1 wurde gezeigt, dass einige der Einflüsse auf das Klimasystem periodisch sind mit einer Periode, die vergleichbar oder grösser ist als die bei der Definition des Begriffes Klima üblicherweise verwendeten Mittelungszeitspanne. Diese Anregungen führen daher zu periodischen Klimaschwankungen. Die Fourier-Analysis ermöglicht, solche periodischen Einflüsse in einem Signal zu erkennen und sie von anderen Phänomenen zu trennen.

Kapitel 7

El Niño Southern Oscillation

7.1 El Niño

7.2 Oszillator-Modell

7.3 Rossby- und Kelvin-Wellen

Kapitel 8

Datenassimilation

Teil II

Anwendungen und Weiterführende Themen

Übersicht

Im zweiten Teil kommen die Teilnehmer des Seminars selbst zu Wort. Sie zeigen Anwendungsbeispiele für die im ersten Teil entwickelte Theorie. Eine breite Vielfalt von Arbeiten vertieft einzelne Aspekte der Theorie und ermöglicht das bessere Verständnis interessanter Anwendungen.

Kapitel 9

Eis

Silvio Marti

9.1 Abschnitt

9.2 Schlussfolgerung

Kapitel 10

Extreme Ereignisse

Melina Staub

10.1 Abschnitt

10.2 Schlussfolgerung

Kapitel 11

Datenassimilation für das Lorenz-System

Michael Müller

11.1 Abschnitt

11.2 Schlussfolgerung

Kapitel 12

Machine Learning und Klimamodelle

Martin Stypinski

12.1 Abschnitt

12.2 Schlussfolgerung

Kapitel 13

Lorenz-Attraktor

Matthias Baumann und Oliver Dias

13.1 Abschnitt

13.2 Schlussfolgerung

Kapitel 14

Höherdimensionales Lorenzsystem

Hansruedi Patzen

14.1 Abschnitt

14.2 Schlussfolgerung

Kapitel 15

Achsneigung und Eiszeiten

Sebastian Lenhard

15.1 Abschnitt

15.2 Schlussfolgerung

Kapitel 16

Klima auf anderen Planeten

Nicolas Tobler

16.1 Einführung

Verschiedene Organisationen, wie unter anderem Elon Musk's SpaceX, haben sich zum Ziel gemacht, in absehbarer Zukunft den Mars für den Menschen bewohnbar zu machen. Insbesondere sollte der Mars eine erdähnliche Atmosphäre erhalten, also terraformiert werden. Was auf Computergenerierten Bildern ziemlich simpel aussieht, wird sich in Realität wahrscheinlich ziemlich schwierig herausstellen. In diesem Kapitel wird die aktuelle Lage des Klimas auf dem Mars analysiert und mögliche Wege den Mars zu terraformieren auf die Machbarkeit untersucht.

16.2 Das Klima auf dem Mars

Verschiedene Marsproben

16.2.1 Temperatur

16.2.2 Albedo

16.2.3 Energieerhaltungs Gleichungen

16.2.4 Atmosphärische Eigenschaften

dünne Atmosphäre

Wann und woher der Mars seine Atmosphäre

Rückgang der Atmosphäre durch Sonnenwind <https://www.nasa.gov/press-release/nasa-mission-reveals-speed-of-solar-wind-stripping-martian-atmosphere> Vor 4.2 Milliarden Jahren gefroren der Kern

16.3 Den Mars terraformen

16.3.1 Aussetzen von Treibhausgasen

Aussetzen von hocheffektiven treibhausgasen wie FCKW's
verwendung von Methan

16.4 Vergleich der Planeten

venus co2 bindung wie ist venus co geworden
was führt zu wasserlosen athmosphere mars keine venus ohne wasser erde zwischendrin
boxmodell anteile element
Gleichungen

16.5 Schlussfolgerung

Kapitel 17

3-Box-Modell der Thermohalinen Zirkulation

Jonas Gründler

17.1 Abschnitt

17.2 Schlussfolgerung

Kapitel 18

Vegetation

Matthias Dunkel

18.1 Abschnitt

18.2 Schlussfolgerung

Kapitel 19

Numerische Lösung einer verzögerten Differentialgleichung

Raphael Unterer

19.1 Abschnitt

19.2 Schlussfolgerung

