
Mathematisches Seminar
Klimawandel

Leitung: Andreas Müller

Matthias Baumann, Oliver Dias-Lalcaca, Matthias Dunkel
Jonas Gründler, Sebastian Lenhard, Silvio Marti, Michael Müller
Hansruedi Patzen, Melina Staub, Martin Stypinski, Nicolas Tobler
Raphael Unterer

Inhaltsverzeichnis

I Grundlagen	3
Einleitung	5
1 Wetter und Klima	7
1.1 Klima	7
1.2 Physikalische Eigenschaften des Klimasystems	8
1.2.1 Wärme, Konvektion, Kondensation	8
1.2.2 Strahlung	11
1.2.3 Erdrotation und atmosphärische Zirkulation	16
1.2.4 Periodische Einflüsse	21
1.3 Anforderungen an Klima-Modelle	23
1.3.1 Validierung von Klimamodellen	24
1.3.2 Klimageschichte der Erde	25
2 Fluideodynamik	27
2.1 Fluideodynamik	27
2.1.1 Kontinuitätsgleichung	27
2.1.2 Inkompressible Strömung	29
2.1.3 Bewegungsgleichung	29
2.1.4 Zustandsgleichungen	34
2.1.5 Boussinesq-Approximation	34
2.2 Strömung und Coriolis-Effekt	34
2.2.1 Modellgleichungen	35
2.2.2 Lösungen	36
2.3 Inkompressible zweidimensionale Strömung	37
2.3.1 Satz von Green	38
2.3.2 Stromfunktion	41
2.3.3 Vorticity	43
2.3.4 Spannungen und Stromfunktion	45
2.4 Lösungen von partiellen Differentialgleichungen	46
2.4.1 Diskretisation	46
2.4.2 Basisfunktionen	48
2.4.3 Separation	53
2.5 Lorenz-Modell	55
2.5.1 Modellbeschreibung	55
2.5.2 Grundgleichungen	58

2.5.3	Umwandlung in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem	59
2.5.4	Dimensionslose Schreibweise	62
3	Differentialeichungen	69
3.1	Grundlagen	69
3.1.1	Autonome Differentialgleichungen	70
3.2	Gleichgewichtslösungen und kritische Punkte	71
3.2.1	Stabilität	71
3.2.2	Zeitumkehr	72
3.3	Bifurkationen eindimensionaler Systeme	72
3.3.1	Sattel-Knoten-Bifurkation	74
3.3.2	Heugabel-Bifurkation	74
3.3.3	Transkritische Bifurkation	75
3.3.4	Ein Beispiel zur globalen Mitteltemperatur	75
3.4	Linearisierung und Stabilität	77
3.4.1	Lineare Differentialgleichungen	77
3.4.2	Linearisierung	78
4	Thermohaline Zirkulation	81
4.1	Salinität und Dichte	81
4.2	Ein Modell für die thermohaline Zirkulation	83
4.2.1	Ein einfaches Box-Modell	83
4.2.2	Modell-Gleichungen	84
4.2.3	Antrieb der Zirkulation	84
4.2.4	Anomalie-Gleichungen	85
4.2.5	Differenzgleichungen	86
4.2.6	Zeitkonstanten	86
4.3	Dynamik der thermohalinen Zirkulation	87
4.3.1	Elimination von Prozessen mit kurzer Zeitkonstante	87
4.3.2	Eine dimensionslose Beschreibung	87
4.3.3	Gleichgewicht	88
4.3.4	Bifurkation	91
5	Zonenmodelle	93
5.1	Strahlung	93
5.1.1	Einstrahlung auf einer Halbkugel	93
5.1.2	Einstrahlung auf einen Breitenkreis	94
5.1.3	Einstrahlung über ein Jahr	97
5.2	Strahlungsbilanzmodelle	100
5.2.1	Strahlungsbilanz	100
5.2.2	Modell von Budyko	103
5.3	Zonenmodelle	104
5.4	Spektrale Methoden	105
5.4.1	Kugelkoordinaten	106
5.4.2	Kugelfunktionen	108
5.4.3	Spektrale Gleichungen	111

6 Fourier-Analysis	113
6.1 Periodische Funktionen	113
6.1.1 Fourierreihen	113
6.1.2 Diskrete Fourierreihen: trigonometrische Polynome	114
6.2 Fourier-Koeffizienten	114
6.2.1 Least Squares	115
6.2.2 Trigonometrische Summen	116
6.2.3 Bestimmung von a_0	119
6.2.4 Bestimmung von $a_k, k > 0$	119
6.2.5 Bestimmung von b_k	120
6.2.6 Zusammenstellung der Resultate	120
6.3 Vektorgeometrische Interpretation	121
6.3.1 Vektoren	121
6.3.2 Fourier-Transformation	124
7 El Niño Southern Oscillation	131
7.1 El Niño	131
7.1.1 Ablauf eines El Niño-Ereignisses	131
7.1.2 Modellierung mit einer Differentialgleichung	132
7.1.3 Mängel des Modells	133
7.2 Kelvin-Wellen	133
7.2.1 Kelvin-Wellen	133
7.2.2 Bewegungsgleichung für Kelvin-Wellen	134
7.2.3 Wellengleichung	134
7.2.4 Approximative Lösung der Wellengleichung	135
7.3 Rossby-Wellen	136
7.3.1 Zirkulation	136
7.3.2 Bewegungsgleichung	137
7.3.3 Wellenlösungen	137
7.3.4 Gruppengeschwindigkeit	138
7.3.5 Energietransport durch Rossby-Wellen	140
7.4 Verzögertes Oszillator-Modell	140
8 Datenassimilation	143
8.1 Kalman-Filter	143
8.1.1 Messung und System	144
8.1.2 Systemmodellierung	144
8.1.3 Schätzfehler	145
8.1.4 Messprozess	146
8.1.5 Filterung	146
8.1.6 Beispiel	147
8.2 Das Assimilationsproblem	148
8.2.1 Markov-Kette und Markov-Eigenschaft	148
8.2.2 Filterung, Vorhersage und Reanalyse	149
8.3 Kalman-Filter als Bayesscher Filter	151
8.3.1 Normalverteilte Variablen	152
8.3.2 Lemma 20.1	152

8.3.3 Übungsaufgabe 4	154
II Anwendungen und Weiterführende Themen	159
9 Lorenz-Attraktor	163
9.1 Einführung	163
9.2 Lorenz-Modell	163
9.2.1 Numerische Lösungen	164
9.3 Visualisierung	166
9.4 Hintergründe	167
9.4.1 Empfindlichkeit der Anfangsbedingungen	167
9.4.2 Chaostheorie	168
9.4.3 Attraktor	169
9.4.4 Strange Attraktor	170
9.5 Schlussfolgerung	170
10 Höherdimensionales Lorenzsystem	173
10.1 Einstieg	174
10.1.1 Notation	174
10.1.2 Formelzusammenstellung	174
10.2 Erweiterung der Basisfunktionen	175
10.3 Höherdimensionales Lorenzsystem	176
10.4 Lorenzsystem vierten Grades	182
10.5 Numerische Lösung	185
10.6 Schlussfolgerungen	194
11 Machine Learning und Klimamodelle	195
11.1 Die Wärmeleitungsgleichung als diskretes ML Problem	195
11.1.1 Neuronales Netzwerk - Die Blackbox	196
11.1.2 Trainingsdaten & 'Faire' Kurven	197
11.1.3 Netzwerk Design & Erwartung	199
11.2 Die Gleichung von Burgers	200
11.2.1 Nichtlineare Transportgleichung	200
11.2.2 Erhaltungssatz	201
11.2.3 Hugoniot-Rankine-Bedingungen	201
11.2.4 Numerische Lösungen und Computational mode	203
11.2.5 Trainingsdaten für die Gleichung von Burgers	207
12 3-Box-Modell der Thermohalinen Zirkulation	209
12.1 Einleitung	209
12.2 Thermohaline Zirkulation, was ist das?	209
12.2.1 Einflussfaktoren	209
12.2.2 Dichte	210
12.3 Golfstrom	211
12.3.1 Kreislauf	211
12.3.2 Einfluss des Klimawandels	212
12.3.3 Folgen	213

12.4	Simulation	213
12.4.1	Zwei-Fluss Modell(1. Ansatz)	214
12.4.2	Ein-Fluss Modell (2. Ansatz)	217
12.5	Schlussfolgerung	221
13	Eis	225
13.1	Einleitung	225
13.1.1	Eisschmelze am Nordpol	225
13.1.2	Problem an der Eisschmelze	225
13.2	Ziel	227
13.3	Von Budyko zur zonalen Energiebilanz	227
13.3.1	Einstrahlung abhängig vom Breitengrad	228
13.3.2	Einstrahlung in Abhängigkeit vom Neigungswinkel	228
13.3.3	Normalisierungsbedingung	229
13.3.4	Approximation der Energieverteilung	229
13.3.5	Absorptionsverteilung	230
13.4	Energiegleichung	230
13.5	Resultate	231
13.5.1	Albedo abhängig von der Eislinie	231
13.5.2	Eislinie abhängig von der Temperatur	232
13.5.3	Eisfläche abhängig von der Temperatur	232
13.5.4	Vergleich mit der Realität	233
13.6	Modellfehler	233
13.7	Schlussfolgerung	234
14	Numerische Lösung einer verzögerten Differentialgleichung	237
14.1	Einleitung	237
14.2	Grundlagen verzögerte Differentialgleichungen	237
14.2.1	Definitionen	237
14.2.2	Analytische Lösungsverfahren an einem Beispiel	238
14.3	El Niño DDE	240
14.3.1	Gleichung	240
14.3.2	Charakteristische Gleichung	241
14.3.3	Berechnen der Konstanten	241
14.3.4	Chaosches Verhalten	242
14.4	Numerische Lösung	243
14.4.1	Analyse der Funktion dde23	244
14.4.2	Berechnung mit kurzen Zeitschritten	245
14.4.3	Instabilität bei wenigen Datenpunkten	245
14.5	Auswertung	248
14.5.1	Simulation El-Niño mit realen Werten	248
14.5.2	Fazit	251
15	Klima auf anderen Planeten	253
15.1	Einleitung	253
15.2	Ziel	254
15.3	Modell	254
15.3.1	Strahlungsbilanz	255

15.3.2 Albedo	256
15.3.3 Treibhauseffekt	256
15.3.4 Wasserkreislauf	256
15.3.5 Gleichungssystem	257
15.4 Simulation	257
15.4.1 Ergebnisse	258
15.5 Schlussfolgerung	260
15.5.1 Verbesserungsmöglichkeiten	260
16 Achsneigung und Eiszeiten	263
16.1 Einführung	263
16.1.1 Milanković Zyklen	264
16.2 Einstrahlungswinkel	267
16.3 Achsenneigung	267
16.4 Mathematischer Zusammenhang	268
16.4.1 Einstrahlung	269
16.4.2 Mögliche Eiszeit	270
16.4.3 Simulation I	271
16.4.4 Coalbedo	272
16.4.5 Simulation II	274
16.5 Schlussfolgerung	275
17 Vegetation	277
17.1 Abschnitt	277
17.2 Schlussfolgerung	277
18 Datenassimilation für das Lorenz-System	279
18.1 Datenassimilation	279
18.2 Kalmanfilter	279
18.2.1 Allgemeine Funktionsweise	280
18.2.2 Anwendung auf das Lorenz-System	280
18.2.3 Parameter und Initialisierung	283
18.2.4 Die Realität	284
18.2.5 Anmerkungen zur Kovarianzmatrix und dem Kalmanfaktor	284
18.3 Beobachtungen und Erkenntnisse	285
18.3.1 Vollständig erfassbares System	285
18.3.2 Unvollständig erfassbares System	289
18.4 Zusammenfassung der Erkenntnisse	291
19 Extreme Ereignisse	297
19.1 Einleitung	297
19.2 Was sind extreme Ereignisse?	298
19.2.1 Aufzeichnungen in der Schweiz	298
19.2.2 Homogene Messreihen	298
19.3 Unwetter-Lotto	299
19.3.1 Lottoproblem	300
19.4 Die Unwetter-Verteilung	302
19.4.1 Beispiel	302

19.4.2 Die hypergeometrische Verteilung	304
19.4.3 Sind viele extreme Ereignisse wahrscheinlich?	304
19.5 Hypothesentest	305
19.5.1 Nullhypothese	307
19.5.2 Signifikanzniveau	307
19.6 Messpunkte Schweiz	307
19.6.1 Prüfung Messreihe	309
19.7 Temperaturanstieg wegen Klimawandel?	309
19.7.1 Jahresmitteltemperatur	309
19.7.2 Sommertage	309
19.7.3 Tropennächte	310
19.7.4 Hitzetage	310
19.7.5 Frosttage	310
19.7.6 Eistage	310
19.8 Niederschlag und Klimawandel	310
19.8.1 Jahresniederschlag	311
19.8.2 Neuschnee	311
19.9 Gletscherschwund?	311
19.9.1 Grosser Aletschgletscher	311
19.9.2 Vadret da Morteratsch	311
19.10 Ist der Klimawandel in der Schweiz real?	312
19.11 Ist der Klimawandel nur ein grosser Zufall?	313
19.11.1 Auswertung und Erklärung der Klimadaten	313
19.11.2 Auswertung und Erklärung der Gletscher	314
19.11.3 Fazit	315
19.12 Auswertung der Klima- und Gletscherdaten	316
Index	323

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Buch entstand im Rahmen des Mathematischen Seminars im Frühjahrssemester 2018 an der Hochschule für Technik Rapperswil. Die Teilnehmer, Studierende der Abteilungen für Elektrotechnik, Informatik und Bauingenieurwesen der HSR, erarbeiteten nach einer Einführung in das Themengebiet jeweils einzelne Aspekte des Gebietes in Form einer Seminararbeit, über deren Resultate sie auch in einem Vortrag informierten.

Im Frühjahr 2018 war das Thema des Seminars der Klimawandel. Im Unterschied zu früheren Seminaren wurde diesem Seminar das Buch [1] zu Grunde gelegt. Dies führt dazu, dass der erste Teil, der Skript-Teil etwas weniger detailliert erarbeit wurden. Das Hauptziel war, den Teilnehmern eine Referenz bereitzustellen, die die Verbindung zwischen der in den Grundvorlesungen gelernten Mathematik herzustellen.

Im zweiten Teil dieses Skripts kommen dann die Teilnehmer selbst zu Wort. Ihre Arbeiten wurden jeweils als einzelne Kapitel mit meist nur typographischen Änderungen übernommen. Diese weiterführenden Kapitel sind sehr verschiedenartig. Eine Übersicht und Einführung findet sich in der Einleitung zum zweiten Teil auf Seite 161.

In einigen Arbeiten wurde auch Code zur Demonstration der besprochenen Methoden und Resultate geschrieben, soweit möglich und sinnvoll wurde dieser Code im Github-Repository dieses Kurses¹ abgelegt.

Im genannten Repository findet sich auch der Source-Code dieses Skriptes, es wird hier unter einer Creative Commons Lizenz zur Verfügung gestellt. Auf der beiliegenden DVD befinden sich die Testdaten und Programme zu zwei der simulationsintensiveren Artikel im zweiten Teil.

¹<https://github.com/AndreasFMueller/SeminarKlima.git>

Teil I

Grundlagen

Einleitung

Dass sich das Klima verändert ist unbestritten, Diskussionen entstehen nur über die Ursache. Das Klima-System umfasst die gesamte Atmosphäre, die Weltmeere und auch in den Landmassen kann Wärme gespeichert werden. Je nach Bodenbedeckung, sei es durch Vegetation oder Eis, wird mehr Strahlung absorbiert oder reflektiert. Diese grosse Zahl von auf das Klima einwirkenden Faktoren macht es schwierig, einfache Kausalketten zu konstruieren zum Beispiel zwischen CO₂ und Anstieg der globalen Mitteltemperatur. Aber ist auch genauso unangemessen, aus einzelnen Datenpunkten abzuleiten, dass der Klimawandel gar nicht existiert, wie es einzelne interessierte Akteure tun.

Die Lösung dieses Dilemmas ist natürlich, das Klimasystem mathematisch zu modellieren. Genauso dies wird seit der Mitte des letzten Jahrhunderts versucht. Doch auch dies ist keine einfache Aufgabe. Zunächst müssen Klimafaktoren, also Aussagen über längerfristige Mittelwerte, von den kurzfristigen Schwankungen des Wetters getrennt werden. Die globale Jahres-Mitteltemperatur ist ein einfacher solcher Faktor, doch mit dieser Mittelung geht der Blick auf die jahreszeitlichen Schwankungen verloren. Es könnte ja sein, die Mitteltemperatur nur langsam ansteigt, aber die mit den Jahreszeiten verbundene Amplitude der Temperatur über das Jahr derart gross wird, dass sich Ökosysteme derart verändern, dass zum Beispiel die Nahrungsversorgung gefährdet wird. Erfolgreiche Modellierung bedeutet also, dass geeignete Variablen gefunden werden, die die wesentlichen Aspekte des Klimas darstellen können, sie nicht übermäßig vereinfachen und immer noch die Fähigkeit aufrechterhalten, Vorhersagen über die zukünftige Entwicklung des Klimas zu machen.

Es ist naheliegend, dass eine detaillierte Beschreibung der Atmosphäre, der Weltmeere, des Wärmeaustausches mit den Landmassen mit allen bekannten Gesetzen der Physik im Prinzip korrekte Vorhersagen ermöglichen dürfte. Es stellt sich aber heraus, dass dies nicht realistisch ist. Schon in einfachen Strömungsmodellen tritt das Phänomen der sensitiven Abhängigkeit von Anfangsbedingungen auf. Selbst winzigste Unterschiede in den Anfangsbedingungen führen zu völlig verschiedener langfristiger Entwicklung des Modells. Solche Modelle mögen zum Beispiel für kurzfristige Wetterprognosen noch geeignet sein, sie sind aber offenbar ungeeignet für Klimaprognosen. Dieses Phänomen wird an Hand des Lorenz-Modells in Abschnitt 2.5 illustriert.

Ein weiteres Problem ist, dass eine detaillierte Modellierung nach dem Vorbild der Fluidynamik zu derart komplexen Gleichungen führt, dass sie für lange Zeiträume nicht mehr effizient gelöst werden können. Zwar steigt mit der Weiterentwicklung der Computer-Technologie die zur Verfügung stehende Rechenleistung und damit der technisch erreichbare Prognosehorizont, er bleibt aber immer noch weit entfernt von den angestrebten Zeiträumen von mindestens 100 Jahren. Die Modelle müssen daher soweit vereinfacht werden und durch relativ niedrigdimensionale Modelle ersetzt werden, die robuste Vorhersagen über wenige Jahrhunderte ermöglichen. Die detaillierte Kenntnis der physikalischen Prozesse kann solche Variablen nahelegen, daher werden in Kapitel 1 die wichtigsten physikalischen Grundlagen zusammengestellt. Die in Kapitel 4 beschriebene thermohaline Zirkulation oder die Zonenmodelle von Kapitel 5 kommt ebenfalls mit einer sehr kleinen Zahl von

physikalisch motivierten Parametern aus.

Manchmal können jedoch auch mathematische Methoden dazu verwendet werden, geeignete Variablen zu finden. Zum Beispiel kann dies mit Hilfe der Fourier-Analyse geschehen, die im Kapitel 6 entwickelt wird. Die Fourier-Koeffizienten a_0 und a_1, b_1 trennen zum Beispiel die langfristigen Mittelwerte und die jährlichen Schwankungen, sie geben also mathematisch wieder, was man auch aus einer physikalischen Argumentation hätte ableiten können. In Abschnitt 2.4 wird das Separationsverfahren für partielle Differentialgleichungen dargestellt. Es liefert eine Basis von Funktionen, mit denen die unendlichdimensionalen partiellen Differentialgleichungen in endlichdimensionale gewöhnliche Differentialgleichungen umgewandelt werden können. Das Lorenz-Modell von Abschnitt 2.5 ist ein Beispiel, wie die Dimensionszahl reduziert werden kann. Die spektrale Methoden, die in Abschnitt 5.4 beschrieben werden, sind nicht nur in der Wetterprognose üblich, sondern sind auch für Klimamodelle nützlich, zum Beispiel auch, weil sie auf ganz natürliche Weise die für Klimauntersuchungen häufig irrelevante Erdrotation von der Breitenabhängigkeit zu trennen gestatten.

Das Phänomen des El Niño illustriert, dass Koppelungen wesentlicher Klimaparameter sowohl über grosse Distanzen wie auch lange Zeiträume existieren. Die Modellierung dieser Koppelungen kann zum Beispiel auf der Basis der Strömungsdynamik von Kapitel 2 erfolgen. Damit lässt sich dann ein realistischeres Modell des El Niño-Phänomens in Form einer verzögerten Differentialgleichung konstruieren. Kapitel 7 zeigt den Weg dazu. Die numerischen Probleme in diesem Modell werden in Kapitel 14 untersucht.

Woher weiss man, ob ein Modell die Zukunft korrekt vorhersagen wird? Da je nach Prognose möglicherweise dringender Handlungsbedarf für die Menschheit besteht, kann man nicht warten, bis klar wird, dass die Prognose direkt überprüft werden kann. Vertrauen in das Modell muss daher dadurch hergestellt werden, dass man die Vorhersagen des Modells mit der bisherigen Klimgeschichte der Erde vergleicht. Dies wird zum Beispiel ansatzweise in Kapitel ?? durchgeführt.

Häufig stellt sich das Problem, dass gar nicht alle Parameter eines Modelles überhaupt bekannt sind. Noch schwieriger ist es, den Anfangszustand zu ermitteln. Woher kennen wir zum Beispiel den Atmosphärenzustand zu Beginn des Kambriums, der Phase der Erdgeschichte, in der zum ersten mal komplexe Fossilien auftauchen. Diese Informationen sind nicht alle der direkten Bestimmung zugänglich. Man kann aber versuchen, diejenigen Parameter zu finden, die zusammen mit den messbaren Größen eine Vorhersage des Modells ergeben, die gut mit der tatsächlich überlieferten Klimgeschichte der Erde übereinstimmen. Dieser Prozess der Datenassimilation wird in Kapitel 8 abstrakt beschrieben und in Kapitel 18 an einem Modellbeispiel durchgeführt.

Die Darstellungen im ersten Teil des Buches erheben nicht den Anspruch einer vollständigen Darstellung. Gegebenenfalls dem Buch [5], welches dieses Seminar begleitet hat, wird nur versucht, die Schwergewichte etwas klarer auf die in dieser Einleitung genannten Punkte zu leiten. Diese Prinzipien, mit denen man zweckmässige Modelle vernünftiger Dimensionalität konstruieren kann, die stabile langfristige Aussagen ermöglichen, sind nicht nur in der Klimamodellierung nützlich, sondern können in jeder Modellierungsaufgabe in den Ingenieur- oder Naturwissenschaften angewendet werden.

Kapitel 1

Wetter und Klima

US Präsident Donald Trump war schon immer ein Klimaverweigerer, wie Tweets aus der Zeit lange bevor er Präsident wurde:



Donald J. Trump
@realDonaldTrump

Folgen



It's freezing in New York—where the hell is global warming?

Original (Englisch) übersetzen

12:37 - 23. Apr. 2013

478 Retweets 300 „Gefällt mir“-Angaben



390

478

300



Ganz offensichtlich versteht Trump den Unterschied zwischen Wetter und Klima nicht. Ziel dieses Kapitels ist, den Unterschied zwischen Wetter und Klima zu klären. Es ist allgemein bekannt, dass auch die besten Wetterprognosen im günstigsten Fall für einige Tage zutreffen. Daher soll in diesem Kapitel auch gezeigt werden, war trotz dieser Schwierigkeit das Klima sehr wohl langfristig modelliert und prognostiziert werden kann. Aus diesen Überlegungen wird auch klar, auf welche Aspekte des Klimasystems sich ein Klima-Modell fokussieren muss, wenn eine langfristige Prognose ermöglicht werden soll.

1.1 Klima

In der Wikipedia kann man die folgenden Definitionen für die Begriffe Wetter und Klima finden:

Definition 1.1. Als Wetter bezeichnet man den spürbaren, kurzfristigen Zustand der Atmosphäre (auch: messbarer Zustand der Troposphäre) an einem bestimmten Ort der Erdoberfläche, der unter anderem als Sonnenschein, Bewölkung, Regen, Wind, Hitze oder Kälte in Erscheinung tritt [18].

Definition 1.2. Das Klima steht als Begriff für die Gesamtheit aller meteorologischen Vorgänge, die für die über Zeiträume von mindestens 30 Jahren regelmässig wiederkehrenden durchschnittlichen Zustände der Erdatmosphäre an einem Ort verantwortlich sind [16].

Was also Donald Trump in seinem Tweet beschrieben hat ist das Wetter. Selbst wenn die Temperatur in New York unter den Gefrierpunkt fällt, heisst das nicht, dass die mittlere Temperatur in New York über mehrere Jahre nicht doch ansteigen kann. Tatsächlich bedeutet “globale Erwärmung” nicht, dass die mittlere Temperatur an jedem Punkt der Erde zunehmen wird. Im Gegenteil ist es durchaus möglich, dass zwar die mittlere Temperatur der Erde ständig zunimmt, wie wir in den letzten Jahren auch messtechnisch nachweisen konnten, dass aber auch die Temperaturunterschiede stark zunehmen, so dass es am Ende an einzelnen Stellen der Erdoberfläche zu einer Abkühlung kommen kann. Um dieser Komplexität Rechnung zu tragen, spricht man nicht mehr von der “globalen Erwärmung”, sondern vom Klimawandel.

Auch wenn sich das Wetter nur sehr eingeschränkt vorhersagen lässt, bedeutet das noch lange nicht, dass das Klima nicht doch sehr genau vorhergesagt werden kann. Eine Analogie kann den Unterschied zwischen der Vorhersagbarkeit von Wetter und Klima verdeutlichen. Wenn man in einem Kochtopf Wasser zum Kochen bringt, stellt sich eine unvorhersagbare chaotische Bewegung kleiner und grosser Gasblasen ein. Es ist unmöglich vorherzusagen, wann und wo sich die nächste Blase bilden wird und welchen Weg sie an die Oberfläche des Wassers nehmen wird. Wenn wir aber nur die mittlere Temperatur betrachten, können wir aus der Heizleistung der Kochplatte, der Masse und der spezifischen Wärmekapazität des Wassers genau berechnen, welche Temperatur zu welcher Zeit im Wasser herschen wird und wir können den Zeitpunkt exakt vorhersagen, wann das Wasser zu sieden beginnt. Die mittlere Temperatur des Wassers beschreibt das “Klima” in der Pfanne, die kleinräumigen und kurzfristigen Blasen und anderen Turbulenzen beschreiben das “Wetter”.

1.2 Physikalische Eigenschaften des Klimasystems

In diesem Abschnitt stellen wir die physikalischen Eigenschaften aller wesentlicher Komponenten des Klimasystems zusammen. Dabei geht es zunächst nur darum, die grundlegende Physik in Erinnerung zu rufen und die Naturgesetze, die die Wechselwirkungen zwischen den Komponenten beschreiben. Auf die Details der mathematischen Modellierung der zukünftigen Veränderung dieser Grössen werden wir erst später eingehen.

1.2.1 Wärme, Konvektion, Kondensation

Die wohl wichtigste Klima-Grösse ist die Temperatur. Sie drückt aus, wieviel Energie in Form von Wärme ein Körper enthält.

Wärmekapazität

Die spezifische Wärme C gibt an, wie die innere Energie sich bei einer Temperaturänderung ΔT verändert:

$$\Delta E = C \cdot \Delta T.$$

Der Körper speichert Energie in Form der thermischen Bewegung der einzelnen Atome. Schwerere Atome können bei gleicher Bewegungsgeschwindigkeit mehr Energie speichern. Stoffe mit grösserer Dichte können mehr Atome und damit auch mehr Wärmeenergie in einem kleineren Volumen unterbringen. Die spezifische Wärmekapazität c gibt an, welche Wärmekapazität ein Kilogramm eines Stoffes hat. Ein Körper der Masse m hat also die Wärmekapazität $C = cm$.

Wärmeleitung

Herrschen in einem Körper Temperaturunterschiede, ist T nicht mehr nur eine konstante, sondern eine Funktion der Koordinaten und auch der Zeit. Temperaturunterschiede werden sich ausgleichen, indem Energie von wärmeren zu kälteren Teilen des Körpers fliegt. Dies geschieht umso schneller, je grösser die Unterschiede sind. Die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T \quad (1.1)$$

beschreibt die Entwicklung der Funktion $T(x, y, z, t)$ an jedem Ort des Raumes [19]. Der Koeffizient κ ist eine Materialkonstante, die beschreibt, wie schnell sich die Temperaturunterschiede ausgleichen können. Ist $\kappa = 0$, folgt $\partial T / \partial t = 0$, die Temperatur ändert sich nicht, es findet keine Wärmeleitung statt.

Die rechte Seite von (1.1) kann mit dem sogenannten Laplace-Operator gemäss der folgenden Definition geschrieben werden.

Definition 1.3. *Der Operator*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

heisst der Laplace-Operator.

Die Wärmeleitungsgleichung erhält damit die Form

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T. \quad (1.2)$$

Konvektion

Wärmeleitung kann Wärmeenergie nur vergleichsweise langsam transportieren. Das einleitende Beispiel des Kochtopfs zeigt auch, wie ein effizienterer Energietransport funktionieren kann. In der Atmosphäre dehnt sich warme Luft aus. Dank der geringeren Dichte können warme Luftblasen aufsteigen und damit Wärme viel effizienter in die obere Atmosphäre transportieren als dies mit Wärmeleitung möglich wäre. Dieser Prozess heisst *Konvektion* [20].

Wir wollen den Fall eines strömenden Mediums mathematisch etwas genauer ausarbeiten. Bewegt sich das Medium mit der Geschwindigkeit \vec{v} , dann ändert sich die Temperatur des Mediums, welches sich über dem Punkt $P = (x, y, z)$ befindet. Nach der Zeit Δt befindet sich derjenige Teil des Mediums über dem Punkt P , der sich vorher über dem Punkt $P - \vec{v}\Delta t$ befand. Die Temperatur zur Zeit $t + \Delta t$ ist daher $T(P, t + \Delta t) = T(P - \vec{v}\Delta t, t)$. Die Temperaturänderung

$$T(P, t + \Delta t) = T(P, t) + (T(P, t + \Delta t) - T(P, t)) = T(P, t) + T(P - \vec{v}\Delta t, t) - T(P, t)$$

$$\frac{T(P, t + \Delta t) - T(P, t)}{\Delta t} = \frac{T(P - \vec{v}\Delta t, t) - T(P, t)}{\Delta t}.$$

Beim Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ wird aus der linken Seite die partielle Ableitung nach t . Die rechte Seite kann mit Hilfe der Kettenregel berechnet werden. Es wird

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial T}{\partial x} v_x - \frac{\partial T}{\partial y} v_y - \frac{\partial T}{\partial z} v_z. \quad (1.3)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite kann vektoriell mit der folgenden Definition etwas eleganter geschrieben werden.

Definition 1.4. Der vektorielle Operator

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

heisst der Nabla-Operator. Der Vektor

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \text{grad } f$$

heisst der Gradient von f .

Die Temperaturänderung in Folge der Strömung (1.3) wird

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla T. \quad (1.4)$$

Man nennt diese Temperaturänderung durch die Strömung auch *Advektion*. Die Wärmeleitungsgleichung kann damit zu einem umfassenderen Modell

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla T + \kappa \Delta T \quad (1.5)$$

zusammengefasst werden. Es ist geeignet für die Beschreibung sowohl der Atmosphäre wie auch des Wärmeaustausches in den Ozeanen.

Phasenübergänge

Um ein Kilogramm Wasser bei 20°C zu verdunsten, ist eine latente Wärme von 2480 kJ nötig. Um ein Kilogramm Luft um ein Grad zu erwärmen, sind dagegen nur 1.005 kJ notwendig. Anders herum bedeutet dies, dass eine mit Wasserdampf angereicherte Atmosphäre sehr viel mehr Energie in Form von latenter Wärme speichern kann, als allein durch die Wärmekapazität trockener Luft möglich wäre.

Wir haben damit zwei Mechanismen identifiziert, wie eingestrahlte und in der Erdkruste als Wärme gespeicherte Energie in die Atmosphäre transportiert werden kann. Einerseits kann Luft über aufgewärmten Landmassen oder dem Meer erwärmt werden und als Konvektionsströmung aufsteigen. Andererseits kann Wasser an der Oberfläche verdampft werden damit die latente Wärme in die Atmosphäre übergehen. Man nennt diese Mechanismen auch turbulenten Flüsse [12, S. 70].

Der Wassergehalt der Luft kann höchstens einige wenige Prozente betragen. Zwar ist die Wärmespeicherung durch Verdunstung über 2000 mal effizienter, aber weil nur wenig Wasser dafür zur Verfügung steht, übernimmt die Verdunstung doch nicht einen derart grossen Teil des Energietransports von der Oberfläche in die Atmosphäre. In der Tat finden etwa 30% des Energietransports von der Erdkruste in die Atmosphäre durch turbulente Flüsse statt, davon etwa 7% durch Konvektion und 23% durch latente Wärme [12, S. 70]. Höhere Temperaturen begünstigen die Verdunstung und verschieben diesen Anteil zugunsten der latenten Wärme. Man darf also davon ausgehen, dass höhere Oberflächentemperaturen zu einem überproportional höheren Energietransport in die Atmosphäre führen.

In der Atmosphäre kann die Energie über grosse Distanzen transportiert und später wieder freigesetzt werden, wie Hurricanes und Tornadoes eindrücklich demonstrieren können. Damit ein Klimamodell Aussagen machen kann über das Auftreten von extremen Wetterphänomenen muss es also den Wassergehalt der Atmosphäre modellieren.

1.2.2 Strahlung

Der bedeutendste Energietransportmechanismus in der Atmosphäre ist die Strahlung. In diesem Abschnitt stellen wir die Strahlungsgesetze zusammen und studieren die Strahlungsbilanz der Atmosphären.

Schwarzkörperstrahlung

Die Strahlung der Sonne wie auch der Erde kann als Strahlung eines schwarzen Körpers modelliert werden. Ein schwarzer Körper ist ein idealisierter Körper, der alle auftretende Strahlung absorbieren kann. Er befindet sich im thermischen Gleichgewicht mit dem Strahlungsfeld, seine Strahlung hängt daher nur von der Temperatur ab.

Stefan-Boltzmann-Gesetz

Das *Stefan-Boltzmann-Gesetz* gibt Auskunft darüber, wieviel Energie insgesamt von einem schwarzen Körper abgestrahlt wird. Die gesamte Strahlung hängt natürlich von der Oberfläche A des Strahlers ab, aber die Strahlungsleistung pro Flächeneinheit hängt nur noch von der Temperatur ab. Die gesamte Strahlungsleistung ist

$$P = \sigma A T^4 \quad \text{mit} \quad \sigma = 5.670367 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}. \quad (1.6)$$

Die Strahlung der Sonne nimmt dem Quadrat der Entfernung ab. Von der Strahlungsleistung σT^4 pro Flächeneinheit der Sonnenoberfläche bleibt in der Entfernung der Erde die Leistung

$$P_{\odot} = \sigma T^4 \cdot \left(\frac{R_{\odot}}{a_{\odot}} \right)^2 \quad (1.7)$$

übrig, wobei $R_{\odot} = 6.957 \cdot 10^8 \text{ m}$ der Radius der Sonne ist und $a_{\odot} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ m}$ die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne. Setzt man diese Werte und die Temperatur $T = 5778 \text{ K}$ in die Gleichung (1.7) ein, erhält man

$$P_{\odot} = 1366.8 \text{ W/m}^2,$$

auch bekannt als die *Solarkonstante*.

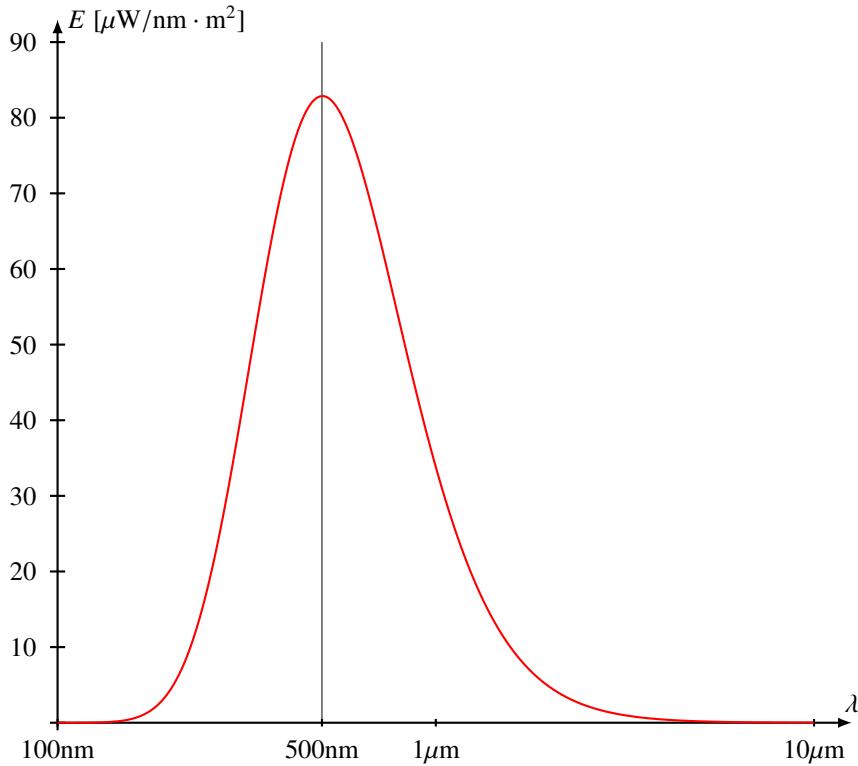


Abbildung 1.1: Plancksches Strahlungsgesetz für die Sonne

Wiensches Verschiebungsgesetz

Die Strahlungsleistung ist nicht über alle Wellenlängen gleichmäßig verteilt. Das *Wiensche Verschiebungsgesetz* besagt, dass die maximale Strahlungsleistung bei einer Wellenlänge abgestrahlt wird, die umgekehrt proportional zur Temperatur ist:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T} \quad \text{mit} \quad b = 2.897 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}. \quad (1.8)$$

Für die Oberfläche der Sonne mit $T = 5778\text{K}$ findet man die Wellenlänge $\lambda_{\max} = 5 \cdot 10^{-7}\text{m} = 500\text{nm}$, dies entspricht grünem Licht. Die Strahlung der Erde mit ihrer mittleren Temperatur von 287 K hat dagegen ihr Maximum bei $\lambda_{\max} = 10\text{ }\mu\text{m}$, also im Infrarotbereich.

Strahlung und Reflektion in der Atmosphäre

Die Intensität in Abhängigkeit von der Wellenlänge wird durch das Plancksche Strahlungsgesetz

$$E(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad (1.9)$$

pro Flächeneinheit des Strahlers und pro Wellenlängeneinheit. Die Strahlungsdichte in Abhängig-

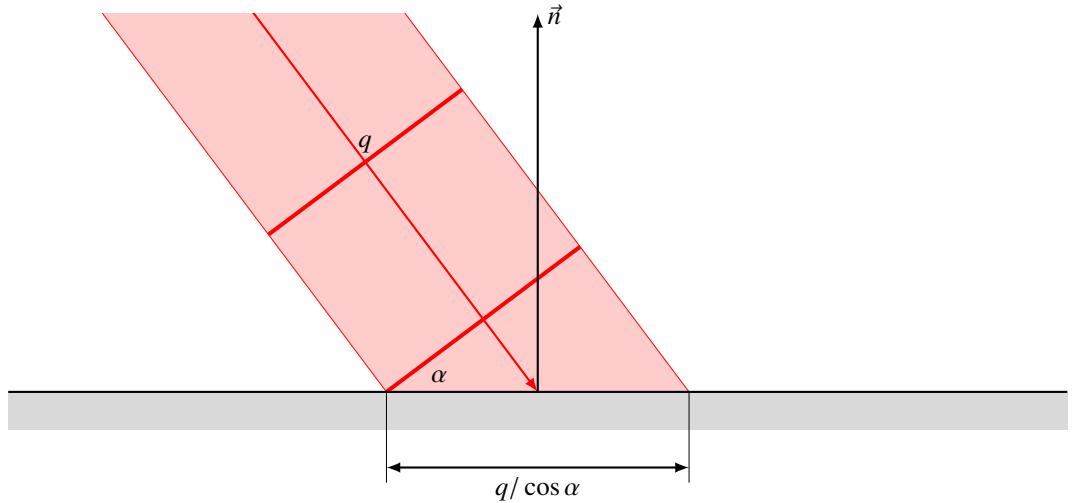


Abbildung 1.2: Einfluss des Einstrahlungswinkels auf die pro Flächeneinheit der Erdoberfläche einfallende Strahlungsleistung. Ein Strahlenbündel mit Querschnitt q , welches im Winkel α zur Vertikalen einfällt, bedeckt die Fläche $q/\cos \alpha$ auf der Erdoberfläche.

keit von der Wellenlänge ist in Abbildung 1.1 dargestellt. Die gesamte Strahlungsleistung ist das Integral

$$P = \int_0^{\infty} E(\lambda, T) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}.$$

Man beachte aber, dass in den graphischen Darstellungen des Strahlungsspektrums eine logarithmische λ -Skala verwendet wird. Bei grossen Wellenlängen (“rechts”) wird die Kurve also in Wahrheit viel stärker ausgedehnt. Will man die Flächeninhalte unter den Kurven vergleichen, muss man die vertikale Achse mit dem Faktor λ skalieren.

Einstrahlungswinkel

Warum ist es in den Tropen wärmer als in gemässigten Breiten oder an den Polen? Die Sonne strahlt doch überall mit der gleichen Intensität.

Der Unterschied stammt natürlich vom Einstrahlungswinkel. Der Ausdruck (1.7) für P_{\odot} beschreibt die Strahlungsleistung pro Flächeneinheit, doch diese Flächeneinheit wird senkrecht auf die Ausbreitungsrichtung der Strahlung gemessen. In gemässigten Breiten und an den Polen fällt die Strahlung in viel kleinerem Winkel auf die Erdoberfläche. Die einfallende Energie verteilt sich daher auf eine grössere Fläche. Ist α der Winkel zwischen der Vertikalen und der Strahlungsrichtung, dann ist die auf einer Erdoberfläche einfallende Strahlungsdichte nur noch $P_{\odot} \cdot \cos \alpha$.

Albedo

Die Strahlung der Erde ist nicht allein die Schwarzkörperstrahlung der Erde. Sie ist überlagert von der Strahlung, die vom Erdboden oder von Wolken reflektiert wird. Die *Albedo* ist der Anteil der reflektierten Strahlung, also ein Wert zwischen 0 und 1. Tabelle 1.1 stellt einige interessante Albedo-Werte von verschiedenen Oberflächen zusammen.

Material	Albedo
Frischer Schnee	0.8 – 0.9
Wolken	0.6 – 0.9
Wüste	0.3
Rasen	0.18–0.23
Wald	0.05–0.18
Wasserfläche	0.05–0.22 (winkelabhängig)
Erde	0.306
Mond	0.11

Tabelle 1.1: Albedo verschiedener Oberflächen und Himmelskörper (aus [13])

Die Albedo hat eine direkte Auswirkung auf das Klima, umgekehrt hängt die Albedo aber auch vom Klima ab. Nimmt die Bewölkung zu, steigt die Albedo, es erreicht weniger Strahlung die Erdoberfläche. Schneefall erhöht ebenfalls die Albedo. Umgekehrt reduziert das Abschmelzen der Polkappen oder der Schneedecke in Permafrostgebieten die Albedo, so dass mehr Strahlung von der Erdoberfläche absorbiert wird.

Strahlungsbilanz

In Abbildung 1.3 sind die Planckschen Strahlungskurve für die Sonne und Erde dargestellt. Die rote Kurve zeigt die spektrale Strahlungsleistung, die von der Sonne auf den Querschnitt πR_{\odot}^2 der Erde eingestrahlt wird, also

$$E(\lambda, T_{\odot}) \cdot 2\pi R_{\odot}^2 \cdot \left(\frac{R_{\odot}}{a_{\odot}} \right)^2$$

mit $T_{\odot} = 5778\text{K}$. Die dunkelblaue Kurve zeigt das Ausstrahlungsspektrum der ganzen Erde mit einer Temperatur von $T = 279\text{K}$, also

$$E(\lambda, T_{\oplus}) \cdot 4\pi R_{\oplus}^2.$$

Die Fläche unter der Kurve ist ein Mass für die gesamte Energie. Offenbar halten sich Einstrahlung und Ausstrahlung die Waage.

Die Einstrahlung kann sich zum Beispiel dann verändern, wenn mehr Strahlung reflektiert wird. Die Ausstrahlung verändert sich, wenn die Atmosphäre für infrarote Strahlung grösser wird. Wir die Atmosphäre durch erhöhte CO₂-Konzentration für infrarote Strahlung undurchsichtiger, dann sinkt die Ausstrahlung der Erde. Damit wieder ein Gleichgewicht entsteht, muss die Temperatur der Erde sich erhöhen, damit die Ausstrahlung ebenfalls höher wird (obere hellblaue Kurve). Sinkt der Gehalt an Treibhausgasen, wird die Atmosphäre transparenter für Wärmestrahlung. Ein Gleichgewicht ist möglich bei tieferer Temperatur (untere hellblaue Kurve). Diese Abhängigkeit der Temperatur von der Transparenz der Atmosphäre für Wärmestrahlung ist bekannt als der *Treibhauseffekt*.

Tatsächliches Strahlungsspektrum

In Abbildung 1.4 ist das tatsächlich gemessene Strahlungsspektrum der Sonne dargestellt. Es fällt auf, dass Wasserdampf und CO₂ für bedeutende Absorptionsbänder verantwortlich ist, während im sichtbaren Bereich die Absorption sehr gleichmässig ist.

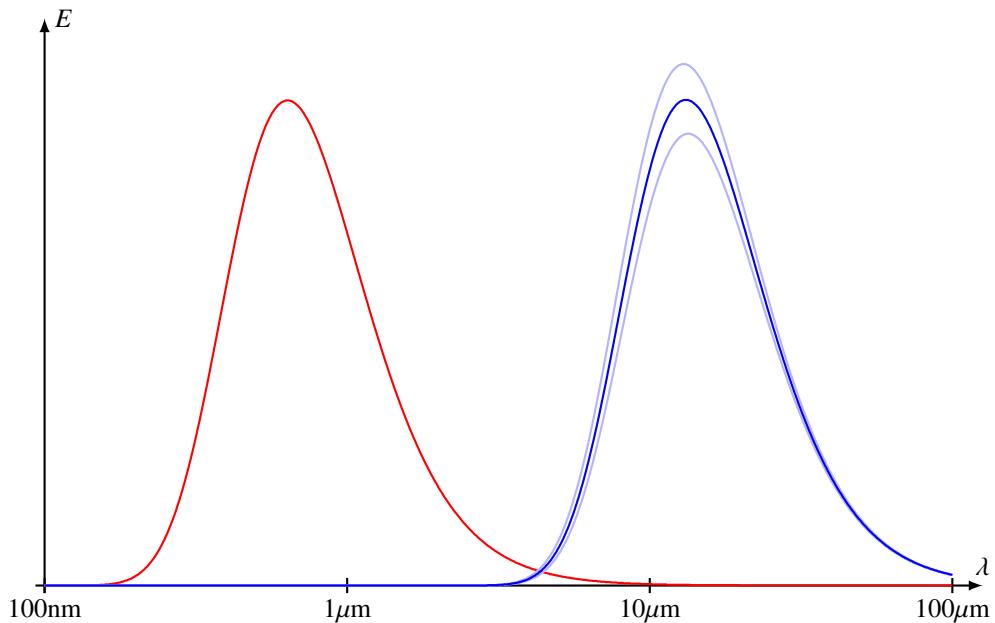


Abbildung 1.3: Strahlung der Sonne (rot) und der Erde (blau). Das Maximum der Strahlung der Sonne ist im sichtbaren Bereich, das Maximum der Wärmestrahlung der Erde im Infraroten.

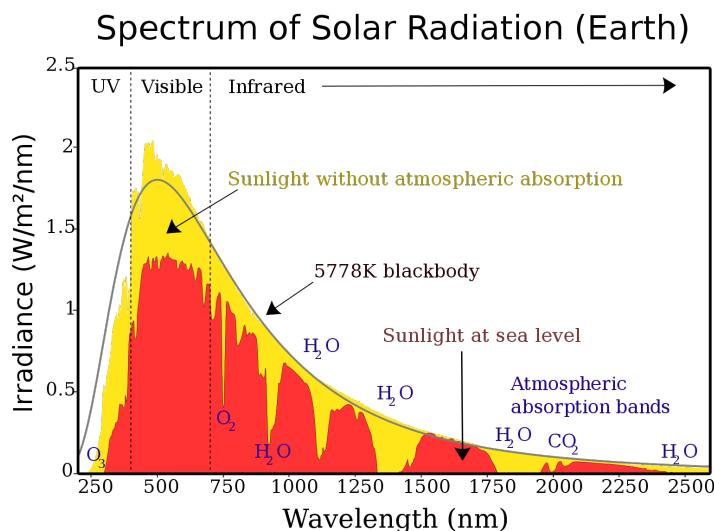


Abbildung 1.4: Tatsächliches Spektrum der Sonnenstrahlung mit (rot) und ohne (gelb) atmosphärische Absorption im Vergleich mit dem Spektrum der Schwarzkörperstrahlung [17].

1.2.3 Erdrotation und atmosphärische Zirkulation

Die Einstrahlung ist naturgemäß am grössten am Äquator, während an den Polen die Ausstrahlung überwiegt. Dies führt dazu, dass die Temperatur an den Polen tiefer ist. Der Temperaturunterschied bedeutet aber auch, dass Prozesse in der Atmosphäre Energie aus niedrigen Breiten zu den Polen transportieren. Die Temperaturunterschiede sind jedoch zu klein dafür, dass Wärmeleitung den Transport bewerkstelligen könnte. Die Energie muss daher durch Advektion (S. ??) unterstützt von latenter Wärme transportiert werden. Um den Energiehaushalt des globalen Klimasystems zu verstehen, muss man daher die globalen Strömungen in der Atmosphäre aber auch in den Ozeanen verstehen.

In Kapitel 2 werden die Grundgleichungen der Fluidodynamik besprochen. In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf eine qualitative Diskussion der globalen Zirkulation. Die globale Zirkulation unterscheidet sich von Strömungen, die in technischen Anwendungen üblicherweise studiert werden dadurch, dass sie zwar im allgemeinen langsamer ist, dafür aber ein viel grösseres Volumen und grössere Distanzen umfasst. Die Windsysteme, die für die Wetterphänomene verantwortlich sind, haben typische Abmessungen von hunderten oder sogar tausenden von Kilometern.

Druckunterschiede und Euler-Wind

Windströmungen in der Atmosphäre werden von Druckunterschieden hervorgerufen. Die Sonnenstrahlung erwärmt die Erdoberfläche und mittelbar die Atmosphäre. Die warme Luft hat geringere Dichte und steigt daher auf. Damit nimmt die Kraft ab, die die Luft auf darunterliegenden Schichten ausüben kann, es entsteht ein Unterdruck. Man nennt eine Luftströmung, die nur durch Druckunterschiede unter Vernachlässigung von Corioliskraft, Zentrifugalkraft und Reibung entsteht den *Euler-Wind*. Lokale Wind-Systeme wie Land-See-Wind oder Berg-Tal-Wind sind von dieser Art.

Coriolis-Effekt

Die Erde dreht sich in 23 Stunden 56 Minuten und 4.091 Sekunden einmal um sich selber. Die Drehung kann mit dem Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\Omega}$ beschrieben werden, der die Richtung der Erdachse vom Süd- zum Nordpol hat und als Länge die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = |\vec{\Omega}| = \frac{2\pi}{86164.091 \text{ s}}.$$

Ein Körper, der sich relativ zu einem mit der Erde verbundenen Koordinatensystem mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegt, erlebt eine durch die Drehung verursachte Beschleunigung

$$\vec{a} = -2\vec{\Omega} \times \vec{v}.$$

Ein Flugzeug, welches mit 880 km/h über den Nordpol fliegt, erfährt dort die Beschleunigung

$$|\vec{a}| = \left| -2 \cdot \frac{2\pi}{86164.091 \text{ s}} \cdot 244.44 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right| = 0.01782 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Diese Beschleunigung ist viel zu klein, dass sie einen wesentlichen Einfluss auf die Bahn eines Flugzeugs haben könnte. Der Luftwiderstand und die von den Steuerflächen des Flugzeugs erzeugten Kräfte und die daraus resultierenden Beschleunigungen sind um Größenordnungen grösser. In der freien Atmosphäre wirkt auf die Luft jedoch nur die Druckkraft, so dass die Coriolis-Beschleunigung einen dominanten Einfluss bekommt.

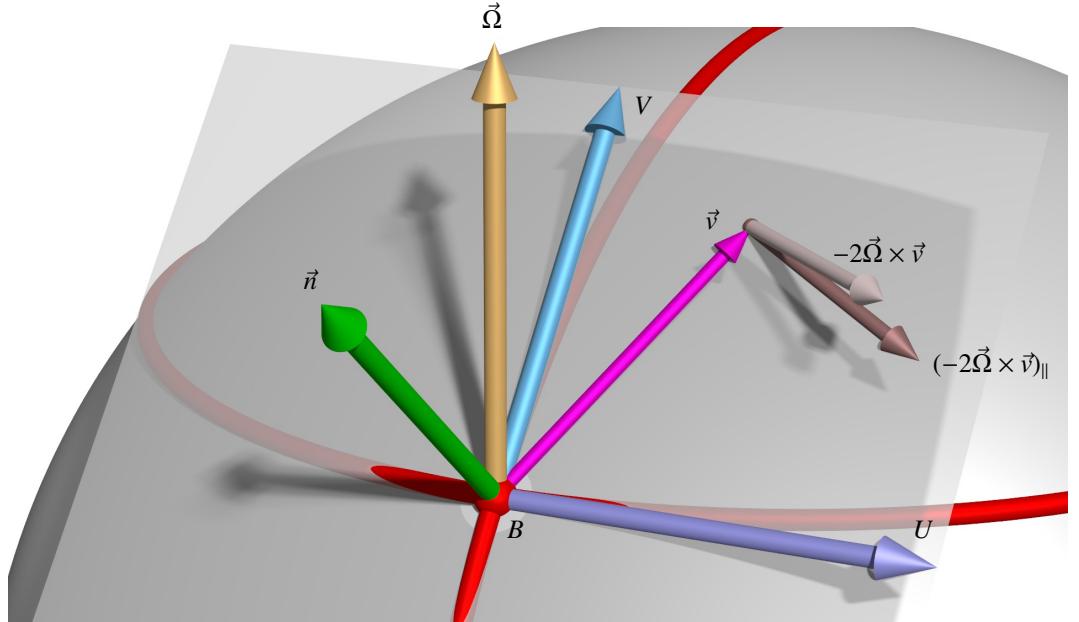


Abbildung 1.5: β -Ebene: Koordinatensystem in der Tangentialebene an die Kugel im Punkt B mit Achsen U parallel zu Breitenkreisen und V parallel zu Längenkreisen. Die Normale der Tangentialebene ist \vec{n} . Ebenfalls eingezeichnet die Coriolis-Beschleunigung $-2\vec{\Omega} \times \vec{v}$ zur Geschwindigkeit \vec{v} und die Komponente $(-2\vec{\Omega} \times \vec{v})_{||}$ parallel zur Tangentialebene.

Die grossräumige Strömung in der Erdoberfläche ist im Wesentlichen parallel zur Erdoberfläche. Daher interessiert für die Beschreibung der Wirkung des Coriolis-Effekts vor allem die Komponente der Beschleunigung parallel zur Erdoberfläche interessant. In einem Punkt B der Erdoberfläche verwenden wir daher ein Koordinatensystem in der Tangentialebene so, dass die x -Achse tangential zum Breitenkreis in B ist und die y -Achse tangential zum Längenkreis (Abbildung 1.5). Die tangentiale Geschwindigkeit wird in diesem Koordinatensystem durch die Komponenten u in U -Richtung und v in V -Richtung beschrieben.

Wir berechnen die Coriolis-Beschleunigung in diesem Koordinatensystem. Für einen Geschwindigkeitsvektor \vec{v} parallel zu V hat das Vektorprodukt $\vec{\Omega} \times \vec{V}$ bereits die Richtung U , er muss also nicht mehr in die Tangentialebene projiziert werden. Der Winkel zwischen $\vec{\Omega}$ und V ist die geographischen Breite α . Die Coriolis-Beschleunigung ist daher $2\omega \sin(\alpha)u \cdot V$.

Für einen Geschwindigkeitsvektor \vec{v} parallel zu U steht das Vektorprodukt $-2\vec{\Omega} \times \vec{v}$ senkrecht auf der Erdachse. Da U und $\vec{\Omega}$ senkrecht stehen ist der Betrag der Coriolis-Beschleunigung

$$|-2\vec{\Omega} \times \vec{v}| = 2\omega u.$$

Aus Abbildung 1.6 kann man ablesen, dass die Komponente der Coriolis-Beschleunigung parallel zur Tangentialebene $2\omega u \sin(\alpha)$ ist.

Setzen wir die beiden Resultate zusammen finden wir, dass die Coriolis-Beschleunigung im U -

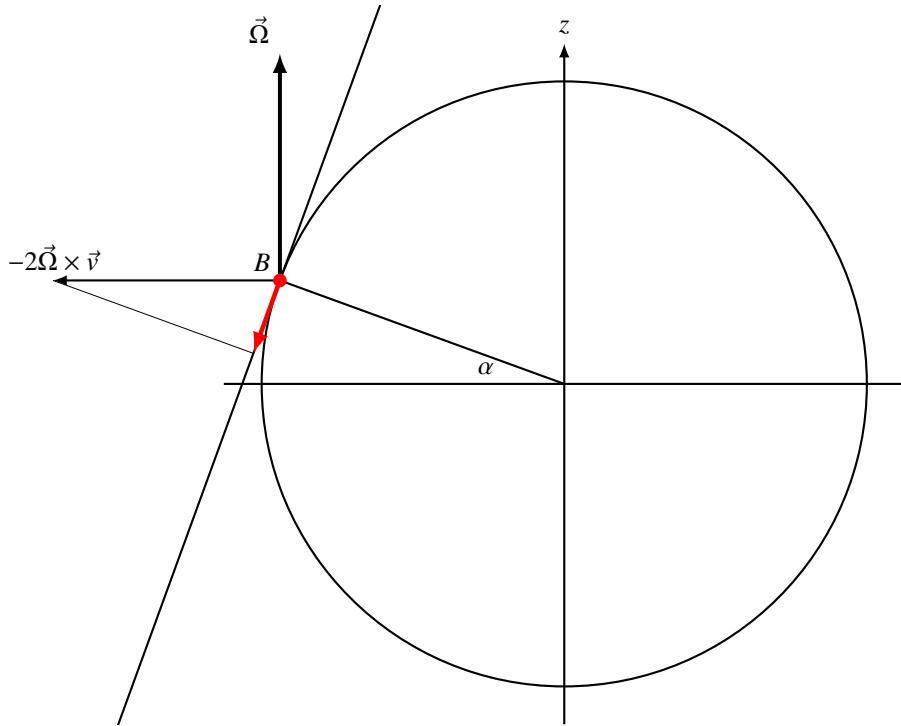


Abbildung 1.6: Berechnung der Coriolis-Beschleunigung für einen Geschwindigkeitsvektor in U -Richtung.

V -Koordinatensystem

$$\underbrace{2\omega \sin \alpha}_{= f} \begin{pmatrix} v \\ -u \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

ist. Die Coriolis-Beschleunigung ist proportional zu $f = 2\omega \sin \alpha$, auch bekannt als der *Coriolis-Parameter*. Das Koordinatensystem in der Tangentialebene im Punkt B heisst auch die β -Ebene.

Globale Zirkulation

Die bisher besprochenen Prinzipien sollten uns ermöglichen, die global Zirkulation qualitativ zu beschreiben. Veränderungen der globalen Zirkulation erfolgen erst über mehrere Tage. Es ist daher gerechtfertigt, die täglichen Schwankungen der Einstrahlung infolge der Erdrotation durch eine mittlere Einstrahlung zu ersetzen. Die Bedingungen für die globale Zirkulation sind daher rotations-symmetrisch um die Erdachse. Wir suchen daher nach einem globalen Strömungsmuster, welches ebenfalls rotationssymmetrisch ist.

Die grösste Einstrahlung erfolgt am Äquator, erwärmt die Luft und lässt sie aufsteigen. Der entstehenden Unterdruck in Äquatornähe erzeugt eine Ausgleichsströmung in Bodennähe. Die aufsteigende Luft kann nicht beliebig hoch aufsteigen und weicht daher in grosser Höhe in Richtung der Pole aus. Die Höhenströmung nach Norden wird von der Coriolis-Beschleunigung nach rechts ab-

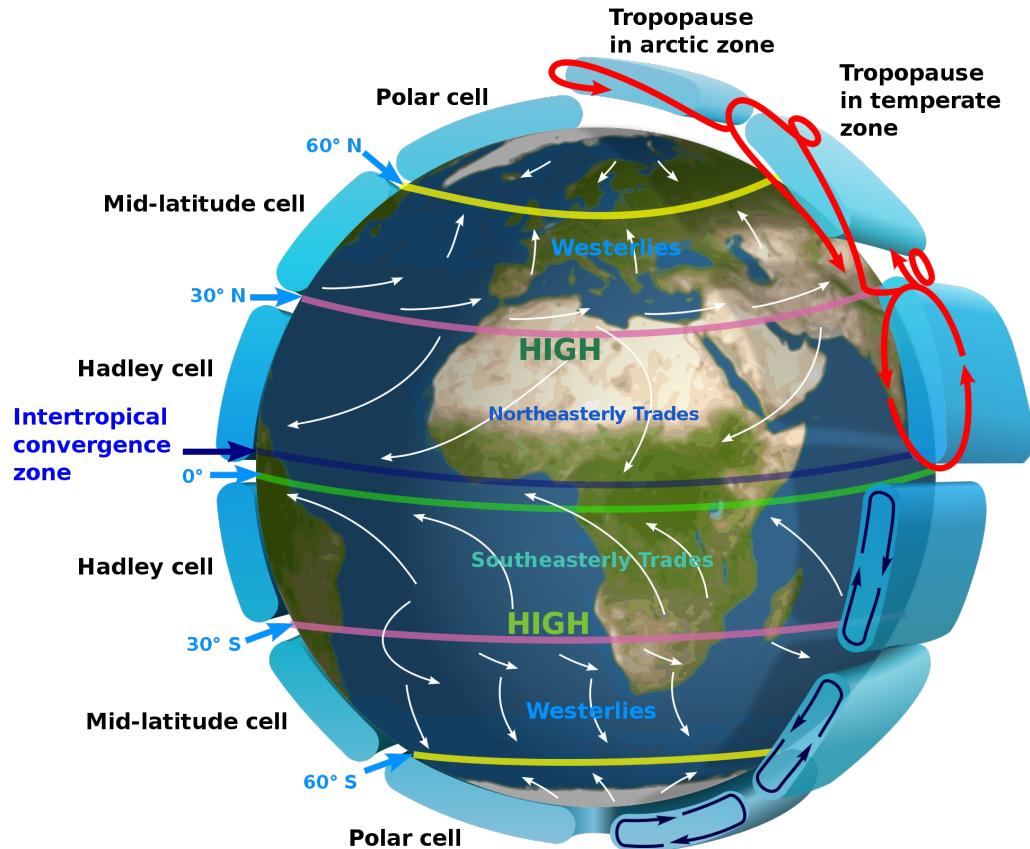


Abbildung 1.7: Globale Zirkulation der Erde

gelenkt, sie kann also nicht beliebig weit nach Norden strömen, bevor sie wieder absinkt. Es entsteht je eine geschlossene Konvektionszelle wie in Abbildung 1.7, die sogenannte Hadley-Zelle [15].

Im Anschluss an die Hadley-Zellen entstehen auf Grund des gleichen Mechanismus weitere Zellen. Die Breite der Zellen hängt offenbar von der Stärke des Coriolis-Effektes ab. Auf einem Planeten mit grösserer Rotationsgeschwindigkeit erwartet man vergleichsweise schmalere Zellen. Dies ist genau was man am Beispiel der globalen Strömung auf dem Jupiter in Abbildung 1.8 beobachten kann.

Äquatorialzone

Nahe am Äquator ist die geographische Breite α klein und damit auch der Coriolis-Parameter f . Die Strömung in Äquatornähe ist daher praktisch unbeeinflusst vom Coriolis-Effekt. Entlang des Äquators kann die Luft oder das Meer also unbeeinflusst durch die Coriolis-Beschleunigung strömen.

Mit Hilfe der β -Ebene können wir jetzt aber auch modellhaft die Bewegung eines Massepunktes

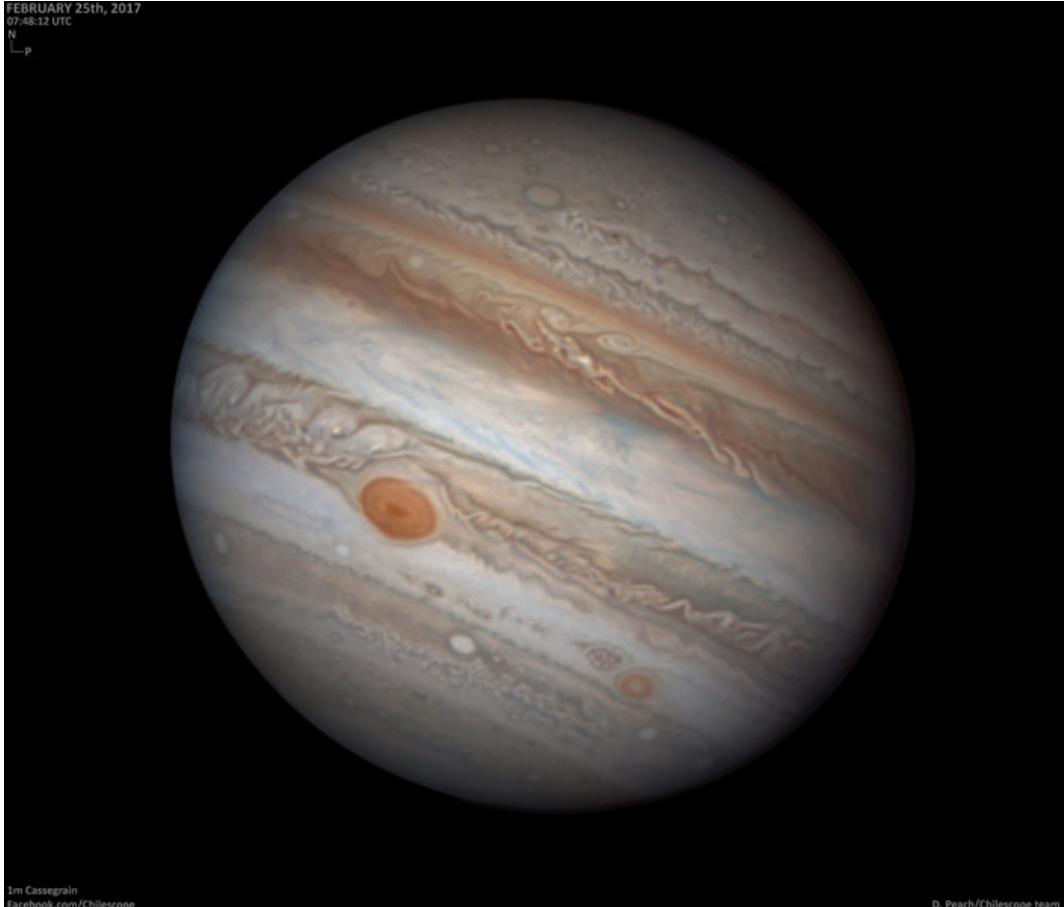


Abbildung 1.8: Jupiter mit Wolkenbändern, Aufnahme von Damian Peach [4]

in Äquatornähe berechnen. Wenn die Coriolis-Beschleunigung der einzige Einfluss ist, dann

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} v \\ -u \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Der Coriolis-Parameter $f = 2\omega \sin \alpha$ ist proportional zur geographischen Breite. Für nicht zu grosse geographische Breiten können wir $\sin \alpha$ durch die y -Koordinate ersetzen. Wir müssen also die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ fyv \\ -fyu \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

lösen. Die Gestalt der Lösungskurven hängt von der Anfangsgeschwindigkeit und vom Parameter f ab. Für $f = 0$ fällt die Coriolis-Beschleunigung ganz weg, in diesem Fall sind die Lösungskurven Geraden.

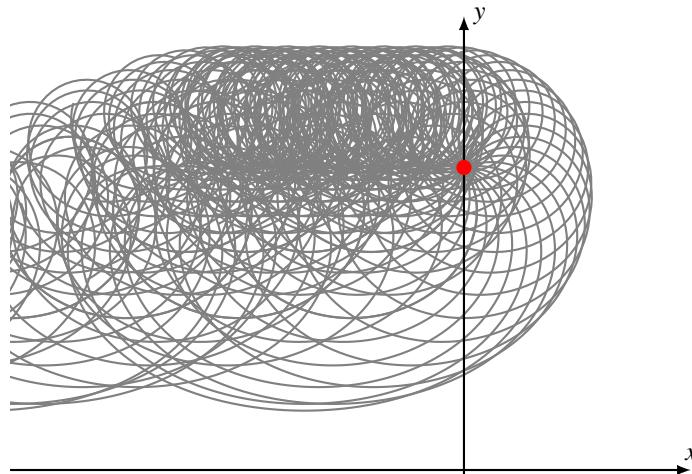


Abbildung 1.9: Lösungen der Differentialgleichung ausgehend vom Punkt $(0, 4)$ mit Anfangsgeschwindigkeit $|\vec{v}| = 1$ und $f = 0.26$. Die Bahnkurven sind immer nach rechts gekrümmmt und bleiben in der oberen Halbebene.

Um einen Überblick über die möglichen Lösungskurven zu erhalten, berechnen wir numerisch die vom Punkt $(0, 4)$ ausgehenden Lösungskurven der Differentialgleichung 1.12. Je grösser f ist, desto stärker gekrümmmt sind die Lösungskurven. Solange die Kurven in der oberen Halbebene $y > 0$ liegen sind die Kurven nach rechts gekrümmmt. Für genügend grosses f bleiben alle Kurven in der oberen Halbebene wie in Abbildung 1.9, unabhängig von der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit. Für kleinere Werte von f wie in Abbildung 1.10 gelangen einzelne Bahnkurven in die untere Halbebene wo die Krümmung der Kurve von rechts auf links kehrt.

Man beachte, dass diese Bahnkurven nicht Stromlinien einer Strömung sind, da sich diese nicht kreuzen können. Dieses einfache Modell ist also nicht geeignet, die tatsächliche Bewegung der Luftmassen darzustellen, dazu müssen wir die Gleichungen der Fluidodynamik in Kapitel 2.

Meeresströmungen

Meeresströmungen leisten einen bedeutenden Beitrag zum Klima, weil sie dank der hohen Wärmekapazität von Wasser auch bei kleiner Strömungsgeschwindigkeit und sehr viel kleinerem bewegtem Volumen als bei den atmosphärischen Strömungen eine grosse Energiemenge transportieren können.

1.2.4 Periodische Einflüsse

Das Klimasystem ist einer Reihe von sich periodisch verändernden Einflüssen ausgesetzt. Viele dieser Einflüsse erscheinen auf den ersten Blick geringfügig und damit vernachlässigbar. Doch wenn ein solcher periodischer Einfluss mit einer Frequenz auftritt, der einer Eigenfrequenz des Klimasystems entspricht, dann kann sich in Folge eines Resonanzeffektes über längere Zeit ein bedeutender Einfluss auf das Klima manifestieren. Es ist daher wichtig, auch kleine Einflüsse zu kennen und insbesondere alle Aspekte des Klimasystems zu modellieren, die eine Eigenfrequenz in der Nähe ihrer Anregungsfrequenzen haben.

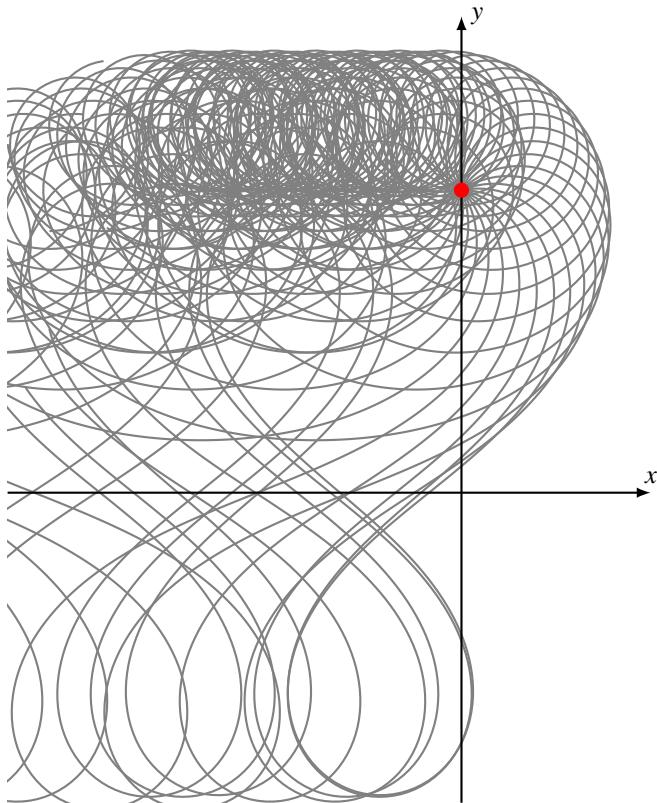


Abbildung 1.10: Lösungen der Differentialgleichung ausgehend vom Punkt $(0, 4)$ mit Anfangsgeschwindigkeit $|\vec{v}| = 1$ und $f = 0.22$. Einzelne Bahnkurven kreuzen die x -Achse und krümmen sich in der unteren Halbebene dann links.

Sonnenfleckencyklus

Die Strahlung der Sonne ist nicht konstant. Wie bei jedem Stern dieser Klasse nehmen Durchmesser und Temperatur der Sonne über die Jahrtausende in dem Mass zu, dass neben der Fusion von Wasserstoff zu Helium auch noch Fusionsprozesse schwerer Elemente eine Rolle zu spielen beginnen. Dieser sehr langfristige Einfluss ist jedoch nur wesentlich für den Vergleich von Klimamodellen mit Daten über das Klima auf der sehr jungen Erde.

Für kurzfristige Prognosen von Bedeutung sind dagegen die Schwankungen der Sonnenaktivität. Die Zahl der Sonnenflecken ist ein leicht zu messender Indikator dafür, für den Aufzeichnung seit dem 17. Jahrhundert existieren. Die Sonnenfleckenzahl schwankt mit einer Periode von etwa elf Jahren. Die daraus resultierende Änderung der Einstrahlung ist jedoch nur 0.07%, so dass die Sonnenaktivität nicht für den Klimawandel verantwortlich gemacht werden kann. Die schwankende Sonnenaktivität muss jedoch bei der Validierung von Klimamodellen berücksichtigt werden.

Bahnänderungen der Erde

Nach Kepler bewegen sich die Planeten auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. Die keplerschen Gesetze der Planetenbahnen können aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz hergeleitet werden [3, §6]. Die Bahnelemente beschreiben die Ebene, in der sich der Planet bewegt, die Richtung und der Zeitpunkt der grössten Annäherung an die Sonne und die Exzentrizität der Ellipse.

Es trifft exakt jedoch nur dann zu, wenn keine anderen Kräfte auf den Planeten wirken als die Anziehungskraft der Sonne. Newtons Gravitationsgesetz besagt jedoch, dass auch alle anderen Planeten durch ihre Schwerkraft auf die Erde einwirken. Dies äussert sich darin, dass die Bahnelemente, sich mit der Zeit ändern. Diese langsame Veränderung der Bahnelemente war schon Newton bekannt, er hat daraus geschlossen, dass das Sonnensystem mit der Zeit völlig zerfallen würde. Genauere Untersuchungen und numerische Rechnungen zeigen jedoch, dass unser Sonnensystem über lange Zeit stabil ist. Die Exzentrizität zum Beispiel der Erdbahn kann sich tatsächlich verändern, aber über längere Zeit wird die Veränderung auch wieder rückgängig gemacht.

Veränderungen der Erdbahn, insbesondere der Exzentrizität, oder der Neigung der Erdachse zur Bahn äussern sich darin, dass die Einstrahlung über das Jahr stärker oder weniger stark schwankt oder auch im Mittel grösser oder kleiner wird. Dadurch können sich die Temperaturunterschiede zwischen den Polgebieten und äquatorialen Breiten verändern und damit die Intensität des Wettergeschehens beeinflusst werden. Ein langfristiges Klimamodell muss also auch diese Änderungen modellieren.

Es stellt sich allerdings heraus, dass diese Veränderungen sehr viel langfristiger sind als der die meisten Klimapolitiker interessierenden Zeitraum von wenigen Jahrhunderten. Die Berücksichtigung dieser Effekte dient daher vor allem dazu die Klima-Modelle mit der Klimgeschichte der Erde zu vergleichen und damit zu validieren. In Kapitel 6 wird gezeigt, wie periodische Einflüsse modelliert und mit Hilfe der Fourier-Theorie analysiert werden können.

1.3 Anforderungen an Klima-Modelle

Aus der vorangegangenen Diskussion können wir einige Anforderungen ableiten, was Klimamodelle können müssen, was sie berücksichtigen müssen und welche Aspekte sie vernachlässigen können.

Das Ziel ist die Modellierung der Klima-Entwicklung über wenige hundert Jahre. Es ist jedoch nicht erforderlich, den vollständigen Zustand der Atmosphäre von Tag zu Tag zu modellieren. Es genügt diejenigen Eigenschaften zu modellieren, die für den Energiehaushalt der Erde wesentlich sind. Dazu gehören die folgenden Eigenschaften.

1. Der Strahlungshaushalt der Erde muss korrekt modelliert werden, da dies die global Mitteltemperatur bestimmt. Dies bedeutet insbesondere auch, dass die Albedo sowie der Gehalt an Treibhausgasen korrekt wiedergeben werden.
2. Die Albedo der Erde muss modelliert sein. D. h. der durchschnittliche Vereisungsgrad und die Häufigkeit und Dichte von Bewölkung muss korrekt wiedergeben sein.
3. Strahlungs- und Wasserhaushalt der Atmosphäre unterscheiden sich über Kontinenten und über den Ozeanen. Das Modell muss daher räumlich genügend aufgelöst sein, dass die für den Energiehaushalt wesentlichen Unterschiede abgebildet werden können.

4. Die Energietransportmechanismen müssen für Zeitskalen in der Größenordnung von Jahren und Jahrzehnten korrekt modelliert sein, weil dies die Verteilung der Energie über die Erdoberfläche festlegt.
5. Wasser in der Atmosphäre hat einerseits einen grossen Einfluss auf den Treibhauseffekt, übernimmt aber auch für einen wesentlichen Teil des Energietransports in der Atmosphäre. Daher muss der Wassergehalt durch die Modelle mindestens in seiner Wirkung auf den Energietransport und den Treibhauseffekt ziemlich genau wiedergegeben werden.
6. Der Salzgehalt der Meere treibt die thermohaline Zirkulation an, welche auf einer Zeitskala von Jahrzehnten einen wesentlichen Beitrag zum Energietransport in den Ozeanen leistet. Salzgehalt und Verdunstung an der Meeresoberfläche müssen so genau modelliert sein, dass diese Energieströme korrekt modelliert werden.

Um die Auswirkungen des Klimawandels zu verstehen muss man vorhersagen, wie sich kurzfristige Wetterphänomene verändern. Dazu kann man gewöhnliche Wettermodelle verwenden, die sowohl zeitlich wie auch räumlich eine bessere Auflösung haben. Man kann aber gewisse qualitative Aussagen auch ohne solche detaillierten Modelle machen. Ein höherer Wassergehalt der Atmosphäre wird zum Beispiel zunächst zu stärkeren Niederschlägen führen. Da aber auch mehr Energie in Form von latenter Wärme zur Verfügung steht, muss man auch mit stärkeren Winden rechnen. Zum Beispiel muss man also damit rechnen, dass Hurrikane intensiver werden.

1.3.1 Validierung von Klimamodellen

Wie können wir überprüfen, ob wir die wesentlichen Einflussfaktoren auf das Klimasystem und ihre Auswirkungen verstanden haben? Warum sollen wir den Prognosen der Klimamodelle überhaupt glauben? Wir können ja nicht wie bei einem Laborexperiment ein paar Parameter verändern, nachmessen, wie das System sich verändert, und überprüfen, ob die Änderungen mit den Vorhersagen des Modells übereinstimmen.

Vergleich mit anderen Planeten

Im Sonnensystem stehen uns die sechs Planeten Venus, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun mit einer Atmosphäre und der Saturnmond zur Verfügung, um Klimamodelle damit zu überprüfen. Die Verhältnisse auf diesen Planeten sind zwar zum Teil extrem verschieden von der Situation auf der Erde. Die grundlegenden physikalischen Prozesse sind jedoch die selben. Die Modelle, die wir für die Erde entwickeln, sollten daher auch die Situation auf diesen Planeten wiedergeben können. Tun sie dies nicht, ist dies in Indiz dafür, dass uns ein wesentlicher Klimafaktor entgangen ist, der zum Beispiel in der zukünftigen Klimaentwicklung eine Rolle spielen könnte.

Als Beispiel betrachten wir den Planeten Venus. Die Venus ist etwa gleich gross wie die Sonne, ist aber von Wolken bedeckt und hat daher eine wesentlich höhere Albedo. Die mittleren Entfernung von Venus und Erde zur Sonne verhalten sich wie

$$a_{\varphi} : a_{\odot} = 0.72,$$

die Solarkonstante für die Venus ist also 1.92 mal grösser. Nach dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz müsste die Venus im Vergleich zur Erde nur etwa 17% wärmer sein, um die im visuellen Bereich absorbiert Energie im infraroten wieder abzustrahlen. Wir würden also eine Temperatur von $1.17 \cdot 287\text{K} = 336\text{K}$ erwarten. Die tatsächlich Oberflächentemperatur ist mit 737 K jedoch viel höher.

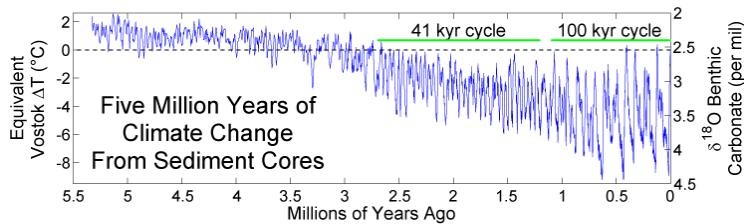


Abbildung 1.11: Temperaturgeschichte der Erde aus [14]

Daran kann man bereits erkennen, dass die Venus einen wesentlich stärkeren Treibhauseffekt haben muss, der nach einer Erklärung verlangt.

Andererseits hat der Planet Mars eine 1.52mal grössere mittlere Entfernung und damit ist die Einstrahlung dort nur 43% von der Einstrahlung auf der Erde. Wieder nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz würde dies verlangen, dass die Temperatur etwa 80% der Temperatur der Erde betragen müsste, also etwa $0.8 \cdot 287\text{K} = 224.9\text{K}$, was recht genau der beobachteten Temperatur von 218K entspricht. Der Treibhauseffekt ist auf dem Mars also wesentlich geringer, was vor allem auf die sehr viel dünnere Atmosphäre zurückzuführen ist.

Tatsächlich besteht die Venusatmosphäre zu 96% aus Kohlendioxid und hat eine sehr viel höhere Dichte, was den intensiveren Treibhauseffekt erklären kann.

Vergleich mit der Vergangenheit

Die Erdatmosphäre hat sich im Laufe der Erdgeschichte stark verändert. Die jüngere Geschichte kann zum Beispiel aus Bohrkernen aus antarktischem Eis rekonstruiert werden. Für die Frühgeschichte der Erdatmosphäre gibt es keine solchen direkten Messungen.

Die chemischen Verwitterungsprozesse hängen jedoch von der chemischen Zusammensetzung und Temperatur der Atmosphäre ab. Aus der beobachteten Zusammensetzung von Verwitterungsprodukten und Sedimenten kann man also Rückschlüsse darauf ziehen, was für Verhältnis im Zeitpunkt der Entstehung dieser Sedimente vorgeherrscht haben müssen.

1.3.2 Klimageschichte der Erde

Die Temperaturgeschichte der Erde konnte mit beachtlicher Genauigkeit rekonstruiert werden. Möglich ist dies, weil zum Beispiel die chemische Zusammensetzung sich auch in der chemischen Zusammensetzung der Sedimente niederschlägt. Die chemische Zusammensetzung wiederum erlaubt Rückschlüsse über das Ausmass des Treibhauseffektes und damit der zu erwartenden Mitteltemperatur. Es stellt sich auch heraus, dass die Temperatur sich auch auf das Isotopenverhältnis von ^{16}O und ^{18}O , welches in den in Kalkschalen von Foraminiferen aufgezeichnet wird. In der jüngeren Erdgeschichte, etwa seit dem Kambrium, lässt sich aus den gefundenen Ablagerungen sowie aus Fossilien die Bewegung der Kontinentalplatten und das dort herrschende Klima rekonstruieren.

Die zu entwickelnden Modelle für das Erdklima müssen konsistent sein mit der Klimageschichte. Zum Beispiel gibt es Hinweise, dass vor etwa 700 Milliarden Jahren die Erde zeitweise sehr stark vereist war, es gibt sogar die Hypothese des Snowball Earth welche besagt, dass die Erde zeitweise vollständig vereist war. Wenn dem so ist, dann müssten Klimamodelle ebenfalls einen Zustand vorhersagen, bei dem die globale Mitteltemperatur deutlich tiefer ist. Dies beobachtet man tatsächlich,

schon die einfachen Strahlungsbilanzmodelle in Abschnitt ?? haben ein stabiles Gleichgewicht bei sehr tiefer Temperatur.

In jüngerer Zeit stehen natürlich viel detailliertere Aufzeichnung der Klimaentwicklung zur Verfügung, die zum Beispiel in Jahrringen von Bäumen oder Bohrkernen aus dem Eis der Antarktis oder aus Grönland ablesbar sind. In historischer Zeit stehen sogar direkte Messungen der chemischen Zusammensetzung der Atmosphäre zur Verfügung. Zum Beispiel wird die CO₂-Konzentration am Mauna Loa seit den Fünfzigerjahren gemessen. Die Daten sind konsistent mit ähnlichen Messungen am Südpol. Ebenso werden seit dem 19. Jahrhundert detaillierte Aufzeichnungen über die Wetterentwicklung an zahllosen Wetterstationen in der ganzen Welt geführt. In jüngster Zeit haben Satelliten ermöglicht detaillierte Temperatur-Messungen der Erdoberfläche.

Dieser umfassende Datensatz ermöglicht heute, detaillierte Modelle grosser Zuverlässigkeit zu erstellen, die selbst für längere Zeitintervalle detaillierte Prognosen ermöglichen. Es steht natürlich ausser Diskussion, dass im Rahmen dieses Seminars ein solches Modell entwickelt werden könnte. Es ist sollte mindestens möglich sein, durch statistische Analyse der jüngsten Klimgeschichte mit sehr geringer Irrtumswahrscheinlichkeit nachzuweisen, dass sich das Klima tatsächlich verändert hat, wie es in Kapitel ?? durchgeführt wird.

Als Entscheidungsgrundlage für Massnahmen zur Milderung der Auswirkungen des Klimawandels ist ein solch detailliertes Modell nicht unbedingt notwendig. Eine starke Korrelation zum Beispiel zwischen der CO₂-Konzentration und der globalen Mitteltemperatur, wie wir sie aus den Messungen der jüngsten Vergangenheit ablesen können und wie sie das später zu entwickelnde Bilanzmodell oder das Budyko-Modell vorhersagen.

Kapitel 2

Fluidodynamik

Die Atmosphäre und die Ozeane unterschieden sich in ihren für das Studium von Wetter und Klima wesentlichen Eigenschaften ganz beträchtlich. Das Wasser der Ozeane ist fast inkompressibel, seine Dichte hängt aber von der Temperatur und dem Salzgehalt ab. Wasser hat eine sehr grosse Wärmekapazität, außerdem kann Wärme durch Verdunstung aus den Ozeanen in die Atmosphäre übergehen, wobei gleichzeitig die Salzkonzentration steigt.

Die Atmosphäre auf der anderen Seite hat eine wesentlich geringere Dichte und Wärmekapazität, ihre Temperatur kann sich daher sehr viel schneller ändern. Sie ist stark kompressibel. Wegen der geringeren Dichte kann die Atmosphäre sehr viel höhere Strömungsgeschwindigkeiten erreichen.

Trotz dieser grossen Unterschiede lassen sich Atmosphäre und Ozeane beide als Fluide mit den gleichen partiellen Differentialgleichungen beschreiben, die im folgenden hergeleitet werden sollen. Die Unterschiede äussern sich vor allem in den Zustandsgleichungen, die die Zustandsgrössen Druck, Temperatur, Dichte und Saltzgehalt miteinander in Beziehung setzen. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels sollen die Grundgleichungen der Fluidodynamik zusammengestellt werden. Im zweiten Teil wird am Beispiel des Lorenz-Systems gezeigt, dass die Gleichungen der Fluidodynamik trotzdem nur beschränkt eine exakte Prognose des Wetters gestatten können.

2.1 Fluidodynamik

In diesem Abschnitt gehen wir davon aus, dass das Fluid beschrieben wird durch Funktionen der Raumkoordinaten (x, y, z) und der Zeit t , wobei wir meistens darauf verzichten, die unabhängigen Variablen auszuschreiben. Die Temperatur T ist also zu lesen als die Funktion $T(x, y, z, t)$. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen stellen eine Verbindung zwischen Masse, Beschleunigung und Kraft her, wir können daher davon ausgehen, dass die Bewegungsgleichungen eines Fluides nur die Dichte ϱ und den Geschwindigkeitsvektor \vec{v} involvieren. Den Zusammenhang zwischen Druck, Temperatur, Dichte und möglicherweise weiteren Eigenschaften wird durch Zustandsgleichungen vermittelt.

2.1.1 Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung drückt aus, dass Materie nicht einfach neu entstehen oder verschwinden kann. Um sie herzuleiten, betrachten wir ein Volumen V des Fluids. Die Masse im Inneren des

Volumens wird bestimmt durch das Volumenintegral

$$m = \iiint_V \varrho \, dx \, dy \, dz.$$

Ein kleiner Quader mit den Abmessungen Δx , Δy und Δz enthält die Masse

$$m = \varrho \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Wenn sich die Masse in dem Quader ändert, dann muss Materie durch die Wände zu- oder abfließen. Wir berechnen daher für jede Wand des Quaders, wie gross der Massefluss durch die Wand in einer Zeiteinheit Δt ist.

Durch ein Rechteck mit Abmessungen $\Delta y \times \Delta z$ senkrecht zur x -Achse fliesst in der Zeit Δt das Volumen $v_x \Delta x \Delta y \Delta z$ und damit die Masse

$$\varrho v_x \Delta y \Delta z. \quad (2.1)$$

Die Dichte ϱ und die Geschwindigkeit v_x sind dabei an der Koordinate x zu nehmen. Durch die Wand des Quaders bei $x + \Delta x$ fliesst eine Masse, die ebenfalls durch den Ausdruck (2.1) beschrieben werden kann, jedoch für die x -Koordinaten $x + \Delta x$. Um die Massenänderung im Quader zu bestimmen, sind diese beiden Ausdrücke als mit entgegengesetzten Vorzeichen zu berücksichtigen.

Die Massenänderung ist daher

$$\begin{aligned} \Delta m &= \varrho(x, y, z, t)v_x(x, y, z, t)\Delta y \Delta z \Delta t - \varrho(x + \Delta x, y, z, t)v_x(x + \Delta x, y, z, t)\Delta y \Delta z \Delta t \\ &\quad + \varrho(x, y, z, t)v_y(x, y, z, t)\Delta x \Delta z \Delta t - \varrho(x, y + \Delta y, z, t)v_y(x, y + \Delta y, z, t)\Delta x \Delta z \Delta t \\ &\quad + \varrho(x, y, z, t)v_z(x, y, z, t)\Delta x \Delta y \Delta t - \varrho(x, y, z + \Delta z, t)v_z(x, y, z + \Delta z, t)\Delta x \Delta y \Delta t. \end{aligned}$$

Wir fassen die Terme zu gegenüberliegenden Wänden zusammen wobei wir das Produkt $\Delta x \Delta y \Delta z$ ausklammern können. Wir teilen ausserdem durch Δt , um die zeitliche Massenänderungsrate zu erhalten.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta m}{\Delta t} &= - \left(\frac{\varrho(x + \Delta x, y, z, t)v_x(x + \Delta x, y, z, t) - \varrho(x, y, z, t)v_x(x, y, z, t)}{\Delta x} \right. \\ &\quad + \frac{\varrho(x, y + \Delta y, z, t)v_y(x, y + \Delta y, z, t) - \varrho(x, y, z, t)v_y(x, y, z, t)}{\Delta y} \\ &\quad \left. + \frac{\varrho(x, y, z + \Delta z, t)v_z(x, y, z + \Delta z, t) - \varrho(x, y, z, t)v_z(x, y, z, t)}{\Delta z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t. \end{aligned}$$

Da $\Delta m = \varrho \Delta x \Delta y \Delta z$ können wir auf beiden Seiten durch $\Delta x \Delta y \Delta z$ dividieren. Um die zeitliche Änderung zu bestimmen, müssen wir ausserdem durch Δt dividieren. Lassen wir die Inkremente Δx , Δy , Δz und Δt gegen 0 gehen, werden aus den Differenzenquotienten Ableitungen. Wir erhalten daher die *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \varrho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \varrho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \varrho v_z}{\partial z} \right). \quad (2.2)$$

Die rechte Seite kann mit Hilfe des *Nabla-Operators*

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

kürzer geschrieben werden. Der Nabla-Operator wird wie ein Vektor behandelt. Für eine (skalare) Funktion f ist ∇f ein Vektor, der *Gradient* der Funktion f . Das Skalarprodukt $\nabla \cdot \vec{v}$ ist ein Skalar, die *Divergenz* eines Vektorfeldes \vec{v} , sie wird manchmal auch $\operatorname{div} \vec{v}$ geschrieben. Aus (2.2) wird dann

$$\frac{\partial \underline{\varrho}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\underline{\varrho} \vec{v})$$

geschrieben werden.

2.1.2 Inkompressible Strömung

Bei einem inkompressiblen Fluid ist die Dichte eine Konstante, alle Ableitungen von ϱ verschwinden. Die Kontinuitätsgleichung wird damit zu

$$\frac{\partial \underline{\varrho}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\underline{\varrho} \vec{v}) = -\nabla \varrho \cdot \vec{v} - \varrho \nabla \cdot \vec{v} = -\varrho \nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

In einer inkompressiblen Strömung verschwindet daher die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes.

Verallgemeinerung

Die Herleitung der Kontinuitätsgleichung für die Massedichte funktioniert auch für jede andere Erhaltungsgröße, die im Fluid mit einer Dichte $a(x, y, z, t)$ vorhanden ist und mit der Strömung mittransportiert wird. Die *verallgemeinerte Kontinuitätsgleichung* für die Erhaltungsgröße a ist daher

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\nabla \cdot (a \vec{v}). \quad (2.3)$$

2.1.3 Bewegungsgleichung

Das zweite Newtonsche Gesetz $F = ma$ besagt, dass Kraft und Beschleunigung proportional sind. Dies gilt jedoch nur, wenn die Masse unveränderlich ist. Genauer besagt Newtons zweites Gesetz, dass die Kraft die zeitliche Änderung des Impulses ist, also

$$F = \frac{d}{dt}(m \vec{v}).$$

Ein Volumen des Fluides kann wegen veränderlicher Dichte seine Masse verändern. Kräfte auf das Fluid ändern daher die Impulsdichte des Fluids.

Impulsdichte

Die Impulsdichte des Fluids wird an jeder Stelle durch die Größe $\vec{p} = \varrho \vec{v}$ gegeben. Das zweite Newtonsche Gesetz besagt dann, dass die Änderung von \vec{p} durch die äusseren Kräfte \vec{b} bestimmt wird, die auf das Fluid wirkt. Der Impuls in einem Volumen kann aber auch ändern, dass das Fluid Impuls in das Volumen hinein- oder aus dem Volumen heraustransportiert. Jede Komponente des Impulses ist eine Erhaltungsgröße, für die ohne Wirkung äusserer Kräfte die verallgemeinerte Kontinuitätsgleichung (2.3) gilt. Für die x -Komponente des Impulses gilt daher die Gleichung

$$\frac{\partial \varrho v_x}{\partial t} = -\nabla \cdot (\varrho v_x \vec{v}) + \varrho b_x,$$

und analog für die anderen Komponenten ϱv_y und ϱv_z der Impulsdichte.

Innere Kräfte

Damit sind aber innere Kräfte im Fluid noch nicht berücksichtigt. Das Fluid widerersetzt sich zum Beispiel der Kompression, dies äussert sich im Druck, der jeweils senkrecht auf den Wänden des Volumens wirkt. In einem zähen Medium sind aber auch Kräfte parallel zu den Wänden möglich, sogenannte *Scherkräfte*. Im Allgemeinen wirkt auf ein $\Delta y \times \Delta z$ -Rechteck senkrecht zur x -Achse die Kraft

$$\vec{\tau}_x \Delta y \Delta z = \begin{pmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} \Delta y \Delta z$$

und analog für die Wände senkrecht auf der y - bzw. z -Achse. Die diagonalen Komponente τ_{ii} beschreiben die Druckkraft auf die jeweilige Seitenfläche, während die ausserdiagonalen Elemente Scherkräfte beschreiben.

Die Matrix τ mit Komponenten τ_{ij} heisst auch der *Cauchy-Spannungstensor*. Wir werden weiter unten (Seite 31) zeigen, dass τ_{ij} symmetrisch sein muss. Dass τ_{ij} ein Tensor ist, ist für die weiteren Erörterungen nicht von Bedeutung, wir werden daher diesen Begriff verwenden, ohne ihn wirklich zu definieren.

Die resultierende Kraft \vec{F} auf einen Quader mit den Kantenlängen Δx , Δy und Δz hat daher die i -Komponente

$$\begin{aligned} F_x &= (\tau_{xx}(x + \Delta x, y, z, t) - \tau_{xx}(x, y, z, t))\Delta y \Delta z \\ &\quad + (\tau_{yx}(x, y + \Delta y, z, t) - \tau_{yx}(x, y, z, t))\Delta x \Delta z \\ &\quad + (\tau_{zx}(x, y, z + \Delta z, t) - \tau_{zx}(x, y, z, t))\Delta x \Delta z \\ &= \left(\frac{\tau_{xx}(x + \Delta x, y, z, t) - \tau_{xx}(x, y, z, t)}{\Delta x} + \frac{\tau_{yx}(x, y + \Delta y, z, t) - \tau_{yx}(x, y, z, t)}{\Delta y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau_{zx}(x, y, z + \Delta z, t) - \tau_{zx}(x, y, z, t)}{\Delta z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z. \end{aligned}$$

Die Kraftdichte f_i erhalten wir nach Division durch $\Delta x \Delta y \Delta z$ und Grenzübergang, sie ist

$$f_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}. \quad (2.4)$$

Wir können damit die vollständige Bewegungsgleichung für das Fluid hinschreiben, sie lautet

$$\frac{\partial \varrho v_x}{\partial t} = -\nabla \cdot (\varrho v_x \vec{v}) + \varrho b_x + f_x. \quad (2.5)$$

Vektorschreibweise

Die Schreibweise (2.5) für die Bewegungsgleichungen ist sehr schwerfällig und passt nicht zu der deutlich eleganteren vektoriellen Schreibweise zum Beispiel der Kontinuitätsgleichung. Die linke Seite von (2.5) und der mittlere Term auf der rechten Seite können natürlich sofort in eine vektorielle Schreibweise überführt werden, nicht jedoch die anderen zwei Terme.

Der Term $\nabla \cdot (\varrho v_x \vec{v})$ ist ausgeschrieben

$$\nabla \cdot (\varrho v_x \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x}(\varrho v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho v_x v_z).$$

Dieser Ausdruck sieht ganz ähnlich aus wie der Ausdruck (2.4) für die x -Komponente der Kraftdichte der inneren Kräfte. Wir können die Ähnlichkeit formal noch etwas klarer machen. Schreiben wir $A_{xy} = \varrho v_x v_y$, dann ist

$$\nabla \cdot (\varrho v_x \vec{v}) = \frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{xz}}{\partial z} = \sum_i \frac{\partial A_{xi}}{\partial i}.$$

Da es offenbar auf die Reihenfolge der Indizes von A nicht ankommt, ist dies auch das gleiche wie

$$\nabla \cdot (\varrho v_x \vec{v}) = \frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zx}}{\partial z} = \sum_i \frac{\partial A_{ix}}{\partial i}.$$

Wir können daher die Wirkung des Nabla-Operators ∇ auf einer symmetrischen Matrix A wie folgt definieren:

Definition 2.1. Ist A_{ij} eine symmetrische Matrix, dann ist die Divergenz $\nabla \cdot A$ von A der Vektor mit den Komponenten

$$(\nabla \cdot A)_x = \sum_i \frac{\partial A_{ix}}{\partial i}.$$

Falls die Matrix τ_{ij} symmetrisch ist, kann diese Definition auch auf τ angewendet werden. Die x -Komponente der Divergenz von τ ist dann

$$(\nabla \cdot \tau)_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = f_x.$$

Dies ist genau der letzte Term in der Gleichung (2.5).

Wir brauchen jetzt nur noch eine kompaktere Notation für die Matrix $\varrho v_x v_y$.

Definition 2.2. Das Kronecker-Produkt zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist die Matrix $\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a} \vec{b}^t$ mit den Komponenten

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})_{ij} = a_i b_j = (\vec{a} \vec{b}^t)_{ij}$$

Abgekürzt erlauben wir die Schreibweise $\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a} \vec{b}$.

Mit diesen Notationen bekommen wir jetzt die Bewegungsgleichungen in Vektorform. Sie lauten

$$\frac{\partial \varrho \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\varrho \vec{v} \vec{v}) + \varrho \vec{b} + \nabla \cdot \tau. \quad (2.6)$$

Dies ist die *Navier-Stokes Gleichung*. Die drei Terme beschreiben die Impulsänderung durch den Zu- oder Abtransport von Impuls durch die Strömung, durch die äusseren Kräfte bzw. die inneren Spannungen.

Symmetrie des Spannungstensors

In diesem Abschnitt wollen wir nachweisen, dass der Spannungstensor symmetrisch ist. Dazu betrachten wir das Drehmoment, welches die Scherkräfte auf einen kleinen Würfel mit Kantenlänge $2l$ ausüben (Abbildung 2.1).

Der Würfel hat die Masse $m = \varrho(2l)^3$. Das Trägheitsmoment eines Würfels mit Masse m und Kantenlänge $2l$ ist

$$I_z = \frac{1}{12}m((2l)^2 + (2l)^2) = \frac{1}{12}\varrho 8l^3 \cdot 8l^2 = \frac{16}{3}\varrho l^5.$$

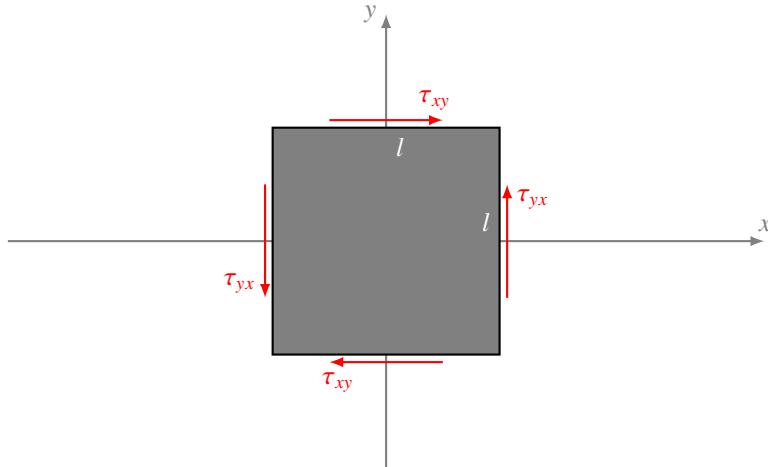


Abbildung 2.1: Drehmoment um die z -Achse der Scherkräfte auf einen Würfel mit Kantenlänge $2l$. Gezeigt sind nur die Komponenten von τ , die zu einem Drehmoment führen.

Der Drehimpuls um die z -Achse ist $L_z = I_z \omega$.

Aus Abbildung 2.1 kann man die Scherkräfte auf den Seitenflächen ablesen, sie sind $\tau_{xy}4l^2$ bzw. $\tau_{yx}4l^2$, ihr Hebelarm ist l . Das resultierende Drehmoment um die z -Achse ist daher

$$M_z = 8l^3\tau_{xy} - 8l^3\tau_{yx}.$$

Die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers besagen jetzt, dass für die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Würfels um die z -Achse die Gleichung

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \quad \Rightarrow \quad I_z \dot{\omega} = M_z \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{M_z}{I_z} = \frac{8l^3(\tau_{xy} - \tau_{yx})}{\frac{16}{3}l^5} = \frac{3}{2l^2}(\tau_{xy} - \tau_{yx}).$$

Wir nehmen an, es sei $\tau_{xy} \neq \tau_{yx}$. Lässt man l gegen 0 gehen, folgt die Aussage, dass die Winkelgeschwindigkeit eines sehr kleinen Würfels im Fluid sich mit beliebig schnell anwachsender Winkelgeschwindigkeit drehen müsste. Dieses unphysikalische Resultat erlaubt zu schliessen, dass $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ sein muss und dass nur ein symmetrischer Spannungstensor ein physikalisches Fluid beschreibt.

Druck und Spannungen

Die Diagonalelemente des Spannungstensors τ beschreiben Normalkräfte auf ein Volumenelement des Fluids. Im Gleichgewicht sind sie alle gleich gross und stimmen mit dem negativen (*hydrostatischen*) Druck überein, wir setzen daher

$$p = -\frac{1}{3} \text{ Spur } \tau.$$

Wir können daher τ zerlegen in eine Diagonalmatrix mit Elementen $-p$ auf der Diagonalen und eine spurlose Matrix

$$\tau = -pE + \sigma,$$

E ist die Einheitsmatrix. Die spurlose symmetrische Matrix σ heisst auch *Spannungsdeviator*.

Für die Bewegungsgleichung brauchen wir die Divergenz beider Terme. Die Druckterme sind alle gleich, nach Definition 2.1 ist

$$(\nabla \cdot (pE))_x = \sum_i \frac{\partial p \delta_{xi}}{\partial i} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot (pE) = \nabla p.$$

Damit wird die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \varrho \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\varrho \vec{v} \vec{v}) + \varrho \vec{b} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.7)$$

Die Scherkräfte sind in einem newtonschen Fluid proportional zu den Schergeschwindigkeiten. Man kann zeigen (siehe [5, p. 172]), dass $\boldsymbol{\sigma}$ geschrieben werden kann als

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\nu \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) E \right) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^t).$$

Die spezielle Form von $\boldsymbol{\varepsilon}$ ist notwendig, damit die Matrix $\boldsymbol{\varepsilon}$ symmetrisch wird. Der zweite Term im Ausdruck von $\boldsymbol{\sigma}$ ist nötig, damit die Spur

$$\text{Spur } \boldsymbol{\sigma} = 2\nu (\boldsymbol{\varepsilon} - \nabla \cdot \vec{v}) = 2\nu \frac{1}{2} \left(\sum_i \frac{\partial v_i}{\partial i} + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial i} - \nabla \cdot \vec{v} \right) = 0$$

von $\boldsymbol{\sigma}$ verschwindet.

Die Divergenz $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ von $\boldsymbol{\sigma}$ kann damit explizit durch die Geschwindigkeit ausgedrückt werden. Wir berechnen die Divergenz der einzelnen Terme:

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon})_x &= \sum_i \frac{\partial \varepsilon_{ix}}{\partial i} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial i} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial i} + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 v_x}{\partial i^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \vec{v}) + \frac{1}{2} \Delta v_x \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) + \frac{1}{2} \Delta \vec{v} \\ (\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) E)_x &= \sum_i \frac{\partial}{\partial i} (\nabla \cdot \vec{v} E)_{xi} = \sum_i \frac{\partial}{\partial i} (\nabla \cdot \vec{v} \delta_{xi}) = \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \vec{v}) \\ \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) E &= \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \end{aligned}$$

und erhalten so für die Divergenz von $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 2\nu \left(\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \nabla \cdot ((\nabla \cdot \vec{v}) E) \right) = 2\nu \left(\frac{1}{2} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) + \frac{1}{2} \Delta \vec{v} - \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \right) \quad (2.8)$$

$$= \nu \Delta \vec{v} + \frac{\nu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}). \quad (2.9)$$

Inkompressible Strömung

In einem inkompressiblen Fluid ist $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, dann fällt der zweite Term in (2.9) weg. Die Strömungsgleichung eines inkompressiblen Fluids erhält damit die einfache Form

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{v} \vec{v}) + \vec{b} - \frac{1}{\varrho} (\nabla p - \nu \Delta \vec{v}), \quad (2.10)$$

die klassische Navier-Stokes Gleichung.

2.1.4 Zustandsgleichungen

Die Dichte hängt vor allem auch von der Temperatur ab. In den Ozeanen ändert die Dichte des Wassers mit dem Salzgehalt. Eine vollständige Beschreibung der Strömung in Ozeanen oder der Atmosphäre muss daher auch noch weitere Variablen modellieren. In Kapitel 1 haben wir bereits auf die Wärmeleitungsgleichungen hingewiesen.

Die Felder T , p und ϱ sind bei einem idealen Gas miteinander durch die Zustandsgleichung

$$p = \varrho T R_s$$

mit der spezifischen Gaskonstante R_s verbunden. Für den Zusammenhang von Dichte, Temperatur und Salzgehalt gibt es jedoch kein derart einfaches Modell. Eine weitere Kopplung zwischen der Temperatur und der Strömung entsteht durch die Viskosität ν , die sehr stark von der Temperatur abhängt. Auch dafür gibt es keine einfachen Modelle.

In vielen Fällen schwanken die physikalischen Größen nur geringfügig um einen Mittelwert. Zum Beispiel hängt die Dichte ϱ von Meerwasser sowohl von der Temperatur T als auch vom Salzgehalt h ab, die Dichte ist also eine Funktion $\varrho(T, h)$. Wir können ϱ als Taylorreihe um die mittlere Temperatur T_0 und den mittleren Salzgehalt h_0 entwickeln:

$$\varrho(T, h) = \varrho_0 - \alpha(T - T_0) + \beta(h - h_0).$$

In Klimamodellen betrachten wir typischerweise nur kleine Abweichungen von Mittelwerten, so dass ein solches Modell sehr erfolgreich sein kann.

2.1.5 Boussinesq-Approximation

Die Strömung in der Erdatmosphäre kann offensichtlich nicht als inkompressibel betrachtet werden, die Dichte ist offenbar nicht konstant. Der Zustand der Atmosphäre weicht jedoch nur wenig einem mittleren Dichteprofil ϱ_0 ab, welches im wesentlichen durch das Temperaturprofil festgelegt ist. Im Normalzustand nimmt die Temperatur der Atmosphäre ziemlich genau linear ab bis zur Höhe der Thermopause. Auf die horizontale Komponente der Strömung hat eine Abweichung des Temperaturprofils kaum einen Einfluss, denn andere Terme der Navier-Stokes-Gleichung (2.7) sind bedeutender. Für die vertikale Bewegung ist der Term der äusseren Kräfte, nämlich die Schwerkraft, dominant. Wir können dies berücksichtigen, indem wir die Erdbeschleunigung g durch

$$g \frac{\varrho}{\varrho_0} \tag{2.11}$$

ersetzen. Diese Approximation ist bekannt als die Boussinesq-Approximation. Für unsere Zwecke hier brauchen wir nicht mehr als (2.11). Dies wird bei der Herleitung der Lorenz-Gleichung in Abschnitt 2.5 benötigt. Für die vollständigen Boussinesq-Gleichungen siehe [5].

2.2 Strömung und Coriolis-Effekt

Die globale Zirkulation wird vom Coriolis-Effekt wesentlich mitbestimmt. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie die Grundgleichungen der Strömungsdynamik die Rechtsablenkung der Windströmung auf der Nordhalbkugel korrekt vorhersagen. Wir erheben dabei keinen Anspruch auf eine vollständige Beschreibung der Strömung, es geht nur darum zu zeigen, dass die Strömungsgleichungen einige wesentlichen Aspekten der globalen Zirkulationen korrekt wiedergeben.

2.2.1 Modellgleichungen

Wir möchten eine zweidimensionale Strömung modellieren, die dem Corioliseffekt unterworfen ist. Wir verwenden zu diesem Zweck das in Abschnitt 1.2.3 beschriebene U - V -Koordinatensystem und die β -Ebenen-Approximation. Die x -Koordinaten verläuft also entlang den Breitenkreisen, die y -Koordinate entlang den Längenkreisen.

Strömungsgleichungen

Die Grundgleichungen für die Strömung eines inkompressiblen und reibungsfreien Fluids sind

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) + \vec{b} - \frac{1}{\varrho} \nabla p. \quad (2.12)$$

Die Beschleunigung \vec{b} wird durch den Coriolis-Effekt hervorgerufen, er wurde bereits in (1.10) formuliert. Der Coriolisparameter f darin ist proportional zu $\sin y$. Für die Wirkung des Druckes können wir davon ausgehen, dass am Äquator ein Tiefdruckgebiet vorherrscht, während in höheren Breiten ein Hochdruckgebiet liegt. Für die Zwecke unseres Modells können wir dies durch eine konstante Beschleunigung h parallel zur y -Richtung beschreiben.

Unter Verwendung dieser Vereinfachungen können wir die Gleichungen (2.12) in Komponenten als

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} u^2 - \frac{\partial}{\partial y} uv + fv \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} uv - \frac{\partial}{\partial y} v^2 - fu + h \quad (2.14)$$

schreiben. Man beachte, dass f eine Funktion nur von y ist und h eine Konstante.

Symmetrien

Wir suchen eine stationäre Lösung, die linke Seite verschwindet also. Aus der Beobachtung der globalen Zirkulation wissen wir, dass die Strömung in Zonen organisiert ist, es ist also plausibel, eine Lösung zu suchen, die von x unabhängig ist. Die Ableitungen nach x verschwinden also ebenfalls. Die Funktionen u und v sind also nur noch Funktionen von y .

Mit diesen beiden Vereinfachungen werden die Gleichungen (2.13) und (2.14) zu den wesentlich einfacheren Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= -u'v - v'u + fv \\ 0 &= -(v^2)' - fu + h \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dies ist ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung für die zwei unbekannten Funktionen $u(y)$ und $v(y)$. Wir sollten also in der Lage sein, für geeignete Anfangsbedingungen eine Lösung zu finden.

Explizite Form

In geschlossener Form lässt sich das System (2.15) leider nicht lösen, wir versuchen daher eine numerische Lösung. Dazu müssen wir es erst in Vektorform bringen. Dazu lösen wir die zweite Gleichung von (2.15) nach v' auf:

$$v'(y) = -\frac{1}{2v(y)}(f(y)u(y) - h) = -\frac{1}{2v(y)}(\beta \sin y \cdot u(y) - h)$$

und setzen dies in der ersten Gleichung ein. Wir erhalten

$$u'(y) = -\frac{u(y)}{v(y)} v'(y) + f(y) = \frac{u(y)}{2v(y)^2} (\beta \sin y \cdot u(y) - h) + \beta \sin y, \quad (2.16)$$

$$v'(y) = -\frac{1}{2v(y)} (\beta \sin y \cdot u(y) - h). \quad (2.17)$$

Man beachte, dass in dieser Form der Gleichungen für $v(y)$ nahe bei 0 eine Singularität auftritt. Wir können mit diesen Gleichungen also nur Strömungen modellieren, die eine von 0 deutlich verschiedene v -Komponente haben.

Anfangsbedingungen

Die Spiegelsymmetrie bezüglich der Äquatorebene suggeriert außerdem, dass die Strömung den Äquator nicht überquert, dass die v -Komponente am Äquator verschwindet. Wir müssen uns daher darauf beschränken, die Strömung in einem Abstand vom Äquator zu simulieren. Für die Zwecke unserer Untersuchung verwenden wir Anfangsbedingungen

$$v(y_0) = v_0 \quad \text{und} \quad u(y_0) = 0$$

für eine feste Ausgangsbreite y_0 .

Qualitative Diskussion

Wir betrachten eine Strömung auf der Nordhalbkugel, also $y > 0$ ohne Druckunterschiede, also $h = 0$. Wir betrachten eine nordwärts gerichtete Strömung, also $v(y) > 0$. Da $v(y)$ in der Differentialgleichung (2.17) im Nenner vorkommt, kann das Vorzeichen von $v(y)$ nicht kehren und das Vorzeichen von $v'(y)$ ist entgegengesetzt zu $u(y)$. Ist $u(y) > 0$, nimmt $v(y)$ mit zunehmendem y ab. Aus der Differentialgleichung (2.16) kann für eine norwärts gerichtet Strömung ablesen, dass $u(y)$ mit zunehmendem y nur zunehmen. In jedem Fall wird eine norwärts gerichtete Strömung nach rechts abgelenkt.

Eine analoge Diskussion für nach Süden gerichtete Strömung zeigt, dass die Strömung ebenfalls nach rechts abgelenkt wird, wie man das auf der Erde bei den Passatwinden beobachtet.

2.2.2 Lösungen

Wie schon angedeutet kann man nicht davon ausgehen, eine analytische Lösung des Differentialgleichungssystems (2.16) und (2.17) finden zu können. Wir beschränken uns daher auf eine numerische Lösung und lösen lösen das Systems mit Hilfe von Octave mit der Implementation

```

1 || function Xprime = f(X, y)
2 ||   global beta;
3 ||   global h;
4 ||   vprime = -(beta * sin(y) * X(1) - h) / (2 * X(2));
5 ||   Xprime = [ beta * sin(y) - (X(1) / X(2)) * vprime; vprime ];
6 || endfunction

```

der Differentialgleichung. Als Anfangswerte wurde einerseits eine von $y_0 = 0.2$ ausgehende nordwärts gerichtete Strömung bis $y = 1.2$ simuliert und andererseits eine südwärts gerichtete Strömung von $y_0 = 1.2$ bis $y = 0.2$ (Abbildung 2.2). Es wurden die Parameter $\beta = 1.2$ und $h = -0.1$ verwendet. In beiden Fällen kann die Rechtsablenkung durch die Coriolisbeschleunigung beobachtet werden.

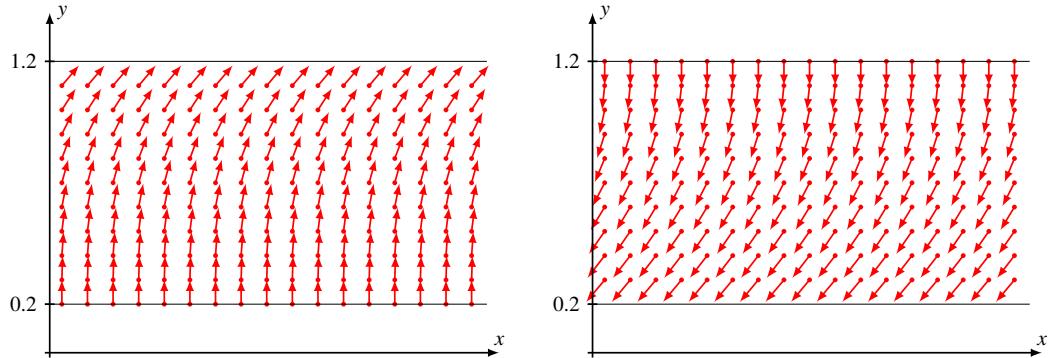


Abbildung 2.2: Simulation der Strömung in gemässigten Breiten der Nordhalbkugel mit Hilfe des Modells (??) und (??). Die Strömung wird unter dem Einfluss der Coriolis-Beschleunigung nach rechts abgelenkt ($\beta = 1.2$, $h = 0.1$).

In der Simulation zu den Abbildungen 1.9 und 1.10 wurde bereits bemerkt, dass ein einzelnes Teilchen auf der Erdoberfläche der Rechtsablenkung durch die Coriolis-Kraft ausgesetzt ist, jedoch ergaben sich für eine Strömung nicht realistische Bahnen. Das vorliegende Strömungsdynamische Modell zeigt dagegen, wie realistische Stromlinien aussehen müssen.

Die Simulationen zeigen auch, dass die u -Komponente stark anwächst, und zwar umso schneller, je grösser der Faktor β ist. Man kann dies als Indiz dafür deuten, dass die Strömung nicht beliebig lange nach Norden oder Süden fliessen kann, dass sich also zonale Strömungen mit alternierenden Druckgradienten ausbilden werden, wie man sie auf dem Jupiter (Abbildung 1.8 oder in der globalen Zirkulation der Erde wie in Abbildung 1.7 dargestellt beobachtet.

2.3 Inkompressible zweidimensionale Strömung

Die Kontinuitätsgleichung und die Navier-Stokes-Gleichung gelten auch für eine zweidimensionale Strömung. Im Allgemeinen ist die Strömung nicht wesentlich leichter zu berechnen. Nur im Falle einer inkompressiblen Strömung oder der Boussinesq-Approximation spielt die Dichte in den Gleichungen keine Rolle, was erlaubt, sie weiter zu vereinfachen:

$$0 = -\nabla \cdot \vec{v} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{v}\vec{v}) + \vec{b} + \frac{1}{\varrho} \nabla \cdot \tau. \quad (2.19)$$

Im Falle der Boussinesq-Approximation kommt auf der rechten Seite noch ein Term für die Auftriebskraft hinzu.

Die Gleichungen (2.18) und (2.19) bilden ein System von partiellen Differentialgleichungen für die zwei unbekannten Funktionen v_x und v_y , die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit. Wir werden im Folgenden zeigen, dass die (2.18) ermöglicht, das System auf eine einzelne partielle Differentialgleichung für nur eine einzige Funktion zu reduzieren.

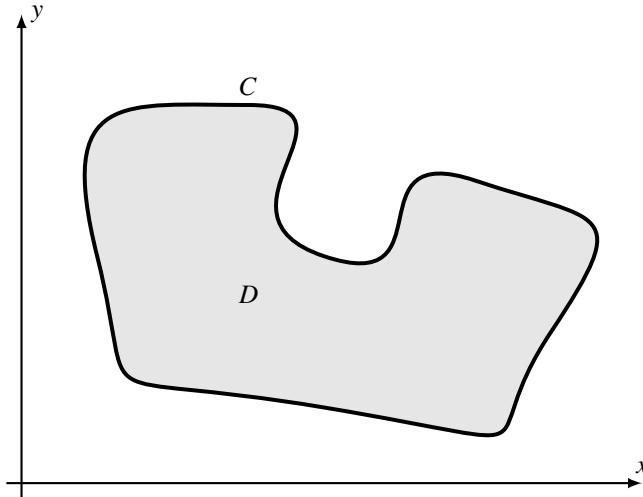


Abbildung 2.3: Satz von Green: Das Wegintegral entlang der Randkurve C stimmt mit dem zweifachen Integral über D überein.

2.3.1 Satz von Green

Die Kontinuitätsgleichung (2.18) ist ausgeschrieben

$$0 = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}.$$

Die Divergenz auf der rechten Seite kommt auch im Satz von Green vor:

Satz 2.3 (Green). Sei D in kompaktes Gebiet in der x - y -Ebene mit Rand $\partial D = C$. Weiter seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die in D stetig differenzierbar sind. Dann gilt

$$\iint_D \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx dy = \oint_C (f(x, y) dx + g(x, y) dy) \quad (2.20)$$

(Abbildung 2.3).

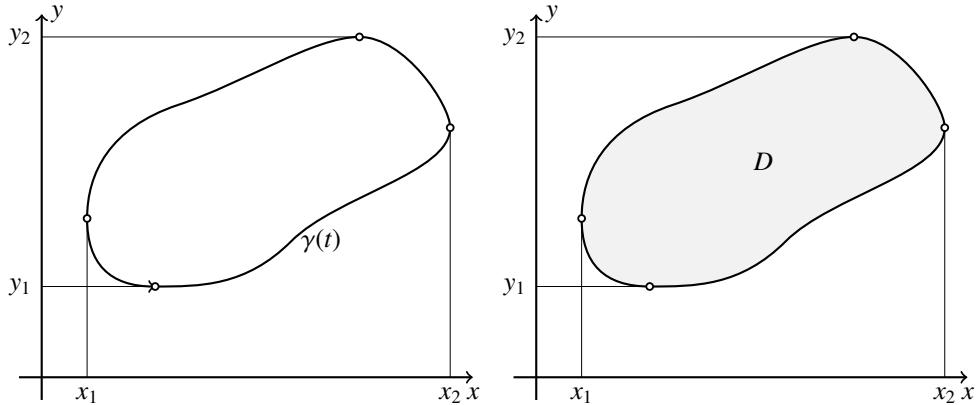
Das Integral auf der rechten Seite wird mit Hilfe einer Parametrisierung $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ der Randkurve C definiert.

$$\begin{aligned} \oint_C f(x, y) dx &= \int_a^b f(\gamma_x(t), \gamma_y(t)) \dot{\gamma}_x(t) dt, \\ \oint_C g(x, y) dy &= \int_a^b g(\gamma_x(t), \gamma_y(t)) \dot{\gamma}_y(t) dt. \end{aligned}$$

Es kann auch vektoriell mit dem Skalarprodukt als

$$\oint_C \underbrace{\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}}_{= \vec{w}} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_x \\ \dot{\gamma}_y \end{pmatrix} dt = \oint_C \vec{w} \cdot \dot{\gamma}(t) dt =: \oint_C \vec{w} \cdot d\vec{s}$$

geschrieben werden kann. Der Weg γ und das Gebiet D ist in Abbildung 2.4 dargestellt.

Abbildung 2.4: Pfad $\gamma(t)$ in der x - y -Ebene und das vom Pfad eingeschlossene Gebiet D .

Beweis. Wir berechnen das Integral über D für jeden Summanden des Integranden einzeln, wobei wir für die Beschreibung des Randes die Funktionen $y_i(x)$ und $x_i(y)$ wie in Abbildungen 2.5 verwenden.

Das Integral über den ersten Summanden ist

$$\begin{aligned} \int_D -\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx dy &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(\xi)}^{y_2(\xi)} -\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} d\eta d\xi = \int_{x_1}^{x_2} \left[-f(\xi, \eta) \right]_{y_1(\xi)}^{y_2(\xi)} d\xi \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(\xi, y_1(\xi)) d\xi - \int_{x_1}^{x_2} f(\xi, y_2(\xi)) d\xi. \\ &= \oint_{\gamma} f(x, y) dx \end{aligned}$$

Analog finden wir

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} dx dy &= \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1(\eta)}^{x_2(\eta)} \frac{\partial g(\xi, \eta)}{\partial x} d\xi d\eta \\ &= \int_{y_1}^{y_2} g(x_2(\eta), \eta) - g(x_1(\eta), \eta) d\eta \\ &= \oint_{\gamma} g(x, y) dy \end{aligned}$$

Zusammen sind ergeben diese

$$\int_D \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx dy = \oint_{\gamma} (f(x, y) dx + g(x, y) dy).$$

Damit ist der Satz von Green bewiesen. \square

Satz 2.4. *Das Wegintegral*

$$\int_{\gamma} (f(x, y) dx + g(x, y) dy)$$

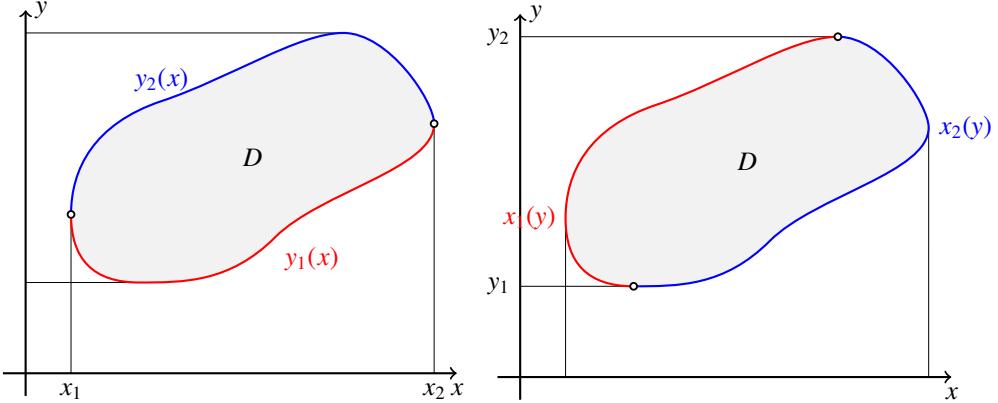


Abbildung 2.5: Das Gebiet D kann einerseits durch die Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ in Abhängigkeit von x beschreiben werden, andererseits kann es durch die Funktionen $x_1(y)$ und $x_2(y)$ in Abhängigkeit von y beschreiben werden.

ist genau dann unabhängig von der Wahl des Weges zwischen zwei festen Punkten $P_0 = (x_0, y_0)$ und $P_1 = (x_1, y_1)$, wenn gilt

$$0 = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \nabla \cdot \begin{pmatrix} -g(x, y) \\ f(x, y) \end{pmatrix}.$$

Beweis. Sind γ_1 und γ_2 zwei verschiedene Wege von P_0 nach P_1 , dann kann man einen geschlossenen Weg γ von P_0 nach P_0 konstruieren indem man zuerst den Weg γ_1 durchläuft und anschliessend den Weg γ_2 in umgekehrter Richtung. Das Wegintegral \int_{γ} ist

$$\oint_{\gamma} (f(x, y) dx + g(x, y) dy) = \int_{\gamma_1} (f(x, y) dx + g(x, y) dy) - \int_{\gamma_2} (f(x, y) dx + g(x, y) dy). \quad (2.21)$$

Sei D das Gebiet, das von γ berandet wird, dann gilt nach dem Satz von Green andererseits

$$= \int_D \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx dy = 0. \quad (2.22)$$

Die beiden Integrale in (2.21) müssen also übereinstimmen.

Sei umgekehrt das Wegintegral zwischen zwei Punkten immer unabhängig vom Weg zwischen den Punkten. Dann betrachten wir die Wegintegrale zwischen den Ecken (x, y) und $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ eines Rechtecks R . Der eine Weg folgt zuerst der unteren Kante des Rechtecks und dann der rechten, der andere Weg folgt erst der linken Kante und dann der oberen. Die beiden Wegintegrale sind gleich, also verschwindet das Wegintegral $\int_{\partial R}$ des Randes des Rechtecks R . Das Wegintegral $\int_{\partial R}$ ist

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial R} (f(x, y) dx + g(x, y) dy) \\ &= f(x, y)\Delta x + g(x + \Delta x, y)\Delta y - f(x, y + \Delta y)\Delta x - g(x, y)\Delta y + o(\Delta x \Delta y) \\ &= \left(\frac{f(x, y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta y} + \frac{g(x + \Delta x, y) - g(x, y)}{\Delta x} \right) \Delta x \Delta y + o(\Delta x \Delta y) \end{aligned}$$

Dies funktioniert nur, wenn der Klammerterm im Grenzwert $\Delta x \rightarrow 0$ und $\Delta y \rightarrow 0$ verschwindet, also

$$-\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 0,$$

wie im Satz behauptet. \square

2.3.2 Stromfunktion

Wir wenden den Satz 2.3 von Green auf die Funktionen $f(x, y) = -v_y(x, y)$ und $g(x, y) = v_x(x, y)$ an. Die Formel (2.3.1) ergibt

$$\oint_C (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy) = \iint_D \underbrace{\frac{\partial v_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(x, y)}{\partial y}}_{= 0} dx dy = 0. \quad (2.23)$$

Man kann dieses Resultat auch wie folgt interpretieren. Wenn C_1 und C_2 zwei Kurven sind, die den Punkt A mit dem Punkt B verbinden, dann lässt sich eine geschlossene Kurve C konstruieren, indem zuerst die Kurve C_1 von A nach B durchlaufen wird und dann die Kurve C_2 in umgekehrter Richtung von B nach A . Die Formel (2.23) besagt dann, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_C (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy) \\ &= \int_{C_1} (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy) - \int_{C_2} (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy) \end{aligned}$$

oder

$$\Rightarrow \int_{C_1} (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy) = \int_{C_2} (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy).$$

Das Wegintegral hängt also nicht von der Wahl des Weges ab, jeder Weg von A nach B führt auf den gleichen Wert des Integrals.

Wir halten den Punkt A fest und definieren die Funktion

$$\psi(B) = \int_C (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy)$$

für einen beliebigen Weg von A nach B . Zum Beispiel können für die Berechnung die Kurven C_1 oder C_2 in Abbildung 2.6 verwendet werden. Damit lassen sich die Integrale ausschreiben:

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \int_{C_1} (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy) = - \int_{x_0}^x v_y(\xi, y_0) d\xi + \int_{y_0}^y v_x(x, \eta) d\eta \\ &= \int_{C_2} (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy) = \int_{y_0}^y v_x(x_0, \eta) d\eta - \int_{x_0}^x v_y(\xi, y) d\xi. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke erlauben uns, die partiellen Ableitungen von $\psi(x, y)$ zu berechnen. Für die Ableitung nach x verwenden wir den zweiten Ausdruck, für die Ableitung nach y den ersten. Wir erhalten

$$\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x v_y(\xi, y) d\xi = -v_y(x, y),$$

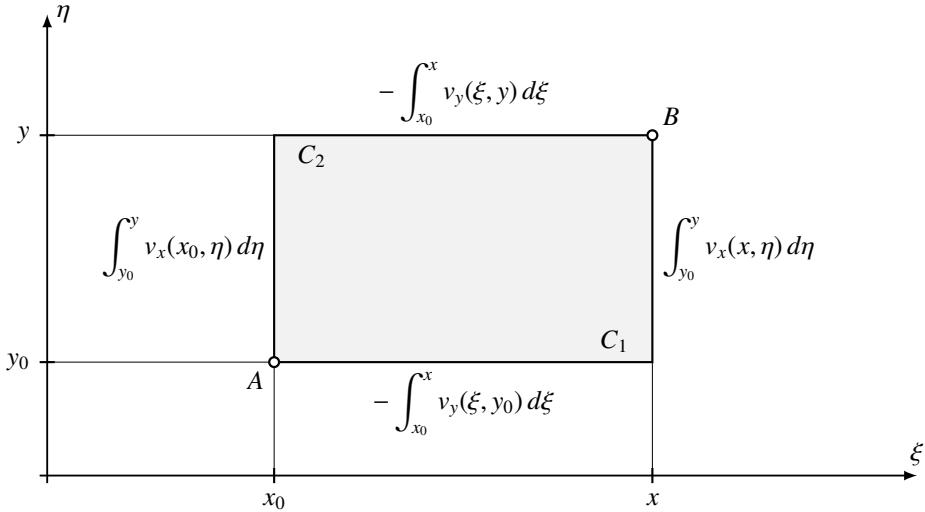


Abbildung 2.6: Verschiedene Pfade zur Berechnung der Funktion $\psi(B)$ führen auf den gleichen Wert von $\psi(B)$ und ermöglichen, die partiellen Ableitungen zu berechnen.

$$\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_0}^y v_x(x, \eta) d\eta = v_x(x, y).$$

In vektorieller Form kann man dies auch als

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_J \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{pmatrix} = J \nabla \psi \quad (2.24)$$

schreiben. Aus der Funktion ψ lässt sich das Vektorfeld \vec{v} also wieder rekonstruieren. Sie heisst die *Stromfunktion* des Vektorfeldes \vec{v} . Natürlich ist $\psi(x, y)$ nur bis auf eine Konstante bestimmt.

Umgekehrt ist für jede beliebige Funktion $\varphi(x, y)$ das Vektorfeld $\vec{u} = J \nabla \varphi$ divergenzfrei:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = 0.$$

Die Darstellung (2.24) des Geschwindigkeitsfeldes erlaubt eine geometrische Interpretation. Der Gradient $\nabla \psi$ ist ein Vektorfeld, welches auf den Niveaulinien der Funktion ψ senkrecht steht. Je schneller die Zunahme von ψ , desto grösser ist der Vektor $\nabla \psi$.

Die Matrix J ist eine Drehmatrix, sie dreht Vektoren um 90° im Gegenuhrzeigersinn. Die Vektoren $J \nabla \psi$ sind also tangential an die Niveaulinien, die Niveaulinien sind also gleichzeitig die Stromlinien der Strömung. Ist die Strömung auf ein kompaktes Gebiet beschränkt, dann ist der Rand des Gebietes eine Stromlinie, also eine Niveaulinie von ψ . Da ψ nur bis auf eine Konstante festgelegt ist, kann man ψ so wählen, dass der Rand des Gebietes durch die Gleichung $\psi(x, y) = 0$ beschrieben wird.

Die Funktion $\psi(x, y) = a(x^2 + y^2)$ führt auf das Vektorfeld

$$\vec{v} = J \nabla \psi = 2a \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

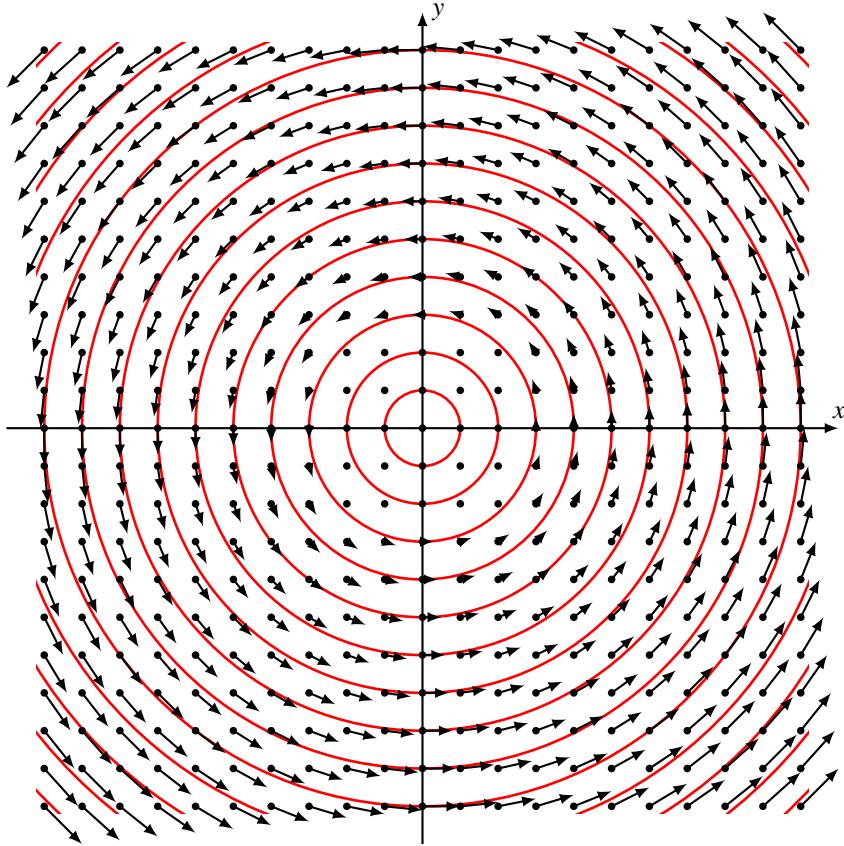


Abbildung 2.7: Strömungsfunktion $\psi(x, y) = a(x^2 + y^2)$ und das zugehörige Vektorfeld. Die Strömungsgeschwindigkeit ist proportional zum Radius, es handelt sich also um eine starre Drehung um den Nullpunkt.

(Abbildung 2.7). Die Strömungsgeschwindigkeit ist $2a\sqrt{x^2 + y^2} = 2ar$, es handelt sich also um eine starre Drehung um den Nullpunkt des Koordinatensystems mit Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2a$.

2.3.3 Vorticity

Wir suchen eine Grösse, mit der wir das Ausmass messen können, wie schnell sich das Fluid dreht. Die Winkelgeschwindigkeit bei der Drehung um den Punkt (x, y) können wir durch Vergleich der Geschwindigkeit an den Punkten $(x \pm h, y)$ und $(x, y \pm h)$ finden. Es ist

$$\omega = \frac{v_y(x+h, y) - v_y(x-h, y)}{2h} = \frac{-v_x(x, y+h) + v_x(x, y-h)}{2h}.$$

Beim Grenzübergang $h \rightarrow 0$ erhalten wir

$$\omega = \frac{\partial v_y(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial v_x(x, y)}{\partial y} \quad \text{oder} \quad 2\omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Damit haben wir eine Grösse gefunden, die als Mass für die Drehgeschwindigkeit dienen kann.

Definition 2.5. Ist \vec{v} das Geschwindigkeitsfeld der Strömung, dann schreiben wir

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \zeta.$$

Die Funktion ζ heisst die Vorticity des Strömungsfeldes.

Beschreibt man die Strömung mit Hilfe der Strömungsfunktion, dann gilt für die Vorticity

$$\zeta = \nabla \times \vec{v} = \nabla \times J\nabla\psi = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = -\Delta\psi. \quad (2.25)$$

Der Laplace-Operator verbindet also die Strömungsfunktion direkt mit der Vorticity. Für die Strömung in einem kompakten Gebiet Ω ist der Rand eine Niveaulinie von ψ . Wie früher dargelegt können wir ψ so wählen, dass $\psi = 0$ gilt auf dem Rand. Bei gegebener Vorticity ζ ist daher ψ die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta\psi = -\zeta \quad \text{in } \Omega \quad \psi = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (2.26)$$

Die Theorie der elliptischen partiellen Differentialgleichungen sagt, dass ψ eindeutig bestimmt ist. Statt die Strömungsgleichungen für ψ zu lösen, können wir also auch versuchen, eine Gleichung für die Vorticity ζ aufzustellen und dann mit Hilfe des elliptischen partiellen Randwertproblems (2.26) die Strömungsfunktion und schliesslich \vec{v} bestimmen.

Um die Differentialgleichung für ζ zu finden, wenden wir den Operator $\nabla \times$ auf die Bewegungsgleichung (2.19) an:

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \times (\nabla \cdot (\vec{v}\vec{v})) + \nabla \times \vec{b} + \nabla \times \left(\frac{1}{\varrho} \nabla \cdot \tau \right).$$

Die linke Seite ist die Zeitableitung der Vorticity. Die Divergenz von $\vec{v}\vec{v}$ ist

$$(\nabla \cdot (\vec{v}\vec{v}))_j = \sum_i \frac{\partial}{\partial i} v_i v_j = \left(\sum_i \frac{\partial v_i}{\partial i} \right) v_j + \sum_i v_i \frac{\partial v_j}{\partial i} = \underbrace{(\nabla \cdot \vec{v}) v_j}_{=0} + \vec{v} \cdot \nabla v_j.$$

Es folgt

$$\nabla \cdot (\vec{v}\vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}.$$

Daraus kann man jetzt auch die Vorticity berechnen:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \cdot (\vec{v}\vec{v})) &= \nabla \times (\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \nabla v_y) - \frac{\partial}{\partial y} (\vec{v} \cdot \nabla v_x) \\ &= \vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \cdot \nabla v_y - \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \cdot \nabla v_x \\ &= \vec{v} \cdot \nabla \zeta + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ &= \vec{v} \cdot \nabla \zeta + \frac{\partial v_x}{\partial x} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial v_y}{\partial y} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ &= \vec{v} \cdot \nabla \zeta + (\nabla \cdot \vec{v}) \zeta = \vec{v} \cdot \nabla \zeta. \end{aligned}$$

Wir waren also nicht ganz erfolgreich, die Geschwindigkeit aus der Bewegungsgleichung zu eliminieren. Wir haben nur die Form

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla \zeta + \nabla \times \vec{b} + \nabla \times \left(\frac{1}{\varrho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \right)$$

erreicht. Ausserdem ist es möglich, dass die Spannungen $\boldsymbol{\tau}$ ebenfalls von den Geschwindigkeiten abhängig sind.

Wir können aber die Vorticity auch noch durch die Strömungsfunktion ausdrücken. Ersetzen wir $\zeta = -\Delta\psi$ in der Bewegungsgleichung, erhalten wir

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} = -J \nabla \psi \cdot \nabla \Delta\psi + \nabla \times \vec{b} + \nabla \times \left(\frac{1}{\varrho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \right). \quad (2.27)$$

Jetzt ist die Strömung vollständig durch die einzige unbekannte Funktion ψ .

Der erste Term auf der rechten Seite von (2.27) kann noch etwas kompakter geschrieben werden. Es ist

$$(J \nabla f) \cdot (\nabla g) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite kommt auch in anderem Zusammenhang vor.

Definition 2.6. Seien f und g Funktionen der Variablen x und y . Dann heisst

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$$

die Funktionaldeterminante oder Jacobische Determinante von f und g .

Mit dieser Definition wird die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} = \nabla \times \vec{b} + \nabla \times \left(\frac{1}{\varrho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \right) - \frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x, y)}. \quad (2.28)$$

Im Falle der Boussinesq-Näherung kommt noch ein Term für den Auftrieb hinzu.

2.3.4 Spannungen und Stromfunktion

Für eine newtonscche Flüssigkeit haben wir in (2.10) bereits den Spannungstensor durch den Druck und die Spannungen ausgedrückt. Aus der Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit haben wir die Differentialgleichung (2.28) erhalten, indem wir den Operator $\nabla \times$ angewendet haben. Wir müssen jetzt also

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\varrho} (\nabla p - \nu \Delta \vec{v}) \right) = \frac{1}{\varrho} \left(\nabla \times \nabla p - \nu \nabla \times \Delta \vec{v} \right) = \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \Delta \nabla \times \vec{v} \right)$$

berechnen. Der erste Term fällt weg, weil es auf die Reihenfolge der zweiten Ableitungen nicht ankommt. Im zweiten Term haben wir angenommen, dass ν nicht vom Ort abhängig. Dies ist genau genommen nicht richtig, da ν zum Beispiel stark von der Temperatur abhängt, die ebenfalls nicht konstant sein muss. Der zweite Term in der Klammer ist natürlich einfach $\nu \Delta \zeta = -\nu \Delta^2 \psi$. Damit bekommen wir die Bewegungsgleichung für ψ in der Form

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} = \nabla \times \vec{b} + \frac{\nu}{\varrho} \Delta^2 \psi - \frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x, y)}. \quad (2.29)$$

2.4 Lösungen von partiellen Differentialgleichungen

In diesem Kapitel haben wir Strömungen mit Hilfe partieller Differentialgleichungen beschrieben. Natürlich ist die Theorie der partiellen Differentialgleichungen viel zu umfangreich. Wir können bestenfalls hoffen, ein paar für unsere Zwecke wesentliche Ideen zu vermitteln. Für eine vollständigere Darstellung sei auf [2] oder [10] verwiesen.

Die Funktionenräume, in denen die Lösungsfunktionen von Differentialgleichungen zu finden sind unendlich dimensional, was sehr erschwert, dafür überhaupt eine Lösung zu finden. Bereits bei der Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen hat man gelernt, dass sich die Lösungsmenge durch einige wenige Integrationskonstanten beschreiben lassen. Bei partiellen Differentialgleichungen ist eine Lösungsfunktion von mehreren Variablen gesucht. Es wäre uns daher bereits geholfen, wenn wir sie durch Funktionen parametrisieren könnten, die nur von einger Variablen abhängen. Im besten Fall können wir dann für diese Parameterfunktionen gewöhnliche Differentialgleichungen aufstellen. Auf diese Art und Weise erhalten wir in mehreren Schritten ein endlichdimensionales Problem.

Das Ziel dieses Abschnittes ist daher, einige Methoden zusammenzustellen, mit denen man ein allgemeines Problem über partielle Differentialgleichungen für Zwecke der Simulation oder Approximation in ein endlichdimensionales Problem umwandeln kann.

2.4.1 Diskretisation

Der einfachste Ansatz, partielle Differentialgleichungen zu lösen, folgt den Verfahren, die auch für gewöhnliche Differentialgleichungen [8] zum Erfolg führt, nämlich sich auf die Berechnung von Funktionswerten der Lösungsfunktion an diskreten Punkten des Definitionsbereichs zu beschränken. Zu diesem Zweck werden Ableitungen durch Differenzenquotienten ersetzt. Wir illustrieren das Vorgehen an einigen Beispielen.

Das Poisson-Problem

Wir suchen eine Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ auf dem Einheitsquadrat $\Omega = \{(x, y) | 0 < x, y < 1\}$ mit den Randbedingungen $u(x, y) = g(x, y)$ für Punkte (x, y) auf dem Rand $\partial\Omega$. Dies ist das Poisson-Problem. Die allgemeine Theorie [2] klassifiziert dieses Problem als eine elliptische partielle Differentialgleichungen und erklärt, dass das Poisson-Problem unter milden Annahmen über die Randwerte eine eindeutig bestimmte glatte Lösung hat und liefert auch eine Methode, diese Lösung zu finden.

Für die numerische Lösung verwenden wir ein Gitter mit den Punkten

$$P_{ij} = (x_i, y_j) = (ih, jh) \quad \text{mit} \quad i, j = 0, \dots, n, \quad h = \frac{1}{n}.$$

Die Punkte mit $i, j = 0, n$ beschreibend den Rand. Wir kürzen die Werte $u_{ij} = u(x_i, y_j)$ ab. Die Randwerte sind bekannt, es gilt

$$\begin{aligned} u_{0j} &= g(0, jh) && \text{und} && u_{nj} &= g(1, jh) && \text{mit } 1 \leq j < n \\ u_{i0} &= g(ih, 0) && \text{und} && u_{in} &= g(ih, 1) && \text{mit } 1 \leq i < n. \end{aligned}$$

Die Ableitungen können durch Differenzenquotienten approximiert werden, zum Beispiel

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i + h, y_j) - u(x_i, y_j)}{h} \quad \text{oder} \quad \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i - h, y_j)}{h}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x_i + h, y_j) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j)}{h} = \frac{1}{h} \left(\frac{u(x_i + h, y_j) - u(x_i, y_j)}{h} - \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i - h, y_j)}{h} \right) \\ &= \frac{u(x_i + h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j)}{h^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}.\end{aligned}$$

Wir müssen also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} &= 0 && \text{für } 1 \leq i, j < n \\ u_{i0} &= g(ih, 0) && \text{für } 1 \leq i < n \\ u_{in} &= g(ih, 1) && \text{für } 1 \leq i < n \\ u_{0j} &= g(0, jh) && \text{für } 1 \leq j < n \\ u_{nj} &= g(1, jh) && \text{für } 1 \leq j < n\end{aligned}\tag{2.30}$$

lösen. Damit haben wir die Lösung der partiellen Differentialgleichungen auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems zurückgeführt.

Wellengleichung

Die Wellengleichung

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{auf } \Omega = \{(x, t) \mid x \in \mathbb{R} \wedge t > 0\} \\ u(x, 0) &= f(x) && \text{für } x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x) && \text{für } x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

wird von der allgemeinen Theorie [2] als hyperbolische lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung klassifiziert. Unter milden Voraussetzungen an die Anfangsbedingungen $f(x)$ und $g(x)$ existiert eine eindeutig bestimmte Lösung, die mit dem Formel von d'Alembert gefunden werden kann.

Für die numerische Lösung wird wieder ein Gitter aus Punkten (ih_x, jh_t) mit $i \in \mathbb{Z}$ und $j \in \mathbb{N}$. Unter Verwendung der gleichen Approximationen für die Ableitungen können wir die Differentialgleichungen in ein lineares Gleichungssystem

$$\frac{1}{h_t^2} (u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}) - \frac{1}{h_x^2} (u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{i,j+1} = 2u_{ij} - u_{i,j-1} + \frac{h_t^2}{h_x^2} (u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j})\tag{2.31}$$

umwandeln. In dieser Form werden Werte für $t = (j + 1)h_t$ aus Werten zu früheren Zeiten berechnet.

Ausserdem müssen die Randbedingungen $u_{i0} = f(ih_x)$ für $i \in \mathbb{Z}$ erfüllt sein. Dies reicht aber nicht, denn die Gleichungen (2.31) brauchen für die Berechnung von $u_{i,1}$ die Werte $u_{i,-1}$, die gar nicht definiert sind. Wir können aber die Ableitung nach t zur Zeit $t = 0$ durch einen Differenzenquotienten

$$\frac{\partial u}{\partial t}(ih_x, 0) \simeq \frac{u_{i0} - u_{i,-1}}{h_t} \quad \Rightarrow \quad u_{i,-1} = u_{i0} - h_t g(ih_x, 0)$$

approximieren und damit einen Wert für $u_{i,-1}$ aus den Randbedingungen ermitteln. Erneut haben wir es geschafft, das Problem, eine Lösung der partiellen Differentialgleichung zu finden, auf ein lineares Gleichungssystems zurückzuführen.

Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{in } \Omega = \{(x, t) \mid x \in [-1, 1] \wedge t > 0\} \\ u(x, 0) &= f(x) && \text{für } x \in [-1, 1] \\ u(-1, t) &= g_{-1}(t) && \text{für } t > 0 \\ u(1, t) &= g_1(t) && \text{für } t > 0\end{aligned}$$

wird von der allgemeinen Theorie [2] als parabolische lineare partielle Differentialgleichung klassifiziert, sie hat unter milden Anforderungen an $f(x)$ immer eine glatte Lösung.

Für die numerische Lösung verwenden wir wieder ein Gitter, diesmal bestehend aus den Punkten $(x_i, t_j) = (ih_x, jh_t)$ mit $-n \leq i \leq n$ und $j \in \mathbb{N}$, mit $h_x = 1/n$. Direkte Anwendung der Approximation der Ableitungen durch Differenzenquotienten liefert

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \simeq \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{h_t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \simeq \kappa \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h_x^2}. \quad (2.32)$$

Dies lässt sich nach $u_{i,j+1}$ auflösen:

$$u_{i,j+1} = u_{ij} + \frac{\kappa h_t}{h_x^2} (u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}).$$

Diese Gleichungen bestimmen explizit die Werte $u_{i,j+1}$ aus früheren Werten u_{ij} , man dies ein explizites Verfahren.

Die Randbedingungen geben uns Anfangswerte für $j = 0$, und Randwerte für $i = \pm n$ nämlich

$$\begin{aligned}u_{i0} &= f(ih_x) && \text{für } -n < i < n \\ u_{-n,j}g_{-1}(jh_t) &= && \text{für } j > 0 \\ u_{n,j}g_1(jh_t) &= && \text{für } j > 0.\end{aligned} \quad (2.33)$$

Allerdings sind diese Approximationen nicht ganz konsistent. Die Approximation für die erste Ableitung nach t an der Stelle (x_i, t_j) ist eigentlich eher repräsentativ für den Punkt $(x_i, t_j + \frac{1}{2}h_t)$. Eine besser Diskretisation der Wärmeleitungsgleichung bekommen wir daher, wenn wir die Approximationen für die zweiten Ableitungen nach x an den Stellen (x_i, t_j) und (x_i, t_{j+1}) mitteln. Die lineare Gleichung wird damit zu

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{h_t} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h_x^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h_x^2} \right). \quad (2.34)$$

Dies ist zusammen mit den bereits formulierten Randbedingungen (2.33) immer noch ein lineares Gleichungssystem. Die Werte $u_{i,j+1}$ lassen sich jetzt nicht mehr so einfach explizit ableiten, stattdessen hat das lineare Gleichungssystem (2.34) in jeder Gleichungen drei verschiedene Variablen $u_{i,j+1}$, die durch diese Gleichungen implizit gegeben sind. Man nennt dies ein implizites Verfahren.

2.4.2 Basisfunktionen

Lineare Differentialgleichungen haben die Eigenschaft, dass mit zwei Lösungen auch deren Linearkombinationen wieder Lösungen sind. In der Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen endlicher Ordnung geben die Koeffizienten der Linearkombination die nötige Flexibilität,

die Anfangsbedingungen zu erfüllen. Dasselbe gilt auch für partielle Differentialgleichungen, mit dem Unterschied allerdings, dass es meistens unendlich viele linear unabhängige Lösungen gibt. Ist L ein linearer Differentialoperator und $u_k, k \in \mathbb{N}$ eine Familie von Lösungen der Gleichung $Lu = 0$. Im besten Fall lässt sich dann jede andere Lösung u in einem noch zu definierenden Sinn beliebig genau durch Linearkombinationen

$$u = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k u_k$$

approximiert werden. Wir verzichten darauf, auf die analytischen Details einzugehen.

Bei einer nichtlinearen Differentialgleichung ist es sicher nicht mehr möglich, Lösungen durch Linearkombination anderer Lösungen zu bilden. Aber es spricht nichts dagegen, dass es eine Familie $u_k, k = 1, \dots, N$, von Funktionen gibt, mit der man Lösungen genügend genau approximieren kann.

Die Potenzreihenmethode

Diese Idee liegt zum Beispiel der Potenzreihenmethode zu Grunde. Dabei nimmt man an, dass die Lösung einer Differentialgleichung als Linearkombination der Potenzfunktionen $u_k(x) = x^k, k = 0, \dots, N$ approximiert werden kann. Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$y'' = -\lambda y.$$

Eine Potenzfunktion $u_k(x) = x^k$ ist offensichtlich keine Lösung. Man kann aber die Lösung als eine Linearkombination der Potenzfunktionen

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

ansetzen und in die Differentialgleichung einsetzen. Man erhält

$$2 \cdot 1 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x + 4 \cdot 3 \cdot a_4 x^2 + \dots = -\lambda(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)$$

Man liest daraus die Gleichungen für die Koeffizienten a_k ab:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 1 \cdot a_2 = -\lambda a_0 \\ 3 \cdot 2 \cdot a_3 = -\lambda a_1 \\ 4 \cdot 3 \cdot a_4 = -\lambda a_2 \\ 5 \cdot 4 \cdot a_5 = -\lambda a_3 \\ \vdots \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_{2k} = (-1)^k \frac{\lambda^k}{2k!} a_0 \\ a_{2k+1} = (-1)^k \frac{\lambda^k}{(2k+1)!} a_1 \end{array} \right.$$

Daraus kann man erkennen, dass jede Lösung die Form

$$\begin{aligned} u(x) &= a_0 \left(1 - \frac{(\sqrt{\lambda}x)^2}{2!} + \frac{(\sqrt{\lambda}x)^4}{4!} - \dots \right) + \frac{a_1}{\sqrt{\lambda}} \left(\sqrt{\lambda}x - \frac{(\sqrt{\lambda}x)^3}{3!} + \frac{(\sqrt{\lambda}x)^5}{5!} - \dots \right) \\ &= a_0 \cos \sqrt{\lambda}x + \frac{a_1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}x \end{aligned}$$

hat.

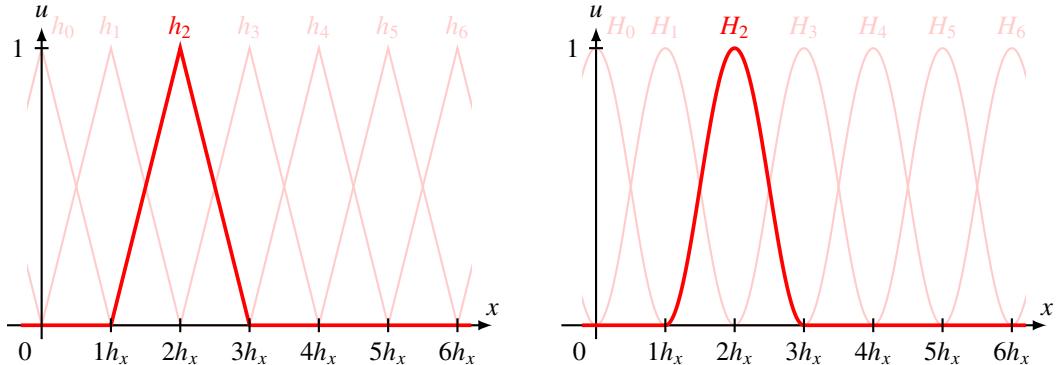


Abbildung 2.8: Approximationsfunktionen $h_i(x)$ für stückweise lineare Funktionen $H_i(x)$ für glatte Funktionen.

Erfolgsfaktoren

Aus dem eben entwickelten Beispiel kann man einige heuristische Regeln ableiten, wie die Funktionenfamilie u_k beschaffen sein muss, damit es durchführbar ist.

1. Die Ableitungen $u'_k(x)$ der Funktionen können durch Linearkombinationen derselben ausgedrückt werden. Im Beispiel ist $u'_k(x) = kx^{k-1} = ku_{k-1}(x)$.
2. Produkte von Funktionen $u_k(x)$ lassen sich durch Linearkombinationen approximieren. Im Beispiel ist $u_k(x)u_l(x) = x^k x^l = x^{k+l} = u_{k+l}(x)$.
3. Beim Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichungen entstehen algebraische Gleichungen, aus denen die Koeffizienten bestimmt werden können. Im Beispiel

Finite Elemente

Bei der Diskretisation in Abschnitt 2.4.1 wurde die Funktion durch Werte an den Gitterpunkten ersetzt. Für die Berechnung der Ableitung wurde die Funktion linear interpoliert. Lineare Funktionen zwischen benachbarten Gitterpunkten können daher als Basisfunktionen verwendet werden. Damit die Funktionen stetig werden, kann man stückweise lineare Funktionen

$$h_i(x) = \begin{cases} 0 & x < (i-1)h_x \\ \frac{1}{h_x}(x - (i-1)h_x) & (i-1)h_x \leq x < ih_x \\ -\frac{1}{h_x}(x - (i+1)h_x) & ih_x \leq x < (i+1)h_x \\ 0 & x \geq (i+1)h_x \end{cases}$$

verwenden, die nur an einem einzigen Gitterpunkt von 0 verschieden sind, wie in Abbildung 2.8 links.

Noch bessere Resultat kann man erhalten, wenn man die Funktionen $h_i(x)$ durch geeignete glatte Funktionen $H_i(x)$ wie in Abbildung 2.8 rechts ersetzt. Diese Idee lässt sich zu einem sehr erfolgreichen numerischen Lösungsverfahren ausbauen, der Methode der finiten Elemente.

Ein etwas komplexeres Beispiel

Wir versuchen, diese Idee auf die Lösung der Gleichung von Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{mit Randbedingung} \quad u(0, x) = g(x) \quad (2.35)$$

anzuwenden. Wir suchen 2π -periodische Lösungen für ebensolche Anfangsbedingung $u(0, x) = g(x)$. Wie im Kapitel 6 dargelegt wird, sind die Funktionen $\cos kx$ und $\sin kx$ geeignete Basisfunktionen für das skizzierte Verfahren. Zur Vereinfachung der Rechnung verwenden wir statt der reellen Funktion $\cos kx$ und $\sin kx$ die komplexen Exponentialfunktionen e^{ikx} . Als Ansatz verwenden wir daher

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(t) e^{ikx}$$

und setzen dies in die Differentialgleichung ein, die dadurch zu

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \dot{c}_k(t) e^{ikx} = - \sum_{j, l \in \mathbb{Z}} c_j(t) e^{ijx} c_l(t) l e^{ilx} = - \sum_{j, l \in \mathbb{Z}} c_j(t) c_l(t) l e^{i(j+l)x}$$

Daraus lesen wir die Gleichungen

$$\dot{c}_k(t) = - \sum_l l c_l(t) c_{k-l}(t) \quad (2.36)$$

für die Koeffizienten ab. Wir haben also ein System von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung gefunden, und damit das partielle Differentialgleichungssystem auf ein einfacheres System reduziert. Allerdings ist von der rechten Seite der Differentialgleichung (2.36) nicht einmal garantiert, dass diese Summen konvergieren.

Für eine approximative Lösung vernachlässigen wir die Koeffizienten c_k mit $|k| > N$ und berechnen die Lösungen der Differentialgleichungen (2.36) numerisch für die Anfangsfunktionen

$$u(0, x) = g(x) = \sin 2x. \quad (2.37)$$

Die Resultate sind in Abbildung 2.9 dargestellt.

Lösungen der Gleichung von Burgers können in allgemeiner Form mit Hilfe der Methode der Charakteristiken gefunden werden [2], ein kurzer Abriss dieser Lösung wird in Abschnitt 11.2 gegeben. Für glatte Anfangsbedingungen beschreibt die Gleichung von Burgers eine Welle, die sich mit einer Geschwindigkeit in x -Richtung bewegt, die proportional zu u ist. Der Kamm einer Welle bewegt sich also schneller als der Sockel. Bis zu $t = 0.4$, dargestellt im obersten Bild von Abbildung 2.9 kann man genau dies auch in der numerischen Lösung beobachten.

Die allgemeine Theorie sagt aber auch, dass nach genügend langer Zeit der Kamm der Welle den Sockel überholt und sich eine Sprungstelle zu entwickeln beginnt. Die Sprungstelle bewegt sich mit dem Mittelwert der Grenzwerte von u auf beiden Seiten der Sprungstelle. Für die gegebenen Anfangsbedingungen entsteht zur Zeit $t = \frac{1}{2}$ eine Sprungstelle an den Stellen $x = \frac{\pi}{2} + k\pi\mathbb{Z}$. Die Lösung ist antisymmetrisch an diesen Punkten, daher bewegt sich die Sprungstelle nicht. Dies kann man auch aus der numerischen Lösung in Abbildung 2.9 in der Mitte beobachten. Natürlich kann eine Sprungstelle mit endlich vielen Fourier-Termen nicht getreu wiedergegeben werden, das Gibbs-Phänomen verspricht, dass sich in der Nähe der Sprungstelle grösser werdende Oszillationen entwickeln. Diese Oszillationen breiten sich in der numerischen Lösung rasch über den gesamten Definitionsbereich aus.

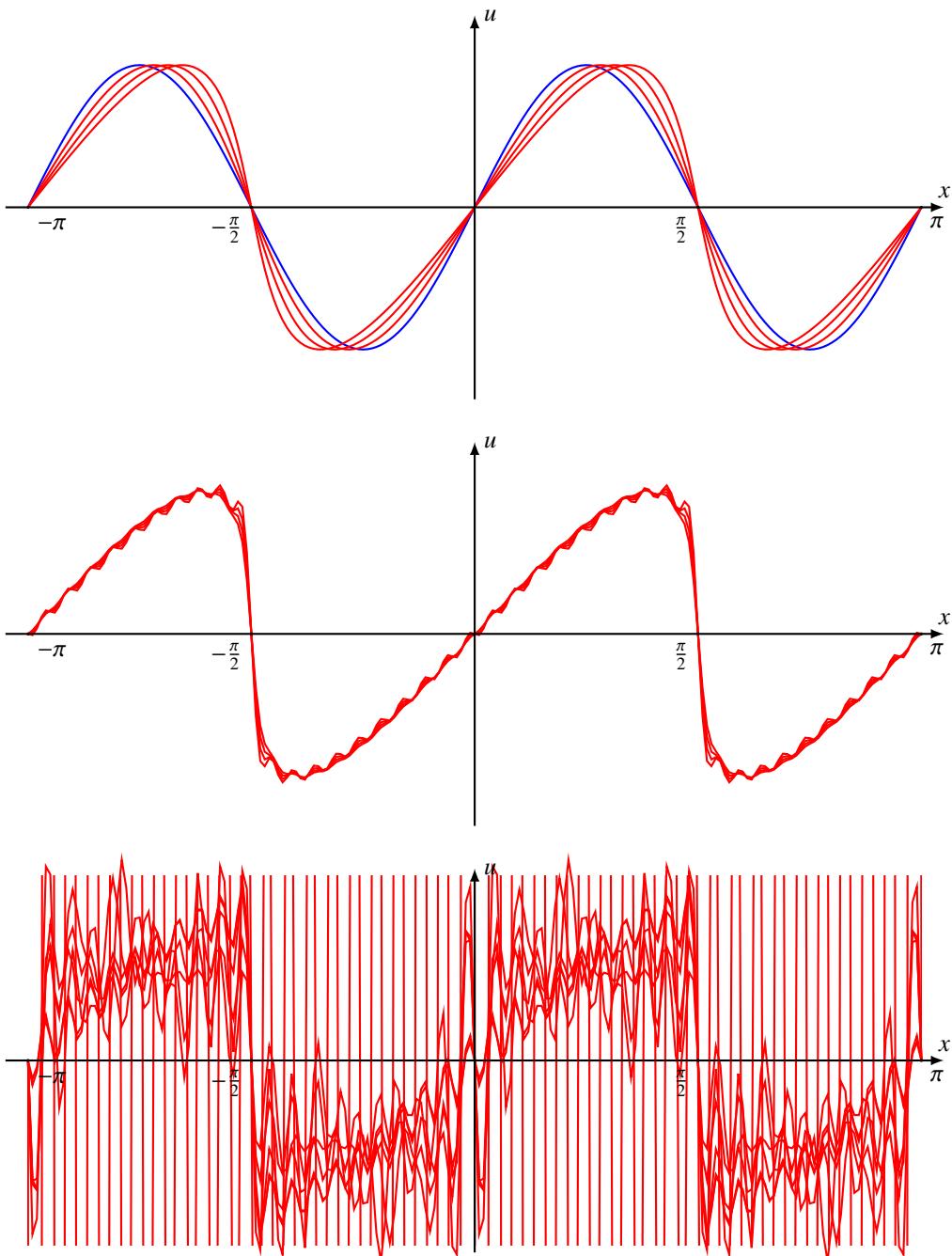


Abbildung 2.9: Numerische Lösung der Gleichung (2.35) von Burgers für die Anfangsbedingung mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen $\sin kx$ und $\cos kx$ als Basis. Die Approximation ist stabil (oben), solange keine Sprungstelle auftritt, wie dies im mittleren Graph bei $t = 0.5$ passiert. Für späteren Zeiten wird das System instabil und die berechnete Lösung unbrauchbar (unten).

Für grosse Zeiten verspricht die allgemeine Theorie, dass die Lösung eine Sägezahn-ähnliche Funktion wird die gegen 0 konvergiert. Die numerische Lösung deutet dies an in Abbildung 2.9 unten, obwohl sie von den ständig anwachsend Oszillationen überdeckt werden.

Dieses Beispiel zeigt also einerseits, wie die Verwendung einer Basis aus einer partiellen Differentialgleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung machen kann, die unter geeigneten Bedingungen auch vernünftige Lösungen liefern kann. Andererseits zeigt es auch die Grenzen dieses Vorgehens auf.

2.4.3 Separation

Motivation

Besonders gut geeignet als Basisfunktionen sind Funktionen, die bereits Lösungen einer vereinfachten Variante der partiellen Differentialgleichung sind oder die die Randbedingungen leicht wiederzugeben erlauben. Zum Beispiel kommt in den Strömungsdifferentialgleichungen häufig der Laplace-Operator vor, also könnte es nützlich sein, als Basisfunktionen eine Familie von Funktionen u_n heranzuziehen, welche bereits Lösungen der Gleichung Δu_n sind. In Kapitel 10) wird gezeigt, wie man diese Idee auf das in Abschnitt vorgestellte Lorenz-Modell anwenden kann. Wenn man dann die Lösung als Linearkombination $\sum a_n u_n$ dieser Funktionen ansetzt, verschwinden alle Terme der Form Δu_n , was die gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Koeffizienten a_n dramatisch vereinfachen kann. In diesem Abschnitt zeigen wir daher an einem Beispiel, wie solche Funktionen gefunden werden können.

Die Separationsmethode an einem Beispiel

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \Delta u &= \lambda u && \text{auf dem Gebiet } \Omega = \{(x, y) \mid 0 < x < a \text{ und } 0 < y < b\} \\ \text{mit } u &= 0 && \text{auf dem Rand } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Das Gebiet ist ein Rechteck mit Seitenlängen a und b . Die Relation $\Delta u = \lambda u$ ermöglicht, jedes Vorkommen eines auf die Funktion u wirkenden Laplace-Operators durch die Multiplikation mit λ zu ersetzen, und damit die Differentialgleichung zu vereinfachen.

Die Separationsmethode nimmt jetzt an, dass sich die Lösung der Differentialgleichung in der besonders einfachen Form eines Produktes $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$ finden lässt. Setzt man diesen Separationsansatz in die Differentialgleichung ein, erhält man

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) X(x) \cdot Y(y) = X''(x) \cdot Y(y) + X(x) \cdot Y''(y) = \lambda X(x) \cdot Y(y).$$

Wir interessieren uns für nicht verschwindende Lösungen, wir nehmen daher an, dass die Funktionen $X(x)$ und $Y(y)$ nur isolierte Nullstellen haben. Ausserhalb dieser Nullstellen ist es erlaubt, durch $X(x) \cdot Y(y)$ zu dividieren. Damit wird es möglich, die Variablen x und y zu trennen, man erhält

$$0 = \frac{X''(x) \cdot Y(y) + X(x) \cdot Y''(y)}{X(x) \cdot Y(y)} - \lambda = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda.$$

Die linke Seite der Gleichung hängt nur von x ab, die rechte nur von y . Ändert man x während man y konstant hält, dann kann sich die rechte Seite nicht ändern, die linke muss daher auch konstant

sein. Wenn aber die linke Seite eine konstante ist, dann muss auch die rechte eine Konstante sein. Es gibt also eine vorerst noch unbekannte Konstante μ , so dass die Funktionen $X(x)$ und $Y(y)$ die Differentialgleichungen

$$X''(x) = -\mu X(x) \quad \text{und} \quad Y''(y) = (\lambda + \mu)Y(y) \quad (2.38)$$

erfüllen. Mögliche Werte für μ werden sich daraus ergeben, welche Werte die Differentialgleichungen überhaupt lösbar sind, oder für welche Werte sich die gegebenen Randbedingungen erfüllen lassen.

Wir lösen die Differentialgleichungen (2.38) so, dass auch die Randbedingungen $u = 0$ auf $\partial\Omega$ erfüllt sind. Für die Funktionen $X(x)$ und $Y(y)$ bedeutet dies:

$$\begin{aligned} X(0) &= 0, & Y(0) &= 0, \\ X(a) &= 0, & Y(b) &= 0. \end{aligned}$$

Die linearen Differentialgleichungen (2.38) haben Exponentialfunktionen oder trigonometrische Funktionen als Lösungen. Da sich mit Exponentialfunktionen die Randbedingungen ohnehin nicht einhalten lassen, suchen wir Lösungen als trigonometrische Funktionen. Da $X(0) = 0$ und $Y(0) = 0$ gilt, müssen die Lösungen Sinus-Funktionen sein, wir nehmen daher an, dass $X(x) = \sin \kappa x$ und $Y(y) = \sin \nu y$. Für diese Funktionen gilt

$$X''(x) = -\kappa^2 \sin \kappa x = -\kappa^2 X(x) \quad \text{und} \quad Y''(y) = -\nu^2 \sin \nu y = -\nu^2 Y(y).$$

Die Randbedingungen am rechten Rand sind

$$X(a) = \sin \kappa a = 0 \quad Y(b) = \sin \nu b = 0.$$

Da die Sinus-Funktion ihre Nullstellen genau bei den ganzzahligen Vielfachen von π hat, schliessen wir, dass $\kappa a = k\pi$ und $\nu b = l\pi$ mit $k, l \in \mathbb{Z}$ gilt. Die Lösungen sind daher von der Form

$$X(x) = \sin \frac{xk\pi}{a} \quad \text{und} \quad Y(y) = \sin \frac{yl\pi}{b}$$

Und damit für die Familie der Lösungsfunktionen

$$u_{kl}(x, y) = \sin \frac{xk\pi}{a} \sin \frac{yl\pi}{b}.$$

Wir berechnen auch noch die Werte von μ und λ :

$$\begin{aligned} X''(x) &= -\mu X(x) = -\frac{k^2\pi^2}{a^2} \\ \Delta u_{kl} &= -\frac{k^2\pi^2}{a^2} u_{kl} - \frac{l^2\pi^2}{b^2} u_{kl} = -\left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}\right)\pi^2 u_{kl} = \lambda u_{kl} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{kl} = -\left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}\right)\pi^2. \end{aligned}$$

Nur eine diskrete Menge von Zahlenwerten μ sind also möglich, und nur für eine diskrete Menge von Eigenwerten λ ist die ursprüngliche Differentialgleichung überhaupt lösbar.

Damit haben wir eine Familie u_{kl} , $k, l \in \mathbb{Z}$ von Funktionen gefunden, die Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u_{kl} = \lambda_{kl} u_{kl}$ sind. Das Anfangs gestellte Ziel ist erreicht.

Verallgemeinerungen

Das Beispiel deutet auch an, wie die Methode verallgemeinert werden kann.

1. Wenn möglich, wähle ein Koordinatensystem, mit welchem das Definitionsbereich einfach beschrieben werden kann. Formuliere die Differentialgleichung in diesen Koordinaten. Darstellungen des Laplace-Operator für fast alle wichtigen Koordinatensysteme können zum Beispiel in guten Formelsammlungen gefunden werden.
2. Separationsansatz: setze die Lösung als Produkt von Funktionen an, jeweils von nur einer Koordinate abhängen, also $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$ in einem x - y -Koordinatensystem.
3. Setze den Ansatz in die Differentialgleichung ein und versuche die Variablen zu trennen. Gesucht ist eine Gleichung, deren linke Seite nur von einer Variablen abhängt, die rechte nur von allen anderen. Wie im Beispiel folgt, dass beide Seiten konstant sein müssen. Damit hat man das Problem darauf reduziert, eine gewöhnliche Differentialgleichung für eine Funktion der einen Variable zu lösen. Integrationskonstanten, die in der Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung immer auftreten wird, können oft mit Hilfe eines Teils der Randbedingungen eliminiert werden.
4. Durch Iteration von Schritt 3 können Teillösungen u_n gefunden werden, die von den Konstanten abhängen, die bei der Separation eingefügt werden müssen.

2.5 Lorenz-Modell

Sowohl die Atmosphäre als auch die Ozeane werden durch die hydrodynamischen Gleichungen beschrieben. Es stellt sich damit die Frage, in welchem Maße sich daraus eine praktikable Vorhersage sowohl von Wetter also auch des Klimas ableiten lässt. In den Sechzigerjahren hat Edward Lorenz versucht, diese Frage mit einem vereinfachten Modell zu beantworten. Ziel dieses Abschnittes ist, das Lorenz-Modell aus den Gleichungen der Fluidynamik herzuleiten.

2.5.1 Modellbeschreibung

Es soll ein dünner Schnitt durch die Atmosphäre modelliert werden. Da die Atmosphäre im Vergleich zur Krümmung der Erdoberfläche sehr dünn ist, können wir sie als eben annehmen. Wir verwenden die Koordinate x parallel zur Erdoberfläche und y als Höhe (Abbildung 2.10). Gesucht ist also die Temperatur $T(x, y, t)$ und die Dichte $\varrho(x, y, t)$ in Abhängigkeit von Position und Zeit sowie der Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(x, y, t) \\ v_y(x, y, t) \end{pmatrix}.$$

Die Funktionen T, ϱ, v_x und v_y sind definiert in einem Streifen. Der Einfachheit halber wählen wir die Höhe des Streifens als π . Wir können dies erreichen, indem wir die Längeneinheit geeignet wählen: ist h die “Dicke” der Atmosphäre¹, wählen wir h/π als Längeneinheit. Das Definitionsbereich für die Funktionen ist daher $R = \mathbb{R} \times [0, \pi]$.

¹Die Konvektion in der Atmosphäre, welche vom Lorenz-Modell vor allem beschrieben wird, findet im Wesentlichen nur im untersten Teil der Atmosphäre, der sogenannten Troposphäre statt. Die Troposphäre zeichnet sich aus durch mehr oder weniger lineare Temperaturabnahme bis zur Höhe der sogenannten Tropopause in etwa 10km Höhe. Wir können also die Höhe der Tropopause als h verwenden.

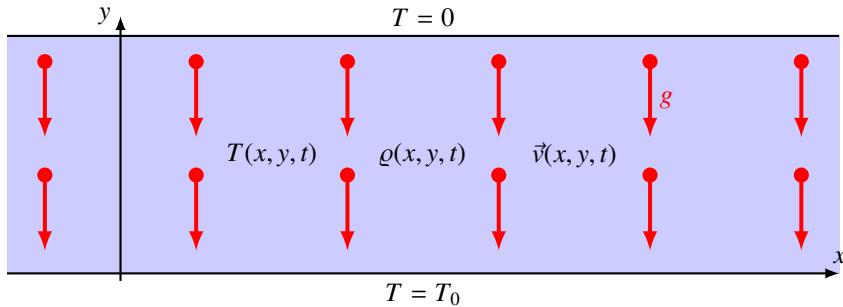


Abbildung 2.10: Definitionsgebiet für das Lorenz-Modell der Atmosphäre. Gesucht sind Temperatur $T(x, y, t)$, Dichte $\varrho(x, y, t)$ und Geschwindigkeit $\vec{v}(x, y, t)$ in einem Rechteckgebiet $\mathbb{R} \times [0, \pi]$. Die Temperatur ist an den Rändern vorgegeben, es gilt $T(x, 0, t) = T_0$ und $T(x, \pi, t) = 0$. Im Inneren Gebiet wird die Schwerkraft g auf die Luft.

Die Temperatur der Atmosphäre an der Erdoberfläche wird im wesentlichen von der Temperatur des Bodens bestimmt, der von der einfallenden Strahlung erwärmt wird, es soll also $T(x, 0, t) = T_0$ gelten. Am oberen Rand des Schnittes schliesst die sehr dünne Hochatmosphäre an, die im Wesentlichen in einem Strahlungsgleichgewicht mit der Umgebung steht. Da wir die Dichte im wesentlichen als konstant ansehen wollen und damit den Einfluss der Temperatur auf die Dichte nicht exakt modellieren wollen, sind wir nicht gezwungen, eine bestimmte Temperaturskala zu verwenden. Wir können daher willkürlich die Temperatur am oberen Rand als $T(x, \pi, t) = 0$ festlegen.

Auf das Medium im Streifen wirkt natürlich die Erdbeschleunigung, die wir ebenfalls als konstant annehmen dürfen, da die Dicke der Atmosphäre im Vergleich zum Erdradius sehr klein ist.

Stabile Atmosphäre

Die Temperatur muss im Gebiet von unten nach oben abnehmen. Aber auch der Druck muss mit zunehmender Höhe abnehmen. Wenn ein Luftpaket aufsteigt, wird es wegen des geringer werdenden Druckes expandieren und damit adiabatisch abkühlen. Wenn die Temperatur der umgebenden Luft schneller abnimmt als die adiabatische Abkühlung, dann ist das Luftpaket in seiner neuen Höhe wärmer und damit leichter als die Umgebung, es wird weiter ansteigen (Abbildung 2.11). Wenn die Temperatur der umgebenden Luft langsamer abnimmt als die adiabatische Abkühlung, dann ist das Luftpaket in der neuen Höhe kälter und damit Dichter als die Umgebung, es wird wieder absinken. Solange der Temperaturunterschied nicht zu gross ist, wird sich also ein Zustand einstellen, in dem die Luft in Ruhe bleibt, der Wärmetransport erfolgt ausschliesslich durch Wärmeleitung.

Instabilität

Bei genügend grosser Temperaturdifferenz wird die Atmosphäre jedoch instabil, der Wärmetransport wird zusätzlich von Konvektion übernommen. Die entstehenden Konvektionszellen können wegen der Translationssymmetrie entlang der x -Achse an einer beliebigen Stelle entstehen, es gibt also unendlich viele Lösungen, von denen eine gewählt werden muss. In der Realität würden kleine Temperaturfluktuationen dies unterstützen, kleine Unterschiede in den Anfangsbedingungen führen also zu völlig verschiedenen Strömungen. Diese sensitive Abhängigkeit der Lösung von Anfangsbedingungen wird oft als ein Kennzeichen von Chaos angesehen.

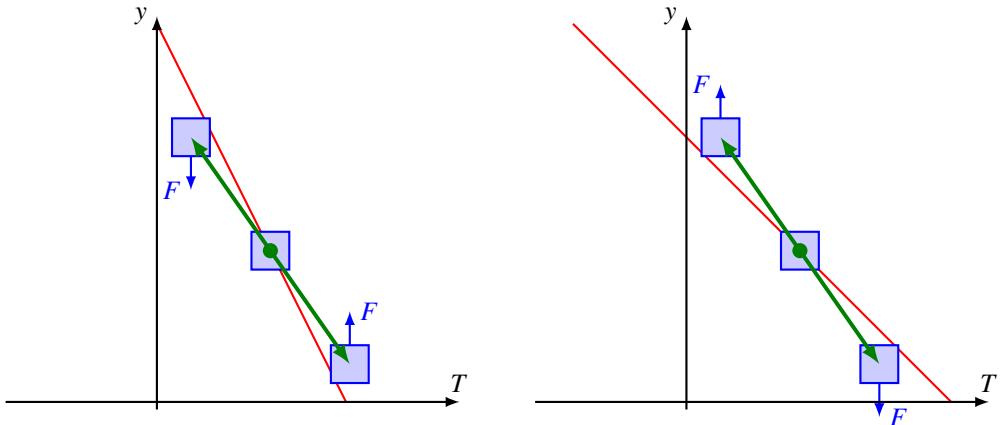


Abbildung 2.11: Stabilität der Atmosphäre: bewegt sich ein Luftpaket in der Atmosphäre nach oben oder unten, expandiert oder kontrahiert es und verändert seine Temperatur adiabatisch (grün). Ist diese Temperaturänderung grösser als der aktuelle Temperaturgradient (links), ändert sich die Dichte der Luft weniger stark als die der Umgebungsluft, die Bewegung wird gestoppt, die Atmosphäre ist im Gleichgewicht. Andernfalls wird die Bewegung beschleunigt, die Atmosphäre ist instabil (rechts).

Im folgenden sollen zunächst die Gleichungen der Fluidodynamik auf die vorliegende Situation spezialisiert werden. Mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes soll dann die partielle Differentialgleichung weiter auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen reduziert werden. In numerischen Simulationen soll schliesslich gezeigt werden, dass die Lorenz-Gleichungen tatsächlich chaotische Lösungen haben.

Temperaturgleichung

Wir haben in (1.5) bereits eine Gleichung gefunden, welche den Wärmetransport in einem Fluid beschreibt. Wir können daraus aber noch eine etwas einfacher zu handhabende Form gewinnen, indem wir nur die Anomalie der Temperatur betrachten, also die Abweichung vom Temperaturprofil, welches sich bei einem ruhenden Fluid einstellt. Aufgrund der gewählten Geometrie ist

$$T_0(x, y, t) = T_0 \left(1 - \frac{y}{\pi}\right)$$

in einem ruhenden Fluid, wir setzen daher

$$\vartheta(x, y, t) = T(x, y, t) - T_0 \left(1 - \frac{y}{\pi}\right) \quad \text{oder} \quad T(x, y, t) = T_0 \left(1 - \frac{y}{\pi}\right) + \vartheta(x, y, t)$$

und setzen dies in die Gleichung (1.5) ein. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \frac{\partial T}{\partial t} & \Delta T &= \Delta \vartheta \\ -\vec{v} \cdot \nabla T &= -\vec{v} \cdot \nabla \vartheta + v_y \frac{T_0}{\pi}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla \vartheta + v_y \frac{T_0}{\pi} + \kappa \Delta \vartheta.$$

Die Geschwindigkeit kann mit Hilfe von $\vec{v} = -\nabla \psi$ wieder durch die Stromfunktion ausgedrückt werden.

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -J \nabla \psi \cdot \nabla \vartheta + \frac{T_0}{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \kappa \Delta \vartheta = \kappa \Delta \vartheta + \frac{T_0}{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \kappa \Delta \vartheta + \frac{T_0}{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \vartheta)}{\partial(x, y)}. \quad (2.39)$$

Man beachte, dass die Gleichung bis auf den letzten Term linear in ψ und ϑ ist.

Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung haben wir in (2.29) bereits in die für ein zweidimensionales inkompressibles Fluid geeignete Form gebracht. Da die Schwerkraft konstant ist, fällt der Terme $\nabla \times \vec{b}$ weg.

Aus der Boussinesq-Näherung (2.11) erhalten wir noch einen Term, der den Auftrieb beschreibt. Auftrieb entsteht offenbar genau dann, wenn die Temperatur vom linearen Temperaturprofil abweicht. Wir nehmen an, dass die Dichteabweichung proportional zur Temperaturabweichung ist, also

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g(1 - c\vartheta) \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla \times \vec{b} = c \frac{\partial \vartheta}{\partial x}.$$

Damit erhalten wir die Bewegungsgleichung in der Form

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = \nu \Delta^2 \psi + c \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(x, y)}. \quad (2.40)$$

Man beachte, dass die Gleichung bis auf den letzten Term linear in ψ und ϑ ist.

2.5.2 Grundgleichungen

In den Gleichungen (2.39) und (2.40) haben wir ein partielles Differentialgleichungssystem für die beiden unbekannten Funktionen ψ und ϑ gefunden, die wir der besseren Übersicht halber nochmals als

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} &= \nu \Delta^2 \psi + c \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(x, y)} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \kappa \Delta \vartheta + \frac{T_0}{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \vartheta)}{\partial(x, y)} \end{aligned} \quad (2.41)$$

hinschreiben. Allerdings ist das System von dritter Ordnung, da erste Ableitungen von ψ und $\Delta \psi$ vorkommen. Man sieht aber auch, dass keine anderen Ableitungen vorkommen als erste Ableitungen von ψ oder $\Delta \psi$. Dies ist geeignet, die Diskussion zu vereinfachen, weshalb wird darauf achten, diese Struktur nicht zu zerstören. Wir können die linke Seite der Gleichungen zum Beispiel vektoriell schreiben als

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Delta \psi \\ \vartheta \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= D} \underbrace{\begin{pmatrix} \psi \\ \vartheta \end{pmatrix}}_{= u} = \frac{\partial}{\partial t} Du$$

Entsprechend lassen sich die ersten zwei Terme auf der rechten Seite schreiben als

$$\begin{pmatrix} \nu \Delta^2 & c \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{T_0}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} & \kappa \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \vartheta \end{pmatrix} = Au.$$

Die Operatoren D und A sind beide linear.

Für die Diskussion der Zeitentwicklung der Lösungen ist es nützlich, die linearen Terme von den nichtlinearen zu trennen. Wie bereits bemerkt treten Nichtlinearitäten nur in den Funktionaldeterminanten auf. Wir schreiben

$$Nu = \begin{pmatrix} -\frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x, y)} \\ -\frac{\partial(x, y)}{\partial(\psi, \vartheta)} \\ -\frac{\partial(\psi, \vartheta)}{\partial(x, y)} \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir das Differentialgleichungssystem in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} Du = Au + Nu \quad (2.42)$$

mit den linearen Operatoren D und A und dem nichtlinearen Operator N schreiben.

Die allgemeine Form (2.42) eines Klimamodells ermöglicht uns, das Klimavorhersageproblem in dem etwas allgemeineren Rahmen der Vorhersage für ein beliebiges nichtlineares dynamisches System zu studieren. Zwar ist (2.42) immer noch ein partielles Differentialgleichungssystem und die Operatoren D , A und N sind partielle Differentialoperatoren. Wenn es aber gelingt, die Funktionen zu diskretisieren und durch Vektoren in einem endlichdimensionalen Vektorraum zu ersetzen, dann werden D und A zu linearen Abbildungen, die durch Matrizen beschrieben werden können, und N wird zu einer nichtlinearen Funktion auf einem endlichdimensionalen Vektorraum. Das Klimamodell wird also zu einer nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichung in einem endlichdimensionalen Raum. Solche Differentialgleichungen sind im Detail studiert worden und ihre Eigenschaften sind sehr gut verstanden. In Kapitel 3 werden wir einen Teil der gut ausgebauten Theorie zusammenfassen. Den Weg von (2.42) zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung in nur drei Dimensionen soll im folgenden Abschnitt 2.5.3 vorgeführt werden.

2.5.3 Umwandlung in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem

Ausgehend von (2.41) versuchen wir nun, eine gewöhnliche Differentialgleichung zu gewinnen, welche näherungsweise wiedergibt, was passiert, wenn im betrachteten System Konvektion einsetzt. Eine einzelne Konvektionszelle hat Stromlinien, wie sie in Abbildung 2.12 dargestellt sind. Vernachlässigt man in der ersten der Differentialgleichungen (2.41) ϑ und den nichtlinearen Term, bleibt eine Wärmeleitungsgleichung für $\Delta\psi$. Die Wärmeleitungsgleichung auf einem Rechteckgebiet einer solchen Zelle könnte man mit einem Separationsansatz zu lösen versuchen, dies würde auf Lösungen der Form $\sin(ax)\sin(y)$ führen. Wir versuchen daher eine Lösung für $\psi(x, y, t)$ in der etwas allgemeineren Form

$$\psi(x, y, t) = X(t) \sin(ax) \sin(y) \quad (2.43)$$

zu finden. Die Konvektion sorgt dafür, dass im Bereich grosser Strömungsgeschwindigkeit der Temperaturgradient stark vom linearen Verlauf abweicht. Die vertikale Strömungsgeschwindigkeit ist bei 0 und π hoch, also dort wo $\cos(ax)$ gross ist. Wir setzen daher die Lösung für die Temperatur $\vartheta(x, y, t)$ an in der Form

$$\vartheta(x, y, t) = Y(t) \cos(ax) \sin(y) - Z(t) \sin(2y). \quad (2.44)$$

Das Ziel ist, für die drei Funktionen $X(t)$, $Y(t)$ und $Z(t)$ gewöhnliche Differentialgleichungen aufzustellen, also die Ortsabhängigkeit der Lösungsfunktionen vollständig zu eliminieren. Diese Technik heisst in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen auch die Transformationsmethode.

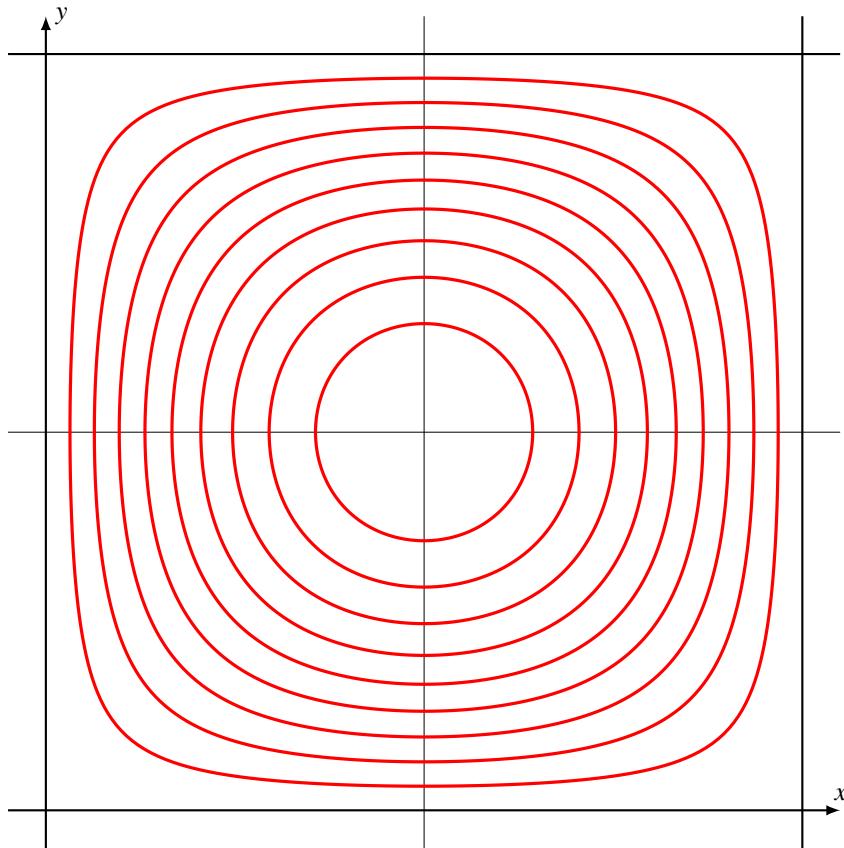


Abbildung 2.12: Stromlinien in einer einzelnen Konvektionszelle

Wir können allerdings nicht erwarten, dass dies exakte Lösungen sind. Beim Einsetzen in die Differentialgleichungen werden auch noch andere Terme entstehen. Unter der Annahme, dass die genannten Terme die Gestalt der Stromlinien genau genug wiederzugeben in der Lage sind, vernachlässigen wir alle Terme, die sich nicht als Vielfache der Funktionen

$$\sin(ax) \sin(y), \quad \cos(ax) \sin(y) \quad \text{und} \quad \sin(2y) \quad (2.45)$$

schreiben lassen.

Wir müssen jetzt also die Lösungsansätze (2.43) und (2.44) in die Differentialgleichungen (??) einsetzen. Die linke Seite ist jeweils einfach, da die Zeitabhängigkeit nur noch in den Funktionen $X(t)$, $Y(t)$ und $Z(t)$ steckt. Auf der linken Seite können wir daher einfach $X(t)$ durch $\dot{X}(t)$ ersetzen und analog für die anderen beiden Koeffizientenfunktionen.

Die Ortsableitungen geben etwas mehr zu tun:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \psi &= X(t) a \cos(ax) \sin(y) & \frac{\partial}{\partial y} \psi &= X(t) \sin(ax) \cos(y) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi &= -X(t) a^2 \sin(ax) \sin(y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi &= -X(t) \sin(ax) \sin(y) \end{aligned}$$

$$\Delta\psi = -(a^2 + 1)\psi \quad \Delta^2\psi = (a^2 + 1)^2\psi.$$

für ψ und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\vartheta &= -aY(t) \sin(ax) \sin(y) & \frac{\partial}{\partial y}\vartheta &= Y(t) \cos(ax) \cos(y) - 2Z(t) \cos(2y) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\vartheta &= -a^2Y(t) \cos(ax) \sin(y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2}\vartheta &= -Y(t) \cos(ax) \sin(y) + 4Z(t) \sin(2y) \\ \Delta\vartheta &= -(a^2 + 1)Y(t) \cos(ax) \sin(y) + 4Z(t) \sin(2y) \end{aligned}$$

für ϑ . In den Differentialgleichungen brauchen wir aber noch die Funktionaldeterminanten für die nichtlinearen Terme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} = -(a^2 + 1) \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial(\psi, \vartheta)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\vartheta}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \\ &= X(t) \left(a \cos(ax) \sin(y) (Y(t) \cos(ax) \cos(y) - 2Z(t) \cos(2y)) \right. \\ &\quad \left. - \sin(ax) \cos(y) (-aY(t) \sin(ax) \sin(y)) \right) \\ &= X(t) \underbrace{(a(\cos^2(ax) + \sin^2(ax)))}_{=1} Y(t) \underbrace{\sin(y) \cos(y)}_{\frac{1}{2} \sin(2y)} - 2a \cos(ax) \sin(y) Z(t) \cos(2y) \\ &= \frac{1}{2} aX(t) Y(t) \sin(2y) - 2aX(t) Z(t) \cos(ax) \sin(y) \cos(2y) \\ &= \frac{1}{2} aX(t) Y(t) \sin(2y) - 2aX(t) Z(t) \cos(ax) \frac{1}{2} (\sin(-y) + \sin(3y)) \\ &= \frac{1}{2} aX(t) Y(t) \sin(2y) + 2aX(t) Z(t) \cos(ax) \sin(y) - 2aX(t) Z(t) \cos(ax) \sin(3y). \end{aligned}$$

Der letzte Term kann nicht durch Funktionen aus der Liste (2.45) ausgedrückt werden, und muss daher vernachlässigt werden. Setzen wir jetzt diese Ableitungen in die Differentialgleichungen ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} -(a^2 + 1)\dot{X}(t) \sin(ax) \sin(y) &= \nu(a^2 + 1)^2 X(t) \sin(ax) \sin(y) - acY(t) \sin(ax) \sin(y) \\ \dot{Y}(t) \cos(ax) \sin(y) - \dot{Z}(t) \sin(2y) &= -\kappa(a^2 + 1)Y(t) \cos(ax) \sin(y) + 4\kappa Z(t) \sin(2y) \\ &\quad + \frac{T_0}{\pi} X(t) a \cos(ax) \sin(y) \\ &\quad - \frac{a}{2} X(t) Y(t) \sin(2y) - 2aX(t) Z(t) \cos(ax) \sin(y). \end{aligned}$$

Wir vergleichen die Koeffizienten der Funktionen aus der Liste (2.45) dann erhalten wir das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= -\nu(a^2 + 1)X(t) + \frac{ac}{a^2 + 1} Y(t) \\ \dot{Y}(t) &= \frac{aT_0}{\pi} X(t) - (a^2 + 1)\kappa Y(t) - aX(t)Z(t) \\ \dot{Z}(t) &= -4\kappa Z(t) + \frac{a}{2} X(t)Y(t) \end{aligned} \tag{2.46}$$

für die Koeffizientenfunktionen $X(t)$, $Y(t)$ und $Z(t)$.

2.5.4 Dimensionslose Schreibweise

Die Form (2.46) der Lorenz-Gleichungen ist für eine Diskussion der Lösungen nicht besonders gut geeignet. Die komplizierte Form der Koeffizienten erschwert den Überblick. Ein übersichtlicheres System erhält man, wenn man die folgenden Ersetzungen vornimmt:

$$\begin{aligned}x &= \frac{a}{\kappa(a^2 + 1)\sqrt{2}} X, \\y &= \frac{a^2 c}{\kappa\nu(a^2 + 1)\sqrt{2}} Y, \\z &= \frac{a^2 c}{\kappa\nu(a^2 + 1)^3} Z, \quad \text{und} \\t' &= \kappa(a^2 + 1)t.\end{aligned}$$

Damit werden die Differentialgleichungen zu

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= \varrho x - y - xz \\ \dot{z} &= -\beta z + xy\end{aligned}$$

mit den Konstanten

$$\sigma = \frac{\nu}{\kappa}, \quad \varrho = \frac{a^2 c T_0}{\kappa\nu\pi(a^2 + 1)^3}, \quad \text{und} \quad \beta = \frac{4}{a^2 + 1}.$$

Es stellt sich heraus, dass gewisse Lösungen dieser Differentialgleichung chaotisches Verhalten zeigen. Damit sind der Verhersagbarkeit von Wetterphänomenen bereits prinzipielle Grenzen gesetzt. Dies besagt aber nicht, dass sich das Klima nicht vorhersagen lässt, sondern nur, dass das Lorenzmodell nicht dazu geeignet ist, den Wärmetransport durch Konvektion in der Atmosphäre über längere Zeit zu modellieren. Die in Kapitel 5 dargestellten Modelle sind dazu durchaus in der Lage.

Übungen

1. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' = y \quad \text{mit Anfangsbedingungen } y(0) = A, \quad y'(0) = B$$

mit Hilfe einer Potenzreihe.

Lösung. Wir setzen den Ansatz

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

$$y''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + \dots$$

Der Koeffizientenvergleich zeigt, dass

$$a_0 = 2 \cdot 1 a_2$$

$$a_1 = 3 \cdot 2 a_3$$

$$a_2 = 4 \cdot 3 a_4$$

$$a_3 = 5 \cdot 4 a_5$$

$$a_4 = 6 \cdot 5 a_6$$

$$a_5 = 7 \cdot 6 a_7$$

$$\vdots$$

Daraus liest man ab:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_0}{2 \cdot 1} = \frac{a_0}{2!} \\ a_3 &= \frac{a_1}{3 \cdot 2} = \frac{a_1}{3!} \\ a_4 &= \frac{a_2}{4 \cdot 3} = \frac{a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2!} = \frac{a_0}{4!} \\ a_5 &= \frac{a_3}{5 \cdot 4} = \frac{a_1}{5 \cdot 4 \cdot 3!} = \frac{a_1}{5!} \\ a_6 &= \frac{a_4}{6 \cdot 5} = \frac{a_0}{6 \cdot 5 \cdot 4!} = \frac{a_0}{6!} \\ a_7 &= \frac{a_5}{7 \cdot 6} = \frac{a_1}{7 \cdot 6 \cdot 5!} = \frac{a_1}{7!} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die Lösungsfunktion ist daher

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1 x + \frac{a_0}{2!} x^2 + \frac{a_1}{3!} x^3 + \frac{a_0}{4!} x^4 + \frac{a_1}{5!} x^5 + \frac{a_0}{6!} x^6 + \frac{a_1}{7!} x^7 + \dots \\ &= a_0 \underbrace{\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots\right)}_{= \cosh x} + a_1 \underbrace{\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots\right)}_{= \sinh x} \end{aligned}$$

Jetzt muss noch der Zusammenhang mit der Anfangsbedingung hergestellt werden. Es gilt

$$y(0) = a_0 = A$$

$$y'(0) = a_1 = B,$$

somit ist die gesuchte Lösung

$$y(x) = A \cosh x + B \sinh x.$$

○

2. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y'' - xy = 0.$$

Finden Sie eine Lösung mit Anfangswerten $y(x) = 1$ und $y'(x) = 0$.

Lösung. Wir setzen den Potenzreihenansatz

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

in die Differentialgleichung ein, und erhalten

$$\begin{aligned} y''(x) &= 2 \cdot 1 a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + 5 \cdot 4 a_5 x^3 + \dots \\ xy(x) &= a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \dots \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 a_2 &= 0 & a_2 &= 0 \\ 3 \cdot 2 a_3 &= a_0 & a_3 &= \frac{a_0}{3 \cdot 2} \\ 4 \cdot 3 a_4 &= a_1 & a_4 &= \frac{a_1}{4 \cdot 3} \\ 5 \cdot 4 a_5 &= a_2 & a_5 &= 0 \\ 6 \cdot 5 a_6 &= a_3 & a_6 &= \frac{a_3}{6 \cdot 5} = \frac{a_0}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} \\ 7 \cdot 6 a_7 &= a_4 & a_7 &= \frac{a_4}{7 \cdot 6} = \frac{a_1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} \\ 8 \cdot 7 a_8 &= a_5 & a_8 &= 0 \\ &\vdots & & \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingungen ergeben $y(0) = a_0 = 1$ und $y'(0) = a_1 = 0$. Damit ist die Lösung

$$y(x) = 1 + \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^6}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{x^9}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + \dots$$

Die Nenner sehen aus wie Fakultäten, nur dass jeder dritte Faktor fehlt. Erweitert man die Brüche so, dass im Nenner eine Fakultät steht, bekommt $y(x)$ die Form

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1 \cdot 4}{6!} x^6 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!} x^9 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{12!} x^{12} + \dots \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}{(3k)!} x^{3k}. \end{aligned} \quad \text{○}$$

3. Finden Sie eine gerade Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) \cdot \cos x = y(x) \quad (2.47)$$

in Form einer Reihe

$$y(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots \quad (2.48)$$

von Kosinus-Funktionen. Berechnen Sie die Koeffizienten bis a_5 .

Hinweis. Die Lösung ist proportional zu a_0 , Sie dürfen daher annehmen, dass $a_0 = 1$. Verwenden Sie ausserdem die Formeln

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

und Koeffizientenvergleich.

Lösung. Wir berechnen die zweite Ableitung des Ansatzes

$$y''(x) = -a_1 \cos x - 2^2 a_2 \cos 2x - 3^2 a_3 \cos 3x - 4^2 a_4 \cos 4x - \dots$$

$$y''(x) \cdot \cos x = -a_1 \cos x \cdot \cos x - 2^2 a_2 \cos 2x \cdot \cos x - 3^2 a_3 \cos 3x \cdot \cos x - 4^2 a_4 \cos 4x \cdot \cos x - \dots$$

Die Produkte von Kosinus-Funktionen können mit der Formel

$$\cos x \cdot \cos kx = \frac{1}{2}(\cos(k-1)x + \cos(k+1)x)$$

vereinfacht werden.

$$\begin{aligned} y''(x) \cdot \cos x &= -a_1 \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) - 2^2 a_2 \frac{1}{2}(\cos x + \cos 3x) - 3^2 a_3 \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x) \\ &\quad - 4^2 a_4 \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos 5x) - \dots \\ &= -\frac{a_1}{2} - 2^2 a_2 \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2}(a_1 + 3^2 a_3) \cos 2x - \frac{1}{2}(2^2 a_2 + 4^2 a_4) \cos 3x \\ &\quad - \frac{1}{2}(a_4 + 5^2 a_5) \cos 4x + \dots \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$\begin{aligned} a_0 = -\frac{1}{2}a_1 &\Rightarrow a_1 = -2a_0 \\ a_1 = -2^2 \frac{1}{2}a_2 &\Rightarrow a_2 = -\frac{2}{2^2}a_1 \\ a_2 = -\frac{1}{2}(a_1 + 3^2 a_3) &\Rightarrow a_3 = -\frac{1}{3^2}(2a_2 + a_1) \\ a_3 = -\frac{1}{2}(2^2 a_2 + 4^2 a_4) &\Rightarrow a_4 = -\frac{1}{4^2}(2a_3 + 2^2 a_2) \\ a_4 = -\frac{1}{2}(3^2 a_3 + 5^2 a_5) &\Rightarrow a_5 = -\frac{1}{5^2}(2a_4 + 3^2 a_3) \end{aligned}$$

oder allgemein

$$a_k = -\frac{1}{2}((k-1)^2 a_{k-1} + (k+1)^2 a_{k+1}) \Rightarrow a_{k+1} = -\frac{1}{(k+1)^2}(2a_k + (k-1)^2 a_{k-1}).$$

Offenbar sind die Koeffizienten a_k mit $k > 0$ proportional zu a_0 , die Lösungsfunktion ist daher ein Vielfaches der Funktion, welche man erhält, wenn man $a_0 = 1$ setzt.

Etwas formaler können wir diese Rekursionsformel auch aus der Summendarstellung des Ansatzes herleiten:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos jx \\ y''(x) \cdot \cos x &= -\sum_{k=0}^{\infty} a_k k^2 \cos kx \cos x \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k k^2 (\cos(k+1)x + \cos(k-1)x) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)^2 a_{j-1} \cos jx - \frac{1}{2} \sum_{j=-1}^{\infty} (j+1)^2 a_{j+1} \cos jx$$

Durch Koeffizientenvergleich finden wir

$$\begin{aligned} j = 0 : \quad a_0 &= -\frac{1}{2} a_1 & a_1 &= -2a_0 = -2 \\ j = 1 : \quad a_1 &= -\frac{1}{2} 2^2 a_2 & a_2 &= -\frac{1}{2} a_1 = 1 \\ j > 1 : \quad a_j &= -\frac{1}{2} ((j+1)^2 a_{j+1} + (j-1)^2 a_{j-1}). \end{aligned}$$

Für $j > 1$ lesen wir ab

$$a_{j+1} = -\frac{1}{(j+1)^2} (2a_j + (j-1)^2 a_{j-1}).$$

Damit ist der Koeffizient a_3 zum Beispiel:

$$a_3 = -\frac{1}{3^2} (2a_2 + 2^2 a_1) = -\frac{1}{9} (2 \cdot (2 \cdot 1 - 1^2 \cdot 2)) = 0.$$

Für die Koeffizienten a_k mit grösseren k verwenden wir die Rekursionsformel

$$a_k = -\frac{1}{k^2} (2a_{k-1} + (k-2)^2 a_{k-2})$$

und erhalten die Koeffizienten in Tabelle 2.1. Im Speziellen ist

$$\begin{aligned} a_4 &= -\frac{1}{16} (2 \cdot a_3 + 2^2 a_2) = -\frac{1}{4} \\ a_5 &= -\frac{1}{25} (2 \cdot a_4 + 3^2 a_3) = \frac{1}{25} \left(-2 \cdot \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{50} \end{aligned}$$

In Tabelle 2.1 kann man erkennen, dass die Koeffizienten nur sehr langsam abnehmen. Da die Lösungsfunktion an den Stellen $(2k+1)\pi/2$ mit $k \in \mathbb{Z}$ nicht differenzierbar ist, ist dieses Verhalten sogar zu erwarten. Genauer, man erwartet, dass die Koeffizienten a_k wie $1/k$ abnehmen. Und wie kann man sich überhaupt versichern, dass die Fourierreihe an anderen Stellen konvergiert?

Man kann aber auch ablesen, dass die Elemente a_{k+1} und a_{k-1} entgegengesetztes Vorzeichen haben und betragsmässig sehr nahe beeinander sind. Um das besser zu verstehen berechnen wir die Summe $a_{k+1} - a_{k-1}$ und erhalten

$$\begin{aligned} a_{k+1} + a_{k-1} &= -\frac{1}{(k+1)^2} (2a_k + (k-1)^2 a_{k-1}) + a_{k-1} \\ &= -\frac{1}{(k+1)^2} (2a_k + (k-1)^2 a_{k-1}) - (k+1)^2 a_{k-1} \\ &= -\frac{1}{(k+1)^2} (2a_k + ((k-1)^2 - (k+1)^2) a_{k-1}) \\ &= -\frac{1}{(k+1)^2} (2a_k + 4ka_{k-1}). \end{aligned}$$

k	a_k
0	1
1	-2
2	1
3	0
4	-0.25
5	0.02
6	0.11
7	-0.014693877551020
8	-0.061415816326531
9	0.010405328798186
10	0.039098015873016
11	-0.007611798879331
12	-0.027045680482937
13	0.005769935061331
14	0.019811418976634
15	-0.004509963836970
16	-0.015132883561509
17	0.003615943357928
18	0.011934525632810
19	-0.002960877234645

Tabelle 2.1: Tabelle der Koeffizienten für die Lösungsfunktion (2.48) der Differentialgleichung (2.47).

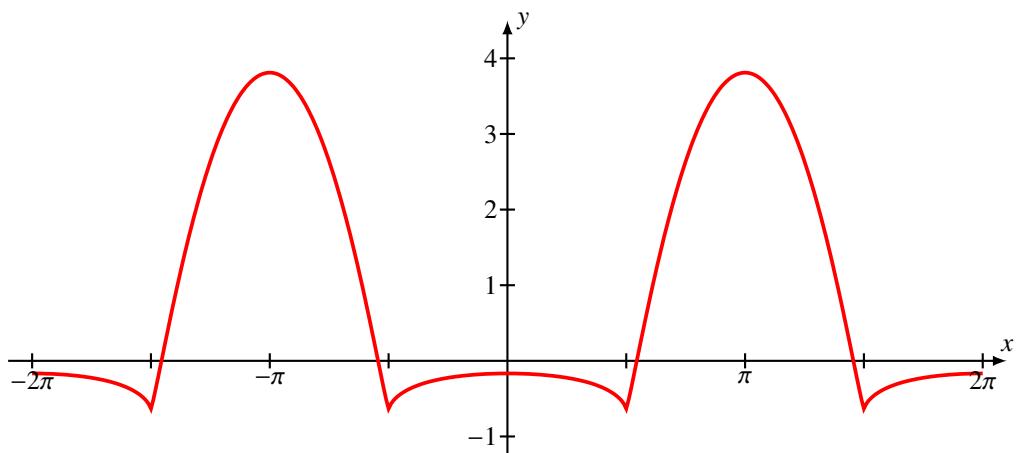


Abbildung 2.13: Graphische Darstellung der Lösungsfunktion der Differentialgleichung (2.47).

Daraus liest man ab, dass tatsächlich die Summe $a_{k+1} + a_{k-1}$ wie $1/k^2$ abnimmt. Man kann daraus auch eine Abschätzung für $y(0)$ bekommen, nämlich

$$\begin{aligned} y(0) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_k \\ &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \dots \\ &= a_0 + a_1 + (a_2 + a_4) + (a_3 + a_5) + (a_6 + a_8) + (a_7 + a_9) + \dots \\ |y(0)| &= \left| a_0 + a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k} + a_{2k+2}) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k+1} + a_{2k+3}) \right| \\ &\leq |a_0| + |a_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k} + a_{2k+2}| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k+1} + a_{2k+3}| \end{aligned}$$

Da in beiden Reihen die Terme wie $1/k^2$ gegen 0 gehen, konvergieren sie.

○

Kapitel 3

Differentiagleichungen

Modelle für das Klima oder für einzelne Teilespekte des Klimas werden häufig in der Form einer Differentialgleichung formuliert. Die kurzfristigen Schwankungen einer Lösung entsprechen eher den Wettererscheinungen, die für unsere Betrachtungen nicht interessant sind. Für Klima-Betrachtungen suchen wir Lösungen der Differentialgleichungen, die über lange Zeit konstant sind, sogenannte Gleichgewichtslösungen. Diese werden natürlich von Parametern wie der CO₂-Konzentration oder dem Salzgehalt der Meere abhängig sein. Die interessante Frage wird daher sein, wie sich die Gleichgewichtslösungen verändern, wenn die Parameter sich ändern.

In diesem Kapitel sollen die wichtigsten Eigenschaften von Vektor-Differentialgleichungen und der einfachsten Bifurkationen zusammengestellt werden. Das Thema Differentialgleichungen wurde 2016 im Mathematischen Seminar behandelt. Das Seminar-Buch [8] enthält eine vertiefte Diskussion der Theorie.

3.1 Grundlagen

Eine Differentialgleichung ist eine Beziehung zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen. Wir betrachten Funktionen der Zeit t mit Werten in \mathbb{R}^n und schreiben sie $x(t)$. Sei f eine Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : (x, t) \mapsto f(x, t).$$

Definition 3.1. Eine Funktion $x(t)$ heisst Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \tag{3.1}$$

zur Anfangsbedingung x_0 , wenn gilt $x(0) = x_0$ und

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t)$$

für alle $t > 0$.

Unter einigermassen milden Bedingungen an die Funktion $f(x, t)$ ist sichergestellt, dass eine Differentialgleichung immer eine Lösung hat.

3.1.1 Autonome Differentialgleichungen

Wenn die Funktion f von der Zeit abhängt, wird es im allgemeinen keine konstanten Lösungen geben. Für die Klimadiskussion sind wir allerdings daran interessiert, ob ein Modell Lösungen hat, die sich mit der Zeit nicht ändern. Solche Lösungen zeigen uns, dass wir alle kurzfristigen Schwankungen, die wir dem Wetter zuordnen würden, ausgemittelt haben.

Definition 3.2. Eine Differentialgleichung der Form (3.1) heisst autonom, wenn die Funktion f nicht von der Zeit abhängt. Eine autonome Differentialgleichung kann als

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

geschrieben werden.

Die Forderung, dass die Differentialgleichung autonom sein soll, ist allerdings auf triviale Art zu erfüllen, indem man zu einer neuen unabhängigen Variablen übergeht und die bisherige Zeitvariable als letzte Komponente der Funktion $x(t)$ hinzufügt. Wir schreiben die Lösungsfunktionen als

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{und erweitern dies zu} \quad \bar{x}(s) = \begin{pmatrix} x_1(s) \\ \vdots \\ x_n(s) \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung, also die Funktion $f(x, t)$ schreiben wir

$$f(x, t) = f(x_1, \dots, x_n, t) \quad \text{mit Anfangsbedingung} \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$$

und erweitern dies nun zu einer Funktion \bar{f} für eine autonome Differentialgleichung für \bar{x}

$$\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}) \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit Anfangsbedingung} \quad \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Differentialgleichung für \bar{x} ist

$$\frac{d\bar{x}}{ds} = \bar{f}(\bar{x}), \quad (3.2)$$

dies ist offensichtlich eine autonome Differentialgleichung. Die letzten Komponenten von (3.2) ist die Differentialgleichung für \bar{x}_{n+1}

$$\frac{d\bar{x}_{n+1}}{ds} = 1$$

mit der Anfangsbedingung $x_{n+1}(0) = 0$, sie hat die Lösung $\bar{x}_{n+1}(s) = s$. Die Koordinate \bar{x}_{n+1} ist also nichts anderes als die ursprüngliche Zeitkoordinate. Aus der Lösung $\bar{x}(s)$ der autonomen Differentialgleichung kann die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung gewonnen werden, indem man einfach die letzte Koordinate weglässt:

$$x(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \vdots \\ \bar{x}_n(t) \end{pmatrix}.$$

Der Übergang zur autonomen Differentialgleichung erhöht die Dimension des Vektors. Dadurch wird die Diskussion kritischer Punkte und Gleichgewichtslösungen leider nicht vereinfacht. Statt eine Differentialgleichung nachträglich autonom zu machen ist daher im allgemeinen anzustreben, dass sie von vornherein autonom ist. In den nachfolgenden Beispielen gehen wir daher immer von autonomen Differentialgleichungssystemen aus.

3.2 Gleichgewichtslösungen und kritische Punkte

Wir gehen in diesem Abschnitt von einer autonomen Differentialgleichung der Form

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (3.3)$$

aus mit einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die Funktion f wird im Allgemeinen von weiteren Parametern abhängen wie zum Beispiel dem CO₂-Gehalt der Atmosphäre oder der Salinität der Meere. Sofern nötig machen wir diese mit der Schreibweise $f(x, p)$ mit $p \in \mathbb{R}^m$ explizit sichtbar.

Definition 3.3. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heisst Gleichgewichtslösung wenn die konstante Funktion $x(t) = x_0$ eine Lösung der Differentialgleichung 3.3 ist.

Eine Gleichgewichtslösung ist daher eine Nullstelle der Funktion f , $f(x_0) = 0$.

Definition 3.4. Eine Nullstelle von f heisst kritischer Punkt der Differentialgleichung 3.3.

Da f ausserdem von den Parametern $p \in \mathbb{R}^m$ abhängt, wird die Menge der Nullstellen von f von p abhängen. Wir schreiben

$$N(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x, p)\}$$

für die Menge der Nullstellen. Im Allgemeinen werden sich die Mengen $N(p)$ für verschiedene p unterscheiden.

Sei also $p_0 \in \mathbb{R}^m$ ein Parametervektor und x_0 eine Gleichgewichtslösung von f , also $f(x_0, p_0) = 0$. Unter zusätzlichen Annahmen über die Funktion f kann man zeigen, dass x_0 in einer Umgebung von p_0 zu einer Funktion $x_0(p)$ erweitert werden kann, derart dass $x_0(p)$ jeweils ein kritischer Punkt von f ist für die Parameterwerte p , also $f(x_0(p), p) = 0$. Diese Theorie ist für allerdings nicht besonders nützlich, denn sie sagt uns nur, dass sich kritische stetig in Abhängigkeit vom Parametervektor bewegen. Besonders interessant für die Diskussion des Klimawandels sind Fälle, wo Gleichgewichtslösungen sich sprunghaft ändern.

3.2.1 Stabilität

Wir betrachten eine Gleichgewichtslösung $x(t) = x_0$ der Differentialgleichung (3.3).

Definition 3.5. Die Gleichgewichtslösung $x(t) = x_0$ heisst stabil, wenn eine Lösung zu einer Anfangsbedingung \bar{x}_0 , die $|x_0 - \bar{x}_0| < \varepsilon$ erfüllt, für alle Zeiten nahe bei x_0 bleibt, also $|\bar{x}(t) - x_0| < \varepsilon$.

Beispiel. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = ax.$$

Sie hat die Gleichgewichtslösung $x(t) = 0$. Eine Lösung, die die Anfangsbedingung $x(0) = \varepsilon$ erfüllt, ist $x(t) = \varepsilon e^{at}$, denn

$$\frac{d}{dt} \varepsilon e^{at} = a \varepsilon e^{at}.$$

Wenn $a > 0$, dann wächst die Lösung exponentiell an, die Gleichgewichtslösung ist als nicht stabil. Für $a < 0$ dagegen nimmt $x(t) = \varepsilon e^{at}$ exponentiell schnell ab, die Gleichgewichtslösung ist stabil. \circlearrowright

Für eindimensionale Systeme ist Stabilität besonders einfach zu diskutieren, wir tun dies im Rahmen der Diskussion der wichtigsten Bifurkationstypen in Abschnitt 3.3.

3.2.2 Zeitumkehr

Wir gehen wieder von der autonomen Differentialgleichung (3.3) mit der Lösung $x(t)$ mit Anfangsbedingung x_0 aus. Ersetzen wir t durch $-s$, erhalten wir die autonome Differentialgleichung

$$-\frac{dx}{ds} = f(x), \quad (3.4)$$

mit der gleichen Anfangsbedingung. Die Funktion $s \mapsto x(-s)$ ist eine Lösung.

Die Zeitumkehr verändert den Stabilitätscharakter einer Gleichgewichtslösung. Ist x_0 eine stabile Gleichgewichtslösung, dann nehmen Lösungen mit Anfangsbedingungen in der Nähe von x_0 nicht weiter zu, sondern höchstens ab. Es ist also möglich, dass die Lösung nach Zeitumkehr instabil wird.

Bei zweidimensionalen Systemen ist es aber durchaus möglich, eine Gleichgewichtslösung in beiden Zeitrichtungen instabil sind. Als Beispiel betrachten wir das zweidimensionale Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Sie hat die beiden Lösungen

$$x_1(t) = \varepsilon \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_2(t) = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

zu den Anfangsbedingungen

$$x_1(0) = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Die Lösung $x_1(t)$ wächst für $t > 0$ exponentiell an, die Gleichgewichtslösung $x(t) = 0$ kann also für $t > 0$ nicht stabil sein. Für $t \rightarrow -\infty$ nimmt $x_1(t)$ exponentiell ab, aber trotzdem ist die Nulllösung nicht stabil, dann die Lösung $x_2(t)$ nimmt für $t \rightarrow -\infty$ exponentiell zu.

3.3 Bifurkationen eindimensionaler Systeme

In diesem Abschnitt betrachten wir eindimensionale Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda), \quad (3.6)$$

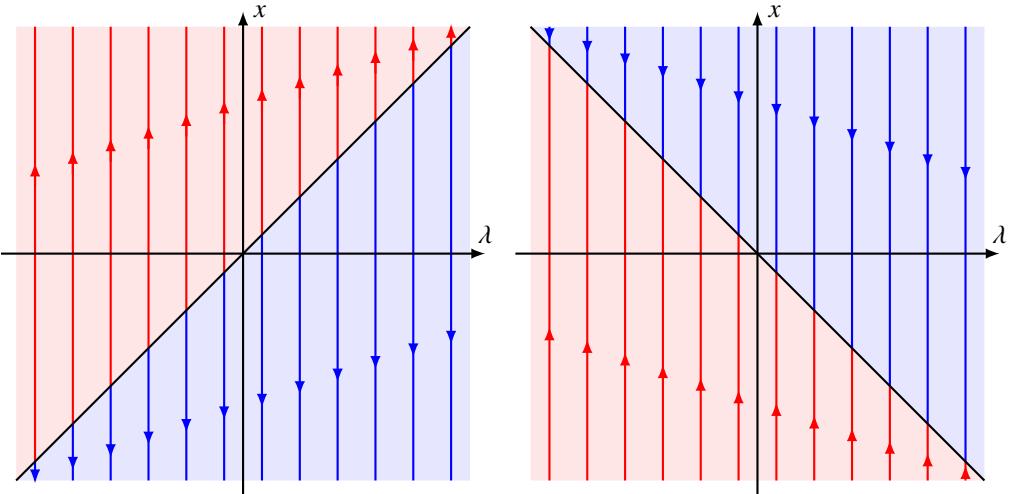


Abbildung 3.1: Phasendiagramm der Differentialgleichung $\dot{x} = x - \lambda$ links und $\dot{x} = -x - \lambda$ rechts. Die Gleichgewichtslösung $x = \lambda$ ist im linken Fall instabil, während $x = -\lambda$ im rechten Fall eine stabile Gleichgewichtslösung ist.

die ausserdem von einem Parameter λ abhängt. Wir fragen nach den Gleichgewichtslösungen in Abhängigkeit vom Parameter λ .

Die nachfolgenden prototypischen Bifurkationen können in vielen weiteren Differentialgleichungen beobachtet werden. Für alle Werte des Parameters ist 0 ein kritischer Wert, es gilt also $f(0, \lambda) = 0$. Wir können die f in eine Taylor-Reihe

$$f(x, \lambda) = \sum_{k,l} \frac{1}{(k+l)!} \frac{\partial^{k+l} f(0,0)}{\partial t^k \partial \lambda^l} x^k \lambda^l = a_{10}x + a_{01}\lambda + a_{20}x^2 + a_{11}x\lambda + a_{02}\lambda^2 + \dots \quad (3.7)$$

entwickeln. Die verschiedenen Bifurkationen lassen sich charakterisieren durch die führenden Terme in dieser Entwicklung. Insbesondere können wir verlangen, dass der führende Term für λ immer linear in λ sein soll. Ist dies nämlich nicht der Fall, ist also der führende Term in λ von der Form λ^α , ersetzen wir den Parameter einfach durch $\tau = \lambda^\alpha$.

Beispiel. Der einfachste Fall ist bis auf eine Skalierung

$$f(x, \lambda) = x - \lambda. \quad (3.8)$$

f hat nur einen einzigen kritischen Punkt, nämlich $x_0 = -\lambda$. Das Phasendiagramm dafür ist in Abbildung 3.1 Man erkennt, dass Lösungen, die bei x -Werten $x > \lambda$ beginnen, anwachsen und sich von der Gleichgewichtslösung entfernen. Umgekehrt nehmen Lösungen ab, die bei x -Werten $x < \lambda$ beginnen, und entfernen sich damit ebenfalls von der Gleichgewichtslösung. Die Differentialgleichung mit rechter Seite 3.8 hat kein stabile Lösungen.

Die analoge Analyse für die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -x - \lambda$$

ist in Abbildung 3.8 dargestellt. Die Gleichgewichtslösung $x_0 = -\lambda$ ist stabil. ○

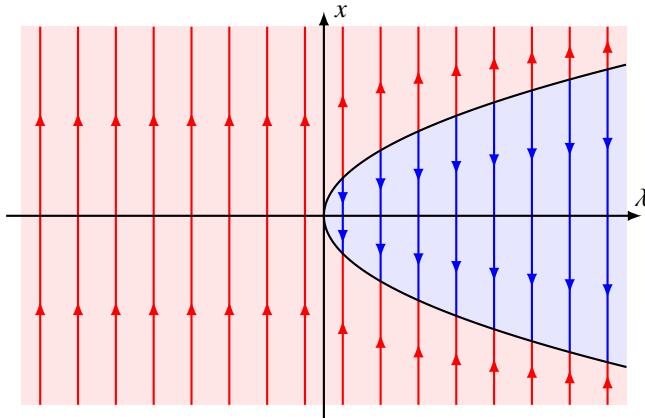


Abbildung 3.2: Phasendiagramm der Sattel-Knoten-Bifurkation zur Differentialgleichung 3.9. Für $\lambda > 0$ gibt es zwei Gleichgewichtslösungen $\pm \sqrt{\lambda}$, eine ist stabil, die andere instabil.

Dieses Beispiel zeigt, dass interessante Bifurkationsereignisse erst dann auftreten, wenn der führende Term in x der Taylor-Entwicklung von f von höherer als linearer Ordnung ist.

3.3.1 Sattel-Knoten-Bifurkation

Die *Sattel-Knoten-Bifurkation* tritt auf in der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - \lambda. \quad (3.9)$$

Für $\lambda > 0$ hat die Gleichung 3.9 zwei Gleichgewichtslösungen $\pm \sqrt{\lambda}$. In Abbildung 3.2 ist das Phasendiagramm dargestellt. Daraus geht hervor, dass die Gleichgewichtslösung $q\sqrt{\lambda}$ instabil ist, während $-q\sqrt{\lambda}$ stabil ist.

3.3.2 Heugabel-Bifurkation

Die *Heugabel-Bifurkation* tritt bei der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = x^3 - \lambda x \quad (3.10)$$

auf, bei der der führende Term dritter Ordnung in x ist. Die Differentialgleichung kann auch in der Form

$$\frac{dx}{dt} = x(x^2 - \lambda)$$

geschrieben werden. Sie hat 0 als Gleichgewichtslösung für alle λ . Für $\lambda > 0$ hat sie zusätzlich die Gleichgewichtslösungen $\pm \sqrt{\lambda}$.

Das Phasendiagramm 3.10 zeigt, dass die einzige Gleichgewichtslösung bei $x_0 = 0$ instabil ist. Beim Übergang zu $\lambda > 0$ wird die Gleichgewichtslösung $x_0 = 0$ stabil. Die beiden neuen Gleichgewichtslösungen $\pm \sqrt{\lambda}$ sind beide instabil.

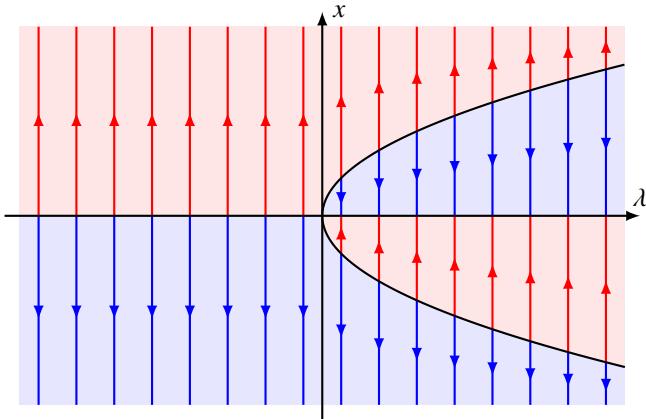


Abbildung 3.3: Phasendiagramm der Heugabel-Bifurkation.

Die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 + \lambda x$$

hat die gleichen Gleichgewichtslösungen, jedoch ist 0 für $\lambda < 0$ eine stabile Lösung, die beim Übergang zu $\lambda > 0$ instabil wird. Die Gleichgewichtslösungen $\pm \sqrt{\lambda}$ für $\lambda > 0$ sind stabil.

3.3.3 Transkritische Bifurkation

Die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + \lambda x = x(x + \lambda) \quad (3.11)$$

hat Gleichgewichtslösung 0 und $-\lambda$. Das Phasendiagramm in Abbildung 3.4 zeigt, dass für $\lambda < 0$ die Gleichgewichtslösung 0 stabil ist, die Gleichgewichtslösung $-\lambda$ hingegen instabil. Beim Übergang zu $\lambda > 0$ wird die Gleichgewichtslösung 0 instabil und die Gleichgewichtslösung $-\lambda$ wird instabil.

3.3.4 Ein Beispiel zur globalen Mitteltemperatur

Das Budyko-Modell versucht, die globale Mittelemperatur in Abhängigkeit von der Einstrahlung und der Albedo zu modellieren. Mehr zu diesen Ansätzen wird in Kapitel 5 dargestellt.

Als Beispiel für die Diskussion eines solchen Modells betrachten wir die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}(x^3 - 9x) - \lambda. \quad (3.12)$$

Die Gleichgewichtslösungen sind die Nullstellen der kubischen Gleichung

$$f(x, \lambda) = x^3 - 9x - 3\lambda = 0.$$

Diese sind für beliebiges λ nicht so leicht zu finden. Für $\lambda = 0$ sind die kritischen Punkte 0 und ± 3 . Die Funktion $f(x)$ hat lokale Minima bei den $\pm \sqrt{3}$ mit Funktionswerten $\pm 2\sqrt{3}$. Daher gibt es im Intervall $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ drei Gleichgewichtslösungen, außerhalb jedoch jeweils nur eine.

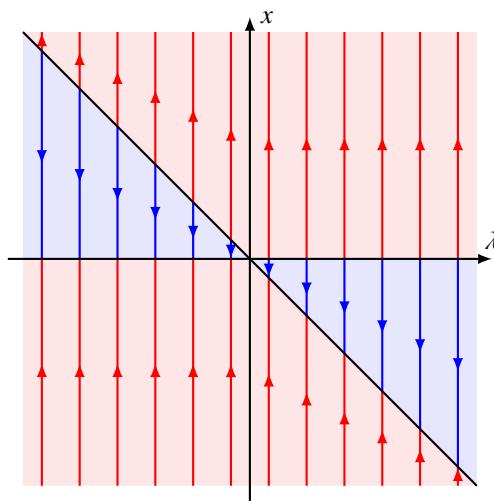


Abbildung 3.4: Phasendiagramm der transkritischen Bifurkation in der Differentialgleichung (3.11).

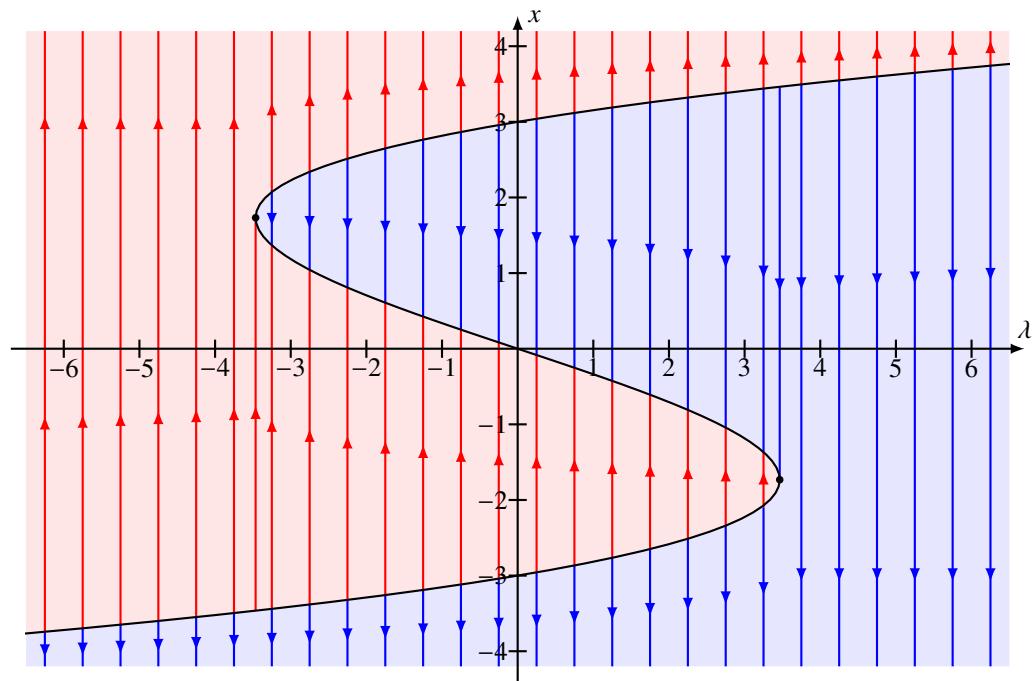


Abbildung 3.5: Phasendiagramm der Differentialgleichung (3.12).

Das zugehörige Phasendiagramm ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Die Gleichgewichtslösungen oben und unten auf der S-Kurve sind instabil, nur der Ast zwischen den beiden lokalen Extrema von $f(x)$ besteht aus stabilen Gleichgewichtslösungen.

Wächst der Parameter λ über den kritischen Wert $2\sqrt{3}$ hinaus, gibt es keinen stabilen Gleichgewichtszustand mehr, das System divergiert nach $-\infty$. Analog strebt das System gegen $+\infty$ wenn der Parameter den Werte $-2\sqrt{3}$ unterschreitet.

Die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -f(x, \lambda) \quad (3.13)$$

hat die gleichen Gleichgewichtslösungen wie (3.12), jedoch sind die stabilen Gleichgewichtslösungen von (3.12) instabile Gleichgewichtslösungen von (3.13). Beim Anstieg des Parameters λ über den Wert $2\sqrt{3}$ springt das System, falls es sich im unteren Gleichgewichtszustand befand, in den oberen. Sinkt der Wert von λ wieder unter $2\sqrt{3}$ wird, bleibt es jedoch auf dem oberen Gleichgewichtspunkt.

3.4 Linearisierung und Stabilität

Die Technik der Phasendiagramme hat es sehr einfach gemacht, auf graphische Art zwischen stabilen und instabilen Gleichgewichten zu unterscheiden. Tatsächlich kann sie weiterentwickelt werden, in [8] wird gezeigt, wie man Gleichgewichtslösungen auch zweidimensionaler Systeme ganz ähnlich graphisch analysieren kann. In diesem Abschnitt soll aber nur gezeigt werden, wie auch mit relativ bescheidenem Aufwand auch auf algebraischem oder analytischem Weg Aussagen über die Stabilität von Gleichgewichtslösungen gefunden werden können.

3.4.1 Lineare Differentialgleichungen

Eine lineare Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (3.14)$$

kann mit der Matrix-Exponentialfunktion

$$x(t) = e^{At}x(0) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right) x(0) = \left(1 + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots \right) \cdot x(0) \quad (3.15)$$

gelöst werden.

Für eine diagonalisierbare Matrix A ist die Berechnung der Potenzreihe (3.15) sehr viel einfacher, da gilt

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Insbesondere lässt sich damit sehr einfach entscheiden, ob wie Lösungen für zunehmendes t anwachsen oder gegen 0 konvergieren. Ist $\lambda_j = a_j + ib_j$ die Aufteilung in Real- und Imaginärteil, dann ist

$$e^{\lambda_j t} = e^{a_j t}(\cos b_j t + i \sin b_j t) \quad \Rightarrow \quad |e^{\lambda_j t}| = e^{a_j t}.$$

Ist $a_j < 0$, dann konvergiert $e^{\lambda_j t}$ gegen 0. Da die 0-Lösung eine Gleichgewichtslösung von (3.14) ist kann gefolgert werden, dass diese Lösung genau dann stabil ist, wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil ist.

Natürlich lässt sich nicht jede Matrix diagonalisieren, aber man kann mindestens eine Basis finden, in der A Jordan-Normalform hat, also aus Blöcken der Form

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \lambda E + N.$$

Die Matrizen λE und N vertauschen, so dass die Produkteigenschaft der Exponentialfunktion verwendet werden kann, es gilt

$$e^{A_\lambda t} = e^{\lambda t E} \cdot e^{Nt} = e^{\lambda t} e^{Nt}. \quad (3.17)$$

Bezeichnet man mit N_i die Matrix, die in der i -ten Nebendiagonale Einsen enthält und sonst nur Nullen, dann ist $N = N_1$. Die Potenzen von N können dann sofort in der Form $N^k = N_k$ ausgedrückt werden, und damit kann man auch

$$e^{Nt} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & 1 & t & \\ & & & 0 & 1 & \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

sofort berechnen. Der Faktor e^{Nt} von (3.17) hängt nicht von λ ab und wächst höchstens mit t^{n-1} an. Dies bedeutet, dass das Stabilitätskriterium an die Eigenwerte von A weiterhin zutrifft: Die Gleichgewichtslösung $x = 0$ ist genau dann stabil, wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben.

3.4.2 Linearisierung

Ist x_0 ein kritischer Punkt der autonomen Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

dann können wir mit Hilfe einer Koordinatentransformation

$$x = x_0 + \tilde{x} \quad \text{und} \quad \tilde{f}(\tilde{x}) = f(x_0 + \tilde{x})$$

die Differentialgleichung in die Form

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{f}(\tilde{x})$$

bringen, welche 0 als Gleichgewichtslösung hat. Im Folgenden schreiben wir wieder f und x für \tilde{f} und \tilde{x} .

Da $f(0) = 0$ gilt, kann $f(x)$ in eine Potenzreihe der Form

$$f(x) = Ax + O(|x|^2)$$

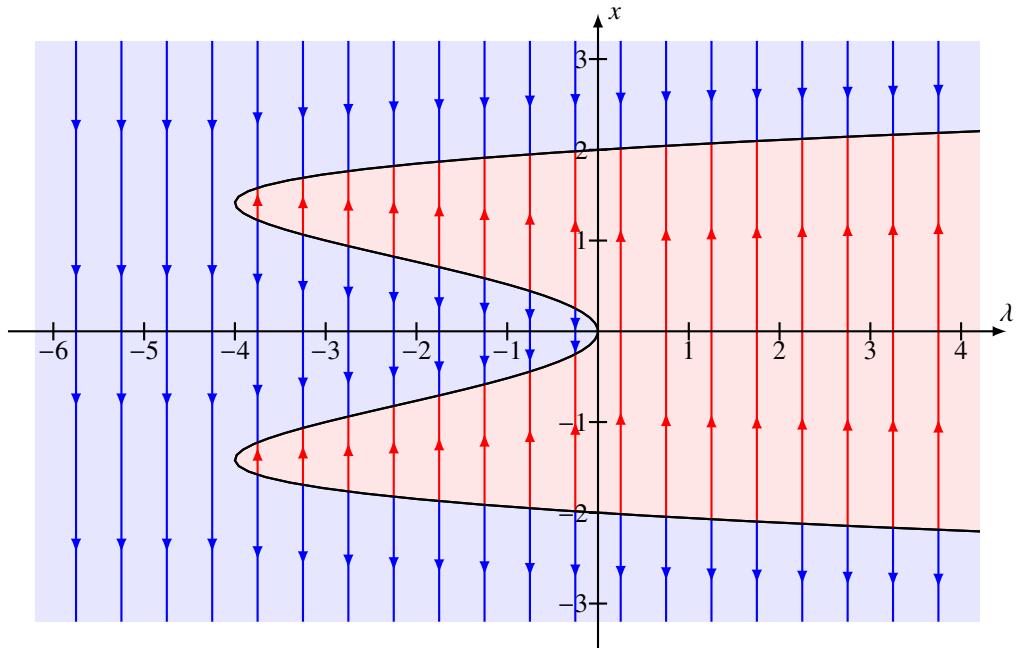


Abbildung 3.6: Phasendiagramm der Differentialgleichung (3.19).

entwickelt werden. Darin ist A die Ableitungsmatrix

$$A = (a_{ij}) = Df \quad \text{mit} \quad (Df)_{ij} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = a_{ij}$$

der Funktion f . Dies ist die linearisierte Version der Differentialgleichung (3.14).

In unmittelbarer Nähe des Gleichgewichtspunktes 0 sind analog wie bei der linearen Differentialgleichung (3.14) wieder die Eigenwerte der Matrix $A = Df$ darüber entscheidend, ob der Gleichgewichtspunkt stabil ist. x_0 ist genau dann ein stabiler Gleichgewichtspunkt, wenn alle Eigenwerte der Ableitungsmatrix Df negativ sind.

Übungen

1. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = x^4 - 4x^2 - \lambda \tag{3.19}$$

- Finden Sie die Gleichgewichtslösungen und untersuchen Sie die Bifurkationen, die bei Veränderungen des Parameters λ auftreten können.
- Welche Gleichgewichtslösung wird das System einnehmen, wenn der Parameter λ erst von -1 auf 1 anwächst und dann wieder auf -1 absinkt.

Lösung. a) Die kritischen Punkte der Differentialgleichung (3.19) sind Nullstellen der Gleichung

$$x^4 - 4x^2 - \lambda = 0 \quad (3.20)$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in x^2 , die mit der Lösungsformel für die quadratische Gleichung gelöst werden kann:

$$x^2 = 2 \pm \sqrt{4 + \lambda}.$$

Diese Gleichung hat reelle Lösungen für $\lambda \geq -4$. Für $\lambda \leq 0$ ist die Quadratwurzel nicht grösser als 2, so dass die beiden Nullstellen positiv sind, es also vier verschiedene Lösungen

$$x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{4 + \lambda}} \quad (3.21)$$

hat. Für $\lambda > 0$ hat die quadratische Gleichung eine negative Lösung für x^2 , die also nicht zu einer reellen Lösung der Gleichung (3.20) führen kann. Nur aus der positive Lösung $2 + \sqrt{4 + \lambda}$ kann man eine Gleichgewichtslösung, nämlich

$$x = \pm \sqrt{2 + \sqrt{4 + \lambda}}$$

ableiten. Für $\lambda < -4$ gibt es gar keine Gleichgewichtslösung.

Das Phasendiagramm in Abbildung 3.6 zeigt, dass für $\lambda > 0$ die obere Gleichgewichtslösung stabil ist, untere dagegen instabil. Für $-4 \leq \lambda \leq 0$ sind die Gleichgewichtslösungen

$$\sqrt{2 + \sqrt{4 + \lambda}} \quad \text{und} \quad -\sqrt{2 + \sqrt{4 + \lambda}}$$

stabil und die Gleichgewichtslösungen

$$-\sqrt{2 + \sqrt{4 + \lambda}} \quad \text{und} \quad \sqrt{2 - \sqrt{4 + \lambda}}$$

instabil.

Bei $\lambda = -4$ finden gleichzeitig zwei Sattel-Knoten-Bifurkationen statt, bei $\lambda = 0$ findet ein einfache Sattel-Knoten-Bifurkation statt, jedoch in umgekehrter Richtung wie im Beispiel im Text.

- b) Beim Anwachsen des Parameters über den Punkt $\lambda = 0$ springt die Gleichgewichtslösung auf die stabile Lösung

$$x(\lambda) = \sqrt{2 + \sqrt{4 + \lambda}}.$$

Bei der anschliessenden Verringerung von λ bleibt die Gleichgewichtslösung auf dem Ast $x(\lambda)$ der Kurve, da diese alle stabil sind. Unabhängig vom Ausgangszustand befindet sich das System am Ende des beschriebenen Szenarios also immer in der Nähe der Gleichgewichtslösung

$$x(-1) = \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

○

Kapitel 4

Thermohaline Zirkulation

Der Salzgehalt des Meerwassers ist nicht konstant, beeinflusst aber wie die Temperatur die Dichte. Dies führt zu einer grossräumigen Zirkulationsströmung in den Weltmeeren, genannt die thermohaline Zirkulation, und damit zu einem weiteren bedeutenden Energietransportmechanismus. Abbildung 4.1 zeigt den Umfang der Zirkulation. Auf einer Zeitskala von Jahrzehnten bis Jahrhunderten wird Meerwasser und damit auch Wärmeenergie über Distanzen umgewälzt, welche mehrfach die Erde umspannen. Die Organismen, die in den oberen Wasserschichten absterben, sinken langsam auf den Meeresgrund. Ohne eine umfassende Umwälzung der Weltmeere würden die oberen Wasserschichten mit der Zeit an Nährstoffen verarmen. Die thermohaline Zirkulation stellt also auch die Versorgung der Weltmeere mit Nährstoffen sicher.

Der Golfstrom ist ein kleiner Ausschnitt des globalen Förderbandes. Die gut bekannte Bedeutung des Golfstroms für das europäische Klima deutet an, wie wichtig die thermohaline Zirkulation für das globale Klima ist. Es ist daher unerlässlich zu verstehen, was die Zirkulation antreibt und wie sich der Klimawandel darauf auswirken könnte.

In diesem Kapitel soll die thermohaline Zirkulation modelliert werden. Besonderes Augenmerk liegt dabei auf der Tatsache, dass dieses System kippen kann. Bei einer genügend grossen Änderung der Klimaparameter kann die Zirkulation sich auf irreversible Art ändern. Ein solches Ereignis hätte katastrophale Auswirkungen für das Klima.

4.1 Salinität und Dichte

Der Salzgehalt des Meerwassers ist nicht konstant. Er steigt an, wenn Wasser verdampft oder sich Eis bildet. Er sinkt, wenn das Salz durch Niederschläge verdünnt wird. Mit der Veränderung des Salzgehaltes geht auch eine Änderung der Dichte einher.

Den genauen Zusammenhang zwischen Salinität, Temperatur und Dichte kann nicht aus Naturgesetzen abgeleitet werden. Verschiedene Untersuchungen haben empirische Formeln für die Dichte in Abhängigkeit von Temperatur und Salinität zu Tage gefördert. Zum Beispiel in der Form

$$\varrho = \varrho_0(T) + A(T) \cdot S + B(T) \cdot S^{\frac{3}{2}} + C \cdot S^2,$$

wobei die Koeffizienten $A(T)$ und $B(T)$ Polynome der Temperatur T in °C sind:

$$A(T) = 0.824493 - 0.0040899 T + 0.000076438 T^2 - 0.00000082467 T^3 + 0.0000000053875 T^4$$

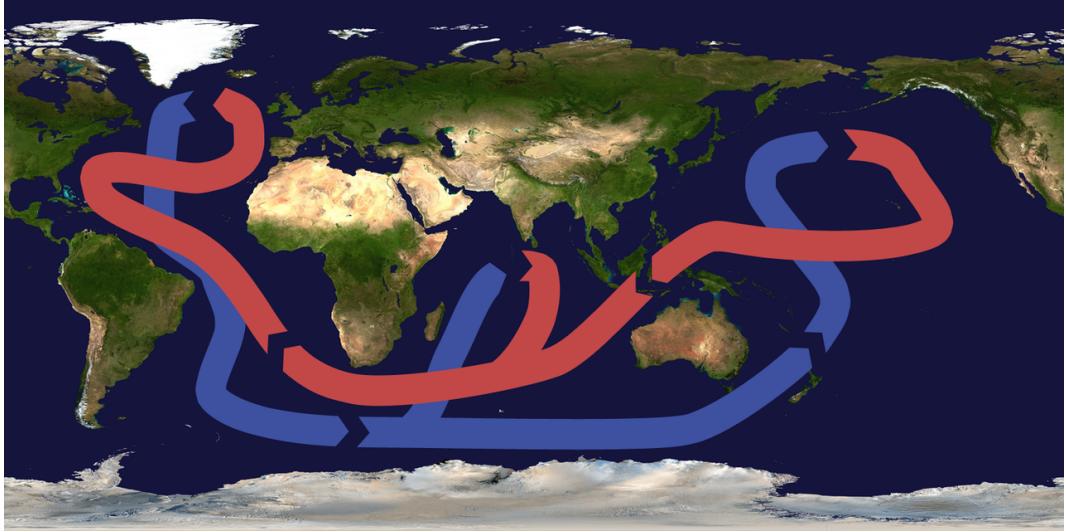


Abbildung 4.1: Das globale Förderband der thermohalinen Zirkulation.

$$B(T) = -0.00572466 + 0.00010227 T - 0.0000016546 T^2$$

$$C = 0.00048314$$

$$\varrho_0(T) = 0.824493 - 0.0040899 T + 0.000076438 T^2 - 0.00000082467 T^3 + 0.0000000053875 T^4,$$

die man etwa in [7] findet. Diese Formeln geben die Dichte über einen weiten Parameterbereich mit einem relativen Fehler < 0.001 wieder. Für unsere qualitativen Überlegungen ist diese Genauigkeit nicht nötig.

Im Folgenden betrachten wir die Dichte-Anomalie $\varrho - \varrho_0$ in Abhängigkeit von der Temperatur-Anomalie $T - T_0$ und der Salinitäts-Anomalie $S - S_0$. Man kann die Dichte-Anomalie immer als Taylor-Reihe

$$\varrho = \varrho_0 + \frac{\partial \varrho}{\partial T}(T - T_0) + \frac{\partial \varrho}{\partial S}(S - S_0) + \text{Terme höherer Ordnung}.$$

Solange $T - T_0$ und $S - S_0$ nicht allzu gross sind, kann man sich auf die linearen Terme beschränken und

$$\varrho = \varrho_0(1 - \alpha(T - T_0) + \beta(S - S_0)) \quad (4.1)$$

schreiben. Darin sind α und β positive Zahlen, die Vorzeichen in (4.1) sind so gewählt, dass die Dichte mit höherer Temperatur abnimmt und mit höherer Salinität zunimmt. Typische Werte sind

$$\alpha = 1.5 \cdot 10^{-4} \frac{1}{K} \quad \text{und} \quad \beta = 8 \cdot 10^{-4} \frac{1}{psu}.$$

Mit diesem Modell für die Dichte könnten wir jetzt versuchen, die Bewegungsgleichungen der Flüssigkeitsdynamik und die Wärmeleitungsgleichung zu lösen. Wegen der komplizierten Form der Weltmeere ist das eine Aufgabe, die ausschliesslich numerisch gelöst werden kann. Außerdem benötigen wir detaillierte Informationen über den Wärmeaustausch mit der Atmosphäre oder dem Meeresboden. Eine derart detaillierte Modellierung scheint daher aussichtslos. Für eine qualitative Aussage über die Zirkulation benötigen wir daher ein dramatisch vereinfachtes Modell.

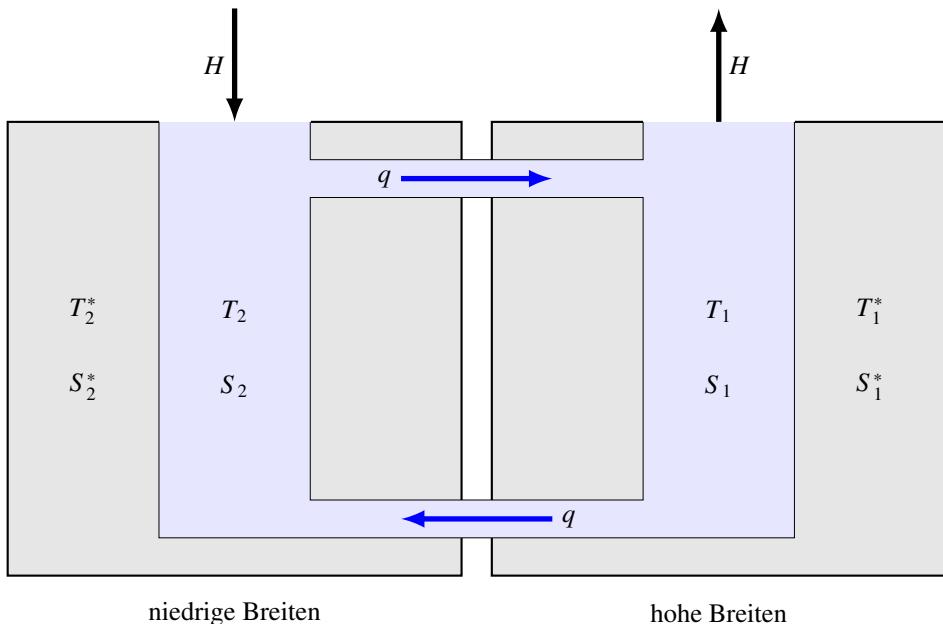


Abbildung 4.2: Einfaches Modell der thermohalinen Zirkulation

4.2 Ein Modell für die thermohaline Zirkulation

Jedes numerische Modelle der Zirkulation basiert auf einer Diskretisation des Gebietes. Der Ozean wird also in kleine Teilgebiete aufgeteilt. Gesucht sind Temperatur und Salinität in jedem Teilgebiet. Dann werden Gleichungen aufgestellt, die den Austausch von Salz und Wärme zwischen den Teilgebieten beschreiben. Die Lösung dieser Gleichungen wird uns das Ausmass der Zirkulation zeigen und erlauben abzuschätzen, wie sich die Zirkulation ändert, wenn sich die äusseren Bedingungen verschieben.

4.2.1 Ein einfaches Box-Modell

Um einen ersten Eindruck von der Dynamik der thermohalinen Zirkulation zu erhalten, verwenden wir ein Modell mit genau zwei Teilgebieten. Wir modellieren den Atlantik nördlich des Äquators als zwei Gebiete. Gebiet 1 ist das Polargebiet mit typischerweise tieferen Temperaturen, Gebiet 2 ist das Gebiet in der Nähe des Äquators. In jedem dieser Gebiet modellieren wir nur das Wasser, welches tatsächlich von der Zirkulation umgewälzt wird. Wir nehmen an, dass es sich durch die zwei Parameter Temperatur und Salinität beschreiben lässt. Wir nennen die Variablen im Gebiet i T_i und S_i .

Das Wasser welches an der Zirkulation teilnimmt ist umgeben von einem viel grösseren Wasserreservoir, welches mit dem strömenden Wasser im Wärme- und Salzaustausch steht. Wir bezeichnen die konstanten Parameter dieses Reservoirs mit T_i^* und S_i^* . In Abbildung ?? sind die beiden Gebiete grau dargestellt, das in Zirkulation befindliche Wasser hellblau.

Die Zirkulation ist charakterisiert durch den Massefluss q der Tiefenströmung. Da kein Wasser verloren gehen kann, muss in Oberflächennähe der gleiche Fluss herrschen. Da auch kein Salz

verloren gehen kann, müssen sich auch die Salzflüsse zwischen den beiden Gebieten ausgleichen. Die Salinität wird zum Beispiel durch die Verdunstung erhöht, während Niederschlag sie erniedrigt. Süßwasserflüsse von Kontinenten reduzieren ebenfalls die Salinität. Dies bedeutet, dass zusätzlich zum Massestrom q ein virtueller Salzstrom zwischen den beiden Gebieten herrscht, den wir mit H bezeichnen.

4.2.2 Modell-Gleichungen

Wir müssen jetzt Differentialgleichungen aufstellen, welche die zeitliche Entwicklung von Temperatur $T_i(t)$ und Salinität $S_i(t)$ beschreiben kann. Die Temperaturentwicklung wird bestimmt einerseits durch den Energietransport durch den Fluss q und andererseits durch den Wärmeaustausch mit dem umgebenden Wasser. Der Fluss q hat zur Folge, dass sich die Temperaturen T_1 und T_2 angleichen. Die beiden Flüsse oben und unten in Abbildung 4.2 transportieren die gleiche Menge Wasser pro Zeiteinheit. Es wird also gleichviel Wasser mit Temperatur T_1 ins Gebiet 2 transportiert wie Wasser mit Temperatur T_2 ins Gebiet 1. Das Vorzeichen von q spielt dabei keine Rolle, denn ändert das Vorzeichen von q , fliesst das Wasser mit Temperatur T_1 einfach durch den anderen Kanal. Die Temperaturänderung von T_1 ist also proportional zu $|q|(T_2 - T_1)$.

Der Wärmeaustausch mit dem umgebenden Wasser ist proportional zur Temperaturdifferenz, wir bezeichnen den Proportionalitätsfaktor mit c .

$$\begin{aligned}\frac{dT_1}{dt} &= c(T_1^* - T_1) + |q|(T_2 - T_1) \\ \frac{dT_2}{dt} &= c(T_2^* - T_2) + |q|(T_1 - T_2).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Analoge Überlegungen müssen wir jetzt auch noch für die Salinität anstellen. Der Ausgleich der Salinität S_i mit der Salinität S_i^* des umgebenden Meersbeckens ist proportional zur Differenz, der Proportionalitätsfaktor, den wir mit d bezeichnen, ist bestimmt durch die Diffusionsgeschwindigkeit und die turbulente Durchmischung des zirkulierenden Wassers mit der Umgebung. Dazu kommt noch der virtuelle Salzfluss H :

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{dt} &= H + d(S_1^* - S_1) + |q|(S_2 - S_1) \\ \frac{dS_2}{dt} &= -H + d(S_2^* - S_2) + |q|(S_1 - S_2).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Man beachte, dass die Temperaturgleichungen 4.2 und die Salinitätsgleichungen 4.3 gekoppelt sind, da der Fluss q angetrieben wird vom Dichteunterschied, der wiederum von Temperatur und Salinität abhängt.

4.2.3 Antrieb der Zirkulation

Die Zirkulation wird wie gesagt vom Dichteunterschied angetrieben. Es gibt also einen Proportionalitätsfaktor k derart, dass

$$q = k \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_0}.$$

Setzt man die Formel 4.1 ein, findet man

$$q = k(-\alpha(T_1 - T_2) + \beta(S_1 - S_2)) = k(\alpha(T_2 - T_1) + \beta(S_1 - S_2)) = k(\alpha(T_2 - T_1) - \beta(S_2 - S_1)).$$

Schreiben wir $\Delta T = T_2 - T_1$ und $\Delta S = S_2 - S_1$, dann ist der Fluss nur von den Differenzen abhängig

$$q = k(\alpha \Delta T - \beta \Delta S). \quad (4.4)$$

4.2.4 Anomalie-Gleichungen

Die absoluten Werte von T_i und S_i sind nicht wirklich wichtig, viel wichtiger sind die Unterschiede ΔT_i und ΔS_i . Verschwinden die Differenzen, kommt die Zirkulation zum erliegen, und dies sind die Phänomene, die wir mit den Gleichungen prognostizieren können möchten. Wir streben daher an, die Gleichungen (4.2) und (4.3) in eine Form zu bringen, die nur von Differenzen und Anomalien abhängt.

Wir schreiben

$$T_0 = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) \quad \text{und} \quad S_0 = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$$

für die Mittelwerte von Temperatur und Salinität. Indem wir den Mittelwert der Temperaturgleichungen (4.2) bzw. der Salinitätsgleichung (4.3) bilden, bekommen wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dT_0}{dt} &= c(T_0^* - T_0) \\ \frac{dS_0}{dt} &= d(S_0^* - S_0), \end{aligned} \quad (4.5)$$

wobei $T_0^* = \frac{1}{2}(T_1^* + T_2^*)$ und $S_0^* = \frac{1}{2}(S_1^* + S_2^*)$. Die Differentialgleichungen ?? besagen, dass die mittlere Temperatur des zirkulierenden Wassers gegen die mittlere Temperatur des umliegenden Meeresbeckens strebt.

Da die Mitteltemperatur langfristig gegen die Mitteltemperatur der umliegenden Meeresbecken strebt liegt es nahe, Temperatur und Salinität auf diese Mitteltemperatur zu beziehen. Wir ersetzen also

$$\begin{aligned} \bar{T}_1 &= T_1 - T_0^*, & \bar{T}_2 &= T_2 - T_0^* & \Rightarrow & \bar{T}_0 = T_0 - T_0^* \\ \bar{S}_1 &= S_1 - S_0^*, & \bar{S}_2 &= S_2 - S_0^* & \Rightarrow & \bar{S}_0 = S_0 - S_0^* \end{aligned} \quad (4.6)$$

Die Differentialgleichungen (4.5) für die Mittelwerte wird damit zu

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}_0}{dt} &= -c\bar{T}_0 \\ \frac{d\bar{S}_0}{dt} &= -d\bar{S}_0. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen für $T_i = \bar{T}_i + T_0^*$ und $S_i = \bar{S}_i + S_0^*$ sind

$$\begin{aligned} \frac{dT_i}{dt} &= \frac{d\bar{T}_i}{dt} = c(T_i^* - T_i) + |q|\Delta\bar{T} = c(T_i^* - \bar{T}_i - T_0^*) + |q|\Delta\bar{T} \\ \frac{dS_i}{dt} &= \frac{d\bar{S}_i}{dt} = \pm H + d(S_i^* - S_i) + |q|\Delta\bar{S} = \pm H + d(S_i^* - \bar{S}_i - S_0^*) + |q|\Delta\bar{S} \end{aligned}$$

Die Differenzen $T_i^* - T_0^*$ und $S_i^* - S_0^*$ können wir vereinfacht als

$$\begin{aligned} T_1^* - T_0^* &= T_1^* - \frac{1}{2}(T_2^* - T_1^*) = -\frac{1}{2}(T_2^* - T_1^*) = -T^* \\ T_2^* - T_0^* &= T_2^* - \frac{1}{2}(T_2^* - T_1^*) = \frac{1}{2}(T_2^* - T_1^*) = T^* \end{aligned}$$

schreiben und analog für $S^* = \frac{1}{2}(S_2^* - S_1^*)$. Damit werden die Differentialgleichungen zu

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{T}_1}{dt} &= c(-T^* - \bar{T}_1) + |q|(\bar{T}_2 - \bar{T}_1) \\ \frac{d\bar{T}_2}{dt} &= c(T^* - \bar{T}_2) + |q|(\bar{T}_1 - \bar{T}_2) \\ \frac{d\bar{S}_1}{dt} &= -H + d(-S^* - \bar{S}_1) + |q|(\bar{S}_2 - \bar{S}_1) \\ \frac{d\bar{S}_2}{dt} &= H + d(S^* - \bar{S}_2) + |q|(\bar{S}_1 - \bar{S}_2)\end{aligned}\tag{4.7}$$

Man beachte, dass die T^* und S^* konstant sind.

In den Gleichungen (4.7) hängt q von den Temperatur- und Salinitätsdifferenzen ab. Wegen $\Delta\bar{T} = \Delta T$ und $\Delta\bar{S}$ ist nach (4.4)

$$q = k(\alpha\Delta\bar{T} - \beta\Delta\bar{S}).\tag{4.8}$$

4.2.5 Differenzgleichungen

Wir können die Anomaliegleichungen (4.7) noch etwas weiter umformen und die einzelnen Anomalien vollständig durch die Differenzen ersetzen. Die Differenzen und Summen der Gleichungen sind

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta\bar{T}}{dt} &= c(2T^* - \Delta\bar{T}) - 2|q|\Delta\bar{T} & \frac{d\bar{T}_0}{dt} &= -c\bar{T}_0 \\ \frac{d\Delta\bar{S}}{dt} &= 2H + d(2S^* - \Delta\bar{S}) - 2|q|\Delta\bar{S} & \frac{d\bar{S}_0}{dt} &= -d\bar{S}_0.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Die Gleichungen rechts drücken aus, dass die mittleren Anomalien exponentiell gegen 0 gehen. Die linken Gleichungen beschreiben die Zeitentwicklung der Differenz der Anomalien. Man beachte, dass q ebenfalls von den Anomalie-Differenzen abhängt.

4.2.6 Zeitkonstanten

Der Koeffizienten c beschreibt, wie schnell der Temperaturausgleich durch Wärmeleitung oder turbulente Durchmischung erfolgt. Der Koeffizient d beschreibt, wie schnell der Salinitätsausgleich durch Durchmischung und Diffusion stattfinden kann. Je grösser diese Koeffizienten, desto schneller erfolgt der Prozess. In den rechten Gleichungen von (4.9) ist dies ganz offensichtlich. Vernachlässigen wir für den Moment den Einfluss der Zirkulation, was wir durch $k = 0$ im Ausdruck für q beschreiben können, dann sehen wir, dass die Differenzgleichungen beide von der Form einer linearen inhomogenen Differentialgleichung

$$\frac{d\Delta X}{dt} = X^* - cX$$

sind, wobei X^* eine Konstante ist. Die Lösung der Gleichung ist

$$X(t) = \frac{X^*}{c} + C_0 e^{-ct}$$

mit einer Konstanten C_0 , die aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen ist. Die Terme T^* , S^* und H verschieben also nur die Lösung, die Differenzen $\Delta\bar{T}$ und $\Delta\bar{S}$ streben exponentiell wie e^{-ct} bzw. e^{-dt} gegen diese Gleichgewichtswerte.

Die Größen $1/c$ und $1/d$ haben die Dimension einer Zeit, wir nennen sie die *Zeitkonstanten* des Prozesses, den c bzw. d beschreiben. Ist zum Beispiel die Zeitkonstante $1/c$ der Temperatur sehr viel kleiner als die Zeitkonstanten $1/d$ der Salinität, dann bedeutet dies, dass sich die Temperaturdifferenzen sehr viel schneller ausgleichen als die Salinitätsdifferenzen. Für die langfristige Entwicklung der Zirkulation ist in diesem Fall die Salinitätsentwicklung ausschlaggebend, die Temperaturfunktionen können durch konstante ersetzt werden.

4.3 Dynamik der thermohalinen Zirkulation

In diesem Abschnitt wollen wir die Bewegungsgleichung 4.9 etwas vereinfachen mit dem Ziel, einzelne Szenarien durchspielen zu können. Eine vertiefte Diskussion solcher Modelle ist in Kapitel 12 zu finden.

4.3.1 Elimination von Prozessen mit kurzer Zeitkonstante

Die Diskussion in Abschnitt 4.2.6 ist es zulässig, Variablen mit sehr kleiner Zeitkonstanten durch Konstanten zu ersetzen. Tatsächlich erfolgt der Temperaturausgleich im Wasser sehr viel schneller als der Salinitätsausgleich. Wir können daher davon ausgehen, dass die Temperaturlgleichungen die Temperaturanomalien sehr schnell gegen eine Gleichgewichtstemperatur streben lassen und dass wir für die Lösung der Salinitätsgleichungen mit dieser konstanten Temperatur arbeiten können.

Wir gehen also davon aus, dass $\Delta\bar{T} = 2T^*$ konstant ist und reduzieren damit das Gleichungssystem (4.9) auf die eine Gleichung

$$\frac{d}{dt}\Delta\bar{S} = 2H + d(2S^* - \Delta\bar{S}) - 2|q|\Delta\bar{S} \quad \text{mit} \quad q = k(2\alpha T^* - \beta\Delta\bar{S}). \quad (4.10)$$

Diese Gleichungen beschreiben also die Salinitätsentwicklung unter der Annahme, dass der Temperaturausgleich sehr schnell erfolgt. Dieser Ausgleich kann nicht primär durch Durchmischung erfolgen, denn dieser Mechanismus würde auch die Salinität mit gleicher vergleichbarer Geschwindigkeit ausgleichen. Dies bedeutet, dass der dominante Term in der Temperaturlgleichung der Term mit c ist, nicht der Term mit q .

Die Gleichung (4.10) kann noch nicht auf einfache Weise gelöst werden. Wir vereinfachen wir sie daher weiter indem wir ausnutzen, dass der Salinitätsausgleich so viel langsamer ist als der Temperaturausgleich, dass der Term mit d im Vergleich zum Term mit q vernachlässigbar ist. Wir setzen also $d = 0$ und erhalten damit

$$\frac{d}{dt}\Delta\bar{S} = 2H - 2|q|\Delta\bar{S} \quad \text{mit} \quad q = k(2\alpha T^* - \beta\Delta\bar{S}) \quad (4.11)$$

als vereinfachte Differentialgleichung zur Modellierung der thermohalinen Zirkulation. Dies ist eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung, die nicht in geschlossener Form gelöst werden kann.

4.3.2 Eine dimensionslose Beschreibung

Die Gleichung (4.11) ist wegen der vielen Konstanten unübersichtlich. Ausgeschrieben lautet sie

$$\frac{d}{dt}\Delta\bar{S} = 2H - 2k|\alpha\Delta\bar{T} - \beta\Delta\bar{S}|\Delta\bar{S} \quad (4.12)$$

Die meisten der Konstanten können wir aber los werden, indem wir die unabhängigen Variablen und die Zeit neu skalieren. Dies ist gleichbedeutend mit einem Wechsel der Masseinheiten. Wir verwenden:

$$x = \frac{\beta \Delta \bar{S}}{\alpha \Delta \bar{T}}, \quad \tau = 2\alpha k |\Delta \bar{T}| t \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{\beta H}{\alpha^2 k \Delta \bar{T} |\Delta \bar{T}|}. \quad (4.13)$$

Die Ableitung nach t kann durch die Ableitung nach τ ausgedrückt werden vermöge der Ersetzung

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{1}{2\alpha k |\Delta \bar{T}|} \frac{d}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} = 2\alpha k |\Delta \bar{T}| \frac{d}{d\tau}.$$

Setzen wir dies in die Gleichung (4.13) ein, erhalten wir

$$2\alpha k |\Delta \bar{T}| \frac{d}{d\tau} \Delta \bar{S} = 2H - 2k|\alpha \Delta \bar{T} - \beta \Delta \bar{S}| \Delta \bar{S}. \quad (4.14)$$

Wir erweitern mit $\beta/\alpha \Delta \bar{T}$, damit wird die Differentialgleichung zu

$$\begin{aligned} 2\alpha k |\Delta \bar{T}| \frac{d}{d\tau} \frac{\beta \Delta \bar{S}}{\alpha \Delta \bar{T}} &= \frac{2\beta H}{\alpha \Delta \bar{T}} - 2k|\alpha \Delta \bar{T} - \beta \Delta \bar{S}| \frac{\beta \Delta \bar{S}}{\alpha \Delta \bar{T}} \\ \alpha k |\Delta \bar{T}| \frac{d}{d\tau} x &= \frac{\beta H}{\alpha \Delta \bar{T}} - k|\alpha \Delta \bar{T} - \beta \Delta \bar{S}| x \\ k \frac{d}{d\tau} x &= \frac{\beta H}{\alpha^2 \Delta \bar{T} |\Delta \bar{T}|} - k \left| 1 - \frac{\beta \Delta \bar{S}}{\alpha \Delta \bar{T}} \right| x \\ \frac{d}{d\tau} x &= \frac{\beta H}{k \alpha^2 \Delta \bar{T} |\Delta \bar{T}|} - \left| 1 - \frac{\beta \Delta \bar{S}}{\alpha \Delta \bar{T}} \right| x \\ \frac{dx}{d\tau} &= \lambda - |1 - x|x. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Damit haben wir die ursprüngliche Gleichung (4.12) in eine dimensionslose Gleichung mit dem einen Parameter λ umgewandelt. Das Verhalten der Lösung hängt vom Parameter λ ab.

4.3.3 Gleichgewicht

Um das Verhalten der Lösungen von (4.15) besser zu verstehen, suchen wir zunächst nach Gleichgewichtslösungen. Diese hängen nicht von der Zeit ab, es gilt also

$$\frac{dx}{d\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda - |1 - x|x = 0 \quad \Rightarrow \quad |1 - x|x = \lambda. \quad (4.16)$$

In Abbildung 4.3 ist der Graph der Funktion $|1 - x|x$ dargestellt. Je nach dem Wert von λ hat die dimensionslose Differentialgleichung (4.15) bis zu drei Gleichgewichtslösungen.

Für Werte von λ zwischen 0 und 0.25 gibt es drei verschiedene Werte x , die die Gleichung (4.16) erfüllen (Abbildung 4.5). Für $x \leq 1$ ist $1 - x \geq 0$ und damit muss x die Gleichung $(1 - x)x = \lambda$ erfüllen, für $x \geq 1$ ist es die Gleichung $(x - 1)x = \lambda$. Diese beiden Gleichungen haben die folgenden Lösungen

$$\begin{aligned} \text{Fall } x \leq 1: \quad (1 - x)x &= \lambda \\ x^2 - x + \lambda &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fall } x \geq 1: \quad (x - 1)x &= \lambda \\ x^2 - x - \lambda &= 0 \end{aligned}$$

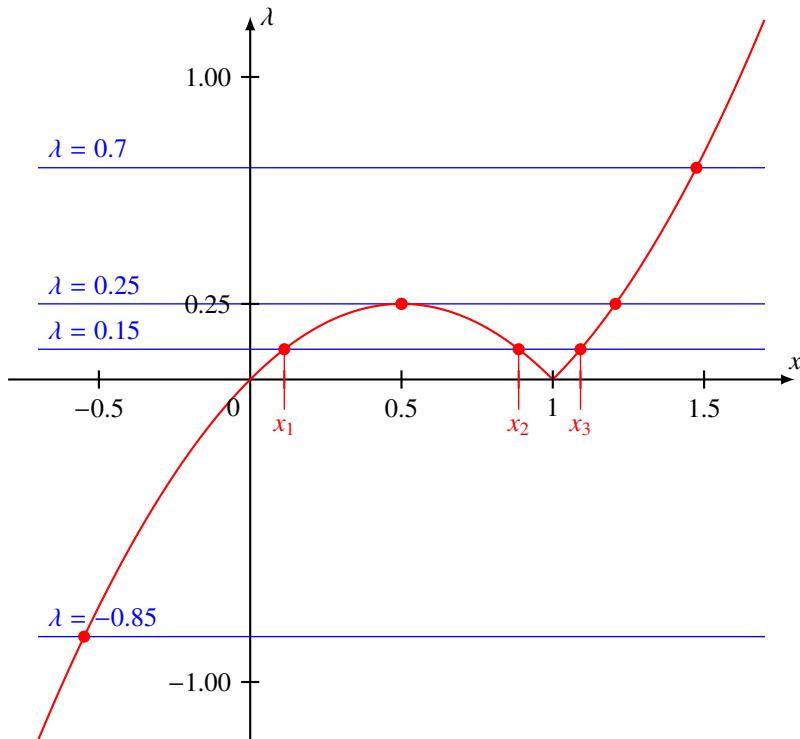


Abbildung 4.3: Graph der Funktion $|1 - x| x$ und Gleichgewichtslösungen der dimensionslosen Differentialgleichung (4.15)

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda} \quad x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}$$

Die rechte Gleichung hat für alle Werte $\lambda > 0$ zwar auch noch eine Lösung < 1 , diese ist aber ausgeschlossen, daher nur das positive Zeichen vor der Wurzel in diesem Fall. Für $\lambda > 0.25$ hat die linke Gleichung keine Lösung. Für $\lambda < 0$ ist die Lösung mit dem positiven Zeichen der linken Gleichung ausgeschlossen.

Wir berechnen die Lösung der Differentialgleichung für einen gegebenen Wert von λ (Abbildung 4.4). Für $\lambda > \frac{1}{4}$ gibt es nur einen Gleichgewichtspunkt, wir nennen ihn x_3 . Falls $x(\tau) < x_3$, dann ist

$$\frac{dx}{d\tau} = \lambda - |1 - x|x > 0,$$

die Lösung $x(\tau)$ ist also monoton wachsend. Für $x(\tau) > x_3$ ist hingegen

$$\frac{dx}{d\tau} = \lambda - |1 - x|x < 0,$$

die Lösung ist also monoton wachsend. Lösungskurven, die bei x -Werten $> x_3$ beginnen nehmen monoton ab und konvergieren gegen x_3 , solche, die bei x -Werten $< x_3$ beginnen, nehmen monoton zu und konvergieren von unten gegen x_3 . Die Gleichgewichtslösung $x(\tau) = x_3$ ist also eine stabile Lösung, alle anderen Lösungen konvergieren gegen diese Lösung.

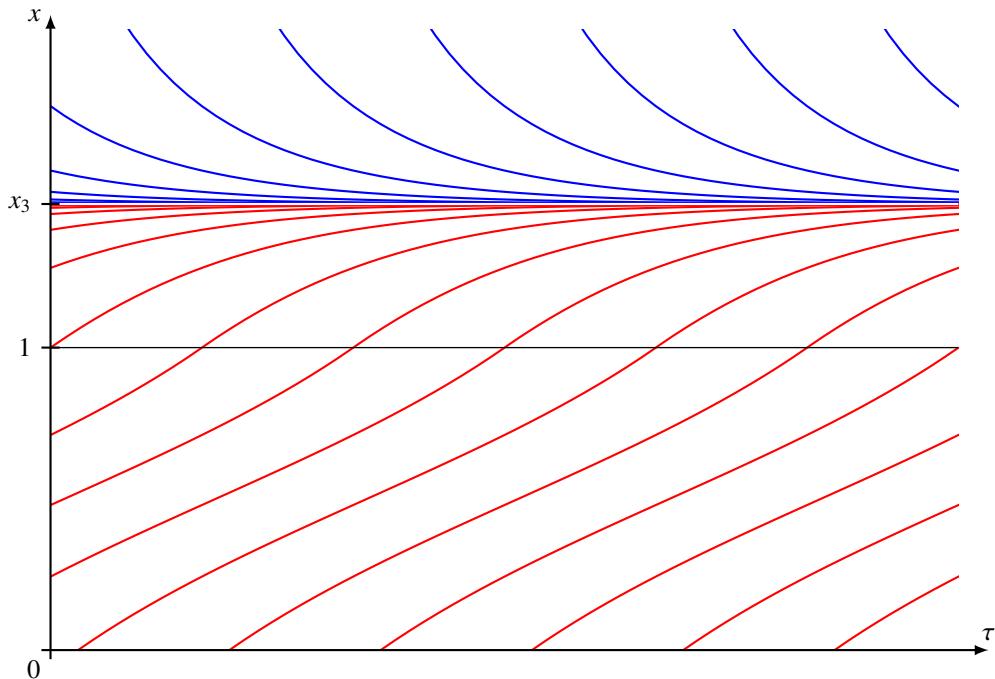


Abbildung 4.4: Lösungen im Fall $\lambda > \frac{1}{4}$: der einzige Gleichgewichtspunkt x_3 ist stabil.

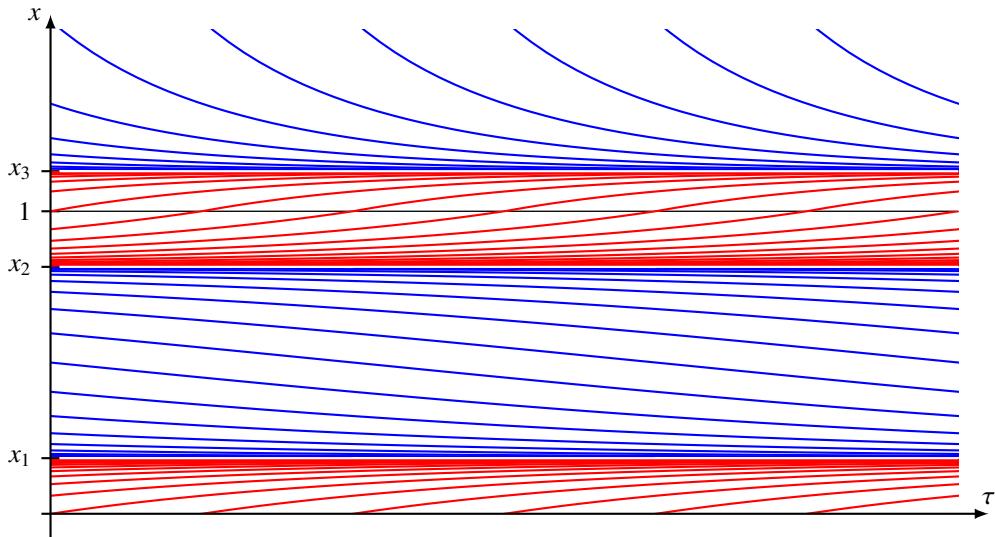


Abbildung 4.5: Lösungen im Fall $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{4}$: die beiden Gleichgewichtspunkte x_1 und x_3 sind stabil, x_2 ist instabil.

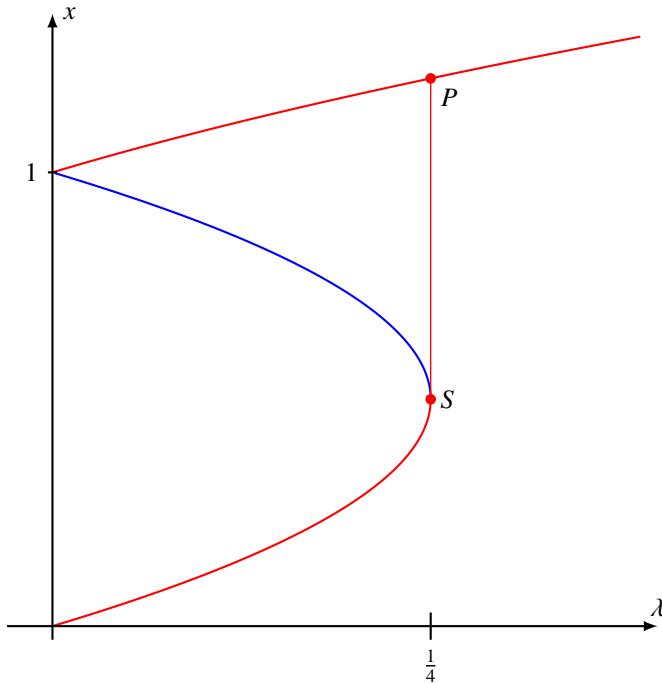


Abbildung 4.6: Bifurkationsdiagramm für die Differentialgleichung (4.16)

Für $0 < \lambda < \frac{1}{4}$ seien x_1 , x_2 und x_3 die drei Gleichgewichtspunkte (Abbildung /refskript:thc:drei). Wir untersuchen wieder die Vorzeichen von $dx/d\tau$. Für x -Werten zwischen x_1 und x_2 und für x -Werte grösser als x_3 ist die Ableitung positiv, die Lösungen konvergieren monoton wachsend gegen die Gleichgewichtslösungen x_1 bzw. x_3 . Lösungen, die bei $x < x_1$ oder $x_2 < x < x_3$ beginnen, konvergieren dagegen monoton wachsend gegen x_1 bzw. x_3 . Die Gleichgewichtslösung x_2 ist daher nicht stabil, die Gleichgewichtslösungen x_1 und x_3 sind dagegen stabil.

4.3.4 Bifurkation

Für Parameterwerte $\lambda < \frac{1}{4}$ gibt es drei mögliche Gleichgewichtspunkte, für $\lambda > \frac{1}{4}$ jedoch nur noch einen. Wir möchten untersuchen, wie sich die Lösung verhält, wenn der Parameter langsam verändert wird. Dies ist in Abbildung 4.6 dargestellt.

Sei jetzt also zunächst $\lambda < \frac{1}{4}$. Wir betrachten also eine Lösung, die in Nähe von

$$x_1(\lambda) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}$$

beginnt. Vergrössern wir λ , verschiebt sich der Gleichgewichtspunkt $x_1(\lambda)$ ebenfalls nach oben. Da $x_1(\lambda)$ aber ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist, wird die Lösung gegen den neuen Gleichgewichtspunkt konvergieren. Das gleiche passiert auch, wenn die Lösung in der Nähe von

$$x_3(\lambda) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}$$

beginnt. Bei einer Vergrösserung folgt das System den roten Kurven in Abbildung 4.6.

Wenn jetzt aber der Parameter λ die Schwelle $\frac{1}{4}$ überschreitet, dann wird die Lösung zum einzigen verbleibenden stabilen Gleichgewichtspunkt $x_3(\lambda)$ konvergieren. Die Lösung springt also vom Punkt S zum Punkt P auf dem oberen roten Ast in Abbildung 4.6.

Wenn man den Parameter λ wieder verkleinert, dann wird eine Lösung in der Nähe von $x_3(\lambda)$ wieder gegen $x_3(\lambda)$ konvergieren. Es ist aber nicht mehr möglich, dass die Lösung gegen $x_1(\lambda)$ konvergiert, da nach Abbildung 4.5 nur Lösungen, die bei x -Werten $< x_2$ beginnen, gegen $x_1(\lambda)$ konvergieren können.

Dieses einfache Modell der thermohalinen Zirkulation hat also die überraschende Eigenschaft, dass das System beim Überschreiten des kritischen Wertes $\lambda = \frac{1}{4}$ in einen Zustand kippt, aus dem es nicht mehr zurück kommen kann. Wegen

$$\lambda = \frac{\beta H}{\alpha^2 k \Delta \bar{T} |\Delta \bar{T}|}$$

kann dies passieren wenn entweder der Betrag des virtuellen Salzflusses H ansteigt oder die Temperaturanomaliedifferenz $\Delta \bar{T}$ klein wird. Eine Klimaerwärmung könnte zum Beispiel die Verdunstung im Gebiet 2 erhöhen, den virtuellen Salzfluss erhöhen und damit das System in den Zustand mit einer wesentlich grösseren Anomaliedifferenz $\Delta \bar{S}$ kippen lassen.

Kapitel 5

Zonenmodelle

Die Erdrotation ist schnell im Vergleich zu den für typische Klimamodelle wesentlichen Zeitspannen. Wesentliche Aspekte der Klimaentwicklung sollten sich daher immer noch modellieren lassen, wenn man den Zustand des Klimasystems über die Erdrotation mittelt. In diesem Kapitel werden daher vereinfachte Modelle diskutiert, die nur die geographischen Länge als geometrischen Parameter haben.

5.1 Strahlung

Die von der Erde empfange Strahlung sowie die Albedo wurden bereits in Abschnitt 1.2.2 untersucht. Für die später in diesem Kapitel zu untersuchenden Modelle ist aber erforderlich, die örtliche Verteilung der Strahlung auf der Erdoberfläche genauer zu verstehen. In diesem Abschnitt wird daher zuerst die Strahlungsleistung auf einer Halbkugel und später auf einer Zone um einen Breitenkreis berechnet.

5.1.1 Einstrahlung auf einer Halbkugel

Die einfachste Erweiterung des Modells von Budyko teilt die Erde in zwei Halbkugeln auf, die Energie nur langsam austauschen können. Für die Energiebilanz brauchen wir daher die Strahlungsleistung auf einer Halbkugel in Abhängigkeit von der Neigung γ der Erdachse.

Die gesamte auf die Erde eingestrahlte Leistung ist $\pi R^2 S_0$. Diese Leistung muss nun in Abhängigkeit von der Neigung γ auf die beiden Halbkugeln verteilt werden. Von der Erde aus gesehen teilt der Äquator die bestrahlte Erde wie in Abbildung 5.1 dargestellt. Der Unterschied zwischen den beiden Halbkugeln ist der Flächeninhalt der Ellipse, also

$$F = \pi R^2 \sin \gamma.$$

Die Strahlungsleistung auf den beiden Halbkugeln in Abbildung (5.1) ist daher

$$E_N = \frac{1}{2}(\pi R^2 S_0 + \pi R^2 S_0 \sin \gamma) = \pi R^2 S_0 \frac{1 + \sin \gamma}{2} = Q \frac{1 + \sin \gamma}{2} \quad \text{Nordhalbkugel}, \quad (5.1)$$

$$E_S = \frac{1}{2}(\pi R^2 S_0 - \pi R^2 \sin \gamma) = \pi R^2 S_0 \frac{1 - \sin \gamma}{2} = Q \frac{1 - \sin \gamma}{2} \quad \text{Südhalbkugel}. \quad (5.2)$$

In Kapitel 16 wird diese Lösung verwendet, um zu modellieren, wie die Veränderung der Neigung der Erdachse zu Eiszeiten führen kann.

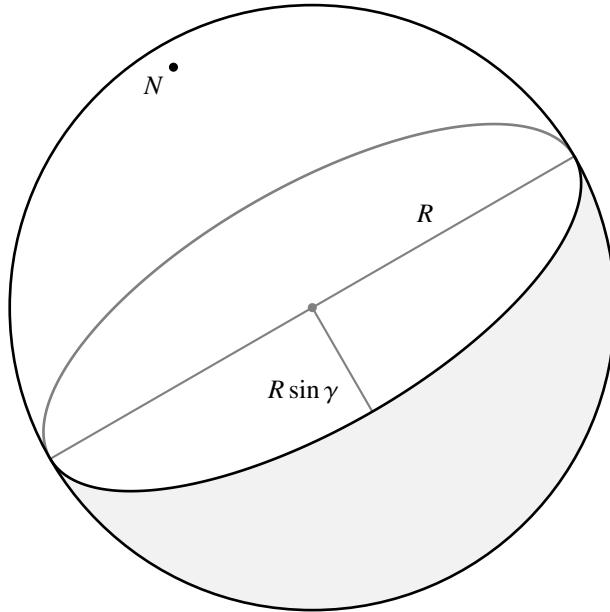


Abbildung 5.1: Aufteilung der sonnenbeschienenen Seite der Erde durch den Äquator.

5.1.2 Einstrahlung auf einen Breitenkreis

Wir berechnen die Einstrahlung auf einem gegebenen Breitengrad ϑ in Abhängigkeit von der Neigung γ der Erdachse. Die einfallende Strahlungsleistung ist proportional zum Skalarprodukt der Richtung der Einstrahlung mit der Normalen in einem Punkte auf dem Breitenkreis zur Breite ϑ . Die Normale ist

$$\vec{n}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Die Richtung der Einstrahlungsrichtung ist

$$\vec{e}(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ 0 \\ \sin \gamma \end{pmatrix}.$$

Das Skalarprodukt ist

$$\vec{n}(\vartheta, \varphi) \cdot \vec{e}(\gamma) = \sin \vartheta \cos \varphi \cos \gamma + \cos \vartheta \sin \gamma. \quad (5.3)$$

Für die folgende Diskussion nehmen wir an, dass $\gamma \geq 0$, dass also der Nordpol permanent bestrahlt ist und der Südpol keine Strahlung erhält.

Im Folgenden wollen wir die Energie berechnen, die in eine Zone eingestrahlt wird.

Sonnenauf- und -untergang

Die Einstrahlung erfolgt natürlich nur zwischen Sonnenauf- und -untergang. Wir bezeichnen die geographische Länge, bei der der Sonnenauf- oder -untergang erfolgt, mit $\pm\varphi_0$. Diese sind gekennzeichnet

net dadurch, dass $\vec{n}(\vartheta, \varphi_0)$ und $\vec{e}(\gamma)$ senkrecht aufeinander stehen oder

$$\begin{aligned}\vec{n}(\vartheta, \varphi_0) &\perp \vec{e}(\gamma) \\ \Rightarrow \quad \vec{n}(\vartheta, \varphi_0) \cdot \vec{e}(\gamma) &= 0 \\ \Rightarrow \quad \sin \vartheta \cos \varphi_0 \cos \gamma &= -\cos \vartheta \sin \gamma \\ \Rightarrow \quad \cos \varphi_0 &= -\frac{\tan \gamma}{\tan \vartheta}.\end{aligned}$$

Wenn $\vartheta < \gamma$ (Punkt in der Nähe des Nordpols) oder $\vartheta > \pi - \gamma$ (Punkt in der Nähe des Südpols), dann hat die Gleichung keine Lösung, die Sonne geht nie auf (Polarnacht) oder unter (Polartag).

Mittlere Strahlungsleistung auf Breite ϑ

Um die Strahlungsleistung auf einer beliebigen geographischen Breite zu berechnen, gehen wir in zwei Schritten vor. Das Skalarprodukt (5.3) gibt die Strahlungsleistung $\varepsilon(\vartheta, \varphi, \gamma)$ in einem Punkt auf der geographischen Breite ϑ in Abhängigkeit von φ . Im ersten Schritt mitteln wir dies über eine Umdrehung, dazu ist das Skalarprodukt (5.3) über eine Umdrehung zu mitteln. So erhalten wir die mittlere Strahlungsleistung $\varepsilon(\vartheta, \gamma)$ in einem Punkte auf geographischer Breite ϑ . Im zweiten Schritt müssen wir die die mittlere Strahlungsleistung mit der Länge des Breitenkreises multiplizieren, um die Strahlungsleistung auf dem Breitenkreis zur Breite ϑ zu erhalten.

Polnähe

In der Nähe des Südpols, also wenn $\vartheta > \pi - \gamma$, ist die Einstrahlung = 0. In der Nähe des Nordpols, also wenn $\vartheta < \gamma$, ist die Einstrahlungsdichte

$$\varepsilon_{\text{in}} = \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \cos \varphi \cos \gamma + \cos \vartheta \sin \gamma d\varphi = 2\pi \cos \vartheta \sin \gamma.$$

Für den Spezialfall $\vartheta = 0$ fällt der erste Term weg und es bleibt

$$\varepsilon_{\text{in}}(0, \gamma) = 2\pi \sin \gamma.$$

Äquator

Am Äquator ist $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Man bekommt

$$\varepsilon_{\text{in}}\left(\frac{\pi}{2}, \gamma\right) = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos \varphi \cos \gamma d\varphi = \cos \gamma \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = 2 \cos \gamma$$

für die Einstrahlung am Äquator.

Der allgemeine Fall mit Sonnenauf- und -untergang

Der allgemeine Fall mit Sonnenauf- und -untergang ist $\gamma < \vartheta < \pi - \gamma$. Für die Einstrahlung finden wir dann

$$\varepsilon_{\text{in}}(\vartheta, \gamma) = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \sin \vartheta \cos \varphi \cos \gamma + \cos \vartheta \sin \gamma d\varphi$$

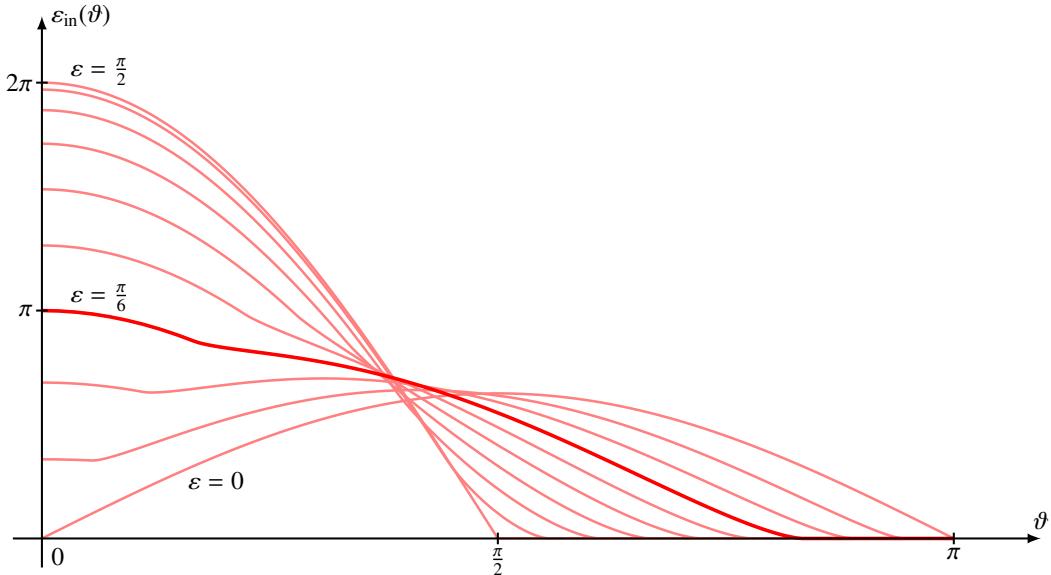


Abbildung 5.2: Über eine Rotation gemittelte Einstrahlungsdichte in Abhängigkeit von der geographischen Breite gemäss Formel (5.4) für verschiedene Neigungen γ der Achse. Dargestellt sind γ -Werte zwischen 0 und 90° in 10° -Schritten. Die Neigung $\gamma = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ ist hervorgehoben.

$$\begin{aligned}
 &= \sin \vartheta \cos \gamma \left[\sin \varphi \right]_{-\varphi_0}^{\varphi_0} + 2\varphi_0 \cos \vartheta \sin \gamma \\
 &= 2 \sin \vartheta \cos \gamma \sin \varphi_0 + 2\varphi_0 \cos \vartheta \sin \gamma \\
 &= 2 \sin \vartheta \cos \gamma \sin \arccos\left(-\frac{\tan \gamma}{\tan \vartheta}\right) + 2 \cos \vartheta \sin \gamma \arccos\left(-\frac{\tan \gamma}{\tan \vartheta}\right).
 \end{aligned}$$

Im ersten Term können wir $\sin \arccos x = \sqrt{1 - x^2}$ verwenden. Den zweiten Term könnten wir so stehen lassen, aber für die graphische Darstellung brauchen wir eine Darstellung des Arkuskosinus durch den Arkustangens, da TikZ nur den Arkustangens anbietet. Wir verwenden die Formel $\arccos x = 2 \arctan \sqrt{(1-x)/(1+x)}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
 &= 2 \sin \vartheta \cos \gamma \sqrt{1 - \frac{\tan^2 \gamma}{\tan^2 \vartheta}} + 4 \cos \vartheta \sin \gamma \arctan \sqrt{\frac{1 + \frac{\tan \gamma}{\tan \vartheta}}{1 - \frac{\tan \gamma}{\tan \vartheta}}} \\
 &= \pm 2 \cos \vartheta \cos \gamma \sqrt{\tan^2 \vartheta - \tan^2 \gamma} + 4 \cos \vartheta \sin \gamma \arctan \sqrt{\frac{\tan \vartheta + \tan \gamma}{\tan \vartheta - \tan \gamma}} \\
 &= 2 \cos \vartheta \left(\cos \gamma \sqrt{\frac{\tan^2 \vartheta}{\tan^2 \gamma} - 1} + 2 \sin \gamma \arctan \sqrt{\frac{\tan \vartheta + \tan \gamma}{\tan \vartheta - \tan \gamma}} \right). \tag{5.4}
 \end{aligned}$$

Formel (5.4) ist in Abbildung 5.2 dargestellt.

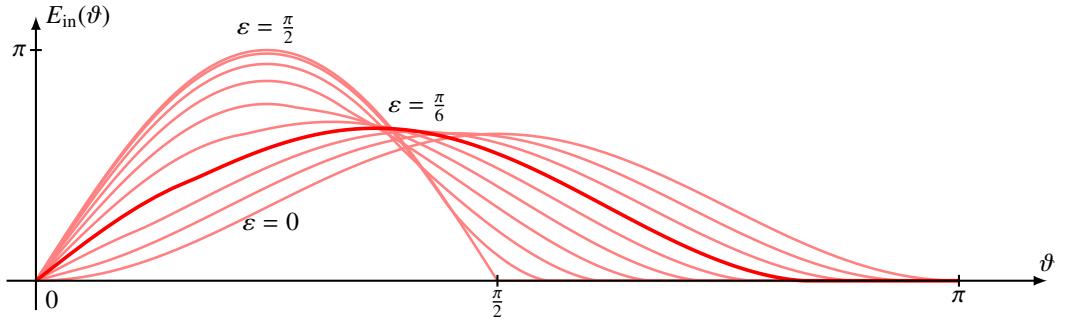


Abbildung 5.3: Strahlungsleistung auf geographischer Breite ϑ , gegeben durch Formel (5.5).

Strahlungsleistung auf dem Breitenkreis ϑ

Die gesamte Strahlungsleistung auf dem Breitenkreis ϑ ist

$$E_{\text{in}}(\vartheta) = \varepsilon(\vartheta, \gamma) \cdot \sin \vartheta \quad (5.5)$$

Die resultierende Funktion ist in Abbildung 5.3 dargestellt.

5.1.3 Einstrahlung über ein Jahr

Wir könnten versuchen, die im letzten Abschnitt gefundene Einstrahlung über einen Tag über ein Jahr zu mitteln. Allerdings stellt sich dies als nur schwer durchführbar heraus. Stattdessen wählen wir ein Vorgehen, welches sich an die noch etwas allgemeinere Untersuchung in [6, section 5] anlehnt. Dazu berechnen wir erst die mittlere Insolation auf eine nicht rotierende und nicht geneigte Kugel im Laufe eines Jahres und mitteln erst danach über den Tagesgang.

Nicht drehende Erde

Wir betrachten zunächst eine die Sonne auf einer Kreisbahn mit Radius r umlaufende Kugel vom Radius R , die sich nicht dreht und gegen die Bahn nicht geneigt ist. Wir bezeichnen die Kugel-Koordinaten auf dieser Kugel mit $\hat{\vartheta}$ und $\hat{\varphi}$ und wollen die mittlere Insolation $I(\hat{\vartheta}, \hat{\varphi})$ am Punkt $(\hat{\vartheta}, \hat{\varphi})$ im Laufe eines Jahres berechnen. Wir nehmen dabei an, dass die Sonne viel weiter entfernt ist als R , also $R \ll r$. Die Parallaxe des Punktes $(\hat{\vartheta}, \hat{\varphi})$ ist daher vernachlässigbar. Da wir ausserdem von einer Kreisbahn ausgehen, ist das Problem rotationssymmetrisch um die z -Achse, wir können daher annehmen, dass der Punkt $(\hat{\vartheta}, \hat{\varphi})$ auf dem Nullmeridian liegt, dass also $\hat{\varphi} = 0$.

Statt die Kugel um die Sonne zu bewegen, können wir die Sonne auch im Laufe eines Jahres gleichmäßig um den Punkt $(\hat{\vartheta}, \hat{\varphi})$ bewegen. Wir drücken dies dadurch aus, dass der Punkt Strahlung aus der Richtung $(\cos \lambda, \sin \lambda, 0)$ erhält, λ ist die Länge der Position der Sonne. Natürlich erhält der Punkt nur Strahlung, wenn die Sonne über dem lokalen Horizont ist. Für einen Punkt auf dem Nullmeridian bedeutet dies, dass $-\frac{\pi}{2} \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}$ sein muss. Diese Situation ist in Abbildung 5.4 dargestellt.

Die mittlere Insolation auf den Punkt $(\hat{\vartheta}, 0)$ ist dann

$$I(\hat{\varphi}, 0) = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos \lambda \\ \sin \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \hat{\vartheta} \\ 0 \\ \cos \hat{\vartheta} \end{pmatrix} d\lambda = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \lambda \sin \hat{\vartheta} d\lambda = \frac{S_0}{\pi} \sin \hat{\vartheta}.$$

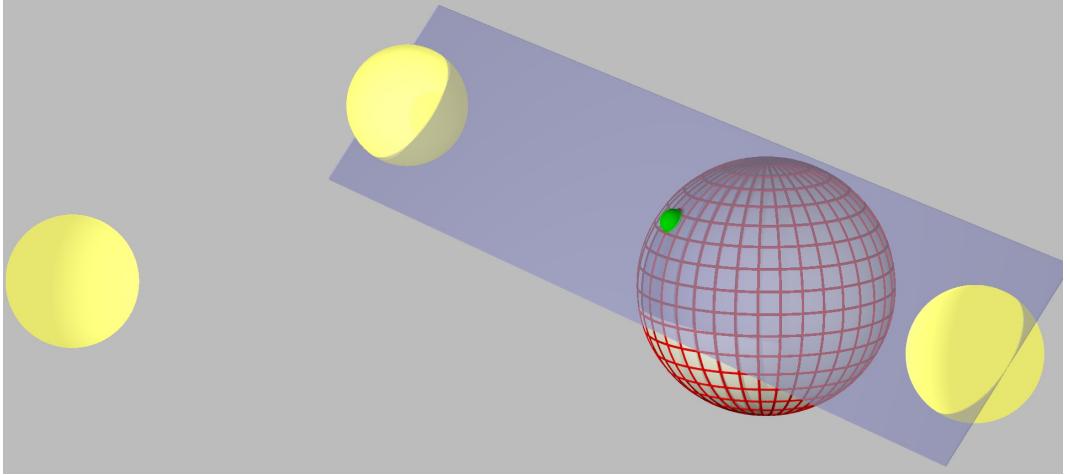


Abbildung 5.4: Insolation eines Punktes auf einer nicht geneigten und nicht rotierenden Erde im Laufe eines Jahres. Die Insolation verschwindet, wenn die Sonne sich auf der Tangentialebene im Punkt befindet, die Insolation ist maximal bei höchster Elevation der Sonne in der eingezeichneten Position links.

Darin ist S_0 der Strahlungsfluss ausserhalb der Erdatmosphäre. Offenbar hängt die Insolation nur von $\sin \hat{\vartheta}$ ab. Wir können dies auch durch die z -Koordinate ausdrücken, es ist nämlich

$$\sin \hat{\vartheta} = \sqrt{1 - \cos^2 \hat{\vartheta}} = \sqrt{1 - z^2}. \quad (5.6)$$

Geneigte Erde

Um die Insolation auf einen Punkt auf der geneigten Erde zu ermitteln brauchen wir die Umrechnung von Koordinaten (ϑ, φ) in die geographische Breite in dem Koordinatensystem, welches im vorangegangenen Abschnitt als Basis diente. Die Drehmatrix

$$D_\gamma = \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{pmatrix}$$

dreht einen Punkt auf der Kugeloberfläche um den Neigungswinkel γ der Erde. Wir erhalten für den Punkt (ϑ, φ)

$$D_\gamma \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \sin \vartheta \cos \varphi - \sin \gamma \cos \vartheta \\ \sin \gamma \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \gamma \sin \vartheta \cos \varphi + \cos \gamma \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Davon brauchen wir nur die letzte Koordinate, es ist

$$\cos \hat{\vartheta} = \sin \gamma \sin \vartheta \cos \varphi + \cos \gamma \cos \vartheta. \quad (5.7)$$

Auf der nicht rotierenden aber geneigten Erde ist die Insolation im Punkt (ϑ, φ) also

$$I(\vartheta, \varphi) = \frac{S_0}{\pi} \sin \hat{\vartheta} = \frac{S_0}{\pi} \sqrt{1 - (\sin \gamma \sin \vartheta \cos \varphi + \cos \gamma \cos \vartheta)^2}. \quad (5.8)$$

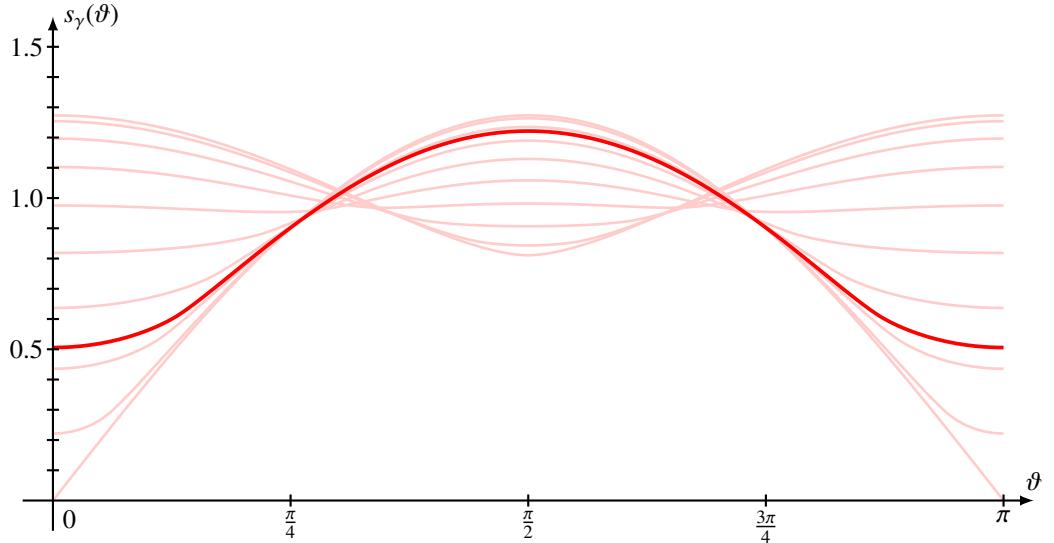


Abbildung 5.5: Mittlere Insolation über ein Jahr in Abhängigkeit von der geographischen Breite. Die hellroten Kurven zeigen die Insolation für Achsneigungen zwischen \$0^\circ\$ (sin \$\vartheta\$-Kurve mit Nullstellen an den Intervallenden) und \$90^\circ\$.

Mittelung über einen Tag

Jetzt müssen wir die Insolation noch über die Rotation im Laufe eines Tages mitteln. Wir erreichen dies, indem wir (5.8) über \$\varphi\$ über eine volle Umdrehung mitteln:

$$\begin{aligned} I(\vartheta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{S_0}{\pi} \sqrt{1 - (\sin \gamma \sin \vartheta \cos \varphi + \cos \gamma \cos \vartheta)^2} d\varphi \\ &= \frac{S_0}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - (\sin \gamma \sin \vartheta \cos \varphi + \cos \gamma \cos \vartheta)^2} d\varphi. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Das Integral auf der rechten Seite ist nicht in geschlossener Form lösbar. Die numerische Berechnung mit Octave ergibt den Graphen in Abbildung 5.5.

Als Spezialfall sei notiert, dass im Falle verschwindender Neigung \$\gamma = 0\$ das Integral zu

$$I(\vartheta) = \frac{S_0}{2\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta} d\varphi = \frac{S_0}{2\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta d\varphi = \frac{S_0}{\pi} \sin \vartheta$$

wird. In Abbildung 5.5 ist dies die Kurve mit den Nullstellen an den Intervallenden. Man erkennt auch, dass im Spezialfall \$\gamma = 90^\circ\$ die Insolation zu

$$I(\vartheta) = \frac{S_0}{2\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi} d\varphi$$

wird. Man kann ablesen und sieht dies auch in der Abbildung 5.5 bestätigt, dass die mittlere Insolation am Äquator ist als an den Polen. Wenn nämlich \$\sin \vartheta_1 < \sin \vartheta_2\$, dann ist

$$\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_1 \cos^2 \varphi} > \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_2 \cos^2 \varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{S_0}{2\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_1 \cos^2 \varphi} d\varphi > \frac{S_0}{2\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_2 \cos^2 \varphi} d\varphi,$$

in der Mitte des Intervalls bei $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ist $I(\vartheta)$ daher minimal.

5.2 Strahlungsbilanzmodelle

Im Kapitel 1 haben wir die physikalischen Grundlagen der Wetter und Klimaphänomene studiert. In diesem Abschnitt wollen wir ein einfaches Modell für die Energiebilanz der Erde entwickeln.

5.2.1 Strahlungsbilanz

Wir formulieren ein Modell mit einer einzigen Variablen, der globalen Mitteltemperatur T . Berechnet werden soll die zeitliche Entwicklung von T .

Einstrahlung

Die Erde mit Radius R erhält ihre Energie von der Sonne, die den konstanten Energiefloss $S_0 = 1368 \text{ W m}^{-2}$ einstrahlt. Der Querschnitt der Erde ist πR^2 , auf den eine Leistung von $\pi R^2 S_0$ fällt. Die Atmosphäre und die Weltmeere transportieren diese Energie, wir nehmen an, sie gleichmäßig über die ganze Erdoberfläche verteilt wird. Die pro Flächeneinheit anfallende Leistung ist daher

$$\frac{\pi R^2 S_0}{4\pi R^2} = \frac{1}{4} S_0 = Q. \quad (5.10)$$

Doch kann nicht die gesamte Energie absorbiert werden. Ein Teil wird von Wolken oder von Eis an der Oberfläche gleich wieder reflektiert, aber auch Landmassen und die Meere reflektieren einen kleineren Teil der Strahlung. Die auf Seite 13 beschriebene Albedo hat für die Erde Werte zwischen 0.3 und 0.7 je nach dem Grad der Bewölkung und der Vereisung. Bei tieferer Temperatur muss mit stärkerer Vereisung und mehr Wolken gerechnet werden. Sei $\alpha(T)$ die Albedo der Erde bei der Temperatur T . Der von der Erde absorbierte Fluss ist daher

$$(1 - \alpha(T))Q. \quad (5.11)$$

Die Grösse $1 - \alpha(T)$ heisst auch die *Coalbedo*.

Ausstrahlung

Die Erde verliert Energie auch wieder durch Strahlung. Nach dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz (1.6) ist die Ausstrahlung der Erde proportional zur vierten Potenz der Temperatur, also T^4 .

Bilanzgleichung

Die Temperatur ändert sich umso mehr, je grösser das Ungleichgewicht zwischen Einstrahlung (5.10) und (5.11) ist. Die Wärmekapazität der Erdoberfläche spielt ebenfalls eine Rolle, je grösser diese ist, desto träger folgt die Temperatur dem Energiebilanzüberschuss.

Wir erhalten so die Differentialgleichung

$$C \frac{dT}{dt} = (1 - \alpha(T))Q - \sigma T^4. \quad (5.12)$$

Je grösser C ist, desto kleiner ist die Änderungsgeschwindigkeit der globalen Mitteltemperatur bei gleicher rechter Seite.

Gleichgewichtslösung

Wir suchen eine Gleichgewichtslösung für dieses Modell, und nehmen zu diesem Zweck den typischen Wert $\alpha = 0.3$ der Albedo der Erde. Sie muss $\dot{T} = 0$ erfüllen, also

$$(1 - \alpha)Q - \sigma T^4 = 0$$

$$\Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{(1 - \alpha)Q}{\sigma}}$$

Setzt man die üblichen Werte für Q ein, erhält man eine globale Mitteltemperatur von $T = 254.8$ K.

Treibhauseffekt

Die tatsächliche global Mitteltemperatur $T = 287.7$ K ist. Diese Diskrepanz ist zwei Unzulänglichkeiten diesen einfachen Modells zurückzuführen:

- Der Treibhauseffekt sorgt dafür, dass nur ein Teil der abgestrahlten Wärmestrahlung die Erde tatsächlich verlässt. Wir können dies dadurch modellieren, dass wir in der Gleichung (5.12) den Ausstrahlungsterm um einen Faktor ε reduzieren, der den Treibhauseffekt modellieren soll. Die neue Grundgleichung wird dann

$$C \frac{dT}{dt} = (1 - \alpha(T))Q - \varepsilon \sigma T^4. \quad (5.13)$$

Um die aktuelle Gleichgewichtstemperatur $T = 287.7$ K von 2010 zu reproduzieren müssen wir $\varepsilon = 0.32$ wählen.

- Die Albedo hängt von der Temperatur ab und wird mit abnehmender Temperatur grösser. Bei sehr tiefen Temperaturen kann die Albedo auf bis 0.7 steigen. Ein einfaches Modell, welches Diesen Sachverhalt abbildet, ist

$$\alpha(T) = 0.5 - 0.2 \tanh\left(\frac{T - 265}{10}\right) \quad (5.14)$$

Gleichgewichte

Das Modell mit der Albedo-Funktion (5.14) hat nicht nur einen sondern drei Gleichgewichtspunkte. Die Einstrahlung und die Ausstrahlung ist in Abbildung 5.6 dargestellt.

Die beiden Gleichgewichtspunkte T_1^* und T_3^* sind stabil. In beiden Punkten ändert sich die absorbierte Energie kaum bei einer Temperaturänderung, aber die Ausstrahlung wird bei erhöhter Temperatur wesentlich effizienter, so dass sich die Erde wieder abkühlt. Ebenso verringert sich die Ausstrahlung bei leicht tieferer Temperatur sofort, so dass die Erde sich wieder zur Gleichgewichtstemperatur aufwärmen kann.

Das Gleichgewicht T_2^* ist dagegen nicht stabil. Bei höherer Temperatur wird die Einstrahlung sofort grösser, ohne dass die Ausstrahlung mithalten kann, so dass sich die Erde weiter aufwärmst bis zur Temperatur T_3^* . Bei leicht tieferer Temperatur steigt die Albedo stark an so dass die Einstrahlung schnell abnimmt, während die Ausstrahlung nur vergleichsweise langsam zurückgeht, die Erde kühlst sich bis auf die Temperatur T_1^* ab.

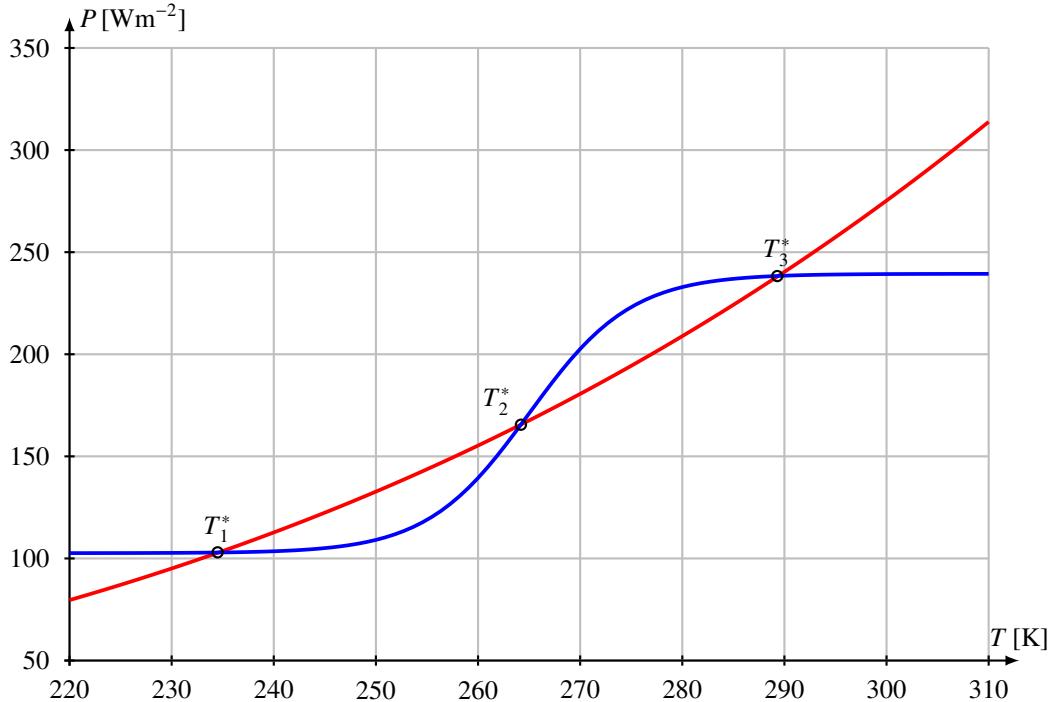


Abbildung 5.6: Einstrahlung und Ausstrahlung in dem einfachen Bilanzmodell mit der Modellgleichung (5.13) und der Albedo-Funktion (5.14). Die Ausstrahlung $\varepsilon\sigma T^4$ ist rot eingezeichnet, blau ist die Einstrahlung. Es entstehen drei Gleichgewichtspunkte T_1^* , T_2^* und T_3^* , von denen aber T_2^* nicht stabil ist.

Bifurkation und globale Erwärmung

Der Parameter ε modelliert den Treibhauseffekt. Steigt die Konzentration der Klimagase in der Atmosphäre, wird die abgestrahlten Leistung geringer, also ε kleiner. Es lohnt sich daher, die Entwicklung des Gleichgewichtspunktes in Abhängigkeit von ε zu untersuchen. Das Bifurkationsdiagramm des Modells (5.13) in Abhängigkeit von ε ist in Abbildung 5.7 dargestellt.

Man kann aus dem Diagramm ablesen, dass mit weiterer Zunahme des Treibhauseffektes, als mit Abnahme von ε , die globale Mitteltemperatur weiter ansteigen wird. Sinkt ε unter den kritischen Wert ε_1 steigt die Temperatur auf über 305 K. In diesem Fall verschwinden die beiden Gleichgewichtspunkte T_1^* und T_2^* , es bleibt nur das Gleichgewicht T_3^* .

Interessant ist aber auch, was bei starker Abnahme der Treibhausgaskonzentration passiert. Wenn ε über ε_2 ansteigt, dann verschwinden T_3^* und T_2^* , es bleibt nur der Gleichgewichtspunkt T_1^* , bei dem die ganze auf sehr tiefer Temperatur vereist. Man vermutet, dass genau dieser Zustand in der Phase des *Snowball Earth* eingetreten ist, als die ersten photosynthetisierenden Organismen die Treibhausgase dramatische reduziert und damit ε stark erhöht hatten. Man beachte dass es nur möglich ist, den heutigen Zustand wieder zu erreichen, indem die Treibhausgaskonzentration soweit gesteigert wird, dass $\varepsilon < \varepsilon_1$ wird. Es muss im Laufe der Erdgeschichte also nach der *Snowball Earth* Phase auch Phasen mit wesentlich höherer Treibhausgaskonzentration als heute gegeben haben.

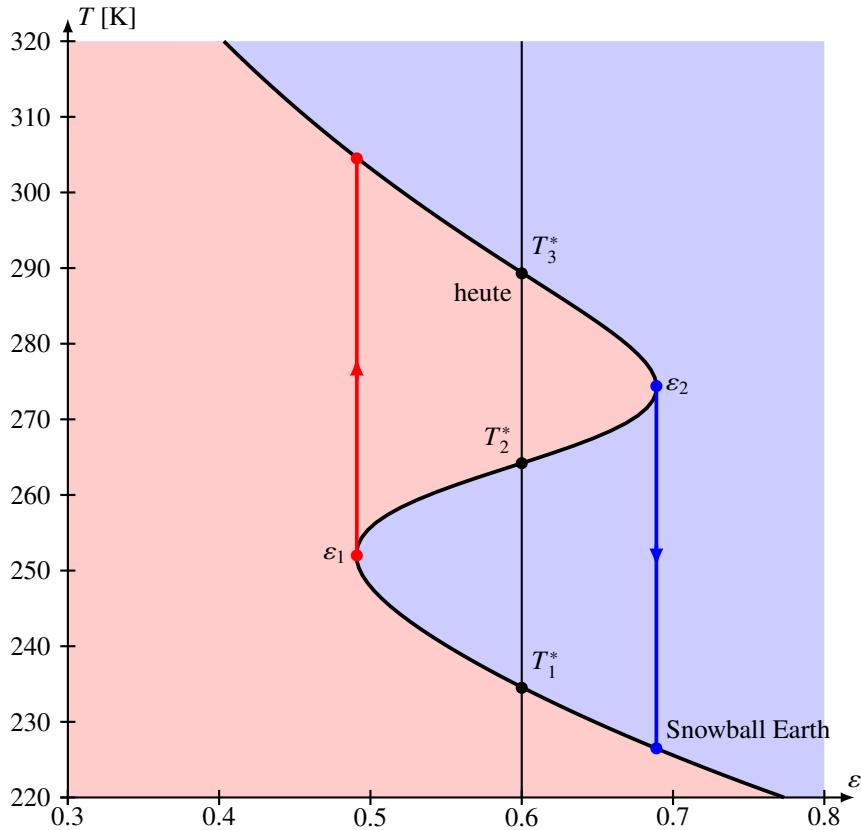


Abbildung 5.7: Bifurkationsdiagramm für das Bilanzmodell (5.13) in Abhängigkeit vom Treibhauseffekt-Parameter ε .

5.2.2 Modell von Budyko

Bisher haben wir die Ausstrahlung mit Hilfe des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes für die Strahlung eines schwarzen Körpers modelliert. Es ist fraglich, ob dies tatsächlich zutreffend ist. Die Ausstrahlung $E_{\text{out}}(T)$ der Ausstrahlung könnte also durchaus eine kompliziertere Funktion sein. Sie muss aber so beschaffen sein, dass sich bei der aktuellen Mitteltemperatur T^* ein stabiles Gleichgewicht ergibt. In der Umgebung des Gleichgewichtes kann die Funktion $E_{\text{out}}(T)$ als lineare Funktion $E_{\text{out}} = A + BT$ dargestellt werden. Nahe bei T^* kann die globale Mitteltemperatur also mit einem Modell der Form

$$C \frac{dT}{dt} = (1 - \alpha(T))Q - (A + BT) \quad (5.15)$$

beschrieben werden. Das Gleichgewicht erfüllt

$$(1 - \alpha(T^*))Q = A + BT^*$$

und ist stabil, wenn die Steigung der Einstrahlung kleiner ist als die Steigung der Ausstrahlung, also

$$-Q\alpha'(T) < B. \quad (5.16)$$

Dieses Modell wurde schon in den sechziger Jahren von Budyko vorgeschlagen. Zahlenwerte für A und B konnte seit der damaligen Zeit durch Satellitenmessungen bestimmt werden.

Die Folgen des Treibhauseffektes sind auch in diesem einfacheren Modell nachvollziehbar. Die Erhöhung der Treibhausgaskonzentration reduziert die Ausstrahlung, was sich zum Beispiel in einem kleineren Wert von B äußert. Eine Abnahme von B um ΔB führt zu einer Änderung der Gleichgewichtstemperatur um ΔT , die die Gleichung

$$\begin{aligned} (1 - \alpha(T^* + \Delta T))Q &= A + (B - \Delta B)(T^* + \Delta T) \\ \underbrace{(1 - \alpha(T^*))Q - Q\alpha'(T^*)\Delta T}_{= A + BT^*} &= A + BT^* - T^*\Delta B + B\Delta T \\ (Q\alpha'(T^*) + B)\Delta T &= T^*\Delta B \\ \Delta T &= \frac{T^*\Delta B}{Q\alpha'(T^*) + B} \end{aligned}$$

erfüllt. Man kann daraus ablesen, dass eine Abnahme von B genau dann zu einer Zunahme der Mitteltemperatur, wenn der Nenner positiv ist, also

$$Q\alpha'(T^*) + B > 0 \quad \Rightarrow \quad -Q\alpha'(T^*) < B,$$

was die Bedingung (5.16) beweist.

5.3 Zonenmodelle

Das einfachste Bilanzmodell kommt mit einer einzigen modellierten Grösse, der globalen Mitteltemperatur $T(t)$ aus. Es reicht aus, den Zusammenhang zwischen Treibhausgaskonzentration und globaler Erwärmung zu erklären. Es ist aber zu grob, den zum Beispiel für die thermohaline Zirkulation wesentliche Abhängigkeit der Temperatur von der Breite wiederzugeben.

Im Kapitel 2 wurde gezeigt, dass der Coriolis-Effekt dazu führt, dass die Atmosphäre mindestens im Mittel in Zonen organisiert ist, die ums ausgeprägter sind, je schneller die Umdrehungsgeschwindigkeit ist. Die in Abbildung 1.7 sichtbaren Zellen zeigen, dass der Austausch von Energie zwischen den Zonen erschwert ist, weil die Zellengrenzen für die Strömung undurchlässig sind. Die Strömung innerhalb der Zellen und die vergleichsweise schnelle Rotation der Erde führt also dazu, dass sich die Atmosphäre in Zonen aufteilen lässt, die einzeln mit einer Zonenmitteltemperatur modellieren lassen.

Ein erstes solches Modell könnte die Nord- und die Südhalbkugel voneinander trennen. Der Energieaustausch zwischen den beiden Halbkugeln ist dadurch eingeschränkt, dass die globale Zirkulation den Äquator nicht überquert. Die mit den Jahreszeiten schwankende Einstrahlung auf eine Halbkugel wird also nicht durch die andere Halbkugel kompensiert, so dass die Mitteltemperaturen der Halbkugeln ausgeprägte Jahresrhythmen zeigen. In Kapitel 16 wird gezeigt, wie sich daraus ableiten lässt, wie die schwankende Neigung der Erdachse zu Eiszeiten führen kann.

Ein einfaches diskretes Modell könnte wie folgt aufgebaut werden. Man unterteilt die Atmosphäre in Zonen, numeriert mit $i = 1, \dots, n$. Die Einstrahlung in eine Zone kann durch Integration der Einstrahlung (5.9) über das ϑ -Interval ermittelt werden. Wir bezeichnen die Einstrahlung in Zone i mit Q_i . Wie bei einem Bilanzmodell könnten wir jetzt die zeitliche Entwicklung mit einer Gleichung der Form

$$C_i \frac{dT_i}{dt} = (1 - \alpha_i(T_i))Q_i - \varepsilon_i \sigma T_i^4$$

modellieren. Dabei würden wir aber den Wärmeaustausch mit den Nachbarzonen vernachlässigen. Die Gleichung muss daher mit zusätzlichen Termen für die Nachbarzonen korrigiert werden, also

$$C_i \frac{dT_i}{dt} = (1 - \alpha_i(T_i))Q_i - \varepsilon_i \sigma T_i^4 + \kappa_{i,i+1}(T_{i+1} - T_i) - \kappa_{i-1,i}(T_i - T_{i-1}). \quad (5.17)$$

Die Konstanten C_i geben die Wärmekapazität einer Zone wieder. Je grösser der Anteil ist, zu dem eine Zone mit Wasser bedeckt ist, desto grösser ist ihre Wärmekapazität. Die Albedo einer Zone hängt ebenfalls von deren Bodenbedeckung ab, daher braucht es eine eigene Albedo-Funktionen α_i für jede einzelne Zone. Die Ausstrahlung modellieren wir wieder mit dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz. Die Konstanten ε_i geben einerseits Abweichungen von der Strahlung eines schwarzen Körpers wieder oder die Tatsache, dass auch der Treibhauseffekt nicht in allen Zonen gleich ist.

Die Konstanten κ_{ij} geben die Wärmeleitung zwischen den Zonen wieder. Indem wir abkürzen

$$k_{ij} = \begin{cases} \kappa_{i,i+1} & j = i + 1 \\ -\kappa_{i,i+1} - \kappa_{i-1,i} & i = j \\ \kappa_{i-1,i} & j = i - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Modellgleichung wird dann

$$C_i \frac{dT_i}{dt} = (1 - \alpha_i(T_i))Q_i - \varepsilon_i \sigma T_i^4 + \sum_{j=1}^n k_{ij} T_j. \quad (5.18)$$

Die Gleichungen (5.18) enthalten sehr viele experimentell zu bestimmenden Konstanten, wir können daher ohne zusätzliche Informationen keine Aussagen über die zeitliche Entwicklung der Lösungen machen.

Die Wärmeleitungsgleichung auf der Kugeloberfläche bietet eine Grundlage zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten. Ein direkterer Weg ist jedoch, nicht eine Aufteilung in Zonen zu verwenden, sondern auch die Basisfunktionen für die Beschreibung der Temperaturverteilung der Geometrie der Kugel anzupassen. Dies ist, was die spektralen Methoden versuchen, die im nächsten Abschnitt erläutert werden.

5.4 Spektrale Methoden

In den Ausführungen zum Lorenzmodell in Abschnitt 2.5 haben wir gesehen, wie man mit Hilfe einer geeigneten Wahl von Basisfunktionen die komplexen fluidynamischen partiellen Differentialgleichungen zu einem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen vereinfachen kann. Die Basis wurde so gewählt, dass einerseits möglichst viel geometrische Information, im speziellen Fall die rechteckige Form des Definitionsgebietes, bereits darin einfliest. Andererseits sollen sich die wesentlichsten Eigenschaften der Lösung bereits aus wenigen Basisfunktionen rekonstruieren lassen. Wie Kapitel 10 zeigt, lässt sich die Idee von Abschnitt 2.5 sogar maschinell in eine immer genaueres Modell erweitern, wenn sich nur eine geeignete Menge von Basisfunktionen gefunden werden kann. Ziel dieser Abschnitte ist zu illustrieren, wie so eine Basis von Funktionen aussehen könnte, mit der man globale Modelle vereinfachen könnte.

5.4.1 Kugelkoordinaten

Spektrale Methoden verwenden auf entscheidende Art und Weise die Besonderheiten des natürlichen Koordinatensystems auf der Kugeloberfläche. In diesem Abschnitt sollen daher Kugelkoordinaten und die zugehörigen Differentialoperatoren genauer untersucht werden.

Koordinatenumrechnung

Wir verwenden in diesem Abschnitt Kugelkoordinaten mit der üblichen Konvention, dass die geographische Breite als Winkel ϑ ausgehend vom Nordpol oder der z -Achse gemessen wird, dass also $\vartheta \in [0, \pi]$. Die geographische Breite wird ausgehen von der x -Achse als Winkel φ gemessen. Schliesslich bezeichnet r die Entfernung eines Punktes vom Nullpunkt.

Ein Breitenkreis zur geographischen Breite ϑ hat Radius $r \sin \vartheta$. Damit ergeben sich die Formeln

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta$$

für die Umrechnung von Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten.

Differentialoperatoren

Das Ziel ist, den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten auszudrücken. Zu diesem Zweck müssen die partiellen Ableitungsoperatoren nach den Koordinaten x , y und z durch die Operatoren

$$\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \vartheta} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

ausgedrückt werden.

Für die Ableitungsoperatoren gilt die Kettenregel in der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Die gesuchte Darstellung der Ableitungsoperatoren läuft also darauf hinaus, die Ableitungen von Kugelkoordinaten nach nach kartesischen Koordinaten zu bestimmen.

Die Ableitungen von r werden einfacher zur berechnen durch die Beziehung

$$\frac{\partial r^2}{\partial x} = 2r \frac{\partial r}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2r} \frac{\partial r^2}{\partial x}.$$

Da $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2r} 2x = \frac{x}{r} = \sin \vartheta \cos \varphi, \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2r} 2y = \frac{y}{r} = \sin \vartheta \sin \varphi \\ \text{und} \quad \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2r} 2z = \frac{z}{r} = \cos \vartheta. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Auf ähnliche Weise lassen sich die Ableitungen von ϑ bestimmen. Dazu geht man aus von der Identität $z = r \cos \vartheta$ und leitet sie nach den kartesischen Koordinaten ab:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial x} & \Rightarrow & \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \cos \vartheta \frac{\partial r}{\partial x}, \\ 0 &= \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial y} & \Rightarrow & \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \cos \vartheta \frac{\partial r}{\partial y}, \\ 1 &= \frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial z} & \Rightarrow & \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \left(1 - \cos \vartheta \frac{\partial r}{\partial z}\right). \end{aligned}$$

Die Ableitungen von r wurden in (5.20) bereits berechnet, so dass wir nach den Ableitungen von ϑ auflösen können. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi = \frac{\cos \vartheta \cos \varphi}{r}, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial y} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \cos \vartheta \sin \vartheta \sin \varphi = \frac{\cos \vartheta \sin \varphi}{r}, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial z} &= -\frac{1}{r \sin \vartheta} \underbrace{(1 - \cos^2 \vartheta)}_{\sin^2 \vartheta} = -\frac{\sin \vartheta}{r}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Diese Umformungen waren möglich, weil z nur von r und ϑ abhing. Die Kettenregel hat dann eine Beziehung zwischen den beiden Ableitungen dieser Variablen geliefert.

Die verbleibenden Anleitungen können auf ähnliche Weise aus dem Ausdruck $x = r \sin \vartheta \cos \varphi$ oder $y = r \sin \vartheta \sin \varphi$ gewonnen werden. Wenn ihn partiell nach kartesischen Koordinaten ableitet, steht auf der linken Seite eine 1 oder 0, auf der rechten Seite ein Ausdruck mit allen drei Ableitungen von Kugelkoordinaten nach x , wovon die Ableitungen von r und ϑ nach den kartesischen Koordinaten bereits bekannt sind. Man kann also nach den Ableitungen von φ auflösen. Die etwas mühsame Berechnung liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{\sin \varphi}{r \sin \vartheta}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\cos \varphi}{r \sin \vartheta}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{5.22}$$

In den Gleichungen (5.20), (5.21) und (5.22) haben wir alle Koeffizienten für die Kettenregel (5.19) gefunden. Zusammen erlauben sie, Ableitungen nach kartesischen Koordinaten durch Ableitungen nach Kugelkoordinaten auszudrücken.

Laplace-Operator

In kartesischen Koordinaten ist der Laplace-Operator gegeben durch die Definition

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Durch Einsetzen der Ableitungsoperatoren nach (5.19) unter Verwendung der Gleichungen (5.20), (5.21) und (5.22) kann man nach ziemlich langwieriger Rechnung [9, Anhang B.3] den Ausdruck

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \tag{5.23}$$

für den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten finden.

5.4.2 Kugelfunktionen

Die Basisfunktionen im Lorenzmodell waren aus zwei Gründen besonders erfolgreich.

1. Die Basisfunktionen waren Produkte von Funktionen, die jeweils nur von einer Koordinate abhängen. In einem Produkt $f(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$ sind die Ableitungen nach den Koordinaten besonders einfach auszurechnen, da gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = X'(x) \cdot Y(y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = X(x) \cdot Y'(y).$$

2. Die Basisfunktionen waren Eigenfunktionen des Laplace-Operators, also

$$\Delta f = \lambda f.$$

Da in den Gleichungen der Strömungsdynamik der Laplace-Operator prominent vorkommt, bedeutet diese Eigenschaft, dass die Wirkung des Laplace-Operators auf die Basisfunktionen durch Multiplikation mit dem Eigenwert ersetzt werden kann. Dadurch werden die Gleichungen sehr vereinfacht und die Ordnung der Differentialgleichung reduziert sich.

Wenn der Erfolg der speziellen Basiswahl im Lorenz-System für ein Wetter- oder Klimamodell auf der Kugeloberfläche repliziert werden soll, dann ist naheliegend, dass dazu Funktionen mit den gleichen Eigenschaften in Kugelkoordinaten gefunden werden müssen.

Separationsansatz

Die Produkteigenschaft bedeutet, dass die Basisfunktionen in der Form

$$f(r, \varphi, \vartheta) = R(r) \cdot \Phi(\varphi) \cdot \Theta(\vartheta)$$

gefunden werden müssen. Das Separationsverfahren für partielle Differentialgleichungen [2, Chapter 4] basiert genau auf dieser Art von Ansatz für die Lösung einer partiellen Differentialgleichung, man nennt ihn daher auch einen *Separationsansatz*.

Eigenwertgleichung

Die Eigenwerteigenschaft bedeutet, dass die Funktionen Eigenfunktionen des Laplace-Operators sein müssen, also Lösungen der partiellen Differentialgleichungen

$$\Delta f = \lambda f.$$

Wenden wir den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten auf f an, finden wir

$$\begin{aligned} \Delta f &= \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right) R(r) \cdot \Phi(\varphi) \cdot \Theta(\vartheta) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 R'(r)) \cdot \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} (\sin \vartheta \Theta'(\vartheta)) \cdot R(r) \cdot \Phi(\varphi) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \Phi''(\varphi) \cdot R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r^2} (2rR'(r) + r^2 R''(r)) \Theta(\vartheta) \Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} (\sin \vartheta \Theta'(\vartheta))' \cdot R(r) \cdot \Phi(\varphi) \\
&\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \Phi''(\varphi) \cdot R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \\
&= \lambda R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi).
\end{aligned}$$

Separation von r

Um die einzelnen Funktionen zu isolieren, teilen wir durch f . Zwar kann f Nullstellen haben, aber für die meisten Werte der Koordinaten ist f von Null verschieden, für diese Punkte ist die Division unproblematisch und ausreichend, um die Faktoren zu bestimmen. Wir erhalten

$$\frac{2rR'(r) + r^2 R''(r)}{r^2 R(r)} + \frac{(\sin \vartheta \Theta'(\vartheta))'}{r^2 \sin \vartheta \Theta(\vartheta)} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda$$

Um die Variable r allein auf die linke Seite zu bringen, multiplizieren wir mit r^2 , subtrahieren λr^2 und bringen den zweiten und dritten Term auf der linken Seite auf die rechte Seite. So erhalten wir

$$\frac{r^2 R''(r) + 2rR'(r) - \lambda r^2 R(r)}{R(r)} = -\frac{(\sin \vartheta \Theta'(\vartheta))'}{\sin \vartheta \Theta(\vartheta)} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$$

Die linke Seite hängt nur von r ab, die rechte Seite nur von ϑ und φ . Dies ist nur möglich, wenn beide Seiten konstant sind. Es gibt also eine Zahl μ derart, dass

$$\frac{r^2 R''(r) + 2rR'(r) - \lambda r^2 R(r)}{R(r)} = \mu \quad (5.24)$$

$$\frac{(\sin \vartheta \Theta'(\vartheta))'}{\sin \vartheta \Theta(\vartheta)} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\mu \quad (5.25)$$

Die erste Gleichung kann man vereinfachen zu

$$r^2 R''(r) + 2rR'(r) - (\lambda r^2 - \mu)R(r) = 0, \quad (5.26)$$

eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. μ kann nicht beliebig gewählt werden, der Wert muss so sein, dass (5.25) gelöst werden kann.

Doch auch λ ist nicht beliebig, sein Wert muss so gewählt werden, dass eventuelle Randbedingungen für die zugehörigen Funktion $R(r)$ erfüllt sind. Da die r -Abhängigkeit für die folgende Diskussion nicht wichtig ist, verfolgen wir diese Frage hier nicht weiter.

Separation von ϑ und φ

Die Gleichung (5.25) enthält nur noch die Variablen ϑ und φ . Wir versuchen den gleichen Trick erneut: indem wir mit $\sin^2 \vartheta$ multiplizieren, den Term mit μ auf die linke Seite bringen und den zweiten Term auf die rechte Seite bringen, erhalten wir

$$\sin \vartheta \frac{1}{\Theta(\vartheta)} \frac{d}{d\vartheta} (\sin \vartheta \Theta'(\vartheta)) + \mu \sin^2 \vartheta = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}.$$

Erneut haben wir eine Gleichung, deren linke Seite nur von ϑ und deren rechte Seite nur von φ abhängt. Also sind wieder beide Seiten konstant, es gibt also eine Konstante v derart, dass $\Theta(\vartheta)$ und

$\Phi(\varphi)$ die Gleichungen

$$\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \Theta(\vartheta) \right) = (-\mu \sin^2 \vartheta + \nu) \Theta(\vartheta) \quad (5.27)$$

$$-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \nu \quad (5.28)$$

erfüllen.

Lösungsfunktionen $\Phi(\varphi)$

Die zweite Gleichung (5.28) ist gleichbedeutend mit

$$\Phi''(\varphi) = -\nu \Phi(\varphi), \quad (5.29)$$

wobei $\Phi(\varphi)$ eine 2π -periodische Funktion ist. Die Lösungen der Gleichung (5.29) sind $\cos \sqrt{\nu}\varphi$ und $\sin \sqrt{\nu}\varphi$, aber die Periodizität verlangt, dass $\sqrt{\nu}$ eine ganze Zahl ist. Es muss also gelten $\nu = m^2$ mit $m \in \mathbb{N}$.

Lösungsfunktionen $\Theta(\vartheta)$

Im vorangegangen Absatz wurde gezeigt, dass $\nu = k^2$ ist, was die Gleichung (5.27) zu

$$\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \Theta(\vartheta) = \left(\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \right)^2 \Theta(\vartheta) = (-\mu \sin^2 \vartheta + k^2) \Theta(\vartheta) \quad (5.30)$$

In dieser Form ist die Differentialgleichung nicht so leicht zu erkennen. Schreibt man aber $z = \sin \vartheta$, dann wird die Ableitung einer Funktion $P(z) = \Theta(\vartheta)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\vartheta} \Theta(\vartheta) &= \frac{d}{d\vartheta} P(\cos \vartheta) = -P'(\cos \vartheta) \sin \vartheta = -\sqrt{1 - \cos^2 \vartheta} P'(\cos \vartheta) \\ &= -\sqrt{1 - z^2} P'(z) = -\sqrt{1 - z^2} \frac{d}{dz} P(z). \end{aligned}$$

Ableitungen nach ϑ sind also zu ersetzen durch Ableitungen nach z gefolgt von Multiplikation mit $-\sqrt{1 - z^2}$. In der Differentialgleichung (5.30) wird die Ableitung nach ϑ jeweils auch noch mit $\sin \vartheta = \sqrt{1 - z^2}$ multipliziert. Der Operator

$$\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \quad \text{bekommt daher die Form} \quad -(1 - z^2) \frac{d}{dz}. \quad (5.31)$$

Das Vorzeichen ist nicht wichtig, da der Operator in der Differentialgleichung (5.30) nur im Quadrat vorkommt.

Wir setzen jetzt die Form (5.31) des Differentialoperators in die Differentialgleichung (5.30) ein und erhalten

$$\begin{aligned} (1 - z^2) \frac{d}{dz} ((1 - z^2) P'(z)) &= (-\mu(1 - z^2) + m^2) P(z) \\ \Rightarrow (1 - z^2) P''(z) - 2z P'(z) + \mu P(z) - \frac{m^2}{1 - z^2} P(z) &= 0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Für $m = 0$ ist (5.32) die sogenannte Legendresche Differentialgleichung. Sie hat Lösungen für $\mu = l(l+1)$ mit $l \in \mathbb{N}$. Für $m > 0$ ist (5.32) die assozierte Legendre-Differentialgleichung. Für beide Gleichung lassen sich Lösungen angeben, es sind die sogenannten Legendre-Polynome $P_l(z)$ im Fall $m = 0$ und die zugeordneten Legendre-Polynome $P_l^m(z)$ für beliebiges m .

Kugelflächenfunktionen

Mit den gefundenen Lösungen für $\Phi(\varphi)$ und $\Theta(\vartheta)$ finden wir jetzt die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichung (5.25). Es sind die Funktionen

$$Y_l^m(\vartheta, \varphi) = N_{lm} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

mit einem geeigneten Normierungsfaktor N_{lm} . Diese Funktionen haben genau die Eigenschaften, die wir in der Einleitung dieses Abschnitts als Voraussetzungen für eine geeignete Basis gefordert haben.

5.4.3 Spektrale Gleichungen

Mit den Kugelfunktionen steht jetzt eine Basis für Funktionen auf der Kugeloberfläche oder auch für eine Kugelschicht wie die Atmosphäre zur Verfügung. Um die zeitliche Entwicklung zu verstehen, wie sie zum Beispiel vom Modell (2.28) beschrieben wird, müssen diese Gleichungen umformuliert werden als Gleichungen für die Koeffizienten einer Darstellung der Lösungsfunktion als Linearkombination

Um das Prinzip zu veranschaulichen, wird dies für die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T$$

auf der Kugeloberfläche gezeigt. Die Temperatur kann also als als Linearkombination

$$T(t, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}(t) Y_l^m(\vartheta, \varphi) \quad (5.33)$$

geschrieben werden. Die Funktionen $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ sind nach Konstruktion Eigenfunktionen des Laplace-Operators, der zugehörige Eigenwert soll mit λ_l^m abgekürzt werden.

Setzt man (5.33) in die Differentialgleichung ein, wird sie zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\partial a_{lm}(t)}{\partial t} Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \dot{a}_{lm}(t) Y_l^m(\vartheta, \varphi) \\ \kappa \Delta T &= \kappa \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}(t) \Delta Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \kappa \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}(t) \lambda_l^m Y_l^m(\vartheta, \varphi) \end{aligned}$$

Mittels Koeffizientenvergleich folgen die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\dot{a}_{lm}(t) = \kappa \lambda_l^m a_{lm},$$

deren Lösungen man sofort angeben kann, sie sind

$$a_{lm}(t) = a_{lm}(0) e^{\kappa \lambda_l^m t}.$$

Damit kann man die Lösung der Wärmeleitungsgleichung sofort hinschreiben, sie ist

$$T(t, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}(0) e^{\kappa \lambda_l^m t} Y_l^m(\vartheta, \varphi). \quad (5.34)$$

Die Verwendung der Basis der Kugelfunktionen hat also zu einer besonders einfachen Lösung geführt.

Die Gleichung (2.28) ist nicht linear, die Lösung der Gleichung wird nicht mehr so einfach sein wie im Fall der Wärmeleitungsgleichung. Da aber die Kugelfunktionen eine Basis bilden, müssen sich auch Produkte von Kugelfunktionen oder Ableitungen von Kugelfunktionen als Linearkombinationen von Kugelfunktionen ausdrücken lassen, wie das im Beispiel auf Seite 51 für die nichtlineare Gleichung von Burgers und die Basis der Exponentialfunktionen vorgeführt wurde. Auch auf der Kugeloberfläche lässt sich daher ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Koeffizienten $a_{lm}(t)$ aufstellen, mit dem Unterschied, dass sie nicht mehr linear sein werden.

Kapitel 6

Fourier-Analysis

Im Kapitel 1 wurde gezeigt, dass einige der Einflüsse auf das Klimasystem periodisch sind mit einer Periode, die vergleichbar oder grösser ist als die bei der Definition des Begriffes Klima üblicherweise verwendeten Mittelungszeitspanne. Diese Anregungen führen daher zu periodischen Klimaschwankungen. Die Fourier-Analysis ermöglicht, solche periodischen Einflüsse in einem Signal zu erkennen und sie von anderen Phänomenen zu trennen.

6.1 Periodische Funktionen

Das ursprüngliche Budyko-Modell modelliert die Jahresmittel-Temperatur, ignoriert also die Temperatur-Entwicklung der Temperatur im Laufe des Jahres. Damit ist es aber zum Beispiel nicht möglich, das Einsetzen von Eiszeiten zu modellieren. Wie in Kapitel 16 gezeigt wird, ist die jährlich auf die Erde eingetrahlte Leistung unabhängig von der Neigung der Erdachse. Ein Modell, welches den Zusammenhang zwischen Eiszeiten und der Achsneigung modellieren soll muss also die periodischen Schwankungen der Einstrahlung der Sonne auf jede Erd-Halbkugel berücksichtigen.

Ein geeignetes Modell wird also nicht mehr autonom sein, sondern auf der rechten Seite der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

muss man berücksichtigen, dass $f(x, t)$ nun auch von der Zeit t abhängt und periodisch in t mit Periode T ist. Dies bedeutet $f(x, t + T) = f(x, t)$ für beliebige Vektoren x und Zeiten t .

Man kann natürlich nicht mehr erwarten, dass es eine zeitunabhängige Gleichgewichtslösung gibt. Vielmehr erwarten wir statt konstanter Gleichgewichtslösungen periodische Lösungen mit der gleichen Periode T , dass also $x(t + T) = x(t)$.

6.1.1 Fourierreihen

Die Funktionen

$$1, \cos \frac{2\pi kt}{T}, \sin \frac{2\pi kt}{T}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (6.1)$$

sind alle periodisch mit Periode T , aber auch eine beliebige Linearkombination

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right) \quad (6.2)$$

hat diese Eigenschaft.

Es war eine bedeutende Erkenntnis von Joseph Fourier, dass bis auf ein paar technische Bedingungen, welche die Konvergenz der Funktionenreihe sicherstellen sollen, jede periodische Funktion $f(t)$ als Reihe von Vielfachen der Funktionen (6.1) in der Form (6.2) dargestellt werden kann. Die Berechnung der Koeffizienten a_0, a_1, a_2, \dots und b_1, b_2, b_3, \dots erfolgt mit Hilfe von Fourier-Integralen, deren Theorie wir hier weiter nicht entwickeln wollen.

Für unsere Zwecke ist die vollständige Theorie der Fourier-Reihen nicht notwendig, denn die Daten, an die wir unsere Klimamodelle anpassen müssen, stellen bestenfalls diskrete Approximationen von stetigen Funktionen dar. Wir müssen die allgemeine Fourier-Theorie daher spezialisieren auf diese diskrete Situation.

6.1.2 Diskrete Fourierreihen: trigonometrische Polynome

Wir wollen im Folgenden periodische diskrete Funktionen möglichst gut approximieren. Da für diskrete Funktionen die Skala des Argumentes nicht so wichtig ist, verwenden wir als Basis die Funktionen

$$1, \cos kt \quad \text{und} \quad \sin kt, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (6.3)$$

Die Funktion $f(t)$ soll also geschrieben werden als sogenanntes trigonometrisches Polynom

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \quad (6.4)$$

Die Funktion soll die Werte y_j in den äquidistanten t -Werten $t_j = 2\pi j/N$ mit $0 \leq j < N$ möglichst gut wiedergeben.

Zur Bestimmung der Koeffizienten a_0, a_k und b_k stehen also nur die N Bedingungen

$$f(t_j) = y_j \quad (6.5)$$

zur Verfügung. Die Gleichungen (6.5) sind lineare Gleichungen für die Unbekannten a_k und b_k mit $\cos kt_j$ und $\sin kt_j$ als Koeffizienten. Sie können daher höchstens endlich viele Koeffizienten a_k und b_k bestimmen. Dieses Problem wird im nächsten Abschnitt gelöst.

6.2 Fourier-Koeffizienten

In diesem Abschnitt bestimmen wir die Fourierkoeffizienten für ein trigonometrisches Polynom der Form

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos kt + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin kt + a_n \cos nt, \quad (6.6)$$

so dass die Werte

$$y_j \quad \text{zu den Zeitpunkten} \quad t_j = 2\pi \frac{j}{N}, \quad 1 \leq j < N \quad (6.7)$$

möglichst genau die Funktionswerte $f(t_j)$ reproduzieren. Im Ansatz (6.6) finden wir $2n$ zu bestimmende Koeffizienten, in (6.7) finden wir dagegen genau N Gleichungen, mit denen wir die Koeffizienten bestimmen könnten. Für $N > 2n$ haben wir also zu viele Daten, für $N < 2n$ reichen die Datenpunkte nicht, die Koeffizienten zu bestimmen. Im optimalen Fall, für $N = 2n$ sollte es möglich sein, die Koeffizienten so zu bestimmen, dass die Funktionswerte y_j exakt reproduziert werden.

6.2.1 Least Squares

Für $N > 2n$ können wir nicht erwarten, dass der Ansatz die Daten exakt reproduzieren kann, wir müssen uns also mit einer Näherungslösung begnügen. Wir verlangen stattdessen, dass der Fehler der Lösung möglichst gering wird, dass also

$$L = L(a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1}) = \sum_{j=1}^N (y_j - f(t_j))^2$$

möglichst klein wird.

Die Grösse L wird minimal, wenn alle Ableitungen nach den Koeffizienten verschwinden:

$$\frac{\partial L}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial a_l} = 0, \quad 1 \leq l \leq n \quad \frac{\partial L}{\partial b_l} = 0, \quad 1 \leq l \leq n-1$$

Wir berechnen die Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial a_0} &= -2 \sum_{j=1}^N (y_j - f(t_j)) \cdot \frac{\partial f}{\partial a_0}(t_j) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial a_l} &= -2 \sum_{j=1}^N (y_j - f(t_j)) \cdot \frac{\partial f}{\partial a_l}(t_j) = 0 \quad k = 1, \dots, n \\ \frac{\partial L}{\partial b_l} &= -2 \sum_{j=1}^N (y_j - f(t_j)) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_l}(t_j) = 0 \quad k = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Man beachte, dass der erste Klammerausdruck in der Summe die Koeffizienten a_0, a_k und b_k nur linear enthält. Die Funktion f enthält die Koeffizienten ebenfalls nur linear, so dass die Ableitungsterme die Koeffizienten nicht mehr enthalten werden. Tatsächlich ergibt die Berechnung der Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial a_0}(t_j) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_l}(t_j) = \cos lt_j \quad l = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial f}{\partial b_l}(t_j) = \sin lt_j \quad l = 1, \dots, n-1$$

Die Gleichungen, die wir lösen müssen, sind also

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{j=1}^N \left(y_j - a_0 - \sum_{k=1}^n a_k \cos kt_j \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin kt_j \right) \\
 &= \sum_{j=1}^N y_j - Na_0 - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^N \cos kt_j - \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sum_{j=1}^N \sin kt_j, \\
 0 &= \sum_{j=1}^N \left(y_j - a_0 - \sum_{k=1}^n a_k \cos kt_j \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin kt_j \right) \cos lt_j \\
 &= \sum_{j=1}^N y_j \cos lt_j - a_0 \sum_{j=1}^N \cos lt_j - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^N \cos kt_j \cos lt_j - \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sum_{j=1}^N \sin kt_j \cos lt_j, \\
 0 &= \sum_{j=1}^N \left(y_j - a_0 - \sum_{k=1}^n a_k \cos kt_j \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin kt_j \right) \sin lt_j \\
 &= \sum_{j=1}^N y_j \sin lt_j - a_0 \sum_{j=1}^N \sin lt_j - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^N \cos kt_j \sin lt_j - \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sum_{j=1}^N \sin kt_j \sin lt_j.
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Hier haben wir die Faktoren -2 ebenfalls weggelassen.

6.2.2 Trigonometrische Summen

In den Gleichungen (6.8) treten trigonometrische Summen der Form

$$\sum_{j=1}^N \cos kt_j \quad \text{oder} \quad \sum_{j=1}^N \sin kt_j, \tag{6.9}$$

der Summen von Produkten wie

$$\sum_{j=1}^N \cos kt_j \cos lt_j, \quad \sum_{j=1}^N \cos kt_j \sin lt_j \quad \text{oder} \quad \sum_{j=1}^N \sin kt_j \sin lt_j \tag{6.10}$$

auf. In diesem Abschnitt sollen diese Summen mit Hilfe einer geometrischen Überlegung berechnet werden.

Wir befassen uns zunächst mit Summen der Form und beweisen den folgenden Satz.

Satz 6.1. *Für beliebige ganze Zahlen l , $0 \leq l \leq n$, gilt*

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^N \cos lt_j &= \begin{cases} N & l = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
 \sum_{j=1}^N \sin lt_j &= 0
 \end{aligned}$$

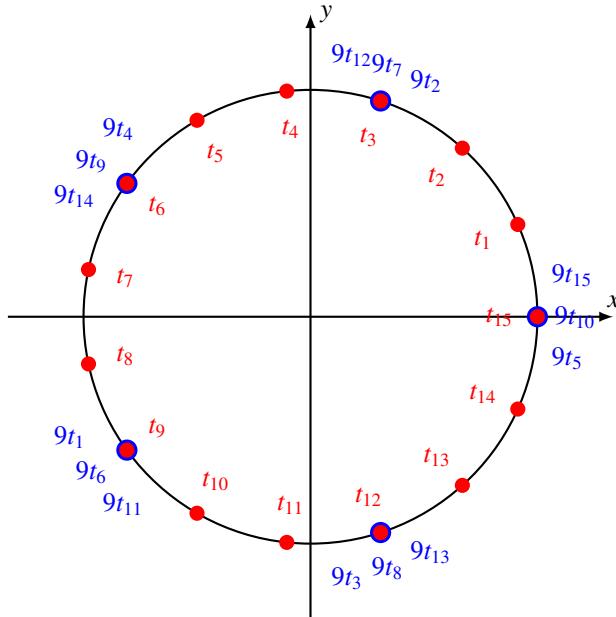


Abbildung 6.1: Verteilung der Punkte $(\cos t_j, \sin t_j)$ auf dem Einheitskreis in rot. Die Punkte $(\cos kt_j, \sin kt_j)$ für $k = 9$ bilden eine Teilmenge, die blau dargestellt ist. Jeder blaue Punkt wird genau dreimal besucht, sie bilden ein gleichseitiges Fünfeck mit den Punkten $(\cos 3t_j, \sin 3t_j)$ als Ecken. Deren Schwerpunkt ist wieder der Nullpunkt.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $l = 0$. In diesem Fall ist $\sin lt_j = 0$ und $\cos lt_j = 1$ und damit

$$\sum_{j=1}^N \cos lt_j = N \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^N \sin lt_j = 0.$$

Im Folgenden können wir daher annehmen, dass $l \neq 0$.

In Abbildung (6.1) kann man sehen, dass die Punkte $(\cos t_j, \sin t_j)$ auf dem Einheitskreis ein regelmässiges Polygon bilden. Der Schwerpunkt des Polygons ist ganz offensichtlich der Mittelpunkt. Daraus folgt

$$\sum_{j=1}^N \cos t_j = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^N \sin t_j = 0.$$

Damit ist der Satz für den Fall $l = 1$ bewiesen.

Für beliebiges $l \neq 0$ beobachten wir, dass die Punkte $(\cos lt_j, \sin lt_j)$ eine Teilmenge der Punkte $(\cos t_j, \sin t_j)$ sind. Wenn l und N teilerfremd sind, sind die Mengen gleich. Wenn l und N dagegen den grössten gemeinsamen Teiler r haben, dann ist die Menge der Punkte $(\cos rt_j, \sin rt_j)$, ein regelmässiges Polygon mit $2\pi/rt_1$ Ecken. Diese Situation ist in Abbildung 6.1 mit den blauen Punkten für den Fall $r = 3 = \text{ggT}(9, 15)$ illustriert. Wie im Falle von $l = 1$ folgt, dass der Schwerpunkt des Polygons der Nullpunkt ist, und damit, dass

$$\sum_{j=1}^N \cos lt_j = \sum_{j=1}^N \cos rt_j = 0,$$

$$\sum_{j=1}^N \sin lt_j = \sum_{j=1}^N \sin rt_j = 0.$$

Damit ist alles gezeigt. \square

In (6.10) werden die Summen von Produkten benötigt. Mit üblichen trigonometrischen Umformungen kann man diese in Summen von einfachen trigonometrischen Funktionen umwandeln. Wir verwenden dazu die Formeln

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)), \quad (6.11)$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)), \quad (6.12)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)). \quad (6.13)$$

Damit können wir die Summen in (6.10) umwandeln:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \cos kt_j \cos lt_j &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{2}(\cos(k-l)t_j + \cos(k+l)t_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \cos(k-l)t_j + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \cos(k+l)t_j}_{=0} \\ &= \begin{cases} \frac{N}{2} & k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sin kt_j \sin lt_j &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{2}(\cos(k-l)t_j + \cos(k+l)t_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \cos(k-l)t_j + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \cos(k+l)t_j}_{=0} \\ &= \begin{cases} \frac{N}{2} & k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sin kt_j \cos lt_j &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{2}(\sin(k-l)t_j + \sin(k+l)t_j) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sin(k-l)t_j}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sin(k+l)t_j}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 6.2. Für beliebige $k, l \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{j=1}^N \cos kt_j \cos lt_j = \begin{cases} N & k = l = 0 \\ \frac{N}{2} & k = l > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^N \sin kt_j \sin lt_j = \begin{cases} \frac{N}{2} & k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^N \sin kt_j \cos lt_j = 0$$

In den folgenden Abschnitten verwenden wir diese Formeln, um die Koeffizienten a_k und b_k zu bestimmen. Der Koeffizient a_0 muss wegen des ersten Falles im Satz gesondert behandelt werden.

6.2.3 Bestimmung von a_0

In der Gleichung

$$0 = \sum_{j=1}^N y_j - Na_0 - \underbrace{\sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^N \cos kt_j}_{=0} - \underbrace{\sum_{k=1}^n b_k \sum_{j=1}^N \sin kt_j}_{=0}$$

verschwinden die Summen über j und es bleibt die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^N y_j - Na_0 \\ \Rightarrow a_0 &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j. \end{aligned}$$

6.2.4 Bestimmung von $a_k, k > 0$

Zur Bestimmung von a_k mit $k > 0$ müssen wir die Gleichung

$$0 = \sum_{j=1}^N y_j \cos lt_j - a_0 \underbrace{\sum_{j=1}^N \cos lt_j}_{=0} - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^N \cos kt_j \cos lt_j - \underbrace{\sum_{k=1}^n b_k \sum_{j=1}^N \sin kt_j \cos lt_j}_{=0}$$

heranziehen. Die zweite und vierte Summe verschwindet, so dass wir die Gleichung

$$0 = \sum_{j=1}^N y_j \cos lt_j - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^N \cos kt_j \cos lt_j$$

erhalten. Die innere Summe über j verschwindet für alle Werte von k ausser für $k = l$, in diesem Fall ist sie $N/2$. Damit können wir nach a_k auflösen:

$$0 = \sum_{j=1}^N y_j \cos lt_j - a_l \frac{N}{2}$$

$$\Rightarrow a_l = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N y_j \cos lt_j.$$

6.2.5 Bestimmung von b_k

Zur Bestimmung von b_k müssen wir die Gleichung

$$0 = \sum_{j=1}^N y_j \sin lt_j - a_0 \sum_{j=1}^N \sin lt_j - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^N \cos kt_j \sin lt_j - \sum_{k=1}^n b_k \sum_{j=1}^N \sin kt_j \sin lt_j$$

heranziehen. Die zweite und die dritte Summe verschwindet und in der letzten Summe verschwinden alle Terme ausser der Term mit $k = l$, für den die innere Summe den Wert $N/2$ hat. Damit wird die Gleichung vereinfacht zu

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^N y_j \sin lt_j - b_l \frac{N}{2} \\ \Rightarrow b_l &= \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N y_j \sin lt_j. \end{aligned}$$

6.2.6 Zusammenstellung der Resultate

Sei $N = 2n$ eine gerade natürliche Zahl. Eine 2π -periodische Funktion $f(t)$ kann als trigonometrisches Polynom der Form

$$p(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) + a_n \cos nt$$

derart approximiert werden, dass zu den Zeiten $t_j = 2\pi j/N, j = 1, \dots, N$ die Funktion und das trigonometrische Polynom übereinstimmen:

$$p(t_j) = y_j = f(t_j).$$

Dazu müssen die Koefizienten

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j \\ a_k &= \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N y_j \cos t_j = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N y_j \cos \frac{2\pi j}{N} & k = 1, \dots, n \\ b_k &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j \sin t_j = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N y_j \sin \frac{2\pi j}{N}, & k = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

verwendet werden.

6.3 Vektorgeometrische Interpretation

Die bisherigen rein analytischen Betrachtungen verdecken den geometrischen Gehalt der bisher entwickelten Theorie. In diesem Abschnitt soll daher zunächst eine vektorielle Darstellung aufgebaut, die dann erlauben soll, einerseits die Formeln für die Fourierkoeffizienten geometrisch zu verstehen und andererseits auf komplexere Situationen zu verallgemeinern.

6.3.1 Vektoren

Die Operationen zur Bestimmung der Fourier-Koeffizienten können in vektorieller Schreibweise etwas übersichtlicher dargestellt werden. Zunächst fassen wir die Funktionswerte y_j in einem Vektor zusammen.

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

Zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten brauchen wir auch noch die Werte der trigonometrischen Funktionen zu den Zeiten t_j , die wir ebenfalls als Vektoren

$$c_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_k = \begin{pmatrix} \cos kt_1 \\ \vdots \\ \cos kt_N \end{pmatrix}, \quad (k = 1, \dots, n) \quad \text{und} \quad s_k = \begin{pmatrix} \sin kt_1 \\ \vdots \\ \sin kt_N \end{pmatrix}, \quad (k = 1, \dots, n-1)$$

schreiben. Die Fourier-Koeffizienten können jetzt als Skalarprodukte geschrieben werden:

$$a_0 = \frac{1}{N} c_0 \cdot \mathbf{y}, \quad a_k = \frac{2}{N} c_k \cdot \mathbf{y}, \quad (k = 1, \dots, n), \quad b_k = \frac{2}{N} s_k \cdot \mathbf{y}, \quad (k = 1, \dots, n-1).$$

Rekonstruktion der Funktion

Auch die Darstellung der Funktion kann man wieder als Skalarprodukt schreiben. Dazu schreiben wir die Fourier-Koeffizienten und die Werte der trigonometrischen Funktionen also Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \\ \sin t \\ \cos 2t \\ \sin 2t \\ \vdots \\ \sin(n-1)t \\ \cos nt \end{pmatrix}.$$

Damit wird

$$p(t) = a \cdot e(t)$$

Orthogonalität

Die Aussagen von Satz 6.1 lassen sich jetzt in geometrische Form fassen.

Satz 6.3. Es gilt

$$c_k \cdot c_l = \begin{cases} N & k = l = 0 \\ \frac{N}{2} & k = l > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$s_k \cdot s_l = \begin{cases} \frac{N}{2} & k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$c_k \cdot s_l = 0$$

Beweis. Die genannten Skalarprodukte sind nichts anderes als die Summen in Satz 6.1:

$$c_k \cdot c_l = \sum_{j=1}^N \cos kt_j \cos lt_j = \begin{cases} N & k = l = 0 \\ \frac{N}{2} & k = l > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und analog für die anderen Skalarprodukte. Die Aussage des Satzes ist daher nichts anders als eine geometrische Umformulierung der Aussagen des Satzes 6.1. \square

Die Identität von Parseval

Die Relationen von Satz 6.1 besagen, dass die Vektoren c_k und s_k orthogonal sind. Wir wenden Sie auf das Skalarprodukt der Funktion f mit sich selbst an.

$$\begin{aligned} f \cdot f &= a_0^2 c_0 \cdot c_0 + \sum_{k=1}^n a_k^2 c_k \cdot c_k + \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2 s_k \cdot s_k \\ &= Na_0^2 + \frac{N}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2 + \frac{N}{2} \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2 = \frac{N}{2} \left(2a_0^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2 \right) \end{aligned}$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 6.4 (Parseval).

$$\|f\|^2 = \sum_{j=1}^N y_j^2 = \frac{N}{2} \left(2a_0^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2 \right)$$

2π -Periodische Funktionen auf \mathbb{R}

Die eben vektoriell dargestellte Analyse diskreter periodischer Funktionen kann verallgemeinert werden auf die Analyse von Funktionen auf anderen Definitionsbereichen. Benötigt wird eine Familie von Basisfunktionen und ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ derart, dass die Basisfunktionen g_i bezüglich dieses Skalarproduktes orthonormiert sind, dass also

$$\langle g_i, g_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Jede Linearkombination

$$f = \sum_i \alpha_i g_i$$

von Basisfunktionen kann ebenfalls mit dem Skalarprodukt rekonstruiert werden. Dazu berechnet man

$$\langle g_i, f \rangle = \left\langle g_i, \sum_j \alpha_j g_j \right\rangle = \sum_j \langle g_i, \alpha_j g_j \rangle = \sum_j \alpha_j \delta_{ij} = \alpha_i.$$

Das Skalarprodukt kann auch verwendet werden, um einen Abstand zwischen Vektoren als

$$\|f - g\|^2 = \langle f - g, f - g \rangle$$

zu definieren.

Dieselbe Situation lässt sich auch für 2π -periodische Funktionen auf \mathbb{R} herbeiführen. Als Basisfunktionen kann man die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos kx, \sin lx \quad k > 0 \tag{6.15}$$

verwenden. Das Skalarprodukt $\langle f, g \rangle$ muss linear in f und g sein. Eine naheliegende Wahl ist

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx.$$

Wir überprüfen, ob die Funktionen orthogonal sind:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx = 1 \\ \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos kx \right\rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos kx dx = 0 \\ \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin lx \right\rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin lx dx = 0 \\ \langle \cos kx, \cos lx \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\cos(k-l)x + \cos(k+l)x) dx = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \langle \sin kx, \sin lx \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\cos(k-l)x - \cos(k+l)x) dx = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \langle \sin kx, \cos lx \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\sin(k-l)x + \sin(k+l)x) dx = 0 \end{aligned}$$

Zu einer 2π -periodischen Funktion $f(x)$ kann man daher immer die Koeffizienten

$$\begin{aligned}\bar{a}_0 &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx\end{aligned}\tag{6.16}$$

berechnen. Die Linearkombination

$$\tilde{f}(x) = \bar{a}_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\tag{6.17}$$

ist natürlich wieder eine 2π -periodische Funktion.

Ist $f(x)$ eine Linearkombination von Funktionen (6.15), dann sind nur endlich viele der Koeffizienten \bar{a}_0 , a_k und b_k von 0 verschieden und es gilt $f(x) = \tilde{f}(x)$, die Summe (6.17) rekonstruiert die Funktion $f(x)$ also exakt..

Für eine beliebige 2π -periodische Funktion $f(x)$ ist die Funktion $\tilde{f}(x)$ nach (6.17) im Allgemeinen eine unendliche Reihe. Die Reihe (6.17) heisst die Fourier-Reihe der Funktion $f(x)$.

In der Literatur wird a_0 meistens anders definiert, nämlich als

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \sqrt{2}\bar{a}_0 \quad \Rightarrow \quad \bar{a}_0 = \frac{a_0}{\sqrt{2}}$$

Der erste Term der Reihe (6.15) wird dann

$$\bar{a}_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a_0}{2}$$

und die Fourier-Reihe ist

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).\tag{6.18}$$

6.3.2 Fourier-Transformation

Die Fourier-Koeffizienten a_k und b_k hängen linear von den Funktionswerten y_j ab. Der Vektor der Fourier-Koeffizienten muss daher der Bildvektor des Vektors \vec{y} der Funktionswerte unter einer linearen Transformation sein. In diesem Abschnitt soll zunächst diese diskrete Fourier-Transformation hergeleitet werden. Anschliessend soll gezeigt werden, wie sich diese Eigenschaft auf periodische Funktionen und auf beliebige Funktionen auf \mathbb{R} ausdehnen lässt.

Diskrete Fourier-Transformation

Die Berechnung der Fourier-Koeffizienten ist eine lineare Operation mit der $N \times N$ -Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} c_0^t \\ c_1^t \\ s_1^t \\ \vdots \\ c_{n-1}^t \\ s_{n-1}^t \\ c_n^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cos t_1 & \cos t_2 & \dots & \cos t_N \\ \sin t_1 & \sin t_2 & \dots & \sin t_N \\ \cos 2t_1 & \cos 2t_2 & \dots & \cos 2t_N \\ \sin 2t_1 & \sin 2t_2 & \dots & \sin 2t_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(n-1)t_1 & \sin(n-1)t_2 & \dots & \sin(n-1)t_N \\ \cos nt_1 & \cos nt_2 & \dots & \cos nt_N \end{pmatrix}$$

Die Orthogonalitätsrelationen von Satz 6.3 können jetzt neu geschrieben werden:

$$\begin{aligned} AA^t &= \begin{pmatrix} c_0 \cdot c_0 & c_0 \cdot c_1 & c_0 \cdot s_1 & \dots & c_0 \cdot c_{n-1} & c_0 \cdot s_{n-1} & c_0 \cdot c_n \\ c_1 \cdot c_0 & c_1 \cdot c_1 & c_1 \cdot s_1 & \dots & c_1 \cdot c_{n-1} & c_1 \cdot s_{n-1} & c_1 \cdot c_n \\ s_1 \cdot c_0 & s_1 \cdot c_1 & s_1 \cdot s_1 & \dots & s_1 \cdot c_{n-1} & s_1 \cdot s_{n-1} & s_1 \cdot c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} \cdot c_0 & c_{n-1} \cdot c_1 & c_{n-1} \cdot s_1 & \dots & c_{n-1} \cdot c_{n-1} & c_{n-1} \cdot s_{n-1} & c_{n-1} \cdot c_n \\ s_{n-1} \cdot c_0 & s_{n-1} \cdot c_1 & s_{n-1} \cdot s_1 & \dots & s_{n-1} \cdot c_{n-1} & s_{n-1} \cdot s_{n-1} & s_{n-1} \cdot c_n \\ c_n \cdot c_0 & c_n \cdot c_1 & c_n \cdot s_1 & \dots & c_n \cdot c_{n-1} & c_n \cdot s_{n-1} & c_n \cdot c_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} N & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{N}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{N}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{N}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bis auf die Faktoren N und $\frac{N}{2}$ auf der Diagonalen ist $\mathcal{F}\mathcal{F}^t$ eine Diagonalmatrix. Wir können die Matrix zu einer Einheitsmatrix machen, indem wir sie mit der Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{N}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{N}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\frac{2}{N}} \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

multiplizieren. Wir schreiben

$$\mathcal{F} = DA$$

Wir nennen \mathcal{F} die *Fourier-Matrix*. Die Fourier-Matrix \mathcal{F} ist orthogonal, es gilt

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^t = DAA^tD^t = DD^tAA^t = E,$$

wobei wir im letzten Schritt D^t mit AA^t vertauschen durften, weil beide Diagonalmatrizen sind und damit vertauschen. Insbesondere erhält \mathcal{F} das Skalarprodukt, womit wir natürlich nur die Parseval-Identität anders formuliert haben.

Komplexe Fouriertransformation

Bisher wurden alle Rechnungen nur mit reellen Zahlen durchgeführt. Es stellt sich aber heraus, dass komplexe Zahlen für die Beschreibung der Fourier-Transformation sehr viel praktischer sind. Der Grund dafür ist die Eulersche Beziehung

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

und die Rechenregel

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b \quad \Rightarrow \quad e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$$

für die Exponentialfunktion. Für die Fourier-Koeffizienten werden die Summen

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j, \quad a_l = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N y_j \cos lt_j, \quad \text{und} \quad b_l = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N y_j \sin lt_j$$

benötigt. Fassen wir a_l und b_l als Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl auf, dann können wir

$$c_l = a_l + ib_l = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N y_j (\cos lt_j + i \sin lt_j) = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N y_j e^{ilt_j}$$

berechnen.

Auch die Rekonstruktion (6.4) ist mit komplexen Zahlen darstellbar. Dazu verwendet man

$$\cos kt = \operatorname{Re} e^{ikt} \quad \text{und} \quad \sin kt = \operatorname{Im} e^{ikt}.$$

In dieser Form

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

Fast Fourier Transform

Die komplexe Darstellung der diskreten Fourier-Transformation ermöglicht eine Formulierung, in der die Berechnung der Koeffizienten wie auch die Auswertung des trigonometrischen Polynoms sehr viel schneller erfolgen kann, wenigstens wenn N gerade ist. Für die Bestimmung der c_l verlangt die Berechnung der Produkte $y_j e^{ilt_j}$ für alle j und l . Außerdem ist $t_j = 2\pi j/n = lt_1$, die Exponentialfaktoren sind daher $e^{ilt_j} = (e^{lt_1})^{lj}$. Die Details dieses Algorithmus sollen hier nicht entwickelt werden, es soll nur der reduzierte Rechenaufwand abgeschätzt werden. Die Anzahl der Multiplikationen dominiert die Laufzeit der Berechnung, daher soll $g(N)$ die Anzahl der Multiplikationen für eine Fourier-Transformation mit N Termen bezeichnen.

Da N gerade ist, kann man die Summe zur Berechnung der Koeffizienten

$$c_l = \sum_{j=0}^{N-1} y_j e^{ilt}$$

aufteilen in gerade und ungerade Terme

$$= \sum_{j=0}^{N/2-1} y_{2j} e^{ilt_{2j}} + \sum_{j=0}^{N/2-1} y_{2j+1} e^{ilt_{2j+1}}$$

$$= \sum_{j=0}^{N/2-1} y_{2j} e^{iljt_2} + e^{it_1} \sum_{j=0}^{N/2-1} y_{2j+1} e^{iljt_2},$$

ist zu erkennen, dass jeder Summand eine Fourier-Transformation mit der halben Anzahl von Datenpunkten und der doppelten Schrittweite t_2 statt t_1 ist. Der Aufwand für die Berechnung der Koeffizienten c_l ist also mit $g(N) = N/2 + g(N/2)$ Operationen möglich. Wenn N sogar eine Zweierpotenz ist, dann 2^m , dann lässt sich dies Idee iterieren, und die Summe aufteilen

$$g(N) = g(2^m) = 2^{m-1} + g(2^{m-1}) = 2^{m-1} + 2^{m-2} + g(2^{m-2}) = \dots = 2^m + 2^{m-1} + 2^{m-2} + \dots + g(1) = O(Nm) = O(N)$$

Fourier-Transformation von 2π -periodischen Funktionen

Fourier-Transformation von Funktionen auf \mathbb{R}

Übungen

- Die Zeitgleichung ist die Zeit, um die eine Sonnenuhr gegenüber einer gleichmässig gehenden Uhr falsch geht. Sie röhrt daher, dass sich die Erde auf ihrer elliptischen Bahn um die Erde nicht immer gleich schnell bewegt und kann mit Hilfe der keplerschen Gesetze erklärt und berechnet werden.

Empirisch wurden für $N = 12 = 2 \cdot 6$ über das Jahr gleichmässig verteilte Tage folgende Werte für die Zeitgleichung gefunden:

Datum	Δt [min]	Datum	Δt [min]
1. 1.	-3.2	4. 7.	-4.1
1. 2.	-13.6	3. 8.	-6.1
2. 3.	-12.3	3. 9.	0.5
2. 4.	-3.9	3. 10.	10.7
3. 5.	3.1	2. 11.	16.3
3. 6.	2.0	2. 12.	10.6

Es sind bereits die folgenden Fourier-Koeffizienten berechnet worden:

k	\hat{a}_k	\hat{b}_k
0	0.000	—
1	0.342	-7.528
2	-3.575	—
3	0.083	-0.250
4	-0.125	-0.159
5	0.025	-0.022
6	—	—

- Berechnen Sie die fehlenden Koeffizienten \hat{a}_6 und \hat{b}_2 .
- Welche Frequenz (welches k) ist dominant?
- Wie gross ist der Fehler, wenn man nur die Terme bis $k = 2$ berücksichtigt?

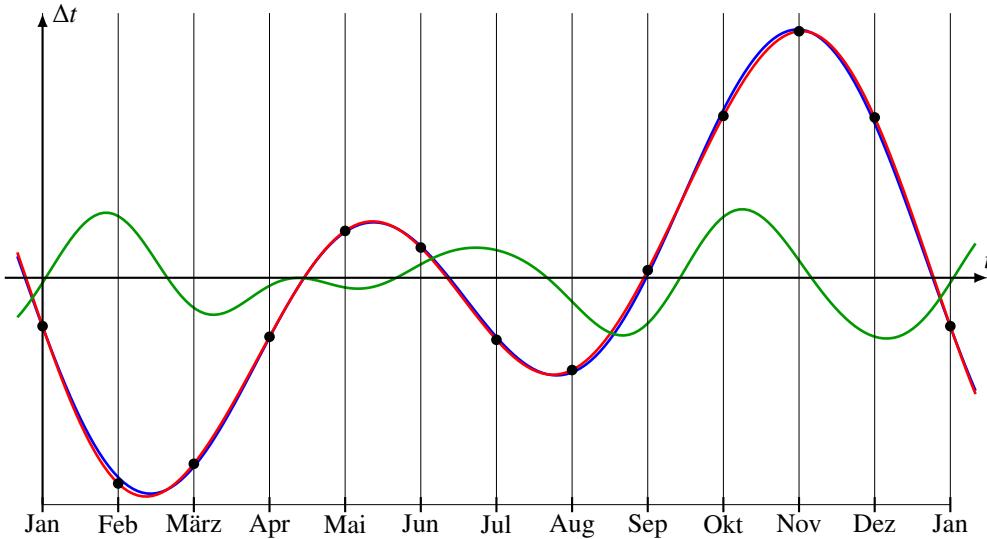


Abbildung 6.2: Zeitgleichung an über das Jahr gleichmässig verteilten Tagen (schwarze Punkte). Die rote Kurve zeigt eine Rekonstruktion mit Hilfe der diskreten Fourier-Transformation. Sie unterscheidet sich nur geringfügig von einem trigonometrischen Polynom, bei dem man nur die Terme bis $k = 2$ berücksichtigt (blaue Kurve). Der durch diese Näherung verursachte Fehler ist zehnfach überhöht in der grünen Kurve dargestellt.

j	y_j	$\cos 6t_j$	$\sin 2t_j$
0	-3.2	-1	0.00000
1	-13.6	1	0.86603
2	-12.3	-1	0.86603
3	-3.9	1	0.00000
4	3.1	-1	-0.86603
5	2.0	1	-0.86603
6	-4.1	-1	0.00000
7	-6.1	1	0.86603
8	0.5	-1	0.86603
9	10.7	1	0.00000
10	16.3	-1	-0.86603
11	10.6	1	-0.86603
		$\hat{a}_6 = 0.05$	$\hat{b}_2 = -9.125$

Tabelle 6.1: Tabelle zur Berechnung der Koeffizienten \hat{a}_2 und \hat{b}_6 .

Lösung. a) Es sind die Koeffizienten \hat{a}_6 und \hat{b}_2 zu berechnen. Wir stellen die nötigen Daten in der Tabelle 6.1 zusammen. Dabei ist zu beachten, dass für $k = 2$ die Winkel t_j Vielfache von 60° sind, deren Sinuswerte immer $\pm\sqrt{3}/2$ sind, man muss also nur die y_j mit $j \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$ mit den richtigen Vorzeichen addieren und mit $\sqrt{3}/2$ multiplizieren. Die Werte für \hat{a}_6 und \hat{b}_2 bekommt man aus

$$\hat{a}_6 = \frac{1}{12} \sum_{j=0}^{11} y_j (-1)^j = 0.05$$

$$\hat{b}_2 = \frac{2}{12} \sum_{j=0}^{11} y_j \sin 2 \frac{2\pi j}{12} = -9.125$$

- b) Die dominanten Terme sind $k = 1$ und $k = 2$. Dies kann man auch in der Abbildung 6.2 erkennen, wo außer der Rekonstruktion mit allen Koeffizienten auch das trigonometrische Polynom gezeigt ist, bei dem die Terme mit $k > 2$ weggelassen wurden. Die Übereinstimmung ist immer noch sehr gut.
- c) Der Approximationsfehler ist bestimmt durch die die Terme

$$\begin{aligned} |\vec{e}(t)|^2 &= \sum_{k=3}^6 \hat{a}_k^2 \vec{c}_k \cdot \vec{c}_k + \sum_{k=3}^5 \hat{b}_k^2 \vec{s}_k \cdot \vec{s}_k \\ &= 0.083^2 \cdot 6 + 0.125^2 \cdot 6 + 0.025^2 \cdot 6 + 0.05^2 \cdot 12 + 0.25^2 \cdot 6 + 0.159^2 \cdot 6 + 0.022^2 \cdot 6 \\ &= 6 \cdot 0.1164 = 0.6984 \\ |\vec{e}(t)| &= 0.83570 \end{aligned}$$

Der mittlere Fehler der Approximation beträgt also weniger als eine Minute. ○

Kapitel 7

El Niño Southern Oscillation

Die Klimaentwicklung hängt wesentlich davon ab, wie Energie an der Erdoberfläche verteilt wird. Aus diesem Grund haben wir in Kapitel 2 die Strömungsdynamik als den wesentlichen Mechanismus des Energietransportes in der Atmosphäre studiert. Und in Kapitel 4 haben wir mit der Modellierung der thermohalinen Zirkulation eine alternative Möglichkeit kennengelernt, den Energie-Transport in den Weltmeeren zu beschreiben.

Das El Niño-Phänomen im Pazifik ist ein interessantes Teilsystem des Klimasystems, welches einigermassen gut als isoliert behandelt werden kann. Die Modellierung, die wir in diesem Kapitel anstreben, braucht einerseits die Ideen der Fluidodynamik, um die Energietransportmechanismen zu beschreiben, und andererseits die Idee der Box-Modelle, um aus diesen Mechanismen eine einfache gewöhnliche Differentiagleichung abzuleiten, mit deren Hilfe die Dynamik des El Niño studiert werden kann.

7.1 El Niño

El Niño oder genauer die El Niño-Southern Oscillation (ENSO) ist ein quasiperiodisches Klimaphänomen mit einer Periode von drei bis sieben Jahren, welches im Pazifik in Äquatornähe beobachtet werden kann.

7.1.1 Ablauf eines El Niño-Ereignisses

Unter normalen Bedingungen treiben die vorherrschenden Winde Wasser vom Ostpazifik vor der Küste von Südamerika in Richtung des zentralen Pazifik. Dadurch senkt sich die Thermokline im Westpazifik ab, während im Ostpazifik kaltes Tiefenwasser aufsteigt. Da dieses Wasser nährstoffreich ist, äussert sich dieser Normalzustand in grossem Fischreichtum, daher war dieses Phänomen seit Jahrhunderten bei Fischern in Peru bekannt.

Während eines El Niño-Ereignisses bricht der Antrieb dieses Ungleichgewichts zusammen. In der Folge sinkt die Thermokline im Ostpazifik ab, das kalte nährstoffreiche Wasser bleibt aus. Im Westpazifik steigt die Thermokline daher an. Der Wegfall der atmosphärischen Strömung bedeutet auch, dass in der Nähe von Südamerika vermehrt Niederschläge auftreten, was zu Überschwemmungen und Missernten führen kann. Die stark veränderten Strömungsverhältnisse können aber auch weiter entfernte Auswirkungen haben. Man kann zeigen, dass sich El Niño-Ereignisse auf der ganzen Welt auswirken können und es wird vermutet, dass ein besonders starkes Ereignis zwischen

1789 und 1793 an Missernten in Europa mitschuldig war und dazu beigetragen hat, die französische Revolution auszulösen.

7.1.2 Modellierung mit einer Differentialgleichung

Wie in Abschnitt 7.1.1 dargestellt, bedingen sich bei der ENSO die Thermoklinen-Anomalien im Ost- und Westpazifik und die entsprechenden Temperatur-Anomalien gegenseitig. Wir verwenden daher die folgenden Variablen:

- T_E Temperaturanomalie im Osthafen
- T Temperaturanomalie im Westpazifik
- h_E Termoklinentiefenanomalie im Osthafen
- h_W Termoklinentiefenanomalie im Westpazifik
- S Windkräfte im westlichen und zentralen Pazifik
- S_E Windkräfte im Osthafen

Wir müssen jetzt Gleichungen herleiten, die diese Größen und ihre Änderungsraten miteinander verbinden.

Die Windkräfte S führen im Normalfall dazu, dass die Thermoklinentiefe im Osthafen kleiner wird, während sie im Westpazifik ansteigt. Fällt S weg, gleichen sich die Thermoklinentiefen an. Man darf daher eine Gleichgewichtsbedingung der Form

$$h_E = h_W + S \quad (7.1)$$

annehmen. Durch die Gleichung 7.1 legt auch das Vorzeichen sowie die Masseinheit von S fest. Im Normalzustand ist S negativ.

Die Thermoklinenanomalie h_W im Westpazifik würde ohne die Wirkung von S langsam verschwinden, was man mit einer Differentialgleichung der Form

$$\frac{dh_W}{dt} = -rh_W$$

beschrieben werden kann. Dazu kommt jetzt aber die Windkraft S . Je grösser der Betrag von S ist, desto schneller sinkt h_W ab. Dies können wir mit der Differentialgleichung

$$\frac{dh_W}{dt} = -rh_W - \alpha S \quad (7.2)$$

modelliert werden kann.

Auf der anderen Seite des Pazifik betrachten wir die Temperaturanomalie T_E . Ohne irgendwelche Einflüsse verschwindet die Temperaturanomalie mit der Zeit, also

$$\frac{dT_E}{dt} = -cT_E.$$

Je grösser die Thermoklinenanomalie h_E im Osthafen ist, desto weiter weg ist das kalte Wasser von der Oberfläche, die Temperaturanomalie an der Oberfläche nimmt also langsamer ab, was die Differentialgleichung

$$\frac{dT_E}{dt} = -cT_E + \gamma h_E \quad (7.3)$$

ergibt.

Die bisher gefundenen Gleichungen reichen nicht aus, die vielen Variablen zu bestimmen. Wir brauchen daher zusätzliche Bedingungen, die die Variablen koppeln. Es kann davon ausgegangen werden, dass eine höhere Temperaturanomalie im Osthinduropazifik zu erhöhter Windströmung führt, dass es also eine Proportionalität

$$S = bT_E \quad (7.4)$$

gibt.

Mit (7.1) können wir h_E eliminieren, mit (7.4) die Grösse S . Dies führt auf $h_E = h_W + S = h_W + bT_E$. Das verbleibende Gleichungssystem ist

$$\begin{aligned} \frac{dT_E}{dt} &= -cT_E + \gamma(h_W + bT_E) = (-c + \gamma b)T_E + \gamma h_W \\ \frac{dh_W}{dt} &= -rh_W - \alpha bT_E. \end{aligned}$$

Mit einigermassen plausiblen Werten der Parameter ergibt sich eine Oszillation mit einer Periode von etwa 3.4 Jahren, was ungefähr der für ENSO bekannten Periodizität entspricht. Die Analyse ist in [5] im Detail durchgeführt.

7.1.3 Mängel des Modells

Die Modellierung des El Niño illustriert ein weiteres Problem, nämlich die Tatsache, dass Grössen miteinander über grosse Distanzen gekoppelt sind. Eine Änderung der Meereshöhe im Westpazifik kann nicht ohne Zeitverzögerung mit einer Thermoklinen-Anomalie im Osthinduropazifik gekoppelt sein. Ein einfaches Modell wie bei der relativ langsam ablaufenden thermohalinen Zirkulation kann daher kaum erfolgreich sein. Vielmehr muss in diesem Modell die Zeit berücksichtigt werden, die ein Signal braucht, um sich durch den Pazifik zu bewegen.

Solche Mechanismen sind bekannt und können mit relativ einfachen Mitteln modelliert werden. Es sind die Kelvin-Wellen, die in Abschnitt 7.2 behandelt werden und die Rossby-Wellen, beschrieben in Abschnitt 7.3. Daraus lässt sich ein Modell mit Hilfe einer verzögerten Differentialgleichung bauen (Abschnitt 7.4), welches auch in Kapitel 14 vertieft studiert wird.

7.2 Kelvin-Wellen

In diesem Abschnitt soll die Ausbreitung von Anomalien in der Höhe der Meeresoberfläche in der Höhe des Äquators studiert werden.

7.2.1 Kelvin-Wellen

Ein der einfachsten Form führt ein Tiefdruckgebiet über dem zentralen Pazifik dazu, dass die Meeresoberfläche über die Normalhöhe ansteigt. Wenn sich das Tiefdruckgebiet auffüllt und die Druckkraft zur Aufrechterhaltung dieser Anomalie wegfällt, wird dieser "Wasserberg" zerfallen. Mit Hilfe der Gleichungen der Strömungsdynamik sollte sich die Ausbreitung dieser Wellen beschreiben lassen.

Da die Anfangsbedingungen symmetrisch bezüglich einer Spiegelung an der Äquatoren sind, dürfen wir annehmen, dass auch die resultierende Strömung diese Symmetrie hat. In unmittelbarer Nähe des Äquators brauchen wir die Krümmung der Erdoberfläche nicht zu berücksichtigen, und können daher mit einem x - y -Koordinatensystem arbeiten, in dem x die Richtung entlang des

Äquators und y die Richtung entlang der Längenkreise ist. Die Strömungsgeschwindigkeitskomponenten nennen wir u entlang des Äquators und v entlang der Längenkreise. Die Anomalie der Höhe der Meeresoberfläche bezeichnen wir mit $h(x, y)$.

7.2.2 Bewegungsgleichung für Kelvin-Wellen

Die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit, also die Beschleunigung, ist nach dem zweiten Newtonschen Gesetz proportional zu den Kräften. Die Schwerkraft versucht, den Wasserberg abzubauen. Wasser wird in die Richtung beschleunigt, in die die Höhe $h(x, y)$ abnimmt. Außerdem wirkt die Coriolis-Kraft, die die Strömung auf der Nordhalbkugel nach rechts ablenkt, und auf der Südhalbkugel nach links.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= fv - g \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -fu - g \frac{\partial h}{\partial y}\end{aligned}\quad (7.5)$$

Dies ist ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen für drei unbekannte Funktionen h , u und v , es ist also mindestens noch eine weitere Gleichung nötig, damit das Problem überhaupt gelöst werden kann.

Abfließendes Wasser reduziert die Höhenanomalie. Die Kontinuitätsgleichung besagt, dass die Abnahme der Höhenanomalie proportional ist zur Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes ist. Die fehlende Differentialgleichung ist daher

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (7.6)$$

Gesucht ist jetzt also eine Lösung der Differentialgleichungen (7.5) und (7.6).

7.2.3 Wellengleichung

Wir interessieren uns nur für eine Lösung in unmittelbarer Nähe des Äquators und dürfen daher annehmen, dass sich das Wasser nicht entlang der Längenkreise bewegt, dass also $v = 0$ gilt. Die Differentialgleichungen (7.5) und (7.6) vereinfachen sich damit zu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (7.7)$$

$$0 = -fu - g \frac{\partial h}{\partial y} \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7.9)$$

Indem wir (7.7) nach x und (7.9) nach t ableiten, erhalten wir

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} &= -g \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} &= -H \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = gH \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (7.10)$$

Dies ist eine Wellengleichung für eine Welle mit Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \sqrt{gH}$.

7.2.4 Approximative Lösung der Wellengleichung

Bis jetzt wurde die zweite Gleichung (7.8) nicht verwendet, es wurde eigentlich nur das Verhalten der Welle auf dem Äquator modelliert. Da wir jetzt aber wissen, dass mindestens entlang des Äquators die Lösung eine Welle mit Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \sqrt{gH}$ ist, können wir versuchen, auch die y -Abhängigkeit zu modellieren.

Dispersionsrelation

Eine in x -Richtung laufende Welle mit Wellenzahl k kann beschrieben werden als $\sin(kx - \omega t)$. Die Wellenzahl k ist positiv für eine nach Osten laufende Welle und negativ für eine nach Westen laufende Welle. Wir suchen also eine Lösung des Gleichungssystems (7.7)–(7.9) in der Form

$$h_k(t, x, y) = \gamma(y) \cdot \sin(kx - \omega t)$$

zu finden. Die Funktion $\gamma(y)$ beschreibt das Profil des ‘‘Wasserberges’’ in der Nähe des Äquators, wir nehmen daher an, dass $\gamma(y)$ für grosse Werte von y rasch abnimmt.

Einsetzen des Lösungsansatzes $h_k(t, x, y)$ in die Gleichung (7.10) liefert

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 h_k}{\partial t^2} = -\omega^2 \gamma(y) \sin(kx - \omega t) = -\omega^2 h_k(t, x, y) \\ \frac{\partial^2 h_k}{\partial x^2} = -k^2 \gamma(y) \sin(kx - \omega t) = -k^2 h_k(t, x, y) \end{array} \right\} \Rightarrow \omega^2 = gHk^2 \quad \text{oder} \quad \left| \frac{\omega}{k} \right| = \sqrt{gH} = c \quad (7.11)$$

Aus dieser Dispersionsrelation liest man ab, dass die Phasengeschwindigkeit einer solchen Welle unabhängig ist von der Frequenz.

y -Abhängigkeit

Bis jetzt haben wir die Gleichung (7.8) nicht verwendet. Sie erlaubt, u zu berechnen, es gilt

$$u = -\frac{g}{f} \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{oder f\"ur } h_k \quad u_k = -\frac{g}{f} \gamma'(y) \sin(kx - \omega t).$$

Setzt man dies in (7.9) ein, erhält man

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial h_k}{\partial t} = -\omega \gamma(y) \cos(kx - \omega t) \\ \frac{\partial u_k}{\partial x} = k \frac{g}{f} \gamma'(y) \cos(kx - \omega t) \end{array} \right\} \Rightarrow -\omega \gamma(y) \cos(kx - \omega t) = -Hk \frac{g}{f} \gamma'(y) \cos(kx - \omega t) \quad (7.12)$$

nach Kürzen gemeinsamer Faktoren und Umstellen folgt

$$\gamma'(y) = \gamma(y) \frac{f}{gH} \frac{\omega}{k} = \pm \frac{f}{c} \gamma(y). \quad (7.13)$$

Das Vorzeichen in (7.13) hängt vom Vorzeichen der Wellenzahl k ab, das obere Vorzeichen steht für eine nach Osten laufende Welle.

Die Coriolis-Kraft f verschwindet am Äquator, in erster Näherung ist sie proportional zur y , wir schreiben daher $f = \beta y$. Die Differentialgleichung (7.13) wird damit zu

$$\gamma'(y) = \pm \frac{\beta}{c} y \gamma(y). \quad (7.14)$$

Für zunehmende y muss γ abnehmen, es muss also $\gamma'(y) < 0$ sein für genügend grosse y . Dies ist aber nur möglich für das negative Vorzeichen, und damit nur für eine nach Osten laufende Welle. Im folgenden konzentrieren wir uns daher auf das negative Zeichen in (7.14).

Um eine Lösung von (7.14) zu finden, teilen wir durch $\gamma(y)$ und verwenden, dass $\gamma'(y)/\gamma(y)$ die Ableitung des Logarithmus ist:

$$\frac{\gamma'(y)}{\gamma(y)} = \frac{d}{dy} \log \gamma(y) = -\frac{\beta}{c}y \quad \Rightarrow \quad \log \gamma(y) = -\frac{\beta}{2c}y^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma(y) = \exp\left(-\frac{\beta}{2c}y^2\right) \quad (7.15)$$

Das y -Profil der Welle ist also eine Gauss-Funktion. Die Zone, in der sich eine Kelvin-Welle ausbreiten kann, wird breiter, wenn β grösser wird, wenn also die Rotationsgeschwindigkeit des Planeten grösser wird. Sie wird kleiner, wenn $c = \sqrt{gH}$ grösser wird, also bei grösserer Gravitation.

7.3 Rossby-Wellen

In der Untersuchung der Kelvin-Wellen haben wir angenommen, dass die Geschwindigkeit v entlang der Längenkreise verschwindet. Die Strömung wird im allgemeinen nicht parallel zum Äquator sein. Trotzdem beobachten wir zum Beispiel, dass die Westwindströmung zwischen verschiedenen geographischen Breiten mäandriert. Woher kommt diese Wellenbewegung?

7.3.1 Zirkulation

Aus der Diskussion der globalen Zirkulation wissen wir, dass die Strömung in Äquatornähe dominiert wird durch eine mittlere Strömung konstante Strömung mit Geschwindigkeit U in Ost-West-Richtung. Wir suchen daher eine Beschreibung der Abweichungen von dieser mittleren Strömung. Unter Verwendung der gleichen Notation wie im Abschnitt 7.2 schreiben wir daher

$$u = U + u', \quad v = U + v' \quad \text{mit } u, v \ll U.$$

Wir nehmen im folgenden wieder an, dass die Strömung quellenfrei ist. Dann lässt sich wie früher gezeigt, dass die Strömung mit einer Strömungsfunktion ψ als

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

beschrieben werden kann.

Die Drehimpulsdichte in der Strömung ist gegeben durch die Zirkulation

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \Delta \psi.$$

Da der Drehimpuls erhalten ist, muss die Zirkulation in einem Luftpacket abnehmen, wenn es sich auf der Nordhalbkugel nach Norden bewegt. Die Quelle dieser Zirkulationsänderung ist die Erddrehung und damit die Corioliskraft f und der mathematische Ausdruck der Drehimpulserhaltung ist die Erhaltung der Grösse $\zeta + f$.

7.3.2 Bewegungsgleichung

Die Grösse $\zeta + f$ ist erhalten, ihre zeitliche Ableitung

$$\frac{d(\zeta f)}{dt} = 0$$

verschwindet also. f hängt nur von y ab, aber die Funktion ζ hängt von t, x und y ab. Wir berechnen die Ableitung mit Hilfe der Kettenregel:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d(\zeta + f)}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &\simeq \frac{\partial \zeta}{\partial t} + (U + u) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Da $u \ll U$ ist, können wir in erster Näherung u im zweiten Term vernachlässigen. Und da $\partial \zeta / \partial y$ ebenfalls sehr klein ist, können wir dies im letzten Term im Vergleich zu $\partial f / \partial y$ vernachlässigen. Schliesslich können wir wie in Abschnitt 7.2 die β -Ebenen-Approximation verwenden, und $\partial f / \partial y$ durch β ersetzen. Schliesslich können wir wieder $v = \partial \psi / \partial x$ ersetzen. Wir erhalten so

$$0 = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + U \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

als Bewegungsgleichung.

Indem wir $\zeta = \Delta \psi$ schreiben, erhalten wir so die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (7.16)$$

7.3.3 Wellenlösungen

Gesucht sind Lösungen der Gleichung (7.16) in Form kleiner Abweichungen. Wir erwarten Wellenlösungen und schreiben sie daher in der Form

$$\psi_{kl}(t, x, y) = \sin(kx + ly - \omega t). \quad (7.17)$$

Die Ableitungen, die wir für die Bewegungsgleichung (7.16) benötigen, sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \psi_{kl}(t, x, y) &= -\omega \cos(kx + ly - \omega t) = -\omega \psi_{kl}(t, x, y), \\ \frac{\partial}{\partial x} \psi_{kl}(t, x, y) &= k \cos(kx + ly - \omega t) = k \psi_{kl}(t, x, y), \\ \Delta \psi_{kl} &= -(k^2 + l^2) \cos(kx + ly - \omega t) = -(k^2 + l^2) \psi_{kl}(t, x, y). \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die Differentialgleichung ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(k^2 + l^2) \psi_{kl}(t, x, y) - U k (k^2 + l^2) \psi_{kl}(t, x, y) + \beta k \psi_{kl}(t, x, y) \\ &= ((\omega - U k)(k^2 + l^2) + \beta k) \psi_{kl}(t, x, y) \end{aligned}$$

Für eine Lösung muss also die Dispersionsrelation

$$(\omega - U k)(k^2 + l^2) + \beta k = 0$$

gelten. Aufgelöst nach ω ist dies

$$\begin{aligned}\omega(k^2 + l^2) &= U k (k^2 + l^2) - \beta k \\ \Rightarrow \quad \omega &= U k - \frac{\beta k}{k^2 + l^2}.\end{aligned}\tag{7.18}$$

Eine Wellenlösung mit Wellenzahlen k und l hat daher die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c = \frac{\omega}{k} = U - \beta \frac{1}{k^2 + l^2}\tag{7.19}$$

entlang der x -Koordinate. Da der Nenner immer positiv ist, ist c kleiner als U , solche Wellen können sich immer nur in West-Ost-Richtung ausbreiten.

7.3.4 Gruppengeschwindigkeit

Die Phasengeschwindigkeit (7.19) hilft uns nicht, die Dynamik des El Niño zu verstehen, da wir dazu den Transport von Energie verstehen müssen. Die ebenen Wellen der Form (7.17) beschreiben eine Welle die überall die gleiche Amplitude hat, es findet also eigentlich gar kein Energietransport statt. Im Beispiel des ‘‘Wasserberges’’ in der Untersuchung zu den Kelvin-Wellen wird potentielle Energie dadurch transportiert, dass das Wasser des Berges abfliesst. Wir müssen daher erst einen ‘‘Wasserberg’’ als Überlagerung von ebenen Wellen formulieren und dann die zeitliche Entwicklung dieser Überlagerung studieren.

Überlagerungen

Wir gehen daher von einer eindimensionalen Situation aus und studieren eine Überlagerung $u(x, t)$ von Wellen der Form $\cos(kx - \omega(k)t)$ mit verschiedenen Wellenzahlen k . Mit der Wellenzahlabhängigen Amplitude $\hat{f}(k)$ lässt sich die Überlagerung als

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \cos(kx - \omega(k)t) dk\tag{7.20}$$

schreiben. Die Bewegung eines solchen Wellenpaketes kann man zum Beispiel dadurch studieren, dass man die Bewegung des Maximums dieses Wellenpaketes verfolgt.

Die Darstellung (7.20) ist für diese Untersuchung sehr unhandlich, die Rechnung sind sehr umständlich. Wir schreiben die Wellen daher als Realteil einer komplexen Welle $e^{i(kx - \omega(k)t)}$, also

$$u(x, t) = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk.\tag{7.21}$$

Wellenpakete

Wir betrachten ein Wellenpaket, welches als Überlagerung mit der Funktion

$$\hat{f}(k) = \begin{cases} 1 & |k - k_0| < \Delta k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Überlagerung $u(x, t)$ gemäss (7.21) kann man jetzt vereinfachen:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{i(kx - \omega(k)t)} dk,$$

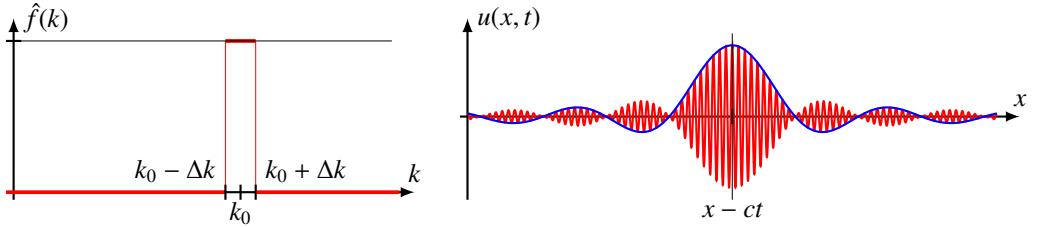


Abbildung 7.1: Berechnung eines Wellenpaketes aus Wellen mit Wellenzahlen zwischen $k_0 - \Delta k$ und $k_0 + \Delta k$.

allerdings muss dazu $\omega(k)$ bekannt sein.

Falls $\omega(k) = ck$ gilt, falls also jede elementare Welle die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit c hat, können wir $u(x, t)$ explizit ausrechnen:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \operatorname{Re} \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} e^{i(kx-\omega(k)t} dk = \operatorname{Re} \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} e^{ik(x-ct)} dk \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{e^{ik(x-ct)}}{i(x-ct)} \right]_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i(k_0+\Delta k)(x-ct)}}{i(x-ct)} - \frac{e^{i(k_0-\Delta k)(x-ct)}}{i(x-ct)} \right) \\ &= \operatorname{Re} \frac{2}{x-ct} e^{ik_0(x-ct)} \frac{e^{i\Delta k(x-ct)} - e^{-i\Delta k(x-ct)}}{2i} \\ &= \operatorname{Re} \frac{2}{x-ct} e^{ik_0(x-ct)} \sin(\Delta k(x-ct)) = 2 \cos k_0(x-ct) \frac{\sin \Delta k(x-ct)}{x-ct} \end{aligned}$$

Dies ist eine schnell schankende Funktion mit Wellenzahl k_0 , rot dargestellt in Abbildung ?? rechts, moduliert mit der langsam schwankenden Funktion $\sin \Delta k(x-ct)/(x-ct)$, dargestellt in der selben Abbildung in blau. Der Schwerpunkt des Paketes befindet sich bei der x -Koordinaten $x-ct$, wandert also mit Geschwindigkeit c nach rechts.

Gruppengeschwindigkeit

Bisher haben wir angenommen, dass die Frequenz und die Wellenzahl proportional sind, dass also $\omega(k) = ck$. Die Untersuchungen zu den Rossby-Wellen hat gezeigt, dass dies nicht zutreffen muss. Wir müssen die Rechnung also mit einem Modell wiederholen, wo die Frequenz $\omega(k)$ nicht einfach nur proportional zu k ist. Für kleines Δk genügt eine lineare Approximation der Abhängigkeit von $\omega(k)$ von k , wir setzen daher

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0)\omega_1 = \omega_0 + (k - k_0)\omega_1 \quad \text{mit} \quad \omega_1 = \frac{d}{dk}\omega(k_0) = \omega'(k_0). \quad (7.22)$$

Wir berechnen wieder $u(x, t)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \operatorname{Re} \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} e^{i(kx-\omega(k)t} dk = \operatorname{Re} \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} e^{i(kx-\omega_0 t - \omega_1(k-k_0)t)} dk \\ &= \operatorname{Re} \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} e^{i(k(x-\omega_1 t) - \omega_0 t + \omega_1 k_0 t)} dk = \operatorname{Re} \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} e^{ik(x-\omega_1 t)} e^{i(\omega_1 k_0 - \omega_0)t} dk \\ &= \operatorname{Re} e^{i(\omega_1 k_0 - \omega_0)t} \left[\frac{e^{ik(x-\omega_1 t)}}{i(x-\omega_1 t)} \right]_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} = \operatorname{Re} 2e^{i(\omega_1 k_0 - \omega_0)t} \frac{e^{i(k_0+\Delta k)(x-\omega_1 t)} - e^{i(k_0-\Delta k)(x-\omega_1 t)}}{2i(x-\omega_1 t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re} \frac{2e^{i(\omega_1 k_0 - \omega_0)t} e^{i(k_0(x - \omega_1 t))}}{x - \omega_1 t} \frac{e^{i\Delta k(x - \omega_1 t)} - e^{-i\Delta k(x - \omega_1 t)}}{2i} = \operatorname{Re} 2e^{i(\omega_1 k_0 - \omega_0 + k_0(x - \omega_1 t))} \frac{\sin \Delta k(x - \omega_1 t)}{x - \omega_1 t} \\
&= \operatorname{Re} 2e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \frac{\sin \Delta k(x - \omega_1 t)}{x - \omega_1 t} = 2 \cos(k_0 x - \omega_0 t) \frac{\sin \Delta k(x - \omega_1 t)}{x - \omega_1 t}.
\end{aligned}$$

Wiederum finden wir erhalten wir eine kurze Welle mit Frequenz ω_0 und Wellenzahl k_0 , die moduliert wird mit der langsam schwankenden Funktion

$$\frac{\sin \Delta k(x - \omega_1 t)}{x - \omega_1 t}. \quad (7.23)$$

Das Maximum der Funktion (7.23) wandert mit der Geschwindigkeit ω_1 nach rechts.

Die soeben durchgeführte Berechnung zeigt also, dass Wellenpakete mit der Geschwindigkeit

$$c_g = \frac{d\omega(k)}{dk},$$

der sogenannten Gruppengeschwindigkeit, wandern. Der Energietransport durch Wellenpakete erfolgt offenbar nicht mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \omega/k$, sondern mit der Gruppengeschwindigkeit.

7.3.5 Energietransport durch Rossby-Wellen

Aus der Dispersionsrelation (7.18) für die Rossby-Wellen können wir jetzt die Gruppengeschwindigkeit für parallel zum Äquator sich bewegenden Wellenpaketen durch Ableiten nach k bestimmen. Die Gruppengeschwindigkeit ist

$$c_g = \frac{d}{dk} \omega(k) = U - \beta \frac{k^2 + l^2 - k \cdot 2k}{(k^2 + l^2)^2} = U - \beta \frac{l^2 - k^2}{(k^2 + l^2)^2} \quad (7.24)$$

Je nach der relativen Grösse von k und l kann die Gruppengeschwindigkeit sowohl grösser als auch kleiner sein als die mittlere Geschwindigkeit U in der Zone.

7.4 Verzögertes Oszillatormodell

In den Kelvin- und Rossby-Wellen haben wir Mechanismen kennengelernt, mit dem Energietransport entlang des Äquators innerhalb der vorherrschenden Strömung sowohl in östlicher wie auch in westlicher Richtung möglich ist. Entscheidend für die Dynamik dieses Energietransports ist die Zeit, die eine Welle benötigt, um den Pazifik zu durchqueren. Sei τ_K die Zeit, die eine Kelvin-Welle braucht, um den Pazifik zu durchqueren, und τ_R die entsprechende Zeit für eine Rossby-Welle.

Wir versuchen jetzt ein für die Temperaturanomalie $T(t)$ im östlichen Pazifik aufzustellen, die diese Mechanismen berücksichtigt. Ohne einen Transportmechanismus würde die Temperaturanomalie einfach zerfallen, was beschrieben werden kann mit einer Differentialgleichung der Form

$$\frac{d}{dt} T(t) = -cT(t),$$

mit einer Konstanten c .

Die Diskussionen über die dem El Niño-Phänomen zugrunde liegenden Mechanismen haben wir gesehen, dass die Thermoklinenanomalie im zentralen Pazifik eine Auswirkung auf Temperaturanomalie $T(t)$ haben. Eine Thermoklinenanomalie $h_0(t)$ auf dem Äquator wandert als Kelvin-Welle in

der Zeit $\frac{1}{2}\tau_K$ in den Ostpazifik. Eine Thermoklinenanomalie $h_1(t)$ nördlich oder südlich des Äquators kann als Rossby-Welle nach Westen wandern, am Westrand des Pazifik reflektiert werden und als Kelvin-Welle in den Ostpazifik zurückkehren. Dazu ist die Zeit $\frac{1}{2}\tau_R + \tau_K$ nötig. Dies lässt sich mit der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}T(t) = -cT(t) + a_0h_0(t - \frac{1}{2}\tau_K) + b_0h_1(t - (\frac{1}{2}\tau_R + \tau_K)) \quad (7.25)$$

erreichen.

Nun scheint es aber auch einen Zusammenhang zwischen der Temperaturanomalie im Ostpazifik und den Thermoklinenanomalien im zentralen Pazifik zu geben. Im einfachsten Fall können wir diesen Zusammenhang linear modellieren, also

$$h_0(t - \frac{1}{2}\tau_K) \sim T(t - \frac{1}{2}\tau_K), \quad \text{und} \quad h_1(t - (\frac{1}{2}\tau_R + \tau_K)) \sim T(t - (\frac{1}{2}\tau_R + \tau_K)).$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung (7.25) wird dabei zu

$$\frac{d}{dt}T(t) = -cT(t) + aT(t - \frac{1}{2}\tau_K) + bT(t - (\frac{1}{2}\tau_R + \tau_K)) \quad (7.26)$$

Die Ableitung $\dot{T}(t)$ hängt also nicht nur von der Temperaturanomalie zur Zeit t ab, sondern auch von den Temperaturanomalien zu den früheren Zeitpunkten $t - \frac{1}{2}\tau_K$ und $t - (\frac{1}{2}\tau_R + \tau_K)$. Man nennt dies eine verzögerte Differentialgleichung.

Die Theorie der linearen, verzögerten Differentialgleichungen wie (7.26) zeigt, dass sie ähnlich wie gewöhnliche linear Differentialgleichungen erster Ordnung Lösungen haben, die exponentiell schnell zerfallen oder exponentiell anwachsen. Daher können wir nicht erwarten, dass (7.26) das El Niño-Phänomen adäquat beschreiben kann. Um das exponentielle Anwachsen zu verhindern, braucht es einen zusätzlichen Term, der dem Anwachsen von $T(t)$ überproportional entgegenwirkt. Zum Beispiel könnte dies man mit einem Term der Form $-\varepsilon T(t)^3$ erreichen. Die verzögerte Differentialgleichung ist dann

$$\frac{d}{dt}T(t) = -cT(t) + aT(t - \frac{1}{2}\tau_K) + bT(t - (\frac{1}{2}\tau_R + \tau_K)) - \varepsilon T(t)^3. \quad (7.27)$$

Ein andere Möglichkeit, ein ähnliches Ziel zu erreichen, wird in Kapitel ?? dargestellt.

In Kapitel 14 wird das Verhalten der Lösungen solcher verzögter Differentialgleichungen etwas mehr im Detail diskutiert und es wird gezeigt, dass sie tatsächlich wesentliche Aspekte des El Niño-Phänomens adäquat wiedergeben können.

Kapitel 8

Datenassimilation

In den vorangegangenen Kapiteln wurden Methoden vorgestellt und Modelle entwickelt, mit denen sich die Klimaentwicklung auf der Erde untersuchen lässt. Diese Modelle enthalten eine Anzahl von Parametern, zum Beispiel Naturkonstanten oder Eigenschaften des Planeten, die erst bestimmt werden müssen, bevor das Modell verwendet werden kann. Außerdem werden Anfangs- oder Randbedingungen benötigt, um die Differentialgleichungen überhaupt lösen zu können.

Gerade die Bestimmung der Anfangsbedingungen kann sehr schwierig sein. Wie soll man den Zustand der gesamten Atmosphäre im Detail ermitteln. Das Lorenz-Modell (Abschnitt 2.5) zeigt, dass ungenaue Anfangsbedingungen sehr schnell zu unbrauchbaren Vorhersagen des Modells führen können. Dies bedeutet natürlich auch, dass nur Modelle verwendet werden sollen, die nicht empfindlich sind auf die Anfangsbedingungen und vernünftige Aussagen ermöglichen, auch wenn die Anfangsbedingungen nicht sehr genau sind. Aber auch ein solches Modell kann bei ungenauen Anfangsbedingungen nicht lang zuverlässige Vorhersagen machen. Wir müssen also das Problem lösen, die unzureichenden Anfangsdaten später zu korrigieren. Dieses Problem wird vom Kalman-Filter dadurch gelöst, dass spätere Messungen den aktuellen Zustand korrigieren. Dieser Spezialfall wird in Abschnitt 8.1 vorgestellt. Dies ist jedoch nicht ausreichend, denn in der Klimaforschung sind wir manchmal mit der Situation konfrontiert, dass wir zusätzliche Daten über frühere Zustände erhalten oder Informationen über Zustandsvariablen, die früher nicht gemessen werden konnten. Dieses erweiterte sogenannte Datenassimilations-Problem wird in Abschnitt 8.2 untersucht.

8.1 Kalman-Filter

Die bisherige Sicht auf das Problem war, dass aus dem Modell und den Anfangsbedingungen der zukünftige Zustand des Modells abgeleitet werden kann. Doch bei fehlerhaften Anfangsdaten wird auch der zukünftige Zustand fehlerhaft sein. Ein erster Versuch, die Situation wieder gerade zu rücken ist, auch für den späteren Zustand eine Messung durchzuführen und zu versuchen, den Systemzustand derart zu korrigieren, dass auch die Vorhersagen des Modells besser mit der Realität übereinstimmen. Dies ist genau, was der Kalman-Filter ermöglicht.

In diesem Abschnitt soll eine kurze Übersicht über den Kalman-Filter gegeben werden. Sie stützt sich auf [1], eine detailliertere Darstellung findet sich in [11, Kapitel 8].

8.1.1 Messung und System

Wir gehen davon aus, dass das System, zum Beispiel das Klimasystem der Erde, mit einem Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ von Zustandsvariablen beschrieben werden kann. Den detaillierten Zustand des Systems können wir nicht erfahren, die Größen x sind also bestenfalls teilweise bekannt sein. Das Wissen über den Systemzustand kann wiedergegeben werden durch eine Schätzung \hat{x} .

Durch direkte Messung können möglicherweise einzelne dieser Variablen bestimmt werden. Möglicherweise können diese Variablen aber nicht direkt gemessen werden. Das Modell braucht vielleicht Temperatur, aber gemessen werden kann nur die Strahlungsintensität, die auch von der Dichte abhängig sein kann. Die gemessenen Variablen $z \in \mathbb{R}^m$ sind also bestenfalls eine Funktion $z = f(x)$ der Zustandsvariablen x .

Der Kalman-Filter soll ermöglichen, das Wissen über den System-Zustand \hat{x} durch Messung der Größen z zu verbessern, und so eine verbesserte Schätzung zu erhalten. Dies bedeutet, dass durch wiederholte Messung die Zustandsschätzung laufen verbessert werden kann, so dass die ursprünglich gewählten Anfangsbedingungen immer unbedeutender werden. Dies bedeutet aber, dass die Entwicklung des Systems mit einer Folge $x_k, k \in \mathbb{N}$, modelliert werden muss. Diese Zustände sind nur näherungsweise bekannt als eine Folge von Schätzungen $\hat{x}_k, k \in \mathbb{N}$. Mit jeder Messung z_k erfahren wir etwas über den Systemzustand. Die Messung z_k und das bisherige Wissen \hat{x}_{k-1} ergeben daher die neueste beste Schätzung \hat{x}_k . Das Ziel des Kalman-Filters ist daher, den Zusammenhang zwischen den genannten Größen in Form eines funktionalen Zusammenhangs der Form

$$\hat{x}_k = F(\hat{x}_{k-1}, z_n) \quad (8.1)$$

zu finden.

Die implizite Annahme hinter (8.1) ist, dass es einen Zusammenhang zwischen x_{k-1} und x_k und damit auch zwischen den Schätzungen \hat{x}_{k-1} und \hat{x}_k gibt. Es ist daher denkbar (8.1), in zwei Teilschritte aufzuteilen. Das vorhandene Wissen \hat{x}_{k-1} macht eine Vorhersage über den Zustand $\hat{x}_{k|k-1}$, welches anschliessend mit den neuen Messwerten z_n zur bestmöglichen Information \hat{x}_k über den aktuellen Zustand verbunden werden kann. Dazu braucht es einerseits eine Beschreibung der Systementwicklung $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, aus der sich auch eine Entwicklung der Schätzungen $\hat{x}_{k|k-1} = \Phi(\hat{x}_{k-1})$ ableiten lässt. Andererseits brauchen wir eine Funktion

$$\hat{x}_k = K(\hat{x}_{k|k-1}, z_n) \quad (8.2)$$

mit der der Zustand korrigiert werden kann.

8.1.2 Systemmodellierung

Die früher entwickelten Modelle zur Klimaentwicklung resultierten in zum Teil sehr komplizierten Abhängigkeiten zwischen Systemvariablen zu weit auseinander liegenden Zeitpunkten. Sie hatten jedoch gemeinsam, dass sie durch eine Differentialgleichungen erster Ordnung der Form

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

beschrieben werden konnten. Für genügend kurze Zeitschritt Δt können die Zustandsvariablen $x_k = x(k\Delta t)$ zu den Zeitpunkten $t_k = k\Delta t$ durch lineare Approximation

$$x_k = x_{k-1} + f(x_{k-1}, t_{k-1}) \cdot \Delta t$$

bestimmt werden. Eine Schätzung \hat{x}_{k-1} des Zustandes zur Zeit $k-1$ kann dann mit Hilfe von

$$\hat{x}_{k|k-1} = \hat{x}_{k-1} + f(\hat{x}_{k-1}, t_{k-1}) \cdot \Delta t \quad (8.3)$$

zu einem Zustand $\hat{x}_{k|k-1}$ entwickelt werden.

Um zu beurteilen, wie gross die Korrektur durch die Messung sein soll, muss bekannt sein, in welchem Ausmass die Schätzung vom tatsächlichen Zustand abweicht. Insbesondere muss (8.3) dazu verwendet werden können, auch die Entwicklung der Abweichung $x_{k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1}$ aus $x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}$. Für eine beliebige Funktion f ist dies im Allgemeinen zu schwierig. Durch erneute Linearisierung kann aus (8.1) eine lineare Entwicklungsgleichung

$$x_k = \varphi_k x_{k-1} \quad (8.4)$$

gewonnen werden, wobei φ_k eine $n \times n$ -Matrix ist.

Nur die allereinfachsten Modelle stellen ein System korrekt dar. Fast immer enthält ein Modell Vereinfachungen, die nötig sind, um über überhaupt ein Modell zu erhalten, mit dem Vorhersagen möglich sind. Entsprechend können die Vorhersagen auch nicht exakt sein, es verbleibt immer ein Fehler. Die Systementwicklung kann dies mit

$$x_k = \varphi_k x_{k-1} + u_k \quad (8.5)$$

berücksichtigen, worin u_k alle nicht modellierten Einflüsse enthält. Wir nehmen an, dass das Modell alle wesentlichen Einflüsse umfasst. Die Fehler u_k müssen daher zufällig und unvorhersagbar erscheinen, die sich im Mittel nicht auswirken. Es wird daher angenommen, dass die Komponenten u_k normalverteilte und unabhängige Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 sind, dass also

$$E(u_k) = 0 \quad \text{und} \quad E(u_k u_k^t) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} = Q_k$$

ist¹. Die Matrix Q_k , die *Systemfehler-Kovarianz* enthält auf der Diagonalen die Varianzen der Systemfehler u_k und ausserhalb der Diagonalen die Kovarianzen.

8.1.3 Schätzfehler

Wenn Vorhersage $\hat{x}_{k|k-1}$ und Messung \hat{z}_k miteinander kombiniert werden sollen um die bestmögliche Schätzung \hat{x}_k zu erhalten, wird Kenntnis über den zu erwartenen Fehler der Schätzung benötigt.

Die Schätzung \hat{x}_k sollte mindestens im Mittel korrekt sein. Dies lässt sich dadurch ausdrücken, dass die Fehler $x_k - \hat{x}_k$ als Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 modelliert werden können. Als Mass für den Schätzfehler kann man daher die Kovarianzmatrix von $x_k - \hat{x}_k$ verwenden, die mit

$$P_k = E((x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^t)$$

bezeichnet wird. Die Zeitentwicklung (8.5) führt einen zusätzlichen Fehler ein, der mit

$$P_{k|k-1} = \varphi_k P_{k-1} \varphi_k^t + Q_k \quad (8.6)$$

bezeichnet werden soll.

¹Aus der Argumentation oben lässt sich nicht ableiten, dass die Fehler u_k unabhängig sind, genau genommen gehen wir daher zu weit, wenn wir annehmen, dass Q_k Diagonalform hat, auch wenn dies in der Literatur der Einfachheit halber üblicherweise angenommen wird. Etwas allgemeiner sollte man nur voraussetzen, dass Q_k eine symmetrische, positiv definite Matrix ist. Die nachfolgend beschriebene Theorie lässt sich damit unverändert entwickeln.

8.1.4 Messprozess

Früher wurde gezeigt, wie der Messprozess die Werte der Messgrößen z_k aus den Zustandsvariablen ableitet. Auch hier ist die Modellierung mit einer allgemeinen Funktion $z = f(x)$ zu kompliziert. Auch für den Messprozess wird daher angenommen, dass er durch eine lineare Abbildung $z = Hx$ beschrieben werden kann, wobei H eine $m \times n$ -Matrix ist. Um einen Rest von Nichtlinearität von f zu retten, können wir davon ausgehen, dass H zusätzlich vom Zeitpunkt abhängt, also $z_k = H_k x_k$.

Jede Messung ist aber mit Fehlern behaftet, die mit einem Fehler-Vektor w_k in

$$z_k = H_k x_k + w_k, \quad (8.7)$$

wobei w_k eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 ist. Meist wird zudem angenommen, dass die einzelnen Messgrößen unabhängig sind, dass die Kovarianzen von w_k also eine Diagonalmatrix

$$R_k = E(w_k w_k^t) = \begin{pmatrix} \varrho_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \varrho_m^2 \end{pmatrix},$$

die *Messfehler-Kovarianz-Matrix*, ist².

8.1.5 Filterung

Wenn Vorhersage $\hat{x}_{k|k-1}$ und Messung z_k nicht im Konflikt stehen, dann ist auch keine Korrektur nötig, es kann $\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1}$ gewählt werden. Offenbar kann man $\hat{x}_{k|k-1}$ nicht direkt mit z_k vergleichen, da diese Vektoren verschiedene Dimension haben. Man kann aber z_k vergleichen mit den Messwerten, die sich ergeben müssten, wenn $\hat{x}_{k|k-1}$ der tatsächliche Zustand des Systems wäre. Diese Messwerte wären $H_k \hat{x}_{k|k-1}$, es ist daher naheliegend, die Korrektur linear in der Differenz $z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}$ anzusetzen. Es ist daher eine $n \times m$ -Matrix K_k gesucht, mit der sich die Korrektur als

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}) = (I - K_k H_k) \hat{x}_{k|k-1} + K_k z_k \quad (8.8)$$

berechnen lässt. Die Matrix K_k soll so bestimmt werden, dass der Fehler der Schätzung \hat{x}_k möglichst klein wird.

Der Fehler von \hat{x}_k ist P_k , mit (8.8) kann er aus

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} (I - K_k H_k)^t + K_k R_k K_k^t \quad (8.9)$$

berechnet werden. Als Mass für die Grösse des Fehlers dient die Spur der Matrix P_k , K_k muss also so bestimmt werden, dass Spur P_k minimal wird. Wie in [11] gezeigt wird, das erreicht, wenn

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial K_k} \text{Spur } P_k &= -2(I - K_k H_k) P_{k|k-1} H_k^t + 2K_k R_k = 0 \\ \Rightarrow \quad P_{k|k-1} H_k^t &= K_k (H_k P_{k|k-1} H_k^t + R_k) \\ \Rightarrow \quad K_k &= P_{k|k-1} H_k^t (H_k P_{k|k-1} H_k^t + R_k)^{-1}, \end{aligned}$$

sofern die Matrix in Klammern tatsächlich invertierbar ist. Die Matrix K_k heisst die *Kalman-Filter-Matrix*.

Damit haben wir alle Formeln für den Kalman-Filter zusammengetragen. In jedem Zeitschritt führen wir folgende Schritte durch:

²Wie bei der Systemfehler-Kovarianz würde es auch hier genügen anzunehmen, dass R_k eine symmetrisch positiv definite Matrix ist.

1. Vorhersage des Zustandes und des Schätzfehlers:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k|k-1} &= \varphi_k \hat{x}_{k-1} \\ P_{k|k-1} &= \varphi_k P_{k-1} \varphi_k^t + Q_k\end{aligned}$$

2. Berechnung der Kalman-Filter-Matrix

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^t (H_k P_{k|k-1} H_k^t + R_k)^{-1} \quad (8.10)$$

3. Korrektur:

$$\begin{aligned}\hat{x}_k &= (I - K_k H_k) \hat{x}_{k|k-1} + K_k z_k \\ P_k &= (I - K_k h_k) P_{k|k-1} (I - K_k H_k)^t + K_k R_k K_k^t\end{aligned}$$

8.1.6 Beispiel

Als Beispiel betrachten wir ein stark vereinfachtes Modell für die Temperatur der Erde und die Albedo in der Nähe eines Gleichgewichtes. Wir sind nur daran interessiert, die Temperaturanomalie T und die Albedo a in der Umgebung eines Gleichgewichtspunktes zu modellieren. In einem Zeitintervall Δt ändert sich die Temperatur einerseits durch Ausstrahlung, andererseits in Abhängigkeit von der Coalbedo c . Die Coalbedo wiederum steigt umso schneller, je grösser die Temperaturanomalie ist. Dies führt auf die Systemgleichungen

$$\begin{aligned}T_k &= (1 - \alpha) T_{k-1} + \beta c_k \\ c_k &= c_{k-1} + \gamma T_k\end{aligned}$$

mit geeigneten Koeffizienten α, β und γ . α beschreibt den Anteil der gespeicherten Wärme-Energie, der durch Ausstrahlung verloren geht und daher die Temperatur absenkt. β bestimmt, wie stark die Coalbedo die Temperatur beeinflussen kann, modelliert also die Einstrahlung. Schliesslich berechnet γ wie eine Temperturerhöhung sich auf die Coalbedo auswirkt.

Schreiben wir $x_k = (T_k, c_k)^t$, können wir die Systementwicklung als

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} T_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} (1 - \alpha) & \beta \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}}_{\varphi_k} \begin{pmatrix} T_k \\ c_k \end{pmatrix}$$

Wir nehmen an, dass wir nur die Temperaturanomalie T_k messen können, die zugehörige Messmatrix ist

$$H_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad z_k = H_k \begin{pmatrix} T_k \\ c_k \end{pmatrix} = T_k.$$

Zur Vervollständigung des Modells müssen jetzt nur noch die Mess- und Systemfehler ermittelt werden. Wenn die Temperaturanomalie mit einer Genauigkeit von 0.1 K ermittelt werden kann, muss $\varrho_1^2 = 0.01 \text{ K}^2$ verwendet werden. Die Systemfehlerkovarianzmatrix Q ist dagegen weniger leicht zu ermitteln. In der Praxis wird in dieser Situation häufig experimentell vorgegangen, wie dies auch in Kapitel 18 vorgeführt wird.

8.2 Das Assimilationsproblem

Der Kalman-Filter ist ein Beispiel dafür, wie laufend neue Messdaten und ein Modell des untersuchten System ermöglichen, selbst dann einigermassen vollständige Informationen über den Zustand des Systems zu erhalten, wenn nicht alle Zustandsgrößen direkt gemessen werden. Dass dies sogar für ein chaotisches System bis zu einem gewissen Grad möglich ist, zeigen die Experimente in Kapitel 18.

Allerdings wurden bei der Konstruktion des Kalman-Filters einige einschränkende Annahmen gemacht. Das System und der Messprozess musste linear beschreibbar sein, und Fehler mussten normalverteilt, unabhängig und mit Mittelwert 0 sein. Außerdem wurden immer nur Messungen des aktuellen Zeitpunktes verwendet, um die aktuellste Zustandsschätzung zu verbessern. Dieses Vorgehen ist natürlich in vielen technischen Anwendungen angemessen und auch passend zum Beispiel für Wetterprognosen, wo fast nur der aktuelle Zustand der Atmosphäre interessiert.

In einem Klimamodell ist jedoch nicht nur der aktuelle Zustand der Atmosphäre interessant. Vielmehr geht es darum, die Geschichte des Erdklimas möglichst genau zu rekonstruieren und dabei immer weitere, neu zugänglich gemachte Daten in das Modell zu integrieren und die Qualität der Vorhersagen zu verbessern.

In diesem Kapitel soll daher angedeutet werden, wie ein allgemeineres Datenassimilationsproblem formuliert werden kann, welches als Spezialfall das im vorangegangenen Abschnitt 8.1 gelöste Filterproblem hat.

8.2.1 Markov-Kette und Markov-Eigenschaft

Der Zustand des Klimasystems zu einem beliebigen Zeitpunkt kann mit einem Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ von Variablen beschrieben werden, im einfachsten Fall bestehend allein aus der globalen Mitteltemperatur. Natürlich ist x nicht bekannt, wir können bestenfalls X ist eine Zufallsvariable betrachten, die den Wert x angenommen hat.

Da die ganze Klimageschichte rekonstruiert werden soll, sind die Werte von x zu diskreten Zeitpunkten $0, \dots, N$ zu bestimmen. Die Klimageschichte ist also eine Folge $X(k)$ mit $k = 0, \dots, N$ von Zufallsvariablen. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{X(k)}(x)$ von $X(k)$ bekannt ist. Man nennt $X(k)$ einen diskreten *stochastischen Prozess*. In der Realität steht uns jeweils nur ein Teil der Werte des Prozesses zur Verfügung, so bezeichnen wir mit $X(i : j)$ die Folge

$$X(i), X(i+1), \dots, X(j-1), X(j).$$

Damit ist $X(0 : n)$ die Klimageschichte bis zur Zeit n , und $X(n : N)$ die Zukunft.

Das Assimilationsproblem besteht darin, dass Messwerte $Y(k)$ zur Verfügung gestellt werden, mit denen sich die Wahrscheinlichkeitsdichte von $X(k)$ "genauer" bestimmen lässt. Um den Formalismus herauszuarbeiten seien X und Y Zufallsvariablen, es soll die Frage beantwortet werden, wie sich die Verteilung von X ändert, wenn Y den Wert von y annimmt. Die Wahrscheinlichkeitsdichte von (X, Y) sei $f_{X,Y}(x, y)$, sie kann sich daher auf zwei verschiedene Arten als Produkt

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{X|y}(x) f_Y(y) = f_{Y|x}(y) f_X(x) \quad (8.11)$$

beschrieben werden. Der *Satz von Bayes* für die *bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten* wird

$$f_{X|y}(x) = \frac{f_X(x)}{f_Y(y)} f_{Y|x}(y). \quad (8.12)$$

Wenn die Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind, dann hat der Wert von y keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeitsdichte von X , es ist also

$$f_{X|y}(x) = f_X(x) \quad \forall y.$$

Gegeben $f_{X|y}(x)$ lässt sich auch Wahrscheinlichkeitsdichte f_X berechnen, es gilt

$$f_X(x) = \int f_{X|y}(x) f_Y(y) dy. \quad (8.13)$$

Dies ist der Satz von der *totalen Wahrscheinlichkeit*.

Kausalität verlangt, dass der Zustand $X(k)$ zur Zeit k abhängig ist von den Zustandswerten $x(j)$ mit $j < k$. Da $X(k)$ Zufallsvariablen sind, muss sich diese Eigenschaft mit den Wahrscheinlichkeitsdichten für $X(k)$ ausdrücken lassen.

Mit Ausnahme der verzögerten Differentialgleichung, die zur Modellierung des El Niño-Phänomens in Kapitel 7 verwendet wurde, haben alle bisher studierten Modelle die Eigenschaft, dass der Zustand zur Zeit k vollständig bestimmt ist durch den Zustand zur Zeit $k - 1$. Frühere Zustände zu Zeiten $j < k - 1$ müssen nicht berücksichtigt werden. Mit Hilfe der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte (8.11) kann dies wie folgt ausgedrückt werden:

Definition 8.1. Der stochastische Prozess $X(k)$ hat die *Markov-Eigenschaft*, wenn gilt

$$f_{X(n:N)|x(0:n-1)}(x(n : N)) = f_{X(n:N)|x(n-1)}(x(n : N)). \quad (8.14)$$

Ein solcher stochastischer Prozess heiss *Markov-Kette*.

Die Definition besagt, dass die Verteilung von $X(n : N)$ sich nicht ändert, wenn ausser den Werten $x(n - 1)$ auch noch die früheren Werte $x(0 : n - 2)$ kennt.

Die *Markov-Eigenschaft* eines stochastischen Prozesses bedeutet, dass für Vorhersagen von $X(n : N)$ nur die Verteilung von $X(n - 1)$ bekannt sein muss. Weiteres Wissen über weiter zurück liegende Werte $X(0 : n - 2)$ hat liefert keine Verbesserung der Vorhersage von $X(n)$. Durch wiederholte Anwendung von (8.11) erhält man daraus

$$\begin{aligned} f_{X(0:n)}(x(0 : n)) &= f_{X(n)|x(0:n-1)}(x(n)) f_{X(0:n-1)}(x(0 : n - 1)) = f_{X(n)|x(n-1)}(x(n)) f_{X(0:n-1)}(x(0 : n - 1)) \\ &= f_{X(n)|x(n-1)}(x(n)) f_{X(n-1)|x(n-2)}(x(n - 1)) \dots f_{X(0)}(x(0)) \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichten $f_{X(j)|x(j-1)}(x(j))$ heissen die *Übergangswahrscheinlichkeiten* der Markov-Kette.

8.2.2 Filterung, Vorhersage und Reanalyse

Die Aufgabe, die sich jetzt stellt, ist aus Ausschnitten der Messwertegeschichte $Y(0 : N)$ Ausschnitte der Klimgeschichte zu rekonstruieren. Die folgenden Spezialfälle werden unterschieden:

1. Filterung: Schätze $X(n)$ aus den Werten von $Y(1 : n)$.
2. Vorhersage: Schätze $X(n)$ aus den Werten von $Y(1 : n - 1)$.
3. Reanalyse: Schätze $X(n)$ aus den Werten von $Y(1 : N)$.

Man beachte, dass bei der Reanalyse auch die späteren Werte zur Verfügung stehen.

Um eines dieser Probleme zu lösen, muss der Zusammenhang zwischen den Zustandsvariablen $X(k)$ und den Messgrößen $Y(j)$ bekannt sein. Die Messgröße $Y(k)$ soll nur vom Zustand zur Zeit k abhängen, nicht von früheren oder späteren Zeitpunkten. Die Zufallsvariablen $Y(j)$ und $X(k)$ mit $j \neq k$ müssen daher unabhängig sein. Dies bedeutet, dass sich die Wahrscheinlichkeitsdichten als Produkt

$$f_{Y(1:n)|x(0:n)}(y(1 : n)) = f_{Y(n)|x(n)}(y(n)) f_{Y(n-1)|x(n-1)}(y(n-1)) \dots f_{Y(1)|x(1)}(y(1))$$

zerlegen lässt.

Damit lassen sich jetzt die Problemstellungen genauer formulieren und auch lösen.

Satz 8.2 (Filter und Vorhersage). *Gegeben sei*

1. die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{X(0)}$ für den Anfangszustand,
2. die Übergangswahrscheinlichkeiten $f_{X(j)|x(j-1)}$ der Markov-Kette $X(0 : N)$ und
3. die bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten $f_{Y(j)|x(j)}$ für die Messungen.

Dann können wie Wahrscheinlichkeitsdichten $f_{X(i)|y(1:i)}$ für das Filterproblem sowie die Wahrscheinlichkeitsdichten $f_{X(i)|y(1:i-1)}$ für das Vorhersage-Problem wie folgt bestimmt werden.

1. Schritt:

$$f_{X(1)}(x(1)) = \int f_{X(1)|x(0)}(x(1)) f_{X(0)}(x(0)) dx(0) \quad (8.15)$$

$$f_{X(1)|y(1)}(x(1)) \sim f_{Y(1)|x(1)}(y(1)) f_{X(1)}(x(1)), \quad (8.16)$$

wobei der Proportionalitätsfaktor so gewählt werden muss, dass tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsdichte entsteht.

2. Schritt: für $i = 2, \dots, N$

$$f_{X(i)|y(1:i-1)}(x(i)) = \int f_{X(i)|x(i-1)}(x(i)) f_{X(i-1)|y(1:i-1)}(x(i-1)) dx(i-1) \quad (8.17)$$

$$f_{X(i)|y(1:i)}(x(i)) \sim f_{Y(i)|x(i)}(y(i)) f_{X(i)|y(1:i-1)}(x(i)), \quad (8.18)$$

liefert, wobei wiederum der Proportionalitätsfaktor so gewählt werden muss, dass eine Wahrscheinlichkeitsdichte entsteht.

Beweis. Die Formeln von Schritt 1 sind nichts anderes als der Satz von Bayes (8.12).

Für den Beweis der Formeln für den zweiten Schritt verwenden wir vollständig Induktion. Die Verankerung für $i = 2$ ist gegeben durch den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit (8.13)

$$f_{X(2)|y(1)}(x(2)) = \int f_{X(2)|x(1)}(x(2)) f_{X(1)}(x(1)) dx(1).$$

und erhalten damit die Formel (8.15). Die zweite Formel (8.16) ergibt sich aus dem Satz von Bayes (8.12).

Für den Induktionsschritt verwenden wir wieder zuerst den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit (8.13) und erhalten

$$f_{X(i)|y(1:i-1)}(x(i)) = \int f_{X(i)|x(i-1)}(x(i)) f_{X(i-1)|y(1:i-1)}(x(i-1)) dx(i-1)$$

also die Formel (8.17). Die zweite Formel (8.18) folgt daraus mit dem Satz von Bayes (8.12). \square

Satz 8.3 (Reanalyse). *Gegeben seien*

1. die Übergangswahrscheinlichkeiten $f_{X(i)|x(i-1)}$ für die Markov-Kette $X(0 : n)$
2. die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Filterproblem $f_{X(i)|y(1:i)}$.

Dann kann die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Reanalyse-Problem wie folgt bestimmt werden

1. Falls $i = N$, dann ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Reanalyse-Problem dieselbe wie jene für das Filterproblem.
2. Für $i = 2, \dots, N - 1$ und für die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{X(i+1)|y(1:N)}$ für das Reanalyse-Problem für $X(i + 1)$ wird die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Reanalyse-Problem für $X(i)$ durch

$$f_{X(i)|x(i+1), y(1:i)}(x(i)) \sim f_{X(i+1)|x(i)}(x(i + 1)) f_{X(i)|y(1:i)}(x(i)) \quad (8.19)$$

$$f_{X(i)|y(1:N)}(x(i)) = \int f_{X(i)|x(i+1), y(1:i)}(x(i)) f_{X(i+1)|y(1:N)}(x(i + 1)) dx(i + 1) \quad (8.20)$$

berechnet, wobei der Proportionalitätsfaktor wieder so gewählt werden muss, dass eine Wahrscheinlichkeitsdichte entsteht.

Beweis. Fall 1 ist klar, das Reanalyse-Problem für $X(N)$ ist dasselbe wie des Filterproblems für $X(N)$.

Es bleibt daher nur noch, die Formeln (8.19) und (8.20) nachzuweisen. Die Formel (8.19) ist nichts anderes als der als der Satz von Bayes (8.12). Die Formel (8.20) ist der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit (8.13). \square

8.3 Kalman-Filter als Bayesscher Filter

In Satz 8.2 wurde gezeigt, wie das allgemeine Filterproblem gelöst werden kann. Ohne zusätzliche Voraussetzungen über den Prozess $X(k)$ sind die Formeln des Satzes jedoch kaum brauchbar. Einerseits sind die Übergangswahrscheinlichkeiten im Allgemeinen kaum bekannt, andererseits sind die vielen Integrale nur in einfachen Fällen ausführbar.

Im Kalman-Filter ist jedoch sehr viel mehr über den stochastischen Prozess bekannt. Bis auf den Systemfehler sind die Übergänge durch lineare Abbildungen, die Matrizen φ_k , gegeben und der Messprozess, beschrieben durch die Matrize H_k , ist ebenfalls linear. Die Verteilungen sind jeweils Normalverteilungen, daher sollten alle Integrale leicht zu berechnen sein und es sollten sich als Lösung des Filterproblems der Formelsatz des Kalman-Filters und insbesondere die Formel (8.10) für die Matrix K_k ergeben.

Für die Zwecke dieses Seminars könnten wir es damit bewenden lassen. Das im Seminar verwendete Buch [5] beweist die Kalman-Filter-Formeln aus den Formeln von Satz 8.2. Das zentrale Lemma in dieser Rechnung ist Lemma 20.1, leider ist der Beweis sehr fehlerhaft. Außerdem ist auch die Übungsaufgabe 4 in den Exercises, die im Beweis in Abschnitt 20.3.1 benötigt wird, ebenfalls falsch. Das Ziel dieses Abschnitts ist, diese Fehler zu korrigieren und damit den Seminarteilnehmern das Verständnis des Kapitels 20 von [5] zu erleichtern.

In Abschnitt 8.3.1 wird gezeigt, wie die bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten für normalverteilte Zufallsvariablen dargestellt werden können. Der Beweis des Lemmas 20.1 und damit der Nachweis, dass der in Abschnitt 8.1 dargestellte Kalmanfilter nichts anderes als ein Spezialfall des in Abschnitt 8.2 beschriebenen Bayesschen Filterprozesses ist, wird in Abschnitt 8.3.2 geführt. Die fehlerhaften Aufgabe 4 in Kapitel 20 von [5] wird in Abschnitt 8.3.3 korrigiert.

8.3.1 Normalverteilte Variablen

Wir gehen aus von einem Zustandsvektor X und einer Messmatrix H , die die Messwerte $Y = HX + w$ bis auf einen Messfehler w mit Kovarianzmatrix R aus X berechnen kann. In [5] wird darauf hingewiesen, dass die Berechnung von $f_{X|y}$ mit Hilfe des Satzes von Bayes unpraktikabel ist außer in dem Spezialfall, wo X und $Y|X$ normalverteilt sind. Dies bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte von X geschrieben werden kann als

$$f_X(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^t P^{-1}(x - \mu)\right). \quad (8.21)$$

Darin ist $\mu = E(X)$ der Vektor der Erwartungswerte und P die Kovarianzmatrix $P = E(XX^t)$ von X .

Die Zufallsvariable $Y|X$ beschreibt die Messwerte von Y , die im Systemzustand X zu erwarten sind. Die Messmatrix H ermittelt bis auf ebenfalls normalverteilten Messfehler die Messwerte, $Y|X$ ist also normalverteilt mit Erwartungswert $E(HX) = H\mu$. Die Wahrscheinlichkeitsdichte von $Y|X$ ist daher

$$f_{Y|x}(y) = \exp\left(-\frac{1}{2}(y - Hx)^t R^{-1}(y - Hx)\right). \quad (8.22)$$

8.3.2 Lemma 20.1

In [5] wird dann das folgende Lemma formuliert, welches im wesentlichen die Formel (8.10) für die Kalman-Filter-Matrix beweist.

Lemma. *Seien X und Y normalverteilte Zufallsvariablen wie oben ausgeführt. Dann ist $X|Y$ ebenfalls normalverteilt mit Erwartungswert μ^* und Kovarianzmatrix P^* mit*

$$\mu^* = \mu + K(Y - H\mu) \quad (8.23)$$

$$P^* = (I - KH)P, \quad (8.24)$$

wobei K die Kalman-Gain-Matrix

$$K = PH^t(R + HPH^t)^{-1} \quad (8.25)$$

ist.

Beweis. Das Lemma behauptet, dass es möglich ist, die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{X|y}$ bis auf einen Normierungsfaktor, der nur von y abhängen darf, in der Form

$$f_{X|y}(x) \sim \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu^*)^t P^{*-1}(x - \mu^*)\right)$$

zu schreiben. Dies bedeutet, dass nach (8.21) und (8.22)

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu^*)^t P^{*-1}(x - \mu^*)\right) &\sim f_X(x) f_{Y|x}(y) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}((x - \mu)^t P^{-1}(x - \mu) + (y - Hx)^t R^{-1}(y - Hx))\right) \end{aligned}$$

gelten muss. Die Terme in den Exponentialfunktionen müssen also bis auf eine Konstante, die nur von y abhängen darf, übereinstimmen:

$$(x - \mu^*)^t P^{*-1}(x - \mu^*) = (x - \mu)^t P^{-1}(x - \mu) + (y - Hx)^t R^{-1}(y - Hx) + c(y).$$

Wir multiplizieren beide Seiten aus und verwenden dabei, dass die Kovarianzmatrizen und ihre Inversen symmetrisch sind. Die linke Seite ergibt:

$$\text{LHS} = x^t P^{*-1} x - 2\mu^{*t} P^{*-1} x + \mu^{*t} P^{*-1} \mu^*.$$

Die rechte Seite ist:

$$\begin{aligned}\text{RHS} &= x^t P^{-1} x - 2\mu^t P^{-1} x + \mu^t P^{-1} \mu + x^t H^t R^{-1} H x - 2y^t R^{-1} H x + y^t R^{-1} y + c(y) \\ &= x^t (P^{-1} + H^t R^{-1} H) x - 2(\mu^t P^{-1} + y^t R^{-1} H) x + \mu^t P^{-1} \mu + y^t R^{-1} y + c(y).\end{aligned}$$

Nur der erste Term auf beiden Seiten enthält die quadratischen Terme, es folgt

$$P^{*-1} = P^{-1} + H^t R^{-1} H \quad \Rightarrow \quad P^* = (P^{-1} + H^t R^{-1} H)^{-1}.$$

Ebenso lesen wir an den Termen linear in x ab, dass

$$\mu^{*t} P^{*-1} = \mu^t P^{-1} + y^t R^{-1} H$$

sein muss. Durch Transponieren finden wir die Gleichung

$$P^{*-1} \mu^* = P^{-1} \mu + H^t R^{-1} y,$$

was wir durch Multiplikation mit P^* von links nach μ^* auflösen können:

$$\mu^* = P^* (P^{-1} \mu + H^t R^{-1} y)$$

Schreiben wir $P^{-1} = P^* - H^t R^{-1} H$, erhalten wir

$$\begin{aligned}\mu^* &= P^* ((P^* - H^t R^{-1} H) \mu + H^t R^{-1} y) \\ &= \mu + P^* H^t R^{-1} y - P^* H^t R^{-1} H \mu \\ &= \mu + P^* H^t R^{-1} (y - H \mu).\end{aligned}$$

Mit der Abkürzung

$$K = P^* H^t R^{-1} = (P^{-1} + H^t R^{-1} H)^{-1} H^t R^{-1} \quad (8.26)$$

wird daraus

$$\mu^* = \mu + K(y - H \mu).$$

Damit ist gezeigt, dass sich die Wahrscheinlichkeitsdichte von $X|Y$ tatsächlich als Normalverteilung schreiben lässt, und dass der Erwartungswert μ^* von $X|Y$ in der Form (8.23) geschrieben werden kann.

Jetzt muss nur noch gezeigt werden, dass für P^* und K die im Lemma genannten Formeln gelten. Wir rechnen zuerst nach, dass die Formel für die K im Lemma gleichbedeutend ist mit der Formel (8.26). Wir multiplizieren zu diesem Zweck die Differenz der beiden zu vergleichenden Terme von links mit $P^{-1} + H^t R^{-1} H$ und von rechts mit $R + HPH^t$. Wir erhalten

$$(P^{-1} + H^t R^{-1} H) P H^t - H^t R^{-1} (R + HPH^t) = H^t + H^t R^{-1} H P H^t - H^t - H^t R^{-1} H P H^t = 0,$$

womit die Formel (8.25) nachgewiesen ist.

Es bleibt, die Formel (8.24) für P^* nachzuweisen. Zunächst lesen wir aus der Abkürzung (8.26) ab, dass

$$\begin{aligned} KH &= P^* H^t R^{-1} H \\ &= (P^{-1} + H^t R^{-1} H)^{-1} (P^{-1} + H^t R^{-1} H - P^{-1}) \\ &= I - P^* P^{-1} \\ \Rightarrow P^* P^{-1} &= I - KH. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir jetzt beide Seiten von rechts mit P , erhalten wir

$$P^* = (I - KH)P,$$

wie im Lemma behauptet. \square

8.3.3 Übungsaufgabe 4

Die Formeln für $\text{var}(X_1|y)$ und $\text{var}(X_3|y)$ auf Seite 266 von [5] sind ebenfalls falsch. In diesem Abschnitt leiten wir korrigierte Versionen her.

Zunächst ist die Matrix P (oder Σ , wie sie in der Aufgabe 4 und im Abschnitt 20.3.1 heißt) zu finden. Aus der Rekursionsformel

$$\text{var}(X_{i+1}) = \text{var}(\alpha X_i + \xi_{i+1}) = \alpha^2 \text{var}(X_i) + \text{var}(\xi_{i+1}) = \alpha^2 \text{var}(X_i) + \sigma^2$$

für die Varianzen lesen wir zum Beispiel ab

$$\begin{aligned} \text{var}(X_1) &= \sigma^2 \\ \text{var}(X_2) &= \alpha^2 \sigma^2 + \sigma^2 = (\alpha^2 + 1)\sigma^2 \\ \text{var}(X_3) &= (\alpha^4 + \alpha^2 + 1)\sigma^2 \\ \text{var}(X_4) &= (\alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^2 + 1)\sigma^2 \end{aligned}$$

Analog kann man aus der Rekursionsformel

$$\text{cov}(X_i, X_{i+k}) = \text{cov}(X_i, \alpha X_{i+k-1} + \xi_{i+k}) = \alpha \text{cov}(X_i, X_{i+k-1}) + \text{cov}(X_i, \xi_{i+k}) = \alpha \text{cov}(X_i, X_{i+k-1})$$

ablesen:

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_1, X_2) &= \alpha \text{var}(X_i) = \alpha \sigma^2 \\ \text{cov}(X_1, X_3) &= \alpha \text{cov}(X_1, X_2) = \alpha^2 \sigma^2 \\ \text{cov}(X_1, X_4) &= \alpha^3 \sigma^2 \\ \text{cov}(X_2, X_3) &= \alpha \text{var}(X_2) = \alpha(\alpha^2 + 1)\sigma^2 \\ \text{cov}(X_2, X_4) &= \alpha^2(\alpha^2 + 1)\sigma^2 \\ \text{cov}(X_3, X_4) &= \alpha \text{var}(X_3) = \alpha(\alpha^4 + \alpha^2 + 1)\sigma^2 \end{aligned}$$

Die Kovarianzmatrix ist daher

$$P = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \alpha & \alpha^2 + 1 & \alpha(\alpha^2 + 1) & \alpha^2(\alpha^2 + 1) \\ \alpha^2 & \alpha(\alpha^2 + 1) & \alpha^4 + \alpha^2 + 1 & \alpha(\alpha^4 + \alpha^2 + 1) \\ \alpha^3 & \alpha^2(\alpha^2 + 1) & \alpha(\alpha^4 + \alpha^2 + 1) & \alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^2 + 1 \end{pmatrix}$$

Aus den Formel für K und P^* im Lemma kann man jetzt beide berechnen und die verlangten Varianzen als Diagonalelemente von P^* ablesen:

$$\begin{aligned}\text{var}(X_1|y) &= \frac{\sigma^2 \tau^4 + (\alpha^2 + 2)\sigma^4 \tau^2 + \sigma^6}{\tau^4 + (\alpha^4 + 2\alpha^2 + 2)\sigma^2 \tau^2 + (\alpha^2 + 1)\sigma^4} \\ &= \sigma^2 \frac{\tau^4 + (\alpha^2 + 2)\sigma^2 \tau^2 + \sigma^4}{\tau^4 + (\alpha^4 + 2\alpha^2 + 2)\sigma^2 \tau^2 + (\alpha^2 + 1)\sigma^4} < \sigma^2 \\ \text{var}(X_3|y) &= \frac{(\alpha^4 + \alpha^2 + 1)\sigma^2 \tau^4 + (\alpha^2 + 1)\sigma^4 \tau^2}{\tau^4 + (\alpha^4 + 2\alpha^2 + 2)\sigma^2 \tau^2 + (\alpha^2 + 1)\sigma^4} \\ &= \tau^2 \sigma^2 \frac{(\alpha^4 + \alpha^2 + 1)\tau^2 + (\alpha^2 + 1)\sigma^2}{\tau^4 + (\alpha^4 + 2\alpha^2 + 2)\sigma^2 \tau^2 + (\alpha^2 + 1)\sigma^4} = O(\tau^2) \quad \text{für } \tau \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Die Schlussfolgerungen der Aufgabe bleiben somit gültig.

Literatur

- [1] Donald E. Catlin. *Estimation, Control, and the Discrete Kalman Filter*. Bd. 71. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag New York, 1989. ISBN: 978-1-4612-88640.
- [2] Lawrence C Evans. *Partial Differential Equations*. Bd. 19. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2010.
- [3] Georg Joos. *Lehrbuch der theoretischen Physik*. Wiesbaden: Akademische Verlagsgesellschaft, 1977.
- [4] *Jupiter on 25 February 2017*. 2018. URL: http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2017/04/Jupiter_on_25_February_2017.
- [5] Hans Kaper und Hans Engler. *Mathematics and Climate*. Englisch. Society for Industrial und Applied Mathematics, 2013. ISBN: 978-1-611972-60-3.
- [6] Richard McGehee und Clarence Lehman. “A paleoclimate model of ice-albedo feedback forced by variations in earth’s orbit”. In: *SIAM J. Applied Dynamical Systems* 11.2 (2012), S. 684–707.
- [7] F. J. Millero, A. Gonzalez und G. K. Ward. “The density of seawater solutions at one atmosphere as a function of temperature and salinity”. In: *J. Mar. Res.* 34 (1976), 61–93.
- [8] Andreas Müller u. a. *Mathematisches Seminar Differentialgleichungen*. 2016.
- [9] Andreas Müller u. a. *Mathematisches Seminar Quantenmechanik*. 2015.
- [10] Andreas Müller. *Partielle Differentialgleichungen. Skript zur Master-Vorlesung*. 2018.
- [11] Andreas Müller. *Wahrscheinlichkeit und Statistik. Skript zur Vorlesung an der HSR*. 2018.
- [12] H. Schirmer u. a. *Wetter und Klima*. Wie funktioniert das? Meyers Lexikonverlag, 1989.
- [13] Wikipedia: *Albedo*. 2018. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Albedo>.
- [14] Wikipedia: *Geologic temperature record*. 2018. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Geologic_temperature_record.
- [15] Wikipedia: *Hadley cell*. 2018. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Hadley_cell.
- [16] Wikipedia: *Klima*. 2018. URL: de.wikipedia.org/wiki/Klima.
- [17] Wikipedia: *Sunlight*. 2018. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Sunlight>.
- [18] Wikipedia: *Wetter*. 2018. URL: de.wikipedia.org/wiki/Wetter.
- [19] Wikipedia: *Wärmeleitungsgleichung*. 2018. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/W%C3%A4rmeleitungsgleichung>.
- [20] Wikipedia: *Wärmeleitungsgleichung*. 2018. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Konvektion>.

Teil II

Anwendungen und Weiterführende Themen

Übersicht

Im zweiten Teil kommen die Teilnehmer des Seminars selbst zu Wort. Die im ersten Teil dargelegten mathematischen Methoden und grundlegenden Modelle werden dabei verfeinert, verallgemeinert und auch numerisch überprüft. Die Beispiele zeigen auch, dass umfassende Klimamodell erwartungsgemäss schnell sehr komplex werden können. Sie zeigen aber auch, dass es möglich ist, wesentliche Aspekte des Klimas aus einfachen Überlegungen und mit übersichtlichen mathematischen Modellen zu erfassen und zu verstehen.

Matthias Baumann und *Oli Dias* zeigen zusätzliche Informationen zum Lorenz-System, insbesondere zum Lorenz-Attraktor. *Hansruedi Patzen* verallgemeinert das Vorgehen, mit dem das Lorenz-System gewonnen wurde, im Sinne des Separationsverfahrens für partielle Differentialgleichungen weiter, und gewinnt eine Reihe von höherdimensionalen Lorenz-Systemen und untersucht weiter, ob das beim dreidimensionalen System gefundene chaotische Verhalten auch in den höherdimensionalen Versionen zu finden ist. Diese Untersuchungen zeigen, dass das Verhalten wahrscheinlich nicht nur ein Artefakt der Reduktion auf drei Dimensionen ist, sondern eine inhärente Eigenschaft des Lorenz-Systems.

Die exakte Lösung von Klimamodellen ist oft sehr schwierig, oft sind Parameter oder Abhängigkeiten nicht bekannt. Ein alternativer Ansatz ist daher, die zeitliche Entwicklung im Sinne von machine learning zu lernen. *Martin Stypinski* untersucht diesen Ansatz an zwei Beispielen, der Wärmeleitungsgleichung und der nichtlinearen Gleichung von Burgers. Die Beispiele zeigen vor allem auch, wie mathematisches Wissen über das Modell hilft, die neuronalen Netzwerke zweckmässig zu entwerfen.

Die im Text entwickelten Modelle sind meist noch rudimentär, eine reihe von Arbeiten haben sich daher mit Erweiterungen und Verfeinerungen befasst. *Jonas Gründler* hat das 2-Box Modell der thermohalinen Zirkulation auf 3 Boxen verallgemeinert. *Silvio Marti* studiert den Einfluss von Eis auf das Klima. Die verzögerte Differentialgleichung des El Niño-Systems kann numerische gelöst werden. *Raphael Unterer* zeigt, wie dies funktioniert und findet insbesondere auch eine Stabilitätsbedingung für sein Verfahren. *Nicolas Tobler* hat versucht, die Modelle auf verschiedene Planeten zu verallgemeinern und damit die Unterschiede der Atmosphären der Planeten Venus, Erde und Mars zu erklären. Die Einflüsse anderer Planeten zeigen sich zum Beispiel in der Neigung der Erdachse gegen die Erdbahnebene. Wie *Sebastian Lenhard* vorführt, können auch kleine Änderungen der Neigung das Klima dramatisch verändern. Schliesslich gibt es auch eine Kopplung zwischen Klima und Vegetation, die *Matthias Dunkel* modelliert hat.

Die letzten zwei Kapitel befassen sich mit der Aufarbeitung der Daten, aufgrund derer wir zum Schluss kommen, dass der Klimawandel real ist. Für Wetter- wie auch für Klimamodelle sind grosse Datenmengen von Wetter- und Klimamessstationen in die Rechnung zu integrieren. Der Kalman-Filter ist die Basis vieler moderner Lösungsansätze für dieses Problem. Am Beispiel des erweiterten Kalman-Filters für das Lorenz-System zeigt *Michael Müller*, wie es möglich ist, den Systemzustand

selbst eines chaotischen nichtlinearen Systems zu Extreme Ereignisse sind in den letzten Jahren häufiger geworden und werden oft als Indikatoren für die Klimaveränderung angeführt. Wie man mit statistischen Daten über solche Ereignisse beweisen kann, dass der Klimawandel tatsächlich stattfindet, zeigt *Melina Staub*.

Kapitel 9

Lorenz-Attraktor

Matthias Baumann und Oliver Dias

9.1 Einführung

Der amerikanische Mathematiker und Meteorologe Edward Lorenz brachte im Jahre 1972, drei Jahre nachdem er sein berühmtes Paper zum Lorenz-Modell publizierte, ein weiteres Paper mit dem Titel: "*Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?*" heraus. Aussergewöhnlicherweise stieß dieses Paper auf reges Interesse im allgemeinen Publikum. Entgegen vielen anderen wissenschaftlichen Publikationen ließ sich aus diesem eine scheinbar einfache Schlussfolgerung ziehen: Kleine Ereignisse können grosse und weitreichende Konsequenzen haben. Dieser Effekt bekam den Namen "Butterfly Effect", und es wurden sogar Filme und Bücher mit dieser Schlussfolgerung als Inspiration geschrieben. Dass der Plot des Modells ästhetisch ansprechend ist und einer abstrakten Schmetterlingsform ähnelt, verhalf ebenso zur dessen Berühmtheit.

Wie wir feststellen werden, ist diese Schlussfolgerung eine Fehlinterpretation und basiert auf einer falschen Verallgemeinerung. Um dies erklären zu können, müssen wir uns mit dem vorhergehenden Paper von Lorenz beschäftigen, mit welchem er die drei berühmten Gleichungen entdeckte und somit den Lorenz Attraktor.

Im Folgenden wird dieses Modell also genauer beschrieben sowie eine numerische Lösung vorgestellt (Abschnitt 9.2). Anschliessend werden Möglichkeiten dargelegt, wie ein solches Modell in Code umgesetzt werden kann. Als Kern dieses Papers wird dann das vorgestellte Verfahren angewendet und eine eigene Visualisierung präsentiert (Abschnitt 9.3), gefolgt von Hintergrundinformationen (Abschnitt 9.4) und dem Abschluss (Abschnitt 9.5), wo mithilfe von diesen Visualisierungen Schlüsse zum Lorenz-Attraktor gezogen werden.

9.2 Lorenz-Modell

Die Gleichungen, welche das Lorenz-Modell beschreiben, enthalten viele physikalische Eigenschaften wie die Dichte, Geschwindigkeit und Temperatur der Atmosphäre. Lorenz wollte aus den bereits existierenden Gleichungen der Hydrodynamik ein Modell zur Wetterprognose erstellen. Basierend

$$\dot{x} = \sigma(x - y) \quad (9.1)$$

$$\dot{y} = x(\rho - z) - y \quad (9.2)$$

$$\dot{z} = xy - \beta z \quad (9.3)$$

Abbildung 9.1: Gleichungen des Lorenz-Systems, Herleitung siehe Kapitel 2.5

auf vorgehenden Arbeiten von Saltzman [4] startete Lorenz mit den hydrodynamischen Gleichungen und verfolgte ein systematisches Näherungsvorgehen, womit er auf die drei Gleichungen stiess, die als dreidimensionales System betrachtet werden.

Die X-Achse entspricht dabei der hydrodynamischen, räumlichen Durchschnittsgeschwindigkeit, also die durchschnittliche Konvektionsgeschwindigkeit. Die Y-Achse repräsentiert die Temperatur und die Z-Achse der Temperaturgradient. Also wie schnell sich die Temperatur verändert. Die Gleichungen lauten folgendermassen:

Wie aus den obigen Gleichungen ersichtlich ist, sind drei Parameter vorhanden. Alle sind immer positiv.

1. Parameter: σ

σ entspricht der dimensionslosen Prandtl Zahl. Diese ist das Verhältnis von *Viskosität* und der *Wärmeleitfähigkeit*. Da beide Eigenschaften die Einheit $\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ haben, resultiert daraus eine dimensionslose Zahl.

2. Parameter: ρ

Dieser Parameter ist nach dem Physiker Baron Rayleigh benannt worden und heisst Rayleigh Zahl. Es entspricht dem Verhältnis von *Wärmeausdehnung* und der *Viskosität*.

3. Parameter: β

Das β entspricht der *Wärmeausdehnung*. Dabei handelt es sich um die Veränderung der geometrischen Abmessungen (Länge, Flächeninhalt und Volumen) eines Körpers, die sich mit erhöhter Temperatur vergrössern.

9.2.1 Numerische Lösungen

Es gibt für das Lösen von Differentialgleichungen zwei Ansätze. Zum einen der analytische Ansatz, der eine allgemeingültige Lösung sucht. Es handelt sich bei den drei Lorenz-Gleichungen um nicht-lineare Differentialgleichungen, welche analytisch nicht lösbar sind. Aus diesem Grund fällt dieser Lösungsweg weg.

Der zweite Ansatz ist, eine *Diskretisierung* vorzunehmen und den Computer für jeden definierten Zeitpunkt die Resultate der Gleichungen *numerisch* ausrechnen zu lassen. Dies ist auch der in dieser Arbeit gewählte Weg, der im Folgenden bis zur tatsächlichen Visualisierung genauer beschrieben wird.

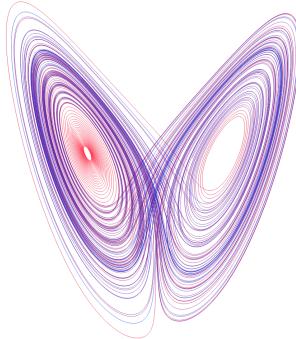


Abbildung 9.2: Bahn des Lorenz-Modell mit $\rho = 28$, $\sigma = 10$ und $\beta = \frac{8}{3}$

Differentialgleichungen beschreiben die Änderungsrate der Variablen X, Y, Z . Sie sagen nichts über die X-Achsen-Verschiebung der Werte aus. Aus diesem Grund kennt man die absolute Werte nicht und kann auch keine anderen Werte davon ableiten. Der numerische Algorithmen können lediglich die anderen Werte ausrechnen von einem definierten Startwert. Im Abschnitt 9.2.1 Euler-Verfahren werden wir weiter auf die Wahl des Startwertes eingehen.

Euler-Verfahren

Wir wählten für die Diskretisierung das *Euler-Verfahren* zur Annäherung der Werte des Lorenz-Modells. Das resultierende Gleichungssystem besteht aus einfachen Arithmetik-Operationen und ist für einen Computer einfach berechenbar. Dies erlaubt auch *Smartphones* die Visualisierung effizient zu berechnen und flüssig anzuzeigen.

Das Euler-Verfahren ist ein Algorithmus der Familie der Einschritt-Verfahren. Diese Verfahren rechnen iterativ in einer Schleife die Werte von einem bekannten Startwert aus. Als nächster Ausgangspunkt wird dann das Ergebnis der vorherigen Iteration genommen und mithilfe der Differentialgleichung die Änderung zum Ausgangspunkt bestimmen.

Da Einschritt-Verfahren einen Startwert brauchen von wessen sie die nächsten Ausgangspunkte ausrechnen können, muss der erste Startwert vorgegeben werden. Wir haben im Rahmen dieses Berichtes keine Optimierung des Startwertes durchführen können, sondern einfach eine sinnvolle Annahme getroffen. Dieser Anfangswert war konstant und fester Teil des Algorithmus, den wir modelliert haben.

Wir starteten zuerst mit dem Startwert $P(0, 0, 0)$. In den anschliessenden Untersuchungen des Algorithmus zeigte sich, dass dieser Startwert zugleich eine Lösung des Lorenz-Systems ist. Aus diesem Grund hat sich das Modell auf den Ursprung stabilisiert. Wir entschieden uns den Startwert auf $P(0.1, 0.1, 0.1)$ zu verschieben, dieser Wert ist keine Lösung des Lorenz-Systems und das Modell stabilisierte sich nicht mehr.

Als Basis für das Euler-Verfahren verwenden wir den Differenzenquotient $\frac{dx}{dt} \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t}$ [1]. Weil wir den nächsten Punkt im 3D-Raum ausrechnen möchten, formen wir die Gleichung zu x_{n+1} um und rechnen sie für alle Achsen getrennt aus.

$$x_{n+1} = x_n + \frac{dx}{dt} \cdot \Delta t \quad (9.4)$$

```

1 || x = arr[i].x + ((sigma * arr[i].y) - (sigma * arr[i].x)) * delta;
2 || y = arr[i].y + ((-arr[i].x * arr[i].z) + (rho * arr[i].x) - arr[i].y) * delta;
3 || z = arr[i].z + ((arr[i].x * arr[i].y) - (beta * arr[i].z)) * delta;

```

Bedeutung	Mathematisches Symbol	Variable im Code	Parameterwert
Zeitschritt	Δ	delta	0.1
Rayleigh Zahl	σ	sigma	10
Prandtl Zahl	ϱ	rho	28
Wärmeausdehnung	β	beta	$\frac{8}{3}$

Tabelle 9.1: Code Variablen und ihre Werte

$$y_{n+1} = y_n + \frac{dy}{dt} \cdot \Delta t \quad (9.5)$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{dz}{dt} \cdot \Delta t \quad (9.6)$$

Für die Ableitungen können wir nun die Gleichungen des Lorenz-Modells einsetzen. Die Variablen x, y, z haben wir ausserdem zu Iterationsvariablen

$$x_{n+1} = x_n + \sigma(x_n - y_n) \cdot \Delta t \quad (9.7)$$

$$y_{n+1} = y_n + x_n(\rho - z_n) - y_n \cdot \Delta t \quad (9.8)$$

$$z_{n+1} = z_n + (x_n \cdot y_n - \beta \cdot z_n) \cdot \Delta t \quad (9.9)$$

Dieses System entspricht dem Code der Visualisierung weiter unten. Im Differentialterm wurde die Differentialgleichung des Lorenz-Modells eingesetzt.

9.3 Visualisierung

Das oben erwähnte Gleichungssystem haben wir im Javascript-Code verwendet, um die Resultate des Lorenzsystems auszurechnen. Der folgende Code beschreibt das oben vorgestellte Lorenz-Modell in JavaScript. Nachfolgend ist eine Aufstellung aller Variablen im Code und in den Formeln weiter oben.

Der Algorithmus 9.3 startet mit der Initialisierung der Variablen in Tabelle 9.1. Auf Linie 10 wird der Startwert auch in den Ortsvektoren-Array *pos* gespeichert. Die Schleife wird damit einfacher zu programmieren, wenn Sie immer davon ausgehen kann, dass eine Position vorher schon vorhanden ist. Damit können wir eine generelle Schleife programmieren, die sich nicht um den Spezialfall *length(pos) = 0* kümmern muss. Die Schleife wird 2500 mal durchlaufen. In welcher er die Werte des Lorenz-Modells in einem Array als 3D-Vektoren abgespeichert. Diese Ortsvektoren stellen die Position der Punkte im dreidimensionalen Raum dar.

Die Darstellungsobjekte an diesen Positionen besitzen die Form von *Spheres*. Wir haben diese Form gewählt, da sie in 3D einem Punkt im XY-Koordinatensystem nachempfunden ist. Ein solches Objekt stellt einen Wert der Lorenzgleichungen dar.

Die Darstellung wird mittels *WebGL* [5] im Browser gerendert. Da *WebGL* eine komplexe 3D-Graphik-API von *OpenGL* ist, haben wir auf dieser Technologie aufbauende Middleware *White-stormJS* [3] verwendet. Diese Middleware bietet uns eine vereinfachte Abstraktion, denn wir benötigen nur sehr wenige Standardfunktionen von *WebGL*.

```
1 calculate(rho = 28, sigma = 10, beta = 8 / 3) {
2     const it = 2500;
3
4     let x = 0.1;
5     let y = 0.1;
6     let z = 0.1;
7     const delta = 0.01;
8
9     const pos = [];
10    pos.push(new THREE.Vector3(x, y, z));
11
12    for (let i = 0; i < it; i += 1) {
13        x = arr[i].x + ((sigma * arr[i].y) - (sigma * arr[i].x)) * delta;
14        y = arr[i].y + ((-arr[i].x * arr[i].z) + (rho * arr[i].x) - arr[i].y) *
15            delta;
16        z = arr[i].z + ((arr[i].x * arr[i].y) - (beta * arr[i].z)) * delta;
17        pos.push(new THREE.Vector3(x, y, z));
18    }
19
20    return pos;
}
```

Abbildung 9.3: Algorithmus für Lorenz-Modell

Für die Interaktivität der Webpage mit Animationen bei den Seitenwechsel, Textboxen und Strukturierung des Codes ist die neue JavaScript Bibliothek *VueJS* [6] zum Einsatz gekommen.

Dank diesen Helfern konnten wir innerhalb von etwa 30h Arbeit eine vollständige Simulationsumgebung für das Lorenz-Modell 68 mit folgenden Charakteristiken programmieren:

- 3D-Visualisierung
- Drehen und Zoomen
- Sofortiges update von 3D Visualisierung bei Parameteränderung
- fixe 3D-Bilder deren Parameter durch den Betrachter unveränderbar sind
- Erklärungstext

9.4 Hintergründe

Um die verschiedenen Eigenschaften anhand vom Lorenz-Modell erklären zu können, sind einige Hintergrundinformationen relevant. Diese davon sind im Folgenden beschrieben.

9.4.1 Empfindlichkeit der Anfangsbedingungen

Unter empfindlichen Anfangsbedingungen versteht man, dass sehr kleine Unterschiede in den Anfangsbedingungen sehr grosse Unterschiede in der Lösungsmenge produzieren. Man nennt dies *sensitive Abhängigkeit* und das ist die wesentliche Komponente in chaotischen Systemen.

So könnte zum Beispiel eine minimale Änderung am Startwert der Lorenz-Gleichungen die Lösung dazu bewirken, dass sie mit gleichbleibenden Parameter gerade auf der gegenüberliegenden

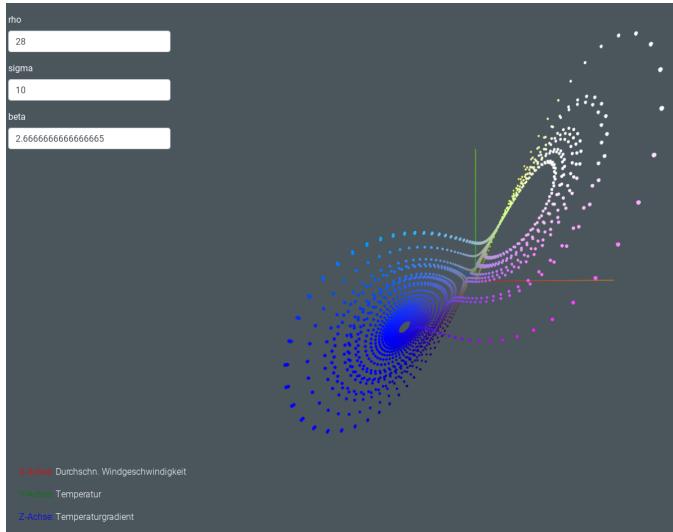


Abbildung 9.4: Visualisierung Lorenz-Attraktor

Seite des Flügels im Plot zu liegen kommt. In Abbildung 9.5 links ist der Endpunkt gerade sehr nahe am Anfangspunkt (0.9 für x, y und z), wobei der Endpunkt in Abbildung 9.5 rechts auf dem anderen Flügel zu liegen kommt. Er ist durch die vielen anderen Werte überdeckt und deshalb nicht sichtbar. Genau das ist also eine Situation wo sich der Endpunkt der rechten Lösung auf dem anderen Flügel befindet als derjenige der linken Lösung. Die einzige Änderung zwischen den zwei Plots ist der Startwert.

Es gibt aber auch andere äussere Einwirkungen, die eine Veränderung der Werte auslösen kann. Zum Beispiel kann der Rundungsfehler eines CPUs die Ergebnisse *klein* wenig von Punkt zu Punkt verändern und so werden sich die Fehler kumulieren. Dies führt dazu, dass die Ergebnisse nicht reproduzierbar sind, da solche Einflüsse zwischen Durchläufen variieren.

9.4.2 Chaostheorie

Im Allgemeinen ist die Chaostheorie ein Bereich der Mathematik der sich mit nicht-linearen dynamischen Systemen auseinandersetzt. Wie schon im vorherigen Abschnitt erwähnt ist die wesentliche Komponente eines chaotischen Systems die sensitive Abhängigkeit der Anfangsbedingungen. Sind beliebig kleine Unterschiede darin vorhanden, dann entwickelt sich das System nach einer endlichen Zeit völlig anders. Um das Verhalten eines chaotischen Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt zu bestimmen, müssten für die Berechnung unendlich genaue Werte verwendet werden, was praktisch nicht möglich ist. Auch wenn chaotische Systeme deterministisch sind, ist es praktisch oftmals nicht möglich die Resultate an einem gesuchten Zeitpunkt genau zu bestimmen.

Ein typisches Beispiel für ein chaotisches System ist das Wetter, wie Edward Lorenz herausgefunden hat. Die Modelle von Lorenz sind chaotisch. Dennoch haben diese Systeme aber wiederkehrende Verhaltensweisen. Dies zeigt sich, indem sich wiederholende, zum Teil fraktale Muster und ähnliche Figuren zustande kommen. Dadurch, dass die Parameter des Lorenz Modells aber mit heutiger Technik nicht unendlich genau gemessen werden kann, kann auch keine langfristige und verlässliche Aussage über das Wetter gemacht werden.



Abbildung 9.5: Bahn des Lorenz-Modell mit Startwert $x = y = z = 0.9$ links und 1 rechts

9.4.3 Attraktor

In dynamischen Systemen ist ein Attraktor eine Untermenge eines Phasenraums (Raum aller Zustände), zu welchen sich ein dynamisches System im Laufe der Zeit zubewegt und diese Menge das System nicht mehr verlässt [7]. Egal welche Startwerte man in einem Attraktor verwendet, das System entwickelt sich immer auf dieselbe Art und Weise. Beim Lorenz Attraktor ist dies die berühmte Form des Butterflies.

Als einfacheres Beispiel für einen Attraktor könnte man ein Pendel nehmen. Ein Pendel entwickelt sich mit der Zeit wegen dem Luftwiderstand und der Reibung immer näher an einen Punkt, bei welchem sich alle darauf wirkenden Kräfte zu 0 addieren und sich das Pendel nicht mehr bewegt. Dieser Punkt ist also der Attraktor für dieses Pendelsystem. Im Unterschied zum Lorenz-Attraktor handelt es sich beim Pendelsystem aber um ein nicht-chaotisches System. Eine kleine Änderung in der Startposition der Masse am Ende des Pendels führt auf eine kleine Änderung in der Position, wobei es bei einem chaotischen System anders ausehen würde.

Für eine formale Definition eines Attraktors müssen wir also zwei wesentliche Eigenschaften abbilden. Zum Einen muss die Eigenschaft, die Punkte innerhalb einer Toleranz erscheinen lässt, abgebildet werden. Das heisst, dass es zu einem Punkt P des Attraktors und einer Toleranz ε eine Zeit t gibt, so dass

$$|P - x(t)| < \varepsilon$$

wird. Die Bahn geht also zu irgendeinem Zeitpunkt näher als ε an P vorbei.

Zum Anderen müssen wir die sich wiederholende Komponente definieren. Wir können also beliebig lange warten, es wird immer wieder einen Zeitpunkt geben, zu welcher die Bahn $x(t)$ nahe an P vorbeigeht. Es gibt eine Wartezeit T , zu welcher es ein späterer Zeitpunkt $t > T$ gibt, dass

$$|P - x(t)| < \varepsilon$$

ist.

Die komplette formale Definition ist also:

$$\forall P, \forall T \text{ und } \forall \varepsilon \exists t > T, \text{ für die gilt } |P - x(t)| < \varepsilon$$

Für jeden Zeitpunkt T existiert ein späterer Zeitpunkt t , bei dem sich die Funktion x (Lorenz-Attraktor) so entwickelt, dass der Betrag der Differenz kleiner als die Toleranz ε wird.

9.4.4 Strange Attraktor

Beim Strange Attraktor gilt dieselbe Definition wie für den Attraktor. Das System hat jetzt aber ein viel komplexerer Attraktor wie bei einem Pendel. Die Menge des Attraktors besteht nun nicht mehr aus nur einem Punkt, sondern aus einer kompliziert geformten Menge. Das heisst, dass sich Werte innerhalb des Systems chaotisch verhalten. So könnten sich Lösungen in der Definition des Attraktors innerhalb von ε beliebig bewegen.

9.5 Schlussfolgerung

Wie wir beschrieben haben, spielt das Chaos eine grosse Rolle in der Wetterprognose und ist der Grund, wieso keine langfristige, verlässliche Prognose gemacht werden kann. Denn selbst kleinste Verfälschungen der Messdaten führen nach einer gewissen Zeit zu einem komplett anderen Resultat. Es kann sein, dass mit einem minimal anderen Input die Resultatmenge gerade auf die andere Seite des Butterflies ausschlagen könnte. Da wir nicht beliebig genau messen können, stellt uns das vor diese Einschränkung der zeitlich limitierten Prognose.

Um Rückschluss auf das Paper von Lorenz mit dem Flügelschlag des Schmetterlings zu nehmen, müssen wir uns überlegen, inwiefern ein Schmetterlingsschlag eine Auswirkung haben kann. Gemäß dem Lorenz-Modell wäre es möglich, dass ein solch kleines Event zu so grossen Auswirkungen wie ein Tornado führen kann, da es sich ja genau um eine winzige Parameteränderung handelt. Hingegen ein Rückschluss zu ziehen, was genau ein Tornado ausgelöst hat, ist praktisch unmöglich, selbst wenn alle benötigten Daten vorhanden wären. Genauso könnte ein Schmetterlingsschlag einen allfälligen Tornado verhindert haben. Zu dieser Erkenntnis ist Herr Lorenz gekommen nachdem er den hier besprochenen Artikel veröffentlicht hat. Er hat diese Schlussfolgerung in einem separaten Folgeartikel[2] niedergeschrieben. Dieser Grundsatz ist noch heute das entscheidende Merkmal der Chaostheorie.

Doch kann das Modell auch auf die Realität angewendet werden und stimmt nun diese Schlussfolgerung? Für das Berechnen des Lorenz-Attraktors wurden viele Vereinfachungen gemacht. So werden viele relevante Eigenschaften des Wetters wie zum Beispiel die Luftfeuchtigkeit, die Einflüsse der Wolken oder auch die Albedo nicht miteinbezogen.

Es ist also kein realistisches Modell. Wir kommen zum Schluss, dass das Wetter zwar ein chaotisches Modell ist, aber durch das, dass es ein solch grosses und komplexes System ist, ein Schmetterlingsschlag schlichtweg zu irrelevant ist, um ein Tornado auszulösen.

Literatur

- [1] Wolfgang Dahmen und Arnold Reusken. *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. ger. 2., korr. Aufl. Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer, 2008. ISBN: 978-3-540-76492-2.
- [2] *Deterministic Nonperiodic Flow*. URL: <https://journals.ametsoc.org/doi/pdf/10.1175/1520-0469%281963%29020<0130%3ADNF>2.0.CO%3B2>.
- [3] *Documentation WhitestormJS*. URL: <http://whs.io/>.

- [4] *Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem—I.* URL: <https://journals.ametsoc.org/doi/abs/10.1175/1520-0469%281962%29019<0329%3AFAFCAA>2.0.C0%3B2>.
- [5] *The WebGL API: 2D and 3D graphics for the web.* URL: https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/API/WebGL_API.
- [6] *Vue.js.* URL: <https://vuejs.org/>.
- [7] *Wikipedia - Lorenz Attraktor.* URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz_system.

Kapitel 10

Höherdimensionales Lorenzsystem

Hansruedi Patzen

Auf das dreidimensionale Lorenzsystem wurde bereits in Abschnitt 2.5 sowie in Kapitel 9 detailliert eingegangen. Trotzdem werden folgend nochmals die für das Lorenz-Modell relevanten Grundgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} &= \nu \Delta^2 \psi + c \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x, y)} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \kappa \Delta \vartheta + \frac{T_0}{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \vartheta)}{\partial(x, y)}\end{aligned}\tag{10.1}$$

genauer analysiert. Dank einer geschickten Wahl von Basisfunktionen

$$\sin(ax) \sin(y), \quad \cos(ax) \sin(y) \quad \text{und} \quad \sin(2y)$$

und einigen Vereinfachungen, hatten wir es geschafft, das System auf drei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= -\nu(a^2 + 1)X(t) + \frac{ac}{a^2 + 1}Y(t) \\ \dot{Y}(t) &= \frac{aT_0}{\pi}X(t) - (a^2 + 1)\kappa Y(t) - aX(t)Z(t) \\ \dot{Z}(t) &= -4\kappa Z(t) + \frac{a}{2}X(t)Y(t)\end{aligned}$$

zu reduzieren, welche unser dreidimensionale Lorenzsystem beschreiben.

In diesem Kapitel wollen wir nun diese mittels Separationsverfahren gefunden Lösungen, welche unsere Basisfunktionen bilden, erweitern. Diese neuen Basisfunktionen sollen es uns ermöglichen auch Terme, die wir bisher bei unserer Lösung vernachlässigt haben, miteinzubeziehen. Dies führt uns dann schlussendlich zu einem neuen Lorenzsystem, welches nicht mehr dreidimensional sondern höherdimensional ist. Bis wir die daraus entstehenden Resultate in Abschnitt 10.5 begutachten können, müssen wir erst ein paar Dinge zur Notation und allgemeinen Formeln in Abschnitt 10.1 klären. Danach machen wir uns auf die Suche neuer Basisfunktionen in Abschnitt 10.2 und generieren nach Einsetzen und Vereinfachen in Abschnitt 10.3 die zum Lösen unserer neuen höherdimensionalen Lorenzsystems benötigten gewöhnlichen Differentialgleichungen. Abschnitt 10.4 zeigt uns zudem an einem konkreten Beispiel eines Lorenzsystem vierten Grades, welche Informationen verloren gehen, wenn Terme vernachlässigt werden.

10.1 Einstieg

Bevor wir uns auf die Suche nach Basisfunktionen machen, folgen hier ein paar Angaben zu der in diesem Kapitel verwendeten Notation und einigen grundlegenden Funktionen und Identitäten, welche später verwendet werden. Eine kleine Vorschau zu dem was uns noch erwartet sozusagen.

10.1.1 Notation

Die verwendete Notation entspricht grundsätzlich derjenigen, welche bereits aus der Literatur bekannt sind. Einzig die Verwendung der sogenannten Multi-Index-Notation könnte für einige Leser zu Unklarheiten führen, daher hier eine kurze Einführung.

Unter der Multi-Index-Notation versteht man einen Index, der einem n -Tupel

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad \alpha_k \in \mathbb{N}_0$$

entspricht. Zur klaren Unterscheidung zu normalen Indices, wird meist ein griechischer Buchstabe verwendet. Der absolute Wert eines Multi-Indices ist wie folgt definiert

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Nützlich ist diese Notation insbesondere, wenn mit Summen gearbeitet wird. So kann mittels der Forderung $|\alpha| = k$ und unter Ausnutzung der “Symmetrie” von k und l die Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k a_{l,k-l} \tag{10.2}$$

auch geschrieben werden kann als

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} a_{\alpha} \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2).$$

Dies liefert uns

$$a_{(0,0)} + a_{(0,1)} + a_{(1,0)} + a_{(0,2)} + a_{(1,1)} + a_{(2,0)} + a_{(0,3)} + \dots$$

Wie man sehen kann, entspricht dies genau dem in Gleichung (10.2) geforderten 2-Tupel $(l, k - l)$.

10.1.2 Formelzusammenstellung

Einige Umformungen, die wir in den nächsten Abschnitten vornehmen werden, verwenden teilweise nicht ganz geläufige Funktionen. Damit nicht immer gleich Wikipedia bemüht werden muss, werden diese hier zusammengestellt.

Die Signum-Funktion (kurz $\text{sgn}(x)$):

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases} \tag{10.3}$$

Die sgn -Funktion können wir dazu verwenden, die Berechnung von Sinus und Kosinus eines absoluten Wertes zu vereinfachen:

$$\begin{aligned} \sin(|x|) &= \text{sgn}(x) \sin(x) & \Leftrightarrow & \sin(x) = \text{sgn}(x) \sin(|x|) \\ \cos(|x|) &= \cos(x) \end{aligned} \tag{10.4}$$

Produkte von Sinus und Kosinus können wir mit folgenden Identitäten in einfache Summen umwandeln. Unter anderem kann dies mit Hilfe der komplexen Zahlentheorie gezeigt werden:

$$\begin{aligned}\cos(x)\sin(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y)) \\ \sin(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)) \\ \sin(x)\sin(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))\end{aligned}$$

10.2 Erweiterung der Basisfunktionen

Die Suche neuer Basisfunktionen beginnt mit denjenigen, die bereits in Gleichung (2.45) erwähnt sind. Bei genauerer Betrachtung stellt man fest, dass diese auch ein wenig anders geschrieben werden können:

$$\begin{aligned}\sin(ax)\sin(y) &= \sin(1ax)\sin(1y), \\ \cos(ax)\sin(y) &= \cos(1ax)\sin(1y), \\ \sin(2y) &= \cos(0ax)\sin(2y).\end{aligned}$$

Nun fügen wir ein paar zusätzliche, auf den ersten Blick etwas nutzlose, Gleichungen hinzu:

$$\begin{aligned}0 &= \sin(0ax)\sin(2y) \\ \sin(ax)\sin(y) &= \sin(1ax)\sin(1y) \\ 0 &= \sin(2ax)\sin(0y) \\ \sin(2y) &= \cos(0ax)\sin(2y) \\ \cos(ax)\sin(y) &= \cos(1ax)\sin(1y) \\ 0 &= \cos(2ax)\sin(0y)\end{aligned}$$

Daraus lässt sich nun das Muster

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_1 ax)\sin(\alpha_2 y) \\ \cos(\alpha_1 ax)\sin(\alpha_2 y)\end{aligned}\tag{10.5}$$

erkennen, wobei α_1 und α_2 Teile eines Multi-Indices sind und die Bedingung $|\alpha| = k = 2$ erfüllen.

Für unser dreidimensionales Modell hatten wir also Basisfunktionen zweiten Grades ($k = 2$) gefunden. Mit den neuen Funktionen können wir aber nicht nur die uns bekannten generieren, sondern diese auch noch erweitern indem wir den Grad k variieren.

Leicht zu erkennen ist, dass für $k = 0$ nur die 0-Funktion übrig bleibt, da einzig das $(0, 0)$ -Tupel die Bedingung $|\alpha| = 0$ erfüllt. $k = 1$ generiert die beiden Tupel $(0, 1)$ und $(1, 0)$, womit die Funktion $\sin(y)$ übrig bleibt. Somit können wir Grad $k \geq 1$ voraussetzen. Damit wird auch gleich das Problem einer möglichen Division durch 0 elegant umgangen, wie wir später sehen werden.

10.3 Höherdimensionales Lorenzsystem

Nun nehmen wir die Grundgleichungen aus Gleichung (10.1) und unsere neuen Basisfunktionen aus Gleichung (10.5) und bauen daraus ein höherdimensionales Lorenzsystem.

Als ersten Schritt werden die in Gleichung (2.43) und Gleichung (2.44) gefundenen Lösungen erweitert und es resultiert

$$\psi(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} a_{\alpha}(t) \sin(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y), \quad (10.6)$$

sowie

$$\vartheta(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} b_{\alpha}(t) \cos(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y). \quad (10.7)$$

Als nächstes betrachten wir nochmals die Gleichung (10.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} &= v \Delta^2 \psi + c \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(x, y)} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \kappa \Delta \vartheta + \frac{T_0}{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \vartheta)}{\partial(x, y)}. \end{aligned}$$

Um das Einsetzen und Vereinfachen der Terme einfacher zu gestalten, ist es sinnvoll, systematisch vorzugehen. Es ist leicht zu erkennen, dass wir sowohl partielle Ableitungen nach x als auch nach y brauchen werden. Daher fangen wir an, uns Bausteine zurechtzulegen, indem wir die Gleichungen (10.6) und (10.7) je zwei Mal nach x und y ableiten.

Für $\psi(x, y, t)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= a \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \alpha_1 a_{\alpha}(t) \cos(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y), \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \alpha_2 a_{\alpha}(t) \sin(\alpha_1 ax) \cos(\alpha_2 y), \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= -a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \alpha_1^2 a_{\alpha}(t) \sin(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y), \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \alpha_2^2 a_{\alpha}(t) \sin(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y) \end{aligned}$$

und für $\vartheta(x, y, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} &= -a \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \alpha_1 b_{\alpha}(t) \sin(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y), \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial y} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \alpha_2 b_{\alpha}(t) \cos(\alpha_1 ax) \cos(\alpha_2 y), \\ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} &= -a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \alpha_1^2 b_{\alpha}(t) \cos(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \alpha_2^2 b_\alpha(t) \cos(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y).$$

Damit haben wir alles zusammen um den einfachen Laplace-Operator Δ für $\psi(x, y, t)$

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\ &= -a^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1^2 a_\gamma(t) \sin(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2^2 a_\delta(t) \sin(\delta_1 ax) \sin(\delta_2 y) \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} (\alpha_1^2 a^2 + \alpha_2^2) a_\alpha(t) \sin(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y) \end{aligned}$$

und $\vartheta(x, y, t)$

$$\begin{aligned} \Delta \vartheta &= \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \\ &= -a^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1^2 b_\gamma(t) \cos(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2^2 b_\delta(t) \cos(\delta_1 ax) \sin(\delta_2 y) \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} (\alpha_1^2 a^2 + \alpha_2^2) b_\alpha(t) \cos(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y) \end{aligned}$$

aufzulösen. Für die Gleichung (10.6) brauchen wir zudem $\Delta^2 \psi(x, y, t)$, was die zweifachen Ableitungen von $\Delta \psi(x, y, t)$ nach x respektive y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} &= -a \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \alpha_1 (\alpha_1^2 a^2 + \alpha_2^2) a_\alpha(t) \cos(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y), \\ \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial x^2} &= a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \alpha_1^2 (\alpha_1^2 a^2 + \alpha_2^2) a_\alpha(t) \sin(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y), \\ \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} &= - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \alpha_2 (\alpha_1^2 a^2 + \alpha_2^2) a_\alpha(t) \sin(\alpha_1 ax) \cos(\alpha_2 y), \\ \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial y^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \alpha_2^2 (\alpha_1^2 a^2 + \alpha_2^2) a_\alpha(t) \sin(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y) \end{aligned}$$

beinhaltet, womit wir dann

$$\begin{aligned} \Delta^2 \psi &= \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial y^2} \\ &= a^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1^2 (\gamma_1^2 a^2 + \gamma_2^2) a_\gamma(t) \sin(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2^2 (\delta_1^2 a^2 + \delta_2^2) a_\delta(t) \sin(\delta_1 ax) \sin(\delta_2 y) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} (\alpha_1^2 a^2 + \alpha_2^2)^2 a_{\alpha}(t) \sin(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y)$$

zusammenbauen können.

Wie wir hier sehen, sind nicht nur die ursprünglichen, sondern auch auch die erweiterten Basisfunktionen natürlich wieder Eigenfunktionen des Laplace-Operators. Es gilt dabei

$$\Delta^n f = \lambda^n f \quad \text{mit } \lambda = -(\alpha_1^2 a^2 + \alpha_2^2), n \in \mathbb{N}.$$

Wem bei den Gleichungen für die Laplace Operatoren aufgrund der Addition zweier unendlicher Summen etwas mulmig war, soll unbesorgt sein. Diese Umformung sei uns erlaubt, da wir davon ausgehen müssen, dass die einzelnen Reihen konvergent sind. Zudem hält uns nichts davon ab, die Indices der beiden unabhängigen Summen so umzubenennen, dass diese übereinstimmen. Damit ist klar, dass die gleichen Basisfunktionen generiert werden und die Summen somit vereinfacht werden können.

Mit unseren bisherigen Bausteinen haben wir jetzt fast alles zusammen, um diese in Gleichung (10.1) einzusetzen. Einzig die Funktionaldeterminanten fehlen noch. Diese sind auch der haarige Teil des Gleichungssystems, denn es sorgt für die Kopplung der beiden Terme.

Beginnen wir also damit die erste Funktionsdeterminante

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} \\ &= \left(a \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1 a_{\gamma}(t) \cos(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \right) \left(- \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2 (\delta_1^2 a^2 + \delta_2^2) a_{\delta}(t) \sin(\delta_1 ax) \cos(\delta_2 y) \right) \\ &\quad - \left(\sum_{q=1}^{\infty} \sum_{|\xi|=q} \xi_2 a_{\xi}(t) \sin(\xi_1 ax) \cos(\xi_2 y) \right) \left(-a \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{|\eta|=r} \eta_1 (\eta_1^2 a^2 + \eta_2^2) a_{\eta}(t) \cos(\eta_1 ax) \sin(\eta_2 y) \right) \\ &= -a \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1 a_{\gamma}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2 (\delta_1^2 a^2 + \delta_2^2) a_{\delta}(t) \cos(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \sin(\delta_1 ax) \cos(\delta_2 y) \\ &\quad + a \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{|\xi|=q} \xi_2 a_{\xi}(t) \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{|\eta|=r} \eta_1 (\eta_1^2 a^2 + \eta_2^2) a_{\eta}(t) \sin(\xi_1 ax) \cos(\xi_2 y) \cos(\eta_1 ax) \sin(\eta_2 y) \\ &= -a \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1 a_{\gamma}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2 (\delta_1^2 a^2 + \delta_2^2) a_{\delta}(t) \cos(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \sin(\delta_1 ax) \cos(\delta_2 y) \\ &\quad + a \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2 a_{\delta}(t) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1 (\gamma_1^2 a^2 + \gamma_2^2) a_{\gamma}(t) \sin(\delta_1 ax) \cos(\delta_2 y) \cos(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \\ &= a \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1 a_{\gamma}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2 (a^2 (\gamma_1^2 - \delta_1^2) + (\gamma_2^2 - \delta_2^2)) a_{\delta}(t) \\ &\quad \cdot \cos(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \sin(\delta_1 ax) \cos(\delta_2 y) \\ &= \frac{a}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1 a_{\gamma}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2 (a^2 (\gamma_1 - \delta_1)(\gamma_1 + \delta_1) + (\gamma_2 - \delta_2)(\gamma_2 + \delta_2)) a_{\delta}(t) \\ &\quad \cdot (\sin((\gamma_1 + \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 + \delta_2)y) \\ &\quad + \sin((\gamma_1 - \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 - \delta_2)y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sin((\gamma_1 - \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 + \delta_2)y) \\
& - \sin((\gamma_1 - \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 - \delta_2)y) \Big) \\
= & \frac{a}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1 a_{\gamma}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2 \left(a^2 (\gamma_1 - \delta_1)(\gamma_1 + \delta_1) + (\gamma_2 - \delta_2)(\gamma_2 + \delta_2) \right) a_{\delta}(t) \\
& \cdot \left(\operatorname{sgn}(\gamma_1 + \delta_1) \operatorname{sgn}(\gamma_2 + \delta_2) \sin(|\gamma_1 + \delta_1|ax) \sin(|\gamma_2 + \delta_2|y) \right. \\
& + \operatorname{sgn}(\gamma_1 + \delta_1) \operatorname{sgn}(\gamma_2 - \delta_2) \sin(|\gamma_1 + \delta_1|ax) \sin(|\gamma_2 - \delta_2|y) \\
& - \operatorname{sgn}(\gamma_1 - \delta_1) \operatorname{sgn}(\gamma_2 + \delta_2) \sin(|\gamma_1 - \delta_1|ax) \sin(|\gamma_2 + \delta_2|y) \\
& \left. - \operatorname{sgn}(\gamma_1 - \delta_1) \operatorname{sgn}(\gamma_2 - \delta_2) \sin(|\gamma_1 - \delta_1|ax) \sin(|\gamma_2 - \delta_2|y) \right)
\end{aligned}$$

und analog dazu kann auch die zweite

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\psi, \vartheta)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\vartheta}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \\
&= \left(a \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1 a_{\gamma}(t) \cos(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2 b_{\delta}(t) \cos(\delta_1 ax) \cos(\delta_2 y) \right) \\
&\quad - \left(\sum_{q=1}^{\infty} \sum_{|\xi|=q} \xi_2 a_{\xi}(t) \sin(\xi_1 ax) \cos(\xi_2 y) \right) \left(-a \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{|\eta|=r} \eta_1 b_{\eta}(t) \sin(\eta_1 ax) \sin(\eta_2 y) \right) \\
&= a \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1 a_{\gamma}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2 b_{\delta}(t) \cos(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \cos(\delta_1 ax) \cos(\delta_2 y) \\
&\quad + a \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{|\xi|=q} \xi_2 a_{\xi}(t) \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{|\eta|=r} \eta_1 b_{\eta}(t) \sin(\xi_1 ax) \cos(\xi_2 y) \sin(\eta_1 ax) \sin(\eta_2 y) \\
&= a \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1 a_{\gamma}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2 b_{\delta}(t) \cos(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \cos(\delta_1 ax) \cos(\delta_2 y) \\
&\quad + a \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_2 a_{\gamma}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_1 b_{\delta}(t) \sin(\gamma_1 ax) \cos(\gamma_2 y) \sin(\delta_1 ax) \sin(\delta_2 y) \\
&= a \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} a_{\gamma}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} b_{\delta}(t) \left(\gamma_1 \delta_2 \cos(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \cos(\delta_1 ax) \cos(\delta_2 y) \right. \\
&\quad \left. + \gamma_2 \delta_1 \sin(\gamma_1 ax) \cos(\gamma_2 y) \sin(\delta_1 ax) \sin(\delta_2 y) \right) \\
&= \frac{a}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} a_{\gamma}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} b_{\delta}(t) \left(\gamma_1 \delta_2 \left(\cos((\gamma_1 - \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 + \delta_2)y) \right. \right. \\
&\quad \left. + \cos((\gamma_1 - \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 - \delta_2)y) \right) \\
&\quad + \cos((\gamma_1 + \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 + \delta_2)y) \\
&\quad + \cos((\gamma_1 + \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 - \delta_2)y) \Big) \\
&\quad + \gamma_2 \delta_1 \left(\cos((\gamma_1 - \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 + \delta_2)y) \right. \\
&\quad - \cos((\gamma_1 - \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 - \delta_2)y) \\
&\quad - \cos((\gamma_1 + \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 + \delta_2)y) \\
&\quad \left. + \cos((\gamma_1 + \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 - \delta_2)y) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} a_{\gamma}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} b_{\delta}(t) \left((\gamma_1 \delta_2 + \gamma_2 \delta_1) \left(\cos((\gamma_1 - \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 + \delta_2)y) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \cos((\gamma_1 + \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 - \delta_2)y) \right) \right. \\
 &\quad \left. + (\gamma_1 \delta_2 - \gamma_2 \delta_1) \left(\cos((\gamma_1 - \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 - \delta_2)y) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \cos((\gamma_1 + \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 + \delta_2)y) \right) \right) \\
 &= \frac{a}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} a_{\gamma}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} b_{\delta}(t) \left((\gamma_1 \delta_2 + \gamma_2 \delta_1) \left(\operatorname{sgn}(\gamma_2 + \delta_2) \cos(|\gamma_1 - \delta_1|ax) \sin(|\gamma_2 + \delta_2|y) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \operatorname{sgn}(\gamma_2 - \delta_2) \cos(|\gamma_1 + \delta_1|ax) \sin(|\gamma_2 - \delta_2|y) \right) \right. \\
 &\quad \left. + (\gamma_1 \delta_2 - \gamma_2 \delta_1) \left(\operatorname{sgn}(\gamma_2 - \delta_2) \cos(|\gamma_1 - \delta_1|ax) \sin(|\gamma_2 - \delta_2|y) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \operatorname{sgn}(\gamma_2 + \delta_2) \cos(|\gamma_1 + \delta_1|ax) \sin(|\gamma_2 + \delta_2|y) \right) \right)
 \end{aligned}$$

aufgelöst werden. Jetzt haben wir alle Bausteine zusammen und können diese in die einzelnen Gleichungen einsetzen. Damit erhalten wir einerseits

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} &= \nu \Delta^2 \psi + c \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(x, y)} \\
 \Leftrightarrow & - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=k} \dot{a}_{\gamma}(t) \left(\gamma_1^2 a^2 + \gamma_2^2 \right) \sin(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \\
 &= \nu \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{|\xi|=q} a_{\xi}(t) \left(\xi_1^2 a^2 + \xi_2^2 \right)^2 \sin(\xi_1 ax) \sin(\xi_2 y) \\
 &\quad - ca \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{|\eta|=s} b_{\eta}(t) \eta_1 \sin(\eta_1 ax) \sin(\eta_2 y) \\
 &\quad - \frac{a}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\zeta|=i} \zeta_1 a_{\zeta}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2 \left(a^2 (\zeta_1 - \delta_1)(\zeta_1 + \delta_1) + (\zeta_2 - \delta_2)(\zeta_2 + \delta_2) \right) a_{\delta}(t) \\
 &\quad \cdot \left(\operatorname{sgn}(\zeta_1 + \delta_1) \operatorname{sgn}(\zeta_2 + \delta_2) \sin(|\zeta_1 + \delta_1|ax) \sin(|\zeta_2 + \delta_2|y) \right. \\
 &\quad \left. + \operatorname{sgn}(\zeta_1 + \delta_1) \operatorname{sgn}(\zeta_2 - \delta_2) \sin(|\zeta_1 + \delta_1|ax) \sin(|\zeta_2 - \delta_2|y) \right. \\
 &\quad \left. - \operatorname{sgn}(\zeta_1 - \delta_1) \operatorname{sgn}(\zeta_2 + \delta_2) \sin(|\zeta_1 - \delta_1|ax) \sin(|\zeta_2 + \delta_2|y) \right. \\
 &\quad \left. - \operatorname{sgn}(\zeta_1 - \delta_1) \operatorname{sgn}(\zeta_2 - \delta_2) \sin(|\zeta_1 - \delta_1|ax) \sin(|\zeta_2 - \delta_2|y) \right) \\
 \Leftrightarrow & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=k} \dot{a}_{\gamma}(t) \left(\gamma_1^2 a^2 + \gamma_2^2 \right) \sin(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} \left(\left(-\nu \left(\alpha_1^2 a^2 + \alpha_2^2 \right)^2 a_{\alpha}(t) + \alpha_1 c a b_{\alpha}(t) \right) \sin(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha_1 a}{4} a_{\alpha}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\beta|=j} \beta_2 \left(a^2 (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2)(\alpha_2 + \beta_2) \right) a_{\beta}(t) \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left(\operatorname{sgn}(\alpha_1 + \beta_1) \operatorname{sgn}(\alpha_2 + \beta_2) \sin(|\alpha_1 + \beta_1|ax) \sin(|\alpha_2 + \beta_2|y) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \operatorname{sgn}(\alpha_1 + \beta_1) \operatorname{sgn}(\alpha_2 - \beta_2) \sin(|\alpha_1 + \beta_1|ax) \sin(|\alpha_2 - \beta_2|y) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \operatorname{sgn}(\alpha_1 - \beta_1) \operatorname{sgn}(\alpha_2 + \beta_2) \sin(|\alpha_1 - \beta_1|ax) \sin(|\alpha_2 + \beta_2|y) \right. \\
 &\quad \left. - \operatorname{sgn}(\alpha_1 - \beta_1) \operatorname{sgn}(\alpha_2 - \beta_2) \sin(|\alpha_1 - \beta_1|ax) \sin(|\alpha_2 - \beta_2|y) \right)
 \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \kappa \Delta \vartheta + \frac{T_0}{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \vartheta)}{\partial(x, y)} \\
 \Leftrightarrow \quad &\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=k} \dot{b}_{\gamma}(t) \cos(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \\
 &= -\kappa \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{|\xi|=q} b_{\xi}(t) (\xi_1^2 a^2 + \xi_2^2) \cos(\xi_1 ax) \sin(\xi_2 y) \\
 &\quad + \frac{a T_0}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{|\eta|=s} \eta_1 a_{\eta}(t) \cos(\eta_1 ax) \sin(\eta_2 y) \\
 &\quad - \frac{a}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\zeta|=i} a_{\zeta}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} b_{\delta}(t) \left((\zeta_1 \delta_2 + \zeta_2 \delta_1) (\operatorname{sgn}(\zeta_2 + \delta_2) \cos(|\zeta_1 - \delta_1|ax) \sin(|\zeta_2 + \delta_2|y)) \right. \\
 &\quad \quad \quad \left. + \operatorname{sgn}(\zeta_2 - \delta_2) \cos(|\zeta_1 + \delta_1|ax) \sin(|\zeta_2 - \zeta_2|y)) \right. \\
 &\quad \quad \quad \left. + (\zeta_1 \delta_2 - \zeta_2 \delta_1) (\operatorname{sgn}(\zeta_2 - \delta_2) \cos(|\zeta_1 - \delta_1|ax) \sin(|\zeta_2 - \delta_2|y)) \right. \\
 &\quad \quad \quad \left. + \operatorname{sgn}(\zeta_2 + \delta_2) \cos(|\zeta_1 + \delta_1|ax) \sin(|\zeta_2 + \delta_2|y)) \right) \\
 \Leftrightarrow \quad &\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=k} \dot{b}_{\gamma}(t) \cos(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} \left(\left(-\kappa (\alpha_1^2 a^2 + \alpha_2^2) b_{\alpha}(t) + \frac{\alpha_1 a T_0}{\pi} a_{\alpha}(t) \right) \cos(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y) \right. \\
 &\quad \quad \quad \left. - \frac{a}{4} a_{\alpha}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\beta|=j} b_{\beta}(t) \left((\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) (\operatorname{sgn}(\alpha_2 + \beta_2) \cos(|\alpha_1 - \beta_1|ax) \sin(|\alpha_2 + \beta_2|y)) \right. \right. \\
 &\quad \quad \quad \left. \left. + \operatorname{sgn}(\alpha_2 - \beta_2) \cos(|\alpha_1 + \beta_1|ax) \sin(|\alpha_2 - \beta_2|y)) \right. \right. \\
 &\quad \quad \quad \left. \left. + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) (\operatorname{sgn}(\alpha_2 - \beta_2) \cos(|\alpha_1 - \beta_1|ax) \sin(|\alpha_2 - \beta_2|y)) \right. \right. \\
 &\quad \quad \quad \left. \left. + \operatorname{sgn}(\alpha_2 + \beta_2) \cos(|\alpha_1 + \beta_1|ax) \sin(|\alpha_2 + \beta_2|y)) \right) \right)
 \end{aligned}$$

als Gleichungen die es nun zu lösen gilt.

Da wir die x und y Komponenten loswerden wollen, damit nur noch t übrig bleibt, brauchen wir Gleichungen für einzelne $\dot{a}_{\gamma}(t)$ für $|\gamma| > 0$

$$\begin{aligned}
 (\gamma_1^2 a^2 + \gamma_2^2) \dot{a}_{\gamma}(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} \left(\left(-\nu (\alpha_1^2 a^2 + \alpha_2^2)^2 a_{\alpha}(t) + \alpha_1 c a b_{\alpha}(t) \right) f_{\gamma}(\alpha_1, \alpha_2) \right. \\
 &\quad \quad \quad \left. + \frac{\alpha_1 a}{4} a_{\alpha}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\beta|=j} \beta_2 (a^2 (\alpha_1 - \beta_1) (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) (\alpha_2 + \beta_2)) a_{\beta}(t) \right. \\
 &\quad \quad \quad \left. \cdot (f_{\gamma}(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) + f_{\gamma}(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 - \beta_2) \right. \\
 &\quad \quad \quad \left. \left. - f_{\gamma}(\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) - f_{\gamma}(\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2)) \right) \\
 \Leftrightarrow \quad &\dot{a}_{\gamma}(t) = \left(-\nu (\gamma_1^2 a^2 + \gamma_2^2) a_{\gamma}(t) + \frac{\gamma_1 c a}{\gamma_1^2 a^2 + \gamma_2^2} b_{\gamma}(t) \right) \operatorname{sgn}(\gamma_1) \operatorname{sgn}(\gamma_2) + \frac{a}{4 (\gamma_1^2 a^2 + \gamma_2^2)} \\
 &\quad \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} \alpha_1 a_{\alpha}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\beta|=j} \beta_2 (a^2 (\alpha_1 - \beta_1) (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) (\alpha_2 + \beta_2)) a_{\beta}(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left(f_\gamma(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) + f_\gamma(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 - \beta_2) \right. \\ & \left. - f_\gamma(\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) - f_\gamma(\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2) \right) \quad (10.8) \end{aligned}$$

und analog für

$$\begin{aligned} b_\gamma(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} \left(\left(-\kappa (\alpha_1^2 a^2 + \alpha_2^2) b_\alpha(t) + \frac{\alpha_1 a T_0}{\pi} a_\alpha(t) \right) g_\gamma(\alpha_1, \alpha_2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{a}{4} a_\alpha(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\beta|=j} b_\beta(t) \left((\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) (g_\gamma(\gamma_1 - \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) + g_\gamma(\gamma_1 + \beta_1, \alpha_2 - \beta_2)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) (g_\gamma(\gamma_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2) + g_\gamma(\gamma_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)) \right) \right) \\ \Leftrightarrow b_\gamma(t) &= \left(-\kappa (\gamma_1^2 a^2 + \gamma_2^2) b_\gamma(t) + \frac{\gamma_1 a T_0}{\pi} a_\gamma(t) \right) \operatorname{sgn}(\gamma_2) - \frac{a}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} a_\alpha(t) \\ &\quad \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\beta|=j} b_\beta(t) \left((\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) (g_\gamma(\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) + g_\gamma(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 - \beta_2)) \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) (g_\gamma(\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2) + g_\gamma(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)) \right). \quad (10.9) \end{aligned}$$

Die beiden Hilfsfunktionen $f_\gamma(q, s)$ und $g_\gamma(q, s)$ sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} f_\gamma(q, s) &= \begin{cases} \operatorname{sgn}(q)\operatorname{sgn}(s) & |q| = \gamma_1, |s| = \gamma_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ g_\gamma(q, s) &= \begin{cases} \operatorname{sgn}(s) & |q| = \gamma_1, |s| = \gamma_2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

10.4 Lorenzsystem vierten Grades

Anhand des Lorenzsystems vierten Grades wollen wir nun zeigen, welche Information verloren geht, wenn wir uns alleinig auf ein System zweiten Grades konzentrieren.

Zuerst brauchen wir allerdings alle Gleichungen von $k = 1$

$$\begin{aligned} |\gamma| &= 1 & \dot{a}_{(1,0)}(t) &= 0 \\ \dot{a}_{(0,1)}(t) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{b}_{(1,0)}(t) &= 0 \\ \dot{b}_{(0,1)}(t) &= -\kappa b_{(0,1)}(t) \\ &\quad + \frac{a}{4} a_{(1,1)}(t) b_{(1,2)}(t) + \frac{a}{4} a_{(1,2)}(t) b_{(1,1)}(t) \\ &\quad + \frac{a}{4} a_{(1,2)}(t) b_{(1,3)}(t) + \frac{a}{4} a_{(1,3)}(t) b_{(1,2)}(t) \\ &\quad + \frac{a}{2} a_{(2,1)}(t) b_{(2,2)}(t) + \frac{a}{2} a_{(2,2)}(t) b_{(2,1)}(t) \end{aligned}$$

über $k = 2$

$$\begin{aligned}
 |\gamma| = 2 \quad & \dot{a}_{(2,0)}(t) = 0 \\
 & \dot{a}_{(1,1)}(t) = -(a^2 + 1)\nu a_{(1,1)}(t) + \frac{ac}{a^2 + 1} b_{(1,1)}(t) \\
 & \quad + \frac{9a(a^2 - 1)}{4(a^2 + 1)} a_{(1,2)}(t) a_{(2,1)}(t) \\
 & \quad + \frac{a(3a^2 - 5)}{a^2 + 1} a_{(1,3)}(t) a_{(2,2)}(t) + \frac{a(5a^2 - 3)}{a^2 + 1} a_{(2,2)}(t) a_{(3,1)}(t) \\
 & \dot{a}_{(0,2)}(t) = 0 \\
 \\
 & \dot{b}_{(2,0)}(t) = 0 \\
 & \dot{b}_{(1,1)}(t) = -(a^2 + 1)\kappa b_{(1,1)}(t) + \frac{aT_0}{\pi} a_{(1,1)}(t) \\
 & \quad + aa_{(1,1)}(t) b_{(0,2)}(t) \\
 & \quad - \frac{a}{2} a_{(1,2)}(t) b_{(0,1)}(t) + \frac{3a}{2} a_{(1,2)}(t) b_{(0,3)}(t) \\
 & \quad + \frac{3a}{4} a_{(1,2)}(t) b_{(2,1)}(t) + \frac{3a}{4} a_{(2,1)}(t) b_{(1,2)}(t) \\
 & \quad - aa_{(1,3)}(t) b_{(0,2)}(t) + aa_{(1,3)}(t) b_{(2,2)}(t) + 2aa_{(1,3)}(t) b_{(0,4)}(t) \\
 & \quad + aa_{(2,2)}(t) b_{(1,3)}(t) + aa_{(2,2)}(t) b_{(3,1)}(t) + aa_{(3,1)}(t) b_{(2,2)}(t) \\
 & \dot{b}_{(0,2)}(t) = -4\kappa b_{(0,2)}(t) \\
 & \quad - \frac{a}{2} a_{(1,1)}(t) b_{(1,1)}(t) \\
 & \quad - aa_{(2,1)}(t) b_{(2,1)}(t) \\
 & \quad + \frac{a}{2} a_{(1,1)}(t) b_{(1,3)}(t) + \frac{a}{2} a_{(1,3)}(t) b_{(1,1)}(t) - \frac{3a}{2} a_{(3,1)}(t) b_{(3,1)}(t)
 \end{aligned}$$

mit $k = 3$

$$\begin{aligned}
 |\gamma| = 3 \quad & \dot{a}_{(3,0)}(t) = 0 \\
 & \dot{a}_{(2,1)}(t) = -(4a^2 + 1)\nu a_{(2,1)}(t) + \frac{2ac}{4a^2 + 1} b_{(2,1)}(t) \\
 & \quad + \frac{9a}{4(4a^2 + 1)} a_{(1,1)}(t) a_{(1,2)}(t) \\
 & \quad + \frac{5a(8a^2 - 3)}{4(4a^2 + 1)} a_{(1,2)}(t) a_{(3,1)}(t) + \frac{25a}{4(4a^2 + 1)} a_{(1,2)}(t) a_{(1,3)}(t) \\
 & \dot{a}_{(1,2)}(t) = -(a^2 + 4)\nu a_{(1,2)}(t) + \frac{ac}{a^2 + 4} b_{(1,2)}(t) \\
 & \quad - \frac{9a^3}{4(a^2 + 4)} a_{(1,1)}(t) a_{(2,1)}(t) \\
 & \quad + \frac{5a(3a^2 - 8)}{4(a^2 + 4)} a_{(1,3)}(t) a_{(2,1)}(t) - \frac{25a^3}{4(a^2 + 4)} a_{(2,1)}(t) a_{(3,1)}(t) \\
 & \dot{a}_{(0,3)}(t) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{b}_{(3,0)}(t) &= 0 \\
\dot{b}_{(2,1)}(t) &= -(4a^2 + 1)\kappa b_{(2,1)}(t) + \frac{2aT_0}{\pi}a_{(2,1)}(t) \\
&\quad + \frac{3a}{4}a_{(1,1)}(t)b_{(1,2)}(t) - \frac{3a}{4}a_{(1,2)}(t)b_{(1,1)}(t) + 2aa_{(2,1)}(t)b_{(0,2)}(t) \\
&\quad + \frac{5a}{4}a_{(1,2)}(t)b_{(1,3)}(t) - \frac{5a}{4}a_{(1,3)}(t)b_{(1,2)}(t) - aa_{(2,2)}(t)b_{(0,1)}(t) \\
&\quad + \frac{5a}{4}a_{(1,2)}(t)b_{(3,1)}(t) + \frac{5a}{4}a_{(3,1)}(t)b_{(1,2)}(t) + 3aa_{(2,2)}(t)b_{(0,3)}(t) \\
\dot{b}_{(1,2)}(t) &= -(a^2 + 4)\kappa b_{(1,2)}(t) + \frac{aT_0}{\pi}a_{(1,2)}(t) \\
&\quad - \frac{a}{2}a_{(1,1)}(t)b_{(0,1)}(t) \\
&\quad + \frac{3a}{2}a_{(1,1)}(t)b_{(0,3)}(t) - \frac{3a}{4}a_{(1,1)}(t)b_{(2,1)}(t) - \frac{3a}{4}a_{(2,1)}(t)b_{(1,1)}(t) \\
&\quad - \frac{5a}{4}a_{(2,1)}(t)b_{(3,1)}(t) - \frac{5a}{4}a_{(3,1)}(t)b_{(2,1)}(t) + \frac{5a}{4}a_{(1,3)}(t)b_{(2,1)}(t) \\
&\quad + \frac{5a}{4}a_{(2,1)}(t)b_{(1,3)}(t) - \frac{a}{2}a_{(1,3)}(t)b_{(0,1)}(t) + 2aa_{(1,2)}(t)b_{(0,4)}(t) \\
\dot{b}_{(0,3)}(t) &= -9\kappa b_{(0,3)}(t) \\
&\quad - \frac{3a}{4}a_{(1,1)}(t)b_{(1,2)}(t) - \frac{3a}{4}a_{(1,2)}(t)b_{(1,1)}(t) \\
&\quad - \frac{3a}{2}a_{(2,1)}(t)b_{(2,2)}(t) - \frac{3a}{2}a_{(2,2)}(t)b_{(2,1)}(t)
\end{aligned}$$

und $k = 4$

$$|\gamma| = 4 \quad \dot{a}_{(4,0)}(t) = 0$$

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{(3,1)}(t) &= -(9a^2 + 1)\nu a_{(3,1)}(t) + \frac{3ac}{9a^2 + 1}b_{(3,1)}(t) \\
&\quad + \frac{15a(1 - a^2)}{4(9a^2 + 1)}a_{(1,2)}(t)a_{(2,1)}(t) \\
&\quad + \frac{12a(1 + a^2)}{4(9a^2 + 1)}a_{(1,1)}(t)a_{(2,2)}(t) + \frac{8a(5 - 3a^2)}{4(9a^2 + 1)}a_{(1,3)}(t)a_{(2,2)}(t) \\
\dot{a}_{(2,2)}(t) &= -4(a^2 + 1)\nu a_{(2,2)}(t) + \frac{ac}{2(a^2 + 1)}b_{(2,2)}(t) \\
&\quad + \frac{2a}{a^2 + 1}a_{(1,1)}(t)a_{(1,3)}(t) - \frac{2a^3}{a^2 + 1}a_{(1,1)}(t)a_{(3,1)}(t) \\
&\quad + \frac{4a^3}{a^2 + 1}a_{(1,3)}(t)a_{(3,1)}(t) - \frac{4a}{a^2 + 1}a_{(1,3)}(t)a_{(3,1)}(t) \\
\dot{a}_{(1,3)}(t) &= -(a^2 + 9)\nu a_{(1,3)}(t) + \frac{ac}{a^2 + 9}b_{(1,3)}(t) \\
&\quad + \frac{15a(1 - a^2)}{4(a^2 + 9)}a_{(1,2)}(t)a_{(2,1)}(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{12a(1 + a^2)}{4(a^2 + 9)} a_{(1,1)}(t) a_{(2,2)}(t) + \frac{8a(3 - 5a^2)}{4(a^2 + 9)} a_{(2,2)}(t) a_{(3,1)}(t) \\
& \dot{a}_{(0,4)}(t) = 0 \\
& \dot{b}_{(4,0)}(t) = 0 \\
& \dot{b}_{(3,1)}(t) = -(9a^2 + 1)\kappa b_{(3,1)}(t) + \frac{3aT_0}{\pi} a_{(3,1)}(t) \\
& \quad + \frac{5a}{4} a_{(2,1)}(t) b_{(1,2)}(t) - \frac{5a}{4} a_{(1,2)}(t) b_{(2,1)}(t) \\
& \quad + 3aa_{(3,1)}(t) b_{(0,2)}(t) + aa_{(1,1)}(t) b_{(2,2)}(t) - aa_{(2,2)}(t) b_{(1,1)}(t) \\
& \quad - 2aa_{(1,3)}(t) b_{(2,2)}(t) + 2aa_{(2,2)}(t) b_{(1,3)}(t) \\
& \dot{b}_{(2,2)}(t) = -(4a^2 + 4)\kappa b_{(2,2)}(t) + \frac{2aT_0}{\pi} a_{(2,2)}(t) \\
& \quad - aa_{(2,1)}(t) b_{(0,1)}(t) + 3aa_{(2,1)}(t) b_{(0,3)}(t) \\
& \quad + aa_{(1,1)}(t) b_{(1,3)}(t) - aa_{(1,3)}(t) b_{(1,1)}(t) - aa_{(1,1)}(t) b_{(3,1)}(t) - aa_{(3,1)}(t) b_{(1,1)}(t) \\
& \quad + 2aa_{(1,3)}(t) b_{(3,1)}(t) + 2aa_{(3,1)}(t) b_{(1,3)}(t) + 4aa_{(2,2)}(t) b_{(0,4)}(t) \\
& \dot{b}_{(1,3)}(t) = -(a^2 + 9)\kappa b_{(1,3)}(t) + \frac{aT_0}{\pi} a_{(1,3)}(t) \\
& \quad - aa_{(1,1)}(t) b_{(0,2)}(t) \\
& \quad - \frac{a}{2} a_{(1,2)}(t) b_{(0,1)}(t) - \frac{5a}{4} a_{(1,2)}(t) b_{(2,1)}(t) - \frac{5a}{4} a_{(2,1)}(t) b_{(1,2)}(t) \\
& \quad - aa_{(1,1)}(t) b_{(2,2)}(t) - aa_{(2,2)}(t) b_{(1,1)}(t) - 2aa_{(2,2)}(t) b_{(3,1)}(t) - 2aa_{(3,1)}(t) b_{(2,2)}(t) \\
& \quad + 2aa_{(1,1)}(t) b_{(0,4)}(t) \\
& \dot{b}_{(0,4)}(t) = -16\kappa b_{(0,4)}(t) \\
& \quad - aa_{(1,2)}(t) b_{(1,2)}(t) \\
& \quad - aa_{(1,1)}(t) b_{(1,3)}(t) - aa_{(1,3)}(t) b_{(1,1)}(t) - 2aa_{(2,2)}(t) b_{(2,2)}(t).
\end{aligned}$$

Terme die verloren gehen, wenn man beim jeweiligen k stoppen würde, sind *blau* (dritter Grad), beziehungsweise *rot* (vierter Grad) hervorgehoben.

Vergleicht man die Resultate für $k = 2$ mit denjenigen aus Gleichung (2.46) stellt man fest, dass diese übereinstimmen, womit auch wieder gezeigt ist, dass unsere neuen Basisfunktionen eine echte Erweiterung sind. Bereits jetzt ist aber ersichtlich, dass die Anzahl zu lösenden Gleichungen, in $O(k^2)$ mit dem Grad k wächst (Tabelle 10.1). Beispielsweise muss für $k = 10$ ein Gleichungssystem mit

$$2 \left(\frac{(10+1)(10+2)}{2} - 1 \right) = 11 \cdot 12 - 2 = 130$$

Gleichungen gelöst werden, das zudem noch aus Gleichungen besteht, die über etliche Kopplungen miteinander verbunden sind.

10.5 Numerische Lösung

Mit den Gleichungen (10.8) und (10.9) aus Abschnitt 10.3 haben wir Gleichungen gefunden, die wir mit Hilfe eines Computers berechnen können. Dabei können wir natürlich unterschiedlich vorgehen.

Grad k	Anzahl Gleichungen
1	2
2	$2 + 3$
3	$2 + 3 + 4$
4	$2 + 3 + 4 + 5$
\dots	\dots
n	$\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} - 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$

Tabelle 10.1: Wachstum der Anzahl Gleichung mit dem Grad k

Was wir sicher brauchen, ist ein Programm, mit dessen Hilfe wir gewöhnliche Differentialgleichungen lösen können. In unserem Fall traf die Wahl auf `octave`, nicht nur weil es auf allen gängigen Plattformen verfügbar und open-source ist, sondern auch weil es mit `lsode` einen mächtigen ODE-Solver beinhaltet.

Wie sich herausstellt, ist eine direkte Implementation unserer gefundenen gewöhnlichen Differentialgleichungen Gleichung (10.8) und Gleichung (10.9) in `octave` keine sonderlich effiziente Lösung. Der Algorithmus braucht selbst für kleine Grad k , auf dem Testsystem mit einer Intel®Core™ i7-3930K CPU mit 3.20 GHz, sehr lange. So dauerte zum Beispiel das Berechnen von Grad $k = 7$ mit der direkten Implementation fast 12 Stunden, was verglichen mit den rund 25 Minuten der am Schluss verwendeten Implementation schon einiges über die Ineffizienz dieses Ansatzes aussagt.

Um das ganze etwas zu optimieren, nehmen wir also am besten ein Computer-Algebra Programm, mit dessen die Gleichungen bereits soweit vereinfachen können, dass nur noch ein Vektor mit einfachen Summen übrig bleibt. Mit `maxima` haben wir dazu wieder ein open-source Programm, das auf allen Plattformen zur Verfügung steht.

Wir haben jetzt alles zusammen, um die Gleichungen mit `maxima` zu vereinfachen und uns eine Funktion für `octave` zu generieren, die schnell ist. Trotz unseren Optimierungen ist das Lösen der Gleichungen immer noch äußerst Rechen- und Zeitintensiv. Dies zeigen auch Laufzeitmessungen für das Zeitintervall $t = [0, 100]$ und für $t = [0, 40]$ auf dem Testsystem, die in Abb. 10.1 veranschaulicht sind. Die Laufzeit liegt gemäß diesen Messungen etwa bei $O(k^5)$ mit einer Tendenz zu sogar $O(k^6)$.

Eine der Ursachen für die stark wachsende Laufzeit kann die fehlende Parallelisierung des Algorithmus sein, was dazu führt, dass für jeden Grad k nur ein CPU Core verwendet wird. Das erlaubt es zwar die Berechnung einzelner Grade k gleichzeitig durchzuführen, indem wir unterschiedliche `octave`-Instanzen für die jeweiligen k starten, doch ist der Nutzen aufgrund der rasant wachsenden Laufzeit nicht sonderlich gross. Zudem hat auch die Wahl des t -Intervalls und auch die an `lsode` gestellten Toleranzen Auswirkungen auf die Laufzeit. So kann man durch Lockerung unserer absoluten und relativen Toleranzabweichung von 10^{-12} respektive 10^{-13} mit Sicherheit noch etwas an Laufzeit gewinnen, was dann aber zu einem Verlust an Genauigkeit führen würde.

Noch gar nicht angesprochen wurden die gewählten Anfangsbedingungen und Parameterwerte. Bei den Anfangswerten setzen wir alles bis auf $b_{(0,2)}$ und $b_{(1,1)}$ gleich 0, dies da diese bereits für Grad $k = 2$ Verfügbar sind. Die Parameter sind so gewählt, dass sie chaotisches Verhalten für ein dreidimensionales Lorenzsystem, also eines mit Grad 2, hervorrufen. Experimentell konnten so die Werte für

$$a = \sqrt{1/2}, \quad T_0 = 5, \quad c = 82, \quad v = 1.43, \quad \text{und} \quad \kappa = 0.143$$

bestimmt und die Lorenzsysteme mit Grad $k = \{2, 3, \dots, 22\}$ erfolgreich berechnet werden.

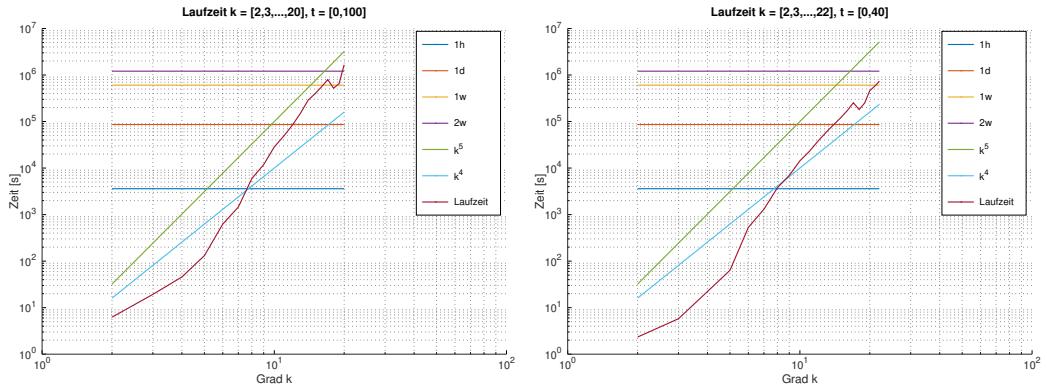
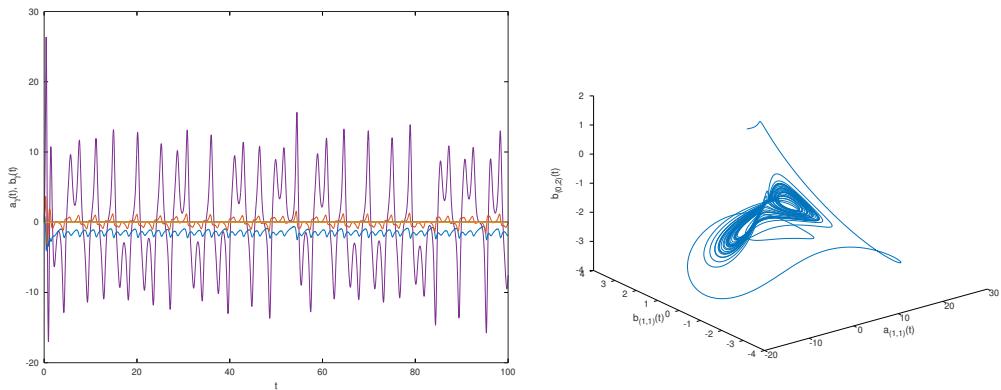
Abbildung 10.1: Laufzeit für Berechnung von einem Lorenzsystems mit Grad k 

Abbildung 10.2: Lorenzsystem mit Grad 2

Die Lösungen führen teilweise zu erstaunlichen Ergebnissen, wie Abb. 10.2 bis 10.22 zeigen. Dabei ist auf der linken Seite jeweils ein Plot der verschiedenen $a_\gamma(t)$ und $b_\gamma(t)$ zu sehen und rechts davon eine 3D Abbildung von $f(a_{(1,1)}, b_{(1,1)}) = b_{(0,2)}$. Eines der augenfälligsten Ergebnisse ist, dass ab Grad $k = 4$ das chaotische Verhalten nicht mehr aufzutreten scheint. Erkennbar ist dies daran, dass auf der linken Seite alle Koeffizienten entweder konvergieren oder in eine stabile Schwingung übergehen. Auf der rechten Seite verschwinden dadurch die für ein Lorenzsystem typischen ‘Schmetterlingsflügel’.

Eine mögliche Ursache des Verschwindens ist, dass wir durch die Reduktion und Vereinfachung des Ursprungssystems chaotisches Verhalten herbeigeführt haben. Oder es liegt schlicht daran, dass wir den Anfangsbedingungs- und Parameterraum nicht untersucht haben und es eine mögliche Auswahl gibt, die wieder chaotisches Verhalten erzeugt. Es kann aber natürlich auch sein, dass wir einfach noch grössere Grade k berechnen müssen und die Lösung nach und nach wieder chaotisch wird.

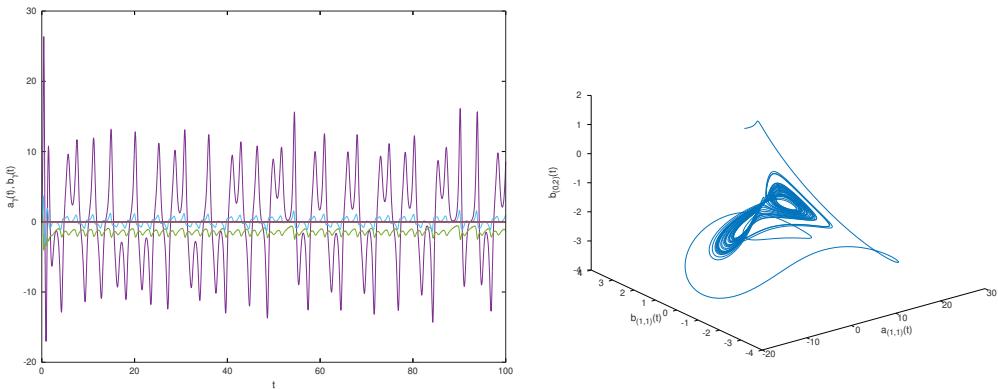


Abbildung 10.3: Lorenzsystem mit Grad 3

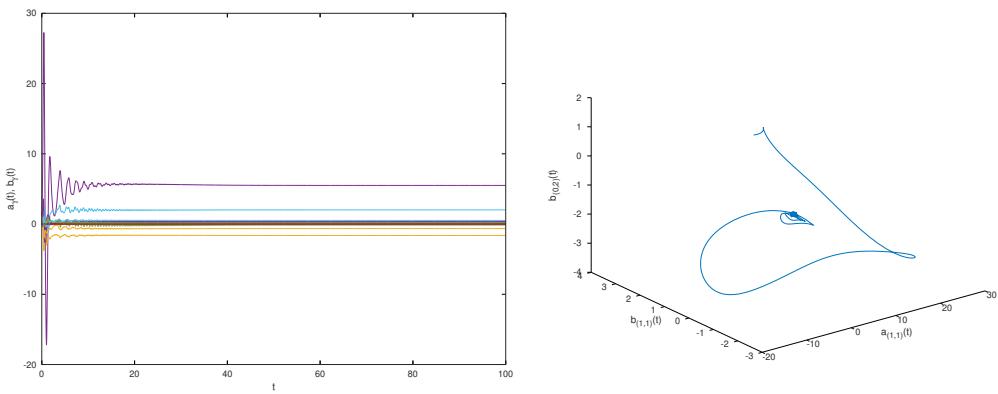


Abbildung 10.4: Lorenzsystem mit Grad 4

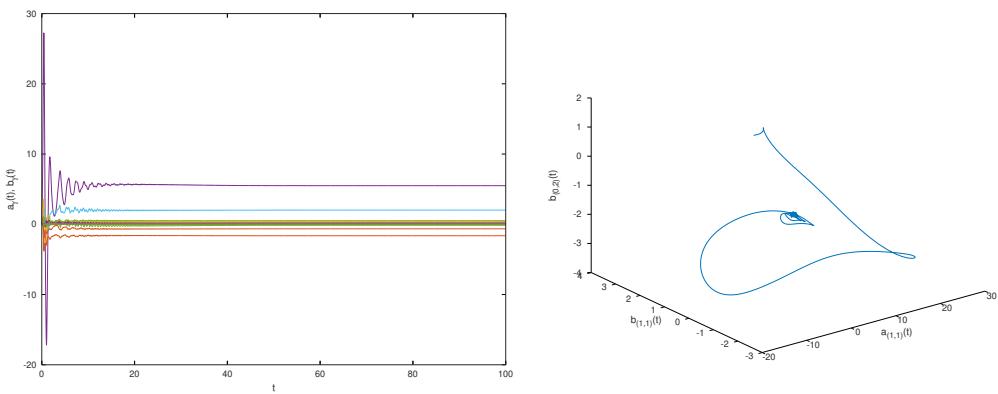


Abbildung 10.5: Lorenzsystem mit Grad 5

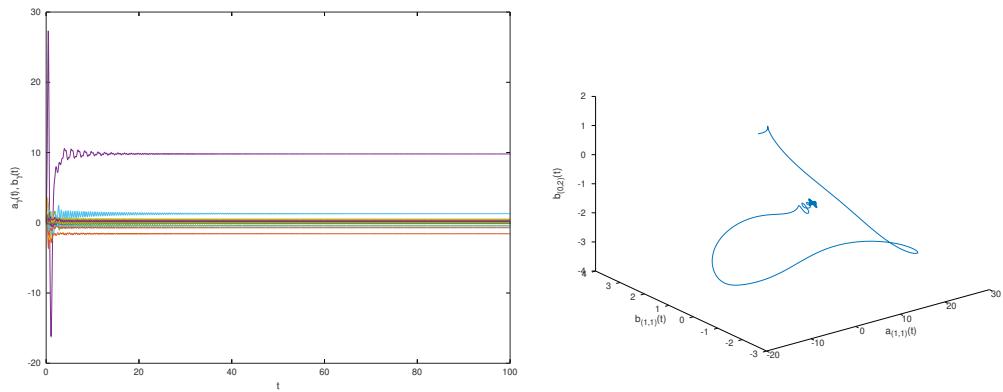


Abbildung 10.6: Lorenzssystem mit Grad 6

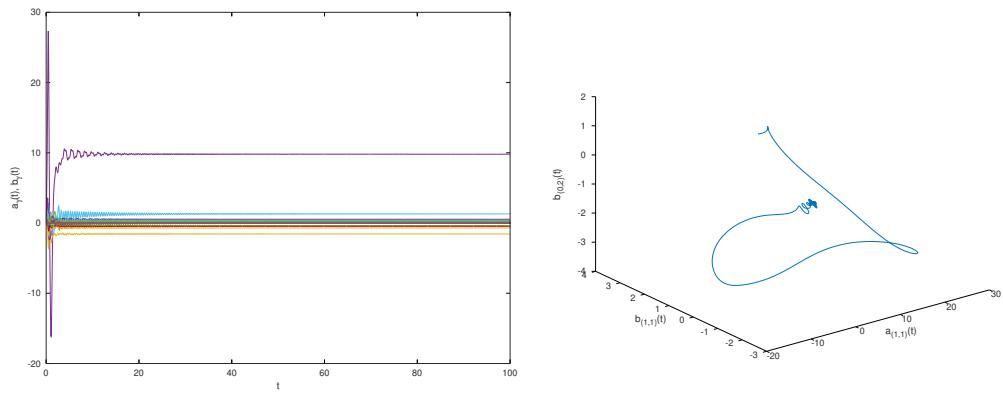


Abbildung 10.7: Lorenzssystem mit Grad 7

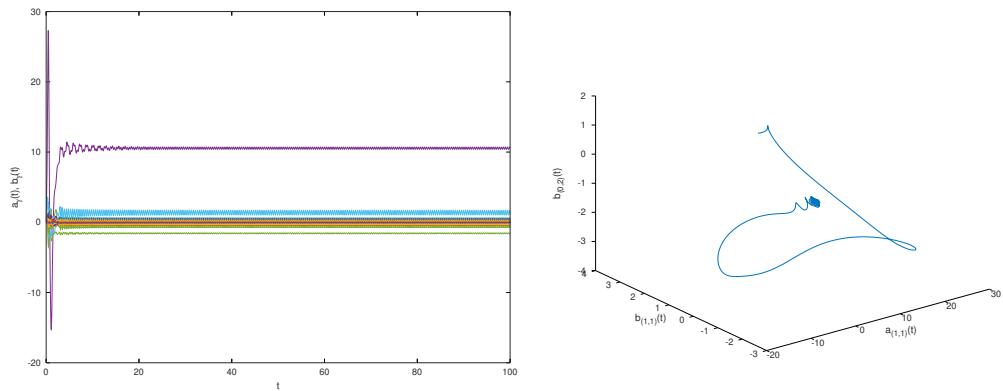


Abbildung 10.8: Lorenzssystem mit Grad 8

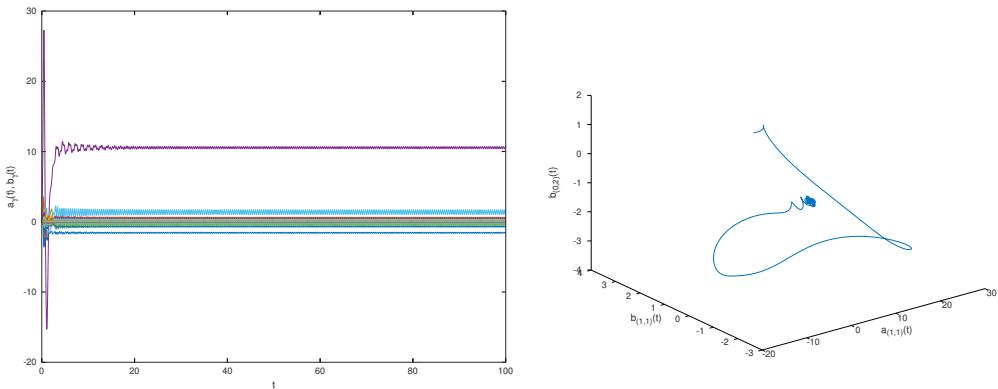
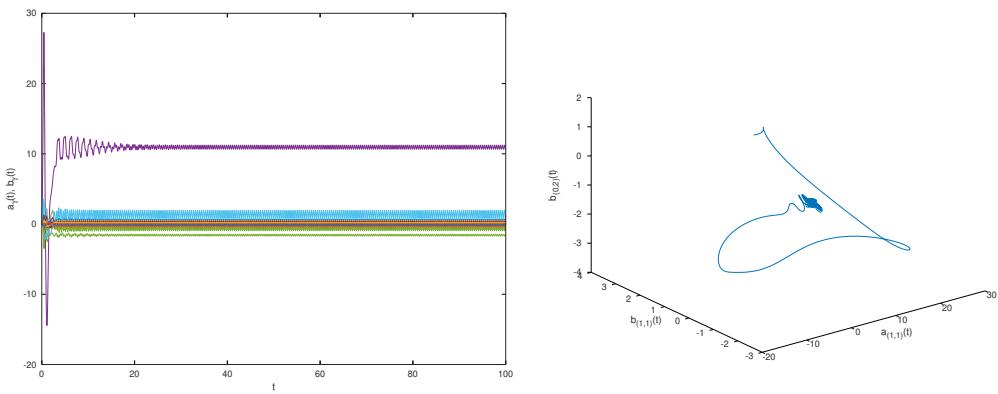
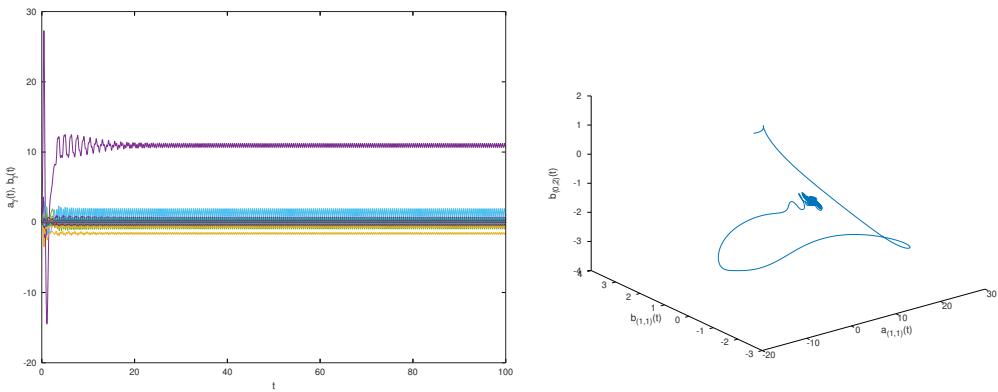
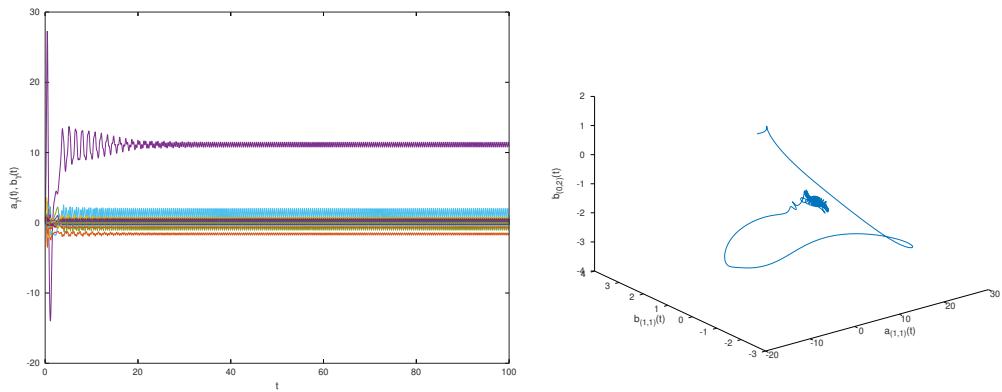
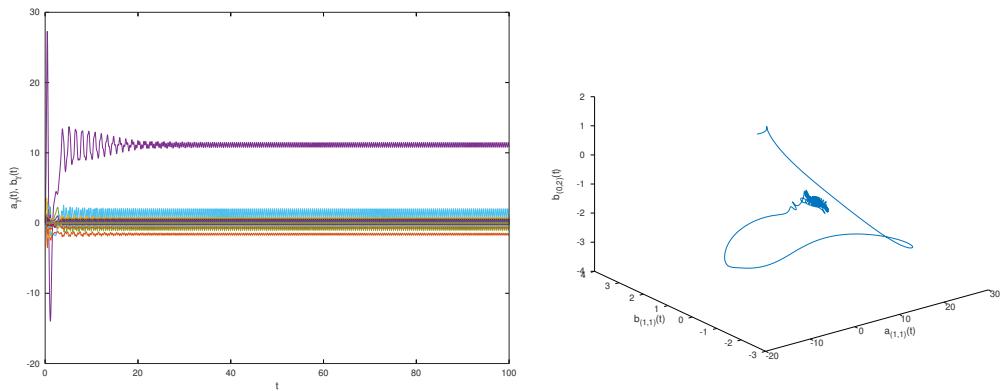
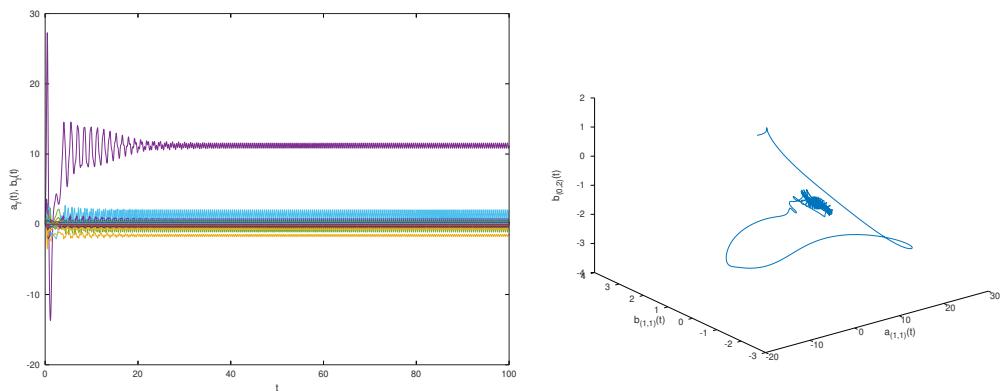
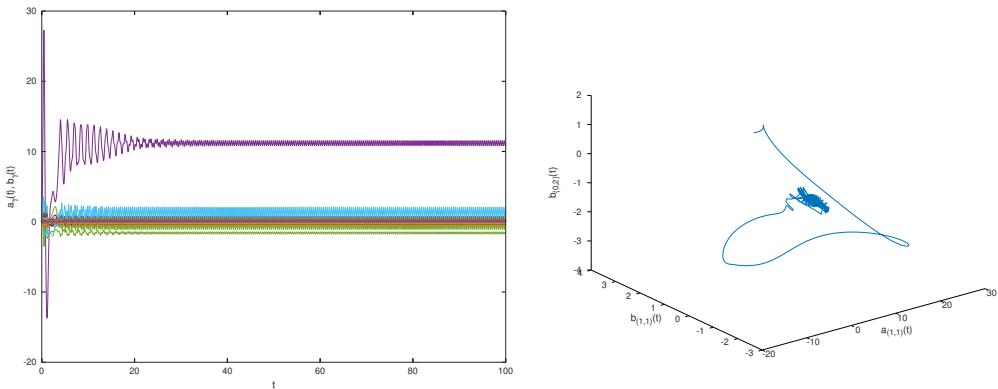
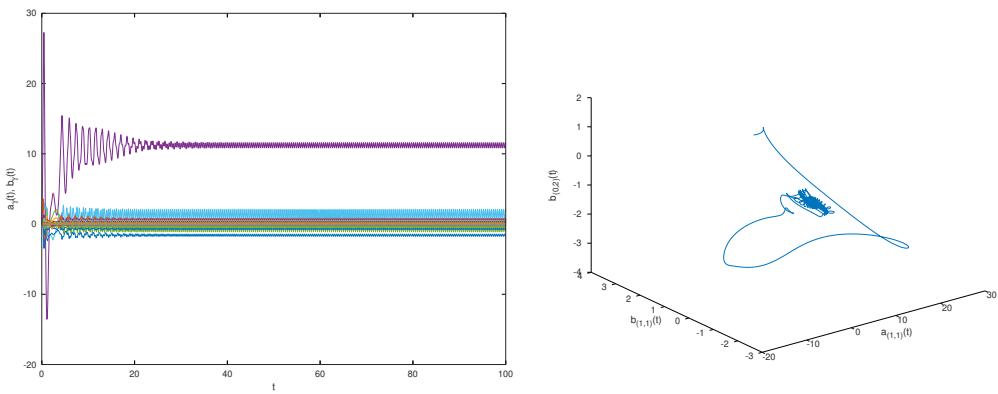
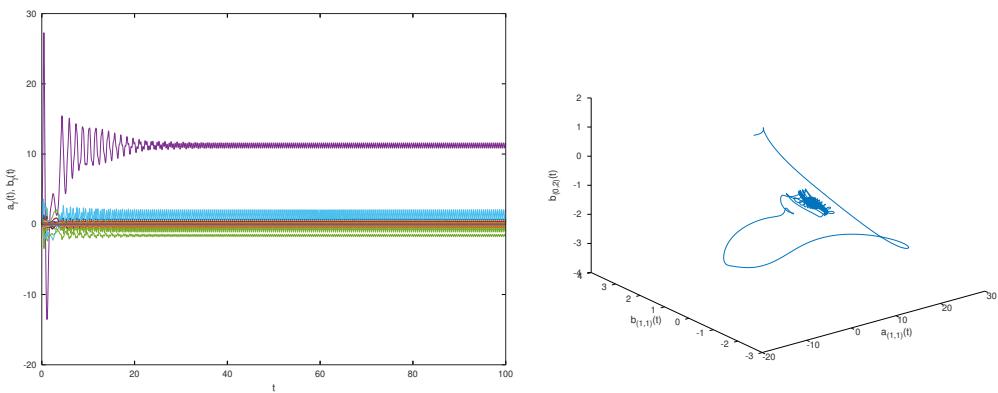
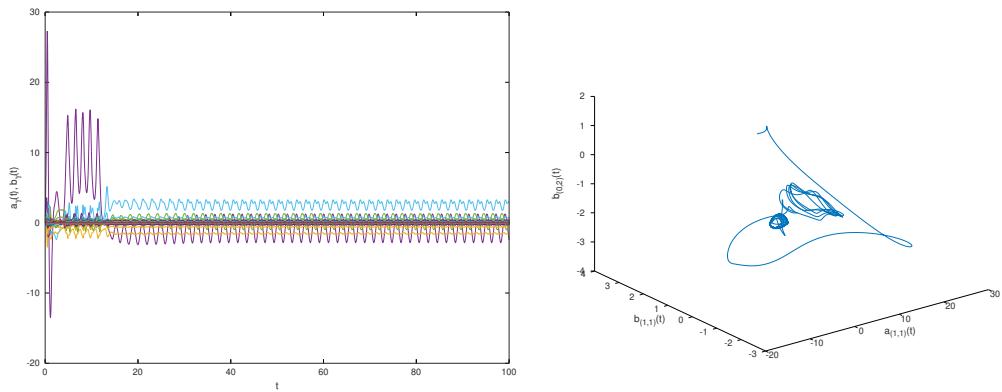
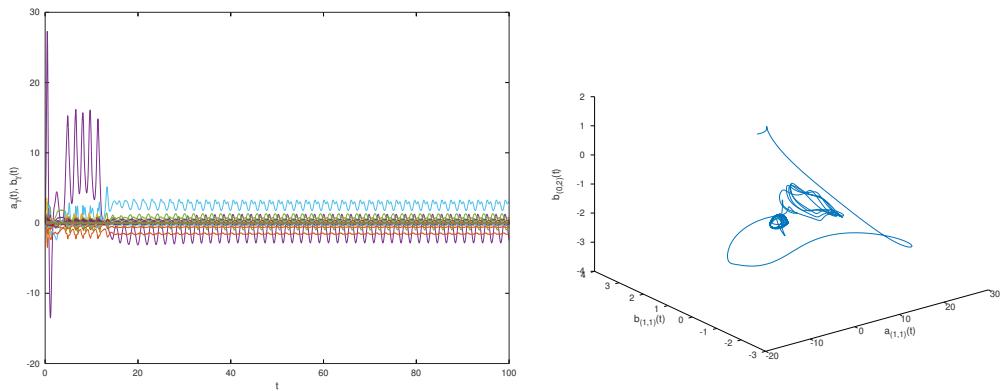
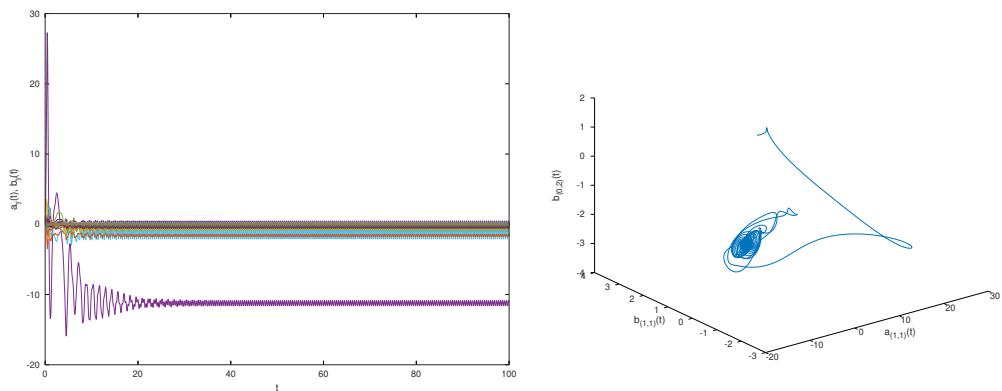


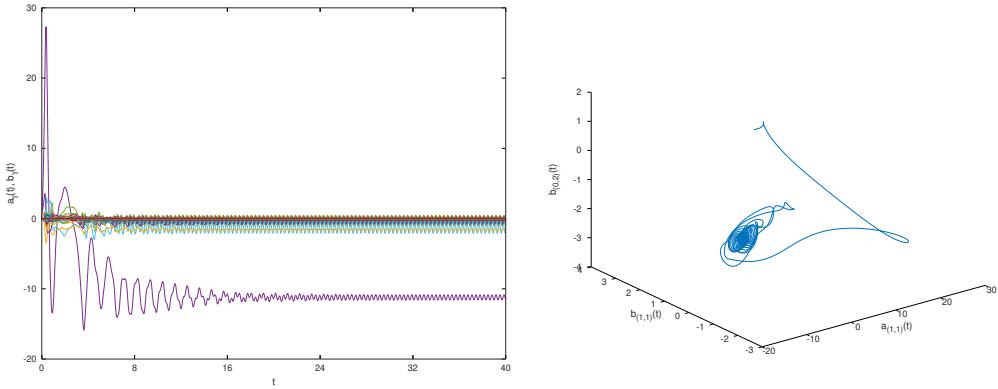
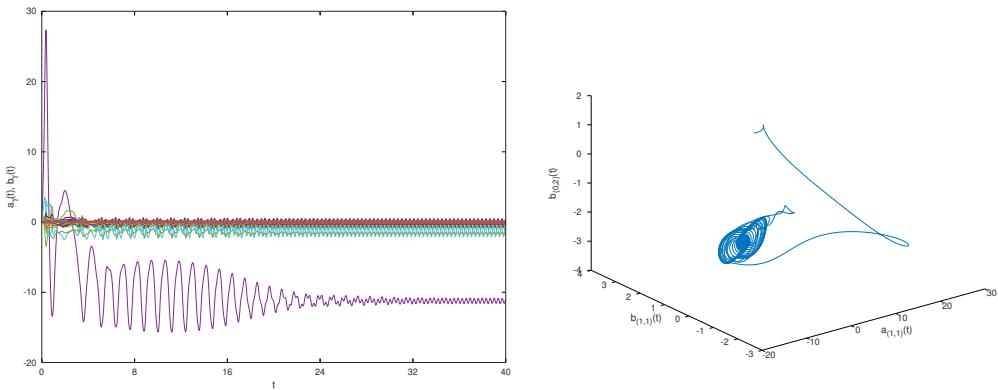
Abbildung 10.9: Lorenzsystem mit Grad 9

Abbildung 10.10: Lorenzsystem mit Grad 10, $t = [0, 100]$ Abbildung 10.11: Lorenzsystem mit Grad 11, $t = [0, 100]$

Abbildung 10.12: Lorenzssystem mit Grad 12, $t = [0, 100]$ Abbildung 10.13: Lorenzssystem mit Grad 13, $t = [0, 100]$ Abbildung 10.14: Lorenzssystem mit Grad 14, $t = [0, 100]$

Abbildung 10.15: Lorenzssystem mit Grad 15, $t = [0, 100]$ Abbildung 10.16: Lorenzssystem mit Grad 16, $t = [0, 100]$ Abbildung 10.17: Lorenzssystem mit Grad 17, $t = [0, 100]$

Abbildung 10.18: Lorenzssystem mit Grad 18, $t = [0, 100]$ Abbildung 10.19: Lorenzssystem mit Grad 19, $t = [0, 100]$ Abbildung 10.20: Lorenzssystem mit Grad 20, $t = [0, 100]$

Abbildung 10.21: Lorenzsystem mit Grad 21, $t = [0, 40]$ Abbildung 10.22: Lorenzsystem mit Grad 22, $t = [0, 40]$

10.6 Schlussfolgerungen

Wir haben somit gezeigt, dass es möglich ist, ein höherdimensionales Lorenzsystem mittels Erweiterung der bekannten Basisfunktionen zu bestimmen. Wir können weiter die benötigten Gleichungen mittels Computer generieren und auswerten, auch wenn dies mit grösser werdendem Grad k mit einem starken Anstieg der Laufzeit einher geht. Eine mögliche Verbesserung wäre beispielsweise eine parallele Berechnung der einzelnen gewöhnlicher Differentialgleichungen, was aber nicht untersucht wurde. In einem weiteren Schritt müsste zudem der Raum der Anfangsbedingungen und Parameter weiter untersucht werden, um zu zeigen, dass das chaotische Verhalten wirklich ab $k = 4$ verloren geht oder ob es schlicht an den von uns gewählten Anfangs- und Parameterwerten liegt. Zu guter Letzt könnte auch noch untersucht werden, was passiert, wenn der Grad k noch weiter gesteigert wird, denn es ist möglich, dass wir einfach noch mehr Terme benötigen um die "Schmetterlingsflügel" und somit das chaotische Verhalten wieder zu erzeugen. Dafür müsste, mit der momentanen Implementation, allerdings viel Geduld mitgebracht werden.

Kapitel 11

Machine Learning und Klimamodelle

Martin Stypinski

Machine Learning ist vermutlich eines der grossen Schlagworte des vergangenen Jahres. Mit Machine Learning wird vermutet, dass die grossen Mustererkennungs und Datenprobleme unserer Zeit gelöst werden können. Sei es die Erkennung von Schrift und Bild, die Erkennung von Sprache oder die Erkennung einer Anomalie. Weiter sollen, bis zu einem gewissen Grad, Vorhersagen auf bestehenden Daten getroffen werden, welche einen nicht trivialen Zusammenhang aufweisen oder nicht vollständig Deterministisch sind (z.B Börsenkurse, Wetter, o.a). In dieser Arbeit wird speziell auf Neuronale Netzwerke mit geringer Tiefe eingegangen, diese dafür versucht detailliert nachzu vollziehen.

Im Gegensatz zur Wettervorhersage mit entwickelten Modellen ist es mittels künstlicher neuronaler Netzwerke (KNN) möglich ein Art Blackbox zu trainieren und später zu verwenden. Die Parameter erlernt das System selbst und kann anhand dieser trainierten Parameter eine Vorhersage treffen. Mit einer grosszügigen Datengrundlage ist das System im Stande viel bessere Lösungen zu approximieren als mit einfacheren Modellen möglich ist. Allein dieser Umstand ist ein treibender Faktor um anspruchsvolle Probleme mittels dieser Methode zu lösen. Ist die Datengrundlage gross genug, so kann das System sehr gute Lösungen approximieren.

Das Wetter eignet sich sehr um Vorhersagen mittel Machine Learning zu treffen. Es existieren genug freie Daten und es können Schlüsse auf bereits bestehende Modelle gezogen werden. Dies wurde auch durch Grover et al. gezeigt. Aus wissenschaftlicher Sicht mag es interessant sein, grosse Modelle und bessere Vorhersagen zu bauen, aus lerntechnischer Sicht wird aber an dieser Stelle bewusst ein sehr kleines Modell erarbeitet. Dieses Modell soll aber möglichst die tieferen Konzepte aufzeigen, welche diese Methode so erfolgreich macht.

11.1 Die Wärmeleitungsgleichung als diskretes ML Problem

Die Wärmeleitungsgleichung (gem. Kapitel xyz) ist eine partielle Differential Gleichung welche für diesen Anwendungszweck in einer Dimension gemäss Gleichung 11.1 beschrieben werden kann.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} T \quad (11.1)$$

Das gewählte Modell soll eine Vorhersage über die Zeit machen können. Sowohl die Zeit als auch der Ort wird diskretisiert und der Zeitschritt $T(x, y) \rightarrow T(x, t + 1)$ erlernt. An dieser Stelle soll erwähnt, dass die Lösung mathematisch diskretisiert lösbar ist - dieser Umstand wird später ausgenutzt um Trainingsdaten zu erzeugen. Um die diskrete Lösung verständlich herzuleiten wird das Modell eines Stabs S (1D) genommen. Der Stab wird nun unterteilt in $N + 2$ äquidistante Punkte, wobei am Anfang und am Ende des Stabes die Temperatur fix ist. Es existieren folglich $S(x_0, \dots, x_{N+1})$ Punkte und folglich gilt: $x_0 = a$, $x_{N+1} = b$. Die Lösung kann nun über die 2. Ableitung angegangen werden:

$$T_x(x, t) = \frac{T(x - \frac{1}{2}h, t) - T(x + \frac{1}{2}h, t)}{h} \quad (11.2)$$

$$T_{xx}(x, t) = \frac{T_x(x - \frac{1}{2}h, t) - T_x(x + \frac{1}{2}h, t)}{h} \quad (11.3)$$

$$= \frac{\frac{T(x-h,t)-T(x+h,t)}{h} - \frac{T(x,t)-T(x+1,t)}{h}}{h} = \frac{T(x-h, t) - 2T(x, t) + T(x+h, t)}{h^2} \quad (11.4)$$

Aus der Initialen Beziehung lässt sich folglich herleiten:

$$T(x, t) \rightarrow T(x, t + 1) : T(x, t + 1) = \frac{\kappa}{h^2} T(x - h, t) - 2 \cdot T(x, t) + T(x + h, t) \quad (11.5)$$

Aus der Herleitung der Gleichung wird schnell ersichtlich, was die menschliche Intuition vermutet. Die punktuelle Hitze in einem Stab breitet sich sowohl nach Rechts als auch nach Links aus. Der nächste Zeitschritt ist abhängig von den benachbarten Punkten. Dies ist eine Näherung, mit welcher das Netz trainiert werden kann. Eine passende Machine Learning Blackbox soll anhand 3 diskreter Punkte die Temperatur am mittleren Punkt im nächsten Zeitschritt berechnen.

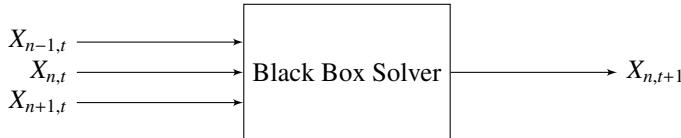


Abbildung 11.1: BlackBox Solver

11.1.1 Neuronales Netzwerk - Die Blackbox

Der Gedanke, dass die Blackbox mit einem Neuronalen Netzwerk ersetzt werden kann ist sehr nahe liegend. Bei künstlichen Neuronalen Netzwerken (KNN) handelt es sich um eine sogenannte Supervised Learning Methode. Diese benötigen zuerst eine Trainingsphase mit bestehenden Datensätzen um die inneren Parameter zu 'erlernen'. Zu einem späteren Zeitpunkt kann Anhand der Parameter das erlernte wiedergegeben werden. Ein KNN besteht aus vielen einzelnen Neuronen die zusammen das Netzwerk bilden. Wie aus Abbildung ?? entnommen werden kann, ist ein einzelnes Neuron eine gewichtete Summe mit Bias Parameter (b), zur Brechung der Linearität des Systems werden sogenannte Aktivierungsfunktionen (σ) verwendet. Diese Funktion wird benötigt, damit das Netzwerk nicht eine linear Kombination von vielen Neuronen ist und somit vereinfacht zu einer einfachen Funktion werden kann. Die Neuronen werden in Gruppen angeordnet, welche oft als *Input Layer*, *Hidden Layer* und *Output Layer* bezeichnet werden.

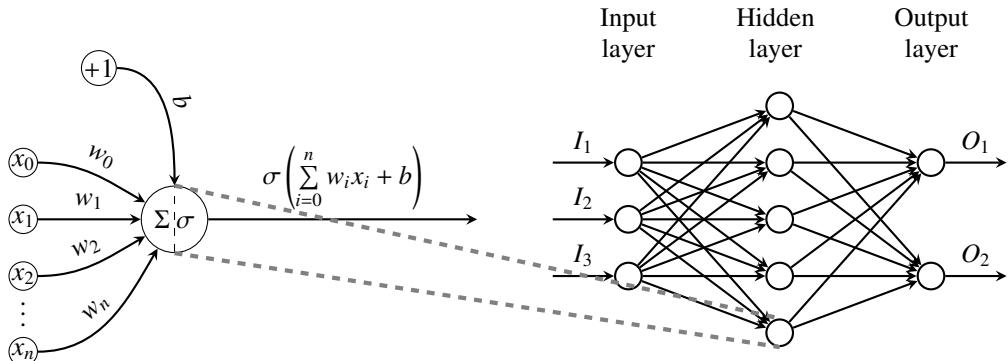


Abbildung 11.2: Neuronales Netzwerk

Die Trainingsphase besteht im Grunde aus 3 einfachen Schritten und kann mithilfe eines Beispiel Datensatzes erklärt werden. Der Datensatz D enthält viele Input Vektoren I_n und dazu die passenden Output Vektoren O_n . Jeweils ein Vektor I und O bilden zusammen ein Paar welches die Abbildung innerhalb des Neuronalen Netzes trainieren soll. Am Beispiel der Wärmeleitungsgleichung entspricht $I_n = (T(x_{n-1}, t), T(x_n, t), T(x_{n+1}, t))$ und $O_n = T(x, t_{n+1})$. Weiter sollen während der Trainingsphase alle inneren Parameter w_i, b_i trainiert werden. (vgl. Abbildung ??).

1. **Ausbreitung:** Für ein gegebenes I_n wird mittels der inneren Parameter w_i, b_i ein Output O'_n berechnet. Sofern keine inneren Parameter gesetzt sind, so werden diese randomisiert oder mit einer 'intelligenten' Methode initialisiert.
2. **Fehler Berechnung:** Der Fehler zwischen dem berechneten Output O'_n und dem erwarteten Output O_n wird berechnet. Für die Fehlerberechnung wird eine sogenannte loss-Funktion verwendet. Oft wird an dieser Stelle die mittlere quadratische Abweichung (mean-squared error) verwendet. Im gezeigten Beispiel wurde der relative Fehler verwendet, um den Fehler unabhängig des Wertebereichs zu halten.
3. **Fehlerrückführung:** In diesem Schritt wird mittels Gradientenabstiegsverfahren (oder ähnlich) versucht der Fehler auf den Daten zu minimieren. Dafür werden die inneren Parameter des Netzes angepasst. In dem hier gezeigten Beispiel wurde davon abgesehen mit anderen Methoden zu experimentieren und es wurde ein einfacher Gradientenabstieg verwendet.

Das Ziel des Trainings ist es so lange zu trainieren und diese Schritte zu wiederholen bis die loss-Funktion so klein wie möglich ist. Die loss-Funktion sollte gegen einen Wert konvergiert, jedoch niemals 0 erreichen. Dies wäre ein Indikator dafür, dass das Netz überparametrisiert ist oder aber die Netzgrösse für das gegebene Problem zu gross. Dies wird auch in der Literatur als Overfitting bezeichnet.

11.1.2 Trainingsdaten & 'Faire' Kurven

Mit dem Verständnis für neuronale Netzwerke müssen nun die Daten erschaffen werden um das Netzwerk zu trainieren. Da das Netzwerk dazu neigt 'Trivialitäten' zu lernen wurden an die Datengenerierung einige Kriterien gestellt. Der Erwartungswert sollte möglichst 0 sein, damit die die Variable b keinen Offset hat. Weiter sollen Kurven mit unterschiedlichsten Krümmungen erzeugt

werden, damit soll sichergestellt werden können, dass keine anderen numerischen Effekte gelernt werden. Als besonders hilfreich haben sich hier die Hermite-Polynome erwiesen.

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (11.6)$$

$$H_n(x) = (-1)^n \sum_{k_1+2k_2=n} \frac{n!}{k_1! k_2!} (-1)^{k_1+k_2} (2x)^{k_1} \quad (11.7)$$

Die ersten 5 Hermite Polynome sind in einfacher Schreibweise folgende:

$$H_0(x) = 1 \quad (11.8)$$

$$H_1(x) = 2x \quad (11.9)$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2 \quad (11.10)$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x \quad (11.11)$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 - 12 \quad (11.12)$$

Zur Generierung der Daten wurde ein Vektor $v = (H_0, \dots, H_9)$ gewählt. Jeder Punkt in diesem Vektor representiert ein Hermite Polynom n-ten Grades. Dies wird benötigt um kleine Hermite Polynome zu verwenden und mittels linearkombination verscheidene Kurven zu generieren. Es soll vermieden werden, dass zu grosse Werte entstehen oder zu extreme Krümmungen entstehen daher wurde auf ein Grad über 10 abgesehen. Das Polynom 10ten Grades hat bereits x^{10} was verdeutlicht wie schnell die Kurven gegen den Rand ansteigen.

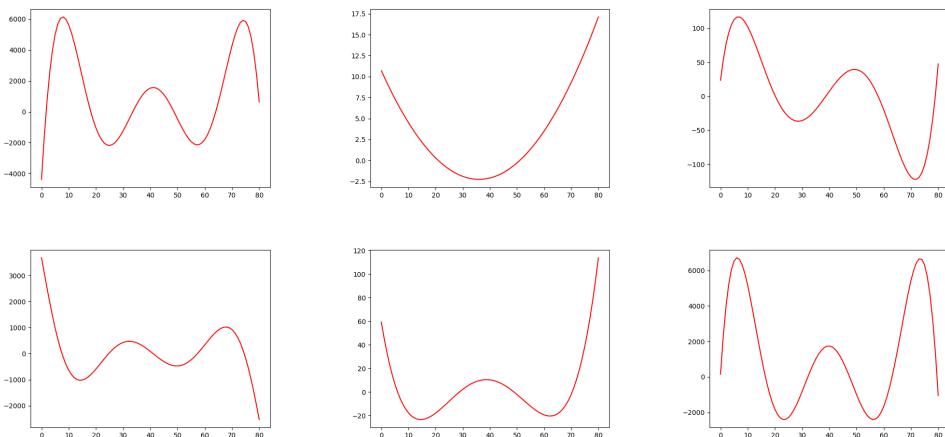


Abbildung 11.3: Einige Beispiele von Kurven die Mittels Hermite-Polynom erzeugt wurden.

Aus den generierten Kurven werden mithilfe eines ODE-Solvers die Input und Output Daten erzeugt. Die Kurven werden diskretisiert und aus Form-Gründen in die Vektoren I_n und O_n aufgeteilt. Es werden pro Kurve mehrere Vektorpaare gebildet um die Daten so gut wie möglich auszunutzen. Mithilfe dieser Daten wird nun das Neuronale Netzwerk trainiert.

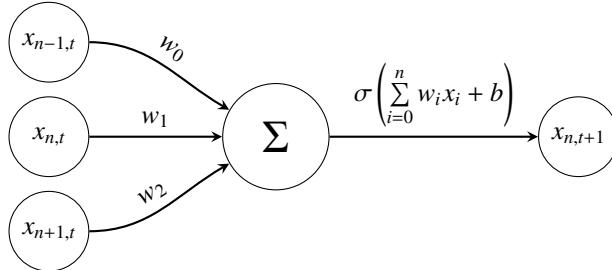


Abbildung 11.4: Einige Beispiele von Kurven die Mittels Hermite-Polynom erzeugt wurden.

11.1.3 Netzwerk Design & Erwartung

Ein KNN muss zuerst entworfen werden und einige Entscheidungen bezüglich Meta-Parametern getroffen werden. Normalerweise stehen an dieser Stelle viele Fragen im Raum unter anderem die Anzahl Neuronen und die Anzahl Hidden Layers umfasst. In dem gewählten Beispiel der Wärmeleitungsgleichung ist die Antwort jedoch sehr naheliegend. Der Schritt $T \rightarrow T + 1$ ist sehr gut dokumentiert und verstanden. Es wird ein Input Vektor der Länge 3 und ein skalrer Output benötigt. Es ist bekannt, dass mittels einer Linearen Abbildung der Output O_n aus dem Input I_n erzeugt werden kann. Folglich ergibt sich eine Netzwerkstruktur analog zu Abbildung ??.

Zusätzlich können einige Restriktionen eingebaut werden:

- σ : Als Aktivierungsfunktion wird eine lineare Funktion gewählt.
- b : Die Bias-Variable wird auf 0 gesetzt und während dem Training nicht verändert, es ist zu erwarten, dass $b = 0$ sein muss!
- $w_{0,1,2}$: Die Parameter für das Gewicht werden trainiert, es könnte hier noch $w_0 = w_2$ in Erwägung gezogen werden, um die Symmetrie auszunutzen.

Das Netz hat somit 3 Parameter w_0, w_1, w_2 welche erlernt werden müssen. Aus der mathematischen Herleitung ist zu erwarten, dass der Gewichtsvektor $w_{0,1,2}$ die Lösungsform $w = \theta \cdot (1, -2, 1)$ annimmt. ξ ist an dieser Stelle ein Platzhalter für $\xi = \frac{\kappa}{h^2}$ welche einfach zusammen gefasst werden können.

Nach zahlreichen Trainingsanläufen mit unzähligen Iterationen kann festgehalten werden, dass die mathematische Herleitung genau dem erlernten des Neuronalen Netzwerks entspricht (vgl. Tabelle ??) Das Tabelle enthält nur ein Beispiel welches aus dem Training hergeleitet werden konnte. Die Resultate sind nicht deterministisch, da die Generierung der Daten randomisiert stattfindet. Wichtig ist aber, dass die Lösungsform ($w = \xi \cdot (1, -2, 1)$) stets erfüllt wurde!

Parameter	Erwartung	Experiment
w	$\begin{bmatrix} 0.36 \\ -0.73 \\ 0.37 \end{bmatrix}$	$\xi \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$
b	0	0

Tabelle 11.1: Resultate der erlernten Wärmeleitungsgleichung.

Es wurde mit einem einfachen Experiment gezeigt, dass das Lernverhalten des Neuronalen Netzwerkes anhand eines einfachen Beispiels verstanden werden kann und durchaus durchschaubar ist. Das Problem dieses Beispiels ist jedoch, dass ein KNN nicht wirklich benötigt wird, da im Grunde die Lösung numerisch einfach bestimmt werden kann.

11.2 Die Gleichung von Burgers

Die Gleichung von Burgers ist ein prototypisches Beispiel einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung, an dem sich viele für nichtlineare Differentialgleichungen typische Phänomene in einer einfachen Situation studieren lassen. Zum Beispiel tritt bei einigen numerischen Lösungsverfahren für die Gleichung von Burgers häufig eine Instabilität auf, die man Computational Mode nennt. Natürlich sind Tricks entwickelt worden, mit diesem Problem fertig zu werden. Der zuvor für die Wärmeleitungsgleichung untersuchte Ansatz, ein Lösungsverfahren mit Hilfe von Machine Learning zu konstruieren birgt das Potential, den Computational Mode von Anfang an zu vermeiden. Das Verfahren kann ja nur lernen, was auch in den Trainingsdaten erkennbar ist, und wir können sicherstellen, dass die Trainingsdaten keine Lösungen enthalten, die Anzeichen des Computational Mode beinhalten.

In diesem Abschnitt sammeln wir ein paar Fakten über die Gleichung von Burgers und den Computational mode. In einem späteren Abschnitt werden wir diese Informationen dazu verwenden, um Trainingsdaten zu erzeugen.

11.2.1 Nichtlineare Transportgleichung

Die Gleichung von Burgers in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{mit Anfangsbedingung} \quad u(0, x) = u_0(x) \quad (11.13)$$

modelliert ein nichtlineares Transportproblem. Die Gleichung (11.13) ist eine quasilineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die mit der Methode der Charakteristiken [1] gelöst werden kann. Die Charakteristiken-Gleichungen sind

$$\begin{aligned} t'(s) &= 1 \\ x'(s) &= u \\ u'(s) &= 0 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung leitet man ab, dass $s = t$. Die dritte Gleichung besagt, dass u entlang einer Charakteristik konstant ist, also $u(s) = u_0$. Die zweite Gleichung besagt dann, dass die im Punkt $(0, x_0, u_0(x_0))$ beginnende Charakteristik eine Gerade mit $x(t) = x_0 + u_0(x_0)t$ ist.

Die Abbildung 11.5 zeigt eine Lösung mit einer Gauss-Verteilung als Anfangsbedingung. Es ist offensichtlich, dass die gezeigte Fläche früher oder später nicht mehr Graph einer Funktion $u(x, y)$ sein kann. Es entwickelt sich eine Sprungstelle, die Gleichung von Burgers ist ein Modell für eine Schockwelle. Man kann insbesondere nicht erwarten, dass die Gleichung von Burgers für beliebige Zeiten t eine glatte Lösung hat, selbst wenn die Anfangsbedingungen glatt waren. Man muss sich mit einer schwachen Lösung begnügen. Dies hat sowohl auf numerische Lösungsverfahren Auswirkungen wie auch auf das Problem, Trainingsdaten für auf Machine Learning basierenden Lösungsalgorithmus zu erzeugen.

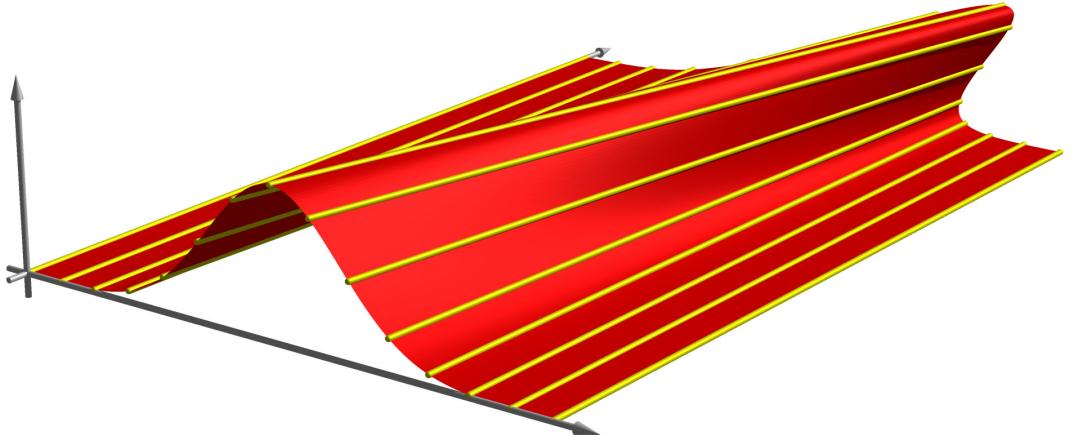


Abbildung 11.5: Lösung der Gleichung von Burgers mit Hilfe der Methode der Charakteristiken. Die Lösungsfläche ist darstellbar als eine Schar von Geraden (gelb).

11.2.2 Erhaltungssatz

Die Gleichung von Burgers kann man auch in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} = 0 \quad (11.14)$$

formulieren. Dies ist ein Spezialfall der allgemeineren Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(u) = 0 \quad (11.15)$$

mit $F(u) = \frac{1}{2}u^2$. Man nennt (11.15) einen Erhaltungssatz. Diese Betrachtungsweise erlaubt, die Bewegung von Sprungstellen besser zu verstehen.

Die Differentialgleichung (11.15) kann auch in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ F(u) \end{pmatrix} = \nabla \cdot \begin{pmatrix} t \\ F(u) \end{pmatrix} = 0$$

schreiben. Darauf ist aber der Satz 2.4 anwendbar. Er besagt, dass Integrale

$$\oint_{\gamma} (F(u) dt - u dx) = \int_D \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(u) dx dy = 0 \quad (11.16)$$

über geschlossene Wege γ verschwinden.

11.2.3 Hugoniot-Rankine-Bedingungen

In Abschnitt 11.2.1 haben wir gesehen, dass Lösungen der Gleichung von Burgers Sprungstellen entwickeln. Die Formulierung als Erhaltungssatz in Abschnitt 11.2.2 soll uns jetzt erlauben, die Bewegung solcher Sprungstellen zu beschreiben.

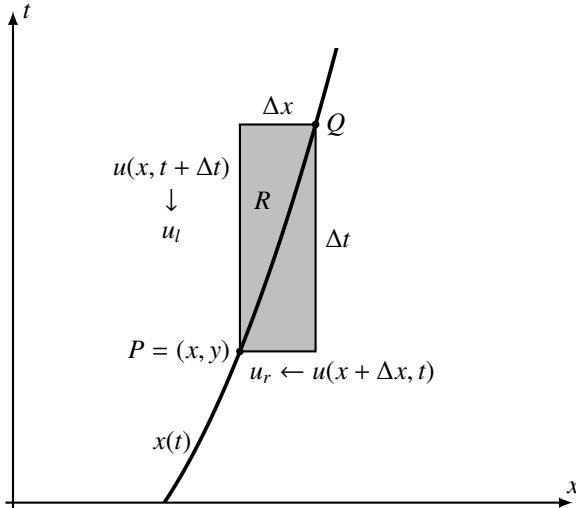


Abbildung 11.6: Herleitung der Hugoniot-Rankine-Bedingung für die Bewegung einer Sprungstelle der Lösung eines Erhaltungssatzes.

Sie also $u(t, x)$ eine Lösung fast überall der Gleichung von Burgers mit einer Sprungstelle, die sich entlang der Kurve $x(t)$ bewegt. Dazu berechnen wir das Wegintegral (11.16) über den Rand des Rechtecks mit den Ecken (x, y) und $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Wir benötigen die Grenzwerte

$$u_l = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} u(t + \Delta t, x) \quad \text{und} \quad u_r = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} u(t, x + \Delta x).$$

Damit können wir das Wegintegral approximieren als

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} (u \, dx - F(u) \, dt) &= 0 \\ u(t + \Delta t, x) \Delta x - F(u(t + \Delta t, x)) \Delta t &= u(t, x + \Delta x) \Delta x - F(u(t, x + \Delta x)) \Delta t \\ \Delta x(u(t + \Delta t, x) - u(t, x + \Delta x)) &= \Delta t(F(u(t + \Delta t, x)) - F(u(t, x + \Delta x))) \end{aligned}$$

Oder nach Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ und $\Delta x \rightarrow 0$

$$\dot{x}(t)(u_l - u_r) = F(u_l) - F(u_r). \quad (11.17)$$

Die Geschwindigkeit, mit der sich die Sprungstelle bewegt, hängt also von den Werten von $u(t, x)$ auf beiden Seiten der Sprungstelle ab. Dies sind die *Hugoniot-Rankine-Bedingungen*. Wir werden sie Abschnitt 11.2.5 verwenden, um Trainingsdaten für Sprungstellen der Lösung zu erzeugen.

Im Fall der Gleichung von Burgers ist $F(u) = \frac{1}{2}u^2$. Die Hugoniot-Rankine-Bedingung wird dann zu

$$\dot{x}(t)(u_l - u_r) = \frac{1}{2}(u_l^2 - u_r^2) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = \frac{1}{2}(u_l + u_r). \quad (11.18)$$

Eine Sprungstelle der Gleichung von Burgers bewegt sich also immer mit der Geschwindigkeit, die dem Mittelwert der u -Werte auf beiden Seiten der Sprungstelle entspricht.

11.2.4 Numerische Lösungen und Computational mode

Bei der numerischen Lösung der Gleichung von Burgers tritt erschwehrend ein Computational Mode auf. Ziel dieses Abschnittes ist, die Herkunft des Computational Mode zu erklären und an einem numerischen Experiment zu illustrieren, wie er auch bei der Gleichung von Burgers zu Instabilität bei der numerischen Lösung führen kann.

Ein einfacheres Beispiel

Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{du}{dx} = 0. \quad (11.19)$$

Die einzigen Lösungen dieser Differentialgleichungen sind die konstanten Funktionen. Wir würden also erwarten, dass auch ein numerisches Verfahren nur die konstanten Funktionen als Lösungen hervorbringen würde.

Wir beginnen mit einer Diskretisierung $x_i = ih$, $i \in \mathbb{N}$, und versuchen eine Lösung $u_i = u(x_i)$ zu konstruieren. Die Ableitung wird durch Differenzenquotienten approximiert, dies führt auf die Gleichungen

$$0 = \frac{du(x_i)}{dx} = \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad (11.20)$$

was gleichbedeutend ist mit der Rekursionsgleichung

$$u_{i+1} = u_i.$$

Diese besagt natürlich nichts anderes als dass wie erwartet die Lösungsfunktion konstant sein muss.

Das Problem dieses Beispield ist jedoch, dass der Differenzenquotient (11.20) gar nicht repräsentativ ist für eine Ableitung an der Stelle x_i , sondern eher für $u'(x_i + \frac{1}{2}h)$. Ein symmetrischer Differenzenquotient

$$u'(x_i) \simeq \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = 0$$

ist zutreffender, führt aber auf die Rekursionsgleichung

$$u_{i+1} = u_{i-1}.$$

Diese hat zwei linear unabhängige Lösungen, die Gleichungen besagen nämlich nur, dass alle geraden Werte $u_{2i} = u_0$ und alle ungeraden $u_{2i+1} = u_1$ sind, diese beiden Werte können aber durchaus verschieden sein. Der Versuch, den Differenzenquotienten genauer wiederzugeben hat zusätzliche numerische Lösungen hervorgebracht, die nichts mit Lösungen der Differentialgleichung zu tun haben.

Differentialgleichung für die Exponentialfunktion

Das Beispiel (11.19) war insofern künstlich, als auf der rechten Seite die Werte von u gar nicht gebraucht wurden und daher das Argument, der Differenzenquotient (???) können nicht mit der rechten Seite verglichen werden, nicht wirklich stichhaltig ist. Dies ändert sich mit der Gleichung

$$\frac{du}{dx} = -u. \quad (11.21)$$

Der Differenzenquotient auf der linken Seite wird hier mit einem Funktionswert auf der rechten Seite verglichen. Der einfachste Ansatz ist wieder

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = -u(x_i) = -u_i \quad \Rightarrow \quad u_{i+1} = u_i - hu_i = (1 - h)u_i,$$

mit der eindeutigen Lösung

$$u_i = (1 - h)^i u_0.$$

Um $u(x)$ mit einer Diskretisierung mit n Schritten zu berechnen, muss die Schrittweite $h = x/n$ verwendet werden, so dass wir für

$$u(x) \simeq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n u_0$$

erhalten. Im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ ist

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n u_0 = u_0 e^{-x}$$

die korrekte Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung.

Das eben diskutierte Verfahren ist natürlich das *Euler-Verfahren*. Seine Genauigkeit bei grosser Schrittweite h ist sehr beschränkt, was unter anderem auch damit zu tun hat, dass der Differenzenquotient nicht repräsentativ ist für die Ableitung an der Stelle x_i . Wir versuchen daher wieder einen symmetrischen Differenzenquotienten und erhalten

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = -u_i \quad \Rightarrow \quad u_{i+1} = u_{i-1} - 2hu_i \quad (11.22)$$

Wir lösen die lineare Differenzengleichung (11.22) mit einem Potenzansatz $u_i = \lambda^i$, dies ergibt die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2h\lambda - 1 = 0,$$

die die Lösungen

$$\lambda = -h \pm \sqrt{h^2 + 1}.$$

Die Ableitung der Wurzelfunktion an der Stelle 1 ist $\frac{1}{2}$, so dass λ approximiert werden kann durch

$$\lambda = \pm \left(1 + \frac{1}{2}h^2 + \dots\right) - h = \begin{cases} 1 - h - \frac{1}{2}h^2 + \dots & = \lambda_+ \\ -1 - h - \frac{1}{2}h^2 + \dots & = \lambda_- \end{cases}$$

Die erste Lösung λ_+ ist positiv und $\lambda_+ < 1$, sie führt auf die gleiche Lösung, die wir schon beim Euler-Verfahren gefunden haben.

Die zweite Lösung λ_- ist negativ und $|\lambda_-| > 1$ für h klein genug. Die Gleichung 11.22 hat also eine zusätzliche Lösung $u_i = u_0 \lambda_-^i$ mit alternierenden Vorzeichen, die sehr schnell anwächst. Wir können wie bei λ_+ auch den Grenzwert für beliebig feine Diskretisierung bestimmen. Da das Vorzeichen dieser Lösung mit jedem Schritt wechselt, untersuchen wir nur die geraden Schritte. Wir nehmen wieder $h = x/2n$ und berechnen den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_0 \left(1 + \frac{x}{2n} + \dots\right)^{2n} = u_0 e^x.$$

Die Lösung wächst also exponentiell schnell an.

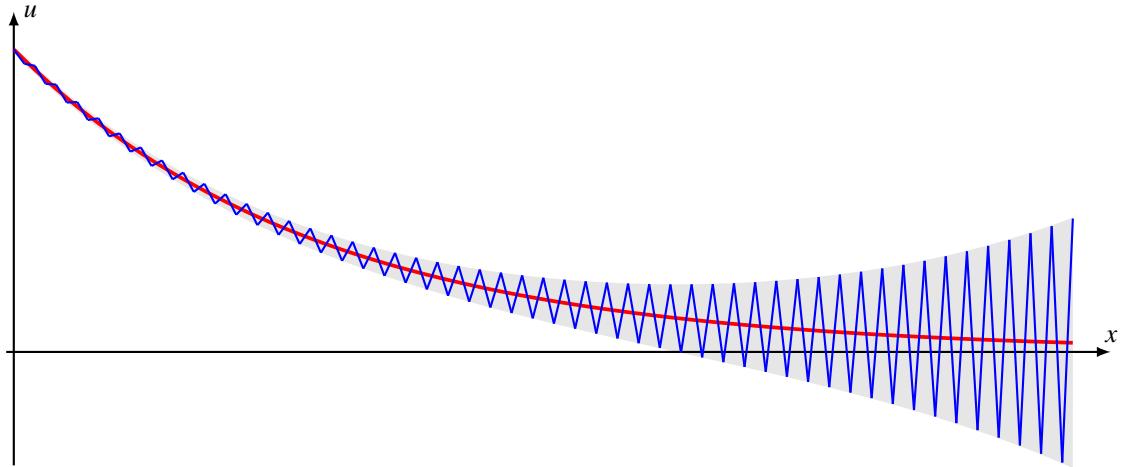


Abbildung 11.7: Exakte Lösung (rot) und numerische Lösung (blau) der Differentialgleichung (11.21) unter Verwendung symmetrischer Differenzenquotienten. Der Computational Mode äußert sich im exponentiellen Anwachsen alternierender Fehler mit grösser werdendem x .

Die Lösung der Differentialgleichung ist eine Linearkombination

$$u_i = a_+ \lambda_+^i + a_- \lambda_-^i,$$

deren Koeffizienten aus Anfangswerten bestimmt werden müssen. Für fast alle Anfangswerte ist unvermeidbar, dass sich der Koeffizient a_- als von 0 verschieden herausstellt, auch wenn er sehr klein ist. Weil λ_-^i exponentiell schnell anwächst wird der Summand $a_- \lambda_-^i$ immer früher oder später die numerische Lösung dominieren, wie dies auch in Abbildung 11.7 dargestellt ist.

Diese Lösung ist einzig entstanden durch den Versuch, mit Hilfe zusätzlicher Funktionswerte das numerische Verfahren zu verbessern. Dabei ist die Ordnung der Differenzengleichung grösser geworden und damit sind neue Lösungen entstanden.

Gleichung von Burgers und Computational Mode

Das Problem des Computational Mode tritt auch bei der Gleichung von Burgers auf. Wir verwenden eine zweidimensionale Diskretisation (t_i, x_j) mit Schrittweite h . Die asymmetrischen Differenzenquotienten

$$\frac{\partial u(t_i, x_j)}{\partial t} \simeq \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{2h} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u(t_i, x_j)}{\partial x} \simeq \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{2h}$$

sind nicht wirklich repräsentativ für den Gitterpunkt (i, j) . In die Gleichung geht zusätzlich zu den Ableitungen auch noch der Funktionswert u_{ij} , was unterstreicht, dass wir die Ableitungen möglichst genau an der Stelle (i, j) bestimmen können müssen.

Die besser geeigneten symmetrischen Differenzenquotienten

$$\frac{\partial u(t_i, x_j)}{\partial t} \simeq \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u(t_i, x_j)}{\partial x} \simeq \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h}$$

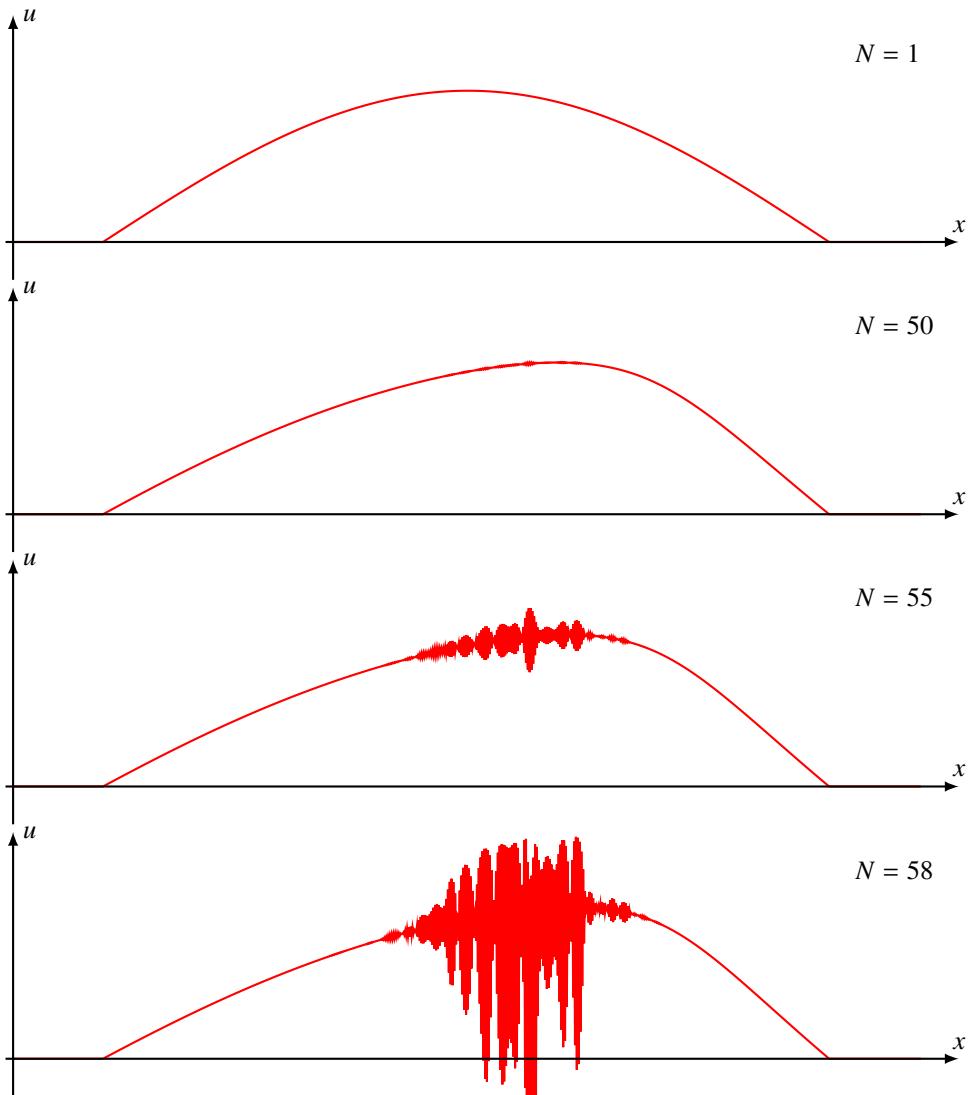


Abbildung 11.8: Entwicklung des Computational Mode in einer Simulation der Differenzengleichung (11.23). Im obersten Graphen sieht man die Anfangsbedingung, die Funktion ist x zwischen 0 und 2π . Bei Iteration $N = 50$ kann man bereits erkennen, wie sich der Computational Mode auszuwirken beginnt, die nachfolgend gezeigten Iterationen sind unbrauchbar.

führen auf die nichtlineare Differenzengleichung

$$u_{i+1,j} = u_{i-1,j} + hu_i \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{h} = u_{i-1,j} + u_{ij}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}), \quad (11.23)$$

die ebenfalls mindestens zweiter Ordnung ist. Auch sie zeigt den Computational Mode, wie man zum Beispiel auch in numerischen Experimenten sehen kann (Abbildung 11.8).

11.2.5 Trainingsdaten für die Gleichung von Burgers

Damit die Gleichung von Burgers mit einem Machine-Learning-Ansatz gelöst werden kann, müssen geeignete Trainingsdaten bereitgestellt werden.

Lösung mit Charakteristiken

Glatte Lösungen existieren nur für eine beschränkte Zeit. Um das Verhalten für glatte Lösungen zu trainieren, generieren wir Lösungen mit Hilfe der Charakteristiken-Methode. Wir müssen aber sicherstellen, dass die Lösungen nur so lange verwendet werden, bis sich Sprungstellen entwickeln. Wir wählen daher das folgende Vorgehen. Zunächst erzeugen wählen wir eine zufällige Anfangsfunktion. Dann bestimmen wir die Zeit, bis zu der die zu dieser Anfangsbedingungen gehörende Funktion keine Sprungstelle entwickelt. Für diese Zeit berechnen wir die Lösung mit der Charakteristiken-Methode.

Sprungstellen

Um das Verhalten bei Sprungstellen zu trainieren generieren wir einfache Lösungen mit genau einer Sprungstelle. Wir verwenden dazu die Hugoniot-Rankine-Bedingung (??).

Literatur

- [1] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. Bd. 19. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2010.

Kapitel 12

3-Box-Modell der Thermohalinen Zirkulation

Jonas Gründler

12.1 Einleitung

Diese Arbeit befasst sich damit, das in Kapitel 4 entwickelte 2-Box Modell zur Simulation der thermohalinen Zirkulation zu einem 3-Box Modell zu erweitern. Mit diesem erweiterten Modell soll dann versucht werden, Meeresströmungen realistischer zu simulieren. Weiter wird der Einfluss der Klimaerwärmung auf diese Strömungen untersucht und mit anderen, weiter entwickelten Modellen verglichen.

12.2 Thermohaline Zirkulation, was ist das?

Die hier als THC abgekürzte thermohaline Zirkulation ist eine weltumspannende Meeresströmung. Diese Strömung sorgt für eine Durchmischung der verschiedenen Ozeane und den damit einhergehenden Energie- und Nährstoffaustausch. Die Auswirkung dieses Energieaustausches sind spürbar. So heizt zum Beispiel der Golfstrom, welcher auch zu dieser Strömung gehört, Nordeuropa um mehrere Grad auf.

12.2.1 Einflussfaktoren

Doch wie entsteht diese Strömung? Diese Problem wurde bereits in Kapitel 4 behandelt, darum hier nur eine kurze Zusammenfassung.

Es gibt viele Faktoren die zur Entstehung und Veränderung dieser Strömungen beitragen. Dazu gehören die Verteilung der Kontinente, die Corioliskraft, die Wasserdichte und auch Wetter und Winde. Hier gehen wir jedoch nur auf den Einfluss der Wasserdichte ein. Die Verteilung der Kontinente und auch die Corioliskraft ändern sich nicht und können daher als konstant betrachtet werden. Wind und Wetter werden weggelassen, da ihr Einfluss nur schwer vorherzusagen ist und sie schnell

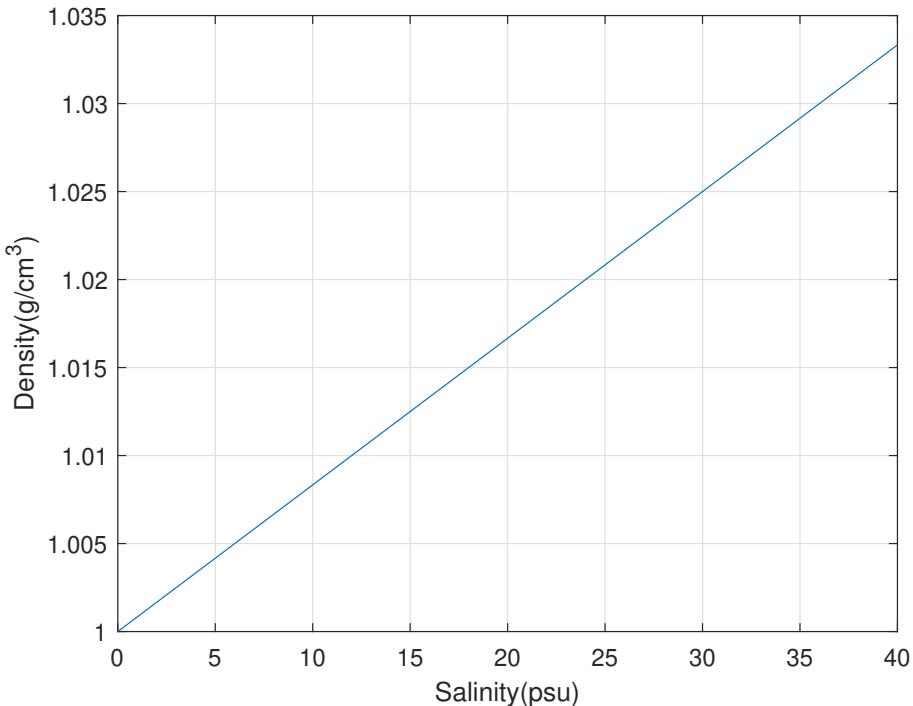


Abbildung 12.1: Dichteänderung abhängig vom Salzgehalt

ändern können. Mit dem im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Simulationsmodell lassen sich diese Komponenten auch gar nicht darstellen.

12.2.2 Dichte

Die THC wird hauptsächlich durch Dichteunterschiede im Wasser hervorgerufen. Relativ zur Umgebung sinkt dichtes Wasser ab und weniger dichtes Wasser steigt auf. Die Wasserdichte wird hauptsächlich durch Temperatur und Salzgehalt des Wassers beeinflusst.

Durch einen hohen Salzgehalt wird das Wasser dichter und beginnt zu sinken. Die Temperatur hat einen andersartigen Einfluss, bis 5°C steigt die Dichte des Wassers mit der Temperatur. Ab diesen 5°C ist der Einfluss umgekehrt und die Dichte sinkt wenn die Temperatur steigt. Dieser Effekt hilft auch dabei, dass Eis auf Wasser schwimmt.

Wenn an einem Ort dichtes Wasser absinkt, muss an der Oberfläche anderes Wasser nachfliessen. Dies erzeugt eine Oberflächenströmung. Wenn am Meeresgrund die Dichte des Tiefenwassers reduziert wird, beginnt es aufzusteigen. Dort muss daraufhin Tiefenwasser nachfliessen. Kombiniert entsteht so ein Kreislauf. Skaliert man dies auf Weltmeergroesse, ist die thermohaline Zirkulation beschrieben. Die Einflüsse, welche das Wasser an bestimmten Stellen aufsteigen und absinken lassen, werden später erläutert. In Abbildung 12.1 ist der Zusammenhang zwischen Dichte und Salinität dargestellt, in Abbildung 12.2 die Abhängigkeit der Dichte von der Temperatur.

Diese Einflüsse werden in einer Gleichung

$$\varrho = \varrho_0(1 - \alpha(T - T_0) + \beta(S - S_0)) \quad (12.1)$$

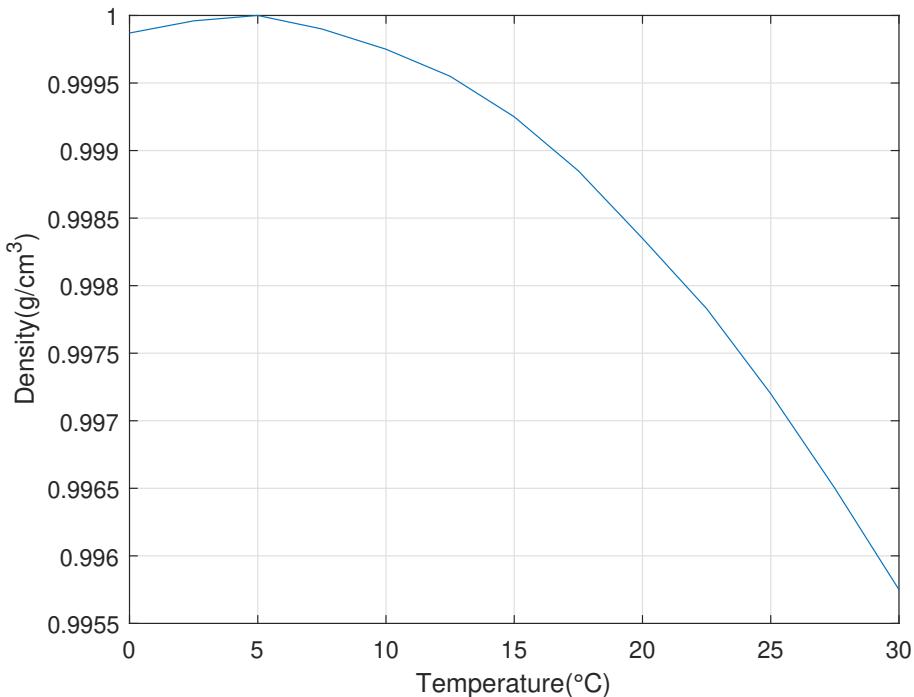


Abbildung 12.2: Dichteänderung abhängig von der Temperatur

zusammengefasst, mit welcher sich die Dichte des Wassers berechnen lässt. Damit lassen sich später über einen Dichteunterschied Wasserströme bestimmen. Weitere Details zur grundlegenden Funktion der Simulation und die Erklärung der Modellgleichungen sind in Kapitel 4.2.2 zu finden.

12.3 Golfstrom

Da die Simulation des weltumspannenden THC viel zu umfangreich und kompliziert ist, beschränken wir uns hier auf den Golfstrom. Der Golfstrom eignet sich bestens zur Simulation, da er sich grob in drei Regionen aufteilen lässt und so gut in das Modell passt. Zusätzlich ist es der Strom, welcher Nordeuropa warm hält. Dies hat auch für die Schweiz eine grosse Bedeutung.

Zusätzlich zur grundlegenden Simulation des Golfstroms wird auch die Reaktion dieser Simulation bei veränderten Umweltparametern betrachtet. Dies, um herauszufinden, ob sich mit dieser Simulation auch Veränderungen durch den Klimawandel darstellen lassen. Abbildung 12.3 enthält eine Darstellung des THC in welcher der Golfstrom grün eingekreist ist.

12.3.1 Kreislauf

Der Golfstrom ist ein Kreislauf und hat keinen Ursprung, deswegen kann mit der Beschreibung an einem beliebigen Ort gestartet werden. Im Golf von Mexiko wird von der Äquatorsonne aufgewärmtes Wasser von Winden und der Erdrotation nach Norden getrieben. Während das warme Wasser an Europa vorbeifliest gibt es einen Teil seiner gespeicherten Energie ab und wärmt so den Kontinent

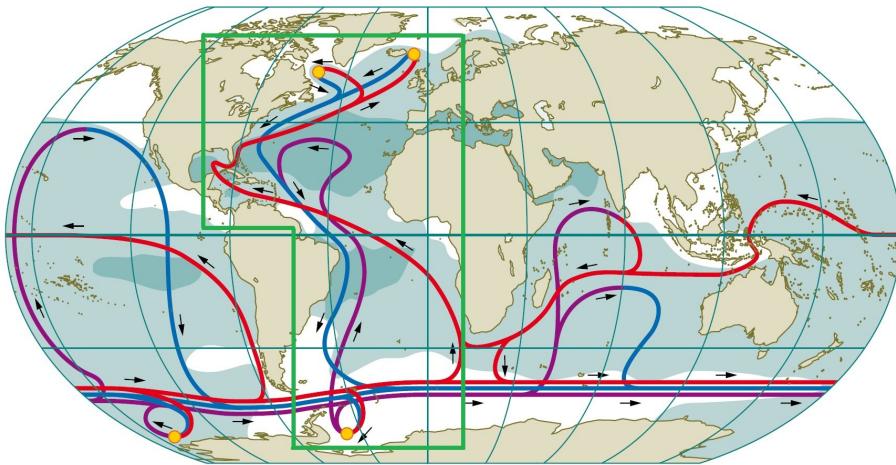


Abbildung 12.3: Golfstrom als Teil der Thermohalinen Zirkulation

auf. Auf dem Weg kühlst das Wasser langsam ab und wird durch die fortlaufende Verdunstung immer salzhaltiger. Da der relative Einfluss der Salinität grösser ist als der, der Temperatur, beginnt das Wasser im Norden, durch die nun hohe Dichte, abzusinken. Das abgesunkene Wasser treibt dem Grund des Meeres entlang bis zum Südpol. Aufgrund der dort anderen Temperatur- und Salzverhältnisse steigt es wieder auf und fliesst in Richtung Atlantik und Mexiko. Somit ist der Kreislauf geschlossen.

12.3.2 Einfluss des Klimawandels

Um den Einfluss des Klimawandels auf den Golfstrom zu verstehen, müssen verschiedene Schlüsselelemente betrachtet werden. Ein Punkt ist das Kap der guten Hoffnungen an der südlichen Spitze Afrikas. Wie in Abbildung 12.3 ersichtlich ist, befindet sich dort eine Kreuzung. Der Golfstrom setzt sich dort aus Wasser aus dem indischen Ozean und aus Wasser des Zirkumpolarstromes zusammen. Der conveyor Belt ist eine riesige Strömung welche die Antarktis umschliesst und auch Förderband genannt wird. Dort stellt sich auch die Frage, in welcher Richtung der Indische Ozean und der Atlantik ihr Salz austauschen und ob überhaupt. Wenn der Golfstrom nicht kontinuierlich mit Salz versorgt wird, ist es dem Wasser am Nordpol nicht mehr möglich zu sinken. Eine leichte Veränderung der Salzbilanz durch eine Störung der Salzzufuhr, könnte den Golfstrom zum Erliegen bringen. Hier gehen die Meinungen von Forschern jedoch auseinander. Salzmessungen im offenen Meer sind sehr schwierig und die Resultate mit Vorsicht zu genießen. Im Moment zeigen diese jedoch, dass der Golfstrom weiter Salz in den Atlantik importiert und sich so selber am Leben erhält. Dies könnte sich jedoch durch den Klimawandel ändern. Die Mechanismen der Salzverteilung sind noch nicht komplett verstanden, doch sie lassen sich mit dem aktuellen Klima in Verbindung bringen. Die weltweiten Strömungen sind ein kompliziertes und fragiles System das leicht aus dem Gleichgewicht gebracht werden kann.

Zusätzlich spielt noch die Erhöhung des CO₂-Gehaltes in der Luft und die damit einhergehende Klimaerwärmung eine wichtige Rolle. Sie hat zwei direkte Auswirkungen auf den Golfstrom:

- Durch die Erhöhung der Lufttemperatur kann das Wasser auf dem Weg in den Norden nicht

mehr genug abkühlen, um danach abzusinken.

- Das Abschmelzen der Polkappen, welches viel Frischwasser freisetzt, kann die Salzkonzentration so weit verringern, dass das Wasser aufgrund der reduzierten Dichte nicht mehr absinken kann.

Diese beiden Prozesse wären bereits einzeln in der Lage den Golfstrom zu stören, doch zusammen ist die Wirkung noch gravierender.

Laut einer Studie des Forschers Liu Wei von der Universität Yale vom 2. Jan. 2017 [5] könnte dieses Szenario in den nächsten 300 Jahren tatsächlich eintreten. Sie haben den Golfstrom mit der doppelten CO₂ Konzentration wie vor Industrialisierungsbeginn simuliert, also mit einer Konzentration vom 560ppm. Die Resultate waren dramatisch. Innert 100 Jahren würde der Strom um einen Drittel abnehmen, und innert 300 Jahren ganz stoppen. Momentan ist die Lage noch nicht so schlimm da die aktuelle CO₂ Konzentration ca. 403ppm [2] beträgt. Wenn die Konzentration aber weiter so steigt wie zur Zeit, wären wir bereits in 31 Jahren so weit.

12.3.3 Folgen

Was passiert, wenn der Golfstrom zum Erliegen kommt, oder sogar seine Richtung ändert? Der Katastrophenfilm *The day after tomorrow* von Roland Emmerich zeigt auf eindrückliche Weise, was in so einem Fall passieren könnte.

Die Handlung des Filmes ist folgende: Immer mehr Forscher warnen vor einem drastischen Klimawandel. Sie glauben, dass der Golfstrom wegen der abschmelzenden Polkappen abkühlen und zum Stillstand kommen könnte, was eine neue Eiszeit zur Folge hätte. Zusätzlich hat ein Forscherteam eine Modell entwickelt, welches diese Ereignisse nur wenige Wochen in der Zukunft voraussagt. Zu diesem Zeitpunkt melden bereits erste Bojen rasant absinkende Wassertemperaturen vor der amerikanischen Küste. Innerhalb kürzester Zeit treffen dann Katastrophenmeldungen von überall ein. Neu-Dehli versinkt im Schnee, Tokyo leidet unter Hagelschauern, Los Angeles wird von Tornados zerstört und Superstürme entstehen über Europa, Russland und den USA. Innert weniger Tage versinkt die ganze Welt in einer neuen Eiszeit.

Das ist natürlich übertrieben dargestellt. Doch falls der Golfstrom stoppt, würde Nordeuropa, trotz Klimaerwärmung, um einige Grad kälter werden. Es gibt noch weitere Folgen, doch diese lassen sich nicht so einfach abschätzen, da das Klima chaotisches Verhalten aufweisen kann. Dies lässt sich nur schwer vorhersagen.

12.4 Simulation

Der erste Schritt ist die Erstellung eines Modells. Das Ziel dieser Modelle ist es, den Golfstrom so genau wie möglich nachzubilden und Resultate zu erhalten, welche dem Golfstrom so gut wie möglich entsprechen. Die Simulation soll also, je nach Parameterwahl, genau wie der Golfstrom reagieren. Dazu wird der Golfstrom in drei Zonen aufgeteilt. Die jeweiligen Polarregionen und der Äquator werden je zu einer Zone. Diese Zonen werden dann je einer Box zugeordnet. Diese Boxen werden mittels Kanälen verbunden, um so den Strom zu modellieren. Im Laufe des Seminars wurden zwei Modelle erstellt. Der erste Ansatz (siehe Abschnitt 12.4.1) war sehr lehrreich, hatte aber schlussendlich nichts mit dem realen Golfstrom gemeinsam. Der zweite Ansatz (siehe Abschnitt 12.4.2) war erfolgreicher und der Golfstrom kann mit diesem Modell qualitativ simuliert werden. In den folgenden zwei Kapiteln werden diese zwei Modelle vorgestellt und die jeweiligen Resultate diskutiert.

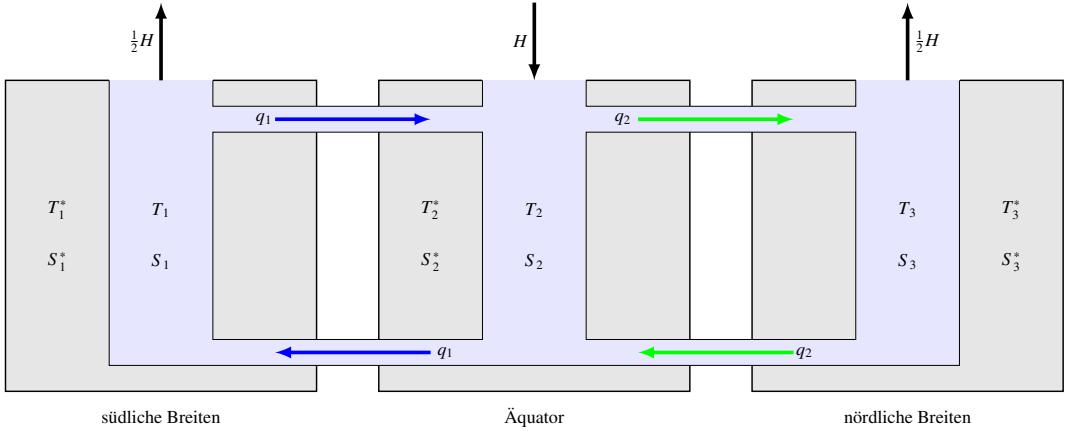


Abbildung 12.4: Zwei-Fluss Modell des THC

12.4.1 Zwei-Fluss Modell(1. Ansatz)

In diesem Modell werden die drei Boxen jeweils durch Rohre verbunden. Nun werden zwei Flüsse simuliert, die von den jeweiligen Dichtegradienten der unterschiedlichen Boxen abhängen. q_1 ist nur vom Dichteunterschied zwischen Box 1 und Box 2 abhängig. Dementsprechend hängt q_2 nur vom Dichteunterschied der Boxen 2 und 3 ab. Der Vorteil dieser Aufteilung der Flüsse ist, dass wir sie entkoppeln können und sie nicht von der jeweiligen dritten Box abhängig sind. Eine Darstellung des Modelles ist in Abbildung 12.4 zu finden.

Aufgrund der Darstellung lassen sich für jede Box die zugehörigen Salinitäts- und Temperaturgleichungen aufstellen. Box 1 und 3 haben jeweils einen Fluss in der Gleichung. Im Gegensatz dazu wird Box 3 jedoch von zwei Flüssen durchflossen. Daraus entstehen die Gleichungssysteme 12.2 und 12.3.

$$\begin{aligned}\frac{dT_1}{dt} &= c(T_1^* - T_1) + |q_1|(T_2 - T_1) \\ \frac{dT_2}{dt} &= c(T_2^* - T_2) + |q_1|(T_1 - T_2) + |q_2|(T_3 - T_2) \\ \frac{dT_3}{dt} &= c(T_3^* - T_3) + |q_2|(T_2 - T_3)\end{aligned}\quad (12.2)$$

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{dt} &= -\frac{H}{2} + d(S_1^* - S_1) + |q_1|(S_2 - S_1) \\ \frac{dS_2}{dt} &= H + d(S_2^* - S_2) + |q_1|(S_1 - S_2) + |q_2|(S_3 - S_2) \\ \frac{dS_3}{dt} &= -\frac{H}{2} + d(S_3^* - S_3) + |q_2|(S_2 - S_3)\end{aligned}\quad (12.3)$$

Der erste Term auf der rechten Seite

$$c(T_i^* - T_i), \quad d(S_i^* - S_i)$$

stellt jeweils den Energie- und Salzaustausch mit dem umgebenden Reservoir dar. Das Reservoir soll die Umgebung der Box darstellen. Darin sind Einflüsse wie die der Kontinente, der einmündenden

Flüsse und des Klimas enthalten. Diese Werten werden in der Simulation konstant gehalten, da sich diese Werte nur über längere Zeit ändern. Die Übertragungskonstante wird mit der Temperaturdifferenz zwischen Box und Reservoir multipliziert. Die anderen Terme auf der rechten Seite sind die Flüsse

$$|q_x|(T_i - T_j),$$

welche mit der Temperaturdifferenz der jeweiligen Boxen multipliziert werden, um die Effizienz der Übertragung zwischen den Boxen zu berechnen.

Die Stärke des Flusses wird aus dem Dichteunterschied zwischen den jeweiligen Boxen berechnet. Die Gleichungen für die Flüsse q_x sind also

$$q_1 = k \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_0} \quad (12.4)$$

und

$$q_2 = k \frac{\varrho_2 - \varrho_3}{\varrho_0}. \quad (12.5)$$

Für ϱ_i wird dann jeweils die Formel 12.1 eingesetzt, um die Dichte aus den jeweiligen Salinitäten und Temperaturen zu berechnen. Daraus folgt

$$q_1 = k \frac{\varrho_0 [1 - \alpha(T_1 - T_0) + \beta(S_1 - S_0)] - \varrho_0 [1 - \alpha(T_2 - T_0) + \beta(S_2 - S_0)]}{\varrho_0} \quad (12.6)$$

und

$$q_2 = k \frac{\varrho_0 [1 - \alpha(T_2 - T_0) + \beta(S_2 - S_0)] - \varrho_0 [1 - \alpha(T_3 - T_0) + \beta(S_3 - S_0)]}{\varrho_0}. \quad (12.7)$$

Die Faktoren ϱ_0, T_0 und S_0 lassen sich kürzen, sodass die Flussgleichungen

$$q_2 = k[\alpha(T_3 - T_2) - \beta(S_3 - S_2)] \quad (12.8)$$

und

$$q_1 = k[\alpha(T_2 - T_1) - \beta(S_2 - S_1)] \quad (12.9)$$

entstehen. Da die Flüsse nur von den Differenzen der jeweiligen Boxen abhängig sind, kann man sie auch wie hier

$$\begin{aligned} q_1 &= k[\alpha(\Delta T_{q1}) - \beta(\Delta S_{q1})] \\ q_2 &= k[\alpha(\Delta T_{q2}) - \beta(\Delta S_{q2})], \end{aligned} \quad (12.10)$$

mit Deltas schreiben. Die so entstandenen Gleichungen lassen sich mit Matlab simulieren und Plotten.

Matlab-Code der Simulation

Die oben aufgestellten Differentialgleichungssysteme (12.2) und 12.3 werden mit Matlab gelöst. Dies wird mit dem Differentialgleichungslöser `ode45` aus der Matlab Funktionenbibliothek erreicht. Um einen effizienten und leserlichen Code zu schreiben, werden ein Zustandsvektor, ein Zeitvektor und ein Vektor mit den Reservoirkonstanten erstellt.

$$y_0 = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}, \quad t_{\text{span}} = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_{\text{end}} \end{pmatrix}, \quad \text{const} = \begin{pmatrix} T_1^* \\ T_2^* \\ T_3^* \\ S_1^* \\ S_2^* \\ S_3^* \end{pmatrix}$$

```

1 || %% Startvariablen, Timebase, Konstanten
2 ||
3 | y0 = [T1; T2; T3; S1; S2; S3];
4 | tspan = [t0 tmax];
5 | const = [T1c ; T2c; T3c; S1c; S2c; S3c];

```

Diese werden dem Differentialgleichungslöser übergeben.

```

1 || %% Loesung Diffgl
2 | [t,y] = ode45(@(t,y) odefun_3box(t,y,val), tspan, y0);

```

Die Gleichungen werden mit der Funktion `odefun_3Box.m` schrittweise gelöst und die Resultate zurückgegeben. Gleichzeitig wird der Zustandsvektor mit 0 initialisiert und die Naturkonstanten zur Flussberechnung definiert.

```

1 | function dydt = odefun_3box(t, y, const)
2 |
3 | % Initialisierung mit 0
4 | dt1 = 0;
5 | dt2 = 0;
6 | dt3 = 0;
7 | ds1 = 0;
8 | ds2 = 0;
9 | ds3 = 0;
10 | % Definierung der Naturkonstanten
11 | k = 1.5*10^(-6);
12 | a = 1.5*10^(-4);
13 | b = 8*10^(-4);
14 | H = 0.0000001;
15 | c = 0.00001;
16 | d = 0.00001;
17 | % Flussgleichungen
18 | q1 = k*(a*(y(2)-y(1)) - b*(y(5)-y(4)));
19 | q2 = k*(a*(y(3)-y(2)) - b*(y(6)-y(5)));
20 | % Diffgleichungen
21 | dt1 = c*(const(1)-y(1)) + abs(q1)*(y(2)-y(1));
22 | dt2 = c*(const(2)-y(2)) + abs(q1)*(y(1)-y(2)) + abs(q2)*(y(3)-y(2));
23 | dt3 = c*(const(3)-y(3)) + abs(q2)*(y(2)-y(3));
24 | ds1 = -H/2 + d*(const(4)-y(4)) + abs(q1)*(y(5)-y(4));
25 | ds2 = H + d*(const(5)-y(5)) + abs(q1)*(y(4)-y(5)) + abs(q2)*(y(6)-y(5));
26 | ds3 = -H/2 + d*(const(6)-y(6)) + abs(q2)*(y(5)-y(6));
27 |
28 | dydt = [dt1; dt2; dt3; ds1; ds2; ds3];

```

Die Rückgabewerte werden in einem Array gespeichert und dann geplottet. Um den Text nicht in die Länge zu ziehen wird hier nur der Code zur Erstellung des Temperaturplots dargestellt. Der Salinitätsplot folgt dem gleichen Schema. Da die Flüsse innerhalb der `ode45`-Funktion berechnet wurden, muss dies nachträglich noch einmal gemacht werden, um die Werte nachher plotten zu können. Dazu werden die jeweiligen Werte aus dem Lösungsvektor extrahiert und die Flüsse wiederholt berechnet.

```

1 | % create Subplots
2 | p1 = subplot(1,3,1);
3 | p2 = subplot(1,3,2);
4 | p3 = subplot(1,3,3);
5 |
6 | % Plot temperature
7 | plot(p1, t,y(:,1), t, y(:,2), t, y(:,3));
8 | title(p1, 'Temperature-plot')

```

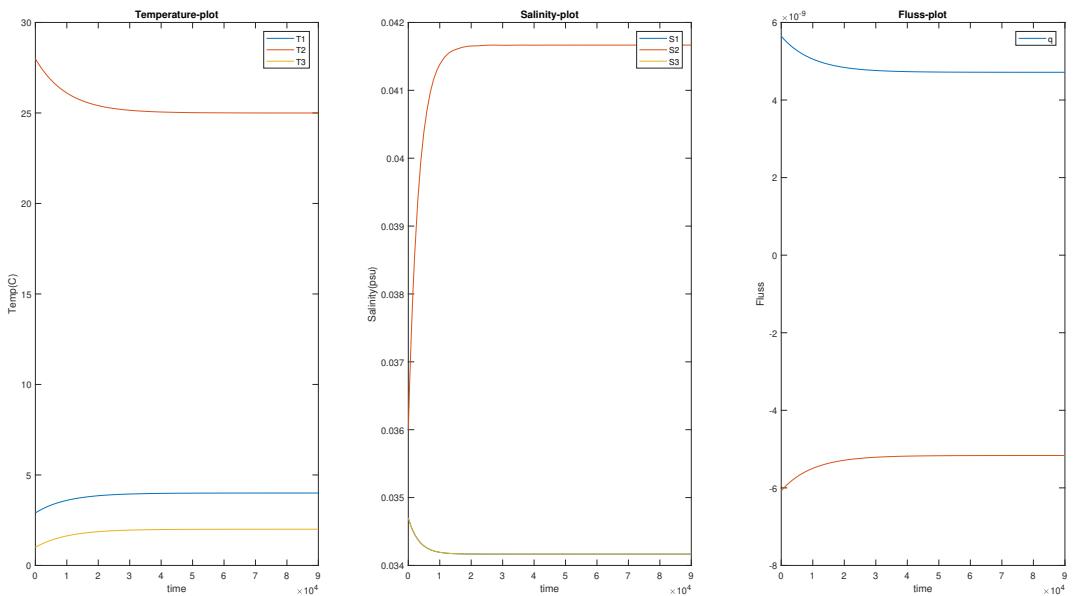


Abbildung 12.5: Simulationsresultate

```

9 || xlabel(p1, 'time')
10 || ylabel(p1, 'Temp(C)')
11 || legend(p1, 'T1', 'T2', 'T3')

```

Die so entstandenen Figuren werden im folgenden Abschnitt ausgewertet und diskutiert.

Resultate

Die ersten Durchläufe ergaben Resultate, welche tatsächlich dem Golfstrom zu ähneln schienen. Wenn jedoch die Temperaturen und Salinitäten der Reservoirs (S_1^*, T_1^*, \dots) verändert werden, treten plötzlich unmögliche Phänomene auf. Einer der beiden Flüsse wird negativ und ändert seine Richtung. Das resultiert in zwei gegenläufigen Strömen, welche in keiner Weise mit dem Golfstrom übereinstimmen. Das führt dazu, dass am Äquator eine Absinkstelle entsteht. In der Realität ist klar zu erkennen, dass Absink- und Aufsteigstellen jeweils nur an den Polen vorhanden sind. Ein Plot der Simulationsresultate findet sich in Abbildung 12.5.

Durch die Entkoppelung der zwei Flüsse, war es möglich, dass ein Fluss seine Richtung ändert. Die Simulation hat zwar funktioniert, nur ist das Modell fehlerhaft. Wir müssen also unsere Darstellung des Modells anpassen. In der mittleren Box muss eine Absinkstelle eingefügt werden, damit das Modell mit der Simulation übereinstimmt. Das Resultat der Anpassung ist in Abbildung 12.6 zu sehen.

So lässt sich die entstandene Absinkstelle gut erkennen. Mit diesem Modell lässt sich der Golfstrom also nicht erfolgreich simulieren.

12.4.2 Ein-Fluss Modell (2. Ansatz)

Dieses Modell ist der verbesserte Nachfolger des Zwei-Fluss Modelles. Es stammt aus einer Aufgabe von *Mathematics and Climate*[4].

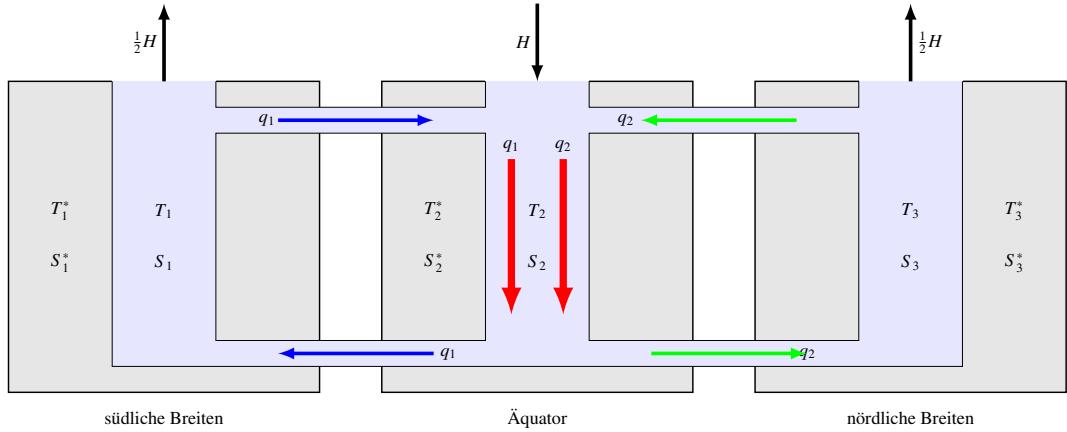


Abbildung 12.6: Angepasstes Zwei-Fluss Modell

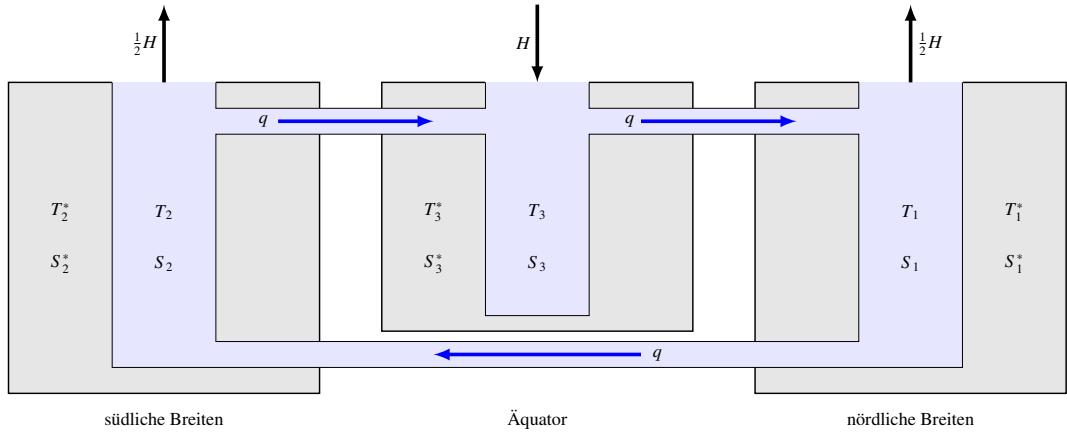


Abbildung 12.7: Ein-Fluss Modell des THC

Um zu verhindern, dass in der mittleren Box eine zusätzliche Absinkzone entsteht, muss dieser Weg versperrt werden. Das erreicht man am einfachsten, wenn der Tiefenstrom von der Äquatorbox getrennt wird. Die Äquatorzone ist nur via Oberflächenströmungen mit den anderen Boxen verbunden und die Tiefenströmung verbindet die Polzonen.

Wie im vorherigen Modell werden je drei Gleichungen für Temperatur- und Salinitätsänderung der jeweiligen Boxen benötigt. Die einzelnen Boxen sind im Gegensatz zum 1. Versuch nur noch mit einem Fluss verbunden. Das stimmt auch viel besser mit der Realität überein. Folgend ist die Gleichung für Box Nr. 1 dargestellt, um die Zusammenhänge zu erläutern:

$$\frac{dT_1}{dt} = c(T_p - T_1) + \begin{cases} q(T_3 - T_1) & q > 0 \\ |q|(T_2 - T_1) & q < 0 \end{cases} \quad (12.11)$$

Der erste Term beschreibt wie bisher den Temperaturaustausch zwischen Box und Reservoir und wurde in Abschnitt 12.4.1 bereits erläutert. Der Flussterm ist jetzt anders, da der Fluss je nach

Flussrichtung von anderen Boxen getrieben wird. Die Differenz muss jeweils zwischen der Quellbox und der betrachteten Box berechnet werden, da der Energie- und Salztransport jeweils nur vom Unterschied abhängt. Wenn der Fluss positiv ist, also $q > 0$, dann wird für die Berechnung Box 3 und die aktuelle Box verwendet, da die dritte Box die Quellbox darstellt. Wenn der Fluss nun negativ wird, ist die Quellbox Box 2 also muss hier die Differenz zwischen der zweiten und der dritten Box berechnet werden. Um die Simulation zu erleichtern, wird im Falle eines negativen Flusses mit dem Absolutbetrag gerechnet. Damit die Resultate trotzdem stimmen, werden bei der Differenzbildung jeweils die Terme vertauscht, damit die Richtung trotzdem korrekt ist.

Der Fluss q wird ebenfalls anders berechnet. Er ist nur vom Dichteunterschied zwischen den jeweiligen Polen abhängig [4]. Wir können also wieder schreiben

$$q = k \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_0} \quad (12.12)$$

woraus folgt

$$q = k \frac{\varrho_0[1 - \alpha(T_1 - T_0) + \beta(S_1 - S_0)] - \varrho_0[1 - \alpha(T_2 - T_0) + \beta(S_2 - S_0)]}{\varrho_0}. \quad (12.13)$$

Das lässt sich kürzen, woraus sich folgende Gleichung

$$q = k[\alpha(T_2 - T_1) - \beta(S_2 - S_1)] \quad (12.14)$$

für den Fluss ergibt.

Die Gleichungen für die anderen Boxen lassen sich nach dem gleichen Schema erstellen. Nur müssen jeweils entsprechend der Flussrichtung andere Quellboxen verwendet werden. Mit den entwickelten Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dt} &= c(T_p - T_1) + \begin{cases} q(T_3 - T_1) & q > 0 \\ |q|(T_2 - T_1) & q < 0 \end{cases} \\ \frac{dT_2}{dt} &= c(T_p - T_2) + \begin{cases} q(T_1 - T_2) & q > 0 \\ |q|(T_3 - T_2) & q < 0 \end{cases} \\ \frac{dT_3}{dt} &= c(T_e - T_3) + \begin{cases} q(T_2 - T_3) & q > 0 \\ |q|(T_1 - T_3) & q < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (12.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= -H/2 + d(S_p - S_1) + \begin{cases} q(S_3 - S_1) & q > 0 \\ |q|(S_2 - S_1) & q < 0 \end{cases} \\ \frac{dS_2}{dt} &= H + d(S_p - S_2) + \begin{cases} q(S_1 - S_2) & q > 0 \\ |q|(S_3 - S_2) & q < 0 \end{cases} \\ \frac{dS_3}{dt} &= -H/2 + d(S_e - S_3) + \begin{cases} q(S_2 - S_3) & q > 0 \\ |q|(S_1 - S_3) & q < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (12.16)$$

$$q = k[\alpha\Delta T - \beta\Delta S], \quad (12.17)$$

kann der neue Matlab-Code geschrieben werden. Dieser wird im nächsten Abschnitt erklärt.

Matlab-Code

Die Übergabe der Startwerte und Konstanten, der Aufruf des Differentialgleichungslösers und das Plotten der Resultate sind identisch und werden deshalb nicht noch einmal gezeigt (siehe 12.4.1). Nur die Funktion wurde verändert. Je nachdem ob der Fluss positiv oder negativ ist, muss ein anderer Fall der Gleichungen berechnet werden. Dies wird mit einem `if`-Statement erreicht, welches in jedem Durchgang neu ausgewertet wird.

```

1  function dydt = odefun_3Box_1Flux(t, y, const)
2
3  % Initialisierung mit 0
4  dt1 = 0;
5  dt2 = 0;
6  dt3 = 0;
7  ds1 = 0;
8  ds2 = 0;
9  ds3 = 0;
10 % Definierung der Naturkonstanten
11 k = 1.5*10^(-6);
12 a = 1.5*10^(-4);
13 b = 8*10^(-4);
14 H = 0.0000001;
15 c = 0.0001;
16 d = 0.0001;
17 % Flussgleichung
18 q = k*(a*(y(2)-y(1)) - b*(y(5)-y(4)));
19 % Diffgleichungen mit if-Statement
20 if q > 0
21     dt1 = c*(const(1)-y(1)) + q*(y(3)-y(1));
22     dt2 = c*(const(2)-y(2)) + q*(y(1)-y(2));
23     dt3 = c*(const(3)-y(3)) + q*(y(2)-y(3));
24     ds1 = -H/2 + d*(const(4)-y(4)) + q*(y(6)-y(4));
25     ds2 = H + d*(const(5)-y(5)) + q*(y(4)-y(5));
26     ds3 = -H/2 + d*(const(6)-y(6)) + q*(y(5)-y(6));
27 elseif q < 0
28     dt1 = c*(const(1)-y(1)) + abs(q)*(y(2)-y(1));
29     dt2 = c*(const(2)-y(2)) + abs(q)*(y(3)-y(2));
30     dt3 = c*(const(3)-y(3)) + abs(q)*(y(1)-y(3));
31     ds1 = -H/2 + d*(const(4)-y(4)) + abs(q)*(y(5)-y(4));
32     ds2 = H + d*(const(5)-y(5)) + abs(q)*(y(6)-y(5));
33     ds3 = -H/2 + d*(const(6)-y(6)) + abs(q)*(y(4)-y(6));
34 end
35 dydt = [dt1; dt2; dt3; ds1; ds2; ds3];

```

Resultate

Nach mehrfacher Simulation scheint es so, dass dieses Modell tatsächlich meinen Vorstellungen entsprechende Resultate erzeugt. Für Werte, welche realen Werten entsprechen, reagiert die Simulation wie der richtige Golfstrom. Der Golfstrom fliest vom Süd- zum Nordpol, sinkt dort ab und fliest am Meeresgrund wieder bis zum Südpol, wo er aufsteigt und so den Kreislauf schliesst. Ein Plot der Resultate ist in Abbildung 12.8 dargestellt.

Wie die Abbildung zeigt, bleiben die Temperaturen ungefähr konstant. Dies liegt daran, dass die Temperaturstartwerte schon den Reservoirwerten angepasst wurden, was bedeutet, dass diese Anpassung schon geschehen ist. Beim Salinitätsplot ist klar der Effekt des virtuellen Salzflusses zu sehen, welcher dazu führt, dass die Salinität in der Äquatorregion leicht steigt und in Polnä-

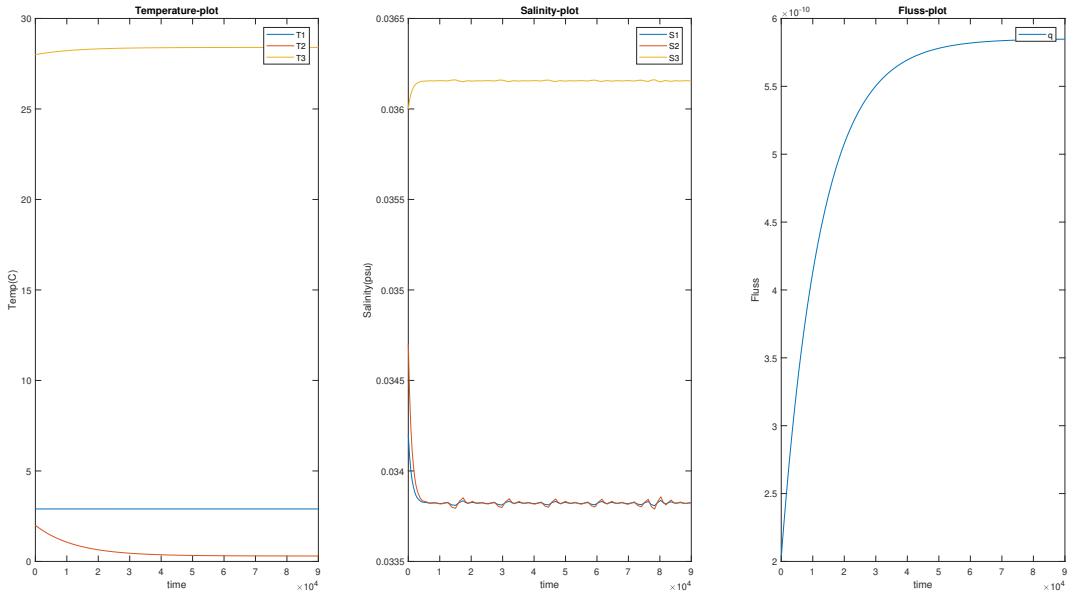


Abbildung 12.8: Resultat der Ein-Fluss Simulation ohne Klimawandel

he dementsprechend abnimmt. Das Resultat stimmt und der Golfstrom fliesst in die uns bekannte Richtung.

Spannend wird es, wenn die Reservoirvariablen so angepasst werden, dass sie eine Klimaerwärmung und deren Folgen darstellen. Wie bereits in Abschnitt 12.3.2 erläutert, muss dazu die Salinität am Nordpol und die Temperatur am Äquator erhöht werden. Dies sollte dazu führen, dass der Golfstrom schwächer wird, anhält oder gar seine Richtung ändert. Der Konstantenvektor, welcher die Temperaturen und Salinitäten der Reservoirs enthält wird also angepasst. Die Werte von S_1^* (Salinität Nordpol) und T_3^* (Temperatur Äquator) werden erhöht.

$$\text{const} = \begin{pmatrix} T_1^* \\ T_2^* \\ T_3^* \\ S_1^* \\ S_2^* \\ S_3^* \end{pmatrix}$$

Bei einer kleinen Veränderung wird der Strom nur schwächer, je grösser die Abweichungen jedoch sind, desto stärker wird der Effekt. Bis sich die Richtung des Stromes ändert. Das Resultat entspricht also den Erwartungen.

Die Simulationsresultate zeigen ähnliche Ergebnisse wie das Paper von Liu Wei [5]. Daraus lässt sich Schliessen, dass die Simulation den Golfstrom tatsächlich vereinfacht nachbilden kann.

12.5 Schlussfolgerung

Es ist erstaunlich, wie sich die Realität mittels eines auf den ersten Blick ziemlich simplen Modells nachstellen lässt. Trotzdem ist diese Simulation mit Vorsicht zu geniessen, da die Resultate

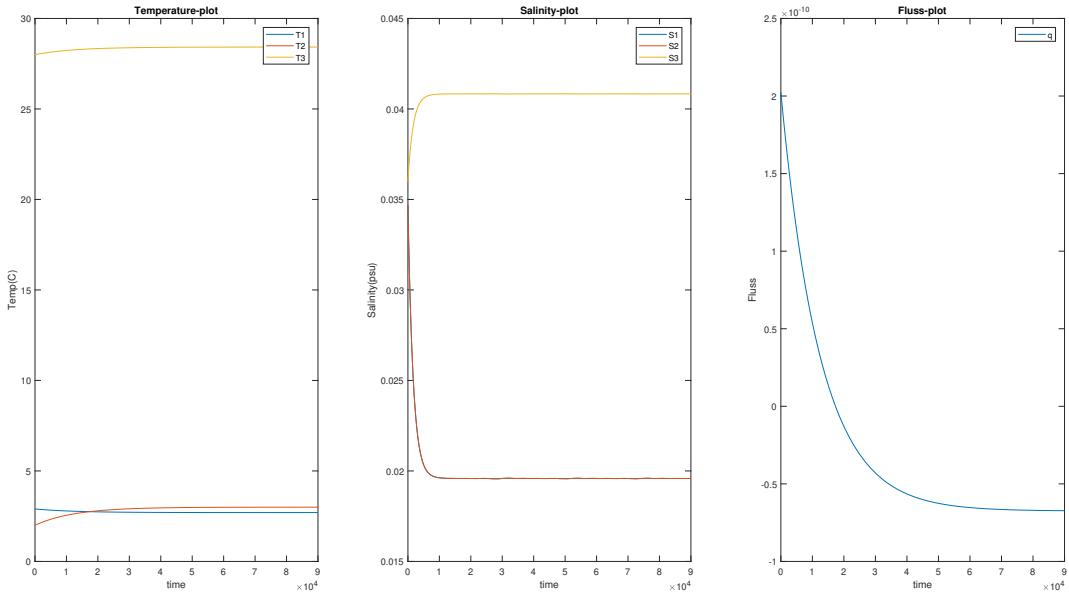


Abbildung 12.9: Resultat der Ein-Fluss Simulation mit Klimawandel

nur qualitativ zu interpretieren sind. Genaue Temperaturen und Salinitäten abzulesen ist in dieser Simulation nicht möglich. Die Resultate sind eher als Trend in eine gewisse Richtung zu verstehen. Trotzdem ist es erfreulich, wie gut diese Simulation den Golfstrom abbildet. Als weiterer Schritt könnten noch die virtuellen Salzflüsse aufgeteilt werden, um Nord- und Südpol unabhängig zu machen. Zusätzlich könnte die Simulation mit zuverlässigeren Daten gefüttert werden, damit genauere Resultate entstehen. Auch sind die Zeitkonstanten der Salinität und Temperatur willkürlich gewählt, was aber keinen Einfluss auf die Simulation hat. Bei der genaueren Einstellung dieser Werte liesse sich vielleicht sogar eine Aussage über den Zeitraum machen. Dazu müsste aber das restliche Modell fehlerfrei sein, da diese Fehler wiederum die Resultate verfälschen würden. Um tatsächlich Temperaturen und Salinitäten abzulesen, müsste man die Simulation massiv erweitern und grosse Datenmengen verwenden. Dies hätte jedoch den Rahmen dieses Projektes gesprengt. Die Forscher um Liu Wei [5] verwendeten die NCAR SSCM3 [1]. Simulation, welche dieser hier meilenweit überlegen ist. Diese Simulationssoftware ist in Module aufgeteilt. So lassen sich Wasser, Atmosphäre, Eis und Land separat oder in Kombination simulieren. Das hat den grossen Vorteil, dass man bei der Strömungssimulation nicht nur den Ozean, sondern auch seine Wechselwirkung mit Atmosphäre und Kontinenten berücksichtigen kann. Schlussendlich war das Verstehen und Programmieren dieser Modelle sehr lehrreich. Der Einblick in das mathematische Gebiet der Simulation und deren Resultate waren sehr spannend. Schön ist auch, dass sich tatsächlich eine Simulation erstellen liess, welche, wenn auch nur rudimentär, tatsächlich die Realität wiedergibt.

Der gesamte Simulationscode welcher im Rahmen dieses Seminars erstellt wurde, ist im Unterkapitel *thermohalina* des Gitrepository des Seminarbuches abgelegt [3].

Literatur

- [1] CESM, *Community Earth System Model*. 2018. URL: <http://www.cesm.ucar.edu/models/ccsm4.0/>.
- [2] *Der aktuelle CO₂- Gehalt in der Atmosphäre*. 2016. URL: <http://wetter-observer.de/der-co2-gehalt-in-der-atmosphaere/>.
- [3] *Github-repository, Mathematisches Seminar, Klimawandel*. 2018. URL: <https://github.com/AndreasFMueller/SeminarKlima>.
- [4] Hans Kaper und Hans Engler. *Mathematics and Climate*. Englisch. Society for Industrial und Applied Mathematics, 2013. ISBN: 978-1-611972-60-3.
- [5] Zhengyu Liu Wei Liu Shang-Ping Xie und Jiang Zhu. “Overlooked possibility of a collapsed Atlantic Meridional Overturning Circulation in warming climate”. In: *Science Advances* 3 (2017).

Kapitel 13

Eis

Silvio Marti

13.1 Einleitung

Diese Arbeit befasst sich damit, wie die Anwesenheit von Eis an den Polen modelliert werden kann. Immer wieder hört man, dass das Polareis rasant schmilzt und der Eisschwund ein bedrohliches Ausmass angenommen hat. Als Grund wird jeweils die globale Erwärmung genannt. Das scheint plausibel, denn wie man schon im Modell von Budyko in Abschnitt 5.2 sehen kann, gilt für eine höhere Gleichgewichtstemperatur eine tiefere Albedo a , was bedeutet, dass es weniger reflektierendes Eis geben muss. Es sei aber betont, dass die Funktion $a(T)$, wie sie in Abschnitt 5.2.1 gezeigt wurde, sich nur auf die beiden Punkte *Snowball earth* ($T = 250K$, $a = 0.7$) und *kein Eis* ($T = 280K$, $a = 0.3$) stützt und dazwischen mit einer willkürlich gewählten tanh Funktion modelliert wurde.

13.1.1 Eisschmelze am Nordpol

Um eine Idee über das Ausmass der Eisschmelze in den letzten 25 Jahren zu bekommen, dient Abbildung 13.1. Die Abbildung 13.2 zeigt die Veränderung der globalen Durchschnittstemperatur über einen ähnlichen Zeitraum. Obwohl es wenig Sinn macht, die Temperaturwerte absolut anzugeben, wollen wir das hier tun; wir sehen in Abschnitt 13.5 die Verwendung. Der Vergleichspunkt, um aus den differenziellen Werten [2] absolute zu bekommen, ist das Jahr 2017, in welchem die Temperatur 14.7°C [1] betragen haben soll.

13.1.2 Problem an der Eisschmelze

Warum ist den Polkappen eine so grosse Bedeutung für das Klima zuzuschreiben? Folgen für das Klima einer grossen Eisschmelze aufgrund einer Temperaturerhöhung sind unter Anderem:

- Wenn das Eis schmilzt, kommt irgendwann der darunterliegende Boden zum Vorschein. Das führt dazu, dass die Albedo an diesen Stellen sofort um mehr als die Hälfte sinkt, was bedeutet, dass global betrachtet die aufgenommene Strahlungsleistung zunimmt und die Erwärmung weiter vorangetrieben wird.

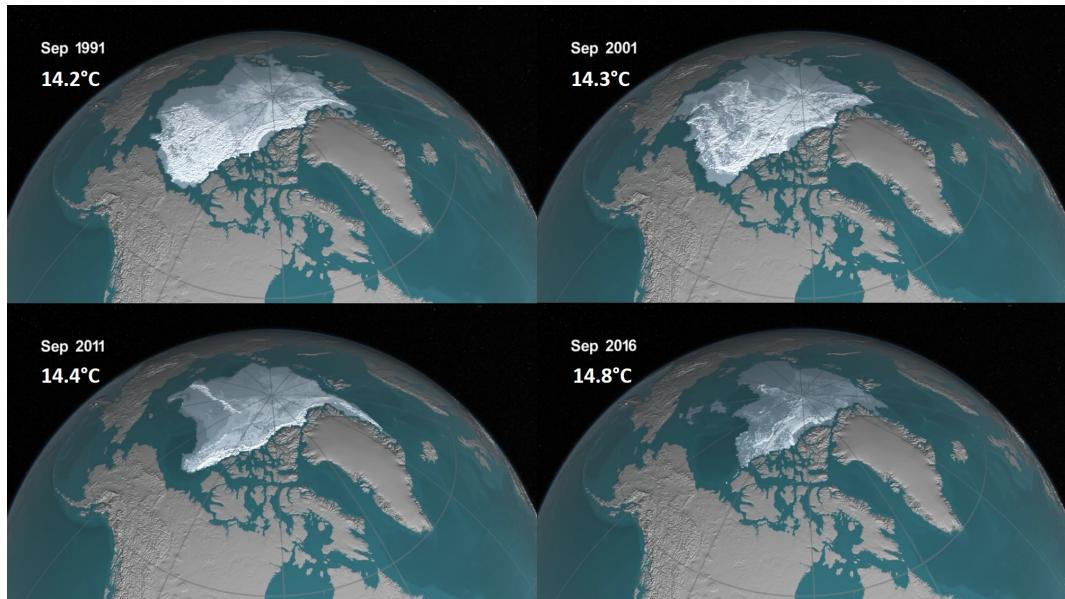


Abbildung 13.1: Ausschnitt aus einer Animation der NASA [3]. Dargestellt ist das Polareis (nur das Meereis, ganz Grönland ist z.B. auch vereist) jeweils im September des angegebenen Jahres. Je weißer das Eis, desto älter ist es (ganz weiß entspricht vier Jahre und älter). Dazu ist auch die globale Jahresschnittstemperatur eingetragen.

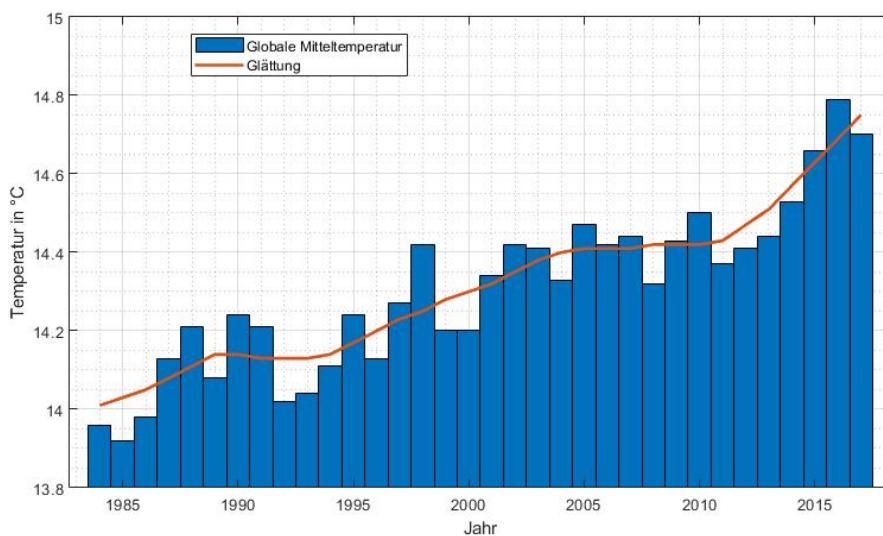


Abbildung 13.2: Globale Jahresschnittstemperatur 1984 bis 2017

- Taut Permafrost auf, gelangen grosse Mengen des Klimagases Methan, welches zuvor im Permafrost eingeschlossen war, in die Atmosphäre, was ebenfalls zu einer zusätzlichen Erwärmung führt.

Veränderungen der Eismenge verstärken sich also von selbst. Die Eisschmelze ist somit ein Prozess mit einer Mitkopplung mit globalen Auswirkungen.

Entscheidend für die genannten Prozesse ist nicht die Dicke des Eises, sondern nur die Fläche. Wie in Abbildung 13.1 zu erkennen ist, befindet sich das Eis ungefähr innerhalb eines Kreises um die Pole.

Definition 13.1. *Der Begriff ice line oder Eislinie meint denjenigen Breitengrad, wo die Grenze der Vereisung ist. Alle darüber liegenden Breitengrade sind als vereist zu betrachten, die darunter nicht.*

13.2 Ziel

Offensichtlich existiert ein Zusammenhang zwischen der globalen Temperatur und der vorhandenen Eisfläche bzw. der Eislinie. Das Ziel ist, einen mathematischen Zusammenhang zu finden, um Aussagen über zukünftige Entwicklungen zu machen.

13.3 Von Budyko zur zonalen Energiebilanz

Budykos Modell konnte die Eisschmelze an den Polen nicht darstellen, bzw. aufgrund der nur geschätzten $a(T)$ Funktion gemäss Abschnitt 5.2.1 keine präzise Aussage über die vorhandene Eisfläche machen. Das Problem besteht darin, dass in diesem Modell einige globale Annahmen getroffen wurden, die nachfolgend identifiziert und manche verbessert werden.

- Gleichmässige Einstrahlung. In Budykos Modell trifft das Sonnenlicht auf der gesamten Erdoberfläche mit derselben Intensität auf. Diese Annahme entspricht offensichtlich nicht der Realität, weil das Sonnenlicht nicht überall senkrecht auftrifft. Die ortsabhängige Intensität der Sonneneinstrahlung muss deshalb berücksichtigt werden.
- Gleichmässige Eisverteilung. Die grossen Eisflächen konzentrieren sich nur auf die Polargebiete, entsprechend wird nur dort Sonnenlicht reflektiert. Weil die Einstrahlung auch nicht gleichmäßig ist, wird wichtig, welche Teile der Erdoberfläche von Eis bedeckt sind. Die Albedo soll deshalb abhängig vom Breitengrad und der Eislinie sein.
- Gleichmässige Land- und Wasserverteilung. Budykos Modell geht davon aus, dass die Landmassen auf der Erdoberfläche gleich verteilt sind. Das spielt bei der Vereisung eine Rolle, weil sich auf dem Land schneller Eis bildet als auf dem Meer. Besonders der Unterschied von der Nord- und Südhalbkugel ist von Bedeutung.
- Gleichmässige Temperaturverteilung. Auf der Erde sind grosse regionale Temperaturunterschiede auszumachen. Weil die abgestrahlte Leistung proportional zu T^4 ist, wird nicht überall gleich viel Leistung abgestrahlt. Diese Tatsache werden wir hier aber nicht berücksichtigen.

Wir möchten nun Budykos Modell in ein realistischeres überführen, in dem wir die Erde in Zonen (Breitengrade) aufteilen und obige Überlegungen zonenabhängig durchführen.

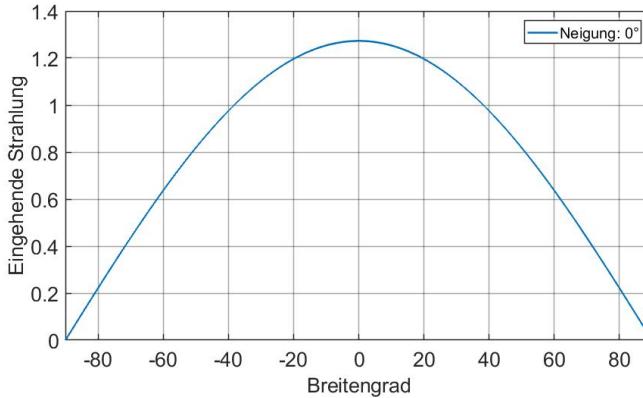


Abbildung 13.3: Energieverteilung abhängig vom Breitengrad ϑ

13.3.1 Einstrahlung abhängig vom Breitengrad

Die eintreffende Energie pro Fläche ist, wie in Abbildung 1.2 ersichtlich, abhängig vom Einstrahlungswinkel, der dem Breitengrad ϑ entgegengesetzt ist. Die Energie pro Fläche ist somit proportional zu $\cos(\vartheta)$. Um der Tatsache Rechnung zu tragen, dass die Gegenden um den Äquator mehr Energie als die polaren Regionen erhalten, führen wir die breitengradabhängige Energieverteilungsfunktion

$$s(\vartheta) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \cos(\vartheta) d\phi, \quad \vartheta \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi) \quad (13.1)$$

ein. Der Faktor $\frac{2}{\pi^2}$ wird für die Normalisierungsbedingung in Abschnitt 13.3.3 verwendet. Wird wie hier nur der Breitengrad berücksichtigt, ergibt sich eine Energieverteilung gemäss Abbildung 13.3.

13.3.2 Einstrahlung in Abhängigkeit vom Neigungswinkel

Weil die Erdachse einen Neigungswinkel hat, geht die Sonne im Sommer im hohen Norden nicht unter, was bedeutet, dass auch die Pole Einstrahlung erhalten. Abbildung 13.3 kann somit nicht stimmen, die Neigung η muss berücksichtigt werden. Um dem Rechnung zu tragen, führen wir den Index η ein und schreiben ab jetzt $s_\eta(\vartheta)$. Die Energieverteilungsfunktion ist jetzt gegeben durch ein elliptisches Integral

$$s_\eta(\vartheta) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - (\cos \vartheta \sin \eta \cos \phi - \sin \vartheta \cos \eta)^2} d\phi, \quad (13.2)$$

gemäss der Gleichung (5.9). Es kann gezeigt werden, dass die Formel (13.1) der Spezialfall von (13.2) für eine Neigung von 0° ist. Zurzeit beträgt die Neigung $\eta = 23.4^\circ$, damit verändert sich die Energieverteilung, wie in Abbildung 13.4 zu sehen ist. Wichtig zu sehen ist hier, dass die Energie an den Polen eben nicht 0 ist, der Einfluss der Neigung ist somit beträchtlich.

Die saisonalen Schwankungen der Eislinie betragen über ein Dutzend Breitengrade. Aufgrund der Überlegungen über die Neigung wird jetzt auch klar, für welche Jahreszeit wir die Eislinie berechnen wollen. Im Winter, wenn keine Einstrahlung am Nordpol statt findet, wird auch keine Energie vom Eis reflektiert, dessen Ausbreitung verliert also im Winter an Bedeutung. Relevant für unser

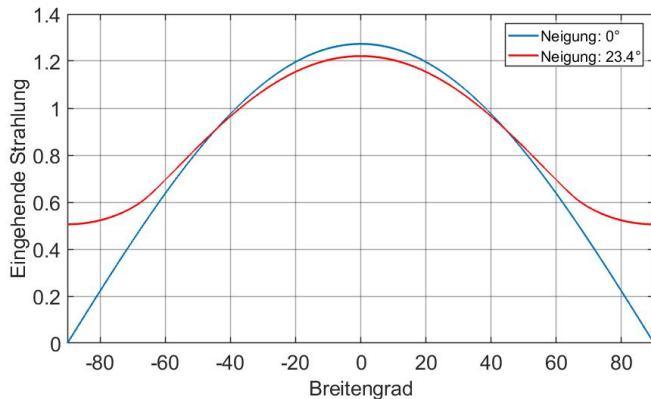


Abbildung 13.4: Energieverteilung abhängig vom Breitengrad ϑ und dem Neigungswinkel η

Modell ist deshalb nur das Eis im Sommer. Weil es zu Beginn jeweils noch viel Eis vom Winter übrig hat, legen wir uns auf den Monat September fest, wo die Ausbreitung ihr Minimum erreicht. Sämtliche Resultate werden sich also auf den Spätsommer beziehen und geben die minimale jahreszeitenabhängige Vereisung an.

13.3.3 Normalisierungsbedingung

Bei den verwendeten Formeln muss sichergestellt werden, dass die eingestrahlte Leistung immer dieselbe ist. Sie darf nur verteilt, aber nicht verändert werden. Dies lässt sich sicherstellen, indem $s_\eta(\vartheta)$ die Gleichung

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} s_\eta(\vartheta) \cos \vartheta d\vartheta = 1 \quad (13.3)$$

erfüllen muss. Weil die Fläche einer normierten positiven Cosinushalbwelle 2 ist, wird dies hier mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ auf 1 korrigiert.

13.3.4 Approximation der Energieverteilung

Für die breitengradabhängige Einstrahlung erweist es sich als mühsam, die Formel (13.2) zu benutzen, weil für jeden Breitengrad das Integral aufgelöst werden muss. Die Funktion soll deshalb für eine fixe Neigung von $\eta = 23.4^\circ$ approximiert werden. Dazu wird eine Fourier-Analyse gemäß Kapitel 6 durchgeführt. Weil die Funktion symmetrisch ist, entfallen alle Sinus- sowie die ungeraden Cosinusterme. Es scheint gemäß Abbildung 13.4 besonders die Frequenz $2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ stark vertreten zu sein, höhere Frequenzen sind aufgrund des flachen Kurvenverlaufs kaum zu erwarten. Wir versuchen deshalb, (13.2) mit

$$\tilde{s}(\vartheta) = s_0 + s_1 \cos(2\vartheta) \quad (13.4)$$

zu approximieren. Selbstverständlich muss auch die Approximation die Normalisierungsbedingung (13.3) erfüllen, was der Fall ist, wenn wir $s_0 = 0.881$ und $s_1 = 0.358$ wählen. Wie in Abbildung 13.5 zu sehen ist, deckt sich die Approximation bereits so gut mit der Originalfunktion, dass auf höherfrequente Cosinusterme verzichtet wird.

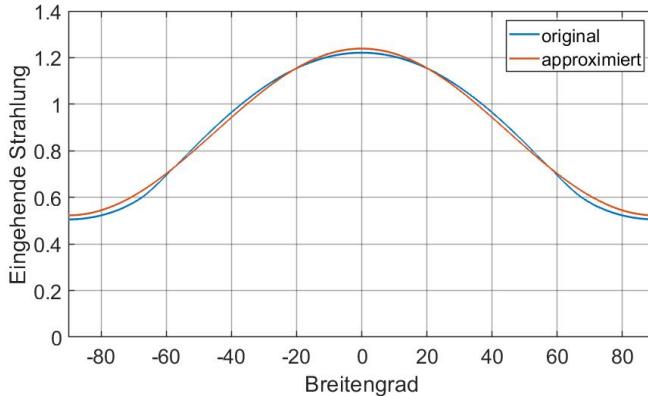


Abbildung 13.5: Vergleich der Energieverteilungsfunktion gemäss (13.2) mit der Approximation (13.4)

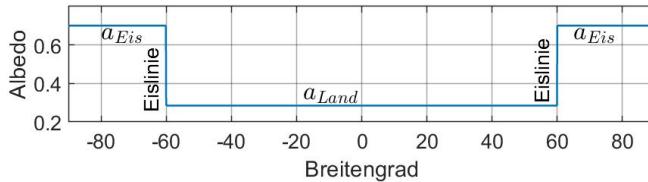


Abbildung 13.6: Veranschaulichung der Gleichung (13.5) für eine Eislinie bei 60°.

13.3.5 Absorptionsverteilung

In den vereisten Breitengraden wird mehr Sonnenlicht reflektiert, die Albedo ist deshalb dort grösser als bei einer nicht vereisten Oberfläche. Gemäss der Definition in Abschnitt 13.1 ergibt sich für die Albedo

$$a(\vartheta, \vartheta_{iceline}) = \begin{cases} a_{Eis} & -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq -\vartheta_{iceline} \\ a_{Land} & -\vartheta_{iceline} \leq \vartheta \leq \vartheta_{iceline} \\ a_{Eis} & \vartheta_{iceline} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad (13.5)$$

wobei wir die Parameter $a_{Eis} = 0.7$ und $a_{Land} = 0.285$ wählen. Diese Funktion ist in Abbildung 13.6 dargestellt.

13.4 Energiegleichung

Nun haben wir alle Komponenten zusammen, um sie wieder in Budykos Modell einzufügen. Mit Berücksichtigung der Zonen ergibt sich die Gleichung

$$E_{in}(\vartheta, \vartheta_{iceline}) = (1 - a(\vartheta, \vartheta_{iceline})) \cdot \tilde{s}_b(\vartheta) \cdot Q \quad (13.6)$$

für die eingehende Strahlung pro Breitengrad, wobei $Q = \frac{1}{4}S_0$. Damit die gesamte einfallende Energie betrachtet werden kann, muss die Gleichung (13.6) über alle Breitengrade integriert werden.

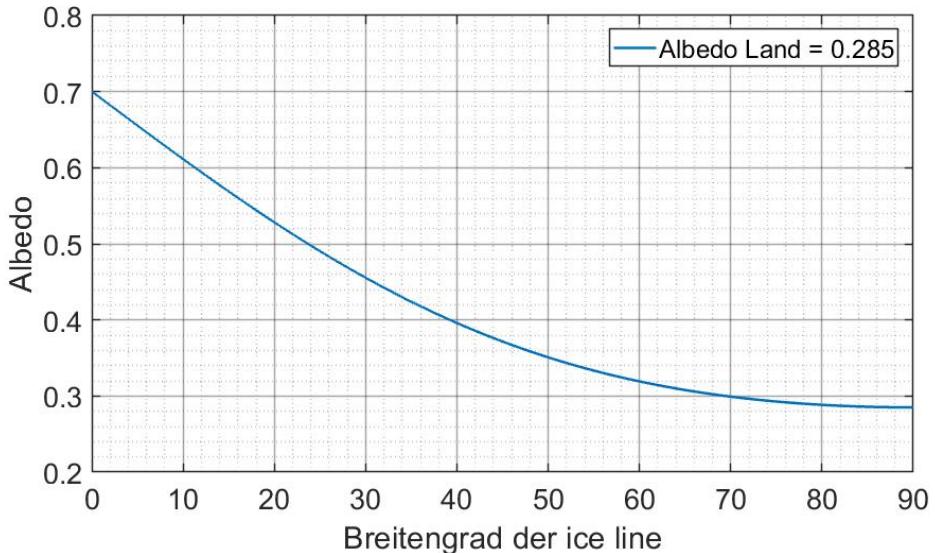


Abbildung 13.7: Globale Albedo abhängig von der Eislinie. Ist die Erde zugefroren nimmt die globale Albedo den Wert des Eises an, existiert kein Eis, resultiert der Wert des Landes. Reduziert sich die Eismenge, fällt die Albedo monoton.

Dafür wird die Normalisierungsbedingung (13.3) verwendet. Wird alles eingesetzt, resultiert

$$E_{\text{in}}(\vartheta_{\text{iceline}}) = \frac{Q}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - a(\vartheta, \vartheta_{\text{iceline}})) \cdot \tilde{s}(\vartheta) \cdot \cos \vartheta d\vartheta, \quad (13.7)$$

wobei E_{in} nur noch abhängig von der Eislinie ist, was das Ziel war. Um die Gleichgewichtslösungen zu erhalten, setzen wir E_{in} mit E_{out} gleich, wie in Abschnitt 5.2.1, und bekommen

$$E_{\text{in}}(\vartheta_{\text{iceline}}) = \varepsilon \sigma T^4, \quad (13.8)$$

wobei T in K angegeben ist.

13.5 Resultate

13.5.1 Albedo abhängig von der Eislinie

Die Gleichung der Normalisierungsbedingung (13.3) kann auch dazu verwendet werden, die globale Albedo abhängig von der Eislinie

$$a(\vartheta_{\text{iceline}}) = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a(\vartheta, \vartheta_{\text{iceline}}) \cdot \tilde{s}_\eta(\vartheta) \cdot \cos \vartheta d\vartheta \quad (13.9)$$

zu berechnen. Wie schon im Modell von Budyko angenommen, ist in Abbildung 13.7 klar ersichtlich, dass die Anwesenheit von Eis in den Polregionen nur wenig Einfluss auf die globale Albedo hat.

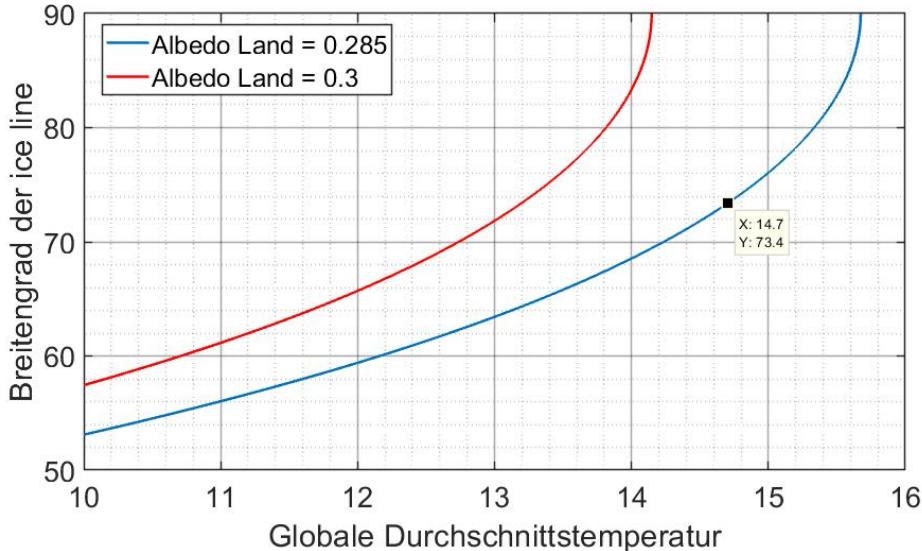


Abbildung 13.8: Abhängigkeit der Eislinie von der Temperatur für zwei verschiedene Werte der Land Albedo. Der Messpunkt ist bei der Jahrestemperatur von 2017 eingetragen.

13.5.2 Eislinie abhängig von der Temperatur

Wird die Gleichgewichtsgleichung (13.8) nach der Temperatur T aufgelöst, kann die Eislinie in Abhängigkeit der Temperatur dargestellt werden. Abbildung 13.8 zeigt, wie sich die Eislinie bei einer globalen Erwärmung verhält. Je weniger Eis vorhanden ist, desto empfindlicher reagiert die Eislinie auf eine Temperaturänderung, bis das Eis fast schlagartig verschwindet.

Hier erklärt sich auch, warum für a_{Land} der Wert 0.285 und nicht wie bei Budyko 0.3 verwendet wurde: Das Modell würde uns seit 20 Jahren kein Eis mehr zugestehen, entsprechend musste der Wert so angepasst werden, dass es realistischer wird. Erwärmt sich die Erde weiter wie bis anhin, könnte das Polareis noch in diesem Jahrhundert im Sommer vollständig verschwinden.

13.5.3 Eisfläche abhängig von der Temperatur

Ist die Eislinie bekannt, kann daraus mit

$$A_{\text{Eis}} = 2 \cdot 2\pi R^2 (1 - \sin \vartheta) \quad (13.10)$$

die Eisfläche am Nord- und Südpol berechnet werden, wobei R dem Polradius von 6356km entspricht. Etwas unerwartet zeigt sich in Abbildung 13.9, dass dieser Zusammenhang beinahe linear ist. Bei einer Erwärmung ausgehend vom Jahr 2017 um weitere 0.5°C werden 10 Mio. km^2 Eis schmelzen, was rund $\frac{1}{50}$ der Erdoberfläche entspricht. Diese Zahlen stimmen aber so nicht wirklich, weil innerhalb der Eislinie doch nicht alles vereist ist. Sie zeigen aber die drastischen Auswirkungen einer geringen Temperaturerhöhung.

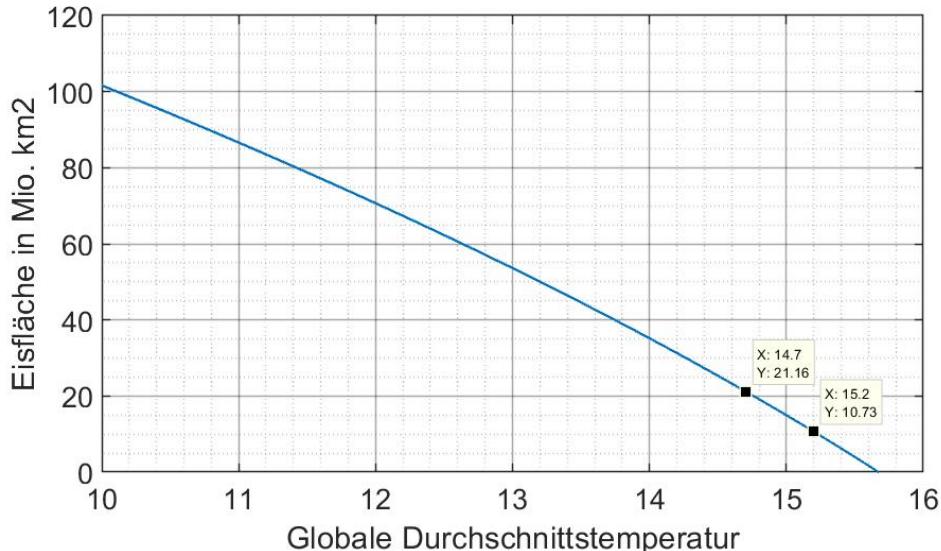


Abbildung 13.9: Zusammenhang der globalen Eisfläche und der Durchschnittstemperatur. Die Datenpunkte sind für die Temperatur vom Jahr 2017 und für eine zusätzliche Erwärmung von 0.5° .

13.5.4 Vergleich mit der Realität

Wie gut stimmt das Modell mit der Realität überein? Wir wollen dafür wieder die Bilder der NASA anschauen und die Daten des Modells einfügen. Dies wurde in Abbildung 13.10 gemacht. Besonders in der Region Alaska und Kanada ist die Übereinstimmung gut, an anderen Orten, wie über Skandinavien, deutlich schlechter, dort hat der Golfstrom einen grossen Einfluss. Zu beachten ist, dass ganz Grönland auch vereist ist. Das Modell kann also die Eisschmelze der letzten Jahre beschreiben, es scheint somit auch für zukünftige Temperaturen brauchbare Prognosen zu liefern.

13.6 Modellfehler

Obwohl das Modell plausible Resultate liefert, wollen wir hier die Fehler und getroffenen Annahmen diskutieren. Folgende Punkte sind dabei besonders wichtig:

- Kein Wärmefluss. Der gesamte Energieaustausch zwischen den Breitengraden in Form von Wärmeleitung und besonders von Konvektion durch die Meeresströmungen (siehe Abbildung 4.1), wurde unterbunden. So führt beispielsweise der Golfstrom dazu, dass es in Skandinavien weniger Permafrost und oberhalb weniger Meereis gibt, als in vergleichbaren Regionen.
- Symmetrie (ungleiche Land- und somit Eisverteilung zwischen der Nord- und Südhalbkugel). Landflächen vereisen einfacher bis in tiefe Breitengrade als Meer, weil die fehlende Strömung zu weniger Wärmetransport an die Oberfläche führt. In der Folge bildet sich auf dem Land bereits ab etwa dem 55. Breitengrad Permafrost. Auf der Nordhalbkugel hat es in den Breitengraden von 55° bis 70° bedeutend mehr Landfläche als auf der Südhalbkugel, deshalb darf dort mit mehr Eis gerechnet werden. So sind grosse Gebiete wie Teile von Kanada, Alaska,

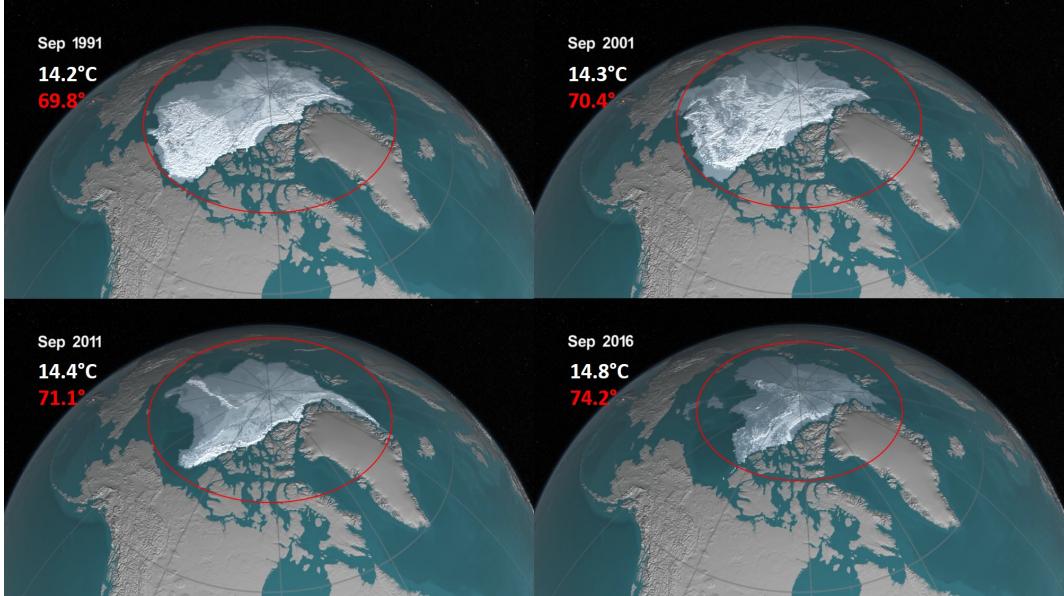


Abbildung 13.10: Siehe Abb. 13.1. Vergleich der Eisflächen mit der für die angegebene Durchschnittstemperatur berechneten Eislinie.

Sibirien und Skandinavien auch im Sommer gefroren, wo es im Vergleich zur Antarktis kein Eis gibt.

- Die abgestrahlte Leistung ist auch temperatur- und somit breitengradabhängig. Indem wir Zonen mit und ohne Eis und eine globale Durchschnittstemperatur über 0°C haben, lassen wir implizit unterschiedliche Oberflächentemperaturen zu. Weil die abgestrahlte Leistung proportional zu T^4 ist, wird an den Polen bestimmt nicht gleich viel Energie abgestrahlt, wie am Äquator.
- Kein Wärmespeichereffekt. Dies führt dazu, dass keine Jahreszeiten abgebildet werden können; die Eislinie schwankt über das Jahr um über ein Dutzend Breitgrade. Das Eis mittelt Temperaturschwankungen auch über mehrere Jahre aus.
- Approximationen. Zu guter Letzt sei erwähnt, dass die Energieverteilung mit der Gleichung (13.4) approximiert wurde. Der Einfluss auf das Ergebnis dürfte aufgrund der guten Übereinstimmung mit (13.2) aber gering ausfallen.

13.7 Schlussfolgerung

- Es kann ein einfaches Modell berechnet werden, welches einen Zusammenhang zwischen der Eislinie und der globale Durchschnittstemperatur herstellt.
- Das Modell kann die Veränderungen der Eislinie der letzten Jahre aufgrund der Temperaturerhöhung plausible wiedergeben.

- Die Eislinie reagiert sehr empfindlich auf eine Temperaturänderung. Bei der Eisfläche sieht es weniger schlimm aus.

Mit Sicherheit kann gesagt werden, dass das Eis an den Polen zukünftig noch mehr zurückgehen wird, wenn sich die Erde weiterhin erwärmt. Es ist denkbar, dass wir einmal einen im Sommer eisfreien Nordpol noch erleben könnten. Die gute Nachricht dabei: Das Modell macht keine Aussage darüber, dass der Prozess der Eisbildung nicht reversibel wäre. Sollte sich die Erde also wieder abkühlen, wird es wieder mehr Eis geben, andernfalls ist aber mit einem massiven Anstieg des Meeresspiegels und der damit verbundenen Flutung von Küstenstädten und ganzen Inseln zu rechnen.

Literatur

- [1] *2017 extends exceptionally warm period, first complete datasets show.* 2018. URL: <https://www.ecmwf.int/en/about/media-centre/news/2018/2017-extends-exceptionally-warm-period-first-complete-datasets-show>.
- [2] *NASA: Global Temperature.* 2018. URL: <https://climate.nasa.gov/vital-signs/global-temperature/>.
- [3] *Weekly Animation of Arctic Sea Ice Age with Graph of Ice Age By Area: 1984 - 2016.* 2016. URL: <https://svs.gsfc.nasa.gov/4510>.

Kapitel 14

Numerische Lösung einer verzögerten Differentialgleichung

Raphael Unterer

14.1 Einleitung

Verzögerte Differentialgleichungen sind gewöhnliche Differentialgleichungen, bei welchen die Ableitung von früheren Funktionswerten abhängt. Ein gutes Beispiel dafür ist die Populationsentwicklung in der Biologie. Für das Populationswachstum bei Tieren ist entscheidend wie viele junge Tiere geschlechtsreif werden. Somit hängt das Wachstum von einem früheren Wachstum ab, da es einige Zeit dauert bis die Jungen geschlechtsreif sind. Es gibt diverse weitere Anwendungen für verzögerte Differentialgleichungen in Physik, Chemie und Biologie (vgl. [1]).

Hier wollen wir vor allem die verzögerte Differentialgleichung zur Modellierung des El Niño Phänomens (vgl. 7.4) betrachten. Wir lernen zuerst einige grundlegende Methoden kennen, um eine verzögerte Differentialgleichung analytisch zu untersuchen. Danach wird gezeigt, wie eine numerische Berechnung erfolgen kann.

14.2 Grundlagen verzögerte Differentialgleichungen

14.2.1 Definitionen

Definition 14.1. Eine allgemeine verzögerte Differentialgleichung 1. Ordnung sieht folgendermaßen aus:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_n)) \quad (14.1)$$

Dabei ist f eine beliebige Funktion. Die Verzögerungen τ_1, \dots, τ_n sind gegeben und nach der Grösse geordnet, also $0 < \tau_1 < \dots < \tau_n$.

Verzögerte Differentialgleichungen werden als DDE (engl. "Delayed Differential Equation") abgekürzt.

Im Unterschied zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist das Anfangswertproblem nicht mehr eindimensional, d.h. es genügt nicht mehr den Anfangszustand zu kennen. Alle Werte von $-\tau_n$ bis 0 müssen gegeben sein. Es braucht nicht nur einen einzelnen Anfangswertvektor, sondern eine ganze Funktion von Anfangswertvektoren im Intervall $[-\tau_n, 0]$.

14.2.2 Analytische Lösungsverfahren an einem Beispiel

Um die analytischen Lösungsverfahren zu verstehen, werden diese zunächst an einem einfachen Beispiel erläutert. In den folgenden Betrachtungen analysieren wir die DDE:

$$\dot{y}(t) = ky(t - \tau). \quad (14.2)$$

Schrittweises Lösen

Beim schrittweisen Lösen wird die DDE immer in Schritten von einem τ gelöst. Wir nehmen an, dass y im Bereich von $-\tau$ bis 0 immer konstant bleibt. Somit haben wir die folgende Funktion der Anfangswerte:

$$y(t) = 1 \quad \text{wenn} \quad -1 \leq t < 0. \quad (14.3)$$

Daraus folgt, dass im Bereich von $0 \leq t < \tau$ die Ableitung

$$\dot{y}(t) = k \quad (14.4)$$

wird. Durch Integrieren von (14.4) erhalten wir

$$y(t) = 1 + kt \quad (14.5)$$

für den Bereich $0 \leq t < \tau$. Dieses $y(t)$ kann als Anfangswert für den nächsten Schritt genommen werden. Wir erhalten für den zweiten Schritt $\tau \leq t < 2\tau$

$$\dot{y}(t) = k(1 + k(t - \tau)) = k + k^2(t - \tau). \quad (14.6)$$

Es ist offensichtlich, dass diese Methode nur für kurze Zeiten, einfache Anfangswerte und einfache Formeln funktioniert. Bereits (14.6) ist nicht mehr ganz einfach zu integrieren. Für längere Zeiten werden die Integrale immer komplexer.

In Abbildung 14.1 sieht man die Lösung für das Beispiel (14.2). Die lineare Funktion (14.5) ist als erster Schritt gut sichtbar. Ab Schritt 2 ist die Lösung nicht mehr eine lineare Funktion, sondern eine komplexere Polynomfunktion.

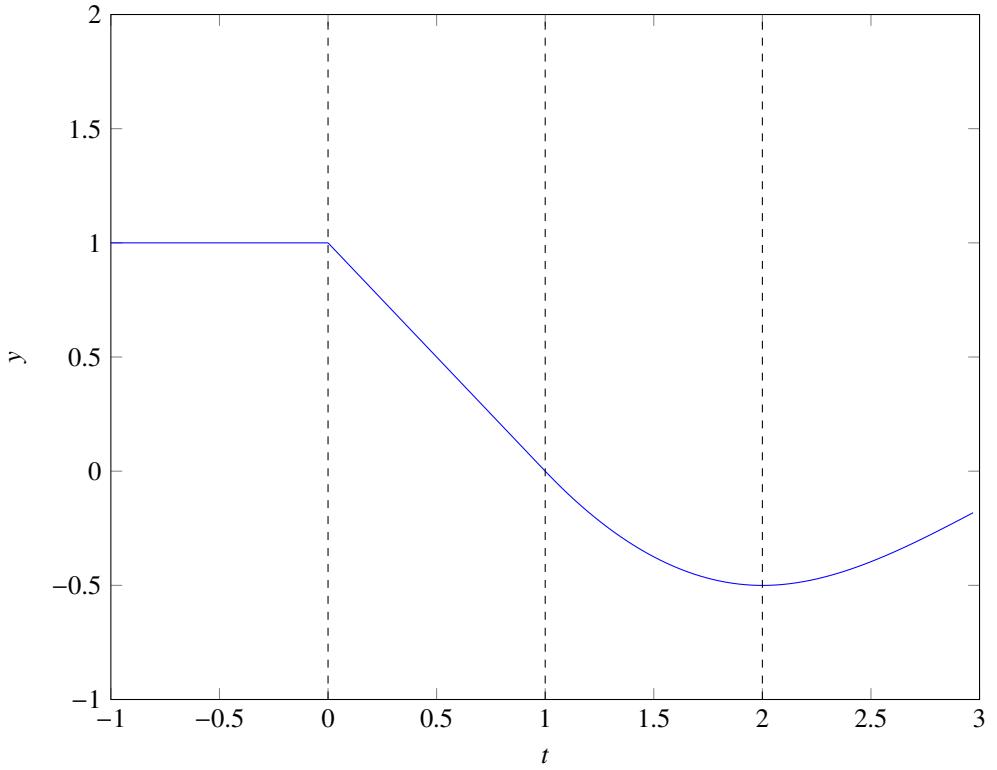
Charakteristische Gleichung

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen können Lösungen mit Hilfe des charakteristischen Polynoms gefunden werden. Bei DDEs wird das Polynom zu einer Gleichung. Wir betrachten wiederum die Gleichung (14.2) und verwenden als Lösungsansatz

$$y(t) = ce^{\lambda t}. \quad (14.7)$$

Dieser klassische Ansatz eignet sich (fast) immer, da die Exponentialfunktion beim Differenzieren erhalten bleibt. (14.7) eingesetzt in (14.2) ergibt

$$\lambda ce^{\lambda t} = kce^{\lambda(t-\tau)}. \quad (14.8)$$

Abbildung 14.1: Beispiel mit $k = -1$ und $\tau = 1$

Diese Gleichung kann durch $ce^{\lambda t}$ gekürzt werden zu

$$\lambda - ke^{-\lambda \tau} = 0. \quad (14.9)$$

Damit können nun verschiedene Werte für die Konstante k berechnet werden, je nachdem wie die Lösung λ aussehen soll. Wir nehmen an, dass λ komplex ist und setzen $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ in die Gleichung (14.9) ein.

$$\lambda_r + i\lambda_i - ke^{-(\lambda_r + i\lambda_i)\tau} = 0 \quad (14.10)$$

Real- und Imaginärteil dieser Gleichung können wir mit Hilfe der eulerschen Formel $e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y)$ trennen und erhalten

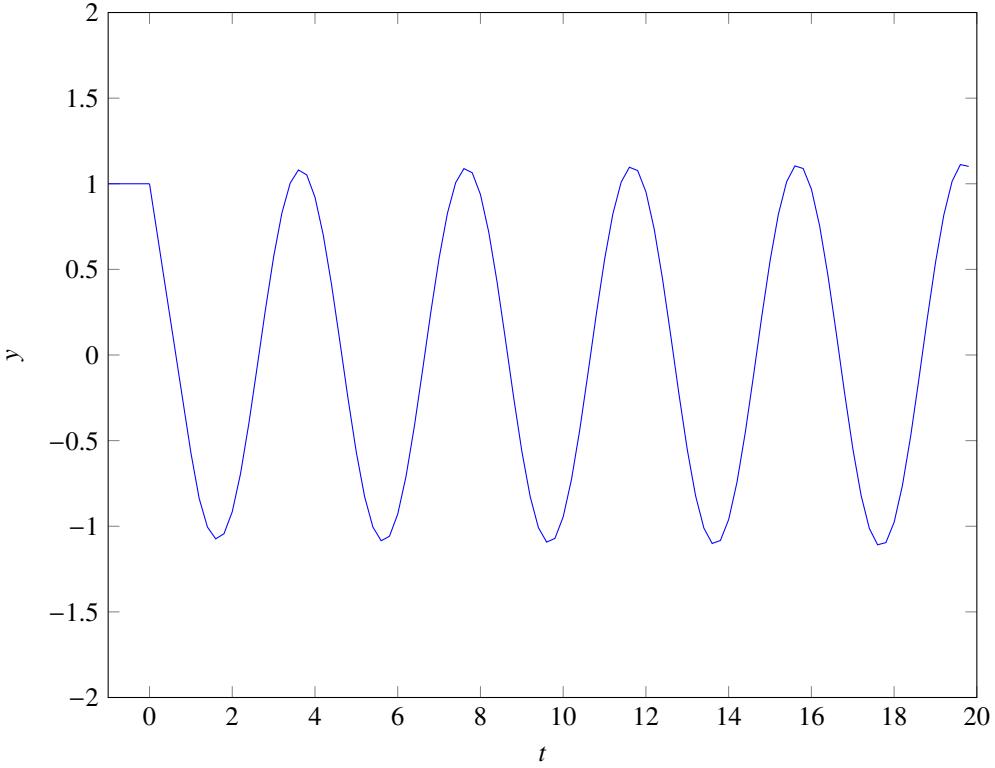
$$\lambda_r - ke^{-\lambda_r \tau} \cos(\lambda_i \tau) = 0 \quad (14.11)$$

$$\lambda_i + ke^{-\lambda_r \tau} \sin(\lambda_i \tau) = 0. \quad (14.12)$$

Nimmt man den zweiten Term auf die rechte Seite und dividiert die beiden Gleichungen, erhält man

$$-\frac{\lambda_r}{\lambda_i} = \cot(\lambda_i \tau). \quad (14.13)$$

Damit lassen sich nun beliebig viele Kombinationen von λ und k generieren. Als Beispiel wollen wir eine periodische Schwingung mit gleichbleibender Amplitude erreichen. Daraus ergibt sich ein

Abbildung 14.2: Beispiel mit $k = -\frac{\pi}{2}$ und $\tau = 1$

$\lambda_r = 0$. Die Verzögerung ist gegeben als $\tau = 1$. Eingesetzt in (14.13) erhalten wir:

$$\cot(\lambda_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = (2n - 1)\frac{\pi}{2}. \quad (14.14)$$

Mit $n \in \mathbb{N}$ können wir z.B. die kleinste Frequenz $n = 1$ einsetzen und erhalten $\lambda_i = \frac{\pi}{2}$. Damit können wir aus (14.12) die Konstante k bestimmen.

$$\frac{\pi}{2} + k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{\pi}{2} \quad (14.15)$$

Zur Überprüfung wurde mit diesen Werten die Gleichung numerisch berechnet (vgl. Abbildung 14.2). Man sieht dort gut die gleichbleibende Amplitude und die Periodendauer von $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$.

14.3 El Niño DDE

14.3.1 Gleichung

Zur Modellierung des El Niño Effektes wurde im Kapitel 7.4 die folgende DDE gefunden

$$\dot{T}(t) = -cT(t) + aT(t - \frac{1}{2}\tau_K) - bT(t - (\frac{1}{2}\tau_R + \tau_K)). \quad (14.16)$$

Mit dieser DDE wird die Änderung der Meerestemperaturanomalie T vor der Küste Südamerikas beschrieben. Die Konstanten c, a, b müssen so bestimmt werden, dass die DDE ein möglichst gutes Resultat ergibt. Erst wenn diese Konstanten grob bestimmt sind, kann eine sinnvolle numerische Simulation gestartet werden. Hilfreich sind vor allem ungefähre Verhältnisse zwischen den Konstanten, so dass man zumindest einen Anhaltspunkt für die Simulation hat. Die Verzögerungen τ_K und τ_R sind ungefähr bekannt aus physikalischen Untersuchungen der Rossby- und Kelvinwellen (vgl. [2, Kaper]).

$$\tau_K \approx \frac{1}{6} \text{yr} \text{ und } \tau_R \approx 1 \text{yr} \quad (14.17)$$

14.3.2 Charakteristische Gleichung

Die charakteristische Gleichung für die DDE (14.16) scheint schwierig zu sein. Aus diesem Grund vereinfachen wir die DDE so weit, bis wir einen Ansatz versuchen können. Weil $\tau_K \ll \tau_R$ setzen wir $\tau_K = 0$ und erhalten

$$\dot{T}(t) = -cT(t) + aT(t) - bT(t - (\frac{1}{2}\tau_R)). \quad (14.18)$$

Nun stellen wir eine einfache DDE auf, mit $\alpha = a - c$, $\beta = b$ und $\tau = \frac{1}{2}\tau_R$.

$$\dot{T}(t) = \alpha T(t) - \beta T(t - \tau) \quad (14.19)$$

In diese DDE setzen wir nun den bekannten Ansatz $e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ ein und erhalten

$$\lambda e^{\lambda t} = \alpha e^{\lambda t} - \beta e^{\lambda(t-\tau)} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \alpha - \beta e^{-\lambda\tau}. \quad (14.20)$$

Es sind beliebig viele Lösungen für λ und die Konstanten möglich. Wir suchen nun die Lösung, welche dem El Niño Phänomen entspricht. Da der El Niño in grober Näherung ohne Dämpfung oszilliert (vgl. Abbildung 14.3), betrachten wir nur die Lösungen bei denen λ rein imaginär wird. Wir setzen also $\lambda = i\omega$ und nach der Formel von Euler wird die Gleichung (14.20) umgeschrieben zu

$$i\omega = \alpha - \beta(\cos(-\omega\tau) + i \sin(-\omega\tau)). \quad (14.21)$$

Es ergeben sich daraus zwei Gleichungen für Imaginär- und Realteil

$$\alpha - \beta \cos(\omega\tau) = 0 \quad \text{und} \quad \beta \sin(\omega\tau) = \omega. \quad (14.22)$$

Wenn diese beiden Gleichungen miteinander dividiert werden, erhalten wir die Bedingung

$$\tan(\omega\tau) = \frac{\omega}{\alpha}. \quad (14.23)$$

14.3.3 Berechnen der Konstanten

Aus der Bedingung (14.23) können die Konstanten näherungsweise berechnet werden. Zuerst geben wir die Kreisfrequenz der Oszillation ω an. Auf der Abbildung 14.3 können wir mit etwas Phantasie eine Periodendauer zwischen drei und sieben Jahren erkennen. Wir bestimmen für die folgenden Berechnungen eine durchschnittliche Periodendauer von 4 Jahren. Eine plausible Periode könnte mit Hilfe der Fouriertheorie (vgl. Kapitel 6) bestimmt werden. Alle Zeitangaben werden in Jahren angegeben.

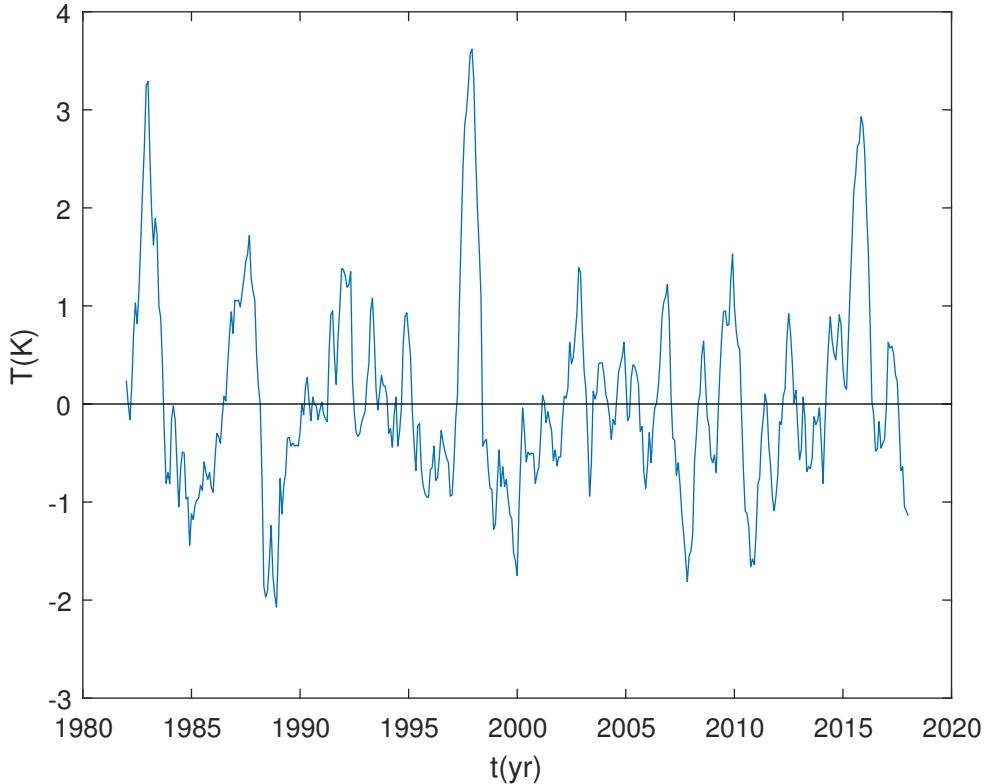


Abbildung 14.3: El-Niño (Temperaturanomalie T vor der Küste Südamerikas) gemessen von 1982 bis 2017

Aus der Periodendauer ergibt sich $\omega = \frac{2\pi}{T_{\text{Periode}}} = \frac{\pi}{2}$ und aus der Bedingung (14.23) erhalten wir nun

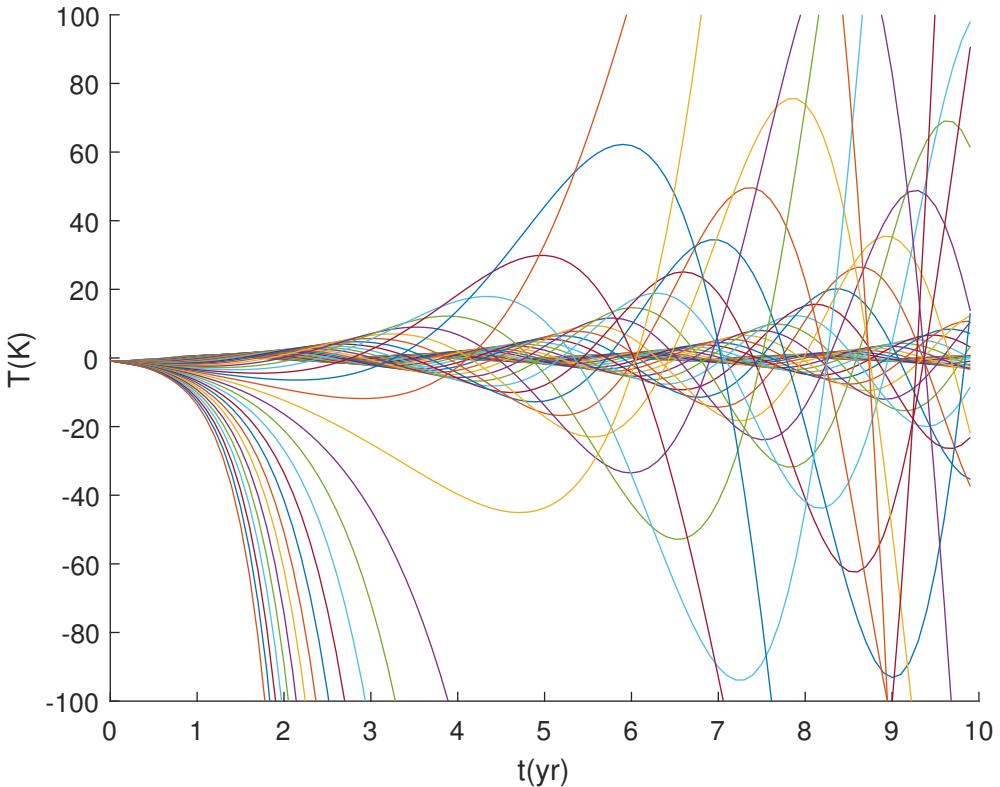
$$a - c = \alpha = \frac{\omega}{\tan(\frac{1}{2}\tau_R\omega)} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\tan(\frac{\pi}{4})} = \frac{\pi}{2} \approx 1.6. \quad (14.24)$$

Weiter berechnen wir β aus (14.22) und erhalten

$$b = \beta = \frac{\omega}{\sin(\frac{1}{2}\tau_R\omega)} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sin(\frac{\pi}{4})} \approx 2.3. \quad (14.25)$$

14.3.4 Chaotisches Verhalten

Die Lösungen der Gleichung (14.16) zeigen ein chaotisches Verhalten. Chaotisches Verhalten bedeutet, dass kleinste Änderungen der Konstanten extrem unterschiedliche Lösungen verursachen können. In Abbildung 14.4 sieht man das chaotische Verhalten bei einer Änderung der Konstante a . Dieses Verhalten ist unerwünscht, da wir die Ausgangslage nicht genau kennen und die Konstanten anpassen müssen. Um dieses chaotische Verhalten zu unterbinden, wird ein Limitierungsterm

Abbildung 14.4: Chaotisches Verhalten bei der Änderung von $a = 0$ bis $a = 5$

eingeführt. Dieser besteht aus $-\varepsilon T(t)^3$ und verhindert explodierende Lösungen. Bei zunehmendem Funktionswert nimmt der limitierungsterm mit der dritten Potenz zu und dämpft somit den Funktionswert. Wir erhalten die Gleichung

$$\dot{T}(t) = -cT(t) + aT(t - \frac{1}{2}\tau_K) - bT(t - (\frac{1}{2}\tau_R + \tau_K)) - \varepsilon T(t)^3. \quad (14.26)$$

In Abbildung 14.5 wird die gleiche Änderung von a gezeigt, aber mit einem $\varepsilon = 0.1$. Man sieht nun sehr gut den Einfluss, den die Konstante a auf die Lösung hat (verändert Frequenz und Amplitude).

14.4 Numerische Lösung

Die El-Niño-DDE soll mithilfe von Matlab numerisch gelöst werden. Matlab stellt zum Lösen von DDEs eine fertige Funktion zu Verfügung (`dde23`). Da diese Funktion auf anderen Systemen (z.B. Octave) nicht verwendbar ist, soll eine eigene Lösungsfunktion geschrieben werden. Beim Schreiben dieser Funktion wird darauf geachtet, dass die Syntax mit `dde23` vergleichbar ist.

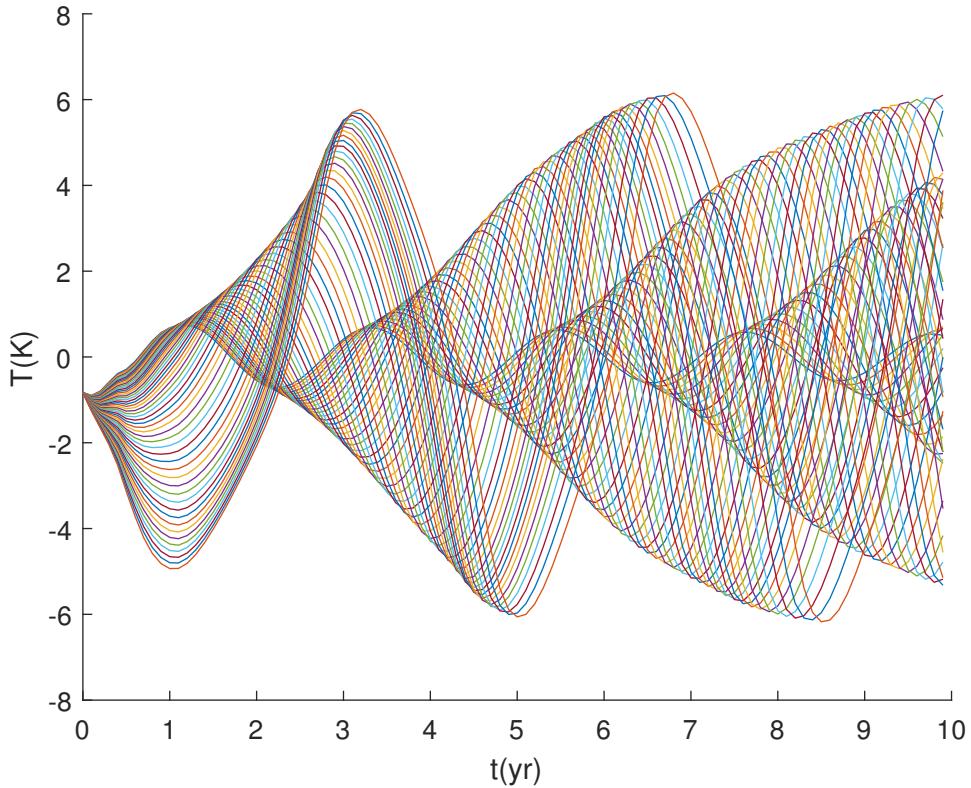


Abbildung 14.5: Verhalten bei der Änderung von $a = 0$ bis $a = 5$ mit Limitierung $\varepsilon = 0.1$

14.4.1 Analyse der Funktion `dde23`

Die offizielle Syntax von `dde23` (vgl. [3]) lautet:

```
1 ||      sol = dde23(ddefun, lags, history, tspan);
```

Wir analysieren zunächst alle Parameter.

Parameter: `ddefun`

Die `ddefun` stellt die eigentliche DDE dar, welche als Funktion übergeben werden muss. Unsere El-Niño-DDE (14.16) hat als eigene Parameter die Zeit (t), den aktuellen Wert (y), die verzögerten Werte (Z) und alle Konstanten.

```
1 ||      function dydt = dde_full(t,y,Z,c,a,b,e)
2 ||      ylag1 = Z(:,1);
3 ||      ylag2 = Z(:,2);
4 ||      dydt = -c*y+a*ylag1-b*ylag2-e*y.^3;
```

Damit diese Funktion akzeptiert wird, müssen die Konstanten gesetzt werden.

```
1 ||      c = 1; a = 2.6; b = 3; e = 0.1;
2 ||      my_dde = @(t,y,Z) dde_full(t,y,Z,c,a,b,e);
```

Parameter: lags

Die Verzögerungen (in Jahren) entsprechen einem normalen Vektor.

```
1 ||      tau_k = 0.15; tau_r = 1;
2 ||      tau = [0.5*tau_k 0.5*tau_r+tau_k];
```

Parameter: history

Die history entspricht einer Funktion, welche die Werte aus der Vergangenheit ausgibt. Das kann mit Vektoren (mit realen Daten aus [NOAA:Daten]) und einer Interpolation gelöst werden.

```
1 || function s = dde_hist(t)
2 || t_v = [-0.67,-0.58,-0.5,-0.42, ...];
3 || s_v = [0.71,0.5,-0.06,-0.4,...];
4 || s = @t interp1(t_v,s_v,t);
```

Gesamte Anwendung

Der Parameter `tspan` gibt die zu berechnende Zeitspanne (hier 0-3 Jahre) an.

```
1 || sol = dde23(my_dde,tau,dde_hist,[0, 3]);
```

Der Aufruf `dde23` soll nun durch eine eigene Funktion ersetzt werden.

14.4.2 Berechnung mit kurzen Zeitschritten

Bei diesem Ansatz wird immer die Ableitung zu einer bestimmten Zeit berechnet. Diese Ableitung wird dann für einen (kurzen) Zeitschritt als Konstant genommen und damit der nächste Wert berechnet.

Algorithm 1 Numerischer DDE-Solver

-
- 1: Initialisieren, d.h. Zeitachse erstellen, Zeitschritt `dt` berechnen, etc
 - 2: **for** `dt` in `t` **do**
 - 3: Bestimmen, ob die verzögerten Werte `dde_hist` oder in alter Lösung (wenn $t > \tau$) vorkommen
 - 4: **for** `i` in `tau` **do**
 - 5: Korrekte verzögerte Wert für jedes τ finden
 - 6: **end for**
 - 7: dde-Funktion aufrufen und `dydt` speichern
 - 8: Nächster Wert = aktueller Wert + `dydt*dt`
 - 9: **end for**
-

Mit diesem Algorithmus wird ein identisches Ergebnis wie mit `dde23` erreicht (vgl. Abbildung 14.6). Es werden jeweils 10000 Datenpunkte berechnet. Bei mehr Datenpunkten dauert die Berechnung sehr lange, wohl auch weil der Algorithmus nicht optimiert ist.

14.4.3 Instabilität bei wenigen Datenpunkten

Der Algorithmus von `dde23` berechnet viel weniger Datenpunkte. Wenn wir die Anzahl Datenpunkte in unserem Algorithmus reduzieren, werden die Lösungen schnell instabil (vgl. Abbildung 14.7). Auf den ersten Blick scheint dieses Resultat verblüffend, da 100 Datenpunkte immer noch relativ viel sind.

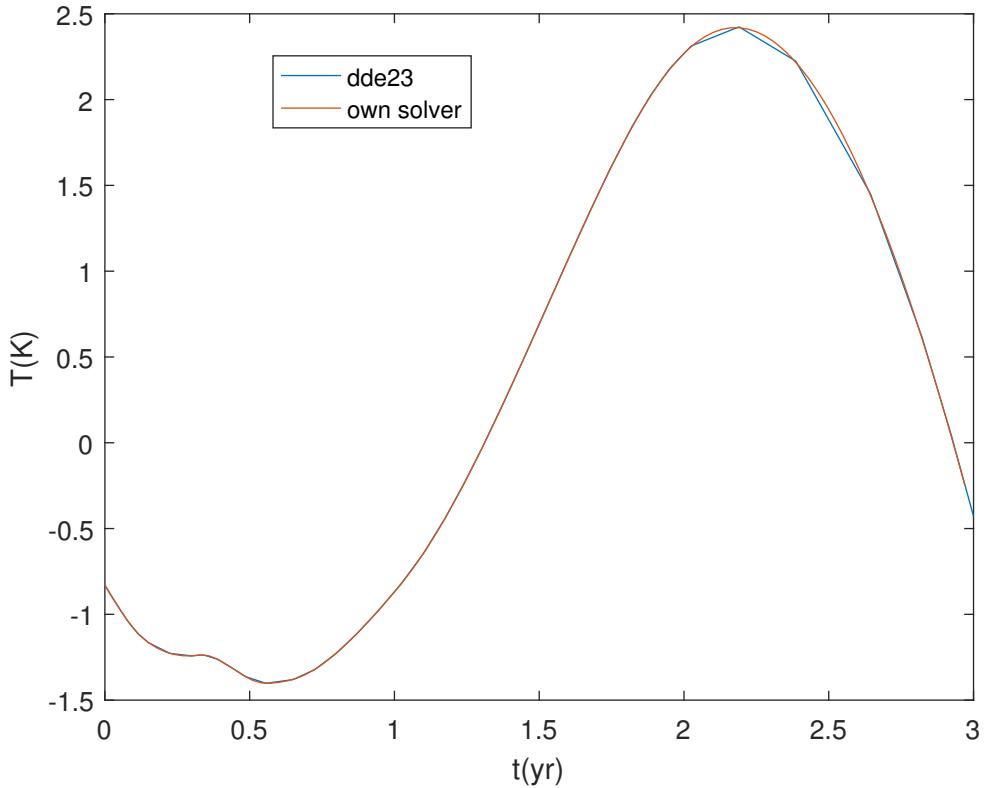


Abbildung 14.6: Vergleich der eigenen Lösungsfunktion mit dde23

Theoretische Betrachtung

Um diese Instabilität zu verstehen, analysieren wir zuerst einmal unseren Algorithmus mathematisch.

Unser Algorithmus (Algorithm 1) entspricht einem expliziten Euler Verfahren. Dieses Verfahren beschreiben wir für eine gewöhnliche DDE mit $\dot{y}_n = f(y_n, y_{n-\tau_1}, y_{n-\tau_2}, \dots)$. Dann geben wir die Schrittweite dt als h an und stellen den Algorithmus mathematisch dar:

$$y_0 = y(0) \quad (14.27)$$

$$y_1 = y(0 + h) = y_0 + h f(y_0, y_{-\tau_1}, y_{-\tau_2}, \dots) \quad (14.28)$$

Um die Betrachtung zu vereinfachen, analysieren wir das explizite Euler-Verfahren für eine gewöhnliche Differentialgleichung. Am Beispiel einer gewöhnlichen Differentialgleichung wird gezeigt, wie die Stabilitätsbetrachtung funktioniert.

Wir gehen von der einfachen Differentialgleichung $\dot{y} = ky$ aus. Dabei ist $k < 0$, die Schrittweite beträgt h und die Anfangsbedingung lautet $y(0) = 1$.

$$y_0 = 1 \quad (14.29)$$

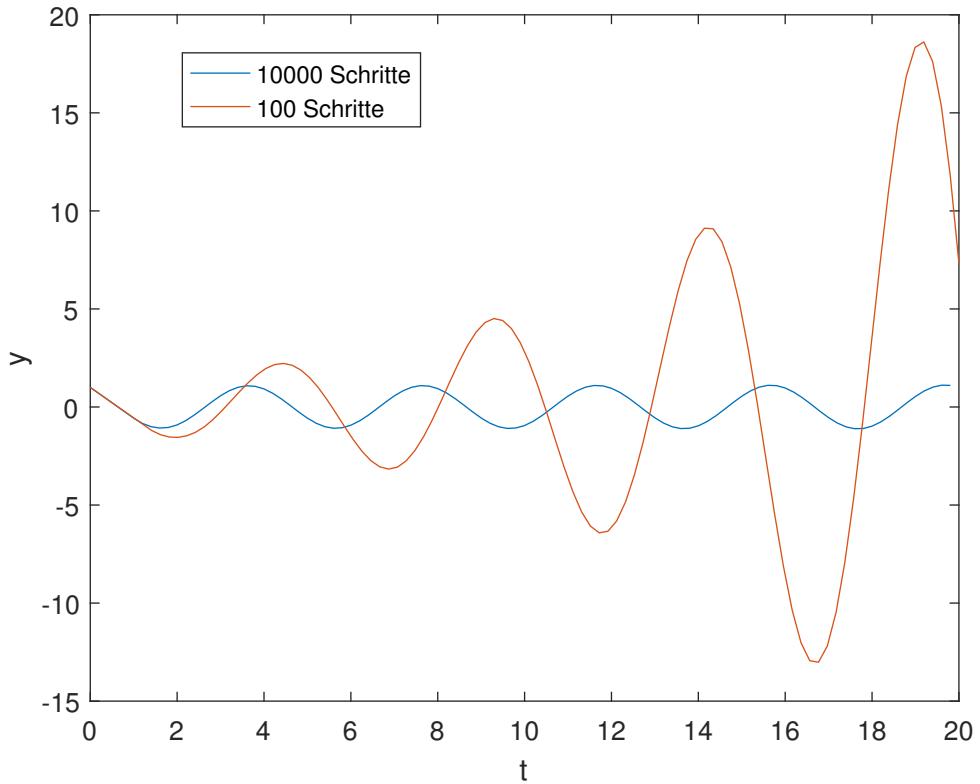


Abbildung 14.7: Vergleich der Lösung mit 10000 Datenpunkten und der Lösung mit 100 Datenpunkten. Gelöst wurde das Beispiel von (14.2).

$$y_1 = y(h) = 1 + hk \quad (14.30)$$

$$y_2 = 1 + hk + hk(1 + hk) = (1 + hk)^2 \quad (14.31)$$

$$y_3 = (1 + hk)^3 \quad (14.32)$$

usw.

Nun ist bekannt das y gegen 0 gehen muss, wenn t erhöht wird. Dies geschieht nur, falls $|1 + hk| < 1$ ist. Falls $|1 + hk| \geq 1$, explodiert oder schwingt die Lösung.

Die gleiche Rechnung lässt sich als Vektorgleichung neu schreiben.

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + hk & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \quad (14.33)$$

Bei einem gegebenen Anfangsvektor kann das Resultat y_n berechnet werden, indem die Matrix A potenziert wird.

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} y_0 \\ y_{-1} \end{pmatrix} \quad (14.34)$$

Das Potenzieren der Matrix A hat zur Folge, dass die Lösung explodiert, falls die Eigenwerte von A den Wert 1 übersteigen. Unsere Matrix im Beispiel hat nur einen sinnvollen Eigenwert $\lambda = 1 + hk$. Wir erhalten damit folgende Ungleichung:

$$|1 + hk| < 1. \quad (14.35)$$

Dies entspricht der Stabilitätsfunktion des expliziten Euler-Verfahren (vgl. [4]).

Berechnung der Eigenwerte am Beispiel

Am Beispiel (14.2) sieht die Berechnung komplexer aus, da Werte aus der Vergangenheit wichtig sind. Wir berechnen das Ganze für eine Schrittweite $h = 0.2$, also mit 100 Berechnungsschritten (vgl. Abbildung 14.7). Beim Einsetzen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \\ y_{n-1} \\ y_{n-2} \\ y_{n-3} \\ y_{n-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & kh \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ y_{n-2} \\ y_{n-3} \\ y_{n-4} \\ y_{n-5} \end{pmatrix} \quad (14.36)$$

Wie man sieht, hängt die Größe der Matrix A von der Schrittweite h und der Verzögerung τ ab. Hier werden 5 Schritte pro τ benötigt.

Wenn man die Eigenwerte für $k = -\frac{\pi}{2}$ berechnet, erhält man als maximalen Absolutwert $|\lambda| = 1.0129$. Dieser Eigenwert ist größer als 1. Also haben wir für $h = 0.2$ eine Instabilität. Dies erklärt das Verhalten auf Abbildung 14.7.

Die ganze Berechnung der Eigenwerte kann mit Matlab durchgeführt werden. In Abbildung 14.8 sieht man die Abhängigkeit des maximalen Eigenwertes von der Schrittweite. Bis zu einer maximalen Schrittweite von 0.01 beträgt der maximale Eigenwert genau 1. Danach übersteigt der maximale Eigenwert die Grenze von 1 und instabile Lösungen können auftreten.

14.5 Auswertung

14.5.1 Simulation El-Niño mit realen Werten

Der Matlab-Code zur Simulation des El-Niño DDE ist nun vorhanden. Zur Überprüfung ob die Simulation plausibel ist, wird eine Zeitperiode in der Vergangenheit berechnet. Ausgewählt zur Simulation wird die Zeitperiode ab September 1995. Also werden die Daten von Januar bis September 1995 als History genommen.

Simuliert wird 1 Jahr (Abbildung 14.9), 3 Jahre (Abbildung 14.10) und 10 Jahre (Abbildung 14.11). Die Konstanten wurden so verändert, dass das Resultat auf 3 Jahre gut stimmt. Mit den richtigen Konstanten lassen sich für kurze Zeiten relativ gute Vorhersagen machen. Allerdings ist das El-Niño-Phänomen (vgl. Abbildung 14.3) extrem unkonstant und bräuchte ein komplexeres Modell. Über längere Zeit versagt das Modell, da es immer zu einer gleichmäßigen Oszillation kommt.

Interessant ist, dass die DDE das kurzfristige Verhalten (1 Jahr, Abbildung 14.9) richtig berechnet. Das sieht man an der kurzen Richtungsänderung zwischen 0.3 und 0.4 Jahren.

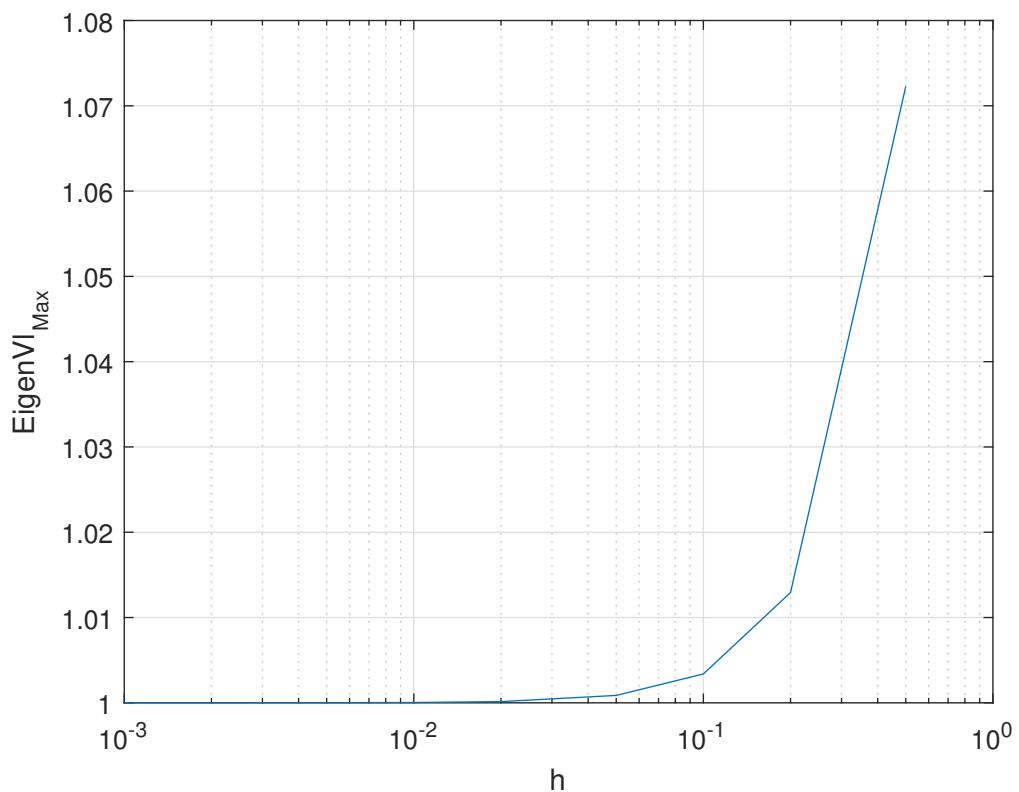
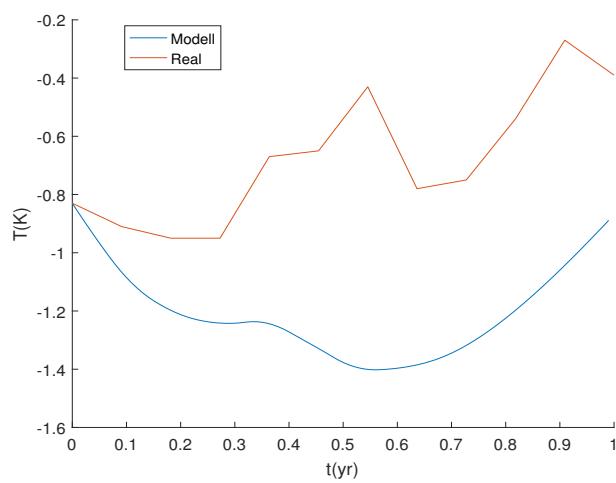
Abbildung 14.8: Maximale Eigenwerte in Abhängigkeit der Schritweite h 

Abbildung 14.9: El-Niño Simulation von 1995-1996 und Vergleich mit realen Daten

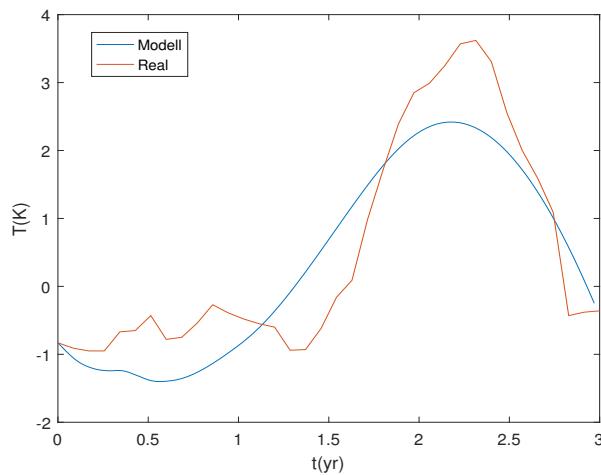


Abbildung 14.10: El-Niño Simulation von 1995-1998 und Vergleich mit realen Daten

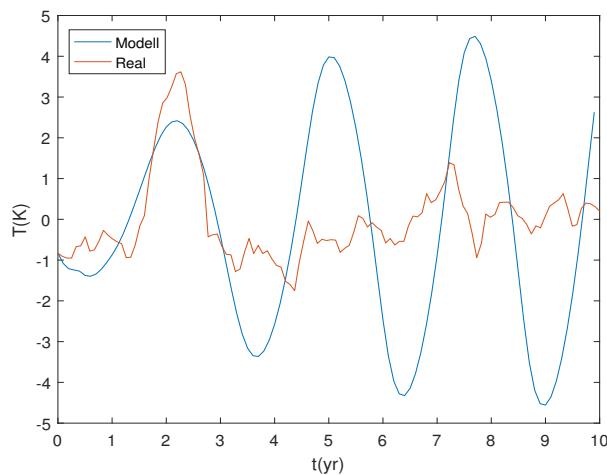


Abbildung 14.11: El-Niño Simulation von 1995-2005 und Vergleich mit realen Daten

14.5.2 Fazit

Mit verzögerten Differentialgleichungen können diverse Probleme gelöst werden. DDEs können analytisch untersucht werden, die Komplexität nimmt allerdings schnell zu. Eine numerische Simulation ist daher zwingend. Eine solche Simulation kann relativ einfach erstellt werden und liefert gute Resultate. Man sollte die Resultate trotzdem genau prüfen, da die Lösungen schnell instabil werden können (vgl. 14.4.3).

Das Modell zur Modellierung des El-Niño-Phänomens ist sicher noch nicht vollständig. Es ist aber ein schönes Beispiel einer Anwendung von verzögerten Differentialgleichungen.

Literatur

- [1] Thomas Erneux. *Applied Delay Differential Equations*. Englisch. Springer, 2009. ISBN: 978-0-387-74371-4.
- [2] Hans Kaper und Hans Engler. *Mathematics and Climate*. Englisch. Society for Industrial und Applied Mathematics, 2013. ISBN: 978-1-611972-60-3.
- [3] Matlab: *dde23*. URL: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/dde23.html>.
- [4] Wiki: *Explizites Euler-Verfahren*. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Explizites_Euler-Verfahren.

Kapitel 15

Klima auf anderen Planeten

Nicolas Tobler

15.1 Einleitung

Betrachtet man die vier der Sonne am nächst stehenden Planeten Merkur, Venus, Erde und Mars, gibt es einige Dinge festzustellen. Die Erde ist aus heutiger Sicht der einzige Planet der leben aufweist. Das für Leben notwendige flüssige Wasser ist auch nur auf der Erde in grossen Mengen auffindbar. Glücklicherweise lässt das, im Vergleich zu den anderen Planeten, milde Klima einen aktiven Wasserkreislauf zu. Alle anderen Planeten erfuhren offenbar ein anderes Schicksal. Falls auf ihnen je Wasser bestand, entwich es ins All oder gefror unter der Oberfläche. Das dortige Klima hat sich anders entwickelt. Man könnte meinen, dass primär die Distanz der Planeten zur Sonne für deren Temperatur ausschlaggebend ist. Jedoch nimmt die Temperatur über die Planeten mit der Entfernung zur Sonne nicht stetig ab. Das Klima muss somit auch von anderen Parametern abhängig sein, wie zum Beispiel Durchmesser, Rotation, Vulkanismus, Magnetfeld und viele andere. Obwohl Venus und Mars

Ein extremes Klima kann auch dazu führen, dass ein Planet sich irreversibel verändert, indem er zum Beispiel seine Atmosphäre ins All verliert. Wie es vermutlich beim Mars der Fall war. Trotz



Abbildung 15.1: Merkur, Venus, Erde und Mars massstabsgerecht

	Merkur	Venus	Erde	Mars
Oberflächen Temperatur	452 K	733 K	287 K	226 K
Wolken	-	$\approx 100\%$	68%	< 5%
Atmosphäre	10^{-15} bar	92 bar	1 bar	$6 \cdot 10^{-3}$ bar

Tabelle 15.1: Planeten im Vergleich

allen Einwirkungen sind wir in der glücklichen Lage auf der Erde ein mildes Klima vorzufinden, das Leben ermöglicht. Der Astrobiologe David Grinspoon ist folgender Meinung:

“It may be that conditions for life’s origin aren’t rare, but the hard part is the persistence of habitable conditions.”

— David Grinspoon, Astrobiologe [1]

In diesem Kapitel gehe ich der Frage nach, ob Venus und Mars alleine aufgrund ihrer orbitalen Eigenschaften nicht fähig waren, ein lebensfreundliches Klima zu generieren. Die Nullhypothese lautet somit, dass die genannten Planeten *nicht* durch ihre Umlaufbahn oder Grösse benachteiligt sind, Lebensfreundliche Klimabedingungen zu halten.

15.2 Ziel

Es soll ein Modell erstellt werden, welches das Klima von Planeten mit deren orbitalen Eigenschaften verknüpft. Betrachtet wird ein früher Zeitpunkt der Geschichte des Sonnensystems, als die Planeten ähnliche oder annähernd gleiche materielle und Atmosphärische Eigenschaften aufwiesen. Mit der Annahme, dass grosse Mengen an Wasser auf allen Planeten vorhanden war, besteht auf allen Planeten die gleichen Voraussetzungen für mögliches Leben. Das gleiche Modell wird mit unterschiedlichen orbitalen Parameter angewendet. Man kann sich das vorstellen, als nehme man zum Beispiel die Erde, skaliert sie auf Mars-Grösse und setzt sie in den Mars-Orbit. Durch eine Simulation des Modells im Zeitbereich sollte dann eine Aussage über den Werdegang der Planeten gemacht werden.

15.3 Modell

Das hier erarbeitete Modell muss für alle untersuchten Planeten gelten. Deshalb konzentriert es sich nur auf die Strahlungsbilanz und den Wasserkreislauf. Es wird davon ausgegangen, dass das Wasser signifikant für das Klima ist, da atmosphärischer Wasserdampf auf der Erde den grössten Anteil zum Treibhauseffekt beisteuert. Außerdem befinden sich alle betrachteten Planeten in der Habitablen Zone, auch Bekannt als Goldilocks Zone. Diese beschreibt den Abstandsbereich um die Sonne, in dem flüssiges Wasser dauerhaft auftreten kann. Andere klimabestimmenden atmosphärischen Gase wie CO₂ werden nicht simuliert, um das Modell im gegebenen Rahmen umzusetzen. Das Modell sollte erdähnliche Bedingungen bewusst erstreben, um zu sehen ob diese auf den Planeten Mars und Venus auch bestehen können. Auf Grund der zum Teil starken Vereinfachungen müssen einzelne Parameter abgeschätzt werden. Durch diese freien Parametern kann das System getrimmt werden um überhaupt plausible Lösungen zu erreichen. Diese Parameter sind mit ξ ’s gekennzeichnet. Abbildung 15.2 zeigt eine Übersicht des Modells. Die einzelnen Bestandteile werden im Folgenden beschrieben.

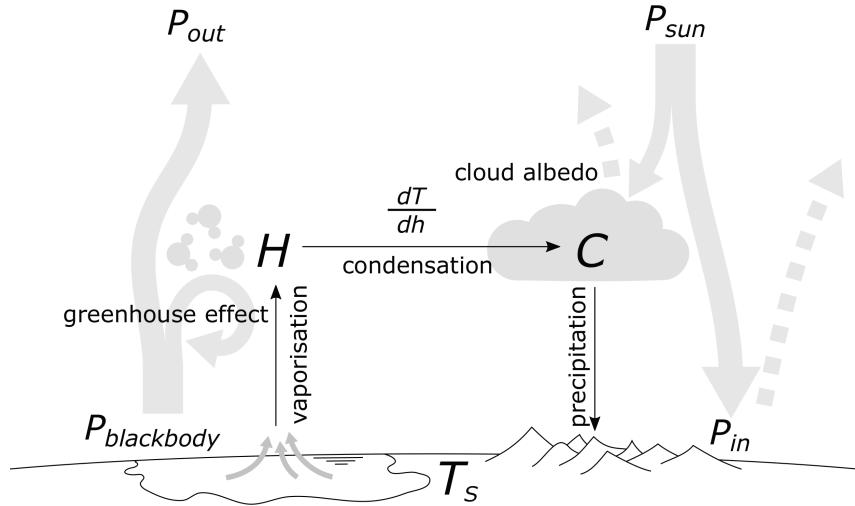


Abbildung 15.2: Modell-Übersicht

15.3.1 Strahlungsbilanz

Die Strahlungsbilanz wird in Kapitel 1.2.2 ausführlich beschrieben. Das hier verwendeten Modell baut direkt darauf auf.

Damit die Durchschnittstemperatur eines Planeten stabil ist, muss die Leistungsbilanz Null sein.

$$\dot{T}_S \propto P_{in} - P_{out} \quad (15.1)$$

Die Planeten sind jedoch nicht gleich gross. Damit die Auswirkung eines Strahlungsgleichgewichts für alle Planeten gleich ist, muss die Leistung auf eine Flächeneinheit normalisiert werden. Somit hat eine Stück Fläche mit der Atmosphäre darüber auf jedem Planeten die gleiche Wärmekapazität.

$$\dot{T}_S = \xi_1 \frac{P_{in} - P_{out}}{A} = \xi_1 \frac{P_{in} - P_{out}}{4\pi R_{\text{planet}}^2} \quad (15.2)$$

Die Eintreffende Leistung P_{in} besteht primär aus der absorbierten Sonnenstrahlung. Andere Energiequellen wie ein Aktives Planet-Inneres und die Energie aus Gezeiten wird vernachlässigt. Es gilt:

$$P_{in} = \sigma T_{\odot}^4 \left(\frac{R_{\odot}}{a_{\text{planet}}} \right)^2 \cdot (1 - \alpha) \quad (15.3)$$

Dabei ist α die Albedo des Planeten.

Dabei ist σ die Stefan-Boltzmann-Konstante, T_{\odot} & R_{\odot} die Oberflächentemperatur und Radius der Sonne, A_{planet} die mittlere Distanz des Planeten zur Sonne und α die Albedo des Planeten.

Die Abgestrahlte Leistung besteht praktisch ausschliesslich aus der Black-body Strahlung, welche sich aus der Durchschnittstemperatur T und dem Radius R_{planet} des Planeten bestimmen lässt. Diese Leistung bleibt jedoch teilweise durch den Treibhauseffekt in der Atmosphäre gefangen. Es gilt:

$$P_{out} = 4\pi R_{\text{planet}}^2 \sigma T_S^4 \epsilon \quad (15.4)$$

Dabei ist ϵ der Anteil der durchdringenden Leistung.

15.3.2 Albedo

Die Albedo wird als Funktion der prozentualen Wolkenabdeckung C modelliert. Es wird ein linearer Zusammenhang erwartet. Unter der Annahme, dass bei allen Planeten die Oberflächenalbedo α_S gleich ist, wird noch eine maximale Albedo α_{max} definiert. Bei 100% Wolkendeckung soll der Maximalwert erreicht werden und bei 0% die Oberflächenalbedo.

$$\alpha = \alpha_S + C(\alpha_{max} - \alpha_S) \quad (15.5)$$

Die minimale Albedo entspricht etwa jeder des Mondes, der kleinsten in unserem Sonnensystem. Die maximale Albedo wird etwas grösser als diejenige der Venus gesetzt.

$$\alpha_S = 0.15, \alpha_{max} = 0.7 \quad (15.6)$$

15.3.3 Treibhauseffekt

Wasserdampf ist ein sehr effektives Treibhausgas. Es wird angenommen dass der atmosphärische Wasserdampf der Erde für 60% des Treibhauseffekts sorgt. Im verwendeten Modell wirkt sich deren Konzentration H linear auf den Treibhauseffekt β aus. Die Wirkung wird mit ξ_8 beschränkt und kann vor der Simulation justiert werden.

$$\epsilon = (1 - \beta) = (1 - \xi_8 \cdot H) \quad (15.7)$$

$$T_S = \xi_1 \frac{\sigma T_\odot^4 R_\odot^2}{4\pi R_{\text{planet}}^2 a_{\text{planet}}^2} (\alpha_S + C(\alpha_{max} - \alpha_S)) - \xi_1 \sigma T_S^4 (1 - \xi_8 \cdot H) \quad (15.8)$$

15.3.4 Wasserkreislauf

Das Modell beinhaltet einen stark vereinfachten Wasserkreislauf. Dieser besteht aus den zwei Boxen atmosphärischer Wasserdampf H und Wolken C . Beides sind prozentuale Grössen und können näherungsweise als relative Luftfeuchtigkeit beziehungsweise prozentuale Wolkenabdeckung interpretiert werden. Dazu kommt das auf der Planetenoberfläche vorhandene flüssige Wasser, welches als Quelle und Senke dient und zugleich unerschöpflich ist. Das Modell beachtet nicht, dass der atmosphärische Wasserdampf ins All entweichen kann und dadurch die Ozeane austrocknen können.

Wasserdampf bildet sich durch Verdunsten von der Ozeane. Der Durchsatz wird linear zur Oberflächentemperatur T_S angenommen.

$$\xi_2 T_S \quad (15.9)$$

Wolken entstehen wenn feuchte Luft beim aufsteigen sich abkühlt und kondensiert. Näherungsweise entstehen mehr Wolken je grösser die Luftfeuchtigkeit H ist und je schneller die Temperatur mit der Höhe abnimmt. Dabei nimmt die Wolkenbildung mit grösserer Luftfeuchtigkeit H und grösseren Temperaturgradienten $\frac{dT}{dh}$ zu. Durch Multiplizieren mit einem wählbaren Freiheitsgrad ξ_3 kann die Wirkung des Prozesses justiert werden.

$$\xi_3 H \frac{dT}{dh} \quad (15.10)$$

Wenn der Temperaturgradient linear angenommen wird, lässt sich $\frac{dT}{dh}$ durch den Skalar ΔT vereinfachen. Er existiert sowohl in vertikaler, sowie in horizontaler Ausrichtung. Einen grossen horizontalen Gradienten findet man bei einer Wetterfront vor. Im Modell wird nur der vertikale berücksichtigt. Dieser ist bei ungesättigter Luft annähernd konstant. Sobald Wasserdampf kondensiert wird der Prozess feuchtadiabatisch. Dabei wird der Gradient kleiner und sinkt mit zunehmender Temperatur noch weiter. Der Temperaturgradient sinkt bei

$$\frac{dT}{dh} = \Delta T = \frac{\xi_9}{CT_S} \quad (15.11)$$

Eingesetzt erhält man für die Wolkenbildung:

$$\xi_3 H \frac{\xi_9}{CT_S} \quad (15.12)$$

Wolken regnen, wenn sich die mikroskopischen Wassertropfen oder Eiskristalle verbinden und nicht mehr getragen werden können. Im hier verwendeten Modell wird angenommen, dass sich Regenbildung somit proportional zur Wolkenabdeckung C verhält.

$$\xi_4 C \quad (15.13)$$

15.3.5 Gleichungssystem

Durch Zusammenfassen von Strahlungsbilanz und Wasserkreislauf erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \dot{T}_S &= \xi_1 \frac{\sigma T_S^4 R_{\odot}^2}{4\pi R_{\text{planet}}^2 a_{\text{planet}}^2} (\alpha_S + C(\alpha_{\max} - \alpha_S)) & -\xi_1 \sigma T_S^4 (1 - \xi_8 \cdot H) \\ \dot{H} &= \xi_2 T_S & -\xi_3 H \frac{\xi_9}{CT_S} \\ \dot{C} &= \xi_3 H \frac{\xi_9}{CT_S} & -\xi_4 C \end{aligned} \quad (15.14)$$

Um zu verhindern, dass eine Luftfeuchtigkeit oder Wolkenabdeckung von über 100% auftritt, werden zu gewissen linearen Termen noch den gleichen Term mit grosser Potenz dazu addiert. Somit wird der Effekt verstärkt wenn die Grösse nahe an 1 also 100% kommt. Das mit Anpassungen für gesättigten Wasserdampf und Wolkenabdeckung versehene Gleichungssystem lautet somit:

$$\begin{aligned} \dot{T}_S &= \xi_1 \frac{\sigma T_S^4 R_{\odot}^2}{4\pi R_{\text{planet}}^2 a_{\text{planet}}^2} (\alpha_S + C(\alpha_{\max} - \alpha_S)) & -\xi_1 \sigma T_S^4 (1 - \xi_8 \cdot H) \\ \dot{H} &= \xi_2 P_{\text{in}}(C) & -\xi_3 (H + H^9) \frac{\xi_9}{CT_S} \\ \dot{C} &= \xi_3 (H + H^9) \frac{\xi_9}{CT_S} & -\xi_4 (C + C^5) \end{aligned} \quad (15.15)$$

15.4 Simulation

Das Modell wurde in MATLAB mittels Transientenanalyse simuliert. Dazu kam ein ODE45 Solver zur Hilfe. Die Anfangswerte wurden so gesetzt, dass sie Erdbedingungen unterstützen.

$$\begin{aligned} T_0 &= 287 \\ H_0 &= 0.44 \\ C_0 &= 0.68 \end{aligned} \quad (15.16)$$

	Merkur	Venus	Erde	Mars
a_{planet}	$2.353 \cdot 10^{11} \text{ m}$	$1.076 \cdot 10^{11} \text{ m}$	$1.499 \cdot 10^{11} \text{ m}$	$2.353 \cdot 10^{11} \text{ m}$
R_{planet}	$3.3895 \cdot 10^6 \text{ m}$	$6.0519 \cdot 10^6 \text{ m}$	$6.371 \cdot 10^6 \text{ m}$	$3.3895 \cdot 10^6 \text{ m}$

Tabelle 15.2: Für die Planeten eingesetzte Werte aus WolframAlpha

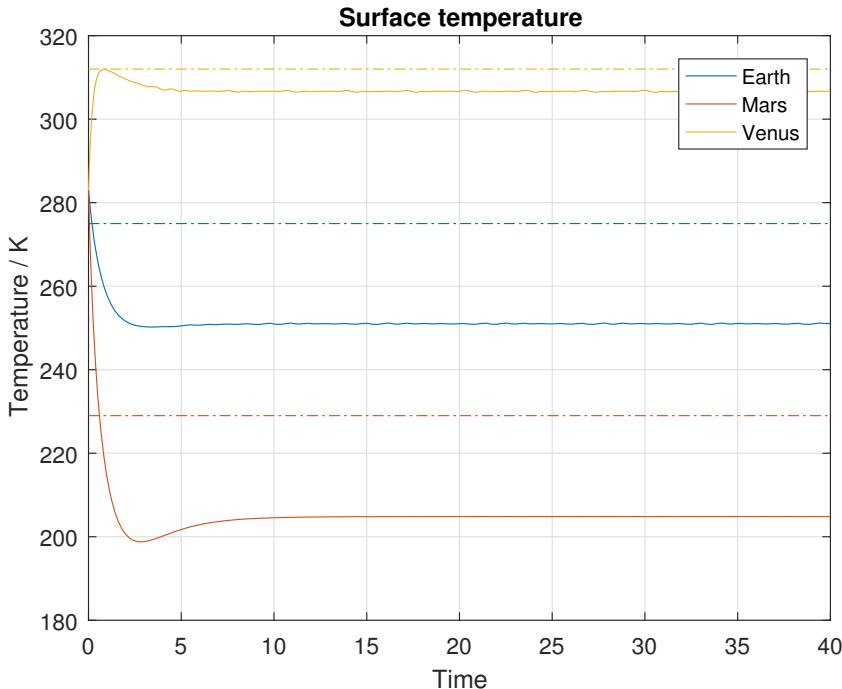


Abbildung 15.3: Globale Durchschnittstemperatur

Die hinzugefügten Freiheitsgrade ξ_1 bis ξ_6 wurden empirisch gesetzt um für die Erde stabile Resultate zu erhalten.

$$\begin{aligned}\xi_1 &= 1 \\ \xi_2 &= 1.5 \cdot 10^{-3} \\ \xi_3 &= 1.9 \cdot 10^{-2} \\ \xi_4 &= 4 \cdot 10^{-1} \\ \xi_8 &= 0.6\end{aligned}\tag{15.17}$$

In Tabelle 15.2 sind die für die Planeten eingesetzten Parameter a_{planet} und R_{planet} ersichtlich.

Das System wurde bis zum stationären Zustand simuliert. Aus der Zeitachse können keine quantitative Schlüsse gezogen werden.

15.4.1 Ergebnisse

Die Strich-Punkt-Linie der entsprechenden Farbe zeigt den heutigen Wert der Grösse.

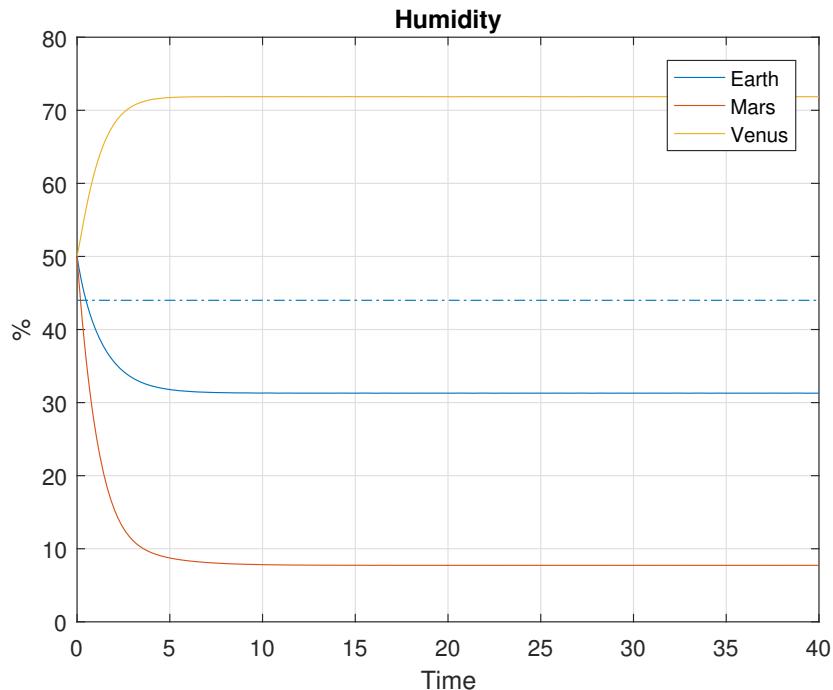


Abbildung 15.4: Relative Luftfeuchtigkeit

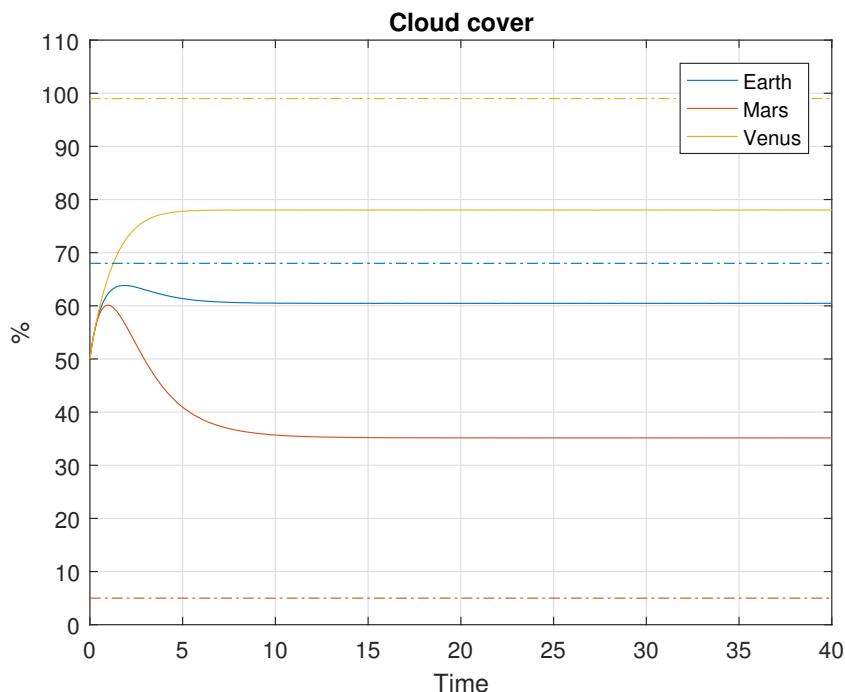


Abbildung 15.5: Prozentuale Wolkenabdeckung

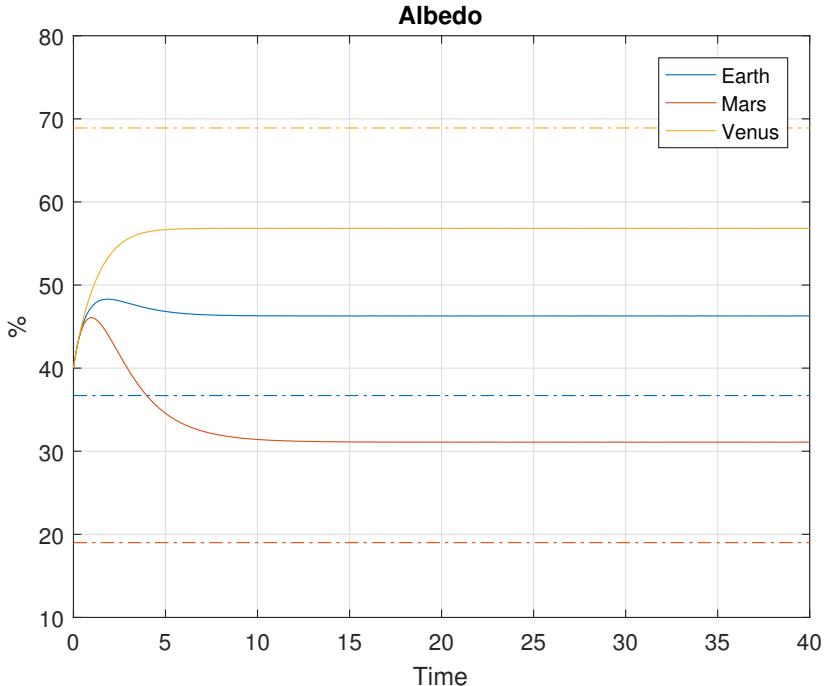


Abbildung 15.6: Albedo

15.5 Schlussfolgerung

Die Simulationsergebnisse tendieren zu den heutigen beobachtbaren Klimaverhältnisse. Die extremen Klima von Mars und Venus sind somit vermutlich durch ihre Grösse und Umlaufbahn prädestiniert. Die Nullhypothese kann somit falsifiziert werden. Es können jedoch nur qualitative Schlüsse gezogen werden, da durch Verändern der freien Parameter ein ganz anderes Bild entsteht. Somit sind die Ergebnisse nur mit Vorsicht zu geniessen.

Abweichungen sind durch diverse Fehlerquellen gerechtfertigt. Zum einen wurden diverse chemische und physikalische Vorgänge bei extremen Temperaturen und Sonneneinstrahlung nicht beachtet. Neben Wasser wurden Treibhausgase wie CO_2 vernachlässigt. Sie machen heute den grössten Anteil der Venus- und Marsatmosphäre aus.

15.5.1 Verbesserungsmöglichkeiten

Dieses Modell bietet diverse Ausbaumöglichkeiten. Um zum Beispiel mehr Genauigkeit in den Extremen Bereichen zu erreichen, müssten mehr atmosphärische Gase einbezogen werden. Diese Gase besitzen wiederum unterschiedliche Gefrierpunkte, was die Modellierung der Vereisung zulässt.

Im simulierten Modell wurden lediglich der Durchmesser und die Distanz zur Sonne der Planeten einbezogen. Um die Aussagekraft zu verbessern könnten weitere Planet-abhängige Parameter implementiert werden, wie der Vulkanismus und die Rotationsgeschwindigkeit. Die Rotation erlaubt das Modellieren von Tag- und Nachtseitentemperatur, welche sich stark auf das Klima auswirken.

Literatur

- [1] Leslie Mullen Astrobiology Magazine. “Alien Planets Could Shed Light on Earth’s Climate Future”. In: (2013). URL: <https://www.space.com/21234-alien-planets-earth-climate-future.html> (besucht am 09.07.2018).

Kapitel 16

Achsneigung und Eiszeiten

Sebastian Lenhard

16.1 Einführung

Das Energie Haushaltsmodell wird verwendet um die Erdtemperatur theoretisch zu erklären. Dabei wird die Erde als Kugel betrachtet, die konstant von der Sonne angestrahlt wird. Die eingestrahlte Energie führt zur Erwärmung der Erde. Die Erde ihrerseits strahlt ebenfalls Energie ab, wie jedes bestrahlte Objekt. Dabei wird die Erde als schwarze Kugel modelliert, wodurch die Abstrahlung mit der Stephan Boltzmann Gesetz modelliert werden kann. Die Änderung der Erdtemperatur kann somit mit der Gleichung

$$C \frac{dT}{dt} = (1 - \alpha(T))Q - \varepsilon\sigma T^4 \quad (16.1)$$

modelliert werden. Die linke Seite der Gleichung entspricht der Veränderung der Erdtemperatur, wobei C der Wärmekapazität entspricht, T die Temperatur in Kelvin und t die Zeit darstellt. Die Einstrahlung Q wird dabei nicht vollständig von der Erde absorbiert, ein Teil der Energieeinstrahlung wird reflektiert und hängt von der Albedo $\alpha(T)$ ab, wobei die Albedo ihrerseits Temperaturabhängig ist. Je kälter die Erde ist, desto höher ist der Albedo der Erde, da hellere Flächen wie Eis weniger Energie aufnehmen als dunkle Flächen. Dieser temperaturabhängige Albedo kann durch die Gleichung

$$\alpha(T) = 0.5 - 0.2 \tanh\left(\frac{T - 265}{10}\right) \quad (16.2)$$

dargestellt werden. Dadurch ist der Albedo symmetrisch um 265 K und kann maximal zwischen 0.3 und 0.7 schwanken. Die Gleichgewichtstemperatur ist dabei erreicht, wenn sich die Temperatur über die Zeit nicht mehr ändert. Abbildung 16.1 die Einstrahlung und Ausstrahlung je nach Temperatur. Schnittpunkte sind Gleichgewichtstemperaturen. Der mittlere Schnittpunkt ist dabei ein instabiles

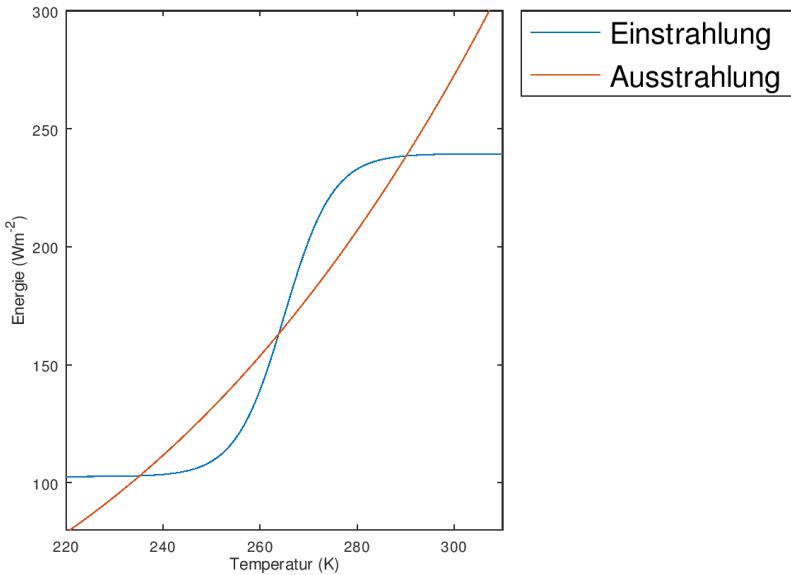


Abbildung 16.1: Gleichgewichtstemperatur

Gleichgewicht, da mit einer minimal höheren Temperatur die Einstrahlung höher ist als die Ausstrahlung, wodurch sich die Erde erwärmt und in das stabile warme (rechte) Gleichgewicht bewegt. Die selbe Argumentation gilt mit einer minimal tieferen Temperatur, wodurch die Erde sich auf das kalte (linke) Gleichgewicht zubewegt. Die ausführliche Herleitung befindet sich in Kapitel 5. Die Neigung der Erdachse bewirkt die Jahreszeiten. Der genaue Zusammenhang wird in Abschnitt 16.2 und 16.3 erläutert. Je grösser der Neigungswinkel, desto extremer sind die Jahreszeiten. Durch die Jahreszeiten kommt es zu Schwankungen der Gleichgewichtstemperatur. Dies wird in Kapitel 16.4.2 anhand einer Simulation gezeigt. Starke Schwankungen können dazu führen, dass das Erdklima vom warmen ins kalte Gleichgewicht wechselt und eine Eiszeit entsteht. Da die Jahreszeiten auf der Nordhalbkugel und Südhalbkugel jeweils entgegengesetzt zueinander auftreten wird der Fokus auf eine Halbkugel gelegt (ohne Energieaustausch). In Abschnitt 16.4 wird eine Halbkugel mathematisch modelliert und das Klima wird unter verschiedenen Erdachsenneigungen prognostiziert. Abschnitt 16.5 fasst die wichtigsten Erkenntnisse nochmals zusammen und gibt einen Ausblick für weitere Erweiterungen des Modells.

16.1.1 Milanković Zyklen

In diesem Abschnitt wird eine kurze empirisch bestätigter Ausblick über das Verhalten der Erde gegeben. Der serbische Mathematiker Milutin Milanković hat Mitte des 20. Jahrhunderts folgende Entdeckung gemacht: Die Erde bewegt sich in verschiedenen Zyklen auf ihrer Umlaufbahn. Zudem führen die Planeten wie Saturn dazu, dass es zu Schwankungen der Achsenneigung kommen kann. Milanković unterteilt die Effekte in drei Zyklen. Die Milanković Zyklen wurden empirisch bestätigt.



Abbildung 16.2: Präzession

Präzession

Der erste Zyklus wird Präzession genannt und hat eine Länge von 23'000 Jahren. Dieser Zyklus wird durch eine Bewegung der Erdachse und eine Bewegung der Ellipse der Erdbahn hervorgerufen. Durch die Anziehungskraft von Sonne und Mond ausgedehnt, wird die Erdachse in einem Taumeln gebracht, wie ein aus dem Gleichgewicht geratener Kreisel. Dagegen wirkt eine zweite Kraft, die durch den Einfluß aller Planeten unseres Sonnensystems auf die Umlaufbahn der Erde einfluss nimmt. Beide Bewegungen zusammen bewirken, dass sich die Jahreszeiten verschieben. Dieser Effekt wird auch als Perihelwanderung bezeichnet.¹

Exzentrizität

Der zweite Zyklus ist die Exzentrizität und hat eine Dauer von 100'000 Jahren. Wie Abbildung 16.3 zeigt, kreist die Erde um die Sonne. Die Kreisbahn wird allerdings durch den Einfluss der anderen Planeten verzerrt und zu einer Ellipse geformt. Je nach Planetenkonstellation ist daher die Umlaufbahn eher kreisförmig oder nicht. Dieser Effekt ist nur zur Vollständigkeitshalber hier aufgeführt und wird in dem weiteren Verlauf der Arbeit nicht weiter beachtet. Es wird vereinfacht angenommen, dass die Umlaufbahn der Erde einem Kreis entspricht.

Ekliptikschiefe

Der letzte Zyklus ist die Ekliptikschiefe und hat einen Rhythmus von 41'000 Jahren. Dabei bewegt sich die Achsenneigung durch den Einfluss der Planeten. Abbildung 16.4 gibt einen Überblick über das Geschehen. Dieser Zyklus motiviert die folgende Arbeit, die den Zusammenhang zwischen Klima und dem Winkel der Erdachse untersucht. Die Abbildungen stammen aus [fm].

¹ Als Perihel wird der Punkt mit dem kleinsten Abstand auf der Erdumlaufbahn zur Sonne bezeichnet.

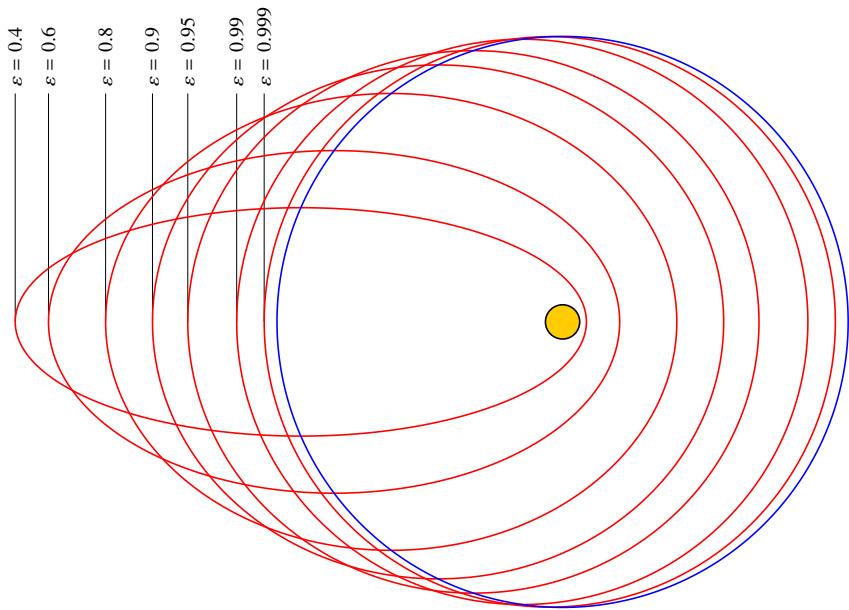


Abbildung 16.3: Exzentrizität



Abbildung 16.4: Ekliptikschiefe

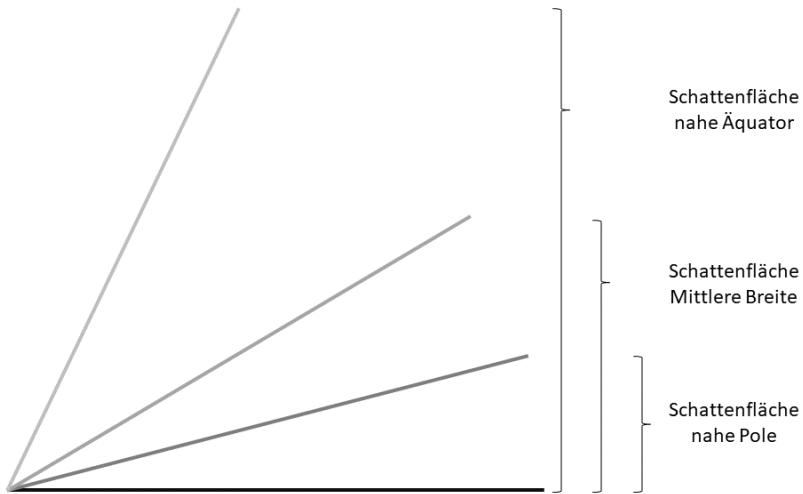


Abbildung 16.5: Einstrahlungswinkel

16.2 Einstrahlungswinkel

Da die Erde einen sehr grossen Abstand und nur eine geringe relative Grösse zur Sonne hat, mit 1:109, wird vereinfacht angenommen, dass alle Sonnenstrahlen im rechten Winkel auf die Erdkugel treffen. Nehmen wir zudem vereinfacht an, dass der Neigungswinkel der Erde 0° . Dies bedeutet, dass die Sonnenstrahlen am Äquator mit einem Winkel von 90° auf die Erdoberfläche treffen. Durch die Kugelform der Erde nimmt der Einstrahlungswinkel mit der Distanz zum Äquator ab. Dies ist in Abbildung 16.5 schematisch dargestellt. In der Abbildung kommen die Sonnenstrahlen von der linken Seite. Beispielsweise ist die angestrahlte Fläche $1m^2$, zweidimensional dargestellt als $1m$ in Abbildung 16.5. Nahe den Polen wird die selbe Flächengrösse von weniger Energie bestrahlt, während am Äquator eine viel grössere Menge an Energie auf die selbe Fläche trifft. Die eingestrahlte Energiemenge kann als Schattenfläche aufgefasst werden. In Abbildung 16.5 ist ersichtlich, dass die Energiemenge pro Fläche am Äquator deshalb erheblich grösser ist als an den Polen. Der Einstrahlungswinkel beeinflusst somit wieviel Energie auftrifft und somit aufgenommen wird. Daraus folgt, dass es am Äquator wärmer ist als an den Polen. In diesem Gedankenexperiment wird somit der Äquator konstant in einem Winkel von 90° bestrahlt, während die Pole direkte Strahlung empfangen. Im Verlaufe eines Jahres legt die Erde eine Umlaufbahn der Sonne zurück. Vereinfacht wird eine Kreisbahn angenommen. Mit einem Neigungswinkel von 0° ist die Einstrahlung entlang der Umlaufbahn konstant für jeden Punkt auf der Erde. Im folgenden Kapitel wird die Annahme des Neigungswinkel mit 0° gelockert und erläutert wie dadurch die Jahreszeiten entstehen.

16.3 Achsenneigung

Durch die Neigung der Erdachse kommt es zu der Entstehung der Jahreszeiten. Dies wird anhand der Abbildung 16.6 intuitiv erklärt. Die linke Erdkugel in Abbildung 16.6 zeigt die Situation mit einem Neigungswinkel von 0° . Die Mittlere Linie entspricht der Breitengrade des Äquators. Wie in Kapitel 16.2 erläutert ist somit die Einstrahlung am grössten am Äquator, da die Sonnenstrahlen in

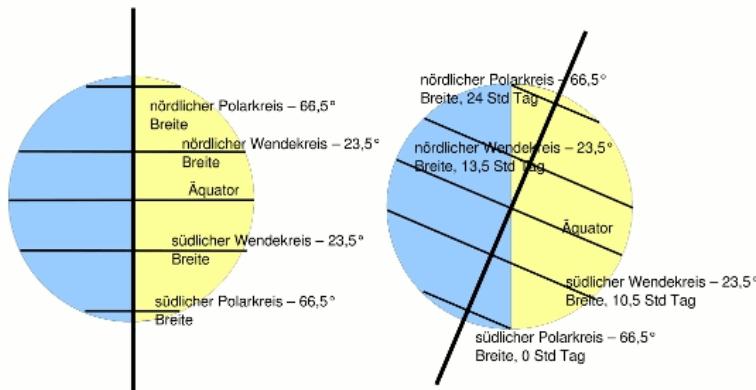


Abbildung 16.6: Achsenneigung

einem Winkel von 90° auf die Erdoberfläche auftreffen. Die rechte Erdkugel illustriert nun einen Neigungswinkel. Dadurch wird ersichtlich, dass der Äquator nicht länger der Breitengrad ist, in dem die Sonnenstrahlen in einem Winkel von 90° eintreffen. In der Abbildung 16.6 entspricht dies nun der Linie des Wendekreises. In der Abbildung kommen die Sonnenstrahlen von der rechten Seite, somit entspricht die gelbe Fläche der angestrahlten Fläche der Erdkugel. Es ist ersichtlich, dass am Nordpol dadurch Sonnenstrahlen ankommen, während der Südpol nicht bestrahlt wird. Im Verlaufe eines Tages dreht sich die Erde einmal um die eigene Achse. In der rechten Abbildung bedeutet das, dass am Nordpol keine Nacht stattfindet, während am Südpol ewige Nacht herrscht. Am Äquator dauert ein Tag genau 12 Stunden, während auf der Nordhalbkugel die Tage länger sind als auf der Südhalbkugel. Dies entspricht der Situation Sommer auf der Nordhalbkugel, respektive Winter auf der Südhalbkugel. Die Abbildung stammt aus [fa]. Auf ihrer Umlaufbahn um die Sonne bleibt die Erdachse konstant geneigt. Dies bedeutet, dass im Nordwinter, die Situation entsteht, in der in Abbildung 16.6 die gelbe Fläche bestrahlt wird während die blaue Fläche nicht bestrahlt wird. Somit am Nordpol ewige Nacht herrscht und am Südpol die Sonne nie untergeht. Im Frühling und im Herbst ist die Strahlungssituation in der linken Seite abgebildet. Diese kontinuierlichen Übergänge von heißem Sommer zu kaltem Winter werden im nächsten Kapitel 16.4 mathematisch modelliert. Dabei wird der Fokus auf eine Halbkugel gelegt, da die Jahreszeiten halbkugelspezifisch auftreten.

16.4 Mathematischer Zusammenhang

Motiviert durch die vorhergegangenen zwei Kapitel wird das Energiehaushaltsmodell aus Kapitel 16.1 erweitert. Im folgenden wird zuerst in Kapitel 16.4.1 erläutert, wie die zyklisch ändernde Einstrahlung mathematisch modelliert wird, abhängig von der Achsenneigung. In Kapitel 16.4.2 werden die Gleichgewichte als Bifurkation zusammengefasst. Kapitel 16.4.3 wird eine Simulation gerechnet und präsentiert. Da die Simulation zeigt, dass dadurch keine Eiszeit entstehen kann, wird in Kapitel 16.4.4 die Coalbedo nicht linear transformiert. Die Simulation wird mit verändertem Coalbedo nochmals gerechnet in Kapitel 16.4.5. Dadurch wird gezeigt, dass es zu einer Eiszeit kommen kann.

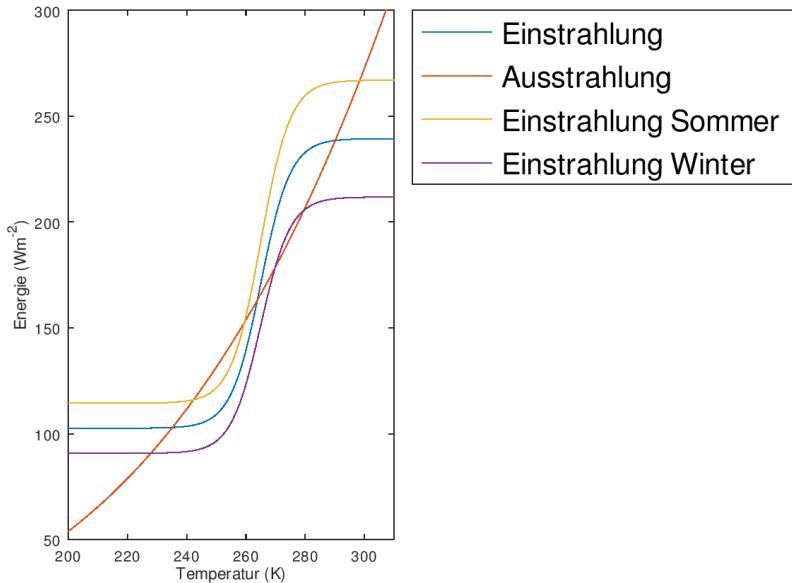


Abbildung 16.7: Gleichgewichtstemperatur

16.4.1 Einstrahlung

Die Einstrahlung auf eine Halbkugel schwankt zyklisch im Rhythmus eines Jahres. Anstelle der konstanten Einstrahlung Q im Energie Haushaltsmodell in Kapitel 16.1 wird nun eine Zeit abhängige Einstrahlung modelliert. Gegeben der dem Neigungswinkel ω schwankt die Einstrahlung um die Solarkonstante Q . t ist die Zeit, die anhand des $\sin(\cdot)$ die Umlaufbahn als Kreisbahn der Erde um die Sonne modelliert. Je grösser der Neigungswinkel ω , desto extremer sind die Schwankungen. Dies wird anhand der Funktion

$$I(t, \omega) = Q + \frac{\sin(\omega) \sin(t)}{\sqrt{1 + (\sin(\omega) \sin(t))^2}} Q$$

ermöglicht. Mit einem Neigungswinkel von $\omega = 0$ entspricht das Modell wieder dem ursprünglichen Energie Haushaltsmodell. Somit wird die Gleichung (16.1) modifiziert zu:

$$C \frac{dT}{dt} = (1 - \alpha(T))I(t, \omega) - \varepsilon\sigma T^4 \quad (16.3)$$

Anstelle der Solarkonstanten Q steht in Gleichung (16.3) nun die Zeit und winkelabhängige Einstrahlung $I(t, \omega)$. Dadurch entstehen verschiedene Gleichgewichte, die vom jeweiligen Zeitpunkt und gegeben dem Winkel abhängen. Im Sommer hat die Funktion $I(t, \omega)$ ein Maximum gegeben ω , während im Winter jeweils ein Minimum erreicht ist. Die verschiedenen Einstrahlungen sind in Abbildung 16.7 dargestellt. Durch die Neigung und die mit ihr einherkommende zyklische Schwankung der Einstrahlung entstehen somit verschiedene Gleichgewichte. Über ein Jahr bewegt sich die

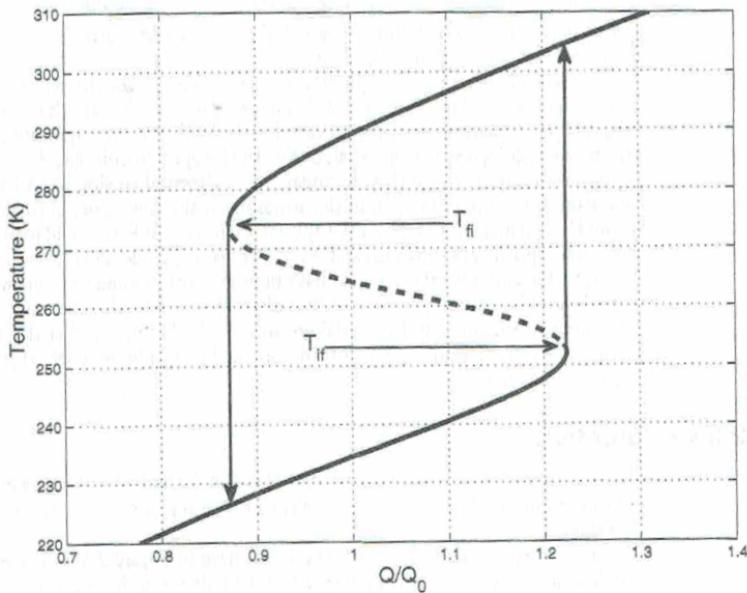


Abbildung 16.8: Bifurkation

Einstrahlungsfunktion von der violetten (Winter) Linie kontinuierlich über die blaue (Frühling) zur gelben (Sommer) und wieder über die blaue (Herbst) zurück. Eine Möglichkeit dies in einem übersichtlicheren Format darzustellen bietet die Bifurkation. Diese wird im nächsten Abschnitt 16.4.2 erläutert.

16.4.2 Mögliche Eiszeit

Die Bifurkation zeigt wie sich die Lösungen einer Differentialgleichung verändern, gegeben der Änderung eines Parameters. Die betrachtete Differentialgleichung (16.1) aus dem Ursprünglichen Energie Haushaltsmodell, indem nun die Einstrahlung Q verändert wird. Dies ist äquivalent zur Differenzialgleichung (16.3). Betrachtete man in Abbildung 16.7 das warme Gleichgewicht im Winter und erhöht die Strahlung, so erhöht sich die Gleichgewichtstemperatur. Dies entspricht in Abbildung 16.8 der ausgezogenen Linie im oberen drittel, die einen positiven Zusammenhang zwischen Einstrahlungsintensität und Gleichgewichtstemperatur aufweist. Senkt man die Einstrahlung, so ist in Abbildung 16.7 zu erkennen, dass das warme Gleichgewicht und das instabile Gleichgewicht auf den selben Punkt fallen indem sich Einstrahlung und Ausstrahlung tangieren. Dies entspricht in Abbildung 16.8 dem Zusammentreffen mit der gestrichelten Linie (T_{fl}). Eine weitere Minderung der Einstrahlung hat zur Folge, dass das warme Gleichgewicht nicht mehr existiert, sondern nur noch das kalte Gleichgewicht. Die gestrichelte Linie entspricht dem instabilen Gleichgewicht in Abbildung 16.7, welches einen negativen Zusammenhang zwischen Einstrahlung und Gleichgewichtstemperatur hat. In dem Punkt T_{lf} , wo sich das instabile und kalte Gleichgewicht treffen, ist in Abbildung 16.7 der Fall, wenn die Einstrahlung so hoch ist, dass das kalte Gleichgewicht mit dem instabilen Gleichgewicht zusammenfällt im Punkt wo sich Einstrahlung und Ausstrahlung tangieren. Eine weitere Erhöhung der Einstrahlung führt dazu, dass das kalte Gleichgewicht nicht mehr existiert. Wie

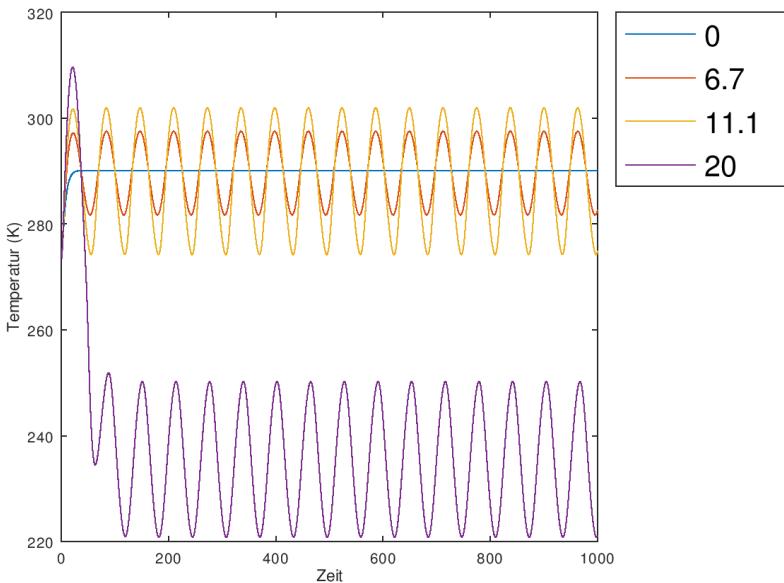


Abbildung 16.9: Simulation I

die Bifurkation zeigt, existieren für gewisse Einstrahlungen drei Gleichgewichte (warmes, instabiles und kaltes) wie in Abbildung 16.7 dargestellt. Für extrem hohe Einstrahlungen existiert lediglich das warme Gleichgewicht während für tiefere Einstrahlungen lediglich das kalte Gleichgewicht existiert. Die Erde befindet sich momentan in ihrem warmen Gleichgewicht. Durch die zyklische Einstrahlung schwankt die Gleichgewichtstemperatur in der oberen ausgezogenen Linie in Abbildung 16.8. Durch einen extrem kalten Winter beziehungsweise durch eine tiefe Einstrahlung kann es sein, dass die Erde in das kalte Gleichgewicht fällt. Dadurch würde sie in Zukunft auf der unteren ausgezogenen Linie schwanken. Um eine solche Situation genauer zu untersuchen wird im nächsten Kapitel eine Simulation berechnet.

16.4.3 Simulation I

Durch die Änderung des Neigungswinkels gemäss den Milanković Zyklen kann es zu einer möglichen Eiszeit kommen. Dies wird im Folgenden anhand einer Simulation versucht darzustellen. Dabei wird die Differenzialgleichung (??) gelöst. Es werden verschiedene Neigungswinkel ω verwendet und die Gleichgewichtstemperatur über die Zeit projizieren. Abbildung 16.9 zeigt das Ergebnis der Simulationen. Als blaue Linie ist dargestellt wie das ursprüngliche Energiehaushaltsmodell aus Kapitel 16.1 mit einem Neigungswinkel $\omega = 0$ aussieht. Da bei ist ersichtlich, dass das System unterhalb der Gleichgewichtstemperatur startet und nach dem ersten Sommer das konstante Gleichgewicht erreicht. In Orange und Gelb ist ein grösserer Neigungswinkel simuliert. Es ist ersichtlich, dass das System im warmen Gleichgewicht bleibt und um diese herum schwankt. Im violetten Fall ist der Neigungswinkel noch grösser, was dazu führt, dass das System im ersten Winter sofort in das kalte Gleichgewicht wechselt und dann in dem kalten Gleichgewicht schwankt, wie erklärt in Abschnitt 16.4.2. Die Erde wechselt von dem warmen in das kalte Gleichgewicht, es bildet sich

eine Eiszeit in der es weiterhin Sommer und Winter gibt, jedoch um ca. 60° Kelvin tiefer. In allen Situationen entscheidet sich das Gleichgewicht bereits nach der ersten Periode, beziehungsweise im ersten Jahr. In keinem der Fälle wird sich durch einen längeren Zeitraum ein weiterer Gleichgewichtswechsel stattfinden. Um eine Transformation zum kalten Gleichgewicht zu modellieren muss die Albedo beziehungsweise Coalbedo angepasst werden.

16.4.4 Coalbedo

Die temperaturabhängige Albedo ist in Gleichung (16.3) gegeben und gibt an wieviel Energie reflektiert wird. Diese ist symmetrisch um 265K und beschränkt zwischen 0.3 und 0.7 und reagiert gleichmässig auf Temperaturerhöhungen wie auf Senkungen. Tiefe Temperaturen führen zu einer erhöhten Energierflexion, da sich grössere Eisflächen bilden und diese die Sonnenstrahlen stärker reflektieren als die braune oder grüne Erde. Die Coalbedo entspricht dem Wert $1 - \alpha(T)$ und gibt an wieviel Energie von dem Planeten aufgenommen wird. Mit der Funktion in Gleichung 16.4 wird die Coalbedo asymmetrisch transformiert.

$$g(x) = x - a(x - \frac{1}{2})^2 \quad (16.4)$$

Input x in der Funktion ist die ursprüngliche symmetrische Coalbedo $1 - \alpha(T)$. In Abbildung 16.10 ist die Transformationsfunktion für verschiedene Parameter a dargestellt. Mit $a = 0$ bleibt der lineare Zusammenhang bestehen, während $a > 0$ nun asymmetrische Transformationen erlaubt. Die Transformation führt zu einer tieferen Coalbedo für hohe beziehungsweise tiefe Temperaturen. Bei einer Temperatur von 265K ist die Coalbedo wiederum 0.5, wie im ursprünglichen Modell. Dies bedeutet, dass die Coalbedo stärker reagiert für tiefere Temperaturen während die Reaktion bei höheren Temperaturen verlangsamt wird. Dies kann motiviert werden durch das selbe Argument wie zu Beginn des Kapitels. Das Eis reflektiert die Sonnenstrahlen stärker als die brauen oder grüne Erde. Ist das Eis jedoch geschmolzen, so ist der Effekt einer weiteren Temperaturerhöhung geringer als der Effekt vor der Eisschmelze. Durch diese Transformation wird die Coalbedo zu:

$$\kappa(T) = (1 - \alpha(T)) - a\left(1 - \alpha(T) - \frac{1}{2}\right)^2$$

Diese hängt wiederum von der Temperatur T ab, ist nun aber asymmetrisch durch den Parameter a verzerrt. Das Energie Haushaltsmodell kann nun mit dieser Funktion der Coalbedo erweitert werden. Somit wird das Modell aus Gleichung 16.3 durch die folgende Differentialgleichung beschrieben.

$$C \frac{dT}{dt} = \kappa(T)I(t, \omega) - \varepsilon\sigma T^4 \quad (16.5)$$

Wiederum wird die Gleichgewichtstemperatur ermittelt indem sich die Temperatur über die Zeit für die gegebenen Parameter nicht ändert $\frac{dT}{dt} = 0$, beziehungsweise die Energie Einstrahlung der Ausstrahlung der Erde entspricht. Abbildung 16.11 zeigt die Einstrahlung abhängig von der Temperatur, sowie die Ausstrahlung abhängig von der Temperatur. Diese Abbildung kann mit Abbildung 16.7 verglichen werden. Die Ausstrahlung bleibt die selbe, weiterhin als schwarze Kugel mit der Stephan Boltzmann Konstante modelliert. Die Einstrahlung hat sich nun verändert, und ist nun geringer für Temperaturen $T \neq 265K$ verglichen zu Abbildung 16.7. Dies als Resultat der transformation der Coalbedo, da diese für $a > 0$ tiefer ist, wie im obigen Abschnitt erklärt. Die zugehörige Bifurkation sieht schematisch gleich aus wie in Abbildung 16.8 beschrieben.

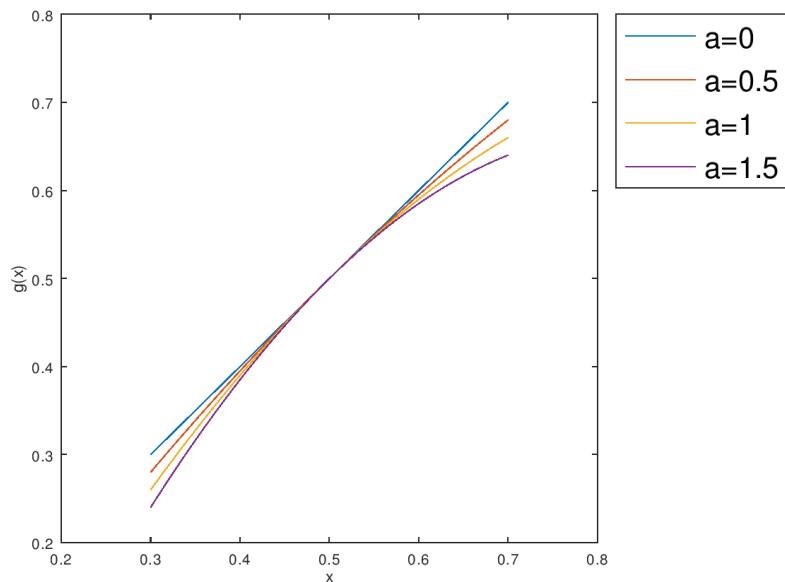


Abbildung 16.10: Asymmetrie in der Coalbedo

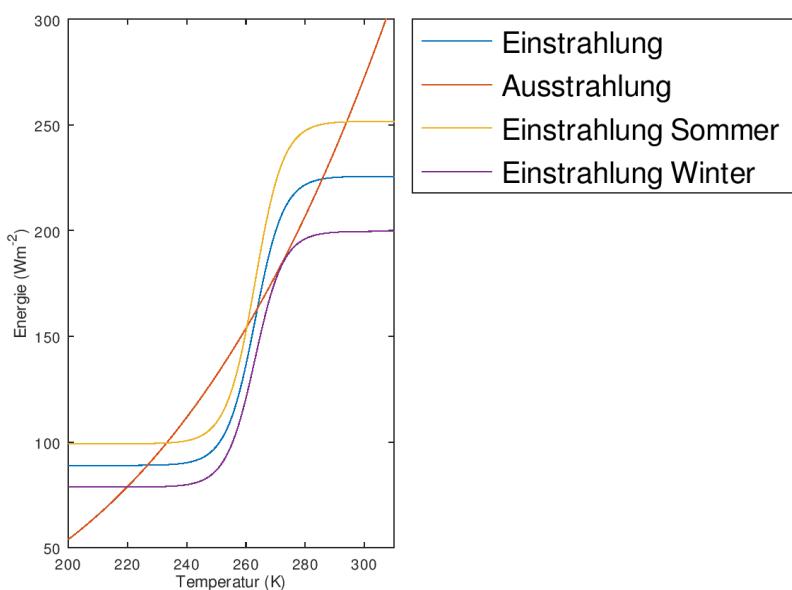


Abbildung 16.11: Gleichgewichtstemperatur

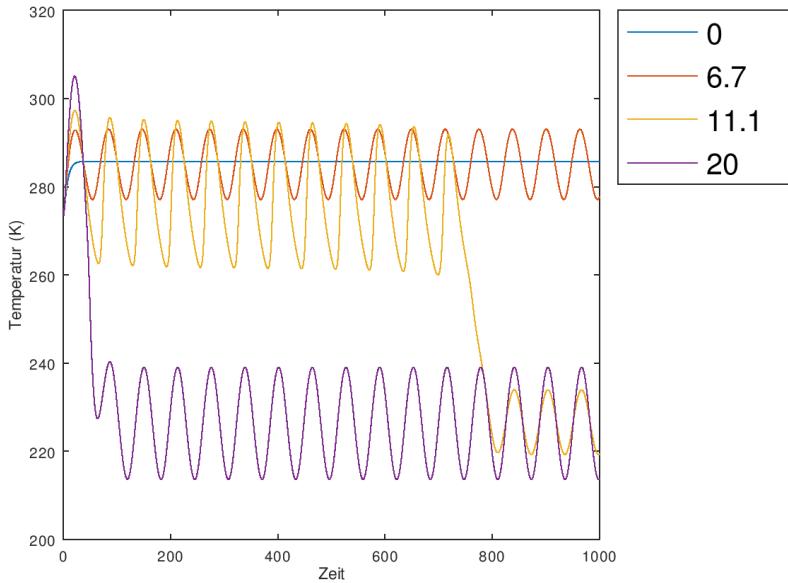


Abbildung 16.12: Simulation II a

16.4.5 Simulation II

In diesem Kapitel wird erneut eine Simulation gerechnet, welche nun im Vergleich zu Kapitel 16.4.3 die asymmetrische Coalbedo verwendet. Wiederum werden vier verschiedene Neigungswinkel simuliert. Zudem werden drei verschiedene Werte für den Parameter a , welcher die Stärke der Asymmetrie bestimmt angenommen. Die Resultate sind in Abbildung 16.12-16.14 dargestellt und können mit Abbildung 16.9 verglichen werden. In Abbildung 16.9 ist der Parameter $a = 0$, während er für die restlichen Abbildungen jeweils erhöht wird. In allen drei folgenden Abbildungen wird klar, dass nun ein Sprung in das kalte Gleichgewicht möglich ist über die Zeit. Als blaue Linie ist wiederum der ursprüngliche Fall mit einem Neigungswinkel von $\omega = 0$ dargestellt. Da zu Beginn der Simulation die Gleichgewichtstemperatur noch nicht erreicht ist, erwärmt sich die Erde und bleibt konstant im warmen Gleichgewicht. Durch die Achsenneigung kommt es in dem orangen Fall zu zyklischer Einstrahlung und somit zu einer Schwankenden Temperatur. Die Temperaturschwankung ist allerdings zu gering, als das ein Sprung in das kalte Gleichgewicht stattfinden könnte.

Im gelben Fall ist der Neigungswinkel höher als im orangen Fall. Es kommt zu stärkeren Schwankungen wobei ersichtlich ist, dass diese asymmetrische nach unten ausreissen. Es wird kälter über die Zeit, jeweils im Sommer wie auch im Winter. Bis zum moment, indem ein solch kalter Winter erreicht ist, indem das warme Gleichgewicht nicht mehr existiert, somit findet ein Sprung in das kalte Gleichgewicht statt. Es ist ebenfalls erkennbar, dass die Schwankungen im kalten Gleichgewicht geringe ausfallen als im warmen. Dies kommt durch die Asymmetrie in der Coalbedo.

Im violetten Fall ist die Achsenneigung so gross, dass bereits der erste Winter so kalt ist, dass die Erde ins kalte Gleichgewicht wechselt. Es ist auch gut zu erkennen, dass die Schwankungen stärker sind als in dem gelben Fall im kalten Gleichgewicht. Dies aufgrund der stärkeren Achsenneigung, die extremere Jahreszeiten zu folge hat.

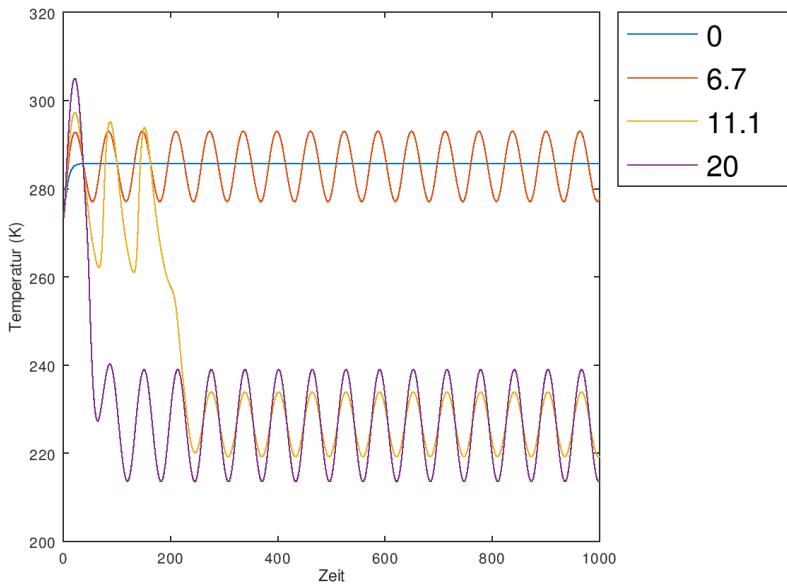


Abbildung 16.13: Simulation II b

In Abbildung 16.13 und 16.14 ist ersichtlich, wie eine stärkere Asymmetrie in der Coalbedo den Effekt der Temperatursenkung verstärkt und somit schneller eine Eiszeit erreicht wird. Dabei gelten die gleichen Effekte wie im obigen Abschnitt beschrieben.

16.5 Schlussfolgerung

Die Neigung der Erdachse bewirkt die Jahreszeiten. Je stärker die Erdachse geneigt ist, desto extremer fallen diese aus. In dieser Arbeit wurde gezeigt, wie dies mathematisch für eine Halbkugel modelliert werden kann. Zudem wurde gezeigt, dass für die Erde zwei Gleichgewichtstemperaturen bestehen. Durch einen extrem kalten Winter kann es dazu kommen, dass die Erde von der warmen Gleichgewichtstemperatur in die kalte Gleichgewichtstemperatur wechselt. Dies würde zu einer Eiszeit führen. Um aus dieser Eiszeit zu entkommen, wäre eine extreme Erwärmung der Erde notwendig, wie sie möglicherweise durch Vulkanausbrüche stattfinden könnte. Das mathematische Modell welches in dieser Arbeit verwendet wurde fokussiert sich dabei auf eine Halbkugel. Es findet kein Energieaustausch statt, die Jahreszeiten sind jeweils entgegengesetzt zwischen den Erdhalbkugeln, womit es für die durchschnittliche Erdtemperatur nur geringe Auswirkungen hat. Zudem ist die Ausstrahlung der Erde weiterhin als schwarze Kugel modelliert. Trotz dieser Vereinfachungen zeigt die Simulation wie es zu einer Eiszeit kommen kann. Ein wichtiger Punkt dabei ist die Asymmetrie der Coalbedo, wobei die Energieaufnahme der Erde bei tieferen Temperaturen stärker reagiert als bei hohen Temperaturen. Ohne diese Asymmetrie entscheidet sich die Art des Gleichgewichtes bereits in der ersten Periode. Es sei zum Schluss angemerkt, dass ein Zusammenspiel der Milanković-Zyklen dazu führen kann, dass ein kälterer Winter auftritt. Durch die Exzentrizität kann es zu einer weiteren Distanz zwischen Erde und Sonne kommen. Verbunden mit der Ekliptikschiefen, welche zu

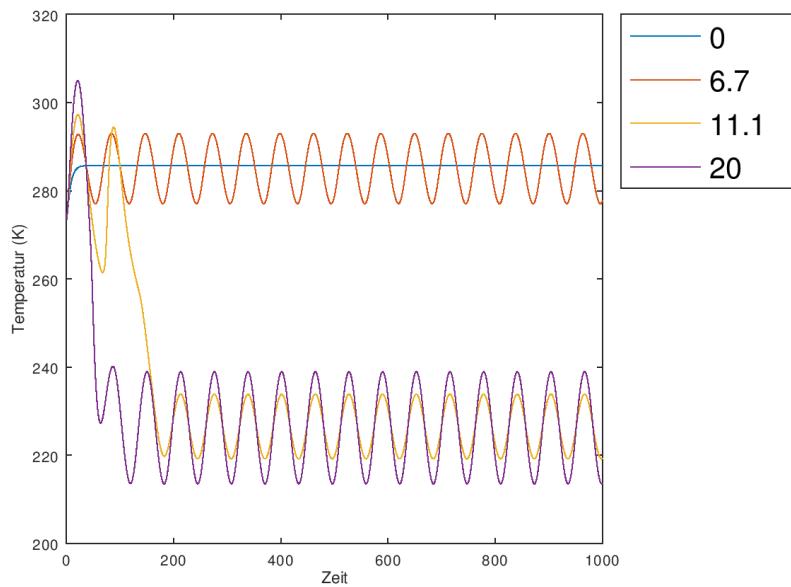


Abbildung 16.14: Simulation II c

einem höheren Neigungswinkel führt, kann somit eine Eiszeit entstehen.

Kapitel 17

Vegetation

Matthias Dunkel

17.1 Abschnitt

17.2 Schlussfolgerung

Kapitel 18

Datenassimilation für das Lorenz-System

Michael Müller

18.1 Datenassimilation

Die meteorologische Datenassimilation hat zur Aufgabe, Anfangszustände für die numerische Wettervorhersage (analysis or filtering mode), Klimaprojektionen (forecasting or predicting mode) oder Untersuchungen am vergangenen Erdklima (reanalysis or smoothing mode) zur Verfügung zu stellen, die räumlich und zeitlich unvollständig vorliegen. Die Datenassimilation nutzt hierzu direkte und indirekte Messungen der Atmosphäre in Kombination mit berechneten Modellzuständen, um daraus einen in sich stimmigen Gesamtzustand zu ermitteln. Die Ermittlung des Zustandes der Atmosphäre erfolgt in regelmässigen zeitlichen Abständen, dem sogenannten Datenassimulations-Zyklus, durch welchen eine verlässliche Bestimmung der atmosphärischen Grössen wie Druck oder Temperatur möglich wird.

18.2 Kalmanfilter

Ein Werkzeug der Datenassimilation ist der Kalmanfilter mit seinen diversen Abwandlungen. In diesem Kapitel wird der Kalmanfilter genauer erklärt und auf die Parameter eingegangen. Am Lorenzmodell aus dem Jahre 1963 (LM63) kommt eine erweiterte Version zur Anwendung, der sogenannte Extended Kalmanfilter. Dieser ist für nicht-lineare dynamische Systeme erweitert worden und wurde im Zuge der Apollo Mission von Stanley F. Schmidt entwickelt und zur Navigation im Weltraum angewendet[2].

Der Kalmanfilter ist ein rekursives Verfahren zur Filterung von Datensätzen, bei dem der zukünftige Datenpunkt als Linearkombination der Beobachtung und einer Vorhersage durch ein mathematisches Systemmodell geschätzt wird. Voraussetzung für die Beobachtung ist die Messung mindestens einer Systemvariablen mit zugehöriger Varianz. Im linearen Fall ist für das Modell eine Matrix nötig, die aus dem alten Zustand auf den neuen schliessen lässt, wie detaillierter in[3] gezeigt wird. Die

Struktur des Kalmanfilter-Algorithmus erlaubt eine Echtzeitfilterung und macht ihn so für diverse Anwendungen interessant.

18.2.1 Allgemeine Funktionsweise

Folgend ist $\phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Transformationsmatrix, $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Messmatrix, welche Systemvariablen $x_k \in \mathbb{R}^n$ mit allfälliger Verstärkung misst und woraus $z_k \in \mathbb{R}^m$ als Messwert resultiert. R_k und Q_k sind die Kovarianzen der Messung und des Systems und Elemente im $\mathbb{R}^{m \times m}$. Das Systemmodell (18.1) wie auch die Messung (18.2) sind mit einem normalverteilten Fehler, u_k respektive w_k , überlagert[3].

$$x_k = \phi_{k-1} x_{k-1} + u_k, \quad \text{mit } u_k \sim N(0, \sigma^2) \text{ und } Q_k = E(u_k u_k^t) \quad (18.1)$$

$$z_k = H_k x_k + w_k, \quad \text{mit } w_k \sim N(0, \sigma^2) \text{ und } R_k = E(w_k w_k^t) \quad (18.2)$$

Der Algorithmus besteht aus folgender Schrittfolge:

1. Vorhersage

Die Vorhersage wird sowohl für den folgenden Datenpunkt $\hat{x}_{k+1|k}$ sowie dessen Kovarianz $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ durchgeführt, wobei ϕ ausdrückt, wie vom jetzigen Zustand auf den nächsten geschlossen wird. Die Notation $\hat{x}_{k+1|k}$ bedeutet die Schätzung von x zum Zeitpunkt k für den nächsten Zeitpunkt $k + 1$.

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1|k} &= \phi \hat{x}_k \\ P_{k+1|k} &= \phi_k P_k \phi_k^t + Q_k\end{aligned}$$

2. Kalmanfaktor

Der Kalmanfaktor $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$, gewichtet in Abhängigkeit der beiden Fehlerkovarianzen die Beobachtung oder das Systemmodell stärker. Dabei löst der Algorithmus das Problem optimal, so dass sich für die später korrigierte Vorhersage das Minimum der resultierenden Kovarianz ergibt.

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^t (H_k P_{k|k-1} H_k^t + R_k)^{-1}$$

3. Korrektur

Die Vorhersage wird nun mit dem Kalmanfaktor und der Messung korrigiert. In der folgenden Beschreibung ist die Gewichtung durch den Kalmanfaktor in der Matrixschreibweise zu erkennen. Dasselbe Vorgehen gilt für die Kovarianzmatrix P .

$$\begin{aligned}\hat{x}_k &= (I - K_k H_k) \hat{x}_{k|k-1} + K_k z_k \\ P_k &= (I - K_k H_k) P_{k|k-1} (I - K_k H_k)^t + K_k R_k K_k^t\end{aligned}$$

18.2.2 Anwendung auf das Lorenz-System

Nun die Anwendung des Kalmanfilter auf das LM63, mit dem folgenden berühmten Differentialgleichungssystems.

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y \quad (18.3)$$

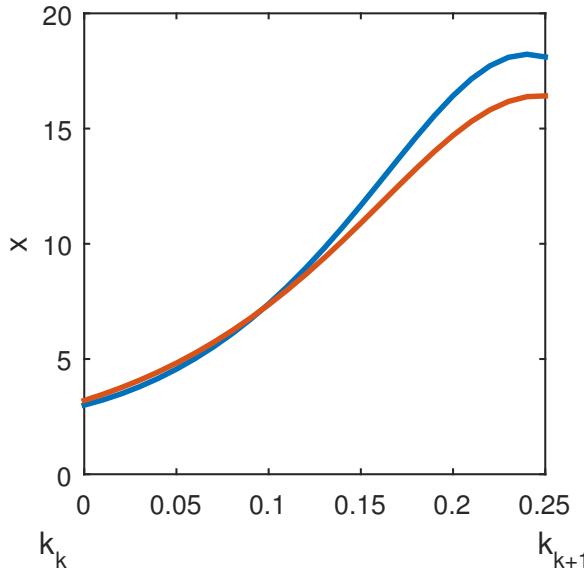


Abbildung 18.1: Auschnitt der x -Koordinate des LM63: Veränderung der Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt k und Auswirkung bei $k + 1$

$$\dot{y} = \varrho x - y - xz \quad (18.4)$$

$$\dot{z} = -\beta z + xy \quad (18.5)$$

Systemmodellierung

Als erstes ist für die Vorhersage die Transformationsmatrix ϕ notwendig, dessen Herleitung und Gebrauch nähere Erläuterungen benötigt. Deshalb als Einführung ein einfacheres Beispiel aus der translatorischen Bewegungsgleichung (18.6) zur Positionsbestimmung, wie sie beispielsweise bei autonomen Fahrzeugen zum Einsatz kommt.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s_{k+1|k} \\ v_{k+1|k} \\ a_{k+1|k} \end{pmatrix}}_{\hat{x}_{k+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \Delta t & \frac{1}{2}\Delta t^2 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\phi} \underbrace{\begin{pmatrix} s_k \\ v_k \\ a_k \end{pmatrix}}_{\hat{x}_k} \quad (18.6)$$

Die Matrix ϕ für das nicht-lineare System, wie das LM63, kann nicht auf diese Weise aufgestellt werden. Eine Möglichkeit ist die Abhängigkeit von Anfangsbedingungen, daher wie stark ändert sich der Zielwert, wenn die Anfangsbedingung(en) um ein Δx_0 verändert wird. Abbildung 18.1 zeigt einen Ausschnitt aus dem Lorenzmodell, wo die Anfangsbedingungen gegenüber dem 'Original' in rot zum Zeitpunkt k geringfügig verändert wurde und welche Auswirkung dies, innerhalb eines Zykluses, auf den nächsten Datenpunkt $k + 1$ hat.

Während des Datenassimilations-Zyklus wird das Systemmodell mit den Anfangsbedingungen

sowie dem ϕ mittels der Formel

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \mathbf{J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y, z) \\ \mathbf{F}(x, y, z)\mathbf{J} \end{pmatrix}, \text{ mit Anfangsbedingung } x(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \mathbf{E} \end{pmatrix}$$

gelöst und integriert, wobei \mathbf{F} die Jakobische Matrix des LM63

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}$$

ist. \mathbf{J} und \mathbf{E} sind 3×3 Matrizen, die spaltenweise in den Vektor eingefüllt wurden. $f(x, y, z)$ ist die rechte Seite des LM63 gemäss Formel (18.5). Der gelöste Vektor hat dann für unser System folgende Form.

$$x_k = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ J_{11} \\ J_{12} \\ J_{13} \\ J_{21} \\ J_{22} \\ J_{23} \\ J_{31} \\ J_{32} \\ J_{33} \end{pmatrix}$$

Die letzten 9 Einträge aus x_k werden nun wieder spaltenweise in eine 3×3 Matrix umgewandelt, welche nun unser gesuchtes ϕ ist. Die drei ersten Einträge sind die Lösung des Lorenzmodells als Zwischenschritte während des Datenassimilationszyklus, welche später als blaue Kreuze dargestellt werden. Die Herleitung und weitere Erläuterungen zum Vorgehen sind in [1] zu finden.

Messsystem

Die Messmatrizen, die für diese Arbeit Verwendung finden, sind folgende:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Einheitsmatrix H_1 misst zum Beispiel jeden der drei Einträge des Lorenz Systems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Die zweite Messmatrix misst den x -Eintrag nur als Kombination von x und y sowie den y -Eintrag als Kombination von y und z , was oft die Realität widerspiegelt, wo Messgrößen nicht direkt gemessen

werden können. H_3 und H_4 als anspruchsvolle Beispiele für den Filter, wo Messwerte fehlen und damit für je eine Variable keine Korrekturmöglichkeit besteht.

Der Messwert mit H_3 sieht dann zum Beispiel wie folgt aus:

$$\hat{z}_k = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{H_3} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{x_k} + \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix}}_{\text{Fehler } R}$$

Fehlermodellierung

Weitere wichtige Parameter des Filters sind die Fehlerkovarianzen, sie sind konstant und haben bei vollständig erfassbarem Messsystem folgende Form.

$$R = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{pmatrix}$$

18.2.3 Parameter und Initialisierung

Die Werte für die charakteristischen Parameter des Lorenz-System, unter denen das chaotische Verhalten auftritt, werden auch hier verwendet. Es gilt $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ und $\rho = 28$. Der Startwert

$$x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ist vom Standardwert

$$x_{0,\text{Standard}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

verschieden, um das chaotische Verhalten schneller herbeizuführen und Rechenzeit einzusparen. Gezeigt wird auch nur jeweils der Ausschnitt $t = [5, 10]$, da an der Stelle das chaotische Verhalten ausgeprägt vorhanden ist. Die Initialisierung von

$$P_0 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

für die Varianz der Simulation, ist zur Sicherheit gross gewählt. Dies hat für die Berechnung keinen signifikanten Einfluss, da der Algorithmus den Wert zeitnah korrigiert. J wird mit der Einheitsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

initialisiert und dient der Berechnung des ϕ . Diese Matrix wird über mehrere Zwischenschritte, mit Vorhersage und Korrektur, bis zum Zeitpunkt t_{k+1} integriert.

Zufällige Störsignale in der Messung oder in die Simulation werden keine eingebaut, da aufgrund der starken Vereinfachungen und Transformationen bis hin zum Lorenzmodell aus einem ursprünglichen Messfehler (z.B. $\pm 1^\circ C$) ohnehin kein Rückschluss auf Abweichungen im Modell mehr möglich wäre.

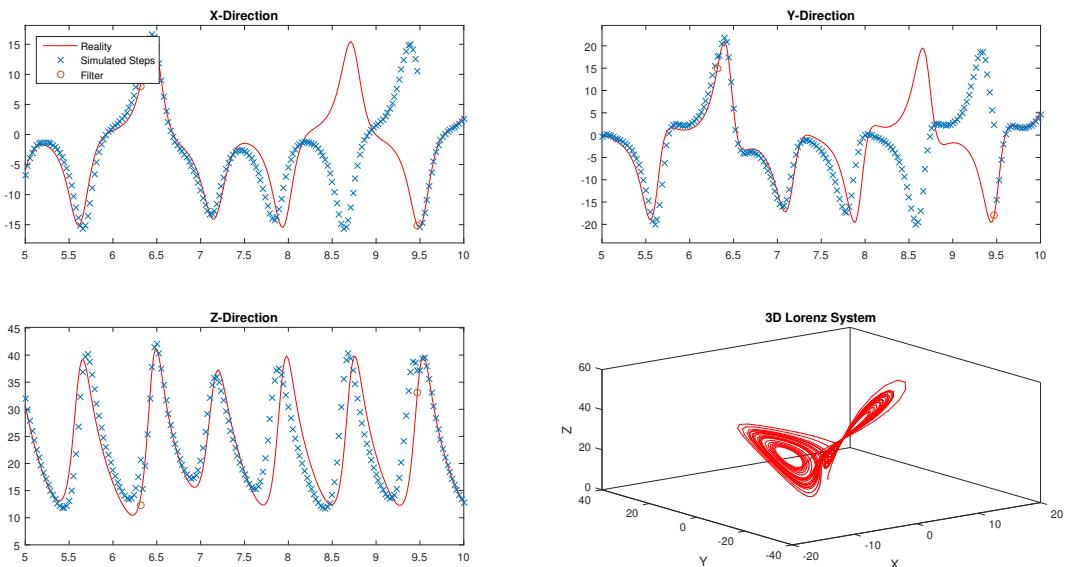


Abbildung 18.2: Beispielhafte Darstellung der drei Achsansichten mit Legende und als 3-D Plot

18.2.4 Die Realität

Das Ziel bleibt, den Zustand eines Wetter- oder Klimasystems zu schätzen oder gar vorhersagen zu können. Da ein vollständiges und korrektes Modell nicht zur Verfügung steht, begnügen wir uns mit dem gegebenen LM63. Dieses System ist einfach genug, damit wir mit den genannten Parametern eine virtuelle Realität durch Lösen des Differentialgleichungssystems erzeugen können. Die Wetter- und Klimabeobachtung erlaubt uns nicht, alle Parameter mit beliebiger Genauigkeit zu bestimmen, unsere Messungen sind immer unvollständig und mit Fehlern behaftet. Wir versuchen aber, den tatsächlichen Zustand des Systems, also die berechnete Realität aus fehlerbehafteten Messungen zu rekonstruieren.

In Abbildung 18.2 sind alle Ansichten wie das 3D Modell und die Ansicht jeder Koordinate zusammengetragen, die für die Untersuchungen notwendig sind.

Die roten Linien sind jeweils unsere erzeugte Realität, die blauen Sterne die simulierten Vorhersagen während des Datenassimilationszyklus und die roten Kreise die gefilterten Werte. Die Grafik zeigt auch, dass trotz sehr genauer Messung und folglich einer marginalen Abweichung vom Anfangszustand eine Vorhersage nur für einen beschränkten Zeitraum möglich ist.

18.2.5 Anmerkungen zur Kovarianzmatrix und dem Kalmanfaktor

Im Falle der Positionsbestimmung (18.6) sind

$$\begin{aligned} P_{k+1|k} &= f(\phi, Q) \\ K &= f(P, H, R) \\ P_k &= f(K, H, R) \end{aligned}$$

Konstanten, da alle Parameter ebenfalls konstant sind. So müssen sie nicht in jedem Datenassimilationszyklus neu berechnet werden und können, nach einmaliger Berechnung, als Konstanten einge-

miert werden. Im Falle des LM63 ist das ϕ variabel, weshalb K und P auch variabel sind und jeweils berechnet werden müssen. Zwei Beispiele sind in der Abbildung 18.3 dargestellt. Es ist sowohl eine deutliche Abnahme der Genauigkeit P sowie eine stärkere Fluktuationen von der Messmatrix H_1 zu H_2 zu erkennen.

18.3 Beobachtungen und Erkenntnisse

In diesem Kapitel werden aufgestellte Hypothesen besprochen und mit Simulationen verdeutlicht. Das LM63 wird mit den vorgestellten Messmatrizen gemessen und gefiltert. Um die Anzahl Variablen zu reduzieren, wird die dimensionslose Grösse

$$F = \frac{Q}{R}$$

verwendet. Ein $F > 1$ bedeutet, dass die Messung genauer ist, als die simulierte Vorhersage, sodass diese stärker gewichtet wird. Die absolute Fehlervarianz ist für den Filteralgorithmus irrelevant, da lediglich das Verhältnis Einfluss auf die Gewichtung nimmt.

Um den Datenassimilations-Zyklus dimensionslos darzustellen, bildet S die Schrittmenge pro Oszillation. Trotz der chaotischen Oszillation in zwei Richtungen ist diese nahezu konstant. Gilt zum Beispiel $S = 2$, so werden pro Oszillation zwei Messungen durchgeführt. Da diese nicht konstant ist, erfolgen die Messungen nicht immer am selben Ort.

18.3.1 Vollständig erfassbares System

Als vollständig erfassbares System gelten hier die Systeme mit den Messmatrizen

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine naheliegende Vermutung ist, dass eine genauere Messung, bessere Vorhersagen über einen längeren Zeitraum erlaubt. Also aus einem grösseren F resultieren besser Vorhersagen, was die oberen beiden Bilder in Abbildung 18.4 illustrieren. Dies gilt aber nur, wenn das Systemmodell gut mit der Realität korreliert, was in diesem Versuch der Fall ist, da die Realität genau dem Systemmodell entspricht. Was ein Vergleich der unteren Bilder deutlich zeigt, ist dass der Mehraufwand an Messgenauigkeit auch dadurch kompensiert werden kann, in dem zu einem günstigerem Zeitpunkt gemessen wird. Hierbei zeigt sich deutlich das Chaos des System, wo nicht quantitativ beurteilt werden kann, zu welchen Zeitpunkt welche Genauigkeiten notwendig sind.

Abbildung 18.5 zeigt das Modell in dem Messungen zweimal pro Oszillation zur Verfügung stehen. So steht eine korrigierende Messung schneller zur Verfügung, jedoch wird auch der Vorhersage-Zeitraum kürzer, was denn Zweck des Filters zunehmend einschränkt. Deutliche Verbesserungen gegenüber vorhin sind nicht zu erkennen, sie werden in diesem Beispiel sogar schlechter. Je häufiger das gemessen wird, desto weniger relevant wird zudem der Zeitpunkt der Messung. Um die Relevanz nochmals zu verdeutlichen, eine Vorhersage in die entgegengesetzte Richtung bedeutet, dass die Drehrichtung der Konvektionsströme falsch geschätzt wurde.

Bei fünf Messungen pro Oszillation (Abbildung 18.6), trotz niedriger Messgenauigkeit, ist eine exakte Rekonstruktion der simulierten Realität möglich. Simulierte Zwischenschritte sind meist korrekt, sind aber nur für kurze Intervalle verfügbar und damit immer weniger interessant.

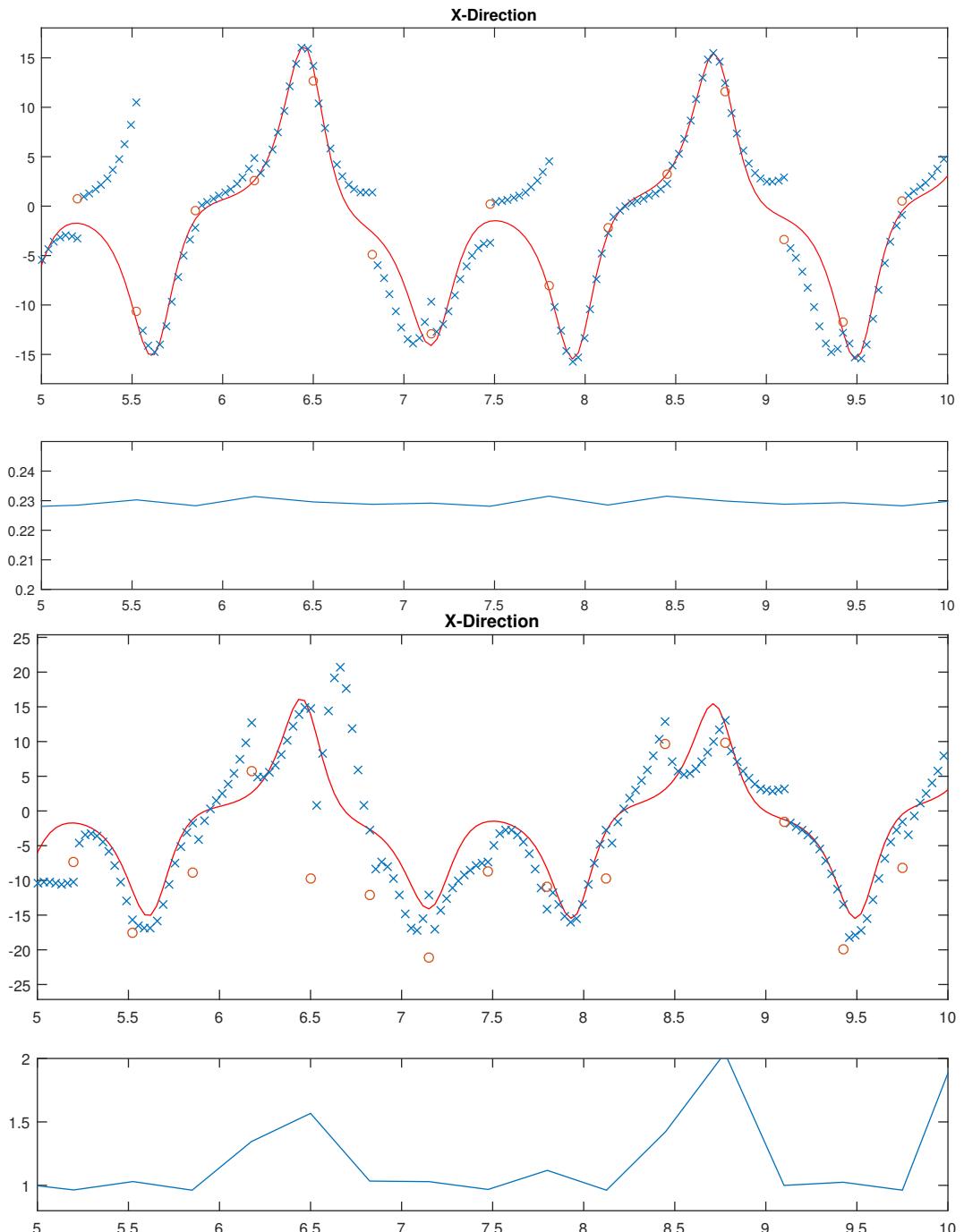


Abbildung 18.3: Filteroutput für die X-Achse mit Kovarianzmatrix P_{11} bei direkter Messung mit H_1 der Zustandsvariablen (oben) und bei indirekter Messung mit H_2 (unten)

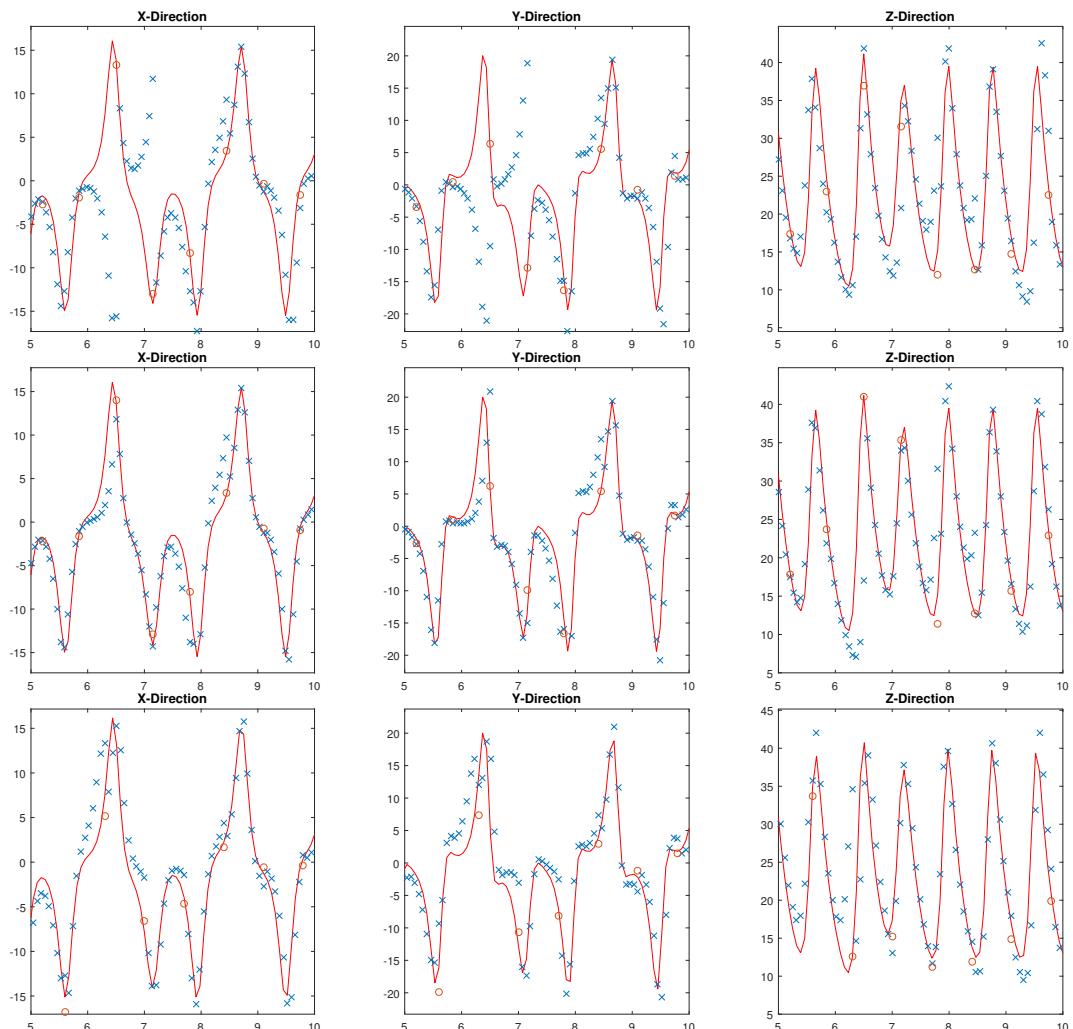


Abbildung 18.4: Messmatrix H_1 jeweils mit $S = 1$ und $F = 10$ (oben), $F = 20$ (mitte) und $F = 10$ (unten), letztere mit versetzter Messung

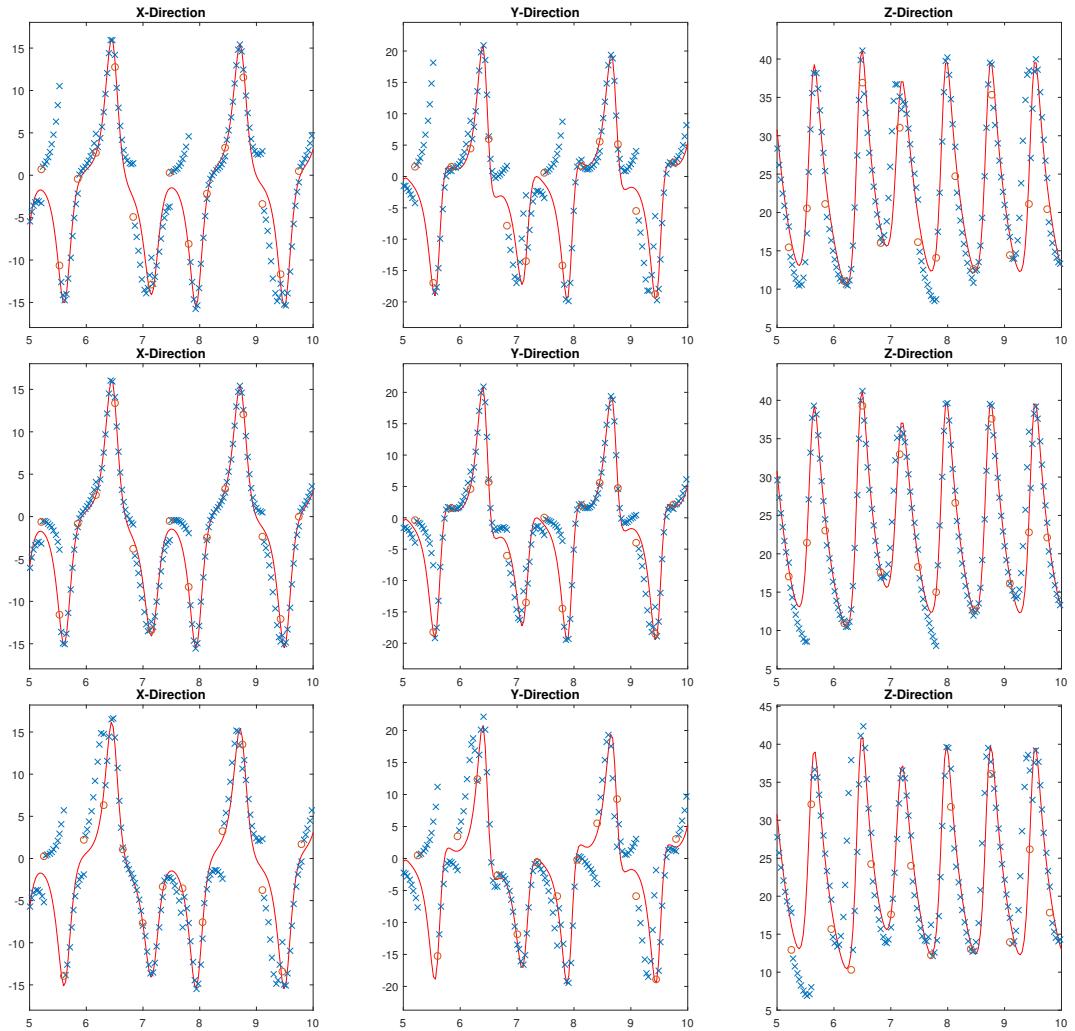
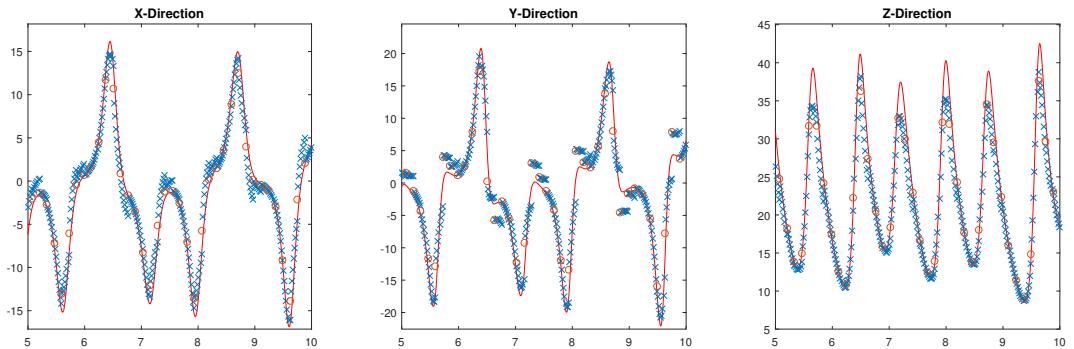


Abbildung 18.5: Messmatrix H_1 jeweils mit $S = 2$ und $F = 10$ (oben), $F = 25$ (mitte) und $F = 10$ (unten), letztere mit versetzter Messung

Abbildung 18.6: Messmatrix H_1 mit $S = 5$ und $F = 5$

Können alle Messwerte gemessen werden, aber nur als Linearkombination wie mit H_2 , sind Verschleppungen von Oszillationen aus einer Achse in eine andere erkennbar. In Abbildung 18.7 ist zu erkennen, dass trotz dieser Schwierigkeit, der Filter die Realität sehr gut vorhersagen kann. Jedoch scheint eine Verbesserung der Messgenauigkeit keine Verbesserung der Vorhersagen zu bewirken. Auch die Messrate zu verdoppeln löst die Problematik nur bedingt, da nun häufiger kombinierte Werte gemessen werden, die um den Wert anderer Koordinaten verschoben sind. Die Simulation ist hier verlässlicher als mit der Messmatrix H_1 , trotzdem ist eine regelmässige Referenzierung unerlässlich. So verlief der Versuch unter allen bisher genannten Bedingungen negativ, den Fehler der Simulation stärker zu gewichten als den Messfehler.

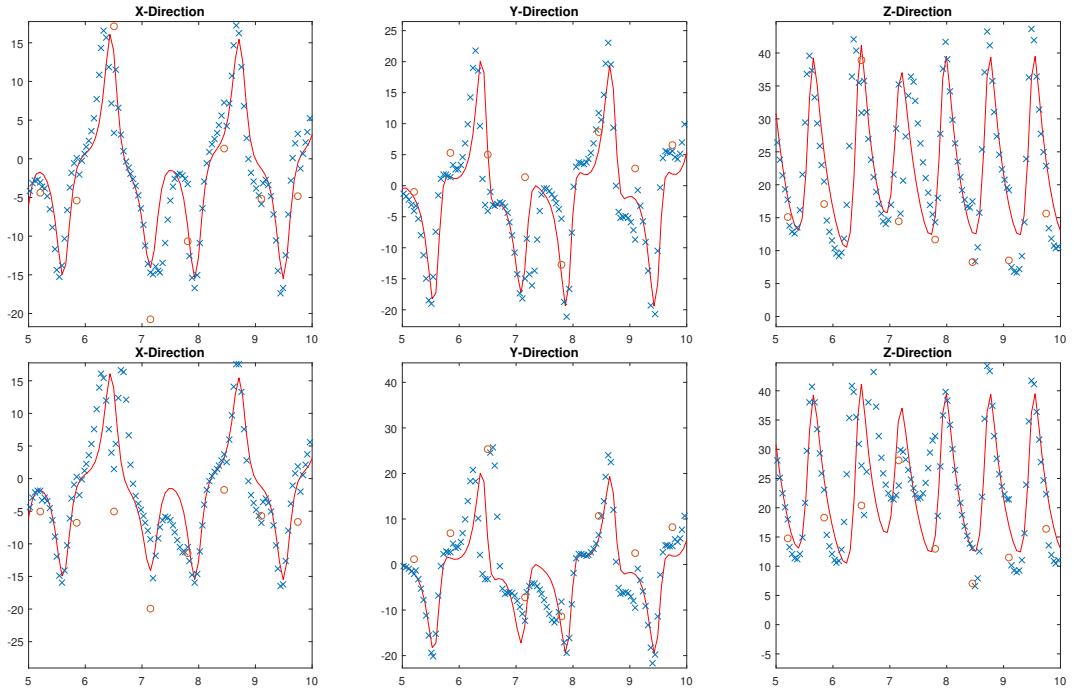
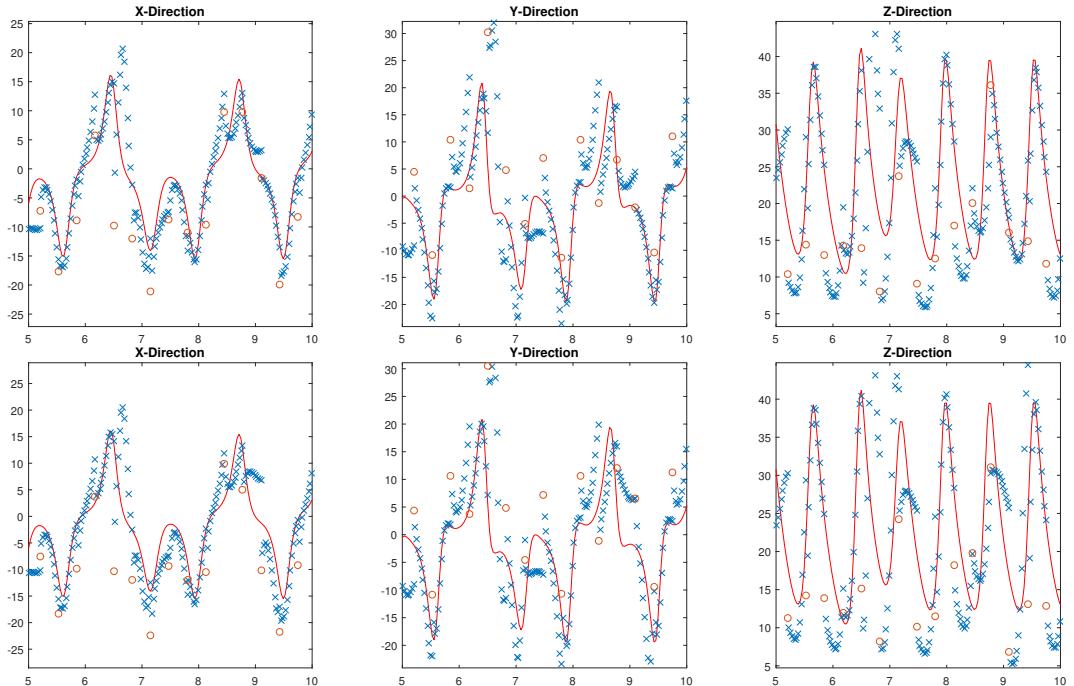
Wird die Messkadenz noch einmal wie in Abbildung 18.9 erhöht, scheinen einzig die Werte in X- und Z-Richtung verlässlichere Vorhersagen und bessere gefilterte Daten zu liefern. Der Y-Wert und deren Simulationen zeigen häufig gar in die falsche Richtung. Dies kann darauf zurückgeführt werden, dass in der Gleichung für Y alle drei Koordinaten Einfluss nehmen und so eine richtige Korrektur erschwert wird. Aufgrund der resultierenden Abweichung folgt dann eine schlechte Vorhersage.

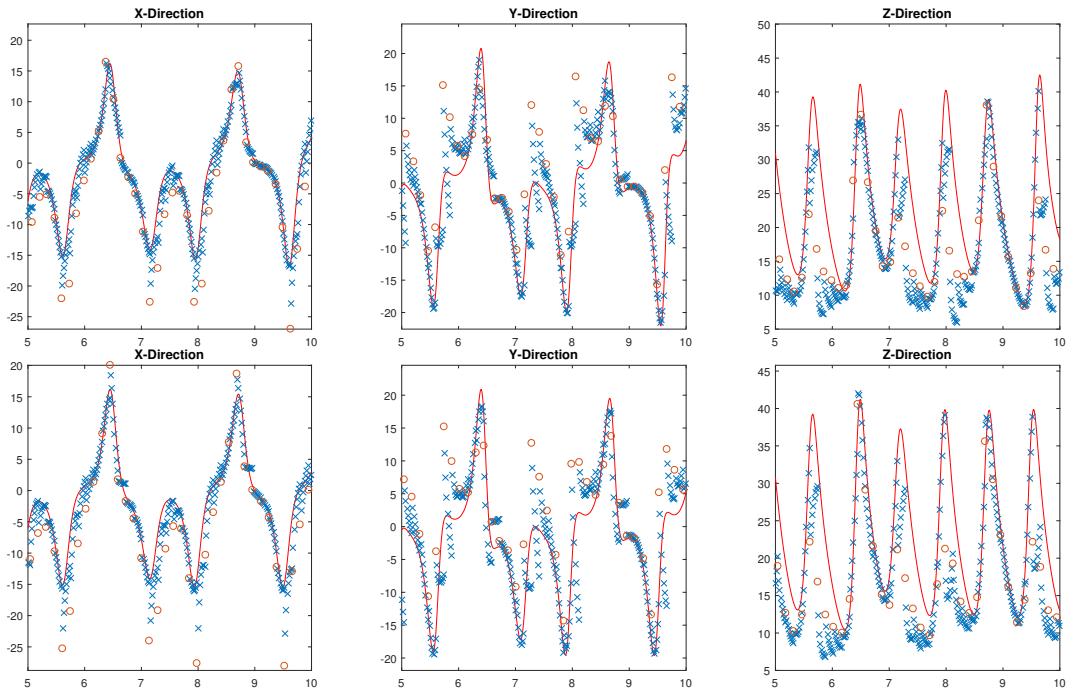
18.3.2 Unvollständig erfassbares System

Nun zu den unvollständig erfassbaren Systemen mit den Messmatrizen

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gemäss der rechten Seite des Lorenz Modells (18.5) ist bekannt, dass alle drei Werte von einander abhängen, und so folglich alle zur Verfügung stehen müssten. In Abbildung 18.11 der Versuch, mit verschiedenen F und S der Situation trotzdem Herr zu werden. Erst im mittleren Bild mit $S = 2$ und $F = 20$ ist die Anzahl der richtig vorhergesagten Werten, abgesehen von den Werten für Z, in der Überzahl. Wird die Messkadenz weiter erhöht, folgen die Simulationen gut der Realität, wobei die Schwierigkeit erneut bei den Werten für Y liegt, da Z Werte komplett auf Simulationen beruhen. Das überhaupt eine Rekonstruktion möglich ist, ist der Tatsache geschuldet, dass die Z-Achse keine Informationen über das Chaos des Systems enthält, daher ob die Konvektionszelle mit oder gegen den Uhrzeigersinn strömt. Dies ist sowohl in den diversen Z-Ansichten zu erkennen, wo die Werte mit annähernd gleichbleibender Oszillation und Amplitude vorkommen, sowie in der Abbildung

Abbildung 18.7: Messmatrix H_2 mit $S = 1$ und $F = 5$ (oben) und $F = 20$ (unten)Abbildung 18.8: Messmatrix H_2 mit $S = 2$ und $F = 10$ (oben) und $F = 20$ (unten)

Abbildung 18.9: Messmatrix H_2 mit $S = 5$ und $F = 5$ (oben) und $F = 10$ (unten)

18.10 mit der Sicht in die XY-Ebene. Folglich können hier mit einer höheren Messkadenz bessere Ergebnisse erzielt werden, als wenn die Messgenauigkeit erhöht wird.

Liegen wie mit H_4 in Abbildung 18.12 lediglich Werte für X und Z vor, reicht dies nicht mehr für eine Rekonstruktion der Realität. Die Simulationen liegen, abgesehen von den Z Werten, öfters daneben, als dass sie die Drehrichtung richtig angeben. Eine Erhöhung der Messkadenz oder genaueres Messen hilft nicht, die Vorhersagen zu verbessern. Dies deshalb, da das Y relevante Informationen über das Gesamtsystem enthält. Da die Messwerte für X und Z zur Verfügung stehen, korrigiert der Filter diese trotzdem richtig. Die Rekonstruktion der Z Werte scheint unter Umständen möglich zu sein, da kein chaotisches Verhalten vorliegt und dafür weniger Werte zur Verfügung stehen müssen.

18.4 Zusammenfassung der Erkenntnisse

- Auf eine höhere Messgenauigkeit kann auch zugunsten einer zeitlich besser koordinierten Messung verzichtet werden. Dies konnte erfolgreich mit der Datenassimilation gezeigt werden. Es ist aber anzunehmen, dass auch dass eine stark chaotische Komponente beinhaltet und so keine konkrete Aussage gemacht werden kann, welcher Zeitpunkt für zum Beispiel eine Temperatur- oder Druckmessung optimal ist.
- Eine stärkere Gewichtung zugunsten der Simulation bringt selbst bei dieser Anwendung, wo die Realität mit dem Systemmodell identisch ist, keine besseren Resultate. Dies wird grundsätzlich für chaotische Systeme gelten. So müssen für gute Resultate, beim vollständig erfassbaren System, die Messfehler in der Größenordnung 10 bis 20-fach kleiner sein als die der

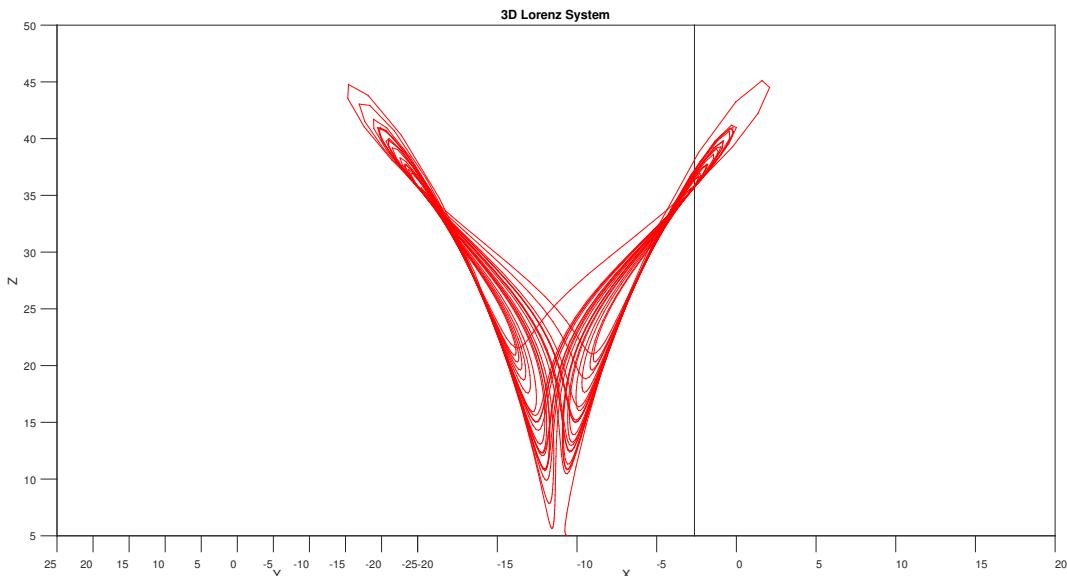


Abbildung 18.10: 3-D Lorenz System mit Sicht auf Z-Achse

Simulation, wenn nur eine Messung pro Oszillation zur Verfügung steht.

- Liegen alle Messwerte vor, aber als Linearkombination wie mit H_2 , so lassen sich mit dem Kalmanfilter erfolgreiche Vorhersagen treffen. Dies jedoch, bei gleicher Messgenauigkeit und -häufigkeit, schlechter, als wenn alle Parameter individuell vorliegen und deutlich besser, als wenn Parameter fehlen.
- Eine der wichtigeren Erkenntnisse ist, dass bei einem guten Abbild der Realität durch ein Systemmodell weniger relevante Parameter nicht zur Verfügung stehen müssen oder deren Messungen gar obsolet werden. Um zu entscheiden welche Parameter für brauchbare Datenassimilationen mit dem Kalmanfilter notwendig sind, müssen ein genügend gutes Systemverständnis und Versuchsreihen vorhanden sein. Im Falle des Lorenzmodells enthält die Z-Achse wenig Informationen über das chaotische Verhalten der Konvektionszelle, weshalb man unter den oben genutzten Parametern auch ohne korrigierende Messung vernünftige Vorhersagen machen kann. Hingegen sind die Werte für Y systemrelevant, hier werden bei höherer Messgenauigkeit auch bessere Ergebnisse erzielt aber eine Rekonstruktion wird durch fehlende Werte verunmöglich.
- Das System neigt zu extrem chaotischem Verhalten bei marginalen Änderungen der Parameter, was eine Rekonstruktion der Werte erschwert. Dies unter anderem darum, da nicht nur das Verhältnis der Messgenauigkeiten und die Messrate relevante Parameter sind, sondern auch der Zeitpunkt der Messung. Generell decken sich jedoch die simulierten Werte mit den theoretischen Überlegungen.

Literatur

- [1] Andreas Müller et. all. *Differential Gleichungen*. Hochschule für Technik Rapperswil, 2016.

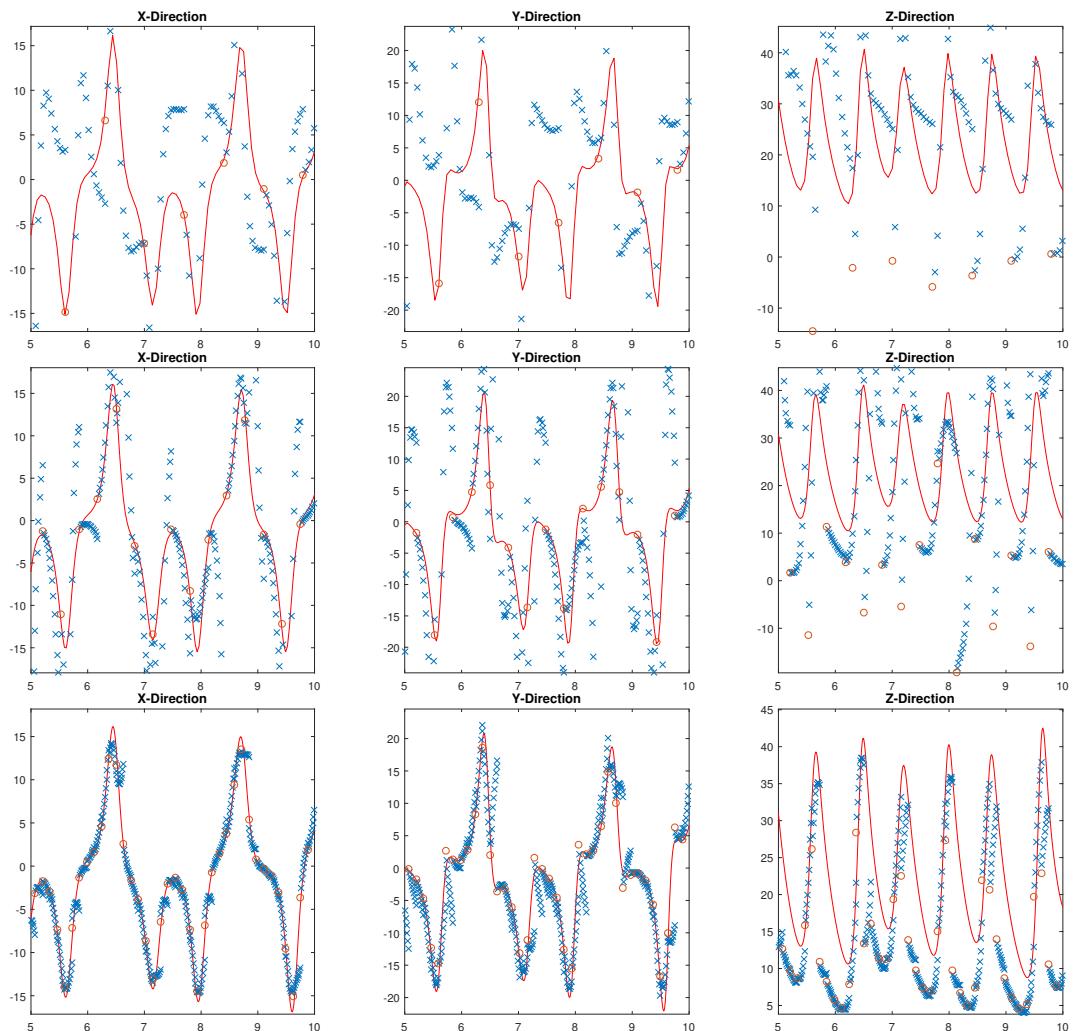


Abbildung 18.11: Messmatrix H_3 mit $S = 1, F = 10$ (oben), $S = 2$ und $F = 20$ (mitte) und $S = 5$ und $F = 5$ (unten)

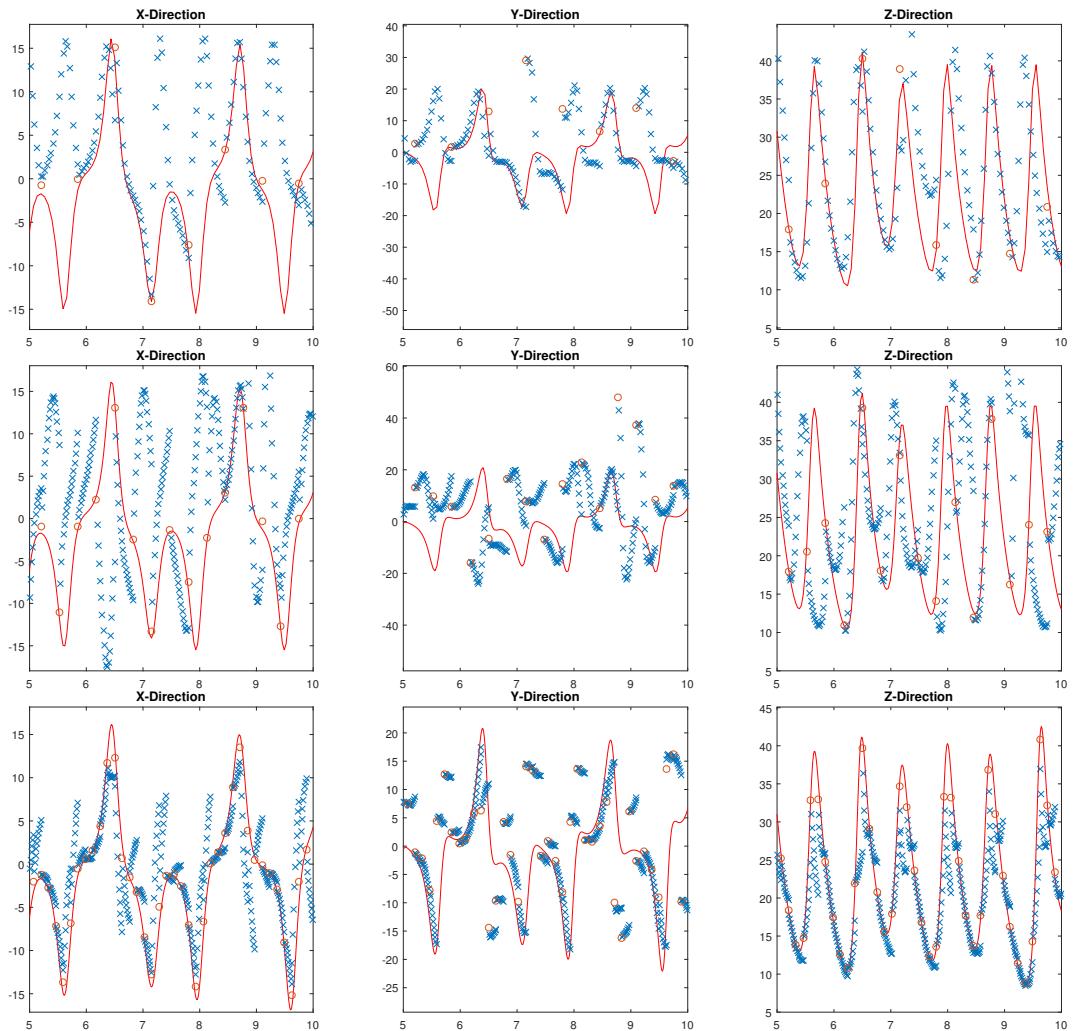


Abbildung 18.12: Messmatrix H_4 mit $S = 1$ und $F = 10$ (oben), $S = 2$ und $F = 20$ (mitte), $S = 5$ und $F = 5$ (unten)

- [2] Leonard A. McGee und Stanley F.Schmidt. *Discovery of the Kalman Filter as a Practical Tool for Aerospace and Industry*. Moffett Field California: NASA, 1985.
- [3] Andreas Müller. *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. HSR Hochschule für Technik Rapperswil, 2017.

Kapitel 19

Extreme Ereignisse

Melina Staub

19.1 Einleitung

Fast täglich erscheinen Schlagzeilen wie diese in der Zeitung:

- Wetter-Extreme häufen sich auch, in der Schweiz.
- Seit Lothar wird es der vielleicht stärkste Sturm.
- Die Schweiz reagiert empfindlich auf Wetteränderung.
- Unwetter sorgten für eine chaotische Nacht.
- Schweiz besonders stark vom Klimawandel betroffen.

Doch wieviel Wahrheit steckt in diesen Headlines? Sind sie nur Hirngespinste der Nachrichtenindustrie? Wollen uns die Medien täuschen oder geht da draussen wirklich etwas vor sich?

Dass die Natur im Wandel ist, steht ausser Frage. In der Geschichte der Erde waren extreme Ereignisse keine Seltenheit. Ob Eiszeiten, Trockenperioden oder lang anhaltende Regenschauer, wohl jedes vorstellbare Ereignis ist vorgekommen. Vulkanausbrüche pumpten Kohlendioxid in die Atmosphäre und Meteoriteinschläge lösten Tsunamis aus, die die Landflächen fluteten. Die Erde hat sich nach jedem Ereignis erholt und den neuen Umständen angepasst. Doch seit Mitte des 18. Jahrhunderts im Zuge der Industrialisierung hat sich viel verändert. Wald wurde verbrannt und in Ackerland umgewandelt, Dampfmaschinen erfunden und die Bevölkerungszahl explodierte. Waren es um 1750 noch knapp 1 Milliarde Menschen, betrug die Anzahl der Weltbevölkerung 200 Jahre später mehr als das Doppelte. Die Menschen begannen im grossen Stil CO² in die Atmosphäre zu pumpen, was zum Treibhauseffekt führte. Dabei erwärmt sich die Globale Temperatur etwa 100 mal schneller, als sie das bei historischen natürlichen Klimaveränderungen erwärmt hat. Dies wurde bereits im Kapitel 5.2 näher behandelt.

Die nachfolgenden Seiten wurden ohne Vorurteile oder frühzeitige Feststellungen rund um den Klimawandel erstellt. Am Ende soll die Wahrheit festgestellt werden. Was bereits klar ist, die Erde

**Die Niederschläge und Hochwasserkatastrophe vom 14./15. Juni 1910
und ihre Ursachen.**

Mitte Juni gingen über einen Teil der Schweiz ausserordentlich starke Niederschläge nieder. Diese gaben Veranlassung zu gewaltigen Hochwassern verschiedener Flüsse und damit zu wahren Katastrophen, wie wir sie seit Jahrzehnten nicht mehr erlebt hatten; sie führten uns eindringlich vor Augen, dass unser Land trotz der grossen für Flusskorrekturen und Flussverbauungen gebrachten Opfer vor Überraschungen keineswegs ganz gesichert ist. Die Untersuchung des vorliegenden Falles wird uns aber lehren, dass ähnliche Fälle glücklicherweise sehr selten sein müssen; verschiedene Faktoren haben nämlich dazu beigetragen, das durch die an und für sich ganz ausserordentlich grossen Niederschläge erzeugte Hochwasser der Flüsse noch verderblicher zu machen.

Abbildung 19.1: Originaltext aus den Annalen 1910 zur Hochwasserkatastrophe vom Juni 1910.
(Quelle: MeteoSchweiz)

wird den Klimawandel überstehen, wie sie auch schon extreme Trockenperioden oder Eiszeiten überstanden hat. Doch was wird aus uns?

19.2 Was sind extreme Ereignisse?

Die Diskussionen um den Klimawandel erregt die Gemüter auf der ganzen Welt. Einige verleugnen ihn und andere verstehen ihn und tun alles um ihn zu stoppen. Besonders extreme Ereignisse wie starke Regenfälle und die daraus resultierenden Überschwemmungen und Verwüstungen bleiben uns stark in Erinnerung. Eben diese Ereignisse weichen stark von den Durchschnittswerten ab und hinterlassen oft grosse Schäden und ebenso grosse Schadensummen. Doch nicht nur überdurchschnittlich starke Ereignisse, sondern auch Trockenperioden oder Wasserknappheit sind extreme Ereignisse. Jetzt stellt sich die Frage, ob diese extremen Ereignisse natürlichen Ursprungs sind, die Verteilung also durch den Zufall bestimmt werden, also ohne den Einfluss des Menschen passiert wären oder ob diese auf den Klimawandel zurückzuführen sind und somit eine unnatürliche Häufung aufzeigen.

19.2.1 Aufzeichnungen in der Schweiz

In den *Schweizer Wetterjahresbüchern* und *Annalen der Schweizerischen Meteorologischen Zentralanstalt* lassen sich Wetter- und Klimadaten bis ins Jahr 1864 abrufen. Umfangreiche Tabellen und Berichte sind für Wetter- und Klimainteressierte ein historisch sehr bedeutender Datenschatz. Der Monatliche Wetterverlauf wurde ab dem Jahr 1911 geführt, extreme Wetterereignisse in Berichten beschrieben und aufgezeichnet (Abbildung ??). Die Anbalen wurden 2011 durch den Klimareport abgelöst, seit diesem Jahr sind der Klimabericht wie auch die Annalen für die Öffentlichkeit zugänglich und können Online eingesehen werden. Mit diesen langen und genauen Klimadaten lässt sich tief in die Schweizer Klima-Vergangenheit blicken.

19.2.2 Homogene Messreihen

Die Modernisierung der Messgeräte, eine Verschiebung des Messstandortes oder die Veränderung der Umgebung führen zu anderen Messwerten als beispielsweise diese des Vorgänger Messgeräts.

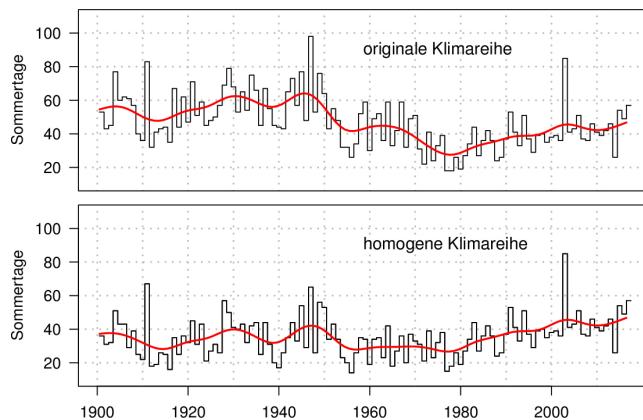


Abbildung 19.2: Entwicklung der Anzahl Sommertage ($\text{Maximum-Temperatur} \geq 25^\circ\text{C}$) pro Jahr an der Messstation Zürich/Fluntern seit 1901, gerechnet aus der originalen und homogenen Temperatur-Messreihe. Der geglättete Verlauf ist rot eingezeichnet. (Quelle: MeteoSchweiz)

Wenn man den Messstandort verlegt, verändert sich die Höhenlage. Dies wirkt sich auf die Temperaturmessung aus, da sich diese mit der Höhe im Mittel verschiebt. Temperaturverschiebungen zeichnen sich ab, die nichts mit dem Klima zu tun haben. Die Messergebnisse sind zwar genau, nicht aber miteinander vergleichbar, da die Höhenlage verändert wurde. Dies bedeutet nicht, dass die alten Messgeräte ungenaue Messresultate lieferten, es bedeutet lediglich das die alten und neuen Messwerte nicht miteinander korrespondieren. Um die Klimadaten der letzten 150 Jahre miteinander vergleichen zu können, müssen die Messergebnisse vor dem Vergleich homogenisiert werden (Abbildung 19.2), da die Daten ansonsten einen verfälschten Vergleich liefern. Um diese Fehlinterpretationen zu vermeiden, sind in den *Schweizer Wetterjahresbüchern* und *Annalen der Schweizerischen Meteorologischen Zentralanstalt* sämtliche Messwerte homogenisiert worden. Ein direkter Vergleich ist nun möglich.

19.3 Unwetter-Lotto

Um herauszufinden ob extreme Ereignisse nicht durch den Zufall bestimmt werden, benötigen wir vorerst ein Modell um diese Berechnungen durchführen zu können. Hierbei bedienen wir uns eines Glücksspiels, genauer gesagt des Lottos.

Exklusiv für die Leserinnen und Leser dieses Seminarbuches steht der Unwetter-Lottoschein zur Verfügung, welchen man am Zeitungskiosk (Abbildung 19.3) erwerben und statt auf Zahlen auf Unwetterereignisse tippen kann. Auf dem Unwetter-Lotto-Schein (Abbildung 19.4) kann wie beim normalen Zahlenlotto aus verschiedenen Zahlen ausgewählt und seine Tipps abgeben werden. Danach gibt es eine Unwetterziehung und man kann seine abgegebenen Tipps mit der Ziehung vergleichen.

Die Anzahl Kugeln 1-30 beschreiben alle vorhandenen Ereignisse, welche wir **N** nennen. Die fünf Wolken stehen für die Anzahl Tipps (Kreuze), welche wir abgeben dürfen. Das heisst, welche Unwetter **n** wir aus den totalen Ereignissen 1-30 **N** auswählen können. Die bei der Unwetterziehung gezogenen Ereignisse **M**, sind unsere Stichproben aus allen Ereignissen (Abbildung 19.5). Wie die Unwetterziehung funktioniert und wie sie mit dem Klimawandel in Verbindung gebracht wird, ist im Abschnitt 19.4 näher erklärt.



Abbildung 19.3: Unwetter-Lottoschein exklusiv erhältlich für Mathsem Teilnehmer.

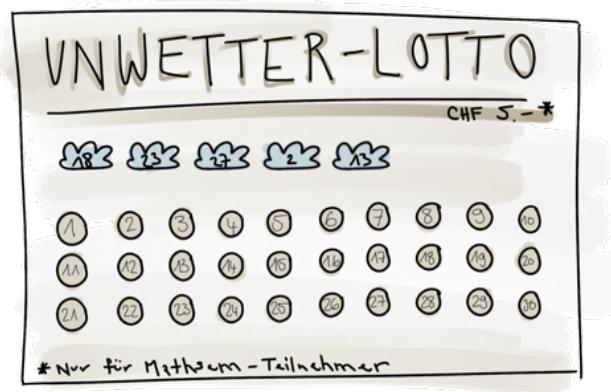


Abbildung 19.4: Unwetter-Lottoschein.

Jetzt stellen wir uns die entscheidende Frage:

Wie wahrscheinlich ist es, **k** richtige im Unwetter-Lotto (Abbildung 19.6) zu erhalten? Wir bezeichnen mit X die Anzahl der erzielten Richtigen, die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann $P(X = k)$.

19.3.1 Lottoproblem

Mit dem Unwetter-Lotto wurde das bekannte Lottoproblem beschrieben — ein Experiment ohne zurücklegen. Mit jeder Ziehung ändert sich im Laufe des Experiments die Grundgesamtheit und somit auch die Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes Ereignis zu ziehen. Der Ziehmodus ist vorgegeben und somit ist auch der Gewinn bekannt. Das Lottoproblem ist somit nichts anderes als die hypergeometrische Verteilung (19.1).

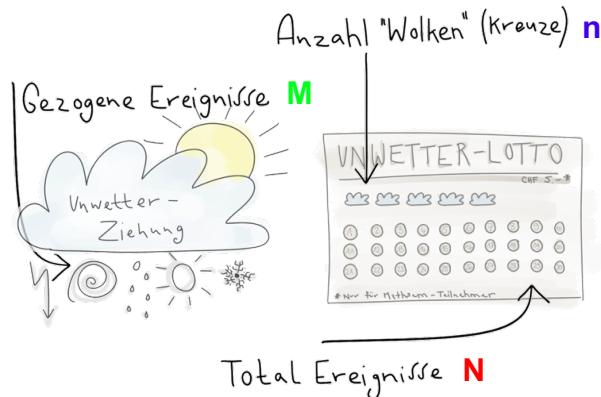


Abbildung 19.5: Unwetter-Lottoschein mit den Variablen und der Unwetterziehung.



Abbildung 19.6: Wahrscheinlichkeit, einen 5er im Unwetter-Lotto zu erhalten.

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N - M}{n - k}}{\binom{N}{n}} \quad (19.1)$$

Die hypergeometrische Verteilung (19.1) beschreibt die Wahrscheinlichkeit aus N gegebenen Elementen, mit n Elementen einer speziellen Eigenschaft, und einer Stichprobe aus M Elementen genau k Treffer zu erzielen. Anders als die Binomialverteilung ist die hypergeometrische Verteilung ein Experiment ohne zurücklegen. Die Wahrscheinlichkeit ändert sich mit jeder Ziehung. Das oben beschriebene Lottoproblem beziehungsweise die hypergeometrische Verteilung liefert uns folgende Fragestellung:

Wie wahrscheinlich ist es...

- ... auf einem Lottozettel mit **N** Feldern ...
- ... auf welchem man **n** Unwetter ankreuzen kann ...

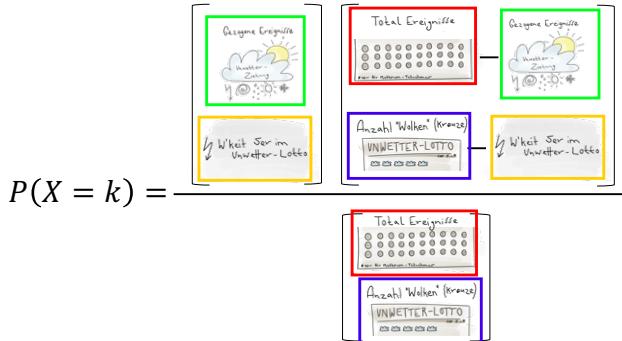


Abbildung 19.7: Die Unwetter-Verteilung. Die Wahrscheinlichkeit sagt aus, wie wahrscheinlich es ist n extreme Ereignisse aus einer Messreihe von N Jahren in den letzten 10 Jahren (M) vorzufinden.

- ... und bei der Ziehung **M** Unwetter gezogen werden ...
- ... genau **k** Richtige zu haben?

Je tiefer die Wahrscheinlichkeit ausfällt, desto unwahrscheinlicher ist es, dass Unwetter **M** bei der Unwetterziehung gezogen werden. Dies ist dann der Fall, wenn die Wahrscheinlichkeit mehrerer Unwetter gefragt ist. Die Frage wie wahrscheinlich ((**k**)) es ist, dass aus **N** Feldern auf dem Lotzettel, genau **n** Unwetter welche man ankreuzen darf, **M** gezogen werden, kann nun beantwortet werden.

19.4 Die Unwetter-Verteilung

Um die Frage zu beantworten, ob sich das Klima verändert und ob immer häufiger extreme Ereignisse auftreten, bedienen wir uns aus dem Werkzeugkasten der Statistik. Mit dem im Abschnitt genannten 19.3.1, lässt sich die Unwetter-Verteilung aufstellen. Die Fragestellung muss dabei ein wenig auf unser Problem angepasst werden.

Dabei beziehen sich die **N** Felder auf dem Lotzettel auf die Anzahl Jahre mit zugehörigen Messwerten. Die Anzahl Unwetter **n** welche man ankreuzen kann, sind die extremen Ereignisse, also Unwetter oder Messungen welche besonders extrem ausgefallen sind. Die Ziehung der **M** Unwetter ist unser Beobachtungszeitraum. Im nachfolgenden Beispiel wird ein Beobachtungszeitraum von 10 Jahren angenommen. Je tiefer die Wahrscheinlichkeit ausfällt, desto unwahrscheinlicher ist es, dass viele extreme Ereignisse in den letzten 10 Jahren **M** vorgekommen sind. Die Frage die nun beantwortet werden muss lautet:

Wie wahrscheinlich (**k**) ist es, dass **n** extreme Ereignisse aus einer Messreihe von **N** Jahren, in den letzten 10 Jahren **M** vorkommen?

19.4.1 Beispiel

Die hypergeometrische Verteilung setzt sich aus verschiedenen Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

zusammen.

Um im Abschnitt 19.6 die Klimadaten auszuwerten, werden im nachfolgenden Beispiel der hypergeometrischen Verteilung die folgenden Werte für die entsprechenden Variablen verwendet:

$N = 75$	Anzahl Jahre der Messreihe
$M = 10$	letzte 10 Jahre der Messreihe
$n = 7$	7 ausgewählte Ereignisse (extreme Ereignisse)
$k = 3$	3 extreme Ereignisse (welche eintreffen)

Die Wahrscheinlichkeit $P(X = 3)$ ergibt sich aus: Anzahl der Möglichkeiten, genau 3 extreme Ereignisse (und damit genau 4 normale Ereignisse) auszuwählen, dividiert durch die Anzahl Möglichkeiten 7 Ereignisse aus allen Ereignissen auszuwählen. Dabei gibt es

$$\binom{M}{k} = \binom{10}{3} = 120$$

Möglichkeiten, genau 3 extreme Ereignisse auszuwählen. Zudem gibt es

$$\binom{N-M}{n-k} = \binom{75-10}{7-3} = \binom{65}{4} = 677040$$

Möglichkeiten, genau 4 normale Ereignisse auszuwählen. Da jede Möglichkeit 3 extreme Ereignisse mit jeder Möglichkeit 4 normale Ereignisse auszuwählen kombiniert werden kann, ergibt sich

$$\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k} = \binom{10}{3} \cdot \binom{75-10}{7-3} = 120 \cdot 677040 = 81244800$$

Möglichkeiten für genau 3 extreme und 4 normale Ereignisse auszuwählen. Zusätzlich gibt es insgesamt

$$\binom{N}{n} = \binom{75}{7} = 1984829850$$

Möglichkeiten, 7 Ereignisse aus allen Ereignissen zu ziehen. Für $k=3$ erhalten wir somit die Wahrscheinlichkeit

$$P(X = 3) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{10}{3} \binom{75-10}{7-3}}{\binom{75}{7}} = \frac{120 \cdot 677040}{1984829850} = 0.0409329 \quad (19.2)$$

In 4.09 % aller Fälle werden genau 3 extreme und 4 normale Ereignisse vorkommen. Diese Berechnung lässt sich mit allen $X = k$ durchführen, dies wird im Abschnitt 19.4.2 gemacht.

k	P(X=k)
0	0.3507558
1	0.4161509
2	0.1872679
3	0.0409329
4	0.0046214
5	0.0002640
6	6.87 10 ⁻⁶
7	6.04 10 ⁻⁸

Tabelle 19.1: Wahrscheinlichkeiten $P(X=k)$ der verschiedenen Ereignisse, beschreiben unsere hypergeometrische Verteilung.

19.4.2 Die hypergeometrische Verteilung

Im vorangehenden Beispiel (19.2) wurde die Wahrscheinlichkeit der hypergeometrischen Verteilung berechnet für $P(k = 3)$.

Definition 19.1. *Die hypergeometrische Verteilung, sind die Wahrscheinlichkeitswerte für alle $P(X=k)$.*

Für alle $P(X = k)$ ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten (Abbildung 19.1). Die Wahrscheinlichkeit beschreibt dabei, wie wahrscheinlich es ist, genau k extreme Ereignisse in den letzten 10 Jahren vorzufinden. Beachten Sie, dass die Werte N , M und n das Experiment beschreiben und nicht mehr verändert werden. Die Variable k hingegen kann alle möglichen Ausgänge des Experiments annehmen, in unserem Beispiel also von 0 bis 7.

In Abbildung 19.8 ist sehr gut ersichtlich, dass die Wahrscheinlichkeit bei genau einem extremen Ereignis in den letzten 10 Jahren am höchsten ist. Wohingegen genau 3 Ereignisse nur noch eine Wahrscheinlichkeit von 4.09% aufweisen, was bereits sehr unwahrscheinlich ist. Häufungen von Ereignissen, welche die Anzahl 3 überschreiten, sind so unwahrscheinlich, dass sie kaum natürlichen Ursprungs sein können.

19.4.3 Sind viele extreme Ereignisse wahrscheinlich?

Stellt man sich nun die Frage ob viele extreme Ereignisse wahrscheinlich sind, muss berechnet werden wie wahrscheinlich es ist k oder mehr Ereignisse in den letzten 10 Jahren (M) zu erhalten. Die Verteilungsfunktion der hypergeometrischen Verteilung ist nichts anderes, als die aufsummierte Wahrscheinlichkeit aller möglichen Ausgänge. Weil für unser Beispiel aber wichtig ist, wie wahrscheinlich es ist, drei oder mehr extreme Ereignisse in den letzten 10 Jahren vorzufinden, muss die komplementäre Verteilungsfunktion

$$F(x) = P(X \geq I) = \sum_{k=I}^n P(X = k)$$

angewendet werden (Abbildung 19.9). Möchten wir die Wahrscheinlichkeit wissen, drei oder mehr extreme Ereignisse in den letzten 10 Jahren vorzufinden, müssen die einzelnen Wahrscheinlichkeiten

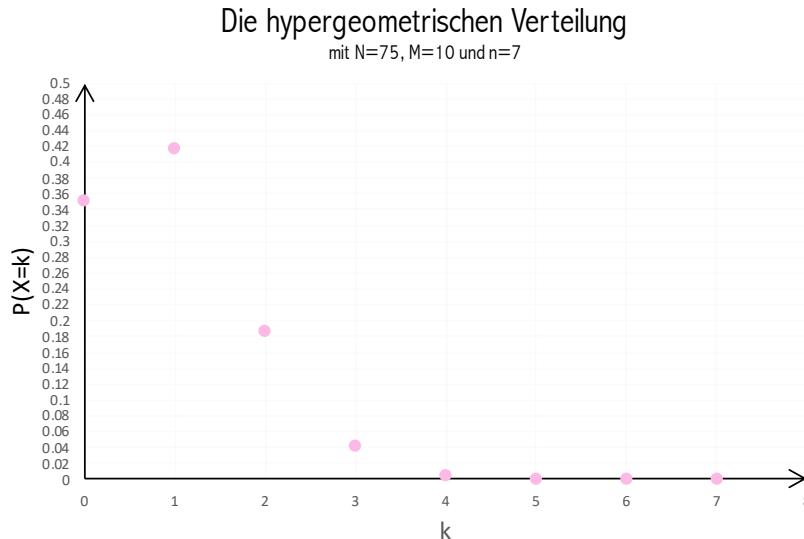


Abbildung 19.8: Die hypergeometrische Verteilung unseres Beispiels. Sie zeigt auf, wie wahrscheinlich es ist, genau k extreme Ereignisse in den letzten 10 Jahren vorzufinden.

aufsummiert (19.3) und werden.

$$\begin{aligned}
 \bar{F}(3) &= P(X \geq 3) \\
 &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) \\
 &= 0.0409329 + 0.0046214 + 0.00026340 + 6.8710^{-6} + 6.0410^{-8} \\
 &= 0.045833 = 4.58\%
 \end{aligned} \tag{19.3}$$

Drei oder mehr extreme Ereignisse in den letzten 10 Jahren sind mit einer Wahrscheinlichkeit von 4.58% möglich. Die Wahrscheinlichkeit ein oder zwei extreme Ereignisse in den letzten 10 Jahren zu haben ist mit 64.49% und 23.30% relativ hoch. Ab drei oder mehr Ereignissen nimmt die Wahrscheinlichkeit rasant ab und wird ohne äußere Einflüsse und Einwirkungen sehr unwahrscheinlich und ab 5 oder mehr Ereignissen nahezu unmöglich.

19.5 Hypothesentest

Hypothesentests werden immer dann durchgeführt, wenn aus erhobenen Daten etwas nachgewiesen werden muss, zum Beispiel, dass sich extreme Ereignisse in den letzten Jahren häuften. Der Grundsatz bei allen statistischen Tests ist, dass das Gegenteil widerlegen werden muss - wir müssen also widerlegen, dass extreme Ereignisse in den letzten Jahren zufällig verteilt sind. Die Nullhypothese wäre also: Die Häufung von extremen Ereignissen entscheidet der Zufall und werden nicht beeinflusst. Kurz: Es findet kein Klimawandel statt. Zu vergleichen ist ein Hypothesentest mit einer Gerichtsverhandlung, die Nullhypothese wäre in diesem Fall: Der Angeklagte ist *nicht schuldig*. Es

k	$P(X=k)$	$P(X \geq I)$
0	0.3507558	
1	0.4161509	0.649244
2	0.1872679	0.233093
3	0.0409329	0.045833
4	0.0046214	0.004892
5	0.0002640	0.000271
6	6.87 10^{-6}	6.93 10^{-6}
7	6.04 10^{-8}	6.04 10^{-8}

Tabelle 19.2: Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$ aller Ereignisse unseres Beispiels und die Wahrscheinlichkeiten $P(X \geq I)$ der komplementären Verteilfunktion. Die Rosa markierten Felder sind die Werte, die zur Berechnung in 19.4.1) gebraucht wurden.

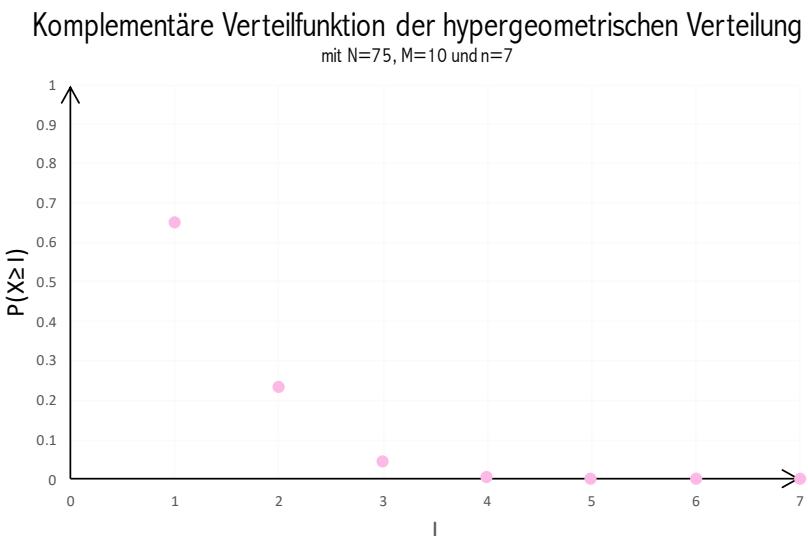


Abbildung 19.9: Die komplementäre Verteilfunktion $\bar{F}(x)$ der hypergeometrischen Verteilung zeigt auf, wie wahrscheinlich es ist mehr als k Ereignisse in den letzten 10 Jahren vorzufinden.

wird also vorerst das Gegenteil von dem behauptet, was man widerlegen möchte. Daher muss davon ausgegangen werden, dass die Nullhypothese stimmt, bis das Gegenteil bewiesen werden kann. Hierfür benötigt es genügend Beweise, welche die *nicht Schuld* oder hier die Nullhypothese widerlegen können. Falls ungenügend viele Beweise vorliegen, muss davon ausgegangen werden, dass die Hypothese stimmt oder eben der Angeklagte *nicht schuldig* ist. Dies bedeutet aber keinesfalls, dass der Angeklagte auch kein Verbrechen begangen hat. Wenn zu wenige Beweise vorliegen, heisst das nur, dass man die Schuld des Angeklagten nicht beweisen kann. Erst wenn die Nullhypothese widerlegt werden kann, und somit die Unschuld bewiesen wird, ist der Angeklagte unschuldig.

19.5.1 Nullhypothese

Unsere Nullhypothese, die geprüft werden soll:

In den letzten Jahren gab es keinen Wandel oder eine Häufung von extremen Ereignissen.

- Das Klima verändert sich nicht
- Alles bleibt beim Alten
- Der Zufall bestimmt die Anordnung der (extremen) Ereignisse

Diese Nullhypothese gilt es nun zu widerlegen, um den Klimawandel zu beweisen.

19.5.2 Signifikanzniveau

Die Grenze für die Widerlegung der Nullhypothese beschreibt die statistische Signifikanz α . Über diesen Wert wird eine bestimmte Irrtumswahrscheinlichkeit festgelegt. Bei der Festlegung dieser Schwelle wird bedacht, was für Konsequenzen es hätte, dass ein beobachteter Unterschied nur zufällig erfolgt. Sind die Folgen gravierend, wählt man eher ein tiefes Niveau (1 % statt 5%).

Bei einem Medikament wird daher eher ein tiefes Signifikanzniveau gewählt. Als Vergleich, beim Nachweis der Existenz des Higgs-Bosons¹ wurde ein noch viel strengeres Kriterium gewählt, es entspricht einem Wert von 1 in 3.5 Millionen.

Da extreme Ereignisse nicht direkt lebensbedrohlich sind, wird im Folgenden $\alpha = 5\%$ gewählt. Falls die Nullhypothese richtig ist, darf die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie fälschlicherweise abgelehnt wird, nicht unter 5% fallen (Abbildung 19.10).

Eine Häufung von 3 oder mehr extremen Ereignissen wären nicht mehr durch den Zufall bestimmt. Das bedeutet, wenn von den 7 extremsten Ereignissen der letzten 75 Jahre 3 oder mehr in den letzten 10 Jahren waren, müssen wir auf den Klimawandel schliessen. Die Nullhypothese wäre ohne Zweifel widerlegt.

19.6 Messpunkte Schweiz

Um eine möglichst grosse Vielfalt von Messreihen zu bekommen, werden verschiedene Messpunkte in der Schweiz 19.11) angeschaut.

¹Das Higgs-Boson ist Elementarteilchen (Benannt nach dem britischen Physiker Peter Higgs), deren Existenz wurde im Juli 2012 durch das CERN (mit dem Large Hadron Collider LHC) bestätigt.

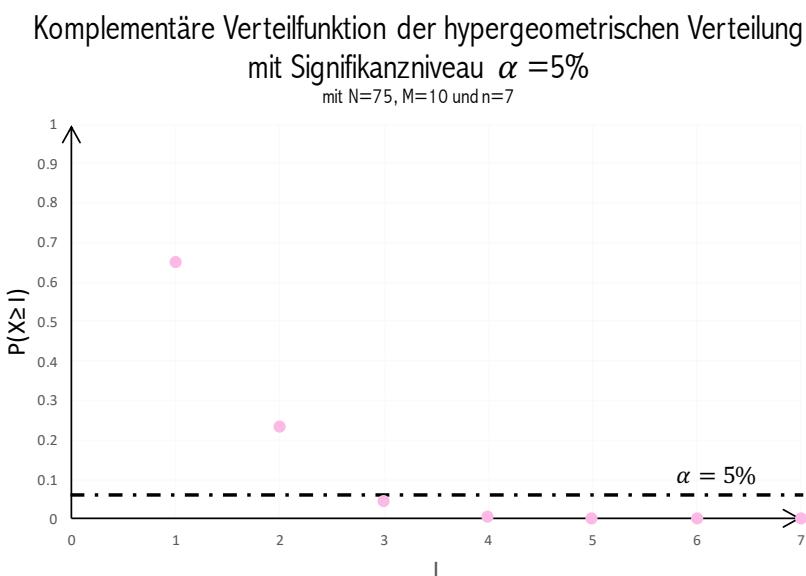


Abbildung 19.10: Die komplementäre Verteilfunktion der hypergeometrischen Verteilung mit dem eingeziehenen Signifikanzniveau von 5%.

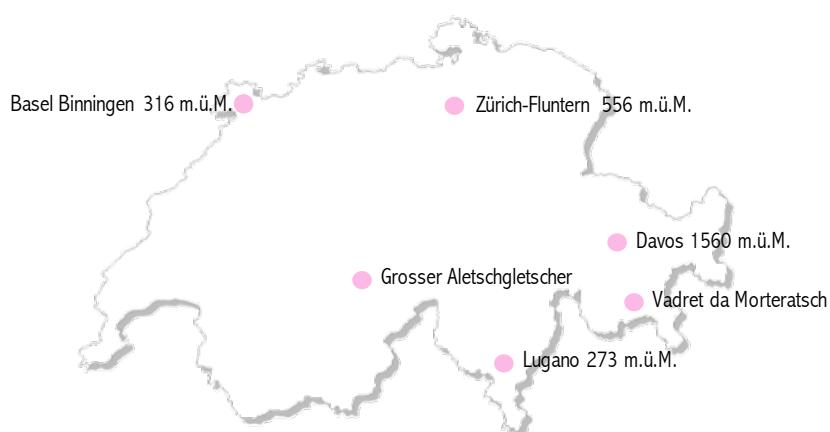


Abbildung 19.11: Gewählte Messpunkte in der Schweiz.

Die Messreihen der Standorte Basel Binningen, Zürich-Fluntern, Lugano und Davos sind von MeteoSchweiz und sind öffentlich zugänglich. Die Daten sind bereits homogenisiert. Die Messdaten der Gletscher werden vom Schweizerischen Gletschermessnetz GLAMOS,² ebenfalls öffentlich zugänglich, zur Verfügung gestellt.

19.6.1 Prüfung Messreihe

Die Messreihen geben einen Einblick über die letzten 75 Jahre, nämlich von 1943 – 2017. Damit die Hypothese widerlegt wird und somit der Klimawandel nachgewiesen werden kann, müssen drei oder mehr extreme Ereignisse in den letzten 10 Jahren vorkommen (Abbildung 19.2). Das Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ wird unterschritten 19.10) und die Hypothese widerlegt. Die detaillierten Auswertungen der Messreihen und Gletscherdaten sind im Abschnitt 19.12 aufgeführt.

19.7 Temperaturanstieg wegen Klimawandel?

Die Jahresmitteltemperatur in der Schweiz ist seit 1864 rund 2°C gestiegen (Stand 2018, MeteoSchweiz). Der grösste Anstieg passierte in den letzten Jahrzehnten. Dennoch ist für die breite Bevölkerung ein Anstieg von 2°C schwierig nachzuvollziehen. In den nachfolgenden Beispielen, wurden Klimaindikatoren gewählt, die jeder kennt, spürbar sind und beobachtet werden können.

19.7.1 Jahresmitteltemperatur

Die Jahresmitteltemperatur ist wie folgt definiert.

Definition 19.2. *Mittlere Jahrestemperatur in °C.³*

Bei der Jahresmitteltemperatur ist das Ergebnis eindeutig (Abbildung 19.14). Bei beiden Messpunkten, sowohl Lugano als auch Basel Binningen, wird der Hypothesentest widerlegt da die Alpha-grenze deutlich unterschritten wird. Bei Basel Binningen kommen vier der extremsten Ereignisse in den letzten 10 Jahren vor. In Lugano sind es sogar deren fünf! Der Klimawandel ist ohne jeden Zweifel nachgewiesen.

19.7.2 Sommertage

Ein Sommertag ist wie folgt definiert.

Definition 19.3. *Maximale Temperatur $\geq 25^{\circ}\text{C}$ und langjähriger Mittelwert (1961 - 1990).*

Die Sommertage in Lugano waren in den letzten 10 Jahren nie extrem (Abbildung 19.15). Zu Beginn der Messungen in den 40er und 50er Jahren, zeigen sich Extremwerte. Wohingegen Davos eine Häufung der Anzahl von Sommertagen in den letzten 10 Jahren zeigt. In den früheren Messjahren waren keine oder nur sehr wenige Sommertage vorhanden. In den letzten 10 Jahren ist die Anzahl der Sommertage aber immer weiter gestiegen und mit 5 Ereignissen eigentlich nahezu unmöglich. In Davos wird die Hypothese widerlegt und somit ein Wandel im Klima nachgewiesen.

²Die Veränderungen der Schweizer Gletscher werden jährlich gemessen. Das Messnetz GLAMOS wird getragen durch die ETH Zürich und die Universitäten Fribourg und Zürich mit finanzieller Unterstützung durch das Bundesamt für Umwelt BAFU, MeteoSchweiz und SCNAT.

³Systematische Messungen an den Messstationen mehrmals pro Tag. Die gemittelten Tagestemperaturen pro Tag, ergeben die mittlere Jahrestemperatur.

19.7.3 Tropennächte

Eine Tropennacht ist wie folgt definiert.

Definition 19.4. *Minimale Temperatur $\geq 20^{\circ}\text{C}$ und langjähriger Mittelwert (1961 – 1990).*

Sowohl in Lugano wie auch Basel Binningen sind in den letzten 10 Jahren eine extreme Anzahl von Tropennächten gemessen worden (Abbildung 19.16). Mit vier Ereignissen pro Standort wird das Signifikanzniveau deutlich unterschritten, wie in den vorangegangenen Messreihen *Jahresmitteltemperatur* und *Sommertage* ist der Klimawandel real und nachgewiesen.

19.7.4 Hitzetage

Ein Hitzetag ist wie folgt definiert.

Definition 19.5. *Maximale Temperatur $\geq 30^{\circ}\text{C}$ und langjähriger Mittelwert (1961 – 1990).*

Bei den Hitzetagen ist im Klima kein Wandel zu erkennen (Abbildung 19.17). Weder in Zürich-Fluntern noch in Lugano wurden in den letzten Jahren extrem viele Hitzetage gemessen. Bei beiden Orten, waren Hitzetage zu Beginn der Messreihen in den 40er Jahren häufiger.

19.7.5 Frosttage

Ein Frosttag ist wie folgt definiert.

Definition 19.6. *Minimale Temperatur $< 0^{\circ}\text{C}$ und langjähriger Mittelwert (1961 – 1990).*

Wie bereits bei den Hitzetagen ist auch bei den Frosttagen weder in Basel Binningen noch in Lugano kein Wandel im Klima zu erkennen (Abbildung 19.18). Ebenso wurden die Extremen vermehrt zu Beginn der Messreihe gemessen.

19.7.6 Eistage

Ein Eistag ist wie folgt definiert.

Definition 19.7. *Maximale Temperatur $< 0^{\circ}\text{C}$ und langjähriger Mittelwert (1961 – 1990).*

Anhand der Anzahl Eistage in Zürich-Fluntern und Davos, kann kein Klimawandel festgestellt werden (Abbildung 19.19). Weder in den oberen noch in den unteren Extremen.

19.8 Niederschlag und Klimawandel

In den letzten Jahren nahmen die Niederschläge zu. Die Schadensumme der Hochwasserereignisse in der Schweiz beläuft sich durchschnittlich auf 300 Millionen Schweizer Franken pro Jahr. Vor allem im Jahr 2005 kam es zu extremen Hochwasserereignissen infolge starker Unwetter welche über die Schweiz zogen. Ausuferungen, Überschwemmungen und Schlammlawinen waren Folgen von diesen heftigen Unwetter. Die Schadensumme belief sich auf 3 Milliarden Schweizer Franken.

19.8.1 Jahresniederschlag

Der Jahresniederschlag ist wie folgt definiert.

Definition 19.8. *Jahresniederschlag in mm.*

Der Jahresniederschlag hat in den letzten Jahren zwar zugenommen, zeigt aber keine Häufung von extremen Ereignissen in den letzten 10 Jahren (Abbildung 19.20). Anhand des Jahresniederschlags kann man nicht auf den Klimawandel schliessen. Hier wäre es interessant eine Messreihe zu testen, welche die Anzahl Starkniederschläge pro Jahr aufzeigt.

19.8.2 Neuschnee

Die Neuschneemenge ist wie folgt definiert.

Definition 19.9. *Neuschneemenge, Jahressumme der täglichen Aufzeichnung in cm.*

Ähnlich sieht es bei der Neuschneemenge aus (Abbildung 19.21). In Davos ist kein Klimawandel festzustellen, weder in der oberen oder unteren Grenze. In Basel Binningen wurden in den letzten 10 Jahren keine extremen Neuschneemengen im oberen Grenzbereich verzeichnet, jedoch im unteren Bereich zeigt sich eine Änderung. Der Klimawandel ist festzustellen. Hier wäre es ebenfalls spannend, die Fragestellung anzupassen und abzuändern in: Wie lange bleibt der Neuschnee liegen?

19.9 Gletscherschwund?

Bei den Gletscherdaten wurde der Zeitraum von 1881 – 2017 gewählt. Durch die höhere Anzahl an Messjahren, müssen die Wahrscheinlichkeitswerte neu berechnet werden. Die Berechnungen ergeben leicht veränderte Werte, es müssen aber ebenso 3 oder mehr extreme Ereignisse in den letzten 10 Jahren vorkommen um diese dem Klimawandel zuschreiben zu können.

19.9.1 Grosser Aletschgletscher

Der grosse Aletschgletscher schmilzt, wie man gut auf der (Abbildung 19.23) sehen kann. Jedoch zeigen die Messwerte der letzten 136 Jahren keinen extremen Schwund der Eismassen auf. Anhand der Messdaten ist kein Klimawandel nachweisbar (Abbildung 19.22). Hier müsste allerdings die Messreihe hinterfragt werden. Die Messreihe zeigt nur die Längenänderung pro Jahr wieviel die Gletscherzunge schwindet und nicht die Volumenänderung der Eismasse. Der Gletscher könnte in der Länge nur wenig schwinden, würde aber im selben Jahr sehr viel an Volumen verlieren, wäre dies dennoch nicht in der Messreihe ersichtlich.

19.9.2 Vadret da Morteratsch

Beim Morteratschgletscher sieht es anders aus. Die Längenänderung in den letzten 10 Jahren ist massiv (Abbildung 19.24). Hier kann aufgrund der extremen Längenänderung auf den Klimawandel geschlossen werden. Dies ist auch deutlich in der (Abbildung 19.25) ersichtlich. Speziell in diesem Fall, wäre es spannend ob die Abnahme des Eisvolumens ebenso auf den Klimawandel schliessen lässt oder nicht.

Messreihe	Standort	Anzahl vorgekommene extreme Ereignisse	$P(X \geq I)$
Jahres Mitteltemperatur	Basel Binningen	4	0.004892
	Lugano	5	0.000271
Sommertage	Davos	5	0.000271
	Lugano	0	-
Tropennächte	Lugano	4	0.004892
	Basel Binningen	4	0.004892
Hitzetage	Zürich-Fluntern	1	0.649244
	Lugano	0	-
Frosttage	Basel Binningen	1 0*	0.649244 -
	Lugano	3 0*	0.045833 -
Eistage	Zürich-Fluntern	2 1*	0.233093 0.649244
	Davos	2 2*	0.233093 0.233093
Jahresniederschlag	Lugano	2	0.233093
	Basel-Binningen	1	0.649244
Neuschnee	Davos	1 1*	0.649244 0.649244
	Basel-Binningen	3 1*	0.045833 0.649244

*Anzahl extreme Ereignisse: Untere Grenze | Obere Grenze

Tabelle 19.3: Die Auswertung der Klimadaten schafft einen Überblick, welche Klimaindikatoren vom Klimawandel betroffen sind und welche nicht. Rosa markiert sind jene, welche das Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ unterschreiten. Die Häufung jener extremen Ereignisse (in den letzten 10 Jahren), ist dem Klimawandel zuzuschreiben.

19.10 Ist der Klimawandel in der Schweiz real?

Diese Methode liefert schnell und einfach ein Ergebnis ob eine Veränderung in einer Klimamessreihe dem Klimawandel zugeschrieben werden kann oder ob es sich um eine zufällige Häufung von extremen Ereignissen handelt. Aus den analysierten Klimaindikatoren ist der Klimawandel nicht immer eindeutig hervorgegangen (Abbildung 19.3).

Dennoch lässt sich die Frage, ob der Klimawandel in der Schweiz real ist, deutlich mit *Ja* beantworten. Vor allem die Indikatoren rund um die Temperatur zeigen einen deutlichen Wandel. Besonders die Messreihen der *Jahresmitteltemperatur*, *Tropennächte* und die *Sommertage*, weisen eine starke Veränderung im Vergleich zur Vergangenheit auf. Wohingegen bei den Niederschlägen und dem Aletschgletscher (Abbildung 19.4), kein Klimawandel festgestellt werden konnte. Mit den Vorschlägen zur Untersuchung von weiteren und anders formulierten Messreihen könnte ein Wandel eventuell auch noch bei anderen Klimaindikatoren und Messreihen aufgezeigt werden.

Mit dieser Berechnungsweise lässt es sich ohne Vorurteile und Einflüsse neutral bewerten ob der Klimawandel vorhanden ist oder nicht. Aufgrund der Tatsache, dass von acht getesteten Klimaindikatoren, fünf die Hypothese widerlegen, kann davon ausgegangen werden, dass der Klimawandel real ist. Das Klima ändert sich, ob dies gut oder schlecht für die Menschheit ist wird sich in der Zukunft zeigen. Feststeht das die Erde auch dieses extreme Ereignis wie den Klimawandel überstehen wird — mit oder ohne uns, das liegt in unseren Händen.

Auswertung extreme Ereignisse - Gletscher

mit N=129, M=10 und n=7

Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$

Gletscher	Anzahl extreme Ereignisse	$P(X \geq 1)$
Aletschgletscher	1	0.450545
Morteratschgletscher	4	0.000593

Tabelle 19.4: Die Auswertung der Gletscherdaten schafft ebenso einen Überblick über die beiden Gletscher ob diese vom Klimawandel betroffen sind oder nicht.

19.11 Ist der Klimawandel nur ein grosser Zufall?

Als Jim Inhofe⁴ im Februar 2015 in die Senatssitzung einen Schneeball mitbrachte, wollte er mit der Existenz des Schnees beweisen, dass es keine globale Erwärmung gibt. Zudem soll der Schnee der Beweis dafür sein, dass die Rekordtemperaturen aus dem Jahr 2014 ebenfalls nichts mit dem Klimawandel zu tun haben. Er unterstrich seine Aussagen und Begründungen mit einem Bibelvers aus dem 1. Buch Mose.

Solange die Erde steht, soll nicht aufhören Saat und Ernte, Frost und Hitze, Sommer und Winter, Tag und Nacht.

Frost und Hitze, Sommer und Winter — dies soll nochmals beweisen, dass es keinen von Menschenhand gemachten Klimawandel gibt. Ein Klimaskeptiker würde über die nachfolgenden Auswertungen denn Kopf schütteln und sagen: Das ist doch alles nur Zufall. Doch ist es das wirklich?

Sehen wir uns die statistischen Auswertungen rein mathematisch an, wird das Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ deutlich unterschritten. Die Nullhypothese ist sogar dann widerlegt, wenn man das Signifikanzniveau auf $\alpha = 1\%$ senken würde (Jahresmitteltemperatur, Sommertage, Tropennächte). Wäre der Klimawandel nicht vom Menschen wesentlich mit verursacht, wäre die Wahrscheinlichkeit so viele extreme Ereignisse in den letzten 10 Jahren vorzufinden, nur 5%. Sehr unwahrscheinlich, dass dies bei so vielen Klimaindikatoren eingetroffen ist. Mathematisch gesehen muss eine Klimaänderung stattfinden.

Betrachten wir erneut die Aussage von Jim Inhofe: Die Klimaforscher behaupten keineswegs, dass es mit der globalen Erderwärmung keinen Schnee mehr gibt. Dies ist auch in der nachfolgenden Auswertung ersichtlich. Obwohl die Jahresmitteltemperatur das Signifikanzniveau deutlich unterschreitet und damit wärmere Temperaturen in einem Jahr erreicht werden, gibt es immer noch Schnee.

19.11.1 Auswertung und Erklärung der Klimadaten

Wie bereits oben erwähnt, ist die Auswertung bei der Jahresmitteltemperatur sehr deutlich. Dies deckt sich auch mit dem im Kapitel 5.2 erklärten Treibhauseffekt. Das CO₂ welches *en masse* von

⁴James „Jim“ Inhofe, ist ein US-amerikanischer Politiker (Republikanische Partei) und Senator für den Bundesstaat Oklahoma. Seit Januar 2015 ist er Vorsitzender des Ausschusses für Umwelt und öffentliche Bauten. Er vergleicht Menschen, die an die globale Erwärmung und somit den Klimawandel glauben, mit Nazis und die US-Umweltbehörde EPA (United States Environmental Protection Agency) mit der Gestapo.

der Menschheit in die Atmosphäre gepumpt wird, ist der Hauptgrund für den globalen Temperaturanstieg.

Bei den Sommertagen wurde das Signifikanzniveau in Davos unterschritten, wohingegen Lugano keine extremen Ereignisse in den letzten 10 Jahren zeigt.

Bei den Tropennächten wurde an beiden Standorten der Klimawandel festgestellt. Aufgrund der fortlaufenden Veränderung des Klimas kann es durchaus vorkommen, dass die extremen Ereignisse in den nächsten Jahren nicht mehr vorkommen. Mit dem globalen Temperaturanstieg befindet sich mehr Wasser und Energie in der Atmosphäre. Dies kann vermehrt zu Gewittern am Abend führen. Die Temperatur wird durch das Gewitter und einen allfälligen Regenschauer sinken und damit keine Tropennacht verzeichnet. Der Klimaindikator *Tropenacht* reagiert sehr empfindlich auf Änderungen. Ähnlich sieht es bei den Hitzetagen aus, im Moment zeigen sich in den letzten 10 Jahren keine nennenswerten Häufungen von Klimaextremen. Trotzdem ist ein Aufwärtstrend zu erkennen. In den letzten Jahren wurden vermehrt Hitzetage registriert als vor der Jahrtausendwende. Mit dem weiteren Anstieg der Jahresmitteltemperatur ist es durchaus denkbar in ein paar Jahren vermehrt extrem viele Hitzetage in der Messreihe zu verzeichnen.

Die Frost- und Eistage zeigen im Moment noch keine verwertbaren Anzeichen des Klimawandels. Ähnlich wie bei den Hitzetagen ist dennoch ein Trend zu erkennen. Es wurden deutlich weniger Frost- bzw. Eistage seit der Jahrtausendwende verzeichnet. Bei beiden Messstandorten Zürich-Fluntern wie auch Davos fehlt nur noch ein extremes Ereignis und der Klimawandel wird nachweisbar. Besonders in Davos ist dies deutlich, in der oberen wie auch unteren Grenze fehlt nur noch ein Ereignis. Aufgrund des Abwärtstrends in den Frost- und Eistagen werden diese Klimaindikatoren ebenfalls als empfindlich eingestuft.

Über die Messjahre ist die Summe des Jahresniederschlags relativ konstant geblieben. Hier müsste untersucht werden, ob in den Starkniederschlägen oder jenen im Winter eine Änderung zu verzeichnen ist. Gemäss MeteoSchweiz wird ein höherer mittlerer Winterniederschlag verzeichnet (ausgenommen Stödalpen und Teile des Kantons Graubünden). Zudem gibt es deutliche Hinweise, dass sich die Starkniederschläge verändern: Diese kommen häufiger und stärker (Tagessummen) vor, seit den Aufzeichnungen im Jahr 1901. Der Jahresniederschlag ist daher ein gutes Beispiel dafür, dass der Klimawandel sich nicht immer direkt auf eine Statistik auswirkt. Betrachtet man nur den Jahresniederschlag, sind keine Trends oder grosse Häufungen zu verzeichnen. Sieht man sich aber die Verteilung der Niederschläge an und deren Stärke, ist ein Wandel festzustellen.

Die gefallene Neuschneemenge ist in Basel Binningen in den letzten 10 Jahren gesunken. Ein Klimawandel wurde in der unteren extremen Grenze verzeichnet. Vergleicht man dies mit der Aussage von MeteoSchweiz, dass in den letzten Jahren vor allem in den tieferen Lagen weniger Schnee verzeichnet worden ist, trifft dies zu, den beispielsweise Davos zeigt keinen Wandel auf. Mit der steigenden Jahresmitteltemperatur erwärmt sich auch die Erdoberfläche. Würde man die Fragestellung anpassen in: Wie lange bleibt der Schnee liegen? Würde man den Aspekt der globalen Erwärmung zusätzlich berücksichtigen und den Wandel erkennen.

19.11.2 Auswertung und Erklärung der Gletscher

Mit dem Aletsch⁵ - und Morteratschgletscher⁶ befindet sich nicht nur der längste Gletscher der Alpen, sondern auch der voluminöseste in der Schweiz und beide Gletscher verlieren Jahr für Jahr an

⁵Der Aletschgletscher ist 23 Kilometer lang, 80 Quadratkilometer gross und 27 Milliarden Tonnen schwer. Sein Ursprung liegt auf 4000 m.ü.M. in der Jungfrau Region.

⁶Der Morteratschgletscher (Vadret da Morteratsch) ist 6.4 Kilometer lang, 15.3 Quadratkilometer gross und hat ein Volumen von rund 1.2 Kubikkilometer Eis.

Länge. Beim Morteratschgletscher ist der Klimawandel deutlich zu erkennen. Mit 4 extremen Ereignissen in den letzten 10 Jahren ist das Signifikanzniveau unterschritten. Aufgrund der Statistik lässt sich beim Aletschgletscher kein Klimawandel erkennen, dennoch schmilzt er. Ein Grund für sein langsameres Schmelzen und damit weniger extreme Ereignisse, ist die Eisdecke. Am Konkordiaplatz beträgt diese 900 Meter, im Süden nimmt die Mächtigkeit ab und die Dicke des Eises liegt noch bei 150 Meter. Im Vergleich: Die durchschnittliche Eisdecke beim Morteratschgletscher ist mit 75 Metern Dicke deutlich weniger massiv. Würde die Fragestellung und somit die statistischen Messwerte die Änderung der Eisdecke oder Volumenänderung angeben, wäre bei beiden Gletschern vermutlich ein Wandel zu erkennen. Beim Aletschgletscher hat die Eisdecke seit 1850 zum Teil um über 100 Meter abgenommen. Vor allem die Bergführer merken den Wandel jeden Tag. Wege und Plätze, welche sie jahrzehntelang benutzen und besuchten, sind nicht mehr vorhanden oder nicht mehr passierbar. Die Eisdecke ist unwiderruflich weggeschmolzen. Ein weiteres Indiz ist die Häufung von Gletscherfunden. Am 19. September 1991 wurde auf 3208m Höhe, am Tisenjoch in den Ötztaler Alpen (Österreich/Italien), die Gletschermumie⁷ Ötzi⁸ gefunden. Der Mann lag etwa 5223 Jahre unter dem Eis begraben bis man ihn fand und das nur, weil die Gletscher und Eismassen schmelzen. Seit die Gefrierschränke der Urzeit schmelzen, kommen weltweit archäologische Funde aus dem Eis, wie Ötzi 1991. Wenn wir nichts ändern und den Klimawandel stoppen, wer weiß was in den nächsten Jahren noch aus dem Eis kommt?

19.11.3 Fazit

Der Klimawandel ist real. Klimaskeptiker und -verneiner belügen sich nur selbst und verschließen die Augen vor der Realität. Die globale Erderwärmung ist auch nicht *made in china* (Abbildung 19.12) wie Donald Trump kurz nach seiner Wahl zum Präsidenten der Vereinigten Staaten von Amerika (2016) behauptete.

Die Lage ist ernst und wenn wir, die gesamte Menschheit, nichts dagegen tun, wird unsere Untätigkeit fatale Folgen für unsere Zukunft haben.

Fossile Brennstoffe haben in den nächsten Jahren ausgedient. Nicht nur das die Ölreserven endlich sind, sie sind nicht mehr zeitgemäß. Die massive Luftverschmutzung und damit die Zerstörung von Lebensräumen belastet die Umwelt. Zusätzlich führt der Ausstoß der Abgase zur Erderwärmung und steht damit im direkten Zusammenhang mit dem Klimawandel. Dieser bedroht nicht nur uns als Mensch, sondern ebenso zahlreiche Arten und viele Ökosysteme. Gelingt es uns nicht, den Anstieg der globalen Durchschnittstemperatur deutlich zu reduzieren und damit unter 2° zu bleiben, dürfte der Klimawandel nicht mehr zu stoppen sein. Erneuerbare Energien reduzieren den CO₂ Ausstoß erheblich. Durch die Nutzung von Sonnen-, Wind- und Wasserkraftenergie oder Biomasse und Geothermie entstehen kaum schädliche Emissionen und der Treibhauseffekt wird nicht noch mehr gefördert. Erneuerbare Energien regenerieren sich selber und sind nahezu unendlich nutzbar, wirtschaftlich und schützen das Klima.

Ein schnelles Handeln ist nötig um das weitere Schmelzen der Polkappen und damit den Anstieg des Meeresspiegels zu verhindern. Inselstaaten wie die Malediven im Indischen Ozean werden von Sturmfluten heimgesucht. Zusätzlich steigt die Wassertemperatur, dadurch verdunstet mehr Wasser, was wiederum den Treibhauseffekt verstärkt und die Atmosphäre zusätzlich aufheizt. Extreme Ereignisse wie starke Unwetter, Wirbelstürme oder Starkregen folgen. In trockenen Regionen der

⁷Eine Gletschermumie ist eine Leiche, welche sich seit ihrem Tod permanent unter Frost befindet. Der tote Körper wird an einem sehr kalten Ort gleichmäßig eingefroren.

⁸Ötzi ist die international bekannteste Gletschermumie überhaupt. Sie stammt aus der späten Jungsteinzeit (Kupfersteinzeit). Der Todeszeitpunkt des Mannes wurde zwischen 3359 und 3105 v. Chr. datiert und mithilfe Radiokohlenstoffdatierung festgestellt. Die Mumie ist somit ca. 5250 Jahre alt.



Abbildung 19.12: Das Konzept der globalen Erwärmung wurde von und für die Chinesen geschaffen, um die Wettbewerbsfähigkeit der US-Wirtschaft zu beschädigen. - Donald Trump (2017)

	N	M	n	k
Klimadaten	75	10	7	Abb. 19.9
Gletscherdaten	129	10	7	Abb. 19.9

Tabelle 19.5: Übersicht der verwendeten Werte der Variablen N , M , n und k .

Erde, bewirken die steigenden Temperaturen eine länger anhaltende Dürre. Flüsse und ganze Landstriche trocknen aus. Durch den Klimawandel nimmt das Ökosystem der Erde grossen Schaden. Die prächtigen, farbigen Korallenriffe sterben ab und die Artenvielfalt der Lebewesen mit ihnen.

Wir müssen die nächsten Jahre aktiv nutzen und gegen den Klimawandel vorgehen, den unsere Zukunft liegt in den Erneuerbaren Energien und der Einsicht etwas gegen den Klimawandel zu tun. Hier und jetzt.

19.12 Auswertung der Klima- und Gletscherdaten

Nachfolgend aufgeführt sind die Auswertungen der Klima- und Gletscherdaten. In der Abbildung 19.13 wird ersichtlich, wie die Diagramme zu lesen sind und was die verschiedenen eingefärbten Balken bedeuten. Während in der Tabelle 19.5 die verwendeten Werte der Variablen aufzeigt, welche für die Berechnungen verwendet wurden.

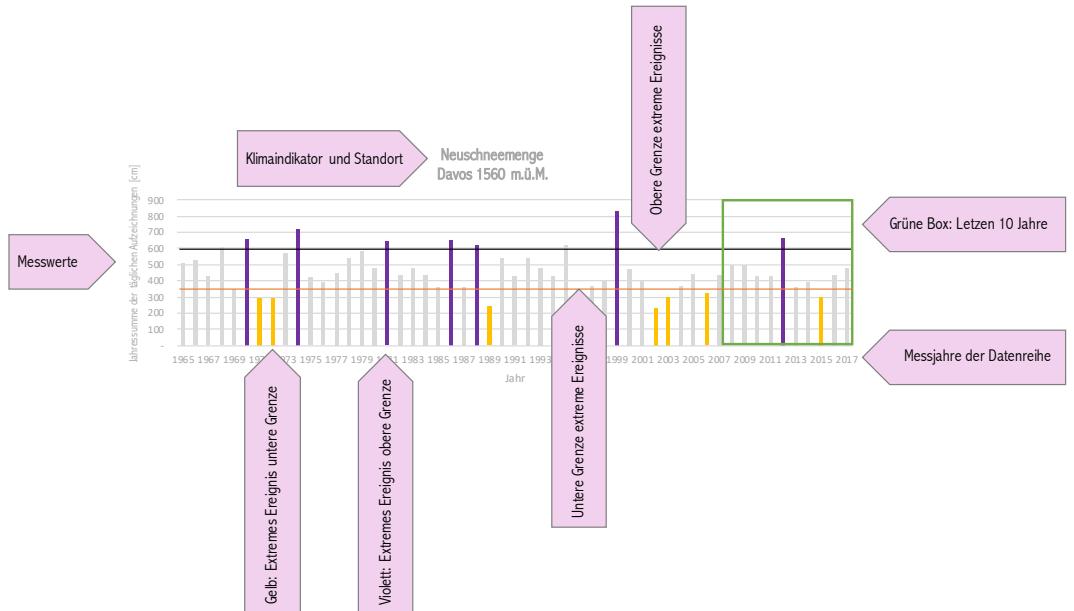


Abbildung 19.13: Eine kurze Übersicht wie die Auswertungen der Klimadiagramme gelesen werden müssen. Zu beachten ist, dass nicht in allen Diagrammen eine obere- und untere Grenze der Messwerte vorhanden ist. Rosafarbige Balken bedeuten Messwerte im normalen Bereich, also keine Extrema.

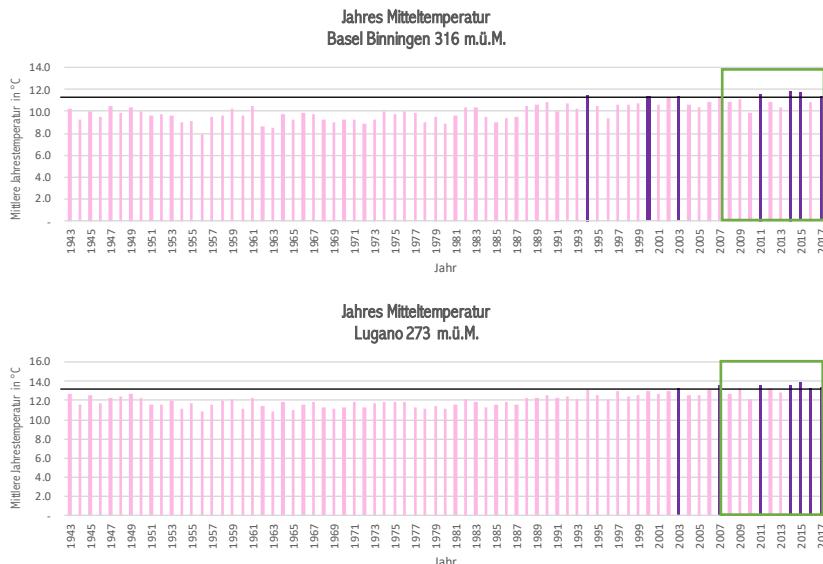


Abbildung 19.14: Die Jahresmitteltemperatur der beiden Standorte Basel Binningen und Lugano. Bei beiden Standorten wird das Signifikanzniveau deutlich unterschritten und der Klimawandel ist nachgewiesen.

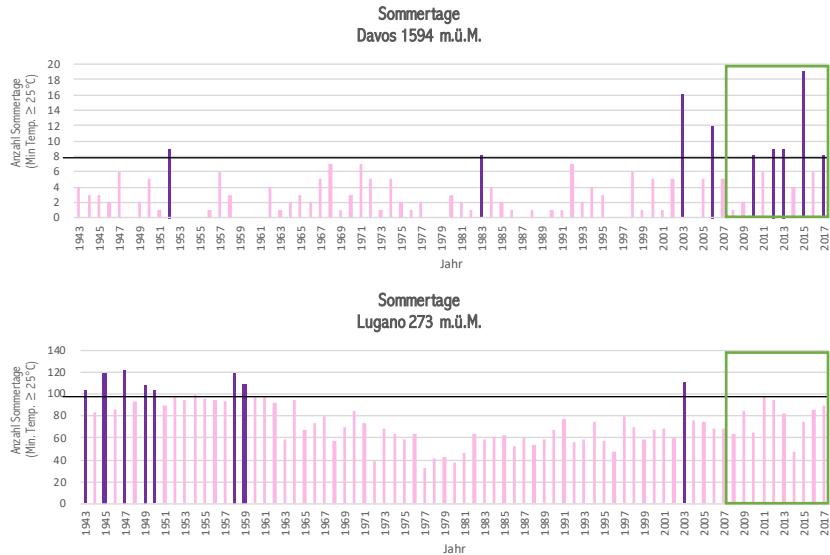


Abbildung 19.15: Die Anzahl Sommertage im Verlauf der Messreihe an den Standorten Davos und Lugano. Beim Standort Davos kann der Klimawandel nachgewiesen werden, da 5 extreme Ereignisse in den letzten 10 Jahren stattgefunden haben.

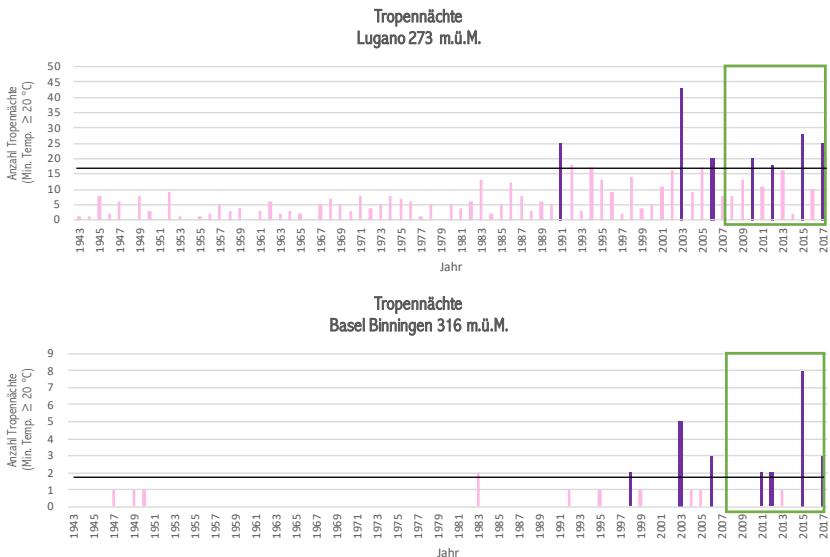


Abbildung 19.16: Die Anzahl Tropennächte an den Standorten Basel Binningen und Lugano in den vergangenen Jahren. Bei beiden Standorten wird der Klimawandel nachgewiesen.



Abbildung 19.17: Die Anzahl Hitzetage in der Messreihe an den Standorten Lugano und Zürich-Fluntern. Keine der beiden Standorte weisst anhand der Auswertung einen Klimawandel auf.

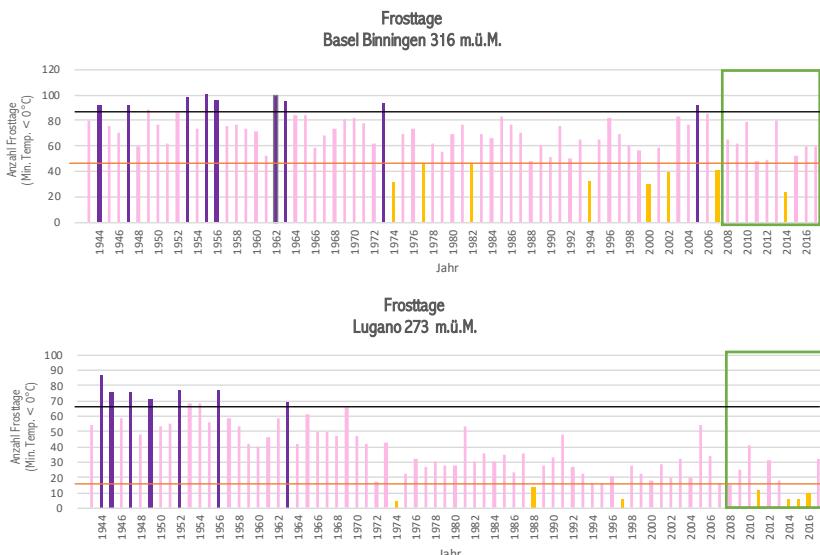


Abbildung 19.18: Die Anzahl Frosttage an den Standorten Lugano und Basel Binningen mit den oberen (violett) und unteren (gelb) Extremen Messwerten. Der Standort Lugano weisst mit den extrem wenigen Frosttagen einen Wandel im Klima auf.

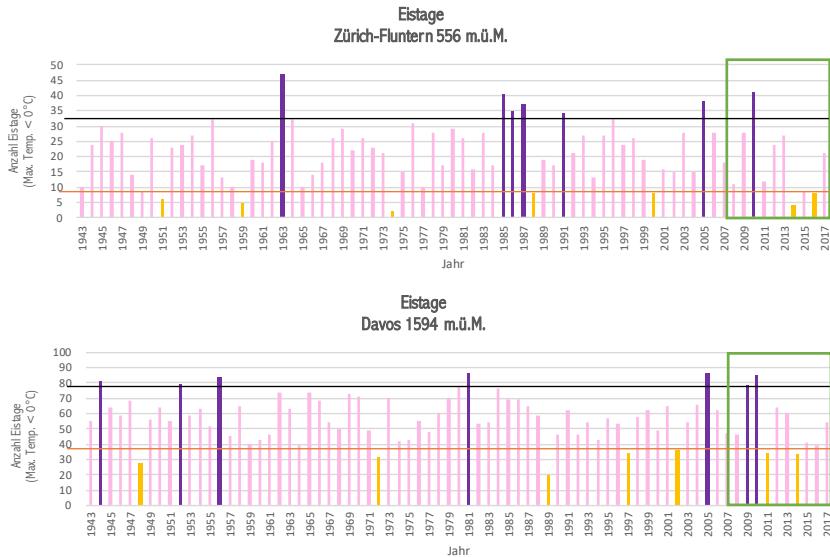


Abbildung 19.19: Die Anzahl Eistage an den Standorten Zürich-Fluntern und Davos. Weder die obere (violett) noch die untere (gelb) extremen Ereignisse sind dem Klimawandel zuzuschreiben.

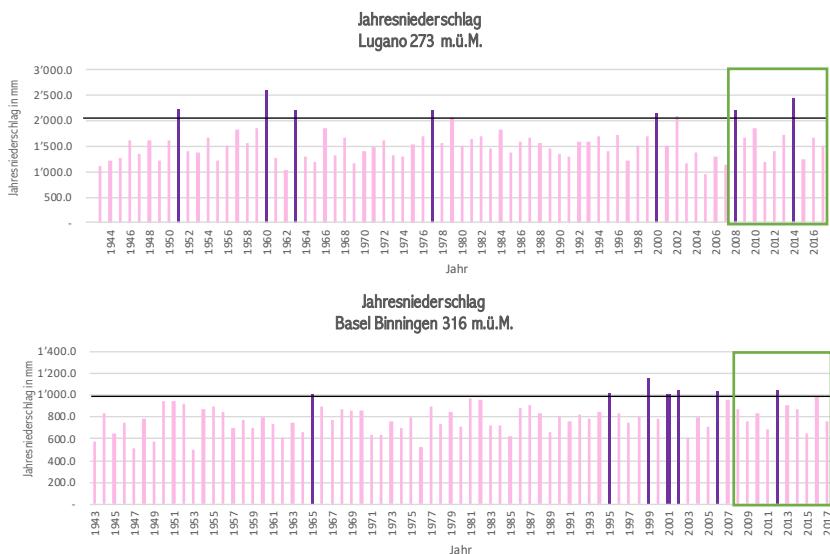


Abbildung 19.20: Der Jahresniederschlag gemessen in Millimeter pro Jahr. In den letzten 10 Jahren ist es nicht zu einer Häufung von extremen Ereignissen gekommen. Der Klimawandel wird nicht nachgewiesen.

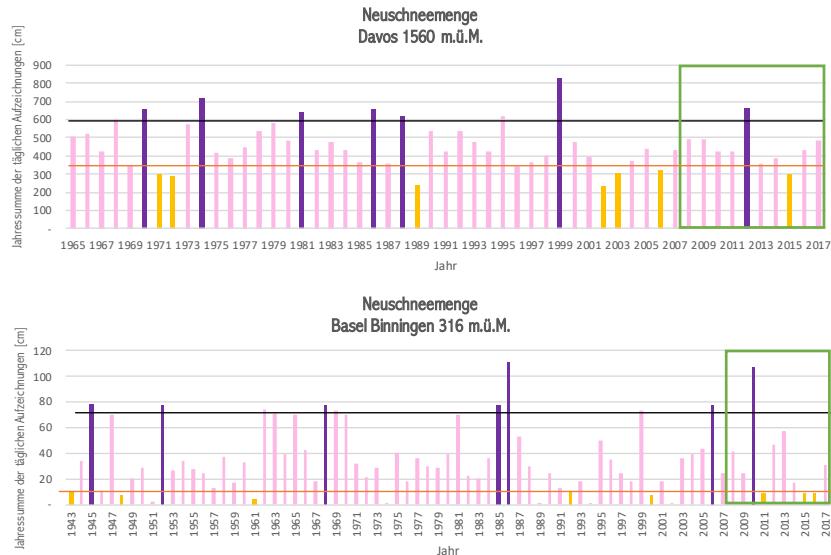


Abbildung 19.21: Der Neuschnee gemessen in der Jahressumme an gefallenem Schnee, weisst wie der Jahresniederschlag keine Extremen in den letzten 10 Jahren auf, welche dem Klimawandel zugesprochen werden könnten.

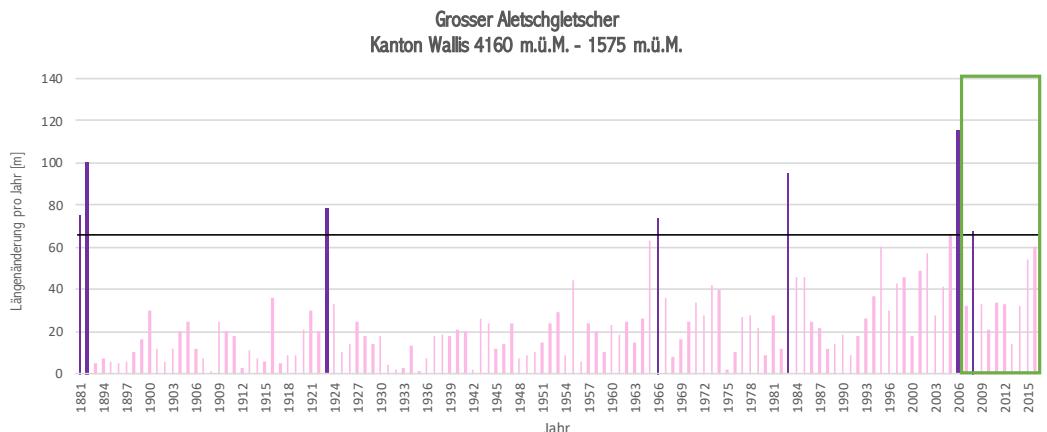


Abbildung 19.22: Die Längenänderung pro Jahr zeigt beim Aletschgletscher keine auffälligen oder gehäuften extreme Schmelzphasen. Somit kann kein Klimawandel nachgewiesen werden.



Abbildung 19.23: Der grosse Aletschgletscher im Wandel der Zeit. Links im Jahr 2015 und rechts im Jahr 2010. Die Volumenänderung ist deutlich ersichtlich.

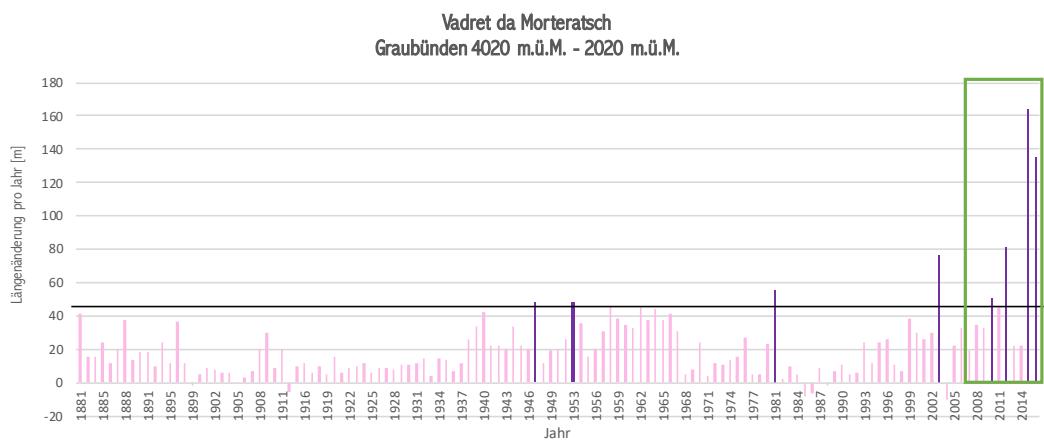


Abbildung 19.24: Die Längenänderung pro Jahr zeigt beim Morteratschgletscher deutliche extreme Ereignisse auf. Der Einfluss auf die Längenänderung ist ganz deutlich dem Klimawandel zuzuschreiben. Bemerkenswert ist das Jahr 2004, denn der Morteratschgletscher ist in diesem Jahr um 10 Meter gewachsen.



Abbildung 19.25: Der Morteratschgletscher im Wandel der Zeit. Links im Jahr 1985 und rechts im Jahr 2015. Die starke Abnahme des Volumens und vor allem die Längenänderung ist unverkennbar.

Index

- β -Ebene, 18
- Advektion, 10
- Albedo, 13
- autonom, 70
- Bahnänderungen, 23
- Bahnelemente, 23
- Cauchy-Spannungstensor, 30
- Coalbedo, 100
- Coriolis-Effekt, 16
- Coriolis-Kraft, 16
- Coriolis-Parameter, 18
- d'Alembert-Lösung, 47
- Differentialgleichung
 - Legendresche, 110
- Divergenz, 29
 - einer Matrix, 31
- Druck, 30, 32
- Eislinie, 227
- El Niño, 6
- Euler-Verfahren, 204
- Euler-Wind, 16
- Exzentrizität, 23
- Filterung, 149
- Fluid
 - inkompressibel, 29
- Fourier-Matrix, 125
- Fourier-Reihe, 124
- Funktionaldeterminante, 45
- Gleichgewichtslösung, 71
- Gradient, 10, 29
- Gruppengeschwindigkeit, 139
- Hugoniot-Rankine-Bedingungen, 202
- hydrostatischer Druck, 32
- hyperbolisch, 47
- ice line, 227
- implizites Verfahren, 48
- inkompressibel, 29
- Jacobi-Determinante, 45
- Kalman-Filter, 143
- Kalman-Filter-Matrix, 146
- Kambrium, 6
- Keplersche Gesetze, 23
- Kontinuitätsgleichung, 28
 - verallgemeinerte, 29
- Konvektion, 9
- Kronecker-Produkt, 31
- Kugelkoordinaten, 106
- Laplace-Operator in Kugelkoordinaten, 108
- Legendresche Differentialgleichung, 110
- Lorenz-Modell, 5
- Makrov-Eigenschaft, 149
- Markov-Kette, 149
- Messfehler, 146
- Messfehler-Kovarianz, 146
- Nabla-Operator, 10, 28
- Navier-Stokes Gleichung, 31
- Neigung der Erdachse, 23
- Plancksches Strahlungsgesetz, 12
- Poisson-Problem, 46
- Prozess, stochastischer, 148
- Rankine-Hugoniot-Bedingungen, 202
- Reanalyse, 149
- Sattel-Knoten-Bifurkation, 74

- Satz von Bayes, 148
Schätzfehler-Kovarianz, 145
Scherkraft, 30
schwarzer Körper, 11
Separation, 53
Separationsansatz, 53, 108
Separationsverfahren, 108
Solarkonstante, 11
Sonnenaktivität, 22
Sonnenflecken, 22
Sonnenfleckencyklus, 22
Spannungsdeviator, 32
Spannungstensor, 30
Stefan-Boltzmann-Gesetz, 11
stochastischer Prozess, 148
Strahlungsgesetz, Plancksches, 12
Stromfunktion, 42
Stromlinien, 42
Systemfehler-Kovarianz, 145

totale Wahrscheinlichkeit, 149
Treibhauseffekt, 14

Umrechnungsformel
 Kugel-Koordinaten in kartesische Koordinaten, 106

Vorhersage, 149
Vorticity, 43

Wellengleichung, 47
Wiensches Verschiebungsgesetz, 12

Zähigkeit, 30
Zeitkonstante, 87