

Postsches Korrespondenzproblem

Soeren Berken-Mersmann

DHBW Karlsruhe

17. April 2015

Gliederung

- 1 Postsches Korrespondenzproblem
- 2 Simulation einer Turingmaschine
- 3 Beweis der Nichtberechenbarkeit des PKPs
- 4 Beweise für 2 Probleme der formalen Sprachen

Postisches Korrespondenzproblem

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10111 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wer findet eine Reihenfolge, so dass unten und oben jeweils die gleiche Folge steht?

Postisches Korrespondenzproblem

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10111 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wer findet eine Reihenfolge, so dass unten und oben jeweils die gleiche Folge steht?

$$I_1 = (2, 1, 1, 3) : \begin{bmatrix} 10111 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 001 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 01 \\ 011 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 01 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 001 \end{bmatrix}$$

Wer findet hierfür eine Lösung?

$$\begin{bmatrix} 001 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 01 \\ 011 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 01 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 001 \end{bmatrix}$$

Wer findet hierfür eine Lösung?

$$I_1 = (2, 4, 3, 4, 4, 2, 1, 2, 4, 3, 4, 3, 4, 4, 3, 4, 4, 2, 1, 4, 4, 2, 1, 3, 4, 1, 1, 3, \dots)$$

Und eine weitere Problemistanz:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 011 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix}$$

Und eine weitere Problem Instanz:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 011 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix}$$

Und eine weitere Problem Instanz:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 011 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix}$$

Und eine weitere Probleminstance:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 011 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix} \dots$$

Dieses mal offensichtlich ohne Lösung

Postisches Korrespondenzproblem (formell)

Definition des PKP

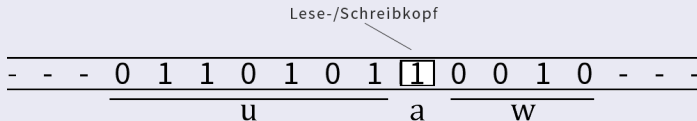
Gegeben sei eine endliche Menge an Wortpaaren $K = ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k))$, über dem Alphabet Σ mit $x_i, y_i \in \Sigma$. Gibt es eine Folge von Indizes $i_1, i_2, \dots, i_n \in 1, 2, \dots, k, n \geq 1$, so dass $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_n}$.

Simulation einer Turingmaschine

Um die zu Beweisen, dass das PKP nicht berechenbar ist, werden wir eine Turingmaschine simulieren.

Dafür müssen wir zuerst den Rechenweg einer Turingmaschine formalisieren.

Zustand einer Turingmaschine



- Linkskontext: u
- Interner Zustand: q
- Gelesenes Symbol: a
- Rechtskontext: w

Somit lässt sich der Zustand Q_t einer Turingmaschine zum Zeitpunkt t durch die Folge $u_t q_t a_t w_t$ darstellen.

Rechenweg

Den Rechenweg einer Turingmaschine können wir als die Folge von Zuständen Q_0, \dots, Q_n vom Startzeitpunkt $t = 0$ bis zum Endzeitpunkt $t = n$ bei dem die Turingmaschine einen der Endzustände erreicht hat.

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_0100010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0 , die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_01 \rightarrow q_11R$.

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_0100010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0 , die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_01 \rightarrow q_11R$.

Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_0100010\#01101011q_100010\#$

$0110101q_0100010\#$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_0100010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0 , die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_01 \rightarrow q_11R$.

Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_0100010\#01101011q_100010\#0$

$0110101q_0100010\#0$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_0100010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0 , die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_01 \rightarrow q_11R$.

Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_0100010\#01101011q_100010\#01$

$0110101q_0100010\#01$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_0100010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0 , die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_01 \rightarrow q_11R$.

Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_0100010\#01101011q_100010\#011$

$0110101q_0100010\#011$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_0100010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0 , die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_01 \rightarrow q_11R$.

Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_0100010\#01101011q_100010\#0110$

$0110101q_0100010\#0110$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_0100010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0 , die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_01 \rightarrow q_11R$.

Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_0100010\#01101011q_100010\#01101$

$0110101q_0100010\#01101$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_0100010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0 , die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_01 \rightarrow q_11R$.

Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_0100010\#01101011q_100010\#011010$

$0110101q_0100010\#011010$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_0100010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0 , die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_01 \rightarrow q_11R$.

Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_0100010\#01101011q_100010\#0110101$
 $0110101q_0100010\#0110101$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_0100010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0 , die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_01 \rightarrow q_11R$.

Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_0100010\#01101011q_100010\#01101011$
 $0110101q_0100010\#01101011$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_0100010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0 , die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_01 \rightarrow q_11R$.

Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_0100010\#01101011q_100010\#011010111q_1$
 $0110101q_0100010\#01101011q_10$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_0100010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0 , die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_01 \rightarrow q_11R$.

Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_0100010\#01101011q_100010\#011010111q_10$
 $0110101q_0100010\#01101011q_100$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_0100010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0 , die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_01 \rightarrow q_11R$.

Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_0100010\#01101011q_100010\#011010111q_10010$
 $0110101q_0100010\#01101011q_100010$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_0100010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0 , die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_01 \rightarrow q_11R$.

Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_0100010\#01101011q_100010\#011010111q_10010\#$
 $0110101q_0100010\#01101011q_100010\#$

Simulationsregeln

1. Anfangsregel

$(\#\#q_0w\#, \#)$

Simulationsregeln

1. Anfangsregel

$(\#\#q_0w\#, \#)$

2. Kopierregeln

(a, a) für alle $a \in \Gamma \cup \{\#\}$

Simulationsregeln

1. Anfangsregel

$(\#\#q_0w\#, \#)$

2. Kopierregeln

(a, a) für alle $a \in \Gamma \cup \{\#\}$

3. Überführungsregeln

(cq', qa) falls $qa \rightarrow q'cR$, für $q \in Q, a \in \Gamma$

$(q'bc, bqa)$ falls $qa \rightarrow q'cL$, für $q \in Q, a \in \Gamma$

Simulationsregeln

1. Anfangsregel

$(\#\#q_0w\#, \#)$

2. Kopierregeln

(a, a) für alle $a \in \Gamma \cup \{\#\}$

3. Überführungsregeln

(cq', qa) falls $qa \rightarrow q'cR$, für $q \in Q, a \in \Gamma$

$(q'bc, bqa)$ falls $qa \rightarrow q'cL$, für $q \in Q, a \in \Gamma$

4. Aufholregeln

(q, aq) für $a \in \Gamma$ und $q \in Q_f$

(q, qa) für $a \in \Gamma$ und $q \in Q_f$

Simulationsregeln

1. Anfangsregel

$(\#\#q_0w\#, \#)$

2. Kopierregeln

(a, a) für alle $a \in \Gamma \cup \{\#\}$

3. Überführungsregeln

(cq', qa) falls $qa \rightarrow q'cR$, für $q \in Q, a \in \Gamma$

$(q'bc, bqa)$ falls $qa \rightarrow q'cL$, für $q \in Q, a \in \Gamma$

4. Aufholregeln

(q, aq) für $a \in \Gamma$ und $q \in Q_f$

(q, qa) für $a \in \Gamma$ und $q \in Q_f$

5. Abschlussregel

$(\#, q\#\#)$ für $q \in Q_f$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$

Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0110101q_f10010\#$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0110101q_f10010\#0$
 0

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0110101q_f10010\#011010$
 011010

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0110101q_f10010\#011010q_f$
 $0110101q_f$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0110101q_f10010\#011010q_f1$
 $0110101q_f1$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0110101q_f10010\#011010q_f10010\#$
 $0110101q_f10010\#$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0110101q_f10010\#011010q_f10010\#01101q_f10010\#$
 $0110101q_f10010\#011010q_f10010\#$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0110101q_f10010\#0110101q_f10010\#01101q_f10010\#0110q_f10010\#$
 $0110101q_f10010\#0110101q_f10010\#01101q_f10010\#$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0q_f10010\#$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0q_f10010\#q_f10010\#$
 $0q_f10010\#$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0q_f10010\#q_f10010\#q_f0010\#$
 $0q_f10010\#q_f10010\#$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0q_f10010\#q_f10010\#q_f0010\#q_f010\#$
 $0q_f10010\#q_f10010\#q_f0010\#$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0q_f10010\#q_f10010\#q_f0010\#q_f010\#q_f10\#$
 $0q_f10010\#q_f10010\#q_f0010\#q_f010\#$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0q_f10010\#q_f10010\#q_f0010\#q_f010\#q_f10\#q_f0\#$
 $0q_f10010\#q_f10010\#q_f0010\#q_f010\#q_f10\#$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0q_f10010\#q_f10010\#q_f0010\#q_f010\#q_f10\#q_f0\#q_f\#$
 $0q_f10010\#q_f10010\#q_f0010\#q_f010\#q_f10\#q_f0\#$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0q_f10010\#q_f10010\#q_f0010\#q_f010\#q_f10\#q_f0\#q_f\#\#$
 $0q_f10010\#q_f10010\#q_f0010\#q_f010\#q_f10\#q_f0\#q_f\#\#$

Beweis der Nichtberechenbarkeit

Beweis der Nichtberechenbarkeit

Reduktion des Halteproblems auf das PKP:

Sei M eine Turingmaschine und w ihre Eingabe, so lässt sich das Halteproblem durch die Übergangsfunktion f auf das PKP reduzieren:

$$X_{Halte}(M, w) \Leftrightarrow X_{PKP}(f(M, w))$$

Beweise weiterer Probleme

Seien G_1 und G_2 zwei kontextfreie Grammatiken, und $L_1 = L(G_1)$ und $L_2 = L(G_2)$ zwei daraus konstruierte kontextfreie Sprachen.

- 1 Ist G_1 eindeutig? (Mehrdeutigkeitstest)
- 2 Ist $L_1 = L_2$? (Äquivalenz)

Mehrdeutigkeitstest

Reduktion des PKPs auf den Mehrdeutigkeitstest

Gegeben eine Instanz des PKPs mit $\{(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)\}$ über einem endlichen Alphabet Σ und $I = \{a_1, \dots, a_k\} \notin \Sigma$.

Wir konstruieren eine kontextfreie Grammatik

$G_x = (\{S_x\}, T, P_x, S_x)$ mit $T = \Sigma \cup I$ und den Produktionen

$$\blacksquare P_x = \{S_x \rightarrow x_1 S_x a_1 | \dots | x_n S_x a_n | x_1 a_1 | \dots | x_n a_n\}.$$

Zusätzlich konstruieren wir eine zweite Grammatik G_y analog und eine weitere kfG G mit den Produktionsregeln

$$\blacksquare P = (S \rightarrow S_x | S_y) \cup P_x \cup P_y.$$

- G_x und G_y sind offensichtlich eindeutig
- $L(G_x)$ erzeugt alle Wörter $x_{i_k} \dots x_{i_1} a_{i_1} \dots a_{i_k}$ und $L(G_y)$ analog $y_{i_k} \dots y_{i_1} a_{i_1} \dots a_{i_k}$.
- G ist dann mehrdeutig, wenn G_x und G_y mindestens ein gemeinsames Wort erzeugen.
- Dann hat das PKP $x_{i_k} \dots x_{i_1} = y_{i_k} \dots y_{i_1}$ mindestens eine Lösung mit der Indexfolge $I = i_1, i_2, \dots, i_k$.
- Somit lässt sich das PKP auf den Mehrdeigkeitstest reduzieren, und der Mehrdeigkeitstest ist folglich nicht berechenbar.

Äquivalenz

Mit dem Beweis haben wir bereits gezeigt, dass $L(G_x) \cap L(G_y) = \emptyset$ nicht berechenbar ist.

Ferner lässt sich feststellen, dass G_x, G_y sogar deterministisch kontextfrei sind.

DkfG sind unter Komplementbildung abgeschlossen.

kfG sind unter Vereinigung abgeschlossen.

Reduktion des dkf-Schnittproblems auf das kf-Äquivalenzproblem

$$\begin{aligned}(G_1, G_2) \in \text{Schnittproblem} &\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset \\&\Leftrightarrow L(G_1) \subseteq \overline{L(G_2)} \\&\Leftrightarrow L(G_1) \subseteq L(G'_2) \\&\Leftrightarrow L(G_1) \cup L(G'_2) = L(G'_2) \\&\Leftrightarrow L(G_3) = L(G'_2) \\&\Leftrightarrow (G_3, G'_2) \in \text{Äquivalenzproblem}\end{aligned}$$

Mit dem Übergang zur Komplementgrammatik $G_2 \mapsto G'_2$ (für dkfG) und dem Übergang zur Vereinigungsgrammatik $G_1, G'_2 \mapsto G_3$ (für kfG).

Quellenangaben

- Wegener, Ingo: Theoretische Informatik - eine algorithmenorientierte Einführung. Dritte Auflage. Teubner, 2005. ISBN 3-8351-0033-5
- Schöning, Uwe: Theoretische Informatik - kurz gefasst. Fünfte Auflage. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2008, ISBN 978-3827418241

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!