Korrespondenzproblem

Soeren Berken-Mersmann

DHBW Karlsruhe

17. April 2015

Gliederung

Postsches Korrespondenzproblem

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10111 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wer findet eine Reihenfolge, so dass unten und oben jeweils die gleiche Folge steht?

Postsches Korrespondenzproblem

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10111 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wer findet eine Reihenfolge, so dass unten und oben jeweils die gleiche Folge steht?

$$I_1 = (2, 1, 1, 3) : \begin{bmatrix} 10111 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 001 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 01 \\ 011 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 01 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 001 \end{bmatrix}$$

Wer findet hierfür eine Lösung?

$$\begin{bmatrix}001\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}01\\011\end{bmatrix}\begin{bmatrix}01\\101\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\001\end{bmatrix}$$

Wer findet hierfür eine Lösung?

$$I_1 = (2,4,3,4,4,2,1,2,4,3,4,3,4,4,3,4,4,2,1,4,4,2,1,3,4,1,1,3,...)$$

Und eine weitere Probleminstanz:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 011 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix}$$

Und eine weitere Probleminstanz:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 011 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix}$$

Und eine weitere Probleminstanz:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 011 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix}$$

Und eine weitere Probleminstanz:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 011 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix} \dots$$

Dieses mal offensichtlich ohne Lösung

Postsches Korrespondenzproblem (formell)

Definition des PKP

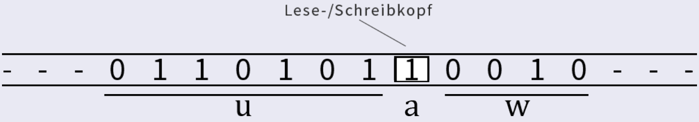
Gegeben sei eine endliche Menge an Wortpaaren $K = ((x_1, y_1), ..., (x_k, y_k))$, über dem Alphabet Σ mit $x_i, y_i \in \Sigma$. Gibt es eine Folge von Indizes $i_1, i_2, ..., i_n \in 1, 2, ..., k, n \geq 1$, so dass $x_{i_1}, x_{i_2}, ...x_{i_n} = y_{i_1}, y_{i_2}, ..., y_{i_n}$.

Simulation einer Turingmaschine

Um die zu Beweisen, dass das PKP nicht berechenbar ist, werden wir eine Turingmaschine simulieren.

Dafür müssen wir zuerst den Rechenweg einer Turingmaschine formalisieren.

Zustand einer Turingmaschine



- Linkskontext: u
- Interner Zustand: q
- Gelesenes Symbol: a
- Rechtskontext: w

Somit lässt sich der Zustand Q_t einer Turingmaschine zum Zeitpunkt t durch die Folge $u_t q_t a_t w_t$ darstellen.

Rechenweg

Den Rechenweg einer Turingmaschine können wir als die Folge von Zuständen $Q_0, ..., Q_n$ vom Startzeitpunkt $t = 0$ bis zum Endzeitpunkt $t = n$ bei dem die Turingmaschine einen der Endzustände erreicht hat.

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_0 10010\sharp 01101011q_1 00010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_0 1 \rightarrow q_1 0R$.

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_010010\sharp01101011q_100010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_01 \rightarrow q_10R$.

Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_010010\sharp01101011q_100010\sharp$
$0110101q_010010\sharp$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_010010\sharp01101011q_100010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_01 \rightarrow q_10R$.

Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_010010\sharp01101011q_100010\sharp0$
$0110101q_010010\sharp0$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_0 10010\sharp 01101011 q_1 00010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_0 1 \rightarrow q_1 0 R$.

Simulation der Regel $q_1 0 \rightarrow q_1 1 R$

$0110101q_0 10010\sharp 01101011 q_1 00010\sharp 01$
$0110101q_0 10010\sharp 01$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_0 10010\sharp 01101011q_1 00010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_0 1 \rightarrow q_1 0 R$.

Simulation der Regel $q_1 0 \rightarrow q_1 1 R$

$0110101q_0 10010\sharp 01101011q_1 00010\sharp 011$
$0110101q_0 10010\sharp 011$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_010010\sharp01101011q_100010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_01 \rightarrow q_10R$.

Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_010010\sharp01101011q_100010\sharp0110$
$0110101q_010010\sharp0110$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_0 10010\sharp 01101011q_1 00010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_0 1 \rightarrow q_1 0 R$.

Simulation der Regel $q_1 0 \rightarrow q_1 1 R$

$0110101q_0 10010\sharp 01101011q_1 00010\sharp 01101$
$0110101q_0 10010\sharp 01101$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_010010\sharp01101011q_100010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_01 \rightarrow q_10R$.

Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_010010\sharp01101011q_100010\sharp011010$
$0110101q_010010\sharp011010$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_0 10010\sharp 01101011q_1 00010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_0 1 \to q_1 0R$.

Simulation der Regel $q_1 0 \to q_1 1R$

$0110101q_0 10010\sharp 01101011q_1 00010\sharp 0110101$
$0110101q_0 10010\sharp 0110101$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_0 10010\sharp 01101011q_1 00010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_0 1 \rightarrow q_1 0 R$.

Simulation der Regel $q_1 0 \rightarrow q_1 1 R$

$0110101q_0 10010\sharp 01101011q_1 00010\sharp 01101011$
$0110101q_0 10010\sharp 01101011$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_0 10010\sharp 01101011q_1 00010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_0 1 \to q_1 0R$.

Simulation der Regel $q_1 0 \to q_1 1R$

$0110101q_0 10010\sharp 01101011q_1 00010\sharp 011010111q_1$
$0110101q_0 10010\sharp 01101011q_1 0$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_0 10010\sharp 01101011 q_1 00010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_0 1 \to q_1 0 R$.

Simulation der Regel $q_1 0 \to q_1 1 R$

$0110101q_0 10010\sharp 01101011 q_1 00010\sharp 011010111 q_1 0$
$0110101q_0 10010\sharp 01101011 q_1 00$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_0 10010\sharp 01101011q_1 00010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_0 1 \rightarrow q_1 0 R$.

Simulation der Regel $q_1 0 \rightarrow q_1 1 R$

$0110101q_0 10010\sharp 01101011q_1 00010\sharp 011010111q_1 0010$
$0110101q_0 10010\sharp 01101011q_1 00010$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101q_0 10010\sharp 01101011q_1 00010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_0 1 \rightarrow q_1 0R$.

Simulation der Regel $q_1 0 \rightarrow q_1 1R$

$0110101q_0 10010\sharp 01101011q_1 00010\sharp 011010111q_1 0010\sharp$
$0110101q_0 10010\sharp 01101011q_1 00010\sharp$

Simulationsregeln

1. Anfangsregel

$(\sharp\sharp q_0 w\sharp, \sharp)$

Simulationsregeln

1. Anfangsregel

$(\sharp\sharp q_0 w \sharp, \sharp)$

2. Kopierregeln

(a, a) für alle $a \in \Gamma \cup \{\sharp\}$

Simulationsregeln

1. Anfangsregel

$(\sharp\sharp q_0 w \sharp, \sharp)$

2. Kopierregeln

(a, a) für alle $a \in \Gamma \cup \{\sharp\}$

3. Überführungsregeln

(cq', qa) falls $qa \rightarrow q'cR$, für $q \in Q, a \in \Gamma$
$(q'bc, bqa)$ falls $qa \rightarrow q'cL$, für $q \in Q, a \in \Gamma$

Simulationsregeln

1. Anfangsregel

$(\sharp\sharp q_0 w \sharp, \sharp)$

2. Kopierregeln

(a, a) für alle $a \in \Gamma \cup \{\sharp\}$

3. Überführungsregeln

(cq', qa) falls $qa \to q'cR$, für $q \in Q, a \in \Gamma$

$(q'bc, bqa)$ falls $qa \to q'cL$, für $q \in Q, a \in \Gamma$

4. Aufholregeln

(q, aq) für $a \in \Gamma$ und $q \in Q_f$

(q, qa) für $a \in \Gamma$ und $q \in Q_f$

Simulationsregeln

1. **Anfangsregel**

$(\sharp\sharp q_0 w \sharp, \sharp)$

2. **Kopierregeln**

(a, a) für alle $a \in \Gamma \cup \{\sharp\}$

3. **Überführungsregeln**

(cq', qa) falls $qa \rightarrow q'cR$, für $q \in Q, a \in \Gamma$

$(q'bc, bqa)$ falls $qa \rightarrow q'cL$, für $q \in Q, a \in \Gamma$

4. **Aufholregeln**

(q, aq) für $a \in \Gamma$ und $q \in Q_f$

(q, qa) für $a \in \Gamma$ und $q \in Q_f$

5. **Abschlussregel**

$(\sharp, q\sharp\sharp)$ für $q \in Q_f$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0110101q_f10010\sharp$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0110101q_f10010\sharp0$
0

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0110101q_f10010\sharp011010$
011010

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0110101q_f10010\sharp011010q_f$
$0110101q_f$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0110101q_f10010\sharp011010q_f1$
$0110101q_f1$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0110101q_f10010\sharp011010q_f10010\sharp$
$0110101q_f10010\sharp$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0110101q_f10010\sharp011010q_f10010\sharp01101q_f10010\sharp$
$0110101q_f10010\sharp011010q_f10010\sharp$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0110101q_f10010\sharp011010q_f10010\sharp01101q_f10010\sharp0110q_f10010\sharp$
$0110101q_f10010\sharp011010q_f10010\sharp01101q_f10010\sharp$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0q_f10010\sharp$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0q_f10010\sharp q_f10010\sharp$
$0q_f10010\sharp$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0q_f10010\sharp q_f10010\sharp q_f0010\sharp$
$0q_f10010\sharp q_f10010\sharp$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0q_f10010\sharp q_f10010\sharp q_f0010\sharp q_f010\sharp$
$0q_f10010\sharp q_f10010\sharp q_f0010\sharp$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0q_f10010\sharp q_f10010\sharp q_f0010\sharp q_f010\sharp q_f10\sharp$
$0q_f10010\sharp q_f10010\sharp q_f0010\sharp q_f010\sharp$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0q_f10010\sharp q_f10010\sharp q_f0010\sharp q_f010\sharp q_f10\sharp q_f0\sharp$
$0q_f10010\sharp q_f10010\sharp q_f0010\sharp q_f010\sharp q_f10\sharp$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0q_f10010\sharp q_f10010\sharp q_f0010\sharp q_f010\sharp q_f10\sharp q_f0\sharp q_f\sharp$
$0q_f10010\sharp q_f10010\sharp q_f0010\sharp q_f010\sharp q_f10\sharp q_f0\sharp$

Aufhol- und Abschlussregeln

Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine: $0110101q_f10010$
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand q_f angekommen.

Aufholen und Abschließen des PKPs

$0q_f10010\sharp q_f10010\sharp q_f0010\sharp q_f010\sharp q_f10\sharp q_f0\sharp q_f\sharp\sharp$
$0q_f10010\sharp q_f10010\sharp q_f0010\sharp q_f010\sharp q_f10\sharp q_f0\sharp q_f\sharp\sharp$

Beweis der Nichtberechenbarkeit

Beweis der Nichtberechenbarkeit

Reduktion des Halteproblems auf das PKP:

Sei M eine Turingmaschine und w ihre Eingabe, so lässt sich das Halteproblem durch die Übergangsfunktion f auf das PKP reduzieren:

$$X_{Halte}(M, w) \Leftrightarrow X_{PKP}(f(M, w))$$

Beweise weiterer Probleme

Seien G_1 und G_2 zwei kontextfreie Grammatiken, und $L_1 = L(G_1)$ und $L_2 = L(G_2)$ zwei daraus konstruierte kontextfreie Sprachen.

1. Ist G_1 eindeutig? (Mehrdeutigkeitstest)
2. Ist $L_1 = L_2$? (Äquivalenz)

Mehrdeutigkeitstest

Reduktion des PKPs auf den Mehrdeutigkeitstest

Gegeben eine Instanz des PKPs mit $\{(x_1, y_1), ..., (x_k, y_k)\}$ über einem endlichen Alphabet Σ und $I = \{a_1, ..., a_k\} \notin \Sigma$.
Wir konstruieren eine kontextfreie Grammatik $G_x = (\{S_x\}, T, P_x, S_x)$ mit $T = \Sigma \cup I$ und den Produktionen

- $P_x = \{S_x \to x_1 S_x a_1 | ... | x_n S_x a_n | x_1 a_1 | ... | x_n a_n\}$.

Zusätzlich konstruieren wir eine zweite Grammatik G_y analog und eine weitere kfG G mit den Produktionsregeln

- $P = (S \to S_x | S_y) \cup P_x \cup P_y$.

- G_x und G_y sind offensichtlich eindeutig
- G ist dann mehrdeutig, wenn G_x und G_y mindestens ein gemeinsames Wort erzeugen. Dann hat das PKP $x_{i_k} ... x_{i_1} ai_1 ... ai_k = y_{i_k} ... y_{i_1} ai_1 ... ai_k$ mindestens eine Lösung mit der Indexfolge $I = i_1, i_2, ... i_k$.
- Somit lässt sich das PKP auf den Mehrdeutigkeitstest reduzieren, und der Mehrdeutigkeitstest ist folglich nicht berechenbar.

Äquivalenz

Mit dem Beweis haben wir bereits gezeigt, dass $L(G_x) \cap L(G_y) = \emptyset$ nicht berechenbar ist.

Ferner lässt sich feststellen, dass G_x, G_y sogar deterministisch kontextfrei sind.

Dkf Sprachen sind unter Komplementbildung abgeschlossen.

Reduktion des dkf-Schnittproblems auf das kf-Äquivalenzproblem

$$
\begin{aligned}
(G_1, G_2) \in \text{Schnittproblem} &\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset \\
&\Leftrightarrow L(G_1) \subseteq \overline{L(G_2)} \\
&\Leftrightarrow L(G_1) \subseteq L(G_2') \\
&\Leftrightarrow L(G_1) \cup L(G_2') = L(G_2') \\
&\Leftrightarrow L(G_3) = L(G_2') \\
&\Leftrightarrow (G_3, G_2') \in \text{Äquivalenzproblem}
\end{aligned}
$$

Mit dem Übergang zur Komplementgrammatik $G_2 \mapsto G_2'$ (dkf) und dem Übergang zur Vereinigungsgrammatik $G_1, G_2' \mapsto G_3$ (kf).

Quellenangaben

- Wegener, Ingo: Theoretische Informatik - eine algorithmenorientierte Einführung. Dritte Auflage. Teubner, 2005. ISBN 3-8351-0033-5
- Schöning, Uwe: Theoretische Informatik - kurz gefasst. Fünfte Auflage. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2008, ISBN 978-3827418241
- Funke, Danile: Präsentation zur Reduzierbarkeit. DHBW Karlsruhe 2009.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!