

# Korrespondenzproblem

Soeren Berken-Mersmann

DHBW Karlsruhe

17. April 2015

# Gliederung

- 1 Postsches Korrespondenzproblem
- 2 Simulation einer Turingmaschine
- 3 Beweis der Nichtberechenbarkeit
- 4 Beweise weiterer Probleme

# Postisches Korrespondenzproblem

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10111 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wer findet eine Reihenfolge, so dass unten und oben jeweils die gleiche Folge steht?

# Postisches Korrespondenzproblem

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10111 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wer findet eine Reihenfolge, so dass unten und oben jeweils die gleiche Folge steht?

$$I_1 = (2, 1, 1, 3) : \begin{bmatrix} 10111 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 001 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 01 \\ 011 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 01 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 001 \end{bmatrix}$$

Wer findet hierfür eine Lösung?

$$\begin{bmatrix} 001 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 01 \\ 011 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 01 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 001 \end{bmatrix}$$

Wer findet hierfür eine Lösung?

$$I_1 = (2, 4, 3, 4, 4, 2, 1, 2, 4, 3, 4, 3, 4, 4, 3, 4, 4, 2, 1, 4, 4, 2, 1, 3, 4, 1, 1, 3, \dots)$$

Und eine weitere Probleminstance:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 011 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix}$$

Und eine weitere Problem Instanz:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 011 \\ 11 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix}$$



Und eine weitere Probleminstance:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 011 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix}$$

Und eine weitere Probleminstance:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 011 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix} \dots$$

Dieses mal offensichtlich ohne Lösung

# Postisches Korrespondenzproblem (formell)

## Definition des PKP

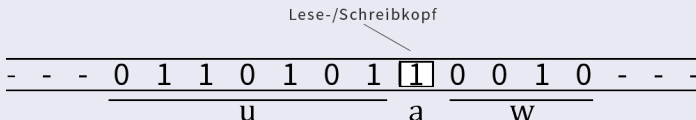
Gegeben sei eine endliche Menge an Wortpaaren  $K = ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k))$ , über dem Alphabet  $\Sigma$  mit  $x_i, y_i \in \Sigma$ . Gibt es eine Folge von Indizes  $i_1, i_2, \dots, i_n \in 1, 2, \dots, k, n \geq 1$ , so dass  $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_n}$ .

# Simulation einer Turingmaschine

Um die zu Beweisen, dass das PKP nicht berechenbar ist, werden wir eine Turingmaschine simulieren.

Dafür müssen wir zuerst den Rechenweg einer Turingmaschine formalisieren.

## Zustand einer Turingmaschine



- Linkskontext:  $u$
- Interner Zustand:  $q$
- Gelesenes Symbol:  $a$
- Rechtskontext:  $w$

Somit lässt sich der Zustand  $Q_t$  einer Turingmaschine zum Zeitpunkt  $t$  durch die Folge  $u_t q_t a_t w_t$  darstellen.

## Rechenweg

Den Rechenweg einer Turingmaschine können wir als die Folge von Zuständen  $Q_0, \dots, Q_n$  vom Startzeitpunkt  $t = 0$  bis zum Endzeitpunkt  $t = n$  bei dem die Turingmaschine einen der Endzustände erreicht hat.

## Beispiel

Formalisierte Darstellung:  $0110101q_010010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand  $q_0$ , die Regel die Anwendung gefunden hat ist  $q_01 \rightarrow q_10R$ .

## Beispiel

Formalisierte Darstellung:  $0110101q_010010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand  $q_0$ , die Regel die Anwendung gefunden hat ist  $q_01 \rightarrow q_10R$ .

## Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_010010\#01101011q_100010\#$

$0110101q_010010\#$



## Beispiel

Formalisierte Darstellung:  $0110101q_010010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand  $q_0$ , die Regel die Anwendung gefunden hat ist  $q_01 \rightarrow q_10R$ .

## Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_010010\#01101011q_100010\#0$

$0110101q_010010\#0$

## Beispiel

Formalisierte Darstellung:  $0110101q_010010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand  $q_0$ , die Regel die Anwendung gefunden hat ist  $q_01 \rightarrow q_10R$ .

## Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_010010\#01101011q_100010\#01$

$0110101q_010010\#01$

## Beispiel

Formalisierte Darstellung:  $0110101q_010010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand  $q_0$ , die Regel die Anwendung gefunden hat ist  $q_01 \rightarrow q_10R$ .

## Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_010010\#01101011q_100010\#011$

$0110101q_010010\#011$

## Beispiel

Formalisierte Darstellung:  $0110101q_010010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand  $q_0$ , die Regel die Anwendung gefunden hat ist  $q_01 \rightarrow q_10R$ .

## Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_010010\#01101011q_100010\#0110$

$0110101q_010010\#0110$

## Beispiel

Formalisierte Darstellung:  $0110101q_010010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand  $q_0$ , die Regel die Anwendung gefunden hat ist  $q_01 \rightarrow q_10R$ .

## Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_010010\#01101011q_100010\#01101$

$0110101q_010010\#01101$

## Beispiel

Formalisierte Darstellung:  $0110101q_010010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand  $q_0$ , die Regel die Anwendung gefunden hat ist  $q_01 \rightarrow q_10R$ .

## Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_010010\#01101011q_100010\#011010$

$0110101q_010010\#011010$

## Beispiel

Formalisierte Darstellung:  $0110101q_010010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand  $q_0$ , die Regel die Anwendung gefunden hat ist  $q_01 \rightarrow q_10R$ .

## Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_010010\#01101011q_100010\#0110101$

$0110101q_010010\#0110101$

## Beispiel

Formalisierte Darstellung:  $0110101q_010010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand  $q_0$ , die Regel die Anwendung gefunden hat ist  $q_01 \rightarrow q_10R$ .

## Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_010010\#01101011q_100010\#01101011$   
 $0110101q_010010\#01101011$



## Beispiel

Formalisierte Darstellung:  $0110101q_010010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand  $q_0$ , die Regel die Anwendung gefunden hat ist  $q_01 \rightarrow q_10R$ .

## Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_010010\#01101011q_100010\#011010111q_1$   
 $0110101q_010010\#01101011q_10$

## Beispiel

Formalisierte Darstellung:  $0110101q_010010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand  $q_0$ , die Regel die Anwendung gefunden hat ist  $q_01 \rightarrow q_10R$ .

## Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_010010\#01101011q_100010\#011010111q_10$   
 $0110101q_010010\#01101011q_100$

## Beispiel

Formalisierte Darstellung:  $0110101q_010010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand  $q_0$ , die Regel die Anwendung gefunden hat ist  $q_01 \rightarrow q_10R$ .

## Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_010010\#01101011q_100010\#011010111q_10010$   
 $0110101q_010010\#01101011q_100010$

## Beispiel

Formalisierte Darstellung:  $0110101q_010010\#01101011q_100010$

Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand  $q_0$ , die Regel die Anwendung gefunden hat ist  $q_01 \rightarrow q_10R$ .

## Simulation der Regel $q_10 \rightarrow q_11R$

$0110101q_010010\#01101011q_100010\#011010111q_10010\#$   
 $0110101q_010010\#01101011q_100010\#$

# Simulationsregeln

## 1. Anfangsregel

$(\#\#q_0w\#, \#)$

# Simulationsregeln

## 1. Anfangsregel

$(\#\#q_0w\#, \#)$

## 2. Kopierregeln

$(a, a)$  für alle  $a \in \Gamma \cup \{\#\}$

# Simulationsregeln

## 1. Anfangsregel

$(\#\#q_0w\#, \#)$

## 2. Kopierregeln

$(a, a)$  für alle  $a \in \Gamma \cup \{\#\}$

## 3. Überführungsregeln

$(cq', qa)$  falls  $qa \rightarrow q'cR$ , für  $q \in Q, a \in \Gamma$

$(q'bc, bqa)$  falls  $qa \rightarrow q'cL$ , für  $q \in Q, a \in \Gamma$

# Simulationsregeln

## 1. Anfangsregel

$(\#\#q_0w\#, \#)$

## 2. Kopierregeln

$(a, a)$  für alle  $a \in \Gamma \cup \{\#\}$

## 3. Überführungsregeln

$(cq', qa)$  falls  $qa \rightarrow q'cR$ , für  $q \in Q, a \in \Gamma$

$(q'bc, bqa)$  falls  $qa \rightarrow q'cL$ , für  $q \in Q, a \in \Gamma$

## 4. Aufholregeln

$(q, aq)$  für  $a \in \Gamma$  und  $q \in Q_f$

$(q, qa)$  für  $a \in \Gamma$  und  $q \in Q_f$



# Simulationsregeln

## 1. Anfangsregel

$$(\#\#q_0w\#, \#)$$

## 2. Kopierregeln

$$(a, a) \quad \text{für alle } a \in \Gamma \cup \{\#\}$$

## 3. Überführungsregeln

$$(cq', qa) \quad \text{falls } qa \rightarrow q'cR, \text{ für } q \in Q, a \in \Gamma$$

$$(q'bc, bqa) \quad \text{falls } qa \rightarrow q'cL, \text{ für } q \in Q, a \in \Gamma$$

## 4. Aufholregeln

$$(q, aq) \quad \text{für } a \in \Gamma \text{ und } q \in Q_f$$

$$(q, qa) \quad \text{für } a \in \Gamma \text{ und } q \in Q_f$$

## 5. Abschlussregel

$$(\#, q\#\#) \quad \text{für } q \in Q_f$$

# Aufhol- und Abschlussregeln

## Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine:  $0110101q_f10010$

Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand  $q_f$  angekommen.

# Aufhol- und Abschlussregeln

## Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine:  $0110101q_f10010$   
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand  $q_f$  angekommen.

## Aufholen und Abschließen des PKPs

$0110101q_f10010\#$

# Aufhol- und Abschlussregeln

## Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine:  $0110101q_f10010$   
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand  $q_f$  angekommen.

## Aufholen und Abschließen des PKPs

$0110101q_f10010\#0$   
 $0$

# Aufhol- und Abschlussregeln

## Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine:  $0110101q_f10010$   
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand  $q_f$  angekommen.

## Aufholen und Abschließen des PKPs

$0110101q_f10010\#011010$   
 $011010$

# Aufhol- und Abschlussregeln

## Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine:  $0110101q_f10010$   
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand  $q_f$  angekommen.

## Aufholen und Abschließen des PKPs

$0110101q_f10010\#011010q_f$   
 $0110101q_f$

# Aufhol- und Abschlussregeln

## Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine:  $0110101q_f10010$   
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand  $q_f$  angekommen.

## Aufholen und Abschließen des PKPs

$0110101q_f10010\#011010q_f1$   
 $0110101q_f1$

# Aufhol- und Abschlussregeln

## Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine:  $0110101q_f10010$   
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand  $q_f$  angekommen.

## Aufholen und Abschließen des PKPs

$0110101q_f10010\#011010q_f10010\#$   
 $0110101q_f10010\#$



# Aufhol- und Abschlussregeln

## Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine:  $0110101q_f10010$   
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand  $q_f$  angekommen.

## Aufholen und Abschließen des PKPs

$0110101q_f10010\#011010q_f10010\#01101q_f10010\#$   
 $0110101q_f10010\#011010q_f10010\#$

# Aufhol- und Abschlussregeln

## Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine:  $0110101q_f10010$   
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand  $q_f$  angekommen.

## Aufholen und Abschließen des PKPs

$0110101q_f10010\#0110101q_f10010\#01101q_f10010\#0110q_f10010\#$   
 $0110101q_f10010\#0110101q_f10010\#01101q_f10010\#$

# Aufhol- und Abschlussregeln

## Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine:  $0110101q_f10010$   
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand  $q_f$  angekommen.

## Aufholen und Abschließen des PKPs

$0q_f10010\#$

# Aufhol- und Abschlussregeln

## Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine:  $0110101q_f10010$   
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand  $q_f$  angekommen.

## Aufholen und Abschließen des PKPs

$0q_f10010\#q_f10010\#$   
 $0q_f10010\#$

# Aufhol- und Abschlussregeln

## Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine:  $0110101q_f10010$   
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand  $q_f$  angekommen.

## Aufholen und Abschließen des PKPs

$0q_f10010\#q_f10010\#q_f0010\#$   
 $0q_f10010\#q_f10010\#$

# Aufhol- und Abschlussregeln

## Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine:  $0110101q_f10010$   
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand  $q_f$  angekommen.

## Aufholen und Abschließen des PKPs

$0q_f10010\#q_f10010\#q_f0010\#q_f010\#$   
 $0q_f10010\#q_f10010\#q_f0010\#$

# Aufhol- und Abschlussregeln

## Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine:  $0110101q_f10010$   
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand  $q_f$  angekommen.

## Aufholen und Abschließen des PKPs

$0q_f10010\#q_f10010\#q_f0010\#q_f010\#q_f10\#$   
 $0q_f10010\#q_f10010\#q_f0010\#q_f010\#$

# Aufhol- und Abschlussregeln

## Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine:  $0110101q_f10010$   
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand  $q_f$  angekommen.

## Aufholen und Abschließen des PKPs

$0q_f10010\#q_f10010\#q_f0010\#q_f010\#q_f10\#q_f0\#$   
 $0q_f10010\#q_f10010\#q_f0010\#q_f010\#q_f10\#$



# Aufhol- und Abschlussregeln

## Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine:  $0110101q_f10010$   
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand  $q_f$  angekommen.

## Aufholen und Abschließen des PKPs

$0q_f10010\#q_f10010\#q_f0010\#q_f010\#q_f10\#q_f0\#q_f\#$   
 $0q_f10010\#q_f10010\#q_f0010\#q_f010\#q_f10\#q_f0\#$

# Aufhol- und Abschlussregeln

## Aktuelle Situation

Aktueller Zustand der Turingmaschine:  $0110101q_f10010$   
Die Turingmaschine ist in einem akzeptierenden Zustand  $q_f$  angekommen.

## Aufholen und Abschließen des PKPs

$0q_f10010\#q_f10010\#q_f0010\#q_f010\#q_f10\#q_f0\#q_f\#\#$   
 $0q_f10010\#q_f10010\#q_f0010\#q_f010\#q_f10\#q_f0\#q_f\#\#$

# Beweis der Nichtberechenbarkeit

# Beweis der Nichtberechenbarkeit

## Reduktion des Halteproblems auf das PKP:

Sei  $M$  eine Turingmaschine und  $w$  ihre Eingabe, so lässt sich das Halteproblem durch die Übergangsfunktion  $f$  auf das PKP reduzieren:

$$X_{Halte}(M, w) \Leftrightarrow X_{PKP}(f(M, w))$$

# Beweise weiterer Probleme

Seien  $G_1$  und  $G_2$  zwei kontextfreie Grammatiken, und  $L_1 = L(G_1)$  und  $L_2 = L(G_2)$  zwei daraus konstruierte kontextfreie Sprachen.

## Eindeutigkeit

Ist  $G_1$  eindeutig?

## Gleichheit

Ist  $L_1 = L_2$ ?

# Eindeutigkeit

# Gleichheitstest

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!