Korrespondenzproblem

Soeren Berken-Mersmann

DHBW Karlsruhe

17. April 2015

Gliederung

Postsches Korrespondenzproblem

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10111 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wer findet eine Reihenfolge, so dass unten und oben jeweils die gleiche Folge steht?

Postsches Korrespondenzproblem

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10111 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wer findet eine Reihenfolge, so dass unten und oben jeweils die gleiche Folge steht?

$$I_1 = (2, 1, 1, 3) : \begin{bmatrix} 10111 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 001 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 01 \\ 011 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 01 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 001 \end{bmatrix}$$

Wer findet hierfür eine Lösung?

$$\begin{bmatrix}001\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}01\\011\end{bmatrix}\begin{bmatrix}01\\101\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\001\end{bmatrix}$$

Wer findet hierfür eine Lösung?

$$I_1 = (2,4,3,4,4,2,1,2,4,3,4,3,4,4,3,4,4,2,1,4,4,2,1,3,4,1,1,3,...)$$

Und eine weitere Probleminstanz:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 011 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix}$$

Und eine weitere Probleminstanz:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 011 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix}$$

Und eine weitere Probleminstanz:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 011 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix}$$

Und eine weitere Probleminstanz:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 011 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix} \dots$$

Dieses mal offensichtlich ohne Lösung

Postsches Korrespondenzproblem (formell)

Definition des PKP

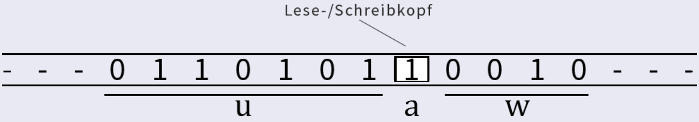
Gegeben sei eine endliche Menge an Wortpaaren $K = ((x_1, y_1), ..., (x_k, y_k))$, über dem Alphabet Σ mit $x_i, y_i \in \Sigma$. Gibt es eine Folge von Indizes $i_1, i_2, ..., i_n \in 1, 2, ..., k, n \geq 1$, so dass $x_{i_1}, x_{i_2}, ...x_{i_n} = y_{i_1}, y_{i_2}, ..., y_{i_n}$.

Simulation einer Turingmaschine

Um die zu Beweisen, dass das PKP nicht berechenbar ist, werden wir eine Turingmaschine simulieren.

Dafür müssen wir zuerst den Rechenweg einer Turingmaschine formalisieren.

Zustand einer Turingmaschine



- Linkskontext: u
- Interner Zustand: q
- Gelesenes Symbol: a
- Rechtskontext: w

Somit lässt sich der Zustand Q_t einer Turingmaschine zum Zeitpunkt t durch die Folge $u_t q_t a_t w_t$ darstellen.

Rechenweg

Den Rechenweg einer Turingmaschine können wir als die Folge von Zuständen $Q_0, ..., Q_n$ vom Startzeitpunkt $t = 0$ bis zum Endzeitpunkt $t = n$ bei dem die Turingmaschine einen der Endzustände erreicht hat.

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101, q_0 1, 0010 \sharp 01101011, q_1 0, 0010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_0 1 \rightarrow q_1 0 R$.

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101, q_0 1, 0010 \sharp 01101011, q_1 0, 0010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_0 1 \rightarrow q_1 0 R$.

Simulation der Regel $q_1 0 \rightarrow q_1 1$

$0110101 q_0 10010 \sharp 01101011 q_1 00010 \sharp$
$0110101 q_0 10010 \sharp$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101, q_0 1, 0010\sharp 01101011, q_1 0, 0010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_0 1 \rightarrow q_1 0 R$.

Simulation der Regel $q_1 0 \rightarrow q_1 1$

$0110101 q_0 10010\sharp 01101011 q_1 00010\sharp 0$
$0110101 q_0 10010\sharp 0$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101, q_0 1, 0010\sharp 01101011, q_1 0, 0010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_0 1 \to q_1 0 R$.

Simulation der Regel $q_1 0 \to q_1 1$

$0110101 q_0 10010\sharp 01101011 q_1 00010\sharp 01$
$0110101 q_0 10010\sharp 01$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101, q_0 1, 0010\sharp 01101011, q_1 0, 0010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_0 1 \rightarrow q_1 0 R$.

Simulation der Regel $q_1 0 \rightarrow q_1 1$

$0110101 q_0 10010 \sharp 01101011 q_1 00010 \sharp 011$
$0110101 q_0 10010 \sharp 011$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101, q_0 1, 0010 \sharp 01101011, q_1 0, 0010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_0 1 \rightarrow q_1 0 R$.

Simulation der Regel $q_1 0 \rightarrow q_1 1$

$0110101 q_0 10010 \sharp 01101011 q_1 00010 \sharp 0110$
$0110101 q_0 10010 \sharp 0110$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101, q_0 1, 0010\sharp 01101011, q_1 0, 0010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_0 1 \rightarrow q_1 0 R$.

Simulation der Regel $q_1 0 \rightarrow q_1 1$

$0110101 q_0 10010 \sharp 01101011 q_1 00010 \sharp 01101$
$0110101 q_0 10010 \sharp 01101$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101, q_0 1, 0010\sharp 01101011, q_1 0, 0010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_0 1 \rightarrow q_1 0 R$.

Simulation der Regel $q_1 0 \rightarrow q_1 1$

$0110101 q_0 10010 \sharp 01101011 q_1 00010 \sharp 011010$
$0110101 q_0 10010 \sharp 011010$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101, q_0 1, 0010 \sharp 01101011, q_1 0, 0010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_0 1 \rightarrow q_1 0 R$.

Simulation der Regel $q_1 0 \rightarrow q_1 1$

$0110101 q_0 10010 \sharp 01101011 q_1 00010 \sharp 0110101$
$0110101 q_0 10010 \sharp 0110101$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101, q_0 1, 0010 \sharp 01101011, q_1 0, 0010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_0 1 \rightarrow q_1 0 R$.

Simulation der Regel $q_1 0 \rightarrow q_1 1$

$0110101 q_0 10010 \sharp 01101011 q_1 00010 \sharp 011010111 q_1$
$0110101 q_0 10010 \sharp 01101011 q_1 0$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101, q_0 1, 0010\sharp 01101011, q_1 0, 0010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_0 1 \rightarrow q_1 0 R$.

Simulation der Regel $q_1 0 \rightarrow q_1 1$

$0110101 q_0 10010 \sharp 01101011 q_1 00010 \sharp 011010111 q_1 0$
$0110101 q_0 10010 \sharp 01101011 q_1 00$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101, q_0 1, 0010 \sharp 01101011, q_1 0, 0010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_0 1 \rightarrow q_1 0 R$.

Simulation der Regel $q_1 0 \rightarrow q_1 1$

$0110101 q_0 10010 \sharp 01101011 q_1 00010 \sharp 011010111 q_1 0010$
$0110101 q_0 10010 \sharp 01101011 q_1 00010$

Beispiel

Formalisierte Darstellung: $0110101, q_0 1, 0010\sharp 01101011, q_1 0, 0010$
Der Lesekopf liest eine 1 und befindet sich in Zustand q_0, die Regel die Anwendung gefunden hat ist $q_0 1 \rightarrow q_1 0 R$.

Simulation der Regel $q_1 0 \rightarrow q_1 1$

$0110101 q_0 10010 \sharp 01101011 q_1 00010 \sharp 011010111 q_1 0010 \sharp$
$0110101 q_0 10010 \sharp 01101011 q_1 00010 \sharp$

Simulationsregeln

1. Anfangsregel

$(\sharp, \sharp\sharp q_0 w \sharp)$

Simulationsregeln

1. **Anfangsregel**

$(\sharp, \sharp\sharp q_0 w \sharp)$

2. **Kopierregeln**

(a, a) für alle $a \in \Gamma \cup \{\sharp\}$

Simulationsregeln

1. Anfangsregel

$(\sharp, \sharp\sharp q_0 w\sharp)$

2. Kopierregeln

(a, a)	für alle $a \in \Gamma \cup \{\sharp\}$

3. Überführungsregeln

(qa, cq')	falls $qa \to q'cR$, für $q \in Q, a \in \Gamma$
$(bqa, q'bc)$	falls $qa \to q'cL$, für $q \in Q, a \in \Gamma$

Simulationsregeln

1. Anfangsregel

$(\sharp, \sharp\sharp q_0 w \sharp)$

2. Kopierregeln

(a, a) für alle $a \in \Gamma \cup \{\sharp\}$

3. Überführungsregeln

(qa, cq') falls $qa \to q'cR$, für $q \in Q, a \in \Gamma$

$(bqa, q'bc)$ falls $qa \to q'cL$, für $q \in Q, a \in \Gamma$

4. Aufholregeln

(aq, q) für $a \in \Gamma$ und $q \in Q_f$

(qa, q) für $a \in \Gamma$ und $q \in Q_f$

Simulationsregeln

1. **Anfangsregel**

$(\sharp, \sharp\sharp q_0 w \sharp)$

2. **Kopierregeln**

(a, a) für alle $a \in \Gamma \cup \{\sharp\}$

3. **Überführungsregeln**

(qa, cq') falls $qa \to q'cR$, für $q \in Q, a \in \Gamma$

$(bqa, q'bc)$ falls $qa \to q'cL$, für $q \in Q, a \in \Gamma$

4. **Aufholregeln**

(aq, q) für $a \in \Gamma$ und $q \in Q_f$

(qa, q) für $a \in \Gamma$ und $q \in Q_f$

5. **Abschlussregel**

$(q\sharp\sharp\sharp, \sharp)$ für $q \in Q_f$

Beweis der Nichtberechenbarkeit

Beweise weiterer Probleme

Seien G_1 und G_2 zwei kontextfreie Grammatiken, und $L_1 = L(G_1)$ und $L_2 = L(G_2)$ zwei daraus konstruierte kontextfreie Sprachen.

Eindeutigkeit

Ist G_1 eindeutig?

Gleichheit

Ist $L_1 = L_2$?

Eindeutigkeit

Gleichheitstest

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!