https://skos.ii.uni.wroc.pl/course/view.php?id=677

Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 6

13 listopada 2024 r.

Zajęcia 19 listopada 2024 r. Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L6.1. 1 punkt Uzasadnij, że *schemat Hornera* jest algorytmem numerycznie poprawnym.

L6.2. 1 punkt Sformułuj i udowodnij *algorytm Clenshawa* obliczania wartości wielomianu

$$w(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \ldots + c_nT_n(x)$$

w punkcie x, gdzie $c_0, c_1, \ldots, c_n$ są dane, a T_n oznacza n-ty *wielomiany Czebyszewa*.

L6.3. 2 punkty Niech T_n $(n = 0, 1, \ldots)$ oznacza n-ty wielomian Czebyszewa.

(a) Podaj postać potęgową wielomianu T_5.

(b) Jakimi wzorami wyrażają się współczynniki wielomianu T_n przy x^n i x^{n-1}?

(c) Korzystając z faktu, że dla dowolnego x z przedziału $[-1, 1]$ n-ty $(n \geq 0)$ wielomian Czebyszewa wyraża się wzorem $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$:

i. sprawdź, że $|T_n(x)| \leq 1 \quad (-1 \leq x \leq 1;\ n \geq 0)$;

ii. wyznacz wszystkie *punkty ekstremalne* n-tego wielomianu Czebyszewa, tj. rozwiązania równania $|T_n(x)| = 1$;

iii. udowodnij, że wielomian Czebyszewa T_{n+1} $(n \geq 0)$ ma $n+1$ zer rzeczywistych, pojedynczych, leżących w przedziale $(-1, 1)$.

L6.4. 2 punkty Wykaż, że dla dowolnych $k, l \in \mathbb{N}$ oraz $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$T_{kl}(x) = T_k(T_l(x)).$$

Wykorzystaj podaną zależność do opracowania **szybkiego algorytmu** wyznaczania wartości wielomianu Czebyszewa **wysokiego** stopnia niebędącego liczbą pierwszą.

L6.5. 1 punkt Podaj postać Lagrange'a wielomianu interpolacyjnego dla danych

x_k	-13	-7	9	20
y_k	-1	6	-8	-1

.

L6.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech będzie $f(x) = 2024x^8 - 1977x^6 + 1945x^3 + 1989x^2 + 1410x$.

(a) Wyznacz wielomian stopnia ≤ 8 interpolujący funkcję f w punktach $-2024,\ 1977,\ -1918,\ \cos(2),\ 1981,\ -1939,\ 1791,\ 1918, \ln(2)$.

(b) Wyznacz wielomian drugiego stopnia, interpolujący funkcję f w punktach $-2,\ -1,\ 0$.

L6.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Sprawdź, że wielomian $L_n \in \Pi_n$ interpolujący funkcję f w parami różnych $n+1$ węzłach $x_0, \ldots, x_n$ można zapisać w postaci

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{p_{n+1}(x)}{(x - x_k)p'_{n+1}(x_k)},$$

gdzie $p_{n+1}(x) := (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

L6.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech dany będzie wielomian $w_n(x) := (x-1)(x-2) \cdots (x-n) \in \Pi_n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Jak wiadomo, język programowania `PWO++` ma bogatą bibliotekę funkcji i procedur numerycznych. Wśród nich znajduje się procedura `FactorPoly2Chebyshev(`n`)` znajdująca z dokładnością bliską maszynowej taki wektor liczb rzeczywistych $[a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)}]$, że

$$w_n(x) = {\sum_{k=0}^{n}}' a_k^{(n)} \cdot T_k(x),$$

gdzie T_k oznacza k-ty wielomian Czebyszewa. Krótko mówiąc: procedura ta wyznacza współczynniki postaci Czebyszewa wielomianu w_n. **Niestety ma ona pewną wadę**, a mianowicie — stopień n nie może być większy niż 2024. Wykorzystując procedurę `FactorPoly2Chebyshev` **tylko raz**, zaproponuj *efektywną* metodę znajdowania postaci Czebyszewa wielomianu w_{2025}, tj. obliczania współczynników $a_k^{(2025)}$ $(0 \leq k \leq 2025)$.

(–) Paweł Woźny