https://skos.ii.uni.wroc.pl/course/view.php?id=677

Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 14

22 stycznia 2025 r.

Zajęcia 28 stycznia 2025 r.   Zaliczenie listy **od 3 pkt.**

L14.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech będzie

$$A := \begin{bmatrix} 780 & 563 \\ 913 & 659 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 217 \\ 254 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{x} := \begin{bmatrix} 0.999 \\ -1.001 \end{bmatrix}, \quad \widehat{x} := \begin{bmatrix} 0.341 \\ -0.087 \end{bmatrix}.$$

Oblicz wektory reszt $\widetilde{r} := A\widetilde{x} - b$, $\widehat{r} := A\widehat{x} - b$ oraz wektory błędów $\widetilde{e} := \widetilde{x} - x$, $\widehat{e} := \widehat{x} - x$, gdzie x jest rozwiązaniem układu $Ax = b$. Który z wektorów $\widetilde{x}$, $\widehat{x}$ jest lepszym przybliżeniem rozwiązania rozważanego układu równań liniowych? Jaki stąd wniosek?

L14.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znajdź rozkład LU macierzy

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & 9 \\ 6 & -6 & 4 & 14 \\ 8 & -9 & 6 & 20 \end{bmatrix},$$

a otrzymany wynik wykorzystaj do obliczenia wartości jej wyznacznika oraz macierzy A^{-1}.

L14.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Stosując metodę faktoryzacji rozwiąż układ równań $Ax = b$, gdzie

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -5 & 3 & -4 \\ 4 & 12 & -10 & 10 \\ -2 & -6 & 8 & -6 \end{bmatrix}, \qquad b := \begin{bmatrix} 10 \\ -18 \\ 38 \\ -18 \end{bmatrix}, \qquad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

L14.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Opracuj oszczędny algorytm znajdowania rozkładu LU macierzy trójprzekątniowej, przy założeniu, że rozkład ten istnieje.

L14.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Udowodnij następujące twierdzenia:

(a) Iloczyn dwu macierzy trójkątnych dolnych (górnych) jest macierzą trójkątną dolną (górną).

(b) Jeśli L jest macierzą trójkątną dolną z jedynkami na przekątnej głównej, to L^{-1} również jest macierzą tego typu.

L14.6. $\boxed{\textsf{1 punkt}}$ Niech dane będą macierze $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Załóżmy, że macierze te są nieosobliwe, i że istnieje rozkład LU macierzy AB. **Opracuj oszczędny** `algorytm` wyznaczania takiej macierzy $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dla której zachodzi równość $BXA = I_n$, gdzie I_n jest macierzą identycznościową stopnia n. **Wyznacz** jego złożoność czasową i pamięciową.

Uwaga. W podanym rozwiązaniu **nie możesz jawnie** obliczać odwrotności **żadnych** macierzy, bo – jak wiadomo – nie jest to bezpieczne z numerycznego punktu widzenia.

(–) Paweł Woźny