https://skos.ii.uni.wroc.pl/course/view.php?id=677

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 15

29 stycznia 2025 r.

- Lista ta zawiera zadania **powtórkowe**, w tym **wybrane** zadania egzaminacyjne z ostatnich lat.
- Podanymi zadaniami **nie należy** nadmiernie sugerować się podczas przygotowań do egzaminu.[a]

[a] Nie oznacza to jednak, że prawdopodobieństwo zdarzenia *kilka podobnych zadań pojawi się na egzaminie* jest zerowe.

L15.1. **Udowodnij**, że dodatnia liczba rzeczywista ma skończone rozwinięcie dwójkowe wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci $m/2^n$, gdzie m i n są liczbami naturalnymi. Jakie znaczenie ma ta obserwacja w kontekście wprowadzania danych do arytmetyki fl i wykonywania w niej operacji zmiennopozycyjnych? Odpowiedź **dokładnie** uzasadnij, **odwołując się** do omówionego na wykładzie modelu arytmetyki zmiennopozycyjnej.

L15.2. W języku programowania `PWO++` funkcja `cos`(x) oblicza z bardzo dużą dokładnością wartość $\cos(x)$, jednak **tylko wtedy**, gdy $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. Wykorzystując funkcję `cos`, zaproponuj `algorytm` wyznaczający wartości funkcji cosinus z dużą dokładnością dla $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

L15.3. Jakie znaczenie z punktu widzenia analizy numerycznej ma pojęcie uwarunkowania zadania?

L15.4. Sprawdź dla jakich wartości x zadanie obliczania wartości funkcji f jest źle uwarunkowane, jeśli: **a)** $f(x) = \ln(x)$, **b)** $f(x) = (x-1)^{10}$.

L15.5. Podaj definicję zadania źle uwarunkowanego, a następnie zbadaj uwarunkowanie zadania obliczania wartości funkcji $f(x) = \cos x$ dla $x \in \mathbb{R}$.

L15.6. Załóżmy, że liczby $x_0, x_1, \ldots, x_n$ są tego samego znaku. Uzasadnij, że zadanie obliczania ich sumy jest zadaniem dobrze uwarunkowanym. Jakie znaczenie ma ten fakt w kontekście obliczeń numerycznych?

L15.7. Wyprowadź wzór na wskaźnik uwarunkowania zadania obliczania wartości funkcji f w punkcie x. Wartość funkcji $f(x) := e^{5x}$ obliczamy w punkcie $x \approx 0.8$. Jak dużej utraty dwójkowych cyfr znaczących spodziewamy się, jeżeli x odbiega od 0.8 o jedną dwójkową cyfrę znaczącą?

L15.8. Wytłumacz dokładnie kiedy występuje i na czym polega zjawisko utraty cyfr znaczących wyniku. Dla jakich wartości x obliczanie wartości wyrażenia $(\sqrt{x^2+2}+x)^{-1}$ może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku? Zaproponuj sposób obliczenia wyniku dokładniejszego.

L15.9. Dla $x \approx 0$ obliczanie wartości wyrażenia $x^{-5}(\sin(3x) - 3x + 9x^3/2)$ może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku. Zakładając, że $|x| \le \frac{1}{10}$, zaproponuj taki sposób obliczenia wartości tego wyrażenia, aby mieć pewność, że błąd bezwzględny nie przekracza 10^{-7}.

L15.10. **Podaj** (w miarę) bezpieczny numerycznie `algorytm` obliczania zer równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Zastosowaną strategię **uzasadnij** odwołując się do omówionych na wykładzie **problemów** wynikających z przyjętego modelu arytmetyki zmiennopozycyjnej.

L15.11. Do rozwiązania zadania obliczeniowego $\mathcal{A}$ użyto komputera i algorytmu numerycznie poprawnego. Czy można mieć pewność, że otrzymany w ten sposób wynik jest bliski rzeczywistego rozwiązania zadania $\mathcal{A}$? Odpowiedź uzasadnij.

L15.12. Sprawdź czy następujący algorytm jest algorytmem numerycznie poprawnym:

```
S:=x[0];

  for i from 1 to 4
    do
      S:=3*S+x[i]
    od;

return(S)
```

L15.13. Niech dany będzie wielomian $w(x) := a_1x/3! - a_3x^3/5! + a_5x^5/7! - a_7x^7/9!$. Rozważmy następujący algorytm obliczania jego wartości w punkcie $x \in \mathbb{R}$:

```
w:=a[7]

  for n from 3 downto 1
    do
      w:=a[2*n-1]-x^2/(2*n+3)/(2*n+2)*w
    od

return(w*x/2/3)
```

Przyjmując, że a_1, a_3, a_5, a_7 oraz x są liczbami maszynowymi, sprawdź czy algorytm ten jest algorytmem numerycznie poprawnym.

L15.14. Niech dany będzie wielomian $w \in \Pi_n$ podany w postaci potęgowej. Niech $\mathtt{H}(w, x)$ oznacza wartość $w(x)$ **obliczoną w arytmetyce** fl przy pomocy **schematu Hornera**. Zakładając, że $x > 0$, $\mathrm{rd}(x) = x$, $w(x) \neq 0$, a współczynniki wielomianu w są **ujemnymi liczbami maszynowymi**, oszacuj wartość

$$\left| \frac{w(x) - \mathtt{H}(w, x)}{w(x)} \right|.$$

Co wynika z tego oszacowania?

L15.15. Niech dany będzie wielomian $w_n(x) := (x-1)(x-2)\cdots(x-n) \in \Pi_n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Jak wiadomo, język programowania `PWO++` ma bogatą bibliotekę funkcji i procedur numerycznych. Wśród nich znajduje się procedura `FactorPoly2Chebyshev(`n`)` znajdująca z dokładnością bliską maszynowej taki wektor liczb rzeczywistych $[a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)}]$, że

$$w_n(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' a_k^{(n)} \cdot T_k(x),$$

gdzie T_k oznacza k-ty wielomian Czebyszewa. Krótko mówiąc: procedura ta wyznacza współczynniki postaci Czebyszewa wielomianu w_n. **Niestety ma ona wadę**, a mianowicie — stopień n nie może być większy niż 2023. Wykorzystując procedurę `FactorPoly2Chebyshev` **tylko raz**, zaproponuj *efektywną* metodę znajdowania postaci Czebyszewa wielomianu w_{2024}, tj. obliczania współczynników $a_k^{(2024)}$ $(0 \leq k \leq 2024)$.

L15.16. Załóżmy, że dane są współczynniki $a := \left[a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)}\right]$ postaci potęgowej wielomianu $w \in \Pi_n$, tj. $w(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(n)} x^j$. W języku `PWO++` procedura `ChebyshevForm(`a`)` znajduje taki wektor liczb rzeczywistych $\left[c_0^{(n)}, c_1^{(n)}, \ldots, c_n^{(n)}\right]$, że

$$w(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' c_k^{(n)} \cdot T_k(x),$$

gdzie T_k oznacza k-ty wielomian Czebyszewa. Krótko mówiąc: procedura ta wyznacza współczynniki postaci Czebyszewa wielomianu w. **Niestety ma ona pewną wadę**, a mianowicie — stopień n wielomianu w nie może być większy niż 2021. Wykorzystując **co najwyżej** dwukrotnie procedurę `ChebyshevForm`, zaproponuj *efektywny* `algorytm` znajdowania postaci Czebyszewa dowolnego wielomianu $v \in \Pi_{2023}$.

L15.17. Opisz metodę bisekcji i podaj jej własności.

L15.18. Stosując metodę Newtona, zaproponuj sposób przybliżonego obliczania wartości $\sqrt[5]{a}$ $(a > 0)$. Jak dobrać x_0? Jak powinien wyglądać warunek *stopu*?

L15.19. Niech α będzie pierwiastkiem pojedynczym funkcji f $(f(\alpha) = 0,\ f'(\alpha) \neq 0)$. Udowodnij, że wówczas rząd zbieżności metody Newtona wynosi $p = 2$.

L15.20. Zaproponuj efektywny algorytm obliczania z dużą dokładnością wartości $\sqrt{a}$ $(a > 0)$ wykorzystując **jedynie** operacje arytmetyczne $(+, -, \cdot, /)$.

L15.21. Sformułuj i podaj interpretację geometryczną metody siecznych. Jak w wypadku tej metody powinien wyglądać *warunek stopu*?

L15.22. Podaj efektywny algorytm wyznaczania wartości liczby naturalnej a, której cyframi dziesiętnymi (od najbardziej do najmniej znaczącej) są $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$, gdzie $a_n \neq 0$.

L15.23. Sformułuj i uzasadnij uogólniony schemat Hornera obliczania wartości wielomianu podanego w postaci Newtona.

L15.24. Sformułuj i uzasadnij algorytm Clenshawa obliczania wartości wielomianu podanego w postaci Czebyszewa.

L15.25. Niech dany będzie wielomian $w_n \in \Pi_n$ postaci

$$w_n(x) := z_0(x - z_1)(x - z_2)\ldots(x - z_n),$$

gdzie liczby rzeczywiste $z_0, z_1, \ldots, z_n$ są dane. Opracuj i uzasadnij **oszczędny** algorytm znajdowania postaci potęgowej wielomianu w_n. Określ złożoność zaproponowanej metody. Gdzie, w kontekście metod omówionych w ramach wykładu, algorytm taki może mieć zastosowania?

L15.26. Podaj postać Newtona wielomianu interpolacyjnego $L_4 \in \Pi_4$ dla danych

x_k	-2	-1	1	2	3
y_k	1	2	10	29	106

.

L15.27. Podaj postać Newtona wielomianu interpolacyjnego dla następujących danych:

a)

x_k	-2	-1	0	1
y_k	2	0	2	-4

,

b)

x_k	1	2	-1	-2	0
y_k	-4	-30	0	2	2

.

L15.28. Znajdź **postać Newtona** wielomianu interpolacyjnego dla następujących danych:

1	2	3	4	$\cdots$	2023	2024
-8	-6	-4	-2	$\cdots$	4036	0

.

Odpowiedź **uzasadnij**.

L15.29. Funkcję $f(x) = \cos(x/2)$ interpolujemy wielomianem $L_n \in \Pi_n$ w węzłach będących zerami wielomianu Czebyszewa T_{n+1}. Jak należy dobrać n, aby mieć pewność, że

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - L_n(x)| \le 10^{-8} \ ?$$

L15.30. Niech $L_n \in \Pi_n$ będzie wielomianem interpolującym funkcję $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ w węzłach postaci

$$x_{nk} := \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right) + \frac{1}{2} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Jak należy dobrać n, aby mieć pewność, że

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) - L_n(x)| \le 10^{-15} \ ?$$

L15.31. Niech dane będą: liczba naturalna n i parami różne liczby rzeczywiste $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Zaproponuj algorytm znajdowania takich liczb $c_0, c_1, \ldots, c_n$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$x^n = c_0 + c_1(x-a_0) + c_2(x-a_0)(x-a_1) + \ldots + c_n(x-a_0)(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_{n-1}).$$

Podaj jego złożoność obliczeniową i pamięciową.

L15.32. (a) Podaj definicję naturalnej funkcji sklejanej trzeciego stopnia.

(b) Znajdź naturalną funkcję sklejaną trzeciego stopnia dla danych

x_k	-1	0	1
y_k	-1	2	-3

.

L15.33. **Podaj** definicję naturalnej interpolacyjnej funkcji sklejanej trzeciego stopnia (*w skrócie*: NIFS3). **Znajdź** NIFS3 dla danych

x_k	-2022	-4	-2	0	1	3	2022
y_k	8043	1989	1983	1977	1974	1968	-4089

.

Uwaga. Jeśli — wbrew temu, co mówiono — nauczyłeś się na pamięć jawnego wzoru na NIFS3 i użyjesz go w rozwiązaniu drugiej części zadania, to dostaniesz *karę* w wysokości -3 punktów (tak, to znaczy, że z egzaminu można zdobyć **mniej** niż 0 pkt.).

L15.34. Niech dane będą wektory $\mathtt{x}:=[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ($x_k < x_{k+1}$, $0 \le k \le n-1$), $\mathtt{y}:=[y_0, y_1, \ldots, y_n]$ oraz $\mathtt{z}:=[z_0, z_1, \ldots, z_m]$. Niech s_n oznacza naturalną funkcję sklejaną trzeciego stopnia (*w skrócie*: NFS3) spełniającą warunki $s_n(x_k) = y_k$ ($0 \le k \le n$). Jak pamiętamy, w języku `PWO++` procedura `NSpline3(x,y,z)` wyznacza wektor $\mathtt{Z} := [s_n(z_0), s_n(z_1), \ldots, s_n(z_m)]$, z tym, że **musi być** $m < 2n$. Załóżmy, że wartości pewnej funkcji ciągłej f znane są **jedynie** w punktach $x_0 < x_1 < \cdots < x_{100}$. Wiadomo, że NFS3 odpowiadająca danym $(x_k, f(x_k))$ ($0 \le k \le 100$) bardzo dobrze przybliża funkcję f. Wywołując procedurę `NSpline3` **tylko raz**, opracuj algorytm numerycznego wyznaczania przybliżonych wartości wszystkich **miejsc zerowych** funkcji f znajdujących się w przedziale $[x_0, x_{100}]$. W swoim rozwiązaniu możesz **użyć wielokrotnie** innej procedury języka `PWO++`, a mianowicie `Solve3(a,b,c,d)` znajdującej z dużą dokładnością wszystkie rzeczywiste miejsca zerowe wielomianu $\mathtt{a}x^3 + \mathtt{b}x^2 + \mathtt{c}x + \mathtt{d}$ albo informującej, że takich miejsc zerowych nie ma.

L15.35. **Wstęp**. Niech dane będą wektory liczb rzeczywistych $\mathtt{x}:=[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ($x_0 < x_1 < \cdots < x_n$), $\mathtt{y}:=[y_0, y_1, \ldots, y_n]$ i $\mathtt{z}:=[z_0, z_1, \ldots, z_m]$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Niech s_n oznacza naturalną interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia (*w skrócie*: NIFS3) spełniającą warunki $s_n(x_k) = y_k$ ($0 \le k \le n$). W języku `PWO++` procedura `NSpline3(x,y,z)` wyznacza wektor $[s_n(z_0), s_n(z_1), \ldots, s_n(z_m)]$. **Zadanie**. Wiadomo, że NIFS3 odpowiadająca danym $(x_k, f(x_k))$ ($0 \le k \le 100$) bardzo dobrze przybliża funkcję f. Można więc przypuszczać, że

$$S_n := \int_{x_0}^{x_n} s_n(x)\,\mathrm{d}x$$

jest bardzo dobrym przybliżeniem wartości całki $I := \displaystyle\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x$. Stosując procedurę `NSpline3` **tylko raz**, zaproponuj szkic **efektywnego algorytmu** wyznaczania wielkości S_n. Zadbaj więc m.in. o to, aby liczba współrzędnych wektora $\mathtt{z}$ (czyli wartość $m+1$) **była możliwie jak najmniejsza**.

L15.36. Dana jest *postać Béziera* wielomianu $p \in \Pi_n$, tj.

$$p(t) := \sum_{k=0}^{n} a_k B_k^n(t), \qquad \text{gdzie} \qquad B_k^n(t) := \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Uzasadnij, że

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k^{(1)} B_k^{n+1}(t) \qquad \text{dla} \qquad a_k^{(1)} := \frac{n-k+1}{n+1} a_k + \frac{k}{n+1} a_{k-1} \quad (0 \le k \le n+1),$$

gdzie przyjęto $a_{-1} = a_{n+1} := 0$. Jakie zastosowanie może mieć ta zależność?

L15.37. Podaj definicję krzywej Béziera P stopnia n o punktach kontrolnych $W_0, W_1, \ldots, W_n \in \mathbb{R}^2$. Uzasadnij, że dla każdego $t \in [0,1]$, $P(t)$ jest punktem na płaszczyźnie.

L15.38. Niech P będzie krzywą Béziera stopnia n o punktach kontrolnych $W_0, W_1, \ldots, W_n \in \mathbb{R}^2$. Ustalmy $t \in [0,1]$. Zaproponuj algorytm wyznaczania $P(t)$ w czasie $O(n)$.

L15.39. Niech p będzie wielomianem zmiennej t stopnia co najwyżej n. W języku `PWO++` procedura `BezierCoeffs(`p, t`)` wyznacza taki wektor `c`$:= [c_0, c_1, \ldots, c_n]$, że

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k B_k^n(t),$$

gdzie $B_0^n, B_1^n, \ldots, B_n^n$ są wielomianami Bernsteina stopnia n. Współczynniki c_k $(0 \leq k \leq n)$ nazywamy *współczynnikami Béziera* wielomianu p. Niestety, procedura ta ma **pewne ograniczenie**, mianowicie: **musi być** $n \leq 50$.

W jaki sposób, używając procedury `BezierCoeffs` co najwyżej **dwa razy**, wyznaczyć współczynniki Béziera wielomianu $w(t) := p(t) \cdot q(t)$, gdzie $p \in \Pi_{50}$, a $q \in \Pi_2$? Jak zmieni się rozwiązanie, jeśli przyjąć, że $q \in \Pi_{50}$?

L15.40. Pomiary (t_k, c_k) $(0 \leq k \leq N;\ t_k > 0,\ c_k > 1)$ pewnej zależnej od czasu wielkości fizycznej C sugerują, że wyraża się ona wzorem

$$C(t) = 2^{(At^2+2018)^{-1}}.$$

Stosując aproksymację średniokwadratową, wyznacz prawdopodobną wartość parametru A.

L15.41. Wyznacz funkcję postaci $y(x) = \dfrac{ax^2-3}{x^2+1}$ najlepiej dopasowaną w sensie aproksymacji średniokwadratowej do danych

x_k	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y_k	y_0	y_1	$\ldots$	y_n

,

przy założeniu, że $s_2 = 10$, $s_4 = -3$, gdzie $s_m := \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x_k^m}{(x_k^2+1)^2}$ $(m = 2, 4)$.

L15.42. (a) Znajdź wielomiany P_0, P_1, P_2 ortogonalne względem iloczynu skalarnego

$$(f, g) := f(-2)g(-2) + f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2).$$

(b) Wykorzystując wynik otrzymany w punkcie (a), wyznacz wielomian $w_2^* \in \Pi_2$ najlepiej dopasowany w sensie aproksymacji średniokwadratowej do danych

x_k	-2	-1	0	1	2
y_k	4	1	1	1	4

.

L15.43. Rozważmy zadanie wielomianowej aproksymacji średniokwadratowej na zbiorze dyskretnym dla węzłów postaci $x_k := -a + \frac{2ak}{N}$ $(0 \leq k \leq N;\ a > 0)$. **Udowodnij**, że jeśli aproksymowana funkcja jest parzysta, to n-ty wielomian optymalny $(n < N)$, też jest funkcją parzystą.

L15.44. Niech $P_0, P_1, \ldots, P_N$ będą wielomianami ortogonalnymi względem iloczynu skalarnego postaci

$$(f, g)_N := \sum_{k=0}^{N} f(x_k) g(x_k),$$

gdzie $x_k := -a + \frac{2ak}{N}$ $(k = 0, 1, \ldots, N;\ a > 0)$. Udowodnij, że jeśli α jest miejscem zerowym wielomianu P_k $(0 \le k \le N)$, to także $-\alpha$ jest miejscem zerowym tego wielomianu.

L15.45. Podaj definicję ciągu wielomianów ortogonalnych względem dyskretnego iloczynu skalarnego $(\cdot, \cdot)_N$. Jak efektywnie wyznaczać takie wielomiany? Jakie jest ich zastosowanie w aproksymacji średniokwadratowej na zbiorze dyskretnym?

L15.46. Znajdź wielomian $w_2^* \in \Pi_2$ najlepiej dopasowany w sensie aproksymacji średniokwadratowej do następujących danych:

x_k	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
y_k	-5.5	-5	-3.2	-1	1	3.2	5	5.5

Uwaga. Rozwiązanie nie wymaga wielu obliczeń, ale jeśli tego nie zauważysz, też możesz zdobyć maksimum punktów.

L15.47. Podaj definicję rzędu kwadratury liniowej $Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$. Udowodnij, że jeśli rząd kwadratury Q_n wynosi przynajmniej $n+1$, to jest to kwadratura interpolacyjna.

L15.48. Jaki maksymalnie rząd może mieć kwadratura liniowa? Odpowiedź uzasadnij.

L15.49. **Opisz w szczegółach** kwadratury interpolacyjne (m.in. podaj ideę – odpowiedni rysunek mile widziany, wyprowadź wzory na współczynniki, uwzględnij szczególną sytuację, gdy węzły są równoodległe, nie zapomnij o *najlepszych* kwadraturach interpolacyjnych, itp.).

L15.50. Opisz ideę kwadratur złożonych. Wyprowadź złożony wzór Simpsona.

L15.51. Opisz metodę Romberga obliczania przybliżonej wartości całki $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

L15.52. Opisz kwadratury złożone. Jaką mają one przewagę nad kwadraturami Newtona-Cotesa? Czy są one związane z metodą Romberga? Jeśli tak, to w jaki sposób?

L15.53. Znajdź rozkład LU macierzy $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -5 & 3 & -4 \\ 4 & 12 & -10 & 9 \\ -8 & -24 & 32 & -16 \end{bmatrix}$. Następnie wykorzystaj otrzymany rozkład do rozwiązania układu równań $Ax = b$, gdzie $b := [17, -33, 70, -112]^T$.

L15.54. Niech dana będzie macierz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Przypomnijmy, że *rzędem* macierzy nazywamy maksymalną liczbę jej liniowo niezależnych kolumn. Opracuj algorytm numerycznego wyznaczania rzędu macierzy A. Podaj jego złożoność czasową i pamięciową.

L15.55. Niech dana będzie macierz nieosobliwa $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zaproponuj efektywny algorytm wyznaczania macierzy odwrotnej A^{-1} i podaj jego złożoność.

L15.56. Załóżmy, że macierz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ma wszystkie minory główne różne od zera. Niech dane będą wektory $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{R}^n$. Zaproponuj **oszczędny** `algorytm` wyznaczania wektorów $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$, dla korych $Ax_k = b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. **Podaj** jego złożoność obliczeniową i pamięciową.

Jak opracowaną metodę **zastosować** do znalezienia takiej macierzy $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dla której $AX = B$, gdzie macierz $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest dana?

Uwaga. W rozwiązaniu **nie wolno** wprost wyznaczać **żadnych odwrotności** macierzy, bo – jak wiadomo – nie jest to bezpieczne z numerycznego punktu widzenia.

L15.57. Załóżmy, że istnieje rozkład LU macierzy **trójprzekątniowej** $T := [t_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$. **Wyprowadź wzory** na elementy macierzy trójkątnej dolnej $L := [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oraz macierzy trójkątnej górnej $U := [u_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dla których zachodzi $T = L \cdot U$. Następnie, **wykorzystując** rozkład LU macierzy T, **zaproponuj** i **uzasadnij** `algorytm` rozwiązywania układu równań $T \cdot x = b$, gdzie $b \in \mathbb{R}^n$. **Podaj** jego złożoność obliczeniową i pamięciową. W której z omówionych na wykładzie metod pojawiają się układy równań trójprzekątniowych?

L15.58. Opracuj metodę wyznaczania rozkładu LU macierzy $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ postaci

$$A_n := \begin{bmatrix} a_1 & & & & & c_1 \\ & a_2 & & & & c_2 \\ & & a_3 & & & c_3 \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & a_{n-1} & c_{n-1} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

gdzie zaznaczono jedynie niezerowe elementy. Podaj jej złożoność.

(–) Paweł Woźny