

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 13

15 stycznia 2025 r.

Zajęcia 21 stycznia 2025 r.
Zaliczenie listy **od 4 pkt.**

L13.1. 1 punkt Niech dana będzie kwadratura liniowa $Q_n(f) := \sum_{i=0}^n A_i^{(n)} f(x_i^{(n)})$ odpowiadająca całce $\int_a^b f(x) dx$ ($a < b$). Załóżmy, że $\text{rzęd}(Q_n) > 0$. Uzasadnij, że $\sum_{k=0}^n A_k^{(n)} = b - a$.

L13.2. 1 punkt O funkcji ciągłej f wiadomo, że $\max_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)| < 2025$. Załóżmy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ potrafimy z dużą dokładnością obliczać $f(x)$. Opracuj algorytm wyznaczania przybliżonej wartości całki $\int_a^b f(x) dx$ z błędem bezwzględnym nie przekraczającym ε , gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) oraz $\varepsilon > 0$ są dane.

L13.3. 1 punkt Jak należy dobrać n , aby stosując złożony wzór Simpsona S_n obliczyć przybliżoną wartość całki $\int_{-\pi/3}^{\pi/6} \cos(3x + \pi/4) dx$ z błędem względnym $\leq 10^{-14}$?

L13.4. 1 punkt Sprawdź, że ciąg złożonych wzorów trapezów spełnia związek

$$T_{2n}(f) = \frac{1}{2} [T_n(f) + M_n(f)] \quad (n = 1, 2, \dots),$$

gdzie

$$M_n(f) := h_n \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{1}{2}(2i-1)h_n\right), \quad h_n := \frac{b-a}{n}.$$

Korzystając z tej obserwacji sformułuj oszczędny algorytm konstrukcji tablicy Romberga.

L13.5. **Włącz komputer!** 1 punkt Stosując metodę Romberga znajdź przybliżenia $T_{m,k}$ ($0 \leq m \leq 20$; $0 \leq k \leq 20 - m$) następujących całek:

a) $\int_{-5}^3 (2025x^7 - 2006x^6 - 2016x^2) dx$, b) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 + 25x^2}$, c) $\int_{-3\pi}^{\pi/6} \cos(3x + \pi/4) dx$.

Skomentuj wyniki.

L13.6. 1 punkt Rozważmy zadanie obliczania przybliżonej wartości całki $I := \int_{-5}^7 f(x) dx$ (f – funkcja ciągła) metodą Romberga. W **ilu**, i w **których**, punktach przedziału $[-5, 7]$ **wystarczy** wyznaczyć wartość funkcji f , aby obliczyć przybliżenie $T_{12,0}$ całki I ?

L13.7. 2 punkty Wykaż, że ciąg elementów dowolnej kolumny tablicy Romberga, utworzonej dla funkcji $f \in C[a, b]$, jest zbieżny do całki $\int_a^b f(x) dx$.

- L13.8.** 1 punkt Korzystając z faktu podanego na wykładzie, tzn. **bez konieczności** rozwiązywania układu równań nieliniowych, dobierz węzły x_0, x_1, x_2 oraz współczynniki A_0, A_1, A_2 kwadratury

$$Q_2(f) := A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

w taki sposób, aby równość $\int_{-7}^7 f(x) dx = Q_2(f)$ zachodziła dla wszystkich wielomianów stopnia ≤ 5 .

- L13.9.** 2 punkty W języku PWO++ procedura `LegendreZeros(m)` znajduje z dużą dokładnością wszystkie miejsca zerowe m -tego wielomianu Legendre'a. Używając tej procedury, opracuj efektywny **algorytm** znajdowania takich węzłów $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ oraz współczynników $A_0^{(n)}, A_1^{(n)}, \dots, A_n^{(n)}$, że dla każdego wielomianu w stopnia mniejszego od $2n+2$ zachodzi $\int_{-5}^8 w(x) dx = Q_n(w)$, gdzie $Q_n(f) := \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$.

- L13.10.** Dodatkowe zadanie programistyczne (do 31 stycznia; do 6 punktów)¹

Rozważmy kwadratury interpolacyjne dla całek postaci $\int_{-1}^1 f(x) dx$ z węzłami będącymi:

- (a) zerami wielomianu Czebyszewa pierwszego rodzaju $T_n(x)$ w przedziale $(-1, 1)$,

$$x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

- (b) zerami wielomianu Czebyszewa drugiego rodzaju $U_{n-1}(x)$, które są punktami ekstremalnymi $T_n(x)$ w przedziale $(-1, 1)$,

$$(1) \quad x_k = \cos \frac{k\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1);$$

- (c) wartościami danymi wzorem (1) wraz z $x_0 = 1$ i $x_n = -1$.

Wyprowadź — podając **wszystkie szczegóły** rozumowania — **jawne wzory** na wagi kwadratur w każdym z wymienionych wypadków. Przetestuj uzyskane kwadratury dla **wielu** różnego rodzaju funkcji f . **Skomentuj wyniki**.

Literatura

- [1] G. Dahlquist, Å. Björck, *Numerical Methods in Scientific Computing*, Volume 1, SIAM, 2008.

(-) Paweł Woźny

¹Patrz pkt. 10. **regulaminu** zaliczania ćwiczeń.