https://skos.ii.uni.wroc.pl/course/view.php?id=677

Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 3

23 października 2024 r.

Zajęcia 29 października 2024 r.
Zaliczenie listy **od 6 pkt.**

L3.1. **Włącz komputer!** | 2 punkty | Dla jakich wartości x obliczanie wartości wyrażeń

a) $(x^5 + \sqrt{x^{10} + 2024})^{-1}$, **b)** $10^8(e^x - e^{2x})$, **c)** $6x^{-3}(\arcsin(x) - x)$

d) $4\cos^2 x - 1$

może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku? Zaproponuj sposoby obliczenia wyniku dokładniejszego. Pokaż, że sposoby te **działają w praktyce**.

L3.2. **Włącz komputer!** | 1 punkt | Podaj (w miarę) bezpieczny numerycznie `algorytm` obliczania zer równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). **Przeprowadź testy** dla odpowiednio dobranych wartości a, b i c **pokazujące, że Twój algorytm jest lepszy** od *metody szkolnej* bazującej jedynie na dobrze znanych wzorach $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$.

L3.3. | 1 punkt | Wyprowadź wzór na wskaźnik uwarunkowania zadania obliczania wartości funkcji f w punkcie x.

L3.4. | 2 punkty | Sprawdź dla jakich wartości x zadanie obliczania wartości funkcji f jest źle uwarunkowane, jeśli:

a) $f(x) = (x - 2024)^5$, **b)** $f(x) = \sin(-8x)$, **c)** $f(x) = (2024 + x^8)^{-2}$.

L3.5. | 2 punkty | Załóżmy, że dla każdego $x \in X_{fl}$ zachodzi $\mathrm{fl}(\sin(x)) = \sin(x)(1 + \varepsilon_x)$, gdzie $|\varepsilon_x| \leq 2^{-t}$, natomiast t oznacza liczbę bitów przeznaczoną na zapamiętanie mantysy. Niech dane będą liczby maszynowe y_1, y_2, y_3, y_4 oraz taka liczba maszynowa x, że $x \cdot 2^{-8}$ też jest liczbą maszynową. Sprawdź czy poniższy algorytm obiczania wartości wyrażenia $\sum_{i=1}^{4} y_i \sin(4^{-i}x)$ jest numerycznie poprawny:

```
S:=0;

  for i from 1 to 4
    do
      S:=S+y[i]*sin(4^(-i)*x)
    od;

Return(S)
```

L3.6. | 2 punkty | Sprawdź czy podany niżej algorytm obliczania wartości wyrażenia $\dfrac{b + c + bd}{a(d+1)}$ jest algorytmem numerycznie poprawnym:

```
S:=d+1;
S:=c/S;
S:=b+S;
S:=a/S;
S:=1/S;

Return(S)
```

L3.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Zbadaj czy podany niżej algorytm wyznaczania iloczynu liczb maszynowych $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ (zakładamy zatem, że $\text{rd}(x_k) = x_k$, $1 \le k \le 2n$) jest algorytmem numerycznie poprawnym.

```
I1:=x[2*n];
I2:=x[2*n-1];

  for k=n-1 downto 1
    do
      I1:=I1*x[2*k];
      I2:=I2*x[2*k-1]
    end;

Return(I1*I2)
```

L3.8. $\boxed{\textbf{Dodatkowe zadanie programistyczne}\text{ (do 17 listopada; do 5 punktów)}}$ [1]

Udowodnij, że dla małego h

$$(1) \qquad f'(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} + O(h), \qquad f'(t) = \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h} + O(h^2).$$

Przybliżenia pochodnej funkcji znajdują zastosowanie m.in. w numerycznym rozwiązywaniu równań różniczkowych, w tym tzw. *równań ruchu*. Znając położenie i prędkość obiektu w chwili t (w wypadku drugiego wzoru, odpowiednio, $t - h$ oraz t), jak również działające na niego siły, z użyciem powyższych wzorów można **przybliżyć** jego położenie oraz prędkość w chwili $t + h$.

Rozpatrujemy ruch układu ciał oddziałujących wzajemnie na siebie poprzez siłę grawitacji (przyda się znane ze szkoły prawo powszechnego ciążenia Newtona: $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$). Celem jest określenie, na podstawie początkowego położenia ciał i ich prędkości w chwili t, jaki będzie stan układu w kolejnych ustalonych chwilach, np. $t+h, t+2h, t+3h, \ldots$

(a) Wyprowadź układ równań ruchu dla **dwóch** ciał wzajemnie się przyciągających.

(b) Sprawdź na przykładzie dwóch ciał, które z powyższych przybliżeń pochodnej lepiej sprawdza się w praktyce (dla tego samego h).

---

[1]Patrz pkt. 13. regulaminu zaliczania ćwiczeń.

Wskazówka nr 1. Bardzo dobrze będzie to widać, jeżeli układ przypomina planetę krążącą wokół słońca.

Wskazówka nr 2. Metodę wykorzystującą pierwszy z wzorów (1) można znaleźć w literaturze pod nazwą *metody Eulera* przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych.

(c) Choć dla dwóch przyciągających się ciał znane jest jawne rozwiązanie analityczne, to w wypadku trzech (tzw. **problem trzech ciał**) lub więcej obiektów — wzorów takich nie ma. Zadanie można rozwiązywać wyłącznie w sposób przybliżony stosując metody numeryczne. Korzystając z podanych możliwości aproksymowania pochodnej, znajdź przybliżone rozwiązanie problemu trzech (lub więcej) ciał dla kilku istotnie różnych układów (np. układ Słońce-Ziemia-Księżyc, planeta krążąca wokół gwiazdy podwójnej, wykorzystanie zjawiska asysty grawitacyjnej, ...).

Autor zadania: *Filip Chudy.*

L3.9. **Dodatkowe zadanie programistyczne** (do 17 listopada; do 5 punktów) [2] Niech $\{s_n\}$ będzie ciągiem zbieżnym do granicy s. *Ciąg* Δ^2 *Aitkena*

$$t_n = \frac{s_n s_{n+2} - s_{n+1}^2}{s_{n+2} - 2s_{n+1} + s_n} \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

jest w wielu wypadkach — spróbuj dowiedzieć się, w których — zbieżny do s szybciej niż $\{s_n\}$, tzn. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_n - s}{s_n - s} = 0$.

(a) Oblicz 20 początkowych wyrazów ciągów $\{s_n\}$ i $\{t_n\}$ oraz $\{e_n := s_n - s\}$ i $\{d_n := t_n - s\}$ w wypadku

i. $s_n = \sum\limits_{j=0}^{n} (-1)^j (2j+1)^{-1}$, $s = \pi/4 \approx 0.7853981634$;

ii. $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^{-3/2}$, $s \approx 2.612375348685488$.

Czy mamy do czynienia z istotnym przyspieszeniem zbieżności? Powtórz doświadczenie dla innych danych.

(b) Zauważ, że zbieżność ciągu $\{t_n\}$ można przyspieszyć w analogiczny sposób, definiując ciąg $\{u_n\}$ wzorem

$$u_n = \frac{t_n t_{n+2} - t_{n+1}^2}{t_{n+2} - 2t_{n+1} + t_n} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Korzystając z tej obserwacji wykonaj kilka doświadczenia obliczeniowe dla danych z punktu (a) oraz dla kilku innych przykładów.

(c) Uogólniając metodę, zaproponuj sposób **przyspieszenia ciągu** $\{u_n\}$. Sprawdź eksperymentalnie jego skuteczność.

(–) Paweł Woźny

[2] Patrz pkt. 13. regulaminu zaliczania ćwiczeń.