Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 8

27 listopada 2024 r.

Zajęcia 3 grudnia 2024 r.
Zaliczenie listy **od 4 pkt.**

L8.1. 1 punkt Znajdź naturalną interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia (*w skrócie*: NIFS3) dla danych

a)

x_k	0	4	8
y_k	0	64	−128

,

b)

x_k	−10	−8	−1	0	7	8	9
y_k	−22217	−18169	−4001	−1977	12191	14215	16239

.

L8.2. 1 punkt Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 546 + 253x + 60x^2 + 5x^3 & \text{dla} \quad -4 \le x \le -1, \\ 522 + 181x - 12x^2 - 19x^3 & \text{dla} \quad -1 \le x \le 0, \\ 522 + 181x - 12x^2 + 5x^3 & \text{dla} \quad 0 \le x \le 1, \\ 528 + 163x + 6x^2 - x^3 & \text{dla} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

jest NIFS3 dla pewnych danych (obserwacji) odpowiadającym węzłom $-4, -1, 0, 1, 2$?

L8.3. 1 punkt Czy istnieją takie stałe a, b, c, d, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 2025x - 2024 & \text{dla} \quad -3 \le x \le -1, \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & \text{dla} \quad -1 \le x \le 1, \\ -2025x + 2024 & \text{dla} \quad 1 \le x \le 3 \end{cases}$$

jest NIFS3 dla pewnych danych (obserwacji) odpowiadającym węzłom $-3, -1, 1, 3$?

L8.4. 1 punkt Niech s będzie naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia interpolującą funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ($a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$). Jak wiemy, *momenty* $M_k := s''(x_k)$ ($k = 0, 1, \ldots, n$) spełniają układ równań

$$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k)M_{k+1} = d_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{1}$$

gdzie $M_0 = M_n = 0$ oraz

$$d_k := 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}], \quad \lambda_k := h_k/(h_k + h_{k+1}), \quad h_k := x_k - x_{k-1}.$$

Sformułuj i uzasadnij oszczędny algorytm rozwiązywania układu (1). Jaki jest koszt jego realizacji?

L8.5. 2 punkty Niech będzie $\texttt{x}{:=}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ($x_0 < x_1 < \cdots < x_n$), $\texttt{y}{:=}[y_0, y_1, \ldots, y_n]$ oraz $\texttt{z}{:=}[z_0, z_1, \ldots, z_m]$. Niech s_n oznacza NIFS3 spełniającą warunki $s_n(x_k) = y_k$ ($0 \le k \le n$). W języku `PWO++` procedura `NSpline3(x,y,z)` wyznacza wektor `Z` $:= [s_n(z_0), s_n(z_1), \ldots, s_n(z_m)]$, z tym, że **musi być** $m < 2n$. Załóżmy, że wartości pewnej funkcji $f \in C^1[x_0, x_1]$ znane są **jedynie** w punktach $x_0 < x_1 < \cdots < x_{100}$. Wiadomo, że **pochodna** NIFS3 odpowiadającej danym $(x_k, f(x_k))$ $(0 \le k \le 100)$ bardzo dobrze przybliża funkcję f'. Wywołując procedurę `NSpline3` **tylko raz**, opracuj algorytm numerycznego wyznaczania przybliżonych wartości wszystkich miejsc zerowych f' leżących w przedziale $[x_0, x_{100}]$.

L8.6. 1 punkt Ustalmy liczby naturalne M oraz N. Niech dane będą węzły $t_0 < t_1 < \cdots < t_N$ oraz liczby rzeczywiste y_{mk}, gdzie $0 \le k \le N$, a $m = 1, 2, \ldots, M$. Niech s_m oznacza NIFS3 spełniającą następujące warunki:

$$s_m(t_k) = y_{mk} \qquad (0 \le k \le N)$$

dla $1 \le m \le M$. Opracuj **oszczędny** algorytm konstrukcji funkcji $s_1, s_2, \ldots, s_M$.

L8.7. **Włącz komputer!** 2 punkty Niech s_x i s_y będą naturalnymi funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia spełniającymi następujące warunki interpolacyjne:

$$s_x(t_k) = x_k, \quad s_y(t_k) = y_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, 27),$$

gdzie $t_k := \frac{k}{27}$ $(k = 0, 1, \ldots, 27)$, natomiast

$$[x_0, x_1, \ldots, x_{27}] := [15.5, 12.5, 8, 10, 7, 4, 8, 10, 9.5, 14, 18, 17, 22, 25, 19, \\ 24.5, 23, 17, 16, 12.5, 16.5, 21, 17, 11, 5.5, 7.5, 10, 12],$$
$$[y_0, y_1, \ldots, y_{27}] := [32.5, 28.5, 29, 33, 33, 37, 39.5, 38.5, 42, 43.5, 42, 40, 41.5, 37, 35, \\ 33.5, 29.5, 30.5, 32, 19.5, 24.5, 22, 15, 10.5, 2.5, 8, 14.5, 20].$$

Biorąc pod uwagę zadanie **L8.6**, opracuj **własną implementację** wyznaczania NIFS3. Następnie użyj jej do narysowania łamanej łączącej punkty

$$(s_x(u_0), s_y(u_0)), (s_x(u_1), s_y(u_1)), \ldots, (s_x(u_M), s_y(u_M)),$$

gdzie $u_k := \frac{k}{M}$ $(k = 0, 1, \ldots, M)$, a M jest odpowiednio dużą liczbą naturalną. Co przedstawia ta łamana?

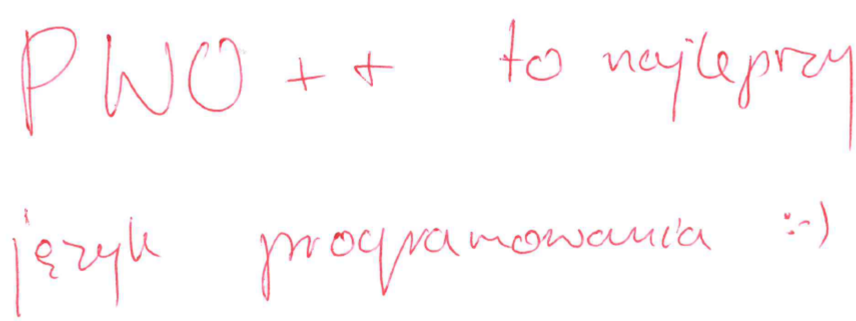
Konkurs I

$\Downarrow$

Patrz niżej

Konkurs I

Stosując podejście podobne do opisanego w zadaniu **L8.7**, wykorzystaj NIFS3 do odtworzenia następującego napisu:



(wersja PDF skanu napisu dostępna jest tutaj). Rozwiązanie można nadsyłać do **31 grudnia 2024 r.** na adres pwo@cs.uni.wroc.pl (temat listu: *AN: konkurs I*). **Musi** ono **zawierać dokładnie** 4 pliki:

- plik konkurs-I-<numerindeksu>.jpg/jpeg z odtworzonym napisem,
- plik konkurs-I-<numerindeksu>.zip z czytelnym i skomentowanym kodem źródłowym przygotowanego programu i ewentualnymi plikami dodatkowymi,
- plik tekstowy konkurs-I-<numerindeksu>-dane.txt z danymi dla każdej z użytych NIFS3 (np. w zadaniu **L8.7**, gdzie użyto jednej krzywej NIFS3 danymi tymi są wektory $x := [x_0, x_1, \ldots, x_{27}]$, $y := [y_0, y_1, \ldots, y_{27}]$, $t := [t_0, t_1, \ldots, t_{27}]$ oraz $u := [u_0, u_1, \ldots, u_M]$ — taki właśnie format zapisu danych proszę stosować; dane dla kolejnych NIFS3 oddzielamy pustym wierszem),
- plik tekstowy konkurs-I-<numerindeksu>-podsumowanie.txt zawierający tylko jednen wiersz postaci

  <liczba użytych NIFS3>, <liczba wszystkich punktów interpolacji>, <suma długości wszystkich wektorów u>

  (np. w zadaniu **L8.7** jest to $1, 28, M+1$).

Uwaga! Zgłoszenia konkursowe niespełniające podanej wyżej specyfikacji nie będą oceniane.

Każda osoba wyróżniona w konkursie **otrzyma do 7 dodatkowych punktów na egzaminie końcowym**. Komisja konkursowa[a] **bierze pod uwagę m.in.** efekt wizualny, liczbę użytych NIFS3 oraz łączny rozmiar danych.

[a] Sami baaardzo ważni ludzie 😎

L8.8. **Dodatkowe zadanie programistyczne** (do 22 grudnia 2024 r.; do 6 punktów) [1]

Jest rok 2284. Autonomiczny latający dron *Floty Naukowej* został wysłany na misję do puszczy na odległej planecie, aby zbierać dokumentację o lokalnej faunie i florze. Na polanach tej puszczy żyje rdzenna ludność o mniej zaawansowanym poziomie rozwoju kulturalnego i technologicznego. *Podstawowa Zasada Badawcza Floty Naukowej* (nazywana dalej *PZB*) zakazuje zakłócania ewolucji kulturowej innych gatunków. Takim zakłóceniem niewątpliwie byłoby pojawienie się drona na niebie nad polaną. Dlatego drony zaprogramowano tak, aby nie zostały zauważone, a dokładniej – aby unikały obszarów w kształcie koła, w których znajdują się polany.

Pewnego dnia odnaleziono krytyczny błąd oprogramowania drona, przez który nie ma pewności, że wybrana trasa faktycznie unikała zakazanych obszarów. Jedyne wiarygodne informacje o położeniu i ruchu drona to zapisywane w określonych odstępach czasu położenie i prędkość. Zespół operatorek i operatorów drona próbuje ustalić, czy doszło do złamania *PZB*.

Analizując sytuację, jedna z osób przypomniała sobie, że wielomian interpolacyjny można konstruować nie tylko w oparciu o wartości funkcji w węzłach, ale również wykorzystując informacje o wartościach jej pierwszej i kolejnych pochodnych w tych węzłach. Taki rodzaj interpolacji nazywamy *interpolacją Hermite'a*. Zobacz np. [1, §4.3.1], [2, §2.4].

(a) Sformułuj zadanie interpolacji wielomianowej Hermite'a i udowodnij, że ma ono zawsze jednoznaczne rozwiązanie.

(b) Zapoznaj się z oszczędnymi algorytmami wyznaczania *postaci Newtona* wielomianu interpolacyjnego Hermite'a i potrzebnych do tego tzw. *uogólnionych ilorazów różnicowych*.

(c) Trajektorię ruchu drona w czasie można opisać na płaszczyźnie (dla uproszczenia przyjmujemy, że dron przeprowadza badania na stałej wysokości) przy pomocy krzywej parametrycznej

$$\gamma(t) := [(x(t), y(t)) \ : \ t \geq 0] \qquad (t \text{ – czas}).$$

Dla zadanych: liczb rzeczywistych $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ (czas), wartości funkcji $x(t_0), y(t_0), x(t_1), y(t_1), \ldots, x(t_n), y(t_n)$ (położenie drona) oraz ich pochodnych $x'(t_0), y'(t_0), x'(t_1), y'(t_1), \ldots, x'(t_n), y'(t_n)$ (prędkość drona), opracuj algorytm konstrukcji postaci Newtona wielomianów Hermite'a $H_x, H_y \in \Pi_{2n+1}$ spełniających następujące warunki:

$$H_x(t_k) = x(t_k), \quad H_x'(t_k) = x'(t_k), \quad H_y(t_k) = y(t_k), \quad H_y'(t_k) = y'(t_k)$$

$(k = 0, 1, \ldots, n)$. Sprawdź **dla wielu doborów** interpolowanych funkcji x, y oraz węzłów t_k działanie tego rodzaju interpolacji w praktyce.

(d) Pora przekonać się, czy doszło do złamania *PZB*. Dla zadanych $t_i := t_0 + ih$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ h, t_0 > 0$ – ustalone), położenia drona (wartości $x(t_i), y(t_i)$) i jego prędkości (wartości $x'(t_i), y'(t_i)$) $(0 \leq i \leq n)$ oraz *obszarów zakazanych*

[1] Patrz pkt. 13. regulaminu zaliczania ćwiczeń.

$K_0, K_1, \ldots, K_m$ ($m \in \mathbb{N}$) będących kołami o środkach odpowiednio w punkach $z_j := (z_j^x, z_j^y)$ i promieniach $r_j > 0$ ($j = 0, 1, \ldots, m$), określ – wykorzystując interpolację wielomianową Hermite'a – czy dron złamał *PZB*.

Wykonaj szczegółowe testy dla różnych trajektorii drona i różnych zestawów obszarów zakazanych.

Literatura

[1] G. Dahlquist, Å. Björck, *Numerical Methods in Scientific Computing*, Volume 1, SIAM, 2008.

[2] J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 1., WNT, 1988.

Autor zadania: *Filip Chudy*.

L8.9. **Dodatkowe zadanie programistyczne** (do 22 grudnia 2024 r.; do 6 punktów) [2] Metodę Newtona można stosować także do znajdowania rozwiązań równania nieliniowego $f(z) = 0$ w dziedzinie liczb zespolonych. Np. dla $f(z) := z^4 + 1$ i $z_0 := 0.5 + 0.5i$ otrzymujemy $z_{10} = 0.7071067812 + 0.7071067812i$ – czyli bardzo dobre przybliżenie liczby $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, będącej jednym z rozwiązań równania $z^4 + 1 = 0$.

Niech c_{n+1} oznacza kolor czarny. Niech $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ będą rozwiązaniami równania $z^n + 1 = 0$ w dziedzinie liczb zespolonych. Przypiszmy każdemu z tych rozwiązań inny, ale różny od czarnego, kolor; powiedźmy odpowiednio $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Niech M będzie liczbą parzystą, a W_M następującym zbiorem punktów płaszczyzny zespolonej:

$$W_M := \left\{ -1 + 2\frac{k}{M} + \left(-1 + 2\frac{l}{M} \right) i \;:\; k, l = 0, 1 \ldots, M \right\}.$$

Dla wybranych n i M (np. $n = 3, 4, 5, 6$; $M = 400, 800$), wykonaj rysunek, na którym każdy z punktów w zbioru W_M zostanie narysowany kolorem $c(w)$ ustalonym na podstawie poniższej procedury:

(a) $z_0 := w$; $\qquad z_{k+1} := z_k - \dfrac{f(z_k)}{f'(z_k)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, N-1;$ np. $N = 10, 20, 35)$;

(b) jeśli istnieje takie k, że z_N jest *blisko* liczby ζ_k (jak należy to rozumieć w wypadku liczb zespolonych?), to przyjmujemy $c(w) := c_k$, w przeciwnym razie $c(w) := c_{n+1}$.

Jaki charakter ma otrzymamy w ten sposób obraz? Spróbuj przeanalizować zaobserwowane zjawisko i wyciągnąć wnioski. Następnie przeprowadź podobny eksperyment dla *metody Halleya*, która wyraża się wzorem

$$z_{k+1} := z_k - 1 \Big/ \left[\frac{f'(z_k)}{f(z_k)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(z_k)}{f'(z_k)} \right].$$

Czy metoda ta zachowuje się podobnie?

(–) Paweł Woźny

[2] Patrz pkt. 13. regulaminu zaliczania ćwiczeń.