Wstęp do informatyki

Wykład 13

Grafy – pojęcia, reprezentacja, przeglądanie grafu

Wstęp do informatyki

Instytut Informatyki UWr

Temat wykładu

- Grafy – definicje
- Reprezentacja grafu w pamięci komputera
- Przeglądanie grafów (wszerz, w głąb)
- Zastosowania przeglądania

Graf skierowany

Graf skierowany G(V,E):

- V – skończony zbiór wierzchołków
- $E \subset V \times V$ – zbiór krawędzi (pary wierzchołków)

Oznaczenia:

n – liczba wierzchołków

m – liczba krawędzi

Obserwacja:

$m \leq n^2$

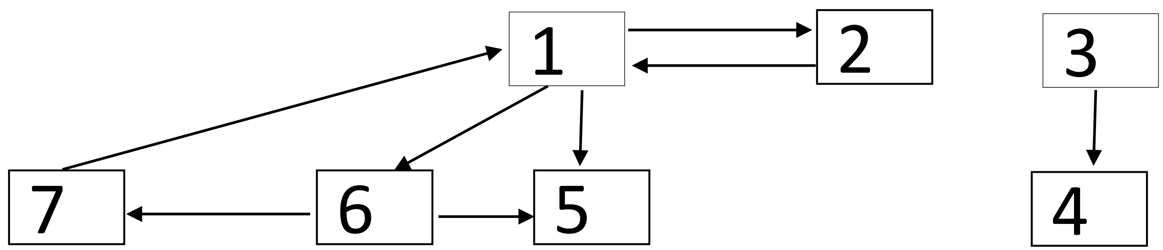
Graf skierowany

Przykład

V = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }

E ={ (1, 5), (1, 2), (6,7), (1, 6), (3,4), (7,1), (2,1), (6,5) }

n = 7, m = 8



Zastosowania

- połączenia drogowe, kolejowe, lotnicze
- relacje zależności w firmie
- zależności między przedmiotami w programie studiów!
- i inne…

Graf nieskierowany (prosty)

Graf $G(V,E)$ jest grafem nieskierowanym gdy spełniony jest warunek:

$$(i,j) \in E \text{ wtw } (j,i) \in E$$

Inny sposób definicji grafu nieskierowanego:

- W grafie nieskierowanym krawędzie to dwuelementowe **zbiory** wierzchołków (a **nie** uporządkowane **pary**)

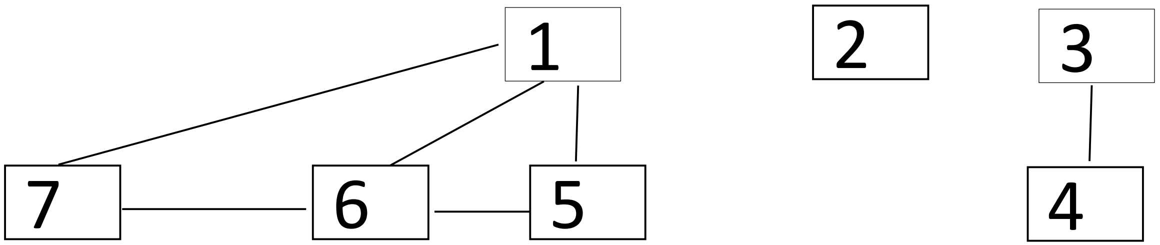
Graf nieskierowany (prosty)

Przykład

$V = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$

$E = \{ \{1, 5\}, \{6,7\}, \{1, 6\}, \{3,4\}, \{7,1\}, \{6,5\} \}$

$n = 7, m = 6$



lub równoważnie:

$E = \{ (1, 5), (5,1), (6,7), (7,6), (1,6), (6,1), (3,4), (4,3), (7,1), (1,7), (6,5), (5,6) \}$

Graf z wagami

Graf z wagami G(V,E,w) to graf G(V,E) wraz z funkcją $w: E \rightarrow \Re$ przypisującą krawędziom liczby (np. rzeczywiste) nazywane wagami

Uwagi:

- Graf z wagami może być grafem skierowanym bądź nieskierowanym
- wagi mogą być ograniczone do podzbioru liczb rzeczywistych bądź przyjmować wartości z innego zbioru;
- zazwyczaj (na tym wykładzie) wagi to liczby nieujemne.

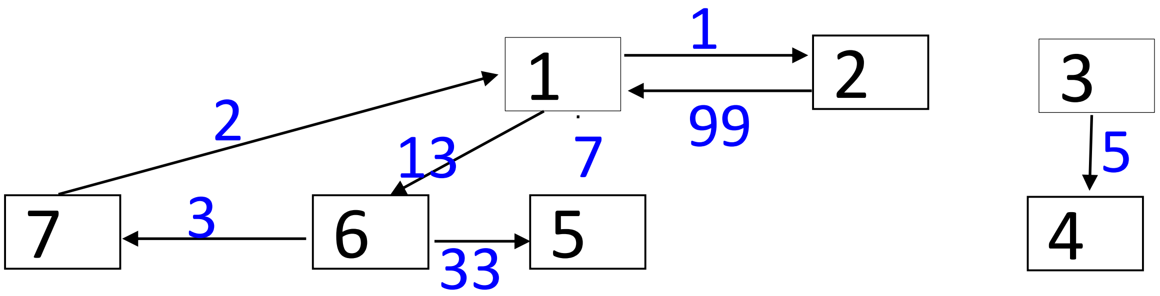
Graf z wagami (skierowany)

Przykład

V = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }

E ={ (1, 5), (1, 2), (6,7), (1, 6), (3,4), (7,1), (2,1), (6,5) }

n = 7, m = 8



w((1,5)) = 7

w((1,2)) = 1

w((6,7)) = 3

w((1,6)) = 13

w((3,4)) = 5

w((7,1)) = 2

w((2,1)) = 99

w((6,5)) = 33

Graf prosty – sąsiedztwo, stopień

Def. Wierzchołek w jest **sąsiadem** wierzchołka v w grafie prostym $G(V,E)$ gdy $\{v,w\} \in E$

Def. **Stopień** $d(v)$ wierzchołka v w grafie prostym $G(V,E)$ to liczba jego sąsiadów, czyli moc zbioru

$$\{ w \mid \{v,w\} \in E \}$$

Graf skierowany – stopień

Def. **Stopień wyjściowy** wierzchołka v w grafie skierowanym $G(V,E)$ to liczba krawędzi o początku w v czyli moc zbioru

$$\{\, w \mid (v,w) \in E \,\}$$

Def. **Stopień wejściowy** wierzchołka v w grafie skierowanym $G(V,E)$ to liczba krawędzi o końcu w v czyli moc zbioru

$$\{\, w \mid (w,v) \in E \,\}$$

Graf – ścieżki

Def. **Ścieżka** to ciąg wierzchołków $v_1, v_2, \ldots, v_k$ taki**,** że $(v_i, v_{i+1}) \in E$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

Def. **Ścieżka prosta**: wszystkie wierzchołki na ścieżce są różne.

Def. **Długość ścieżki** $v_1, v_2, \ldots, v_k$ jest równa $k-1$, czyli „liczbie krawędzi na ścieżce”.

Graf – ścieżki

Def. **Cykl** to ścieżka zaczynająca i kończąca się w tym samym wierzchołku

Def. **Osiągalność**

Wierzchołek w jest osiągalny z v jeśli istnieje ścieżka $v = v_1, v_2, \ldots, v_k = w$

Graf – reprezentacja

Macierz sąsiedztwa:

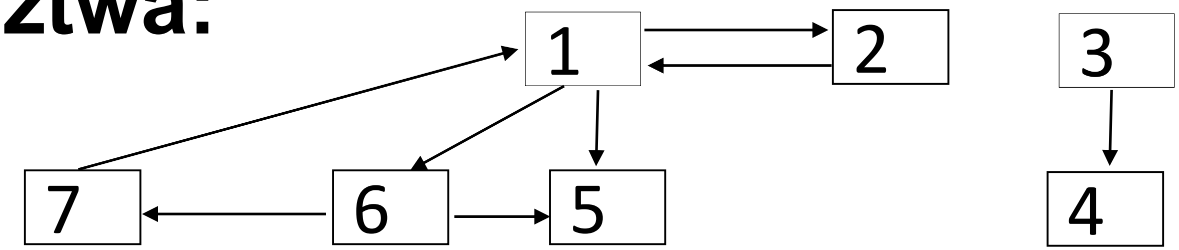
Graf $G(V,E)$ reprezentowany przez tablicę **dwuwymiarową** int a[n][n]

- a[i][j] = 1 gdy $(i,j) \in E$ **lub**

  a[i][j] = w((i,j)) dla grafu z wagami
- a[i][j] = 0 gdy $(i,j) \notin E$

Graf – reprezentacja

Macierz sąsiedztwa:



	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	0	1	1	0
2	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	0	1
7	1	0	0	0	0	0	0

Przykład ścieżki: 1,6,5

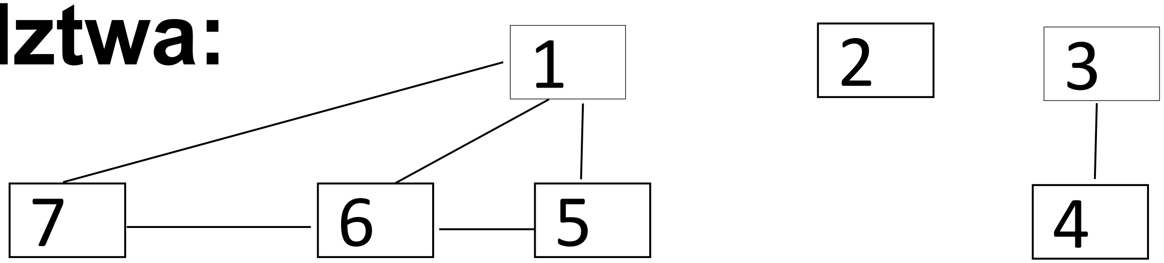
Przykład cyklu: 1,6,7,1

Stopień wyjściowy 1: 3

Stopień wejściowy 1: 2

Graf – reprezentacja

Macierz sąsiedztwa:



	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	1	0
6	1	0	0	0	1	0	1
7	1	0	0	0	0	1	0

Przykład ścieżki: 1,5,6,7

Przykład cyklu: 1,5,6,1

d(1)=3

d(2)=0

Graf – reprezentacja

Listy sąsiadów:

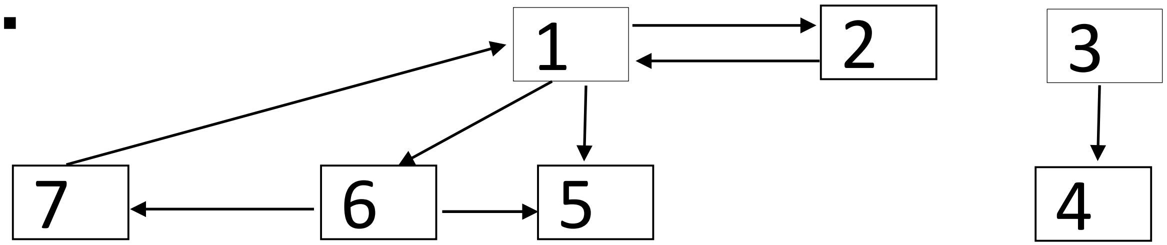
Graf $G(V,E)$ reprezentowany przez tablicę wiązanych list a[n]

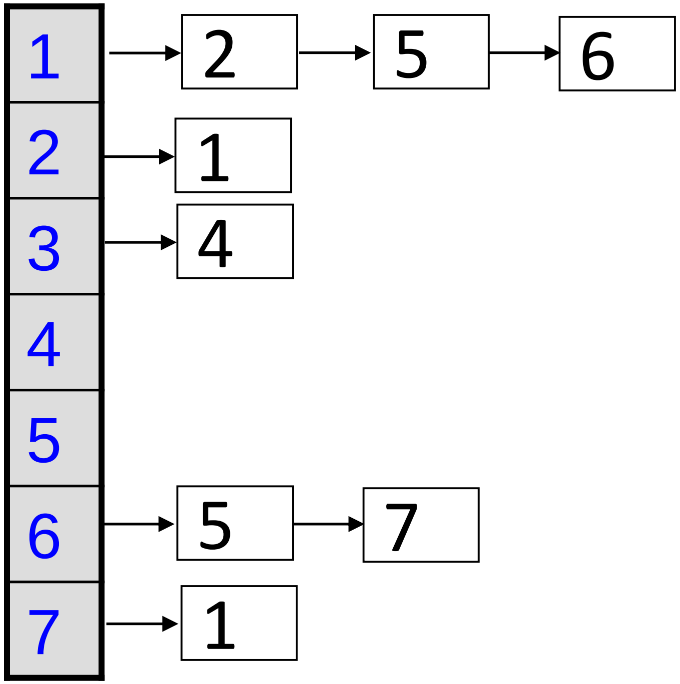
- a[i] to lista sąsiadów a[i], czyli zbiór

$$\{\, j \;:\; (i,j) \in E \,\}$$

Graf – reprezentacja

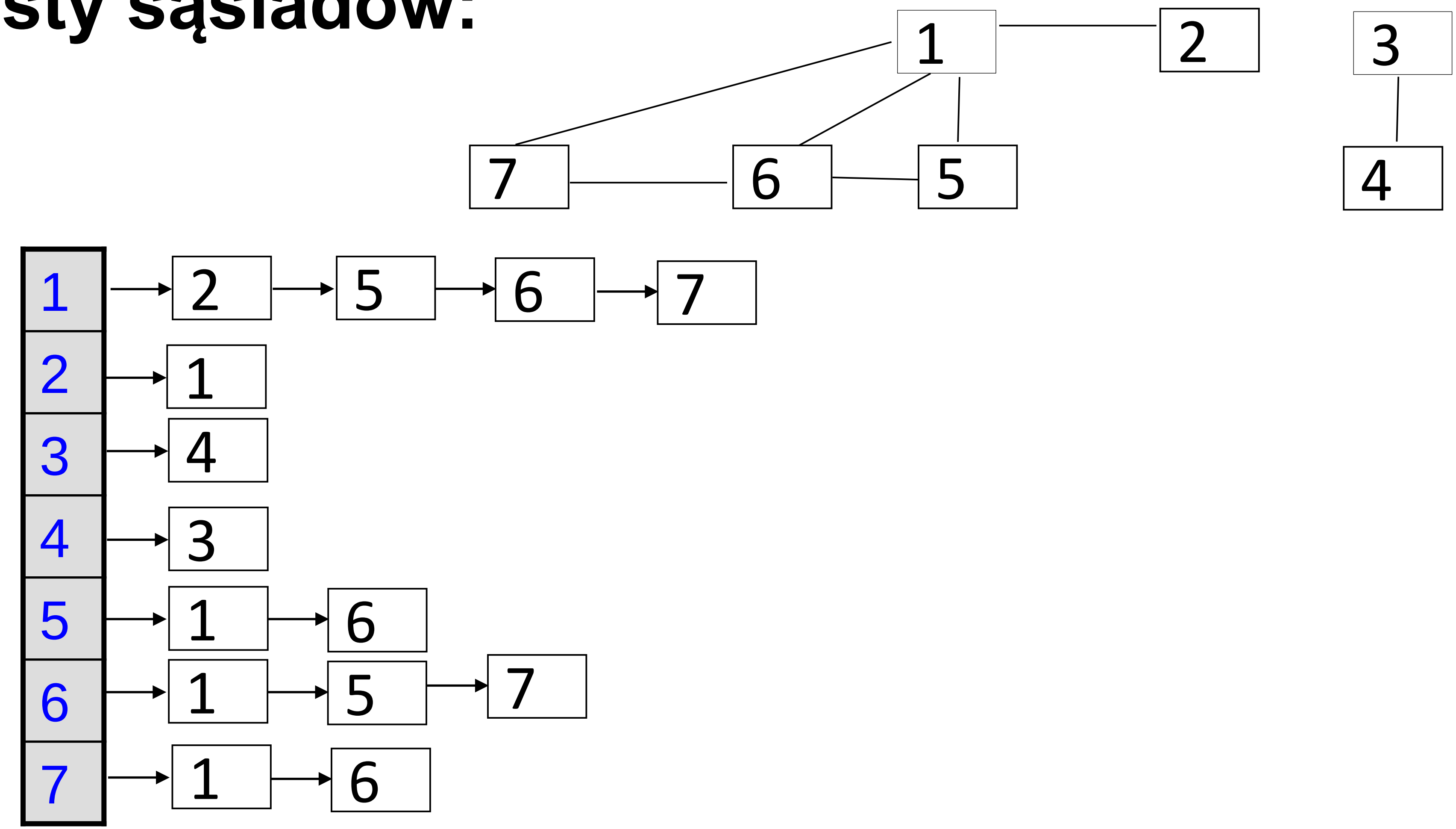
Listy sąsiadów:





Graf – reprezentacja

Listy sąsiadów:



Reprezentacje i ich własności

Złożoność pamięciowa:

- macierz sąsiedztwa: n^2 (nawet gdy $m=O(n)$)
- listy sąsiadów: $O(n+m)$

Czas operacji (na niebiesko szybsze rozwiązanie):

Operacja	Tablicowa	Listowa
Sprawdź(u,v)		
Dodaj(u,v)		
Usuń(u,v)		
Przejrzyj sąsiadów u		

Reprezentacje i ich własności

Złożoność pamięciowa:

- macierz sąsiedztwa: n^2 (nawet gdy $m=O(n)$)
- listy sąsiadów: $O(n+m)$

Czas operacji (na niebiesko szybsze rozwiązanie):

Operacja	Tablicowa	Listowa
Sprawdź(u,v)	$O(1)$	$O(d(u))$
Dodaj(u,v)	$O(1)$	$O(d(u))$
Usuń(u,v)	$O(1)$	$O(d(u))$
Przejrzyj sąsiadów u	$O(n)$	$O(d(u))$

Graf – przeszukiwanie

Problem przeszukiwania

Wejście: graf $G(V, E)$, oraz s ∈ V, gdzie:

- $V = \{1, 2, \ldots, n\}$
- E reprezentowane przez listy sąsiadów a[1..n]

Wynik:

- wyznaczenie wszystkich wierzchołków <u>osiągalnych</u> z s

Graf – przeszukiwanie

Struktury danych:

B – zbiór wierzchołków odwiedzonych, dla których nie zbadaliśmy jeszcze wszystkich wychodzących krawędzi

odw – tablica 0/1 reprezentująca zbiór już odwiedzonych wierzchołków

a – tablica list; reprezentacja zbioru krawędzi E

L – tablica list; L[*v*] to lista niesprawdzonych krawędzi wychodzących z *v*

Wynik działania algorytmu dla $v = 1, \ldots, n$:

- odw[v]=1, gdy v osiągalny z s
- odw[v]=0 w przeciwnym przypadku

Graf – przeszukiwanie

Struktury danych:

B – zbiór wierzchołków odwiedzonych, dla których nie zbadaliśmy jeszcze wszystkich wychodzących krawędzi

odw – tablica reprezentująca zbiór już odwiedzonych wierzchołków

a – tablica list; reprezentacja G

L – tablica list; L[v] to lista niesprawdzonych krawędzi dla v

Idea rozwiązania:

- B $\leftarrow$ { s } i zaznacz s jako odwiedzony
- Dopóki B niepusty:
  - Weź v z B
  - Jeśli wszystkie krawędzie wychodzące z v były sprawdzone: usuń v z B, w przeciwnym przypadku:
    - weź niesprawdzoną krawędź (v,w)
    - jeśli w nieodwiedzony: dodaj w do B i zaznacz jako odwiedzony.

Graf – przeszukiwanie

Struktury danych:

B – zbiór wierzchołków odwiedzonych, dla których nie zbadaliśmy jeszcze wszystkich wychodzących krawędzi

odw – tablica reprezentująca zbiór odwiedzonych wierzchołków

a – tablica list; reprezentacja G (zbioru krawędzi)

L – tablica list; L[v] to lista niesprawdzonych krawędzi wychodzących z v

Operacje na liście:

- pierwszy(X) – wartość pierwszego elementu na liście
- ogon(X) – lista X bez jej pierwszego elementu

Operacje na zbiorze

- Weź(Z) – element zbioru Z lub NULL gdy Z pusty
- Dodaj x do Z: $Z \leftarrow Z + \{ x \}$
- Usuń x z Z: $Z \leftarrow Z - \{ x \}$

Graf – przeszukiwanie

Algorytm Inicjalizuj(G)

1. Dla v=1,2,..,n:
   - odw[v] $\leftarrow$ 0; L[v] $\leftarrow$ a[v]

Algorytm Przeszukaj(G,s):

1. B $\leftarrow$ { s }, odw[s] $\leftarrow$ 1
2. Dopóki B $\neq\varnothing$
   1. v $\leftarrow$ weź(B)
   2. Jeśli L[v] pusta: B $\leftarrow$ B – { v }, w przeciwnym przypadku
      a) w $\leftarrow$ pierwszy(L[v])
      b) L[v] $\leftarrow$ ogon(L[v])
      c) jeśli odw[w]=0:
         – B $\leftarrow$ B + { w }
         – odw[w] $\leftarrow$ 1

Graf – przeszukiwanie - poprawność

Fakt

Jeśli v jest osiągalny z s, to v zostanie odwiedzony w trakcie Przeszukaj(G,s).

Dowód

Obserwacje:

- każdy odwiedzony węzeł jest dodawany do B (jeden raz)
- v osiągalny z s wtw istnieje ścieżka z s do v

Indukcja ze

względu na długość ścieżki z s do v:

- **Krok bazowy**: Jeśli ścieżka długości 1 (v sąsiadem s) – v zostanie odwiedzony dzięki 2.1 (gdyż s umieszczamy w B, w 2.1 sprawdzamy jego sąsiadów)

Graf – przeszukiwanie - poprawność

- **Krok indukcyjny**:

  Zał.: Wierzchołki, do których prowadzą ścieżki o długości $<k$ są odwiedzone i dodane do B.

  Teza: Wierzchołki, do których prowadzą ścieżki o długości k są odwiedzone i dodane do B.

  Dowód:

  Niech v – osiągalny z s, ścieżka $s=v_1,\dots,v_k,v_{k+1}=v$. Wówczas:

  – $v_1,\dots,v_k$ to też ścieżka

  – z założenia indukcyjnego wszystkie wierzchołki na tej ścieżce będą odwiedzone (i dodane do B)

  – v zostanie wybrany z $L[v_k]$ i odwiedzony (o ile nie będzie odwiedzony wcześniej)

Graf – przeszukiwanie - czas

Własności

- Każdy wierzchołek co najwyżej raz dodany do B
- Wierzchołek v zostanie wybrany d(v)+1 razy w kroku 2.1, po czym zostanie usunięty

Wniosek

Algorytm zakończy działanie po

$$\sum_{v \in V} (d(v) + 1) = O(n + m)$$

obrotach pętli 2.

Spójność, składowe

Def. **Podgraf** grafu G(V,E) indukowany przez zbiór $V' \subseteq V$ to graf G'(V',E') gdzie

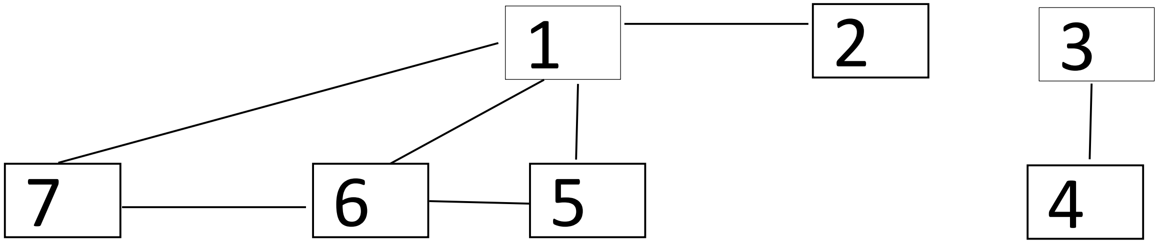
$$(i,j) \in E' \Leftrightarrow i,j \in V' \text{ oraz } (i,j) \in E$$

Def. Graf prosty G(V,E) nazywamy **spójnym** wtw gdy dla każdej pary wierzchołków v, $v' \in V$ istnieje ścieżka łącząca v i v'.

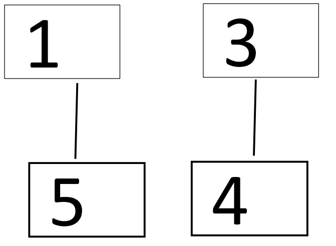
Def. **Składową spójności** grafu prostego G(V,E) nazywamy podgraf G'(V',E') grafu G indukowany przez $V' \subseteq V$, taki że G' jest spójny i $G' \cup \{v\}$ nie jest spójny dla każdego $v \in V - V'$

Spójność, składowe

Graf G(V,E):



Podgraf indukowany przez 1,5,3,4:



Składowe spójności grafu G:

- Podgraf indukowany przez {1,2,5,6,7}
- Podgraf indukowany przez {3,4}

Przeszukiwanie – zastosowania

Spójność

We: graf prosty G(V,E), V = {1, 2, …, n}

Wy: TAK gdy G jest spójny, NIE w przeciwnym przypadku

Rozwiązanie:

1. Inicjalizuj(G)
2. Uruchom Przeszukaj(G, s), gdzie s to dowolny element V.
3. Dla v=1,2,…n:
   - Jeśli odw[v]=0: zwróć NIE i zakończ
4. Zwróć TAK

Przeszukiwanie – zastosowania

Składowe spójności w grafie nieskierowanym

We: graf prosty $G(V,E)$, $V = \{1, 2, \ldots, n\}$

Wy:

- odw[v]=odw[w] dla każdych v,w z tej samej składowej spójności
- odw[v]≠odw[w] dla każdych v,w z różnych składowych spójności

Algorytm – idea:

1. Inicjalizuj(G)
2. $i \leftarrow 1$
3. Dopóki są jakieś nieodwiedzone wierzchołki
   - Wybierz nieodwiedzony wierzchołek v
   - Przeszukaj podgraf wierzchołków osiągalnych z v i oznacz ich numer składowej przez i
   - $i \leftarrow i + 1$

Przeszukiwanie – składowe spójności

Algorytm Przeszukaj(G,s,i):

1. B $\leftarrow$ { s }
2. Dopóki B $\neq \emptyset$
    1. v $\leftarrow$ weź(B),
    2. odw[v] $\leftarrow$ i
    3. Jeśli L[v] pusta: B $\leftarrow$ B – { v }, wpp
        1. w $\leftarrow$ pierwszy(L[v])
        2. L[v] $\leftarrow$ ogon(L[v])
        3. jeśli odw[w] $\neq$ i:
            1. B $\leftarrow$ B + { w }
            2. odw[w] $\leftarrow$ i

Algorytm Skladowe(G):

Inicjalizuj(G)

i $\leftarrow$ 1

Dla v = 1, 2, …, n:

- Jeśli odw[v]=0:
    - Przeszukaj(G,v,i)
    - i $\leftarrow$ i + 1

Przeszukiwanie wszerz (BFS)

Przeszukiwanie wszerz (BFS)

Def. Dla ustalonego grafu (nieskierowanego) G(V,E) i wierzchołka s:

> V_i to zbiór wierzchołków, dla których najkrótsza ścieżka do s składa się z i krawędzi

Przykłady:

- V_0={ s }
- V_1 – sąsiedzi s
- V_2 – sąsiedzi V_1, nie należący do $V_0 \cup V_1$
- itd.

Przeszukiwanie wszerz (BFS)

Przeszukiwanie wszerz (Breadth First Search)

Kolejność odwiedzania wierzchołków

Najpierw odwiedź elementy zbioru V_1, potem V_2, następnie V_3, itd.

Sposób realizacji

Umieszczamy nowo odwiedzane wierzchołki w kolejce:

- B - zbiór wierzchołków odwiedzonych, dla których nie zbadaliśmy jeszcze wszystkich wychodzących krawędzi traktujemy jako kolejkę.

Przeszukiwanie wszerz

Algorytm generyczny:

1. $B \leftarrow \{ s \}$
2. Dopóki $B \neq \emptyset$
   1. $v \leftarrow$ weź(B), odw[v] =true
   2. Jeśli L[v] pusta:

      $B \leftarrow B - \{ v \}$, wpp:
      1. $w \leftarrow$ pierwszy(L[v])
      2. $L[v] \leftarrow$ ogon(L[v])
      3. jeśli odw[w]=false:
         1. $B \leftarrow B + \{ w \}$
         2. odw[w] =true

Kolejka:

- KolPusta() – tworzy pustą kolejkę i zwraca ją jako wynik
- WstawK(A,x) – wstawia element x na koniec kolejki A
- WeźK(A) – wynikiem element z początku kolejki
- ZdejmijK(A) – zdejmuje i zwraca jako wynik element z początku kolejki A (o ile A nie jest pusta)
- CzyPusta(A) – prawda gdy kolejka A jest pusta

Przeszukiwanie wszerz

Algorytm BFS(V,s):

1. K ← KolPusta()
   WstawK(K,s)
2. Dopóki ¬CzyPusta(K)
   1. v ← WeźK(K)
   2. Jeśli L[v] pusta:
      ZdejmijK(K), wpp:
      1. w ← pierwszy(L[v])
      2. L[v] ← ogon(L[v])
      3. jeśli odw[w]=0:
         1. WstawK(K,w)
         2. odw[w] =1

Kolejka:

- KolPusta() – tworzy pustą kolejkę i zwraca ją jako wynik
- WstawK(A,x) – wstawia element x na koniec kolejki A
- WeźK(A) – wynikiem element z początku kolejki (zawartość kolejki bez zmian)
- ZdejmijK(A) – zdejmuje i zwraca jako wynik element z początku kolejki A (o ile A nie jest pusta)
- CzyPusta(A) – prawda gdy kolejka A jest pusta

Przeszukiwanie wszerz - zastosowania

Przeszukiwanie wszerz - zastosowania

Problem najkrótszych ścieżek

We: $G(V,E)$ – graf prosty, $s \in V$

Wy: tablica d taka, że dla każdego $v \in V$:

- d[v] – długość najkrótszej ścieżki z s do v jeśli v osiągalny z s
- d[v] = –1 gdy v nie jest osiągalny z s.

Algorytm – idea:

- Ustaw d[s]=0, d[v] = – 1 dla pozostałych wierzchołków
- Uruchom BFS(G,s), z modyfikacją:

  gdy w jest odwiedzany **po raz pierwszy** (2.2.3) jako sąsiad v, podstaw $d[w] \leftarrow d[v]+1$

Problem najkrótszych ścieżek

Algorytm Najkrotsze(G,s):

1. Dla v=1,2,…,n: d[v] $\leftarrow$ - 1
2. K $\leftarrow$ KolPusta()

   d[s] $\leftarrow$ 0

   WstawK(K,s)
2. Dopóki $\neg$CzyPusta(K)
   1. v $\leftarrow$ WeźK(K)
   2. Jeśli L[v] pusta: ZdejmijK(K), wpp:
      1. w $\leftarrow$ pierwszy(L[v])
      2. L[v] $\leftarrow$ ogon(L[v])
      3. jeśli odw[w]=0:
         1. WstawK(K,w)
         2. odw[w] $\leftarrow$ 1
         3. d[w] $\leftarrow$ d[v] + 1

Problem najkrótszych ścieżek - poprawność

Oznaczenia:

- $\delta(s,v)$ to długość najkrótszej ścieżki z s do v
- $V_k = \{ v : \delta(s,v) = k \}$ – zbiór wierzchołków w odległości k od s

Obserwacje:

- V_k to zbiór sąsiadów wierzchołków z V_{k-1}, które nie należą do $V_0 \cup \ldots \cup V_{k-1}$
- Każdy wierzchołek v osiągalny z s jest dokładnie raz dodawany do K, wtedy też ustalana jest wartość d[v]

Problem najkrótszych ścieżek - poprawność

Lemat Dla każdego $i \geq 0$ zachodzi:

a) Elementy V_i są umieszczone w K za elementami $(V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_{i-1})$.

b) Elementy V_i są umieszczone w K przed elementami V_{i+1}

Dowód

Indukcja ze względu na i:

1. $i=0$: $V_0=\{s\}$, umieszczony jako pierwszy w K, potem jego sąsiedzi, czyli wszystkie elementu V_1
2.

Zał.: (a) i (b) zachodzi dla $i=1,2,\ldots,k-1$.

Teza: (a) i (b) zachodzi dla $i=k$

Dowód tezy:

(a) Wynika z (b) dla $i=k-1$.

(b) Elementy V_k to sąsiedzi elementów V_{k-1}, którzy nie należą do $V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_{k-1}$. Zatem elementy V_k (i tylko one) zostaną dodane do kolejki wówczas, gdy na jej szczycie znajdują się elementy V_{k-1}.

Problem najkrótszych ścieżek - poprawność

Tw. Algorytm Najkrotsze(G,s) rozwiązuje problem najkrótszych ścieżek dla grafu G i wierzchołka s w czasie O(n+m), przy założeniu, że operacje kolejkowe wykonujemy w czasie O(1).

Dowód

- Z lematu wynika, że $v \in V_k$ jest odwiedzany (pierwszy raz) jako sąsiad v' $\in V_{k-1}$
- Korzystając z powyższego można pokazać przez indukcję ze względu na k (długość najkrótszej ścieżki z s), że d[v]=δ(s,v) dla każdego v.

Przeszukiwanie w głąb

Przeszukiwanie w głąb (DFS)

Przeszukiwanie w głąb (Depth First Search)

Intuicyjnie

Idź „jak najdalej” krawędziami dopóki napotykasz nieodwiedzone wierzchołki.

Formalnie (kolejność odwiedzania wierzchołków)

Dla każdego v:

po odwiedzeniu v odwiedź wszystkie (nieodwiedzone wcześniej) wierzchołki osiągalne z v, potem kontynuuj przeglądanie pozostałej części grafu

Sposób realizacji

Umieszczamy nowo odwiedzane wierzchołki na stosie

Przeszukiwanie w głąb

Algorytm generyczny:

1. $B \leftarrow \{ s \}$
2. Dopóki $B \neq \emptyset$
   1. $v \leftarrow$ weź(B), odw[v] $\leftarrow 1$
   2. Jeśli L[v] pusta:

      $B \leftarrow B - \{ v \}$, wpp:
      1. $w \leftarrow$ pierwszy(L[v])
      2. L[v] $\leftarrow$ ogon(L[v])
      3. jeśli odw[w]=0:
         1. $B \leftarrow B + \{ w \}$
         2. odw[w] =1

Stos:

- StosPusty() – tworzy pusty stos i zwraca go jako wynik
- WstawS(A,x) – wstawia element x na szczyt stosu A
- WeźS(A) – wynikiem element ze szczytu stosu
- ZdejmijS(A) – zdejmuje i zwraca jako wynik element ze szczytu stosu A (o ile stos nie jest pusty)
- CzyPusty(A) – prawda gdy stos A jest pusty

Przeszukiwanie w głąb

Algorytm DFS(G,s):

1. $S \leftarrow$ StosPusty()
   WstawS(S,s)
2. Dopóki $\neg$CzyPusty(S)
   1. v $\leftarrow$ WeźS(S), odw[w]$\leftarrow$ 1
   2. Jeśli L[v] pusta:
      ZdejmijS(S,v), wpp:
      1. w $\leftarrow$ pierwszy(L[v])
      2. L[v] $\leftarrow$ ogon(L[v])
      3. jeśli odw[w]=0:
         1. WstawS(S,w)
         2. odw[w] = 1

Stos:

- StosPusty() – tworzy pusty stos i zwraca go jako wynik
- WstawS(A,x) – wstawia element x na szczyt stosu A
- WeźS(A) – wynikiem element ze szczytu stosu
- ZdejmijS(A) – zdejmuje i zwraca jako wynik element ze szczytu stosu A (o ile stos nie jest pusty)
- CzyPusty(A) – prawda gdy stos A jest pusty

Przeszukiwanie w głąb - zastosowania

Drzewa i lasy

Def. (Ukorzenione) **drzewo skierowane** $T(V,E)$ to graf skierowany spełniający warunki:

- istnieje dokładnie jeden $s \in V$ (korzeń), który nie jest końcem żadnej krawędzi;
- Każdy wierzchołek poza korzeniem jest końcem jednej krawędzi;
- Każdy wierzchołek $v \in V$ jest osiągalny z korzenia s.

Def. Las skierowany to graf, który składa się z pewnej liczby (wierzchołkowo) rozłącznych drzew skierowanych.

Bardziej formalnie: Las skierowany to graf skierowany $G(V,E)$, w którym $V=V_1 \cup \ldots \cup V_k$ dla parami rozłącznych $V_1,\ldots,V_k$ takich, że

- podgraf G indukowany przez V_i jest drzewem skierowanym dla $i=1,\ldots,k$
- jeśli $(u,v) \in E$ to $u,v \in V_i$ dla jakiegoś $i \in \{1,2,\ldots,k\}$

Las DFS

Oznaczenia: G(V,E), V={1,2,…,n}

Przeglądanie DFS całego grafu:

DFS(G)

- Inicjalizuj(G)
- Dla v=1,2,…,n:
  - jeśli odw[v]=0: DFS(G,v)

Def. Las DFS dla G(V,E) to graf H(V,F) taki, że

(u,v)$\in$F wtw v odwiedzany po raz pierwszy (i dodany do stosu) jako sąsiad u w algorytmie DFS(G).

Las DFS

Fakt (oczywisty) Las DFS jest lasem skierowanym.

Obserwacja

Jeśli H(V,F) jest lasem DFS grafu G(V,E), to $F \subseteq E$.

Oznaczenie

dfs(G) – las DFS grafu G

DFS – własności

Fakt 4

Jeśli $(u,v) \in dfs(G)$, to v wstawiony na stos później niż u, a zdjęty wcześniej niż u).

Fakt 5

v jest osiągalny z *u* w drzewie dfs(G) wtw

v wstawiony na stos później niż *u*, a zdjęty wcześniej niż *u*.

Dowód: $\Rightarrow$ wynika z Faktu 4

$\Leftarrow$ Indukcja ze względu na liczbę wierzchołków włożonych na S pomiędzy wstawieniem u na stos i zdjęciem u ze stosu.

Fakt 6

v jest osiągalny z *u* w drzewie dfs(G) wtw

w G istnieje ścieżka z *u* do *v*, której żaden element nie został wstawiony na stos przed wstawieniem *u*.

Dowód: $\Rightarrow$ wynika z Faktu 4

$\Leftarrow$ Indukcja po długości najkrótszej ścieżki spełniającej podane warunki + fakt, że pierwszy element na ścieżce będzie dodany do S pomiędzy wstawieniem i usunięciem u z S + Fakt 5.

DFS – własności

Def. (v,u) jest **krawędzią powracającą** grafu skierowanego G(V,E) względem lasu L(V,F) gdy (v,u)$\in$E oraz v jest osiągalny z u w L.

Def. G(V,E) (skierowany) jest **acykliczny**, gdy nie ma w nim cyklu

Twierdzenie G jest acykliczny wtw w G nie ma krawędzi powracającej względem dfs(G).

Dowód.

$\Rightarrow$ Jeśli (v,u) jest krawędzią powracającą, to w G mamy cykl złożony z: ścieżki od u do v oraz krawędzi (v,u).

$\Leftarrow$ Jeśli w G jest cykl $v_1,\ldots,v_k$:

- BSO przyjmijmy: v_1 to pierwszy odwiedzony wierzchołek tego cyklu.
- Wówczas $v_2,\ldots,v_k$ są osiągalne z v_1 w DFS(G) [Fakt 6]
- Więc (v_k,v_1) to krawędź powracająca.

Dodac wniosek/twierdzenie o algorytmie na cykle

DFS – własności

Twierdzenie G jest acykliczny <u>wtw</u> w G nie ma krawędzi powracającej względem dfs(G).

Wniosek Problem występowania cyklu w grafie można rozwiązać w czasie $O(n + m)$.

Sortowanie topologiczne

Problem sortowania topologicznego

We: G(V,E) – graf skierowany acykliczny

Wy: Uporządkowany ciąg $X=x_1,\ldots,x_n$ wszystkich elementów V spełniający warunek:

Jeśli $(u,v)\in E$, to u występuje przed v w ciągu X.

Algorytm SortTop(G)

1. $X \leftarrow$ stos pusty
2. Inicjalizuj(G)
3. Uruchom DFS(G) z modyfikacją:
   - gdy v jest usuwany ze stosu S: wstaw v na stos X
4. Zwróć stos X jako wynik [wypisując po kolei kolejne zdejmowane elementy]

Sortowanie topologiczne

Zastosowania

- Ustalanie kolejności prac projektowych/budowlanych, przedmiotów wybieranych w trakcie studiów, itp.

Sortowanie topologiczne

Twierdzenie

Algorytm SortTop rozwiązuje problem sortowania topologicznego w czasie $O(n+m)$.

Dowód Weźmy $(u,v) \in E$ dla acyklicznego $G(V,E)$.

Wystarczy pokazać, że $(*)$ v jest zdjęty z S przed u. Rozważmy przypadki:

1. v osiągalny z u w dfs(G): $(*)$ zachodzi z Faktu 5
2. v nie jest osiągalny z u w dfs(G):
   - **Przyp. 1**: v nie został dodany do S przed u: sprz. z Fakt 6
   - **Przyp. 2**: v został dodany do S przed u:

     Jeśli v zdjęty później niż u, to u osiągalny z v (Fakt 5):

     Sprzeczność z zał., że G acykliczny.

     Jeśli v zdjęty z S wcześniej niż u: OK.

Silnie spójne składowe

Def.

Graf skierowany G(V,E) jest **silnie spójny** gdy dla każdych $u,v \in V$ istnieje ścieżka prowadząca od u do v.

Def.

Silnie spójną składową grafu skierowanego G(V,E) nazywamy podgraf G'(V',E') grafu G indukowany przez $V' \subseteq V$, taki że G'(V',E') jest silnie spójny i podgraf G indukowany przez $V' \cup \{v\}$ nie jest silnie spójny dla każdego $v \in V - V'$

Def.

Grafem transponowanym grafu skierowanego G(V,E) nazywamy graf $G^T(V,E^T)$ taki, że $(u,v) \in E \Leftrightarrow (v,u) \in E^T$

Silnie spójne składowe

Problem: silnie spójne składowe

We: graf skierowany G(V,E), V = {1, 2, …, n}

Wy:

- odw[v]=odw[w] dla każdych v,w z tej samej silnie spójnej składowej
- odw[v]≠odw[w] dla każdych v,w z różnych silnie spójnych składowych

Silnie spójne składowe

Intuicje – fakty:

Oznaczenie:

dfs(G) – las przeglądania w głąb grafu G.

Fakt A. Każda silnie spójna składowa grafu G jest zawarta w pewnym drzewie T lasu dfs(G).

Fakt B. Niech v to korzeń najpóźniej utworzonego drzewa w dfs(G). Wówczas zbiór wierzchołków osiągalnych z v w grafie G^T jest spójną składową grafu G.

Fakt C. Niech G(V,E) to graf skierowany. Po usunięciu z dfs(G) zbioru wierzchołków X, uzyskamy dfs(G'), gdzie G' to podgraf G uzyskany przez usunięcie z G wierzchołków ze zbioru X.

Silnie spójne składowe

Algorytm – szkic:

1. Uporządkuj wierzchołki w ciąg X, odwrotny do kolejności ich zdejmowania ze stosu w przeglądaniu dfs (tj. zgodny z porządkiem otrzymanym w wyniku alg. SortTop(G)).
2. Wywołaj przeglądanie w głąb na grafie G^T, wybierając wierzchołki w kolejności ciągu X, tworząc las H^T. Jednocześnie:
   - Numeruj wierzchołki tak samo jak w algorytmie wyznaczania składowych spójności CZYLI…
   - Przyjmij, że silnie spójne składowe to drzewa lasu H^T.

Silnie spójne składowe

SilnieSpojne(G):

1. DFS(G)
2. V’ $\leftarrow$ zbiór V uporządkowany odwrotnie do kolejności zdejmowania ze stosu w trakcie DFS(G) [czyli tak jak w alg. sort. topologicznego]; niech V’=(x_1,…,x_n)
3. G’(V’,E’) – graf transponowany grafu G (ze zmienioną kolejnością wierzchołków, patrz punkt 2)
4. Inicjalizuj(G’)
5. j $\leftarrow$ 1
6. Dla i=1,2,…,n:
   - if odw[x_i]=0: Przegladaj(G’,x_i,j) // j określa numer składowej
   - j $\leftarrow$ j+1