Wstęp do informatyki

Wykład 8

Dziel i zwyciężaj

Instytut Informatyki UWr

Temat wykładu

Metoda dziel i zwyciężaj:

- max & min (jednocześnie)
- sortowanie przez scalanie (merge sort)
- sortowanie szybkie (quick sort)

Dziel i zwyciężaj

1. Podziel problem na podproblemy
2. Rozwiąż podproblemy
3. Połącz rozwiązania podproblemów tak, aby uzyskać rozwiązanie problemu głównego

Przykład.

Wyszukiwanie binarne!

Max & min problem

Specyfikacja

Wejście: n, $a[0..n\text{-}1]$

Wyjście: min – najmniejszy element $a[0..n\text{-}1]$

max– największy element $a[0..n\text{-}1]$

Rozw. 1

- Oblicz min
- Oblicz max
- Zwróć (min, max)

Max & min problem – v.1

Rozw. 1

- Oblicz min
- Oblicz max
- Zwróć(min, max)

```
…
int min, max; //min, max globalne
…
void maxmin(int a[], int n)
{ int k;
  max=min=a[0];
  for (k=1; k<n; k++) {
    if (min>a[k]) min=a[k];
    if (max<a[k]) max=a[k];
  }
}
```

```
def maxmin1(a, n):
 max=min=a[0]
 for k in range(1,n):
   if min>a[k]: min=a[k]
   if max<a[k]: max=a[k]
 return max, min
```

Liczba porównań (najgorszy przypadek): $2n - 2$

Max & min problem – v.1.1

Obserwacja

Jeśli a[i] mniejsze niż najmniejszy element a[0..i-1], nie trzeba sprawdzać czy a[i] większe od największego elementu a[0..i-1].

```
…
int min, max; //min, max globalne
…
void maxmin(int a[], int n)
{ int k;
  max=min=a[0];
  for (k=1; k<n; k++)
    if (min>a[k]) min=a[k];
    else if (max<a[k]) max=a[k];

}
```

```
def maxmin1(a, n):
  max=min=a[0]
  for k in range(1,n):
    if min>a[k]: min=a[k]
    else:
      if max<a[k]: max=a[k]
  return max, min
```

Czas (najgorszy przypadek): $2n - 2$ ☹

Max & min problem – v.2

Algorytm rekurencyjny

- If $n = 1$: $max = min = a[0]$
- If $n = 2$: wybierz min, max z a[0] i a[1] za pomocą jednego porównania
- If $n > 2$:
  - Podziel $a[0..n-1]$ na dwie podtablice równej długości
  - Znajdź $max1$, $min1$: max & min pierwszej podtablicy
  - Znajdź $max2$, $min2$: max & min drugiej podtablicy
  - max = największy element w $\{max1, max2\}$
  - min = najmniejszy element w $\{min1, min2\}$

Max & min problem – v.2

Specyfikacja (ogólniej, na potrzeby rozw. rekurencyjnego…)

Wejście:

- *l*, *p* – liczby naturalne,
- *a* – tablica

Wyjście:

- **max –** max w $a[l]$, $a[l+1],\ldots,a[p]$
- **min** – min w $a[l]$, $a[l+1],\ldots,a[p]$

Max & min problem – v.2

```
int maxmin(int a[], int l,int p)
{ int mi1,mi2,ma1,ma2;
  if (l==p) min = max = a[l];
  else
   if (p-l==1)
     if (a[l]<a[p]) {
      max = a[p]; min = a[l];}
     else
     { max = a[l]; min = a[p];}
   else
   {  maxmin(a,l,(l+p)/2);
      mi1 = min; ma1 = max;
      maxmin(a,(l+p)/2+1,p);
      mi2 = min; ma2 = max;
      min = mi1<mi2 ? mi1 : mi2;
      max = ma1>ma2 ? ma1 : ma2;
   }
}
```

Aby znaleźć max i min w a[0],…,a[n-1]:

```
maxmin(a, 0, n-1)
```

Uwaga:
min i max globalne!
Dlaczego?

Max & min problem – v.2

```
def maxmin(a, l, p):
 if l==p: return a[l],a[l]
 else:
   if p-l==1:
     if a[l]<a[p]: return a[p],a[l]
     else: return a[l],a[p]
   else:
     m1 = maxmin(a,l,(l+p)/2)
     m2 = maxmin(a,(l+p)/2+1,p)
     if m1[1]<m2[1] min = m1[1] else min = m2[1]
     if m1[0]>m2[0] max = m1[0] else max = m1[0]
     return max, min
```

Aby znaleźć max i min w a[0],…,a[n-1]:

```
maxmin(a, 0, n-1)
```

Max & min problem – v.2

Liczba porównań :

n	liczba porównań
1	0
2	1
4	4
8	10
16	22
32	46
64	94

#porównań (gdy n parzyste)**:**

$T(1) = 0$

$T(2) = 1$

$T(n) = 2T(n/2) + 2$ dla $n>2$, parz.

Rozwiązanie:

$T(n) = 3n / 2 - 2$ (dla $n=2^k$, $k>0$)

mniej niż $2n - 2$

Max & min problem – v.2

#porównań (gdy n parzyste)**:**

$T(1) = 0$

$T(2) = 1$

$T(n) = 2T(n/2) + 2$

Rozwiązanie – **podpowiedź**:

$T(n) = 3/2\, n - 2$ dla n postaci $n=2^k$

Pyt.: jak sprawdzić poprawność **podpowiedzi**?

Odp.: indukcja matematyczna.

Max & min problem – v.2

#porównań (gdy n parzyste)**:**

$T(1) = 0$

$T(2) = 1$

$T(n) = 2T(n/2) + 2$

Jak poradzić sobie bez **podpowiedzi**?

Rozwiązanie metodą podstawienia (dla $n=2^k$, $k>0$) **:**

$T(n) \quad = 2\ T(n/2) + 2 = 2\ (\ 2\ T(n/4) + 2\ )\ + 2 =$

$\quad = 4\ T(n/4) + 4 + 2 = 4\ (\ 2\ T(n/8) + 2) + 4 + 2 =$

$\quad = 8\ T(n/8) + 8 + 4 + 2 = \dots =$

$\quad = 2^i\ T(n/2^i) + 2^i + 2^{i-1} + \dots + 2^2 + 2^1 = \dots =$ // $i \le k$

$\quad = 2^{k-1}\ T(n/2^{k-1}) + 2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2^2 + 2^1 =$

$\quad = n/2\ T(2) + n/2 + n/4 + \dots 4 + 2$

$\quad = n/2 + n - 2 = 3/2\ n - 2$

Uwaga: korzystamy ze znanych wzorów na sumę ciągu geometrycznego, …
czyli z tożsamości $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$

Sortowanie przez scalanie
(merge sort)

Sortowanie przez scalanie (merge sort)

Problem scalania

Scalanie

Specyfikacja:

Wejście:

- n, m – liczby naturalne
- $a[0] \le a[1] \le \ldots \le a[n-1]$
- $b[0] \le b[1] \le \ldots \le b[m-1]$

Wyjście:

- $c[0] \le c[1] \le \ldots \le c[n+m-1]$ takie, że

  $\{c[0], c[1], \ldots, c[n+m-1]\}$ to suma multizbiorów $\{a[0], \ldots, a[n-1]\}$ i $\{b[0], \ldots, b[m-1]\}$

Scalanie

Oznaczenia:

- x[p..k] – multizbiór {x[p],x[p+1],…,x[k]} (zbiór z powtórzeniami) lub zbiór pusty gdy p>k
- $A \cup B$ – suma multizbiorów A i B!

„z powtórzeniami” oznacza, że dopuszczamy wiele wystąpień tego samego elementu.

Przykład:

$\{5,3,3,2\} \cup \{3,4,7\} = \{5,3,3,3,2,4,7\}$

Scalanie – przykład

Przykład:

Wejście:

7 5 3 5 5 7 8 8 9 3 4 6 12 14

n m *a[0]*,…,*a[n-1]* *b*[0],…,*b*[m-1]

Wyjście:

3 3 4 5 5 6 7 8 8 9 12 14

Scalanie

Algorytm:

1. $i \leftarrow 0$, $j \leftarrow 0$, $k \leftarrow 0$ //i, j – wskazują dokąd skopiowane
2. dopóki (i<n oraz j<m)
   a) jeżeli(a[i]<b[j]) // wybór najmn. jeszcze nie w c
      - $c[k] \leftarrow a[i]$, $i \leftarrow i+1$

   b) w przeciwnym przypadku:
      - $c[k] \leftarrow b[j]$, $j \leftarrow j+1$

   c) $k \leftarrow k+1$
3. dopóki (i<n) // kopiowanie „ogona” z a
   a) $c[k] \leftarrow a[i]$, $i \leftarrow i+1$, $k \leftarrow k+1$
4. dopóki (j<m) // kopiowanie „ogona” z b
   a) $c[k] \leftarrow b[j]$, $j \leftarrow j+1$, $k \leftarrow k+1$

Scalanie – implementacja

```
merge(int a[],int b[],int c[],int n,int m)
{ int i,j,k;
  i=j=k=0;
  while (i<n && j<m)
    if (a[i]<b[j]) { c[k++]=a[i++]; }
    else           { c[k++]=b[j++] }
  while (i<n) { c[k++]=a[i++]; }
  while (j<m) { c[k++]=b[j++];}
}
```

Scalanie – implementacja

```
def merge(a, b, c, n, m):
    i=j=k=0
    while i<n and j<m:
        if a[i]<b[j]:
            c[k]=a[i]
            k=k+1
            i=i+1
        else:
            c[k]=b[j]
            k=k+1
            j=j+1
    while i<n:
        c[k]=a[i]
        k=k+1
        i=i+1
    while j<m:
        c[k]=b[j]
        k=k+1
        j=j+1
```

Scalanie - poprawność

Poprawność formalnie (przypomnienie):

- Częściowa poprawność – jeśli program się zakończy, wynik będzie poprawny.
- Własność stopu – program zawsze zakończy działanie.

Nasz cel:

- Ustalmy niezmienniki pętli pomocne w dowodzeniu częściowej poprawności.
- (Nieformalnie) uzasadnijmy częściową poprawność programu, w oparciu o niezmienniki.

Scalanie – częściowa poprawność

Niezmiennik pierwszej pętli (`while i<n and j<m`):

1) $c[0..k\text{-}1] = a[0..i - 1] \cup b[\mathit{0}..j - 1\ ]$

   skopiowaliśmy odpowiednie fragmenty a i b do c

2) $c[0] \leq \ldots\ \leq c[k\text{-}1]$

   c jest uporządkowana

3) $a[i] \geq c[k - 1]$ lub $i=n$

4) $b[j] \geq c[k - 1]$ lub $i=m$

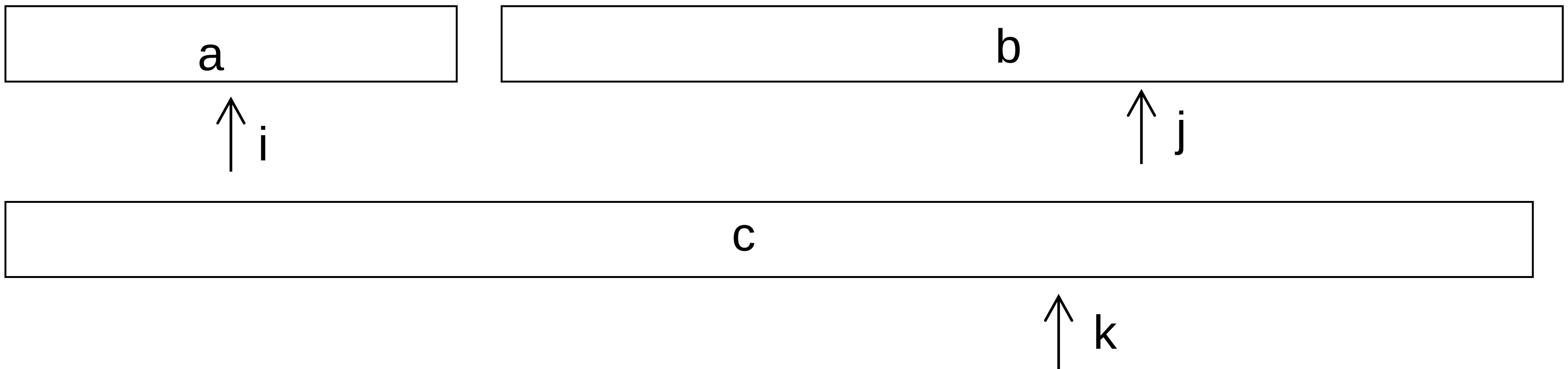
   nieskopiowane elementy a i b są większe (lub równe) od tych już w c

Scalanie – częściowa poprawność

Wniosek 1.

Po zakończeniu pierwszej (czerwonej) pętli:

- do c skopiowaliśmy cały ciąg a[0..n – 1] lub cały ciąg b[0..m – 1] – wynika z (1) i warunku zakończenia pętli
- nieskopiowane do c elementy ciągów a i b są niemniejsze od elementów już w c – z (4) i (5)
- elementy c są uporządkowane – z (2)
- indeksy i, j wskazują na początek „nieskopiowanych” do c części ciągów a i b.



Scalanie – częściowa poprawność

Wniosek 2.

- druga pętla kopiuje do c pozostałe elementy a – większe od dotychczas umieszczonych w c;
- trzecia pętla kopiuje do c pozostałe elementy b – większe od dotychczas umieszczonych w c;

Scalanie – własność stopu + złożoność

Pętla 1 - „**`while`** `i<n` **`and`** `j<m`”:

- każdy obrót pętli zwiększa o 1 sumę i+j
- na początku i+j=0
- Wniosek: po co najwyżej n+m krokach mamy i≥n lub j≥m

Pętla 2 – „**`while`** `i<n`” (pętla 3 analogicznie):

- każdy obrót pętli zwiększa i o 1
- i nie jest zmniejszane w pętli, wartość początkowa i≥0
- Wniosek: po co najwyżej n krokach mamy i≥n

Scalanie - złożoność

Rozmiar danych: n + m

Czas : O(n+m)

Pamięć : O(n+m)

Scalanie – inna specyfikacja

Wejście:

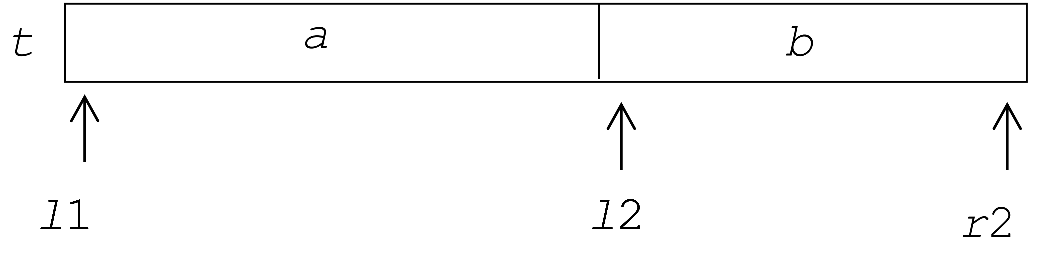
- Tablica `int t[]`
- Liczby $l1$, $l2$, $r2$

takie że

- `t[`$l1$`..`$l2$`-1]` posortowane (odpowiada *a*)
- `t[`$l2$`..`$r2$`]` posortowane (odpowiada *b*)

Wynik:

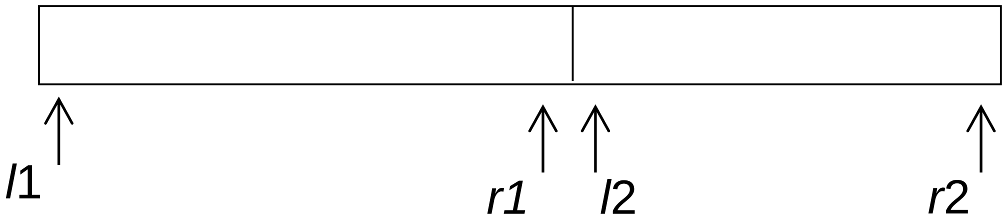
`t[`$l1$`..`$r2$`]` posortowane (zawiera sumę a i b)



Scalanie – inna specyfikacja

Algorytm:

1. i ← l1, j ← l2, k ← 0, r1 ← l2 – 1 //i, j – „strażnicy”
2. dopóki (i≤r1 oraz j ≤r2)
   - jeżeli(t[i]<t[j]) // wybór najmn. jeszcze poza c
     - c[k] ← t[i], i ← i+1
   - w przeciwnym przypaku:
     - c[k] ← t[j], j ← j+1
   - k ← k+1
3. dopóki (i ≤r1) // kopiowanie „ogona” pierwszego ciągu
   - c[k] ← t[i], i ← i+1, k ← k+1
4. dopóki (j ≤r2) // kopiowanie „ogona” drugiego ciągu
   - c[k] ← t[j], j ← j+1, k ← k+1
5. Skopiuj c[0..k – 1] do t[l1..r2]



Scalanie – inna specyfikacja

Implementacja

```
merge(int t[], int l1, int l2, int r2)
{ int k,i,j,c[n],r1;

  k=0;
  r1=l2; r2++;
  while (l1<r1 && l2<r2)
         c[k++]=(t[l1]<t[l2])? t[l1++]:t[l2++];
  while (l1<r1) c[k++]=t[l1++];
  while (l2<r2) c[k++]=t[l2++];
  while (k>0) t[--r2]=c[--k];
}
```

Scalanie – inna specyfikacja

Implementacja

```
def merge(t, l1, l2, r2):
    c=Array(r2-l1+1)
    k=0; r1=l2; r2+=1
    while l1<r1 and l2<r2:
        if t[l1]<t[l2]:
            c[k]=t[l1]; l1+=1
        else:
            c[k]=t[l2]; l2+=1
        k+=1
    while l1<r1:
        c[k]=t[l1]; k+=1; l1+=1
    while l2<r2:
        c[k]=t[l2]; k+=1; l2+=1
    while k>0:
        r2-=1; k-=1; t[r2]=c[k]
```

Alg. scalania – złożoność raz jeszcze

Rozmiar danych: n + m

Czas : O(n+m)

Pamięć : O(n+m)

UWAGA: potrzebujemy „pomocniczej”
tablicy c rozmiaru n + m.

Sortowanie przez scalanie (merge sort)

Problem sortowania

Sortowanie przez scalanie

Specyfikacja

Dane:

- n – liczba naturalna dodatnia
- $a[0..n-1]$ – tablica elementów ze zbioru uporządkowanego

Wynik: elementy $a[0..n-1]$ w porządku niemalejącym, czyli

$$a[0] \leq a[1] \leq \ldots \leq a[n-1].$$

Sortowanie przez scalanie (zasada „dziel i zwyciężaj”)

1. Podziel ciąg wejściowy A na dwa podciągi A1, A2 (prawie) tej samej długości
2. Posortuj A1 i A2 osobno (rekurencja)
3. Scal posortowane ciągi A1 i A2

Sortowanie przez scalanie dokładniej

Algorytm (idea):

- Jeśli n=1: zwróć tablicę *a*
- Podziel a[0..n-1] na podtablice *a*[0..k], *a*[k+1..n-1] o (prawie) równej długości
- Posortuj *a*[0..k] //rekurencja!
- Posortuj *a*[k+1..n-1] //rekurencja!
- Scal *a*[0..k] oraz *a*[k+1..n-1]
- Zwróć *a jako wynik*

Sortowanie przez scalanie

Specyfikacja ogólniej

Dane:

- l, r – liczby naturalne takie, że $l \leq r$
- a – tablica nad zbiorem uporządkowanym Z

Wynik: elementy $a[l], \ldots, a[r]$ w porządku niemalejącym, czyli

$$a[l] \leq a[l+1] \leq \ldots \leq a[r].$$

Sortowanie przez scalanie dokładniej

Algorytm ogólniej (idea):

- Jeśli *l*=r: zakończ
- Podziel a[*l*..*r*] na podtablice *a*[l..*s*], *a*[*s*+*1*..*r*] o (prawie) równej długości
- Posortuj *a*[*l*..*s*] //rekurencja!
- Posortuj *a*[*s*+1..*r*] //rekurencja!
- Scal *a*[*l*..*s*] oraz *a*[*s*+1..*r*]
- Zwróć *a*[*l*..*r*] *jako wynik*

Sortowanie przez scalanie

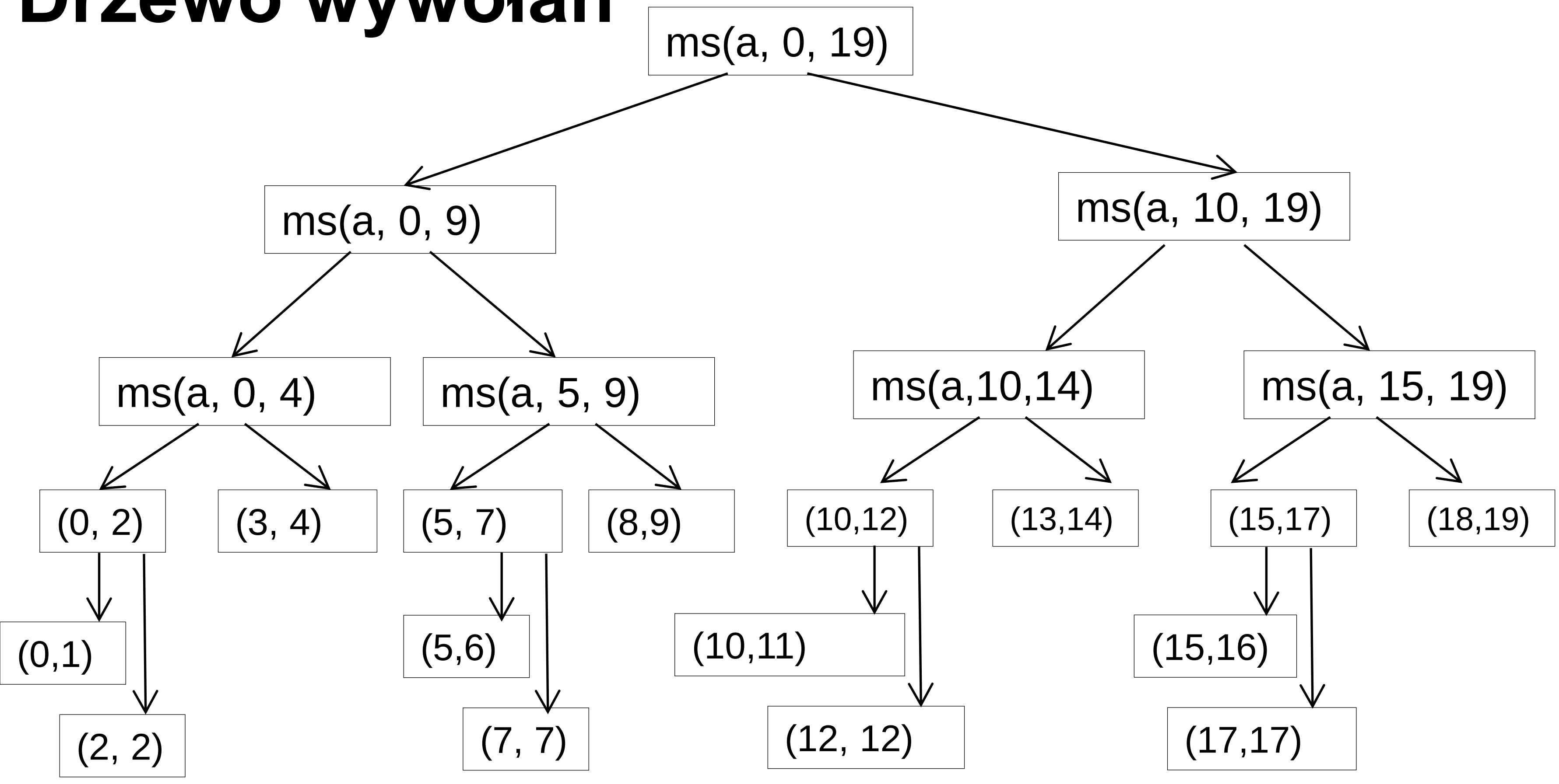
Implementacja:

```
mergesort(int a[], int l, int r)
//sortuje a[l..r]
{  int s;
   if (r-l>0)
   {  s=(l+r)/2;
      mergesort(a,l,s);
      mergesort(a,s+1,r);
      merge(a,l,s+1,r);
   }
}
```

```
def mergesort(a, l, r):
#sortuje a[l..r]
 if r-l>0:
    s=(l+r)/2
    mergesort(a,l,s)
    mergesort(a,s+1,r)
    merge(a,l,s+1,r)
```

Sortowanie przez scalanie

Drzewo wywołań



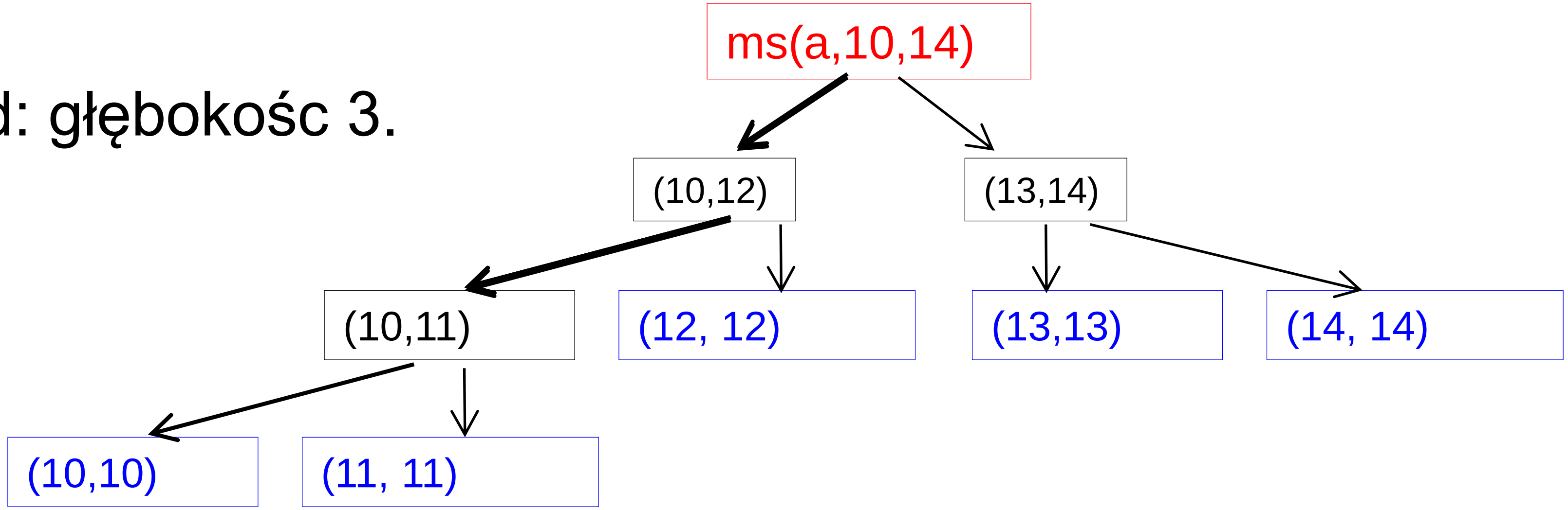
Uwaga: wywołania dla niektórych ciągów o długości ≤ 2 nie zmieściły się na rysunku.

Sortowanie przez scalanie

Drzewo wywołań:

- korzeń – wywołanie pierwotne (np. ms(a, 0,19))
- liść – wywołanie, z którego nie ma wywołań rekurencyjnych (np. ms(a,10,10))
- głębokość drzewa - długość najdłuższej ścieżki od korzenia do liścia

Przykład: głębokośc 3.



Sortowanie przez scalanie - poprawność

Indukcja względem różnicy $r - l$:

- Jeśli $r - l = 0$: jedno-elementowy ciąg do posortowania, funkcja kończy działanie;
- **Zał.:** poprawność dla $r - l < n$

  Teza: poprawność dla $r - l = n$, $n > 0$

  Dowód:

  – wówczas s spełnia $l \leq s < r$, czyli …

  – … rekurencyjne wywołania na **<u>krótszych</u>** podciągach a[l..s] i a[s+1..r] działają poprawnie na mocy <u>założenia indukcyjnego</u>

  – a scalanie poprawnie połączy posortowane podciągi (p. poprzedni wykład)

Sortowanie przez scalanie - złożoność

Pamięć (*n* = *r* – *l* + 1)

- **n+O(n) + stos wywołań**
- Jak (oszczędnie) zaalokować tablicę pomocniczą?

Sortowanie przez scalanie - złożoność

Pamięć (*n* = *r* – *l* + 1)

- **n+O(n)** **+ stos wywołań**
- Jak (oszczędnie) zaalokować tablicę pomocniczą?

Czas: (*n* = *r* – *l* + 1)

- $T(n) = T(n/2) + T(n/2) + n$

pierwsze wywoł. rek. drugie wywoł. rek. koszt scalania

Rozwiązanie: $T(n) \cong n \log n$

Zależność rekurencyjna

Czas merge sort dokładniej:

- $T(1) = 1$
- $T(n) = T(n/2) + T(n/2) + n$ dla parzystego $n>1$
- $T(n) = T((n+1)/2) + T((n-1)/2) + n$ dla nieparzystego $n>1$

Zależność rekurencyjna

Czas merge sort:

- $T(1) = 1$
- $T(n) = T(n/2) + T(n/2) + n$ dla parzystego $n>1$

Rozwiązanie **metodą podstawienia**

(zakładamy, że $n=2^k$ dla naturalnego k, czyli $k = \log n$):

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2\,T(n/2) + n = 2\,(\,2\,T(n/4) + n/2\,) + n = \\
&= 4\,T(n/4) + 2n = 4\,(\,2\,T(n/8) + n/4) + 2n = \\
&= 8\,T(n/8) + 3\,n = \ldots = \\
&= 2^i\,T(n/2^i) + i\,n = \ldots = \qquad // \; i \le k \\
&= 2^k\,T(n/2^k) + k\,n = n\,T(1) + n \log n \\
&= n + n \log n = O(\,n \log n)
\end{aligned}
$$

Sortowanie szybkie
(quick sort)

Sortowanie szybkie (quick sort)

Problem sortowania

Quicksort – kolejny przykład zastosowania metody dziel i zwyciężaj

1. Wybierz element x ciągu wejściowego A i podziel A na dwa rozłączne podciągi:
   - A1: elementy nie większe niż *x*
   - A2: elementy nie mniejsze niż *x*
2. Posortuj A1 i A2 osobno (rekurencja)
3. Zwróć złączone ciągi A1 i A2

Uwaga

Różne wystąpienia elementu x mogą należeć do A1 lub A2, ***ALE*** *każda kopia należy tylko do jednego ze zbiorów A1, A2.*

Specyfikacja – przypomnienie

Specyfikacja (na potrzeby „dziel i zwyciężaj”)

Dane:

- l, r – liczby naturalne takie, że $l \leq r$
- a – tablica nad zbiorem uporządkowanym Z

Wynik: elementy $a[l],\ldots,a[r]$ w porządku niemalejącym, czyli

$$a[l] \leq a[l+1] \leq \ldots \leq a[r].$$

Quick sort dokładniej…

Jeśli $l < r$:

1. Wybierz x (pivot) ze zbioru $\{a[l], a[l+1], \ldots, a[r]\}$ i przemieść elementy $a[l], a[l+1], \ldots, a[r]$ tak, aby:
   - Elementy $a[l..s]$ były $\leq x$
   - Elementy $a[s+1 \ldots r]$ były $\geq x$

   gdzie s jest takie, że $l \leq s < r$

   // problem podziału
2. Posortuj: // rekurencja
   - $a[l \ldots s]$
   - $a[s+1 \ldots r]$

Sortowanie szybkie (quick sort)

Problem podziału

Podział

Specyfikacja:

Wejście (można zapisać jako formułę opis. stan):

- l, p – liczby naturalne takie, że $l<p$
- a – tablica elementów ze zbioru uporz.

Wyjście (można zapisać jako formułę opis. stan):

- s – liczba naturalna taka, że $l \leq s < p$
- multizbiór {a[*l*],..,a[*p*]} bez zmian, ale w takiej kolejności, że
  - a[l]≤x, a[l+1]≤x, …, a[s]≤x
  - a[s+1]≥x, a[s+2]≥x,….a[p]≥x

  dla pewnego $x \in$ {a[*l*],..,a[*p*]}.

Podział – przykład

Przykład:

Wejście:

- l=0, p=9
- a[$l..p$] = 5 1 4 9 5 5 8 7 3 5

Wyjście (przykładowe):

- a[$l..p$] = 5 1 4 3 5 **5** 8 7 9 5
- s=5

dla x = 5

Podział

Algorytm:

1. $x \leftarrow a[l]$, $i \leftarrow l$, $j \leftarrow p$
2. dopóki $i < j$ powtarzaj:
    1. zwiększaj i o 1 aż do spełnienia warunku $a[i] \geq x$
    2. zmniejszaj j o 1 aż do spełnienia warunku $a[j] \leq x$
    3. jeśli i<j:
        - zamień $a[i]$ z $a[j]$, zwiększ i o 1, zmniejsz j o 1
3. zwróć j

Podział – implementacja

```
podzial(int l, int p, int a[])
{ int i,j,y,x;
  x=a[l]; i=l; j=p;
  while (i<j)
  { while (a[j]>x) j--;
    while (a[i]<x) i++;
    if (i<j)
     { y=a[j]; a[j]=a[i]; a[i]=y;
       i++; j--; }
  }
  return j;
}
```

Podział – implementacja

```
def podzial(l,p,a):
    x=a[l]
    i=l
    j=p
    while i<j:
        while a[j]>x: j=j-1
        while a[i]<x: i=i+1
        if i<j:
            y=a[j]
            a[j]=a[i]
            a[i]=y
            i=i+1
            j=j-1
    return j
```

Podział

Pytania:

1. Dlaczego *i* „zatrzymuje się” na elemencie $\geq$x (a nie na elemencie >x)?
2. Dlaczego *j* „zatrzymuje się” na elemencie $\leq$x (a nie na elemencie <x)?

Sprawdź, …. kiedy możemy mieć pętle wewnętrzne wychodzące poza przedział [l, p].

```
podzial(int l, int p, int a[])
{ int i,j,y,x;
  x=a[l]; i=l; j=p;
  while (i<j)
  { while (a[j]>x) j--;
    while (a[i]<x) i++;
    if (i<j)
        { y=a[j]; a[j]=a[i]; a[i]=y;
      i++; j--; }
  }
  return j;
}
```

Podział – częściowa poprawność

Częściowa poprawność – intuicja:

- „na lewo” od *i* tylko elementy ≤x
- „na prawo” od *j* tylko elementy ≥x
- miejsce podziału wyznaczamy w momencie „spotkania” indeksów *i* oraz *j*

```
podzial(int l, int p, int a[])
{ int i,j,y,x;
  x=a[l]; i=l; j=p;
  while (i<j)
  { while (a[j]>x) j--;
    while (a[i]<x) i++;
    if (i<j)
        { y=a[j]; a[j]=a[i]; a[i]=y;
      i++; j--; }
  }
  return j;
}
```

Podział – częśc. popr.

```
podzial(int l, int p, int a[])
{ int i,j,y,x;
  x=a[l]; i=l; j=p;
  while (i<j)
  { while (a[j]>x) j--;
    while (a[i]<x) i++;
    if (i<j)
        { y=a[j]; a[j]=a[i]; a[i]=y;
      i++; j--; }
  }
  return j;
}
```

Niezmiennik głównej pętli:

1) $i \le j+1$
2) $a[s] \le x$ dla $l \le s < i$ //na lewo od i nie ma większych od x
3) $a[s] \ge x$ dla $j < s \le p$ //na prawo od j nie ma mniejszych od x
4) $l \le j \le p$, $l \le i \le p$ //i,j są pomiędzy l a p
5) w ciągu a[i], a[i+1],…,a[p] występuje element $\ge x$
   //i „zatrzyma się” najpóźniej na p
6) w ciągu a[l], a[l+1],…,a[j] występuje element $\le x$

   //j „zatrzyma się” najpóźniej na l

Podział – częściowa poprawność

Niezmiennik głównej pętli - dlaczego tak skomplikowany:

- Musi być spełniony również po obrocie pętli
- Powinien pomóc w dowodzie poprawności całej funkcji podzial.

Podział – własność stopu

Obserwacje:

- różnica *j* – *i* zmniejsza się w każdym obrocie głównej pętli,
- gdy *j* – *i* ≤ 0 – kończymy pętlę
- więc liczba obrotów głównej pętli ograniczona
- pętle wewnętrzne kończą się dzięki (5) i (6)

```
podzial(int l, int p, int a[])
{ int i,j,y,x;
  x=a[l]; i=l; j=p;
  while (i<j)
  { while (a[j]>x) j--;
    while (a[i]<x) i++;
    if (i<j)
        { y=a[j]; a[j]=a[i]; a[i]=y;
      i++; j--; }
  }
  return j;
}
```

Podział – złożoność

Czas: O($p - l + 1$)

- liczba kroków potrzebna do uzyskania $j - i \leq 0$

Pamięć:

- O($p - l + 1$), a właściwie….
- $p - l + 1$ + O(1): poza pamięcią z danymi potrzebujemy tylko O(1) zmiennych, czyli algorytm działa w miejscu.

„w miejscu”

Algorytm działa w miejscu jeśli wykorzystuje tylko:

- pamięć zajmowaną przez dane wejściowe [założenie – dane już w pamięci]
- **oraz** dodatkową pamięć rozmiaru O(1)

Podział – sprytniejsza implementacja w C

```
podzial(int l, int r, int a[])
{ int y;
  l--;
  r++;
  do
  { while (a[--r]>x);
    while (a[++l]<x);
    if (l<r) {y=a[r]; a[r]=a[l]; a[l]=y;}
    else return r;
  } while (1);
}
```

Quicksort - implementacja

```
qsort(int a[], int l, int r)
//sortuje a[l…r]
{ int s;
  if (l<r) {
   s = podzial(l,r,a);
   qsort(a, l,    s);
   qsort(a, s+1, r);
  }
}
```

```
def qsort(a, l, r):
#sortuje a[l…r]
 if (l<r):
   s = podzial(l,r,a)
   qsort(a, l,    s)
   qsort(a, s+1, r);
```

Quicksort - poprawność

Indukcja względem różnicy $r - l$:

- Jeśli $r - l \leq 0$: ciąg do posortowania pusty lub jedno-elementowy, funkcja kończy działanie;
- **Zał.:** poprawność dla każdych r i l takich, że $r - l < n$

  Teza: poprawność dla $r - l = n$, $n > 0$

  Dowód:

  - `podzial` działa poprawnie (p. poprzedni wykład) – podzieli a[l..r] na X=a[l..s] i Y=a[s+1..r] takie, że każdy element Y jest większy (bądź równy) każdemu elementowi X
  - gdy s spełnia **$l \leq s < r$**, to:

    rekurencyjne wywołania na **krótszych** podciągach a[l..s] i a[s+1..r] działają poprawnie na mocy **założenia indukcyjnego**

Quicksort - poprawność

Dowód c.d.:

- gdy **$s = r$**, to …
- … mamy problem: qsort(a, l, r) wywoła qsort(a,l,r), które wywoła qsort(a, l, r) itd. pętla nieskończona
- ale funkcja `podzial` zwraca s takie, że: $l \leq s < r$

  (jako wartość zwracamy j, którego początkowa wartość jest równa r, ponadto wartość j jest w funkcji `podzial` co najmniej raz zmniejszana - p. poprzedni wykład)

Quicksort: złożoność pamięciowa

Pamięć:

n + O(1) + stos wywołań

- Tablica zawierająca ciąg wejściowy
- Stała liczba dodatkowych zmiennych
- Pamięć potrzebna do realizacji rekurencji…?

Quicksort – podział – rola pivota

Pyt.: a gdybyśmy chcieli, żeby pivot nie był pierwszym elementem ciągu?

Odp.: zamiana pivota z pierwszym elementem przed wywołaniem funkcji podzial

Pyt.: czy warto wybrać inny pivot? losowy?

Wskazówka: jaki podział jest najkorzystniejszy w metodzie dziel i zwyciężaj? (jakie długości podciągów?)

Quicksort: złożoność czasowa

Najgorszy przypadek: funkcja podzial dzieli problem na podproblemy o rozmiarach 1 i n – 1:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(n-1) \quad + \quad T(1) + n \qquad\qquad \text{dla } n > 1$$

Pierwsze wywoł rekur. Drugie wywoł rekur. Koszt podziału

Rozwiązanie: $T(n) \cong n^2/2 = O(n^2)$

Quicksort: złożoność czasowa

- „Zamierzona” sytuacja: procedura podzial dzieli problem rozmiaru n na dwa podproblemy rozmiaru n/2:

  T(1) = 1

  $T(n) = T(n/2) + T(n/2) + n$ dla $n>1$

  Pierwsze wywoł. rek. Drugie wywoł. rek. Koszt podziału

  Rozwiązanie: $T(n) = O(n \log n)$

Quicksort: złożoność czasowa

PRAKTYKA: Quicksort jest najszybszym algorytmem sortowania.

Dlaczego?

- **Średni** czas działania Quicksort jest O(*n* log *n*)

  „Średnia" z czasów działania algorytmu dla wszystkich permutacji ciągu różnych elementów

- Możliwe jest uzyskanie **gwarantowanego** czasu O(n log n) w najgorszym przypadku

  Korzystamy wówczas z algorytmu szukającego mediany („środkowego" elementu) w czasie O(n).

  P. algorytm magicznych piątek.

Quicksort: złożoność czasowa i pamięciowa

PRAKTYKA: Quicksort jest najszybszym algorytmem sortowania.

Porównanie z mergesort:

- Stałe „mnożnikowe” w złożoności czasowej („średniej”) quicksort są mniejsze niż np. w mergesort
- Mniejsza pamięć niż w mergesort – mergesort „potrzebuje” dodatkowej pamięci na scalanie podciągów (poniżej pomijamy stos wywołań funkcji):

  Quicksort: n + **O(1)**

  Mergesort n + **n**