Logika cyfrowa

Wykład 3: układy arytmetyczne

Marek Materzok

11 marca 2024

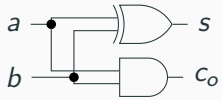
Dodawanie liczb binarnych

Półsumator

Układ dodający dwie cyfry binarne:

$$\begin{array}{cc} & a \\ + & b \\ \hline c & s \end{array}$$

a	b	c_o	s
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		



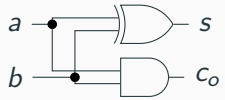
$$s = a \oplus b$$
$$c_o = ab$$

Półsumator

Układ dodający dwie cyfry binarne:

$$\begin{array}{cc} & a \\ + & b \\ \hline c & s \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & 0 \\ + & 0 \\ \hline & \end{array}$$

a	b	c_o	s
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		



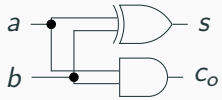
$$s = a \oplus b$$
$$c_o = ab$$

Półsumator

Układ dodający dwie cyfry binarne:

$$\begin{array}{cc} & a \\ + & b \\ \hline c & s \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & 0 \\ + & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

a	b	c_o	s
0	0	0	0
0	1		
1	0		
1	1		



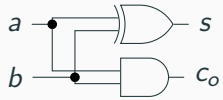
$$s = a \oplus b$$
$$c_o = ab$$

Półsumator

Układ dodający dwie cyfry binarne:

$$\begin{array}{cc} & a \\ + & b \\ \hline c & s \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & 0 \\ + & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & 0 \\ + & 1 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{} \end{array}$$

a	b	c_o	s
0	0	0	0
0	1		
1	0		
1	1		



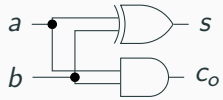
$$s = a \oplus b$$
$$c_o = ab$$

Półsumator

Układ dodający dwie cyfry binarne:

$$\begin{array}{rr} & a \\ + & b \\ \hline c & s \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 0 \\ + & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 0 \\ + & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$$

a	b	c_o	s
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0		
1	1		



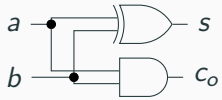
$$s = a \oplus b$$
$$c_o = ab$$

Półsumator

Układ dodający dwie cyfry binarne:

$$\begin{array}{rr} & a \\ + & b \\ \hline c & s \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 0 \\ + & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 0 \\ + & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 1 \\ + & 0 \\ \hline & \end{array}$$

a	b	c_o	s
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0		
1	1		



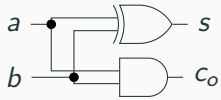
$$s = a \oplus b$$
$$c_o = ab$$

Półsumator

Układ dodający dwie cyfry binarne:

$$\begin{array}{cc} & a \\ + & b \\ \hline c & s \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & 0 \\ + & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & 0 \\ + & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & 1 \\ + & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$$

a	b	c_o	s
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1		



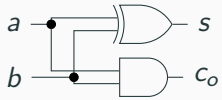
$$s = a \oplus b$$
$$c_o = ab$$

Półsumator

Układ dodający dwie cyfry binarne:

$$\begin{array}{cc} & a \\ + & b \\ \hline c & s \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & 0 \\ + & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & 0 \\ + & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & 1 \\ + & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & 1 \\ + & 1 \\ \hline & \end{array}$$

a	b	c_o	s
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1		



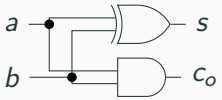
$$s = a \oplus b$$
$$c_o = ab$$

Półsumator

Układ dodający dwie cyfry binarne:

$$\begin{array}{cc} & a \\ + & b \\ \hline c & s \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & 0 \\ + & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & 0 \\ + & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & 1 \\ + & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & 1 \\ + & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}$$

a	b	c_o	s
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0



$$s = a \oplus b$$
$$c_o = ab$$

Pełny sumator

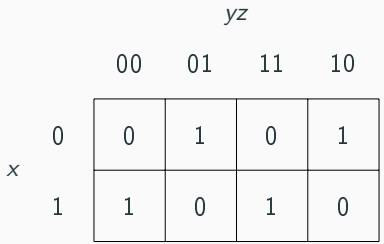
a	b	c	c_o	s
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0

x \ yz	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

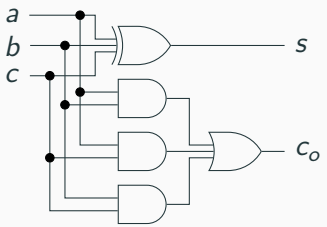
Pełny sumator

a	b	c	c_o	s
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1



Pełny sumator

a	b	c	c_o	s
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

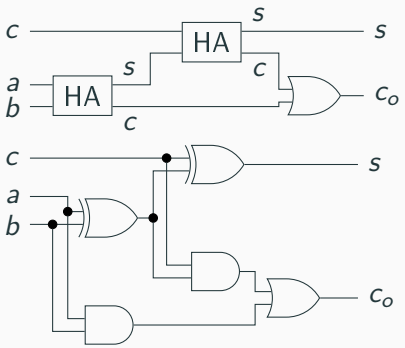


$$s = a \oplus b \oplus c$$

$$c_o = ab + ac + bc$$

Pełny sumator z półsumatorów

a	b	c	c_o	s
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1



Sumator szeregowy

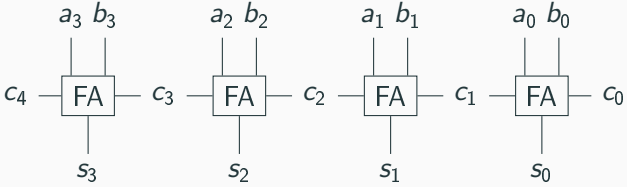
$$
\begin{array}{cccccc}
 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
+ & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\
\hline
c_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0
\end{array}
$$

Sumator szeregowy

$$
\begin{array}{ccccc}
c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \\
 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
+ & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\
\hline
c_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0
\end{array}
$$

Sumator szeregowy

$$
\begin{array}{ccccc}
c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \\
 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
+ & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\
\hline
c_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0
\end{array}
$$



Liczby ujemne – znak-moduł

- Najbardziej znaczący bit określa znak,
  pozostałe bity – moduł (wartość bezwzględną).

s	b_2	b_1	b_0

  $(2)_{10} = 0010$, $(-2)_{10} = 1010$
- Łatwa zmiana znaku – negacja bitu znaku.
- Dwie reprezentacje zera – $000\ldots0$ i $100\ldots0$
- Trudne dodawanie:
  - Jeśli obie liczby mają ten sam znak, dodajemy moduły.
  - Jeśli mają różne znaki, wynikowy znak jest taki, jak znak liczby o **większym** module. Moduły odejmujemy mniejszy od większego.

Przykład – znak-moduł

-5 (1101) i 2 (0010)

odejmujemy moduły:

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 1 \\ - & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Wynik: -3 (1011)

Przykład – znak-moduł

-5 (1101) i 2 (0010)

odejmujemy moduły:

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 1 \\ - & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Wynik: -3 (1011)

5 (0101) i -2 (1010)

odejmujemy moduły:

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 1 \\ - & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Wynik: 3 (0011)

Przykład – znak-moduł

-5 (1101) i 2 (0010)
odejmujemy moduły:

```
    1  0  1
-   0  1  0
-------------
    0  1  1
```

Wynik: -3 (1011)

5 (0101) i -2 (1010)
odejmujemy moduły:

```
    1  0  1
-   0  1  0
-------------
    0  1  1
```

Wynik: 3 (0011)

-5 (1101) i -2 (1010)
dodajemy moduły:

```
    1  0  1
+   0  1  0
-------------
    1  1  1
```

Wynik: -7 (1111)

Liczby ujemne – kod uzupełnień do jedności

- Najbardziej znaczący bit określa znak.
  Reprezentacją liczby $-n$ w k bitach jest $2^k - 1 - n$.
  $(2)_{10} = 0010$, $(-2)_{10} = 1101$
- Łatwa zmiana znaku – negacja **wszystkich** bitów.
  $(2^k - 1)_{10} = (\underbrace{11\ldots1}_{k})_2$
- Dwie reprezentacje zera – $00\ldots0$ i $11\ldots1$
- Komplikacja z dodawaniem – czasem potrzebna jest korekta wyniku

Przykład – kod uzupełnień do jedności

-5 (1010) i 2 (0010)

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ + & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Wynik: -3 (1100)

Przykład – kod uzupełnień do jedności

-5 (1010) i 2 (0010)

	1	0	1	0
+	0	0	1	0
	1	1	0	0

Wynik: -3 (1100)

5 (0101) i -2 (1101)

	0	1	0	1
+	1	1	0	1
1	0	0	1	0

Przykład – kod uzupełnień do jedności

-5 (1010) i 2 (0010)

	1	0	1	0
+	0	0	1	0
	1	1	0	0

Wynik: -3 (1100)

5 (0101) i -2 (1101)

	0	1	0	1
+	1	1	0	1
	1	0	0	1	0
↪				1
	0	0	1	1

Wynik: 3 (0011)

Przykład – kod uzupełnień do jedności

-5 (1010) i 2 (0010)

	1	0	1	0
+	0	0	1	0
	1	1	0	0

Wynik: -3 (1100)

5 (0101) i -2 (1101)

	0	1	0	1
+	1	1	0	1
	1	0	0	1	0
↳				1
	0	0	1	1

Wynik: 3 (0011)

-5 (1010) i -2 (1101)

	1	0	1	0
+	1	1	0	1
1	0	1	1	1

Wynik: -7 (1000)

Przykład – kod uzupełnień do jedności

-5 (1010) i 2 (0010)

	1	0	1	0
+	0	0	1	0
	1	1	0	0

Wynik: -3 (1100)

5 (0101) i -2 (1101)

	0	1	0	1
+	1	1	0	1
	1	0	0	1	0
↳				1
	0	0	1	1

Wynik: 3 (0011)

-5 (1010) i -2 (1101)

	1	0	1	0
+	1	1	0	1
	1	0	1	1	1
↳				1
	1	0	0	0

Wynik: -7 (1000)

Liczby ujemne – kod uzupełnień do dwóch

- Reprezentacją liczby $-n$ w k bitach jest $2^k - n$.
  $(2)_{10} = 0010$, $(-2)_{10} = 1110$
- Zmiana znaku – negacja wszystkich bitów **i dodanie jedynki**.
  $2^k - n = (2^k - 1 - n) + 1$
- Tylko jedna reprezentacja zera, ale
- Istnieje liczba bez przeciwnej, -2^{k-1}:
  $(-2^{k-1})_{10} = (2^k - (2^{k-1}))_{10} = (2^{k-1})_1 0 = 10\ldots0$
- Dodawanie takie samo, jak dodawanie bez znaku

Przykład – kod uzupełnień do dwóch

-5 (1011) i 2 (0010)

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ + & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Wynik: -3 (1101)

Przykład – kod uzupełnień do dwóch

-5 (1011) i 2 (0010)

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ + & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Wynik: -3 (1101)

5 (0101) i -2 (1110)

$$\begin{array}{rcccc} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ + & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Wynik: 3 (0011)

Przykład – kod uzupełnień do dwóch

-5 (1011) i 2 (0010)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ + \; 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Wynik: -3 (1101)

5 (0101) i -2 (1110)

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ + \; 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 \; 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Wynik: 3 (0011)

-5 (1011) i -2 (1110)

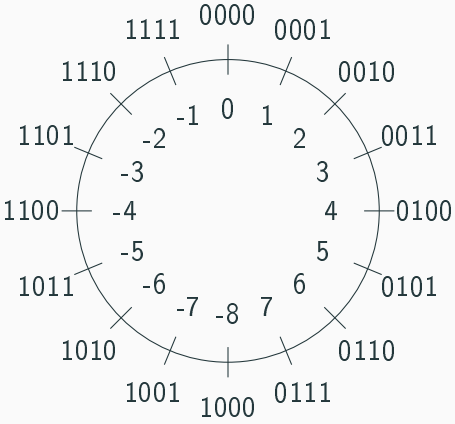
$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ + \; 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 \; 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Wynik: -7 (1001)

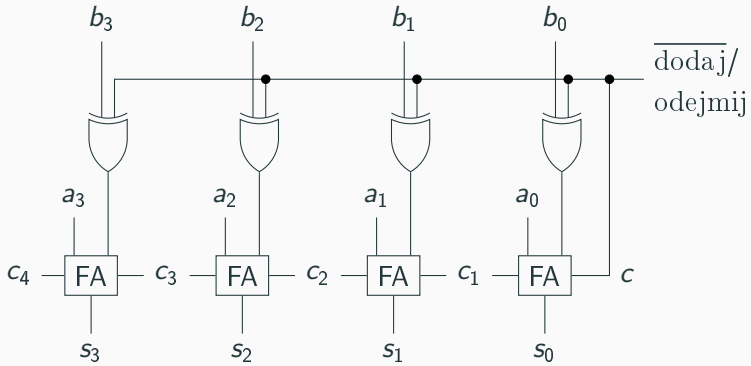
Podsumowanie – kody liczb ze znakiem

bin	ZM	U1	U2
0000	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮
0111	7	7	7
1000	-0	-7	-8
1001	-1	-6	-7
1010	-2	-5	-6
1011	-3	-4	-5
1100	-4	-3	-4
1101	-5	-2	-3
1110	-6	-1	-2
1111	-7	-0	-1

Kody uzupełnień do dwóch – operacje modulo



Układ dodająco-odejmujący



Wykrywanie przepełnienia

$6 - 2 = 4$

1	1	1	0	
	0	1	1	0
+	1	1	1	0
1	0	1	0	0

Wykrywanie przepełnienia

$6 - 2 = 4$

1	1	1	0	
	0	1	1	0
+	1	1	1	0
1	0	1	0	0

$6 + 3 = 9 \approx -7$

0	1	1	0	
	0	1	1	0
+	0	0	1	1
0	1	0	0	1

Wykrywanie przepełnienia

$6 - 2 = 4$

	1	1	1	0
	0	1	1	0
+	1	1	1	0
1	0	1	0	0

$6 + 3 = 9 \approx -7$

	0	1	1	0
	0	1	1	0
+	0	0	1	1
0	1	0	0	1

$-6 - 5 = -11 \approx 5$

	1	0	1	0
	1	0	1	0
+	1	0	1	1
1	0	1	0	1

Wykrywanie przepełnienia

$6 - 2 = 4$

	1	1	1	0
	0	1	1	0
+	1	1	1	0
1	0	1	0	0

$6 + 3 = 9 \approx -7$

	0	1	1	0
	0	1	1	0
+	0	0	1	1
0	1	0	0	1

$-6 - 5 = -11 \approx 5$

	1	0	1	0
	1	0	1	0
+	1	0	1	1
1	0	1	0	1

- Przepełnienie gdy dodajemy liczby **z tym samym znakiem**, a wynik ma **inny znak**

Wykrywanie przepełnienia

$6 - 2 = 4$

1	1	1	0	
	0	1	1	0
+	1	1	1	0
1	0	1	0	0

$6 + 3 = 9 \approx -7$

0	1	1	0	
	0	1	1	0
+	0	0	1	1
0	1	0	0	1

$-6 - 5 = -11 \approx 5$

1	0	1	0	
	1	0	1	0
+	1	0	1	1
1	0	1	0	1

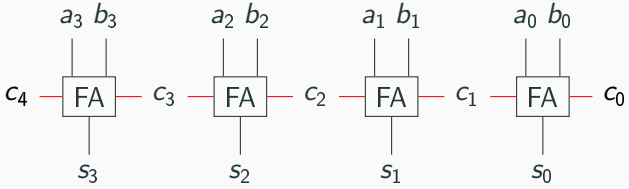
- Przepełnienie gdy dodajemy liczby **z tym samym znakiem**, a wynik ma **inny znak**
- Można to rozpoznać przy użyciu dwóch ostatnich bitów przeniesienia

Sumator szybki

Ścieżka krytyczna

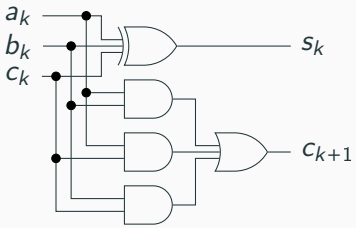
Ścieżka najdłuższego opóźnienia w układzie kombinacyjnym.

W sumatorze wielobitowym – ścieżka przeniesienia:



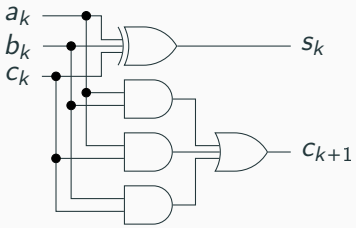
Długość ścieżki krytycznej – $2n$ bramek

Układ przewidywania przeniesienia



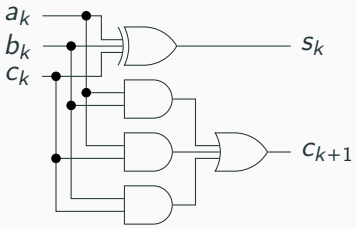
$$
\begin{aligned}
s_k &= a_k \oplus b_k \oplus c_k \\
c_{k+1} &= a_k b_k + a_k c_k + b_k c_k
\end{aligned}
$$

Układ przewidywania przeniesienia



$$
\begin{aligned}
s_k &= a_k \oplus b_k \oplus c_k \\
c_{k+1} &= a_k b_k + a_k c_k + b_k c_k \\
&= a_k b_k + (a_k + b_k) c_k
\end{aligned}
$$

Układ przewidywania przeniesienia

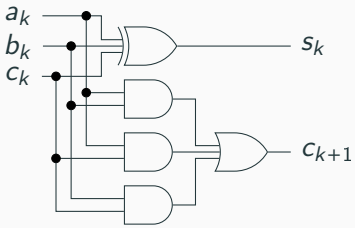


$$
\begin{aligned}
s_k &= a_k \oplus b_k \oplus c_k \\
c_{k+1} &= a_k b_k + a_k c_k + b_k c_k \\
&= a_k b_k + (a_k + b_k) c_k \\
&= g_k + p_k c_k
\end{aligned}
$$

Bit *generowania*: $g_k = a_k b_k$

Bit *propagacji*: $p_k = a_k + b_k$

Układ przewidywania przeniesienia



$$
\begin{aligned}
s_k &= a_k \oplus b_k \oplus c_k \\
c_{k+1} &= a_k b_k + a_k c_k + b_k c_k \\
&= a_k b_k + (a_k + b_k) c_k \\
&= g_k + p_k c_k
\end{aligned}
$$

Bit *generowania*: $g_k = a_k b_k$

Bit *propagacji*: $p_k = a_k + b_k$

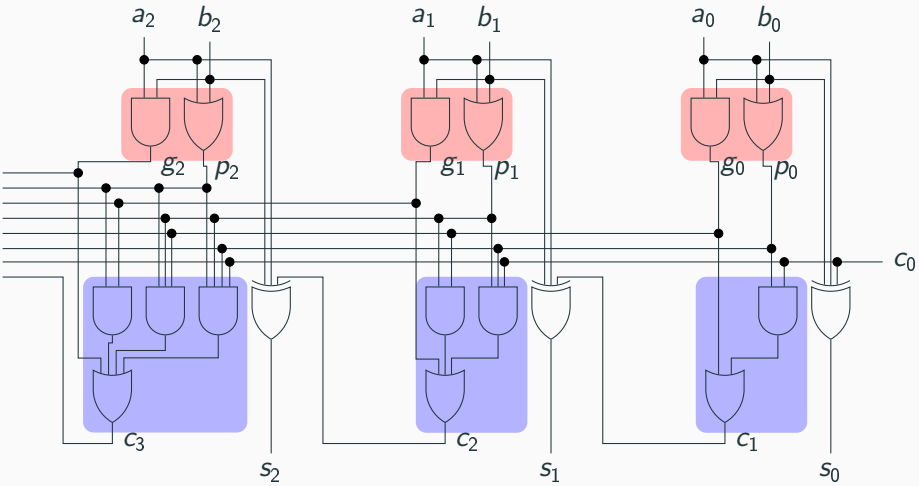
$$
\begin{aligned}
c_n &= g_{n-1} + p_{n-1} c_{n-1} \\
&= g_{n-1} + p_{n-1}(g_{n-2} + p_{n-2} c_{n-2}) \\
&= g_{n-1} + p_{n-1} g_{n-2} + p_{n-1} p_{n-2} c_{n-2} = \ldots \\
&= g_{n-1} + p_{n-1} g_{n-2} + p_{n-1} p_{n-2} g_{n-3} + \cdots + p_{n-1} p_{n-2} \ldots p_0 c_0 \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} g_i \prod_{j=i+1}^{n-1} p_j + c_0 \prod_{j=0}^{n-1} p_j = \sum_{i=-1}^{n-1} g_i \prod_{j=i+1}^{n-1} p_j
\end{aligned}
$$

Układ przewidywania przeniesienia – charakterystyka

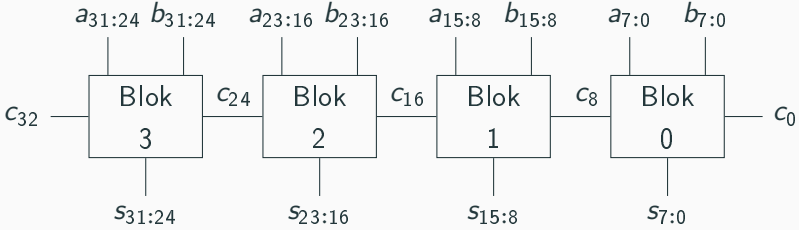
$$c_n = \sum_{i=-1}^{n-1} g_i \prod_{j=i+1}^{n-1} p_j$$

- $n + 1$ bramek, ścieżka krytyczna – 2 bramki, max $n + 1$-wejściowe
- W praktyce ograniczenie *fan-in*, dla bramek 2-wejściowych: $O(n^2)$ bramek, ścieżka krytyczna – $O(\log n)$ bramek
- Dla wysokich n skomplikowane, nieplanarne połączenia

Sumator z przewidywaniem przeniesienia



Łączenie sumatorów równoległych



Sumator hierarchiczny

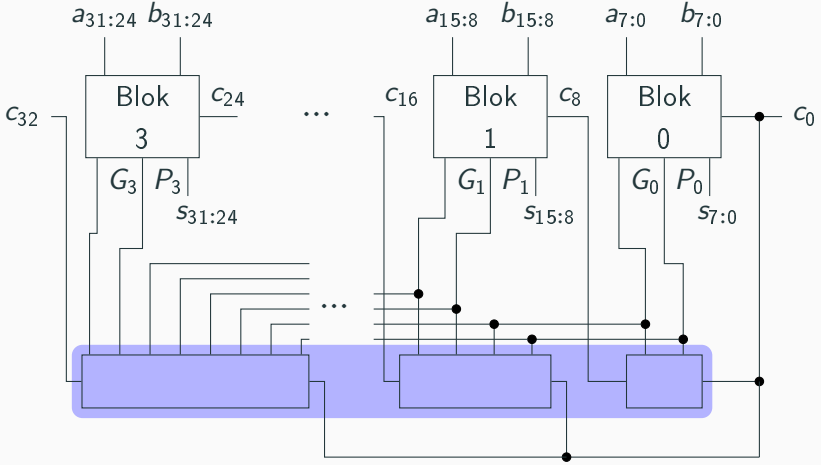
Zamiast łączyć szeregowo – wprowadzić drugi poziom przewidywania przeniesienia:

$$c_n = \sum_{i=0}^{n-1} g_i \prod_{j=i+1}^{n-1} p_j + c_0 \prod_{j=0}^{n-1} p_j = G_0 + P_0 c_0$$

Dla bloków n-bitowych:

$$\begin{aligned} G_k &= \textstyle\sum_{i=kn}^{(k+1)n-1} g_i \prod_{j=i+1}^{(k+1)n-1} p_j \\ P_k &= \textstyle\prod_{j=kn}^{(k+1)n-1} p_j \\ c_{kn} &= \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} G_i \prod_{j=i+1}^{k-1} P_j + c_0 \prod_{j=0}^{k-1} P_j \end{aligned}$$

Sumator hierarchiczny



Układy mnożące

Przesunięcie bitowe

- Przesunięcie *logiczne*: wypełnia luki zerami

$$11001 \gg 2 \quad =$$
$$11001 \ll 2 \quad =$$

- Przesunięcie *arytmetyczne*: wypełnia lukę MSB bitem znaku

$$11001 \ggg 2 \quad =$$
$$11001 \lll 2 \quad =$$

- Przesunięcie *cykliczne* (obrót): wypełnia lukę uciętymi bitami

$$11001 \ \texttt{ROR}\ 2 \quad =$$
$$11001 \ \texttt{ROL}\ 2 \quad =$$

Przesunięcie bitowe

- Przesunięcie *logiczne*: wypełnia luki zerami

$$11001 \gg 2 \quad = \quad 00110$$
$$11001 \ll 2 \quad = \quad 00100$$

- Przesunięcie *arytmetyczne*: wypełnia lukę MSB bitem znaku

$$11001 \ggg 2 \quad =$$
$$11001 \lll 2 \quad =$$

- Przesunięcie *cykliczne* (obrót): wypełnia lukę uciętymi bitami

$$11001 \texttt{ ROR } 2 \quad =$$
$$11001 \texttt{ ROL } 2 \quad =$$

Przesunięcie bitowe

- Przesunięcie *logiczne*: wypełnia luki zerami

$$11001 \gg 2 \;=\; 00110$$
$$11001 \ll 2 \;=\; 00100$$

- Przesunięcie *arytmetyczne*: wypełnia lukę MSB bitem znaku

$$11001 \ggg 2 \;=\; 11110$$
$$11001 \lll 2 \;=\; 00100$$

- Przesunięcie *cykliczne* (obrót): wypełnia lukę uciętymi bitami

$$11001 \;\texttt{ROR}\; 2 \;=$$
$$11001 \;\texttt{ROL}\; 2 \;=$$

Przesunięcie bitowe

- Przesunięcie *logiczne*: wypełnia luki zerami

$$11001 \gg 2 \;=\; 00110$$
$$11001 \ll 2 \;=\; 00100$$

- Przesunięcie *arytmetyczne*: wypełnia lukę MSB bitem znaku

$$11001 \ggg 2 \;=\; 11110$$
$$11001 \lll 2 \;=\; 00100$$

- Przesunięcie *cykliczne* (obrót): wypełnia lukę uciętymi bitami

$$11001 \;\texttt{ROR}\; 2 \;=\; 01110$$
$$11001 \;\texttt{ROL}\; 2 \;=\; 00111$$

Binarne mnożenie pisemne

Przykład: $14 \times 5 = 70$

$$\begin{array}{cccccc} & & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \times & & & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Binarne mnożenie pisemne

Przykład: $14 \times 5 = 70$

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & & \times & & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
+ & 1 & 1 & 1 & 0 & & \\
\hline
\end{array}
$$

Binarne mnożenie pisemne

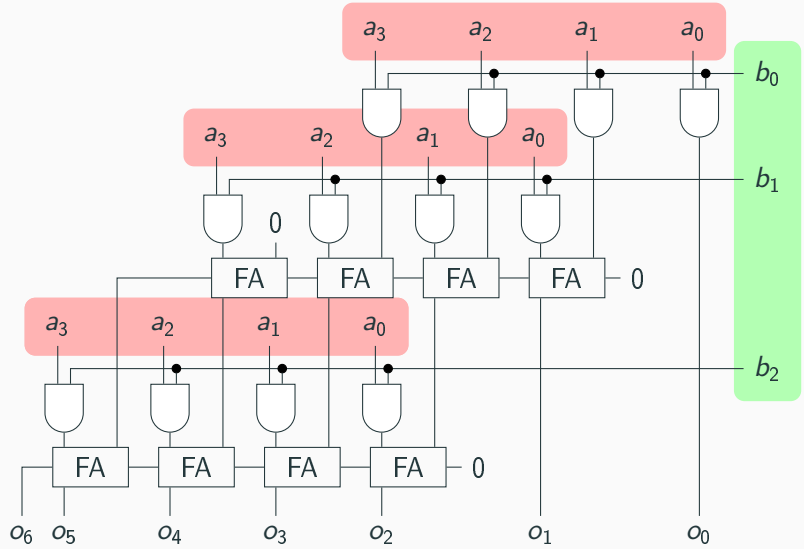
Przykład: $14 \times 5 = 70$

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & \times & & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
+ & & 1 & 1 & 1 & 0 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

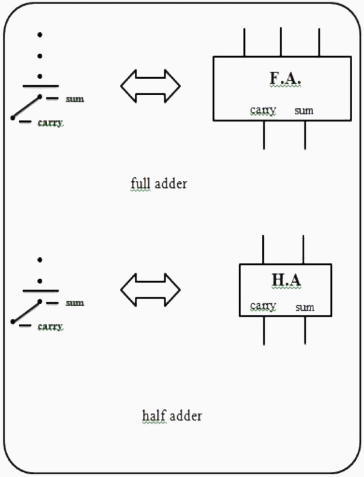
Binarne mnożenie pisemne

			a_3	a_2	a_1	a_0
		$\times$		b_2	b_1	b_0
			$a_3 b_0$	$a_2 b_0$	$a_1 b_0$	$a_0 b_0$
		$a_3 b_1$	$a_2 b_1$	$a_1 b_1$	$a_0 b_1$	
$+$	$a_3 b_2$	$a_2 b_2$	$a_1 b_2$	$a_0 b_2$		
o_6	o_5	o_4	o_3	o_2	o_1	o_0

Układ mnożenia pisemnego

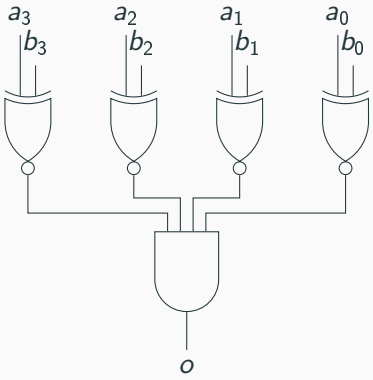


Szybsze mnożenie – drzewo Wallace'a

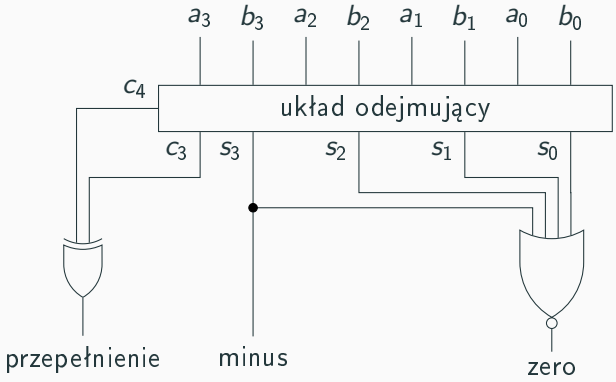


Układy porównujące

Test równości



Test nierówności



Systemy liczbowe

Liczby stałoprzecinkowe

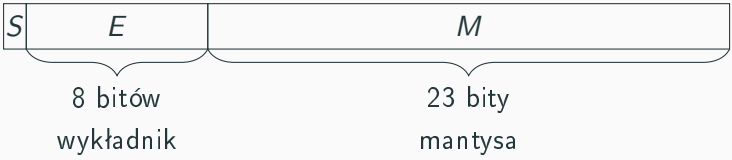
Dzielimy liczbę na części przed i po „kropce”:

$$B = b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_1 b_0 . b_{-1}b_{-2}\ldots b_{-k}$$

- Wartość: $\sum_{i=-k}^{n-1} b_i \times 2^i$
- Dodawanie i odejmowanie jak dla liczb całkowitych
- Mnożenie i dzielenie wymaga przesunięcia przecinka

Liczby zmiennoprzecinkowe

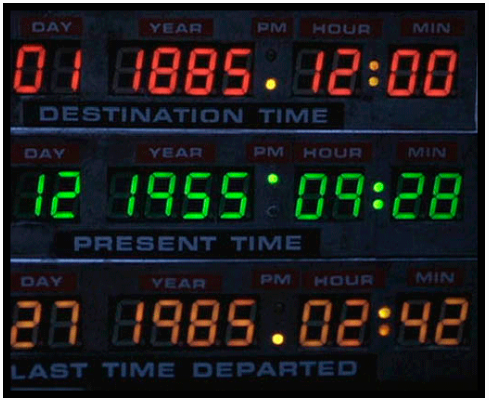
IEEE 754, pojedyncza precyzja (*float*):



- Wartość: $(-1)^S \times 1.M \times 2^{E-127}$
- Jeśli $E = 0$ i $M = 0$, 0 lub -0
- Jeśli $E = 255$ i $M = 0$, ∞ lub $-\infty$
- Jeśli $E = 255$ i $M \neq 0$, NaN (Not a Number)

Liczby BCD – Binary Coded Decimal

- System dziesiętny kodowany binarnie
- Jedna cyfra dziesiętna reprezentowana przez 4 bity
- Wartości 10-15 nie kodują cyfr



cyfra	kod
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

Arytmetyka w SystemVerilogu

Operatory arytmetyczne

Operatory binarne:

- Dodawanie: +
- Odejmowanie: -
- Mnożenie: *
- Dzielenie: /
- Modulo: %
- Potęgowanie: **

Operatory unarne:

- Plus: +
- Negacja: -

- Wynik ma tyle bitów, co **większy** z parametrów
- Wartość `x` na dowolnym z bitów wejścia ustala **wszystkie** bity wyjścia na `x`
- Operacje są domyślnie **bez znaku**
- Brak kontroli nad obwodem implementującym operację

Liczby ze znakiem

- Reprezentacja: kod uzupełnień do dwóch
- W stałych: litera `s`, na przykład: `8'shfe`, `4'sd6`
- Przy deklaracji portu/drutu: słowo kluczowe `signed`
- Rzutowanie: funkcje `$signed` i `$unsigned`
- Aby operacja binarna była ze znakiem, **obydwa parametry** muszą być ze znakiem

Dzielenie ze znakiem

```
module dzielenie(
    output signed [7:0] o,
    input signed [7:0] a,
    input signed [7:0] b
);
    assign o = a / b;
endmodule
```

Rozszerzanie

- Wartości bez znaku są rozszerzane przez dopisanie zer (*zero extension*)
- Wartości ze znakiem są rozszerzane przez powtórzenie bitu znaku (*sign extension*)

```
module rozszerzanie(
    output signed[15:0] o,
    input signed[7:0] i
);
    assign o = i;
endmodule
```

Operatory porównania

- Test nierówności: <, <=, >, >=
- Test równości: ==, !=
- Mniejszy argument jest **rozszerzany** do rozmiaru większego
- Test nierówności uwzględnia znak, gdy **obydwa** argumenty są ze znakiem
- Wynik jest jednobitowy

```
module porownanie(
    output signed o,
    input signed [7:0] a, b
);
    assign o = a < b;
endmodule
```

Przesunięcia bitowe

- Przesunięcia logiczne: <<, >>
- Przesunięcia arytmetyczne: <<<, >>>
- <<< jest równoważny <<
- >>> uzupełnia bitem znaku liczby ze znakiem, liczby bez znaku uzupełnia zerami

SystemVerilog – różności

Łączenie portów przez nazwy

```
module fulladder(
    output o, co,
    input a, b, c
);
    logic t, c1, c2;
    halfadder ha1(.o(t), .c(c1), .a(a), .b(b));
    halfadder ha2(.o(o), .c(c2), .a(t), .b(c));
    assign co = c1 | c2;
endmodule
```

W SystemVerilogu można napisać `.o` zamiast `.o(o)`

Funkcje – zwracanie wartości

```
module fulladder(
    output o, co,
    input a, b, c
);
    logic t, c1, c2;
    function [1:0] ha(input a, b);
        ha = ({a^b, a&b});
    endfunction
    assign {t, c1} = ha(a, b);
    assign {o, c2} = ha(t, c);
    assign co = c1 | c2;
endmodule
```

Funkcje – parametry wyjściowe

```
module fulladder(
    output o, co,
    input a, b, c
);
    logic t, c1, c2;
    function ha(input a, b, output c);
        ha = a^b;
        c = a&b;
    endfunction
    assign t = ha(a, b, c1);
    assign o = ha(t, c, c2);
    assign co = c1 | c2;
endmodule
```