

## Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 2

16 października 2024 r.

Zajęcia 22 października 2024 r.  
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

- L2.1.** 1 punkt Udowodnij, że dodatnia liczba rzeczywista ma skończone rozwinięcie dwójkowe wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci  $m/2^n$ , gdzie  $m$  i  $n$  są liczbami naturalnymi.
- L2.2.** 2 punkty Udowodnij, że **a)**  $|m - m_t^c| \leq 2^{-t}$ , **b)**  $|m - m_t^r| \leq \frac{1}{2} \cdot 2^{-t}$ .
- L2.3.** **Włącz komputer!** 1 punkt Napisz program (np. w języku **PW0++** 😊) znajdujący wartości dziesiętne, **zapisane jako liczby mieszane**, wszystkich liczb zmiennopozycyjnych, które można przedstawić w postaci
- $$(1) \quad x = \pm(0.1e_{-2}e_{-3}e_{-4}e_{-5})_2 \cdot 2^{\pm c}, \quad e_{-2}, e_{-3}, e_{-4}, e_{-5}, c \in \{0, 1\},$$
- gdzie  $(\dots)_2$  oznacza zapis dwójkowy. Jaki jest najmniejszy przedział  $[A, B]$ , zawierający te liczby? Jak liczby (1) rozkładają się w  $[A, B]$ ? Wykonaj odpowiedni rysunek. Co z niego wynika?
- L2.4.** 1 punkt Przeczytaj tekst dostępny pod adresem <http://www-users.math.umn.edu/~arnold//disasters/patriot.html> mówiący o tym, że niefrasobliwe używanie arytmetyki zmiennopozycyjnej może prowadzić do prawdziwej tragedii (szczegóły patrz raport [GAO/IMTEC-92-26](#)). Streść, własnymi słowami, opisane tam zdarzenie i przedstaw istotę opisanego problemu.
- Jesli znasz inne, podobne przykłady, to przygotuj krótką, ale ciekawą notatkę na ten temat używając systemu  $\text{\LaTeX}$  i prześlij wykładowcy<sup>1</sup> — być może dostaniesz dodatkowe punkty 😊
- L2.5.** 1 punkt Zapoznaj się ze standardem IEEE 754<sup>2</sup> reprezentacji liczb zmiennopozycyjnych. Omów go krótko i podaj główne różnice w stosunku do modelu teoretycznego reprezentacji liczb maszynowych przedstawionego na wykładzie.
- L2.6.** 1 punkt Załóżmy, że  $x, y$  są liczbami maszynowymi. Podaj przykład pokazujący, że przy obliczaniu wartości  $d := \sqrt{x^2 + y^2}$  algorytmem postaci

```
u:=x*x;  
u:=u+y*y;  
d:=sqrt(u)
```

---

<sup>1</sup>[pwo@cs.uni.wroc.pl](mailto:pwo@cs.uni.wroc.pl)

<sup>2</sup>Patrz np. [http://en.wikipedia.org/wiki/IEEE\\_754](http://en.wikipedia.org/wiki/IEEE_754)

może wystąpić zjawisko nadmiaru, mimo tego, że szukana wielkość  $d$  należy do zbioru  $X_{\text{fl}}$ . Następnie zaproponuj **algorytm** wyznaczania  $d$  pozwalający unikać zjawiska nadmiaru, jeśli  $\text{rd}(\sqrt{2} \max(|x|, |y|)) \in X_{\text{fl}}$ . Na koniec podaj skuteczną metodę wyznaczania długości euklidesowej wektora  $v \in \mathbb{R}^n$ .

- L2.7.** **Włącz komputer!** 1 punkt Niech dana będzie funkcja  $f(x) := 8096 \frac{\sqrt{x^{13} + 4} - 2}{x^{14}}$ . Sprawdź, że działając w trybie podwójnej precyzji (`double`) wartość  $\text{fl}(f(0.001)) = 0$ . **Uzasadnij**, że wynik ten nie odpowiada rzeczywistej wartości  $f(0.001)$ . **Wytłumacz** dlaczego tak się dzieje i **zaproponuj** sposób obliczenia wyniku dokładniejszego. **Przeprowadź odpowiednie eksperymenty** numeryczne.

- L2.8.** **Włącz komputer!** 1 punkt Niech dana będzie funkcja  $f(x) := 1518 \frac{2x - \sin 2x}{x^3}$ . Jak wynika z zadania **L1.3**, obliczanie przy pomocy komputera (tryb pojedynczej lub podwójnej precyzji) wartości  $f(10^{-i})$  dla  $i = 11, 12, \dots, 20$  daje niewiarygodne wyniki. **Wytłumacz** dlaczego tak się dzieje i **zaproponuj** sposób obliczenia wyników dokładniejszych. **Przeprowadź odpowiednie eksperymenty** numeryczne.

- L2.9.** **Włącz komputer!** 1 punkt Można wykazać<sup>3</sup>, że przy  $x_1 = 2$  ciąg

$$(2) \quad x_{k+1} = 2^k \sqrt{2 \left( 1 - \sqrt{1 - (x_k/2^k)^2} \right)} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

jest zbieżny do  $\pi$ . Czy podczas obliczania kolejnych wyrazów tego ciągu przy pomocy komputera może wystąpić zjawisko utraty cyfr znaczących? Jeśli tak, to zaproponuj inny sposób wyznaczania wyrazów ciągu (2) pozwalający uniknąć wspomnianego zjawiska. Przeprowadź odpowiednie **testy obliczeniowe**.

(–) *Paweł Woźny*

---

<sup>3</sup>Jeśli potrafisz to zrobić, przygotuj rozwiązanie przy pomocy systemu L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X i dostarcz je prowadzącemu — być może dostaniesz dodatkowe punkty.