Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 11

18 grudnia 2024 r.

Zajęcia 7 stycznia 2025 r.
Zaliczenie listy **od 4 pkt.**

L11.1. 1 punkt Udowodnij, że nie istnieje taki dyskretny iloczyn skalarny postaci

$$\langle f, g \rangle_N := \sum_{k=0}^{N} f(x_k) g(x_k) \qquad (x_0 < x_1 < \ldots < x_N),$$

względem którego wielomiany $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^N$ byłyby ortogonalne.

L11.2. 1 punkt Niech P_k $(0 \le k \le N)$ oznacza k-ty wielomian ortogonalny względem iloczynu skalarnego $\langle \cdot, \cdot \rangle_N$. Ustalmy liczbę naturalną $1 < n \le N$. Znajdź taką największą liczbę naturalną m, że dla dowolnego wielomianu $w \in \Pi_m$ jest $\left\langle w^2 + v, P_n \right\rangle_N = 0$, gdzie $v(x) := 2025(x - 2024)$.

L11.3. 1 punkt Niech $P_0, P_1, \ldots, P_N$ będzie ciagiem wielomianów ortogonalnych względem iloczynu skalarnego $\langle \cdot, \cdot \rangle_N$. Załóżmy, że współczynnik wiodący wielomianu P_k $(0 \le k \le N)$ jest równy 1. Udowodnij podaną na wykładzie zależność rekurencyjną spełnianą przez te wielomiany.

L11.4. 1 punkt Niech $\{P_k\}$ będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych względem iloczynu skalarnego $\langle f, g \rangle_N := \sum_{k=0}^{N} f(x_k) g(x_k)$, gdzie $x_0, x_1, \ldots, x_N$ są parami różnymi punktami. Załóżmy, że współczynnik wiodący wielomianu P_k $(0 \le k \le N)$ jest równy 1. Ustalmy $x \in \mathbb{R}$ oraz liczbę naturalną $n < N$. Ile i jakich operacji arytmetycznych **wystarczy** wykonać, aby obliczyć wartości $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$? Uwzględnij **wszystkie** szczegóły obliczeń.

L11.5. 1 punkt Niech $\{Q_k\}$ będzie ciągiem wielomianów określonych w następujący sposób:

$$\begin{cases} Q_0(x) = 1, \qquad Q_1(x) = x - c_1, \\ Q_k(x) = (x - c_k) Q_{k-1}(x) - d_k Q_{k-2}(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots), \end{cases}$$

gdzie wielkości c_k, d_k są znane dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że następujący *algorytm Clenshawa*:

$$\begin{aligned} & B_{m+2} := B_{m+1} := 0, \\ & B_k := a_k + (x - c_{k+1}) B_{k+1} - d_{k+2} B_{k+2} \qquad (k = m, m-1, \ldots, 0), \\ & \texttt{wynik} := B_0, \end{aligned}$$

oblicza wartość sumy $\sum_{k=0}^{m} a_k Q_k(x)$. Jak wykorzystać powyższy algorytm do obliczenia wartości $Q_m(x)$?

L11.6. 1 punkt Znajdź wielomiany P_0, P_1, P_2 ortogonalne na zbiorze $D_4 := \{-11, -3, 0, 3, 11\}$.

L11.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ O funkcji h wiadomo, że $h(-11) = 8$, $h(-3) = -1$, $h(0) = -2$ $h(3) = -1$, $h(11) = 8$ Wykorzystując ortogonalność wielomianów **skonstruowanych w poprzednim zadaniu**, wyznacz taki wielomian $w_2^* \in \Pi_2$, aby wyrażenie

$$\sum_{x_j \in D_4} [w_2^*(x_j) - h(x_j)]^2$$

przyjmowało najmniejszą możliwą wartość (D_4 ma znaczenia takie, jak w poprzednim zadaniu).

L11.8. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}\boxed{\text{2 punkty}}$ W pliku `punkty.csv`[1] znajduje się zbiór 104 par liczb ze zbioru $\mathcal{X} := \{(t_i, y_i) \; : \; 0 \le i \le 103\}$. Wartości te są odczytami z aparatury mierzącej pewną wielkość fizyczną f zachowującą się – jak mówi teoria – zgodnie ze wzorem

$$f(t) = 6.02(t + 3.2)(t - 0.02)(t + 1.7).$$

Z tym jednak, że aparatura dokonuje pomiarów z błędem wyrażonym rozkładem normalnym o średniej 0 i odchyleniu standardowym ± 0.2, czyli

$$y_i = f(t_i) + N(0, 0.2^2) \qquad (0 \le i \le 103).$$

(a) Narysuj wykres funkcji f i zbiór $\mathcal{X}$.

(b) Wyznacz i narysuj wielomian interpolacyjny dla danych z pliku `punkty.csv`. Co obserwujemy?

(c) Korzystając z **własnej implementacji** (**koniecznie** uwzględnij zadanie **L11.4**; działaj **wyłącznie numerycznie**, a nie symbolicznie) skonstruuj i narysuj wielomiany optymalne w_n^* w sensie aproksymacji średniokwadratowej dla danych ze zbioru $\mathcal{X}$ o stopniach $2 \le n \le 15$. Skomentuj wyniki.

L11.9. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}\boxed{\text{do 6 punktów}}$ Wykorzystaj aproksymację średniokwadratową do opracowania modelu opisującego przebieg pandemii koronawirusa w Polsce. Możesz rozważyć i modelować różne dane i wskaźniki. Na przykład liczbę aktywnych przypadków od wykrycia pierwszego zakażenia (4 marca 2020 r.) czy liczbę zgonów. Zadanie to ma charakter *badawczy* — wiele zależ tu od Ciebie i Twojej pomysłowości.

Testy numeryczne przeprowadź przy pomocy **programów własnego autorstwa**. Jeśli **liczysz na więcej niż 2 punkty** przygotuj przy pomocy systemu LaTeX odpowiednią **notatkę** opisującą m.in. **i)** teorię związaną z problemem; **ii)** zaproponowany przez Ciebie model **iii)** oraz przebieg eksperymentów. Notatkę **dostarcz** swojemu ćwiczeniowcowi (z kopią do wykładowcy).

Wskazówki. **1.** Wiele dobrze opracowanych danych na temat pandemii koronawirusa w Polsce znajdziesz pod tym adresem (autor zbioru danych: Michał Rogalski). **2.** Jeśli zdecydujesz sie modelować liczbę aktywnych przypadków, to warto rozpocząć od próby dopasowania danych do modelu typu $\exp(f(x))$, gdzie f jest odpowiednio dobraną funkcją, np. wielomianem niewysokiego stopnia (porównaj z zadaniem **L10.5**). **3.** Osoby zainteresowane *matematyką koronawrusa* powinny odwiedzić m.in. stronę PTM.

(–) Paweł Woźny

[1] Patrz SKOS.