Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 10

11 grudnia 2024 r.

Zajęcia 17 grudnia 2024 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L10.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech danę będą parami różne punkty $\mathcal{X} := \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ i funkcja p o własności $p(x) > 0$ dla $x \in \mathcal{X}$. Udowodnij, że wzór

$$||f|| := \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k) f(x_k)^2}$$

określa normę na zbiorze dyskretnym $\mathcal{X}$.

L10.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznacz funkcję postaci $y(x) = (x^3 + 1)(2024x - a) - 2025x^2$ najlepiej dopasowaną w sensie aproksymacji średniokwadratowej do danych

x_k	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y_k	y_0	y_1	$\ldots$	y_n

.

L10.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Dla jakiej stałej a wyrażenie

$$\sum_{k=0}^{r} \frac{e^{2x_k^2}}{5 - \cos(2023x^3)} \Big[y_k - a \left(\arctan(2024x_k - 5) + 4\sin(x_k^2) \right) \Big]^2$$

przyjmuje najmniejszą możliwą wartość?

L10.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wiadomo, że napięcie powierzchniowe cieczy S jest funkcją liniową temperatury T:

$$S = aT + b.$$

Dla konkretnej cieczy wykonano pomiary S w pewnych temperaturach, otrzymując następujące wyniki:

T	0	10	20	30	40	80	90	95
S	68.0	67.1	66.4	65.6	64.6	61.8	61.0	60.0

Wyznacz prawdopodobne wartości stałych a i b.

L10.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Punkty (x_k, y_k) $(k = 0, 1, \ldots, r)$ otrzymano jako wyniki pomiarów. Po ich zaznaczeniu na papierze z *siatką półlogarytmiczną*[1] okazało się, że leżą one prawie na linii prostej, co sugeruje, iż $y \approx e^{ax+b}$. Zaproponuj prosty sposób wyznaczenia prawdopodobnych wartości parametrów a i b.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Semi-log_plot

L10.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Pomiary (t_k, C_k) $(0 \le k \le N;\; t_k, C_k > 0)$ pewnej zależnej od czasu wielkości fizycznej C sugerują, że wyraża się ona wzorem

$$C(t) = 5 + \frac{2\cos(1977t) - 3}{A\sin(2t^3 - 1) + Be^{2t^2+5} + 2024t^5}.$$

Stosując aproksymację średniokwadratową, wyznacz prawdopodobne wartości stałych A i B.

L10.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Poziom wody w Morzu Północnym zależy głównie od tzw. *pływu* M_2 o okresie ok. 2π i równaniu

$$H(t) = h_0 + a_1 \sin\frac{2\pi t}{12} + a_2 \cos\frac{2\pi t}{12} \qquad (t \text{ mierzone w godzinach}).$$

Zrobiono następujące pomiary:

t	0	2	4	6	8	10	godz.
$H(t)$	1	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8	m

Wykorzystaj aproksymację średniokwadratową do wyznaczenia prawdopodobnych wartości stałych h_0, a_1, a_2.

L10.8. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech dane będą: $x_0 < x_1 < \ldots < x_N$, $y_k \in \mathbb{R}$ $(0 \le k \le N)$ oraz wielomian $w_n^*(x) := \sum_{k=0}^{n} A_k^* x^k$, gdzie $n < N$. Podaj **jawną postać** układu równań, który muszą spełniać współczynniki $A_0^*, A_1^*, \ldots, A_n^*$, aby zachodziło

$$||f - w_n^*||_2 = \min_{w_n \in \Pi_n} ||f - w_n||_2,$$

gdzie f jest taką funkcją, że $f(x_k) = y_k$ dla $k = 0, 1, \ldots, N$, natomiast

$$||g||_2 := \sqrt{\sum_{k=0}^{N} (g(x_k))^2}.$$

L10.9. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech dane będą parami różne liczby $x_0, x_1, \ldots, x_N$. Niech $y_0, y_1, \ldots, y_N \in \mathbb{R}$. Jakim wzorem wyraża się wielomian $w_N^* \in \Pi_N$, dla którego

$$||f - w_N^*||_2 = \min_{w_N \in \Pi_N} ||f - w_N||_2$$

(f oraz $||\cdot||_2$ mają znaczenie, jak w zadaniu poprzednim)?

(–) Paweł Woźny