https://skos.ii.uni.wroc.pl/course/view.php?id=677

Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 9

4 grudnia 2024 r.

Zajęcia 10 grudnia 2024 r.
Zaliczenie listy **od 4 pkt.**

L9.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wytłumacz na przykładzie, dlaczego – z geometrycznego punktu widzenia – w ogólności operacja dodawania punktów *po współrzędnych* nie jest dobrym pomysłem.

L9.2. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Sprawdź, że wielomiany Bernsteina B_i^n mają następujące własności:

(a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} B_i^n(u) \equiv 1,$

(b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} B_i^n(t) = t,$

(c) $B_i^n(u) = (1-u)B_i^{n-1}(u) + uB_{i-1}^{n-1}(u) \quad (0 \le i \le n),$

(d) $\displaystyle B_i^n(c \cdot u) = \sum_{j=0}^{n} B_i^j(c) \cdot B_j^n(u) \quad (c \in \mathbb{R};\ 0 \le i \le n).$

L9.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykaż, że wykres wielomianu $p \in \Pi_n$ postaci

$$p(t) := \sum_{k=0}^{n} a_k B_k^n(t) \qquad (a_k \in \mathbb{R})$$

dla $t \in [0, 1]$ znajduje się w otoczce wypukłej punktów

$$(0, a_0), (1/n, a_1), (2/n, a_2), \ldots, (1, a_n) \in \mathbb{E}^2.$$

L9.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Udowodnij, że wielomiany $B_0^n, B_1^n, \ldots, B_n^n$ tworzą bazę przestrzeni Π_n.

L9.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Udowodnij *algorytm de Casteljau* wyznaczania punktu na krzywej Béziera. Jaka jest jego interpretacja geometryczna?

L9.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech dana będzie krzywa Béziera P_n stopnia n o punktach kontrolnych $W_0, W_1, \ldots, W_n \in \mathbb{E}^2$. W języku `PWO++` procedura `BezierValue(`$[W_0, W_1, \ldots, W_n], t$`)` wyznacza punkt $P_n(t) \in \mathbb{E}^2$. Niestety, procedura ta ma **pewne ograniczenie**, mianowicie: **musi być** $0 \le t \le \frac{1}{2}$. Czy można użyć procedury `BezierValue` do obliczenia wartości $P_n(t)$ dla $\frac{1}{2} < t \le 1$? Odpowiedź uzasadnij.

Wymierną krzywą Béziera R_n stopnia $n \in \mathbb{N}$ definiujemy wzorem

$$R_n(t) := \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i W_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)} \qquad (0 \le t \le 1), \tag{1}$$

gdzie $W_0, W_1, \ldots, W_n \in \mathbb{E}^2$ są danymi *punktami kontrolnymi*, a $w_0, w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}_+$ — odpowiadającymi im *wagami*.

L9.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykaż, że dla każdego $t \in [0,1]$ $R_n(t)$ jest punktem na płaszczyźnie będącym kombinacją barycentryczną punktów kontrolnych $W_0, W_1, \ldots, W_n \in \mathbb{E}^2$ (patrz (1)).

L9.8. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}\boxed{\text{1 punkt}}$ Używając komputera, narysuj wykres wymiernej krzywej Béziera dla punktów kontrolnych

$$(39.5, 10.5),\ (30, 20),\ (6, 6),\ (13, -12),\ (63, -12.5),\ (18.5, 17.5),\ (48, 63),$$
$$(7, 25.5),\ (48.5, 49.5),\ (9, 19.5),\ (48.5, 35.5),\ (59, 32.5),\ (56, 20.5)$$

i odpowiadającego im układu wag $1, 2, 3, 2.5, 6, 1.5, 5, 1, 2, 1, 3, 5, 1$. Co ona przedstawia? Zmieniając wartości wag, postaraj się ustalić eksperymentalnie jakie mają one znaczenie dla kształtu wymiernej krzywej Béziera.

(–) Paweł Woźny

Konkurs II $\Rightarrow$ Patrz SKOS