Università degli Studi di Milano - Bicocca
Scuola di Scienze
Dipartimento di Informatica, Sistemistica e Comunicazione
Corso di laurea in Informatica

Reti neurali: dall'algoritmo di backpropagation alle reti profonde

Relatore: Prof. Alberto Dennunzio

Co-relatore: Dott. Luca Manzoni

Relazione della prova finale di:
Alessandro Sassi
Matricola 807001

Anno Accademico 2017-2018

Indice

Capitolo 1

Introduzione

L'apprendimento automatico (o *Machine Learning*) è una branca dell'informatica basata sull'idea di pemettere ai computer di imparare da esempi e include tecniche, dalla semplice ricerca locale alle *support vector machines*. Le reti neurali sono una tecnica di *machine learning* ma non sono l'unica esistente anche se al momento stanno avendo ampio successo. In questa relazione vedremo come sono nate, da cosa hanno tratto ispirazione e avremo una rapida scorsa su alcune delle tipologie più popolari. Analizzeremo più nello specifico come avviene l'apprendimento da parte delle reti e come siano state migliorate nel corso del tempo. Infine prenderemo in analisi vantaggi e svantaggi dei principali framework che le implementano.

1.1 L'ispirazione biologica

Il cervello umano è composto da circa 86 miliardi di neuroni e un numero totale di collegamenti fra loro di 10^{14}. Nella figura 1.2 attorno al nucleo di colore verde si estende il corpo cellulare delle cellule neurali, dette *soma*, e i canali di input ed output che la circondano la collegano a circa altri 10000 neuroni. Ogni neurone riceve degli stimoli elettrochimici dai neuroni circostanti attraverso i proprio dendriti. Se la somma degli input elettrici è sufficientemente elevata il neurone trasmette a sua volta un segnale elettrochimico lungo l'assone, che viene diffuso a tutti quei neuroni i cui dendriti sono connessi alle terminazione del neurone in oggetto. Per quel che vedremo in seguito è importante sottolineare come il neurone attivi il segnale in uscita solo se la totalità dei segnali in ingresso raggiunge un certo livello, a quel punto il neurone propaga il proprio impulso, senza sfumature di attivazione, o il segnale in uscita viene propagato o non viene propagato, non esistono segnali di potenza variabile da distribuire verso i neuroni connessi. Il nostro intero cervello è quindi composto interamente da questa fitta rete di cellule, i neuroni, che comunicano fra loro attraverso segnali elettrochimici. È

sorprendente vedere come la struttura alla base molto semplice, costituita da una cellula che a seconda della somma dei segnali in ingresso si attiva, o meno, comunicando con altre cellule attraverso segnali in uscita, riesca nel suo complesso reticolo di interazioni a svolgere funzioni complicate come quelle del cervello nella sua totalità. Lo studio del cervello e la sua comprensione ha potuto ispirare i modelli scientifici e matematici che danno vita a quelle che sono dette *reti neurali artificiali (in inglese Artificial Neural Networks, ANN).*

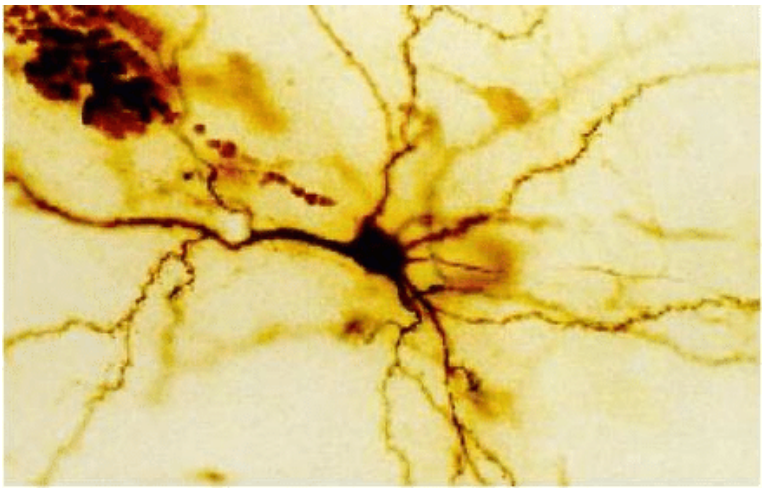


Figura 1.1: Un immagine di un neurone ottenuta al microscopio da John Anderson, Institute for Neuroinformatics, Zurigo, Svizzera.

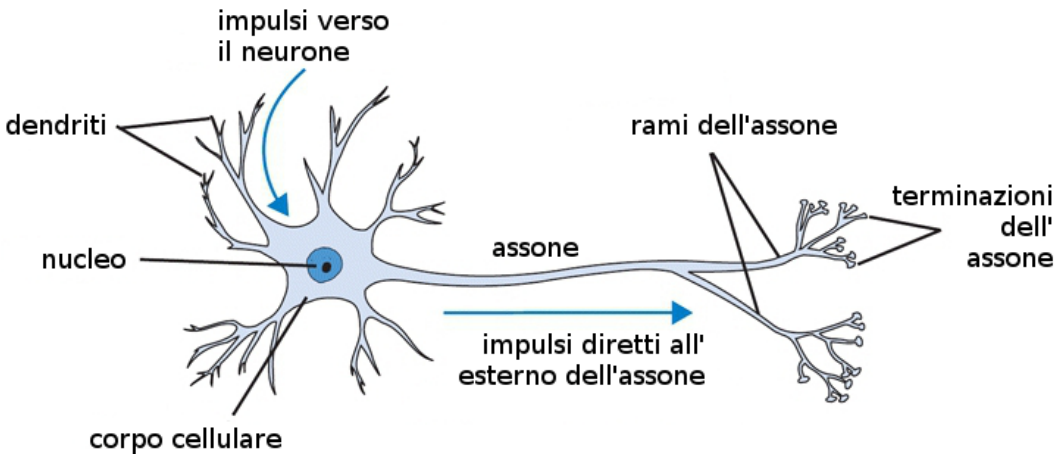


Figura 1.2: Un modello di neurone biologico

La storia delle reti neurali

Le prime forme di apprendimento autonomo si svilupparono inizialmente come il tentativo di due scienziati di comprendere meglio il funzionamento dei nuroni nel cervello. Era il 1943 e il neurofisiologo Warrent McCulloch e il matematico Walter Pitts ipotizzarono, per via della natura discreta dei neuroni che sono o accesi o spenti, di poter descrivere gli eventi neurali attraverso la logica proposizionale e quindi di poterli implementare artificialmente con dei circuiti elettrici [21]. Nel 1949 Donald Hebb scrisse *L'organizzazione del Comportamento* in cui affermava di come i percorsi neurologici tendessero a rinforzarsi e a diventare più solidi mano mano che questi venivano allenati e utilizzati [14]. Un lavoro che troverà conferme in studi successivi e documentati nel saggio di Nicholas Carr del 2010, in cui si fa riferimento alla plasticità del nostro cervello e alla capacità dei nostri neuroni di rinforzare i loro collegamenti man mano che vengono "allenati", similmente a un fiume, come riporta Carr stesso: *"L'acqua che scorre solca un canale che si fa sempre più ampio e profondo; e quando l'acqua vi scorre di nuovo, segue con più facilità il percorso già tracciato in precedenza"* [9]. Nel frattempo i calcolatori diventavano più potenti e sul finire degli anni '50 Bernard Widrow e Marcian Hoff della Stanford University svilupparono "ADALINE" and "MADALINE" [37]. La prima era in grado di riconoscere dei pattern binari nel linee telefoniche e predire i successivi bit in ingresso; la seconda fu la prima rete neurale ad essere applicata in un problema del mondo reale, ovvero era in grado, grazie a dei filtri adattivi, di eliminare gli echi nel chiamate al telefono. Questo dispositivo, per quanto datato e primitivo, funziona così bene da avere ancora oggi una sua validità commerciale. Nel corso degli anni, nonostante i primi buoni risultati delle reti neurali, l'architettura di von Neumann si impose sulla scena dello sviluppo dei calcolatori, nonostante von Neumann stesso suggerisse di apprezzare l'approccio dell'imitazione delle funzionali neurali [3]. Il lavoro di Minsky e Papert, due professori del MIT, mostrò i limiti dell'apprendimento del perceptrone e delle reti neurali a singolo strato, portando i più ad abbandonare questo ramo della ricerca [22]. Gli iniziali successi condussero ad esagerare potenziale ed aspettative nei confronti delle reti neurali, generando in un primo momento clamore e diffidenza, paura anche rispetto a quallo che avrebbe potuto costituirsi come rapporto uomo-macchina e in seguito in delusione verso le aspettative non ripagate. Nel 1972 furono sviluppate indipendentemente da Kohonen e Anderson delle reti molto simili che si basavano su una memoria associativa [17]; del 1975 è invece la prima rete multistrato non supervisionata.

L'interesse verso le reti neurali artificiali si rinnovò nel 1982 quando John Hopfield della Caltech (USA) presentò un paper all'Accademia Nazionale delle Scienze [15]. In questo documento presentava l'opportunità di rendere le macchine più utili ed efficienti usando reti bidirezionali rompendo con la tradizionale idea di reti in cui i sengali si

propagassero in un'unica direzione. Nello stesso anno altri due ricercatori: Reilly e Cooper usarono reti "ibiride" che applicavano differenti strategie di risoluzione per ognuno dei diversi strati della loro rete [26]. Ancora nel 1982 una spinta ai finanziamenti in questo settore arrivò da una conferenza congiunta tra studiosi statunitensi e giapponesi sul tema. Vedendo i nipponici in vantaggio sullo sviluppo di queste tecnologie gli americani decisero di aumentare le risorse a disposizione della ricerca.

Nel 1986 arriviamo ad una svolta che diventa centrale nel corso di questa relazione, ovvero, lo sviluppo dell'idea del backpropagation error. Tre gruppi indipendenti di sviluppatori, tra i quali compariva David Rumelhart, un ex professore di Stanford del dipartimento di psicologia, arrivarono sempre indipendentemente all'idea di distribuire gli errori prodotti dalla computazione della rete su tutta la rete stessa in modo da riprogrammarne i parametri e farla apprendere dai propri errori [27]. Quelle che prima abbiamo chiamato reti "ibiride" avevano solo due layer mentre queste nuove reti a retropropagazione dell'errore presentavano molti livelli e, dato lo stato dell'arte degli hardware del tempo, erano ritenute molto lente; e così hanno proseguito ad essere, tanto che negli anni 2000, le computazioni potevano richiedere settimane intere. Così è stato finché i recenti sviluppi degli ultimi anni hanno messo a disposizione delle reti hardware performanti e notevoli quantità di dati da cui le reti possano trarre informazioni ed imparare [3].

1.2 I diversi tipi rete neurale

Al giorno d'oggi le reti neurali sono tante e diverse tra loro; in questa sezione ne vedremo alcune delle principali tipologie. Qui verranno presentati brevemente solo i modelli principali, per un overview più esaustivo si veda [36]. Le reti neurali biologiche hanno ispirato le reti neurali artificiali che vengono utilizzate per approssimare delle funzioni che non sono conosciute a priori [39] e questo costituisce, semplicisticamente, un ribaltamento del classico paradigma con cui usiamo i computer: la programmazione infatti usa funzioni impostate dal programmatore per computare dei dati in output mentre le reti neurali cercano di creare una funzione a partire da dati forniti. Le reti feedforward furono le prime reti ad essere pensate e sono anche le più semplici. Sono costituite da diversi strati (*layers*), che possono essere di input per i dati di apprendimento, nascosti o di output. Il perceptrone può essere visto come modello di un neurone biologico e può approssimare nella sua semplicità dei circuiti logici. Gli strati delle feed-forward sono tutti collegati fra loro e il flusso dei dati viaggia in una sola direzione, senza mai formare cicli, dallo strato di input, attraverso gli strati nascosti fino allo strato di output. Questa rete viene definita profonda all'aumentare degli *hidden layers* che si nascondono fra input ed output e prendono il nome di *deep feedforward neural networks*. Il numero di livelli nascosti oltre

il quale una rete si definisce profonda varia a seconda del contesto: da più di uno ad oltre 10.

(a) *un perceptrone* (b) *una FF* (c) *una DFF*

Esistono poi anche le *radial basis network* (RBF) che altro non sono che reti feed-forward (e che possiamo schematizzare proprio come la FF in figura sopra) ma con una funzione di attivazione radiale di base. Non tutte le reti prendono il nome dalla propria funzione di attivazione ma questa sembrava avere particolari speranze nel 1988, quando uscì il documento che la presentava poiché la funzione che stava alla sua base era in grado di interpolare in spazi di molte dimensioni [8].

Un altro caso speciale o un evoluzione delle FF sono le *reti convoluzionali profonde* (*deep convolutional network , DCN*) il cui utilizzo primario è il processing delle immagini e in alcuni casi anche degli input audio [19]. Si ispirano a quelle che è il funzionamento del sistema visivo degli uomini. Le reti convoluzionali sono in grado di riconoscere soggetti nelle immagini sapendo quindi fare una classificazione in un insieme di immagini che gli vengono sottoposte.

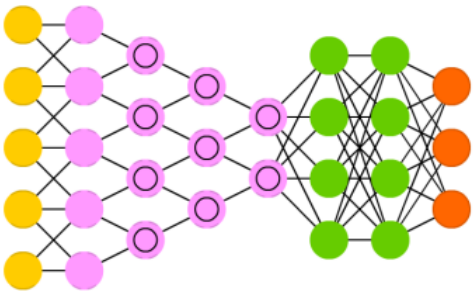


Figura 1.3: Una DCN

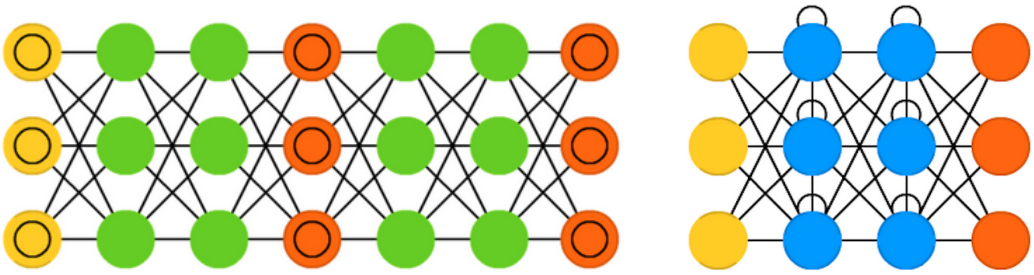
Le DCN scansionano le immagini partendo da piccoli blocchi di pixel vicini tra loro e individuano le caratteristiche delle immagini porzione dell'immagine per porzione, fino a classificare l'immagine nella sua totalità. Diversamente delle tradizionali feed-forward i layer di mezzo non sono completamente connessi, piuttosto i nodi vicini sono collegati ad un intorno dei nodi vicini nello strato successivo. Questo vuole ispirarsi al modo in cui il nostro campo visivo funziona e reagisce agli stimoli esterni. Man mano che il segnale fluisce lungo la rete attraversa strati costituiti da sempre meno nodi fino ad arrivare alla terminazione della rete in cui viene "attaccata" una piccola rete FF che consente di processare ulteriormente i dati e fare nuove astrazioni.

Un recente sviluppo, del 2014, delle reti che sembra essere promettente è la combinazione di due reti insieme. Di solito vengono associate tra loro FF e reti convoluzionali e si impostano in modo tale che esse si contrappongano nello svolgere dei compiti. Imma-

giniamo un pittore che dipinge su una tela un gatto, in sua compagnia un giudice verifica la qualità del lavoro confrontandolo che un insieme di fotografie di gatti reali; il pittore si allena a ritrarre sempre più fedelmente i gatti e il giudice viene sfidato nel giudicare via via se il gatto sottopostogli dall'amico sia una fedele riproduzione artistica o una foto reale. Ecco nelle *generative adversarial networks* (*GAN*) una delle due reti fa un lavoro di generazione mentre l'altra fa un lavoro di giudizio, in pratica una genera contenuti che vengono giudicati dall'altra e si allenano vicendevolmente nel giudicare una l'operato dell'altra, spingendo la seconda a produrre contenuti sempre più difficili da predire mentre la prima viene allenata dalla seconda, che producendo via via lavori sempre più approssimabili a quelli dell'insieme di confronto [13].

Abbiamo parlato fin'ora solamente di reti in cui i segnali partendo da uno strato di input si propagano unidirezionalmente verso la fine della rete. È giusto ricordare brevemente anche quelle reti che invece formano dei cammini ciclici fra i loro nodi.

Le *Recurrent Neural Networks (RNN)* sono delle reti feed-forward in cui il flusso di dati non procede soltanto in una direzione ma i valori di uscita in un livello posson essere usati come input per uno strato ad esso inferiore [11]. Questa interconnessione permette alla rete di conservare le informazioni in una memoria di stato. Questo le rende appetibili in quelle applicazioni dove la sequenza temporale in cui dei dati vengono registrati è importante: ad esempio l'analisi predittiva dei prezzi di borsa, la previsione della prossima parola inserita in un editor di testo o il riconoscimento vocale [29].



(a) *una GAN* (b) *una RNN*

Capitolo 2

L'algoritmo di Backpropagation

2.1 L'idea dell'apprendimento

Cosa significa apprendere? Una domanda non così scontata per un azione che a diversi livelli compiamo per tutta la nostra vita. Ci troviamo ad imparare memorizzando concetti, dati, stimoli sensoriali dai cinque sensi e rielaboriamo il tutto nel nostro cervello producendo idee nuove che derivano dagli elementi di partenza conservati nella nostra memoria.

Un esempio banale è il contatto con un oggetto, da una singola esperienza generalizzeremo l'idea che gli oggetti analoghi a quello con cui abbiamo avuto a che fare procurino le medesime sensazioni. Ma cosa accade se l'esperienza è più complessa? Ad esempio potremmo toccare un ferro da stiro bollente e farci l'idea che quell'oggetto dalla data forma del ferro sia intrinsecamente caldo, ma toccandolo in un momento in cui è spento non ci accadrebbe nulla, anzi percepiremmo il freddo della piastra metallica. La moltitudine di esperienze per contesti affini può fornirci un'idea più chiara del perché di determinati avvenimenti. Avvicinandoci ad un ferro da stiro collegato alla corrente elettrica con la spina avremmo un ulteriore elemento di ragionamento in base al quale fare nuove ipotesi sullo stato dell'oggetto: conoscendo come funzionano gli elettrodomestici potremmo pensare che se il ferro è attaccato alla corrente potrebbe essere acceso e quindi caldo, potremmo pensare che sia rimasto attaccato alla corrente perché nessuno si è preoccupato di staccarlo e che quindi, passato del tempo, sia ormai freddo e possa essere riposto senza bruciarsi. Tutto lineare e chiaro, sono intuizioni semplici per una persona adulta che ha vissuto una simile scena tante volte.
Come cambiano le cose se proviamo ad immedesimarci in un piccolo bambino? Sarà probabilmente la prima volta che vedremo questo oggetto cuneiforme e non avremo esperienze pregresse per deliberare quale tipo di interazione sia più intelligente avere con esso. Un bambino di un anno infatti non può sapere a cosa serve quell'oggetto, non può sapere che appartiene ad una classe degli oggetti della vita che può trovarsi nel duplice stato

di acceso/spento, non può sapere che questi oggetti hanno un filo che li collega al muro e non può sapere che da quel filo passa l'energia necessaria a renderlo funzionante. Le esperienze ci insegnano a comprendere, inferire idee a partire dalla somma di altre. Il bimbo crescendo imparerà a capire che il ferro lo utilizza la mamma in determinate situazioni, imparerà a capire che solo una parte dell'oggetto può bruciare e capirà che dopo diverso tempo che la mamma ha terminato di adoperarlo non brucerà più. Ma questa conoscenza da cosa sarà data? Sarà data con la serie di evidenze avute dal bambino nel toccare il ferro: ci saranno state volte in cui, vispo di curiosità, lo avrà avvicinato per vederlo meglio e sfiorandolo si sarà bruciato; altre volte la mamma, certa della sua esperienza gli avrà mostrato l'oggetto per farglielo conoscere e avvicinandolo non si sarà fatto male. Nella rete intricata di esperienze, sensazioni e fatti tangibili il cervello del bimbo imparerà a dare maggior peso ad alcuni elementi cognitivi piuttosto che ad altri realizzando dentro di lui una consapevolezza che si alimenta ed arricchisce nel tempo. Il bimbo imparerà a capire che lo stato caldo/freddo del ferro dipenderà in larga parte dalla sua posizione nello spazio: vedendolo infatti riposto sullo scaffale dello sgabuzzino saprà che con probabilità non è stato usato di recente e che quindi non deve bruciare; mentre darà poco peso, sempre nel determinare lo stato dell'oggetto, alla sua disposizione nel tempo: poco importerà che sia mattina o sera, poiché non c'è un preciso momento della giornata in cui la mamma stira. Potrebbe averlo toccato una mattina ed essersi scottato così come potrebbe averlo toccato la sera successiva ed essersi scottato nuovamente... allora capirà che il bruciare del ferro non è legato al momento della giornata.

A seguito di questa discussione informale possiamo approcciarci alla spiegazione di come agisca l'algoritmo di backpropagation, l'algoritmo che aiuta le reti neurali a dare il giusto peso alle caratteristiche degli elementi che le reti analizzano.

2.2 La matematica dietro a backpropagation

Il nostro algoritmo viene applicato in modo da modificare ad ogni iterazione i parametri della rete, apprendendo via via la loro configurazione migliore per approssimare la funzione che risolve il nostro problema. Nell'apprendimento supervisionato delle reti feed-forward di cui ci occupiamo facciamo apprendere la rete fornendole un paragone con i risultati aspettati del training set. Nel training set sono quindi presenti i vettori di soluzione per ogni problema. Indichiamo con $y(x) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ il vettore di n dimensioni di output che ci aspetteremmo in uscita dalla nostra rete; $y(x)$ è la funzione che la nostra rete vogliamo approssimi, la forma di questa funzione non è data e non si conosce a priori, conosciamo soltanto i suoi valori. BP valuta ad ogni iterazione quanto

lontano dal valore atteso è il risultato della rete, computa quindi una funzione dei costi

$$C(w,b) \equiv \frac{1}{2n} \sum_x \| \, y(x) - \hat{y}(x) \, \|^2 \tag{2.1}$$

che chiamiamo *errore quadratico medio (MSE)*; $\hat{y}(x)$ invece è a sua volta una funzione dei pesi w e dei bias b e rappresenta il vettore output della rete: in questo modo abbiamo quindi una funzione che mette in relazione il risultato atteso con quello effettivo e che diventa tanto più piccola nel suo valore quanto più $\hat{y}(x)$ approssima $y(x)$. Quindi, se l'intento della rete è produrre un output che approssimi al meglio le soluzione del set di apprendimento, e C ne è la misura, dobbiamo cercare di capire per quali valori questa funzione si minimizza, ovvero trovare per quali valori delle sue w e b variabili l'errore è minimo.
Per far questo abbiamo bisogno di un metodo. Potremmo pensare di trattare questa minimizzazione con un approccio analitico ma considerando che le variabili in gioco nelle reti reali possono essere anche miliardi questo non è fattibile. Facciamo allora ricorso ad un algoritmo, che in diversi passi successivi ci aiuta a trovare il punto di minimo che cerchiamo. Questo algoritmo è il *metodo della discesa del gradiente*, spieghiamo in primis cosa è il gradiente e poi come funziona l'algoritmo. Data una funzione di due o più variabili, il suo gradiente in un punto $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ del dominio è il vettore delle sue derivate parziali rispetto a tutte le variabili: $\nabla C \equiv (\frac{\partial C}{\partial x_1}, \frac{\partial C}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial C}{\partial x_n})^T$. Questa è solo una formula matematica e non ci da bene idea di cosa stiamo parlando. Dobbiamo allora rifarci ad uno scenario reale per capire meglio cosa sia il gradiente; la realtà è fatta di tre dimensioni quindi rimaniamo in uno spazio tale per spiegarci meglio: se fossimo in una valle e avessimo una palla perfettamente tonda, il gradiente è il vettore della direzione lungo la quale la funzione cresce maggiormente e, di contrario, $-\nabla C$ è la direzione in cui la palla si muoverebbe se, appoggiata a terra, venisse lasciata libera di rotolare lungo il pendio della valle. In una tale ipotesi le variabili libere non sono n come abbiamo generalizzato, ma sono soltanto due v_1, v_2 (usiamo le v e non le x per separare la spiegazione dalla sua metafora). Possiamo vederne una rappresentazione di quanto detto nella figura 2.1.

Se ora abbiamo un'idea più chiara di cosa sia il vettore gradiente spieghiamo in cosa consiste il metodo della discesa che lo utilizza. Ipotizzando la stessa metafora della valle vogliamo sfruttare il fatto che la discesa della pallina si arresterà nella parte più bassa dalla depressione. Il nostro metodo computa una discesa simile ma diversa nel fatto che il percorso che farà la nostra pallina non approssimerà la discesa *fisica* che avverrebbe nella realtà. Per cui il nostro metodo non si rifà alle equazioni della dinamica di Newton, è un pò diverso. Per ora sappiamo che, dato un punto sulla superficie di una valle, la direzione opposta a quella del gradiente è quella in cui la palla si muoverebbe se fosse

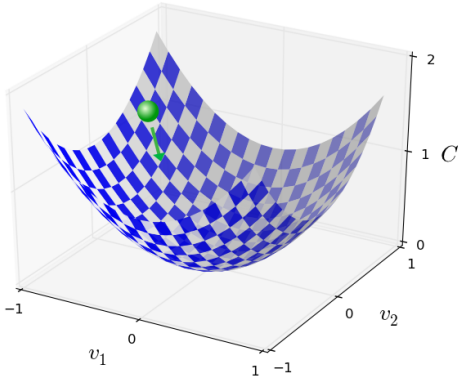


Figura 2.1: Il grafico della funzione $C(v_1, v_2)$ con la pallina verde che rappresenta il punto in analisi e l'opposto del vettore gradiente spiccato in esso, ad indicare in quale direzione muoverebbe nella discesa

libera di scendere; nel nostro metodo seguiamo un percorso di discesa fatto di tanti piccoli passi che prevedono, partendo da un punto, di muoversi verso $-\nabla C$ per un piccolo tratto. Mossi nel nuovo punto, che chiamiamo P_2, ricalcoleremmo il gradiente $\nabla C(P_2)$ e faremmo un altro piccolo passo in direzione $-\nabla C(P_2)$. Si capisce che questo metodo va iterato a lungo per scendere lungo la valle fino ad arrivare nel suo punto più basso. Tra un iterazione k e la successiva $k+1$, ci saremo spostati dal punto P_k al punto P_{k+1} per cui $\Delta P = P_{k+1} - P_k = -\eta \nabla C$ dove η è un piccolo parametro positivo detto il *learning rate* che fornisce un indicazione di quanto grande sia la distanza percorsa fra un iterazione e l'altra nell'algoritmo; va da se che se il η cresce l'algoritmo procede più speditamente, ma questo potrebbe portare anche a degli errori. Ritorniamo dal parallelo con la valle, la palla e le variabili v alla nostra funzione dei costi $C(w, b)$ e vediamo come il metodo del gradiente funzioni con più di due variabili, anche se di questa situazione non potremo avere una visualizzazione. Cosi come ci spostiamo da un punto all'altro nella valle, aggiornando le due variabili della nostra posizione, ora aggiorniamo le variabili della funzione dei costi, ovvero w i pesi e b i bias. Le regola per aggiornare queste componenti sarà:

$$w_k \to w'_k = w_k - \eta \frac{\partial C}{\partial w_k} \tag{2.2}$$

$$b_l \to b'_l = b_l - \eta \frac{\partial C}{\partial b_l} \tag{2.3}$$

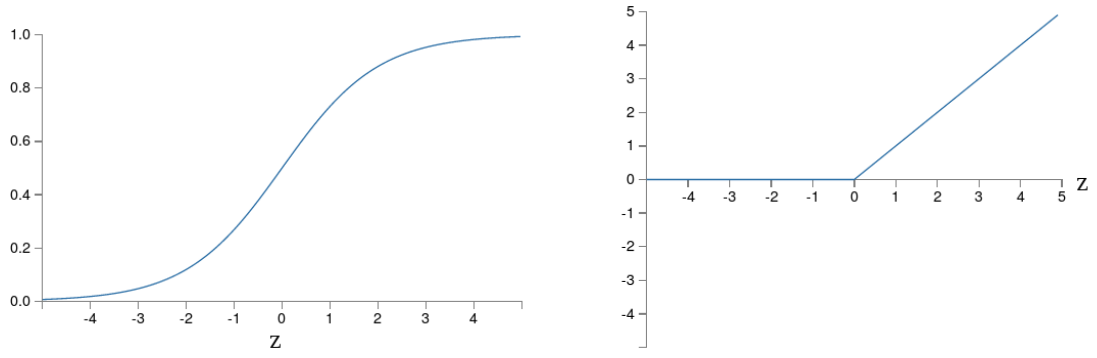
dove k e l variano, rispettivamente, tra tutti i pesi e i bias della rete. Ripetendo questa regola arriveremo a trovare il minimo della funzione.
Ora che abbiamo spiegato come funziona il gradiente dobbiamo andare più a fondo a spiegare come interagiscono fra loro i neuroni collegati, come si attivano e come propagano

il proprio segnale. Ogni neurone j^{th} è collegato (stiamo sempre parlando del caso delle reti feed forward) ai neuroni dello strato precedente dall'arco di peso w^l_{jk} (cioè dal neurone k in $l-1$ al neurone j in l) e la sua attivazione viene determinata da una computazione fatta sui segnali in ingresso, più precisamente è la somma delle attivazioni dei neuroni dello stato precedente a lui collegati, moltiplicati per il peso del loro arco verso j^{th} più una quantità b_j specifica del neurone j nello strato l, questa somma prende il nome di z^l_j.

$$a^l_j = \sigma\left(z^l_j\right) = \sigma\left(\sum_k w^l_{jk} a^{l-1}_k + b^l_j\right) \tag{2.4}$$

Spieghiamo brevemente cosa è σ. Ogni neurone riceve input dagli strati precedenti e internamente deve decidere se propagare a sua volta lo stimolo o meno. In biologia abbiamo già anticipato che i neuroni, una volta eccitati, non hanno una via di mezzo nel rispondere al segnale, per cui, o propagano a loro volta lo stimolo nella rete "accendendosi" oppure rimangono in quiete senza reagire. Nelle reti neurali la funzione di attivazione di solito non emette un segnale binario, piuttosto propaga vari livelli d'intensità del segnale. σ rappresenta quella classe di funzioni sigmoidali che ben si adattano a rappresentare l'attivazione dei neuroni e che hanno lo scopo di normalizzare gli output nel range da 0 a 1. Quindi, se un neurone reale può veder rappresentata la propria funzione di attivazione come una funzione a gradino una sigmoide è la versione addolcita della funzione gradino, come mostriamo qui sotto con il plot della funzione sigmoide:

$$\sigma(z) = \frac{1}{1+e^{-z}} \tag{2.5}$$



(a) *Grafico della funzione sigmoide* $\sigma(z)$ (b) *Grafico ReLu*

Figura 2.2: Confronto tra due funzioni di attivazione

La sigmoide non è l'unica funzione adatta per le reti neurali. Si usa anche *tanh* oppure, un altra funzione è la $ReLu$(Rectified Linear Unit) $f(z) = max(0, z)$ che venne resa popolare quando la *AlexNet* vinse la sfida *ImageNet*nel 2012, un concorso che premia i migliori algoritmi per l'*object detection* e la classificazione delle immagini. La *AlexNet* usava $ReLu$ come funzione di attivazione e da quel momento in poi altri la adottarono

ai propri scopi rendendosi conto, in via empirica, che funzionava meglio di quanto usato fino a quel momento [18]. Non è perfettamente chiaro cosa la renda migliore ma si pensa che la convergenza del metodo del gradiente venga velocizzata da *ReLu* grazie alla sua semplicità e alla sua capacità di non saturarsi [16].

L'output di un neurone è denotato da a_j^l per ogni neurone j nello strato l, possiamo definire un vettore contenente questi output per tutti gli n neuroni di quello strato $a^l = \left[a_1^l, a_2^l, \cdots, a_j^l, \cdots, a_n^l\right]$. Vediamo ora come di strato in strato i neuroni si attivano fra loro e per questo adottiamo una notazione matriciale di quanto abbiamo appena visto: denotiamo allora una matrice w^l dei pesi per ogni layer della rete, dove le sue entry sono w_{kj}^l i vari pesi che legano i neuroni fra lo strato $l-1$ ed l e denotiamo, allo stesso modo di a^l anche il vettore dei *bias* b^l per il livello l e riscriviamo la formula 3 come:

$$a^l = \sigma\left(w^l a^{l-1} + b^l\right) \tag{2.6}$$

La propagazione del calcolo degli output dei singoli livelli procede verso il livello finale, l'*output layer*, e una volta calcolato l'errore nella funzione dei costi, C, questo errore viene propagato in senso opposto fino al layer degli input. Spieghiamo meglio quale è il senso di questo "propagarsi". $C(w, b)$ è stata definita in (1) e viene calcolata sull'output layer a della rete, questo che possiamo indicare per chiarezza come a^{out} per esplicitare a quale livello sia riferito è calcolato a sua volta come indicato nella (5) ed è quindi funzione dei pesi e dei bias del livello che lo precedono: $a^{out}(w^l, b^l, a^l)$ dove l è l'ultimo *hidden layer*, quello prima di *out*; ma compare anche a^l, questo in catena è una funzione di pesi, attivazioni e bias di $l-1$. Vediamo quindi come in verità tutta la funzione dei costi non sia altro che una lunghissima e imponente funzione composta, che richiama i parametri dei livelli sottostanti. Compreso questo possiamo dire che se la C è una funzione composta dei pesi e dei bias di tutti i suoi sottolivelli e quindi della rete in generale; possiamo cercare di capire in che modo questi parametri, lungo la rete, contribuiscano alla definizione di C e in ultima analisi di come contribuiscano alla quantità dell'errore espresso da C e della rete nel suo complesso; in questo senso l'errore viene retropropagato lungo la rete. Per vedere che peso ha complessivamente un peso w_k^l si calcola la sua derivata parziale $\frac{\partial C}{\partial w_k^l}$ ma per poter far questo bisogna procedere livello per livello. Abbiamo detto che C è una funzione composta ed è necessario partire livello di output e andare indietro per calcolare le derivate dei pesi più in profondità applicando la *chain rule* delle funzioni composte $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$.

$$C(a^{out}) = C(a^{out}(w^l, b^l, a^l)) = C(a^{out}(w^l, b^l, a^l(w^{l-1}, b^{l-1}, a^{l-1}))) = \cdots \tag{2.7}$$

La formula sopra dovrebbe rendere l'idea di come si procede a comporre la funzione costi,

innestando via via i pesi e i bias. Per trovare la derivata $\frac{\partial C}{\partial w_k^m}$ di un peso di un neurone nel livello m dovremo quindi calcolare prima di lui tutte le derivate delle funzioni che lo contengono:

$$\frac{\partial C}{\partial w_k^m} = \frac{\partial C}{\partial a^{out}} \cdot \frac{\partial a^{out}}{\partial a^{l-1}} \cdot \frac{\partial a^{l-1}}{\partial a^{l-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{\partial a^m}{\partial w_k^m} \tag{2.8}$$

In questo senso la procedura avanza verso la base della rete, calcolando tutte le derivate parziali rispetto ai w e ai b della rete (per ogni neurone di ogni layer); il che corrisponde ad avere calcolato il gradiente della funzione dei costi:

$$\nabla C = \left[\frac{\partial C}{\partial w_1^1}, \frac{\partial C}{\partial w_2^1}, \cdots, \frac{\partial C}{\partial w_n^1}, \frac{\partial C}{\partial b_1^2}, \cdots \frac{\partial C}{\partial b_2^2}, \cdots \right] \tag{2.9}$$

Una volta ottenuto il gradiente di C possiamo procedere all'aggiornamento dei pesi, l'apprendimento della rete si basa infatti su questo, sulla modifica dei suoi parametri interni in modo che dal loro cambiamento scaturisca un comportamento complessivamente diverso (migliore) nei confronti degli input che le vengono passati e con diversi training riesca a darci i risultati che speriamo. La regola di aggiornamento di un generico peso è questa:

$$w_j^{l+} = w_j^l + \eta \frac{\partial C}{\partial w_j^l} \tag{2.10}$$

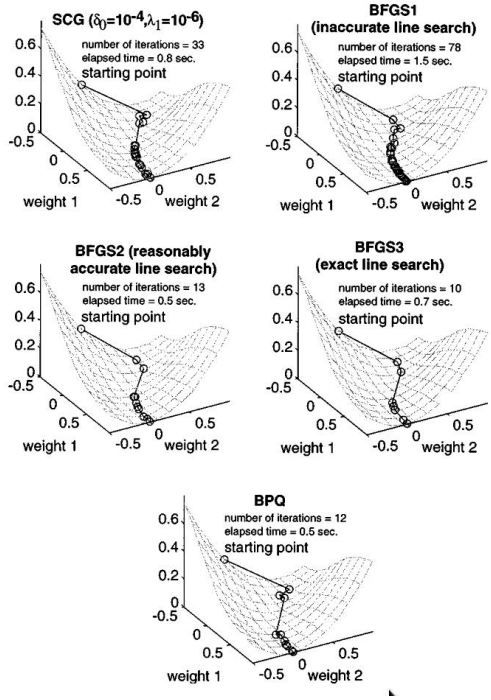
che altro non è che la procedura della discesa del gradiente spiegata in precedenza.

2.3 I miglioramenti

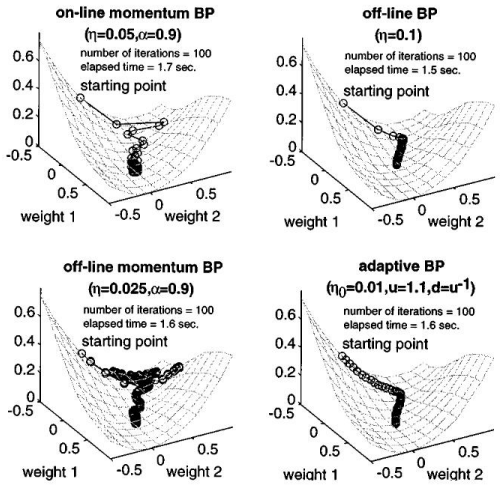
Migliorare backpropagation attraverso diversi approcci sulla discesa del gradiente

L'algoritmo di backpropagation si basa sull'ottimizzazione di una funzione d'errore tra l'output della rete e il risultato desiderato. La funzione in questione ha come variabili i pesi associati ai collegamenti tra i vari neuroni della rete e i loro bias. Nella sua versione più semplice la funzione cerca il proprio minimo seguendo la direzione del proprio gradiente. Venendo alle variazioni su questo metodo; furono proposti il *metodo dei minimi quadrati* (in inglese OLS: Ordinary Least Squares) e il *metodo detto di quasi-newton* (che è una variazione sul canonico metodo di Newton) che risultano essere però troppo lenti da computare, in special modo nelle reti molto ampie e ad entrare nello specifico il problema per i metodi di quasi-newton è che lo spazio in memoria richiesto per salvare una approssimazione dell'inversa dell'Hessiana cresce quadraticamente rispetto al numero dei pesi su cui viene effettuato il calcolo [28]. Altre tecniche come *BFGS* o il *gradiente*

coniugato possono essere in alcuni casi delle valide alternative. Più genericamente il problema del migliorare l'ottimizzazione dell'errore trova soluzione quando si migliora la capacità di computare la più utile lunghezza di passo possibile (step-lenght) ovvero quanto distante una iterazione deve essere da quella che la precede avendo seguito la direzione del gradiente. Esistono per questo algoritmi del secondo ordine e del primo ordine, che possiamo vedere a confronto nelle due immagini in Figura 2.3.



(a) *Traiettorie algoritmi del primo ordine*



(b) *Traiettorie algoritmi del secondo ordine*

Figura 2.3: Confronto tra tipologie diverse di algoritmi

Si può vedere come l'andamento della traiettoria conduca al minimo in numero inferiori di passi utilizzando algoritmi del secondo ordine.

Per velocizzare BP è stato anche introdotto il momento, che ha lo scopo di ridurre le oscillazioni della traiettoria dovute ad una non proficua scelta della lunghezza del passo per le iterazioni e fu proprio nel 1988 che Robert A. Jacobs, propose quattro euristiche per il miglioramento del tasso di convergenza del backpropagation [23].

Nel 1988 la ricerca aveva già riconosciuto la bontà della procedura BP e si investigavano quegli algoritmi di ricerca dell'ottimo per la funzione di minimo che computassero la discesa del gradiente soltanto localmente (ovvero rimanendo in intorni molto vicini al punto di iterazione). Questo cosidetto *locality constraint* veniva motivato dal fatto che costituiva una buona metafora tecnologica della controparte biologica, le reti neurali, a cui si ispirava e in secondo luogo dall'ipotesi che questi algoritmi *locali* fossero più adatti ad essere processati in parallelo. Fra le quattro euristiche di Jacobs vi era l'adattamento

dei tassi d'apprendimento nel tempo e si spiega che ogni peso della rete dovrebbe avere il proprio tasso d'apprendimento specifico. Le implementazioni di queste euristiche venivano individuate nel *momento* e nella regola d'apprendimento *delta-bar-delta*.

Low complexity NNs

Alcuni altri indirizzi di miglioramento dell'efficacia delle reti sfruttano il BP per modellare delle reti meno complesse (*low complexity*) che possano essere utili a scopi meno sofisticati. Ad esempio, nelle reti convuluzionali, dove il processo di riconoscimento degli oggetti ha luogo, gli algoritmi vengono eseguiti su GPU che dissipano grandi quantità di energia e un tale scenario non è adatto a scopi dove il livello di dettaglio nel riconoscere gli oggetti non è così elevato. Applicazioni più popolari e frequenti come il riconoscimento facciale nei dispositivi mobili deve per forza di cose girare in locale sui processori embedded che animano gli smartphone, per questo i ricercatori sfruttano varianti del BP per creare reti convuluzionali a bassa complessità. Queste modellano problemi che richiedono meno risorse e possono quindi essere eseguite più velocemente anche sui dispositivi meno prestanti [35].

Le performance con CPU e GPU

Nella sezione riguardante la matematica di backpropagation abbiamo citato come i calcoli per le attivazioni dei neuroni non vengano eseguiti uno alla volta ma, livello per livello, vengano raggruppati in vettori e matrici non solo per snellire la notazione usata ma anche perché a tutti gli effetti è quello che accade realmente. La quantità di dati coinvolta in una rete neurale può essere davvero notevole, con lo strato di input che può avere fino a migliaia di nodi, per questo le matrici che vengono coinvolte nei calcoli possono diventare molto grandi ed occupare notevoli quantità di spazio in memoria.

Tale utilizzo di memoria costituisce un limite difficile per la computazione da parte delle CPU, anche quelle multi-core. Le CPU ottimizzano la velocità di calcolo sui singoli processi seriali e sono un'alternativa ad un altro tipo di architettura per processori: le GPU. A detta di Nvidia le GPU furono inventate nel 1999, ma le loro origini risalgono a molti anni prima e datare un nascita per questa tecnologia è quasi impossibile visto che deriva dall'evoluzione di soluzioni tecnologiche affini per scopi che si sono succedute nel corso degli anni. Nel 2007 gli sviluppatori poterono sfruttare le potenzialità di calcolo parallelo anche per applicazioni più generiche grazie alla piattaforma di programmazione *CUDA*. Nel 2009 un documento accademico di Stanford illustrava quanto più velocemente

si potesse addestrare delle reti neurali utilizzando metodi con GPU, fino a 70 volte più veloci della controparte con CPU [25]. Tale approccio consentì l'uso di dataset più ricchi e un aumento dei parametri a disposizione per settare la rete.

Ma perchè le GPU? Tanta più memoria si necessita per sviluppare i calcoli di queste matrici tanto più l'utilizzo delle GPU migliora le prestazione perché consiste di numerose unità di calcolo semplici che possono agire in parallelo.
Un esperimento presentato da alcuni studiosi nel 2016 comparava due reti neurali nello svolgere il medesimo compito, una implementata su GPU l'altra su CPU. L'esperimento consiste nel riconoscere cifre numeriche scritte a mano, presentate in un dataset chiamato *MNIST*, come quelle in Figura 2.6. Presentiamo i risultati delle velocità di computazione nella tabella e nel grafico riportato sotto, dai quali possiamo evidenziare come aver allenato la rete neurale attraverso la GPU aumenti di un fattore molto grande le performance rispetto alla controparte in CPU e che la GPU sia da preferire quando nella rete sono presenti un grande numero di attributi, altrimenti il costo dell'inizializzazione della scheda non verrebbe giustificato dall'incremento delle velocità [7].

Population	Epochs	CPU time in seconds	GPU time in seconds
10	100	5.8687	0.283682
20	1000	117.362351	2.674261
30	1000	177.518307	2.646332
40	1000	236.354287	2.677458
50	1000	295.3512	2.675260
60	10000	3552.425203	26.610284

Figura 2.4: Riassunto dei risultati dell'esperimento [7]

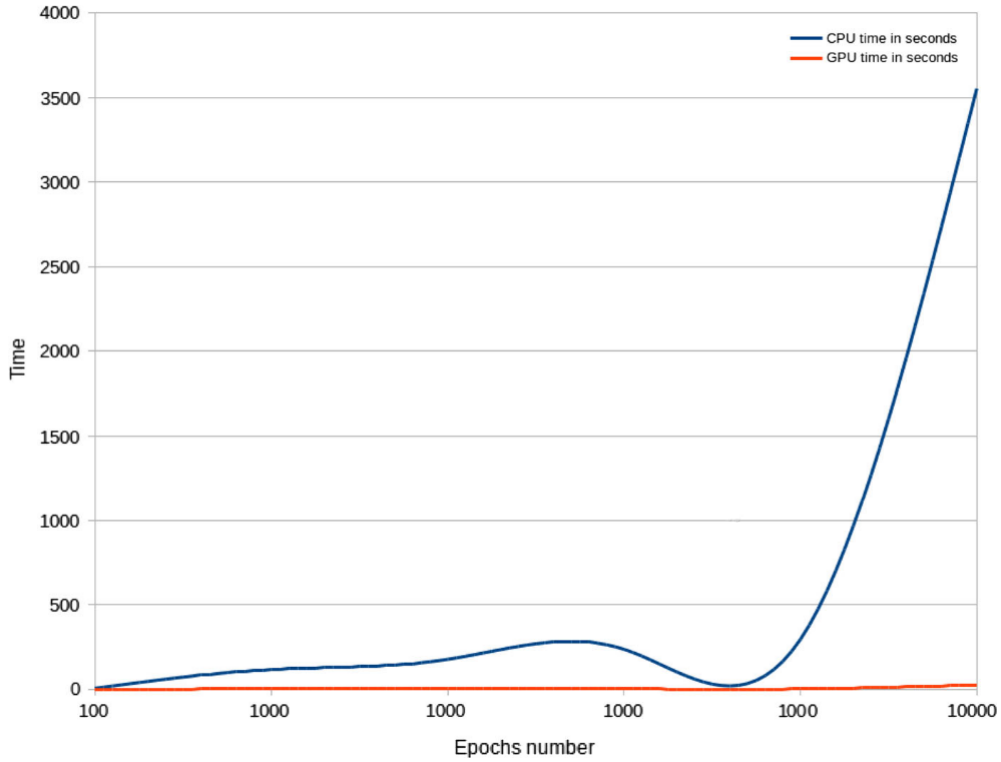


Figura 2.5: Il grafico che mostra le differenze tra le velocità di esecuzione tra CPU e GPU [7]

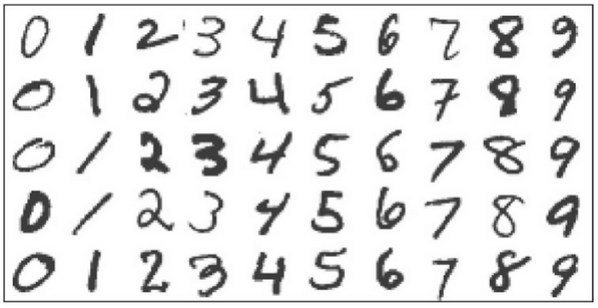


Figura 2.6: Un esempio di cifre da riconoscere da parte della reti nell'esperimento

Capitolo 3

I framework per le reti neurali

3.1 Una panoramica

In questo ultimo capitolo passiamo in rassegna i framework esistenti per l'implementazione di reti neurali. Grazie a loro lo sviluppo di modelli e il processo di acquisizione dati per l'allenamento dei dati diventa molto più facile e accessibile rispetto ad un tempo.

(a) *Keras*

(b) *TensorFlow*

(c) *PyTorch*

(d) *Caffe 2*

(e) *theano*

(f) *mxnet*

Figura 3.1: I loghi dei principali framework per le reti neurali

3.2 TensorFlow

TensorFlow fu creato dal team Brain Google come successore di un precedente sistema per il machine learning conosciuto come *DistBelief* con l'intento di ristrutturare il codice rendendola una libreria più robusta [38]. Venne distribuita come progetto open-source nel 2015 e si presenta come un framework di basso livello [20] per linguaggi come Python, Javascript, Swift e Java per Android e le librerie a cui fa a sua volta ricorso per l'implementazione delle parti più critiche sono scritte in C++. TensorFlow, vista una sua certa difficoltà d'uso e apprendimento, offre compatibilità con le API d'alto livello di *Keras*; esse consentono grazie alla loro modularità e facilità di utilizzo di eseguire velocemente la prototipizzazione di modelli e la sperimentazione delle reti neurali su piattaforme diverse e renderle velocemente funzionanti per il testing [6].

TensorFlow rappresenta le computazioni come dei grafi i quali sono composti da due tipi di oggetti: le operazioni, ovvero i nodi del grafo e i tensori, dal cui utilizzo prende il nome, che sarebbero gli archi del grafo. I tensori sono matrici multidimensionali su cui vengono fatti i calcoli e che contengono i parametri della rete.

TensorFlow gira sia su CPU che GPU, grazie alle librerie di programmazione per schede grafiche *CUDA* e *OpenCL*. Per la sua applicazione specifica è stato progettato da Google un processore dedicato chiamato *Tensor Processing Unit TPU*. L'interesse verso un processore dedicato non tanto all'allenamento della rete quanto al suo utlizzo rappresenta un vantaggio per l'applicazione dell'intelligenza artificiale in quegli ambiti dove si predilige una velocità di esecuzione; un esempio può essere un chip dedicato in un dispositivo cellulare, che rende più efficiente determinati task, come il riconoscimento vocale o facciale per quelle applicazioni che ne fanno uso. Google stessa dichiarò che il suo utilizzo nei datacenter aveva ottimizzato le performance di un ordine di grandezza, riducendo il dispendio energetico derivato dal loro utilizzo [12].

TensorFlow presenta anche diverse problematiche come la sua difficoltà di utilizzo: ecco perchè Keras si appoggia al di sopra di esso, come dicevamo in precedenza.

3.3 PyTorch

Questo framework uscì nel 2016 e si ispirò fortemente ad altri framework come *Chainer* e *Torch*. Pytorch si indirizzava le problematiche di adozione che colpivano Torch e a questo proposito si decise di utilizzare come linguaggio d'utilizzo per gli utenti Python. Il suo approccio è un pò diverso da quello di Tensorflow in quanto l'esecuzione delle operazioni nel grafico computazionale avvengono immediatamente mentre in TensorFlow il grafico è compilato ed eseguito in un colpo solo e questo rende possibile un debugging

più dinamico. Infatti costituisce un rallentamento l'immaginare un modello e dover fare i conti con gli errori della sua progettazione soltanto a termine di questa, è molto più produttivo correggere gli errori via via che si presentano.

Pytorch è sviluppato e mantenuto dal team per l'intelligenza artificial di Facebook (*FAIR*) e la sua adozione presso gli utenti è stata molto più ampia rispetto a quella del suo predecessore. Viene apprezzato per la familiarità che ricercatori e data scientist avevano già nei confronti di Python mentre a livello commerciale gli vengono preferite alternative in quanto i modelli di PyTorch non sono facilmente portabili su mobile [20].

Negli stessi laboratori di Facebook la strategia è quella di utilizzare PyTorch nella ricerca e Caffe2 per la produzione.

PyTorch offre supporto ai dispositivi CUDA con Python e un frontend C++ [1].

3.4 Caffe2

Arriviamo a quest'altro progetto per le reti neurali sviluppato da Facebook, il più giovane fra quelli che presentiamo. *Caffe2* trae origine da *Caffe*, il quale offriva un ottimo supporto alla produzione di applicazioni che lavorassero bene su larga scala, grazie al suo codice sorgente scritto in C++ [33]. Rispetto al predecessore si evidenzia la modularità e il forte orientamento al mondo mobile, con applicazioni nella visione artificiale e il riconoscimento del linguaggio [10]. Facebook annunciò la pubblicazione open-source di Caffe2 il 18 aprile 2017 con il proposito di rilasciare un framework leggero che fosse portabile su più piattaforme ma che mantenesse la capacità di scalare bene e performare [31].

Caffe2 è principalmente utilizzato in Python ma può anche essere importato in progetti C++ anche se la disponibilità online di documentazioni relative a questo connubio sono piuttosto difficili da trovare [32] e si può anche utilizzare le GPU grazie al supporto CUDA.

3.5 Mxnet

Mxnet è un framework sviluppato dalla *Apache Software Foundation* con l'intento di renderlo molto efficiente, produttivo e flessibile. Può infatti essere usato da diversi linguaggi come Python, C++, R, Julia e Scala per citarne solo alcuni, il che lo rende molto appetibile poichè non richiede di imparare un nuovo linguaggio per il suo utilizzo. Il suo backend è scritto in *C++* e *CUDA* e presenta un'ottima capacità a scalare linearmente e a scaricare il suo workload su molteplici GPU [5]. Inoltre il suo modello di program-

mazione (programming model) è molto vicino a quello di Keras, senza gli svantaggi delle performance in quanto è tutto nativo [24].

La bontà del progetto della Apache è testimoniata anche dalla sua adozione da parte di Amazon Web Services (AWS) come principale framework per il deep-learning che ha inoltre deciso di finanziarne lo sviluppo suo e dell'ecosistema di applicazioni che lo supportano [2].

3.6 Theano

Un altro framework che merita una menzione è Theano, libreria per Python che consente di definire, ottimizzare e valutare espressioni matematiche che coinvolgono strutture di array multidimensione. Theano è stato sviluppato dall'Università di Montreal in Canada e dal 2007 viene utilizzato per far funzionare grandi carichi di lavoro su larga scala. La sua implementazione sfrutta pesantemente una parte del codice di *Numpy*, un'altra libreria per Python ed è in grado di supportare le computazioni anche su GPU [34].

Il 28 settembre 2018 hanno inoltre annunciato l'interruzione del suo sviluppo a causa della concorrenza del mondo industriale [4]. Questo significa che Theano non verrà usato in nuove applicazioni, sebbene possa rimanere presente in applicazioni legacy.

Capitolo 4

Conclusioni

In questa overview sulla tecnologia delle reti neurali abbiamo visto la loro storia e la loro ispirazione, abbiamo visto le librerie software che ci permettono di implementarle e di creare applicazioni utili in moltissimi campi. Il protagonista rimane però l'algoritmo di backpropagation che consente a queste reti di apprendere. Dalla definizione dell'algoritmo di backpropagation alle reti neurali profonde sono passati tre decenni, e le applicazioni attuali fanno uso di sviluppi nel campo dell'hardware che sono stati possibili solo di recente. Negli ultimi anni grazie a questo algoritmo e alle reti neurali abbiamo potuto raggiungere risultati strabilianti, in tutti i campi del sapere, dalla medicina all'ingegneria.

Ora ci chiediamo quali altri sviluppi ci aspettino. Uno dei suoi ideatori è dell'opinione che forse, potremmo aver già ottenuto quanto possibile da questa tecnologia e che oltre a piccoli miglioramenti non potremo andare. Avremmo secondo Hinton, lo scienziato che si è pronunciato sugli sviluppi futuri di questo settore, raggiunto una sorta di plateau per il progresso nell'intelligenza artificiale. A suo modo di vedere, backpropagation, che nacque ispirandosi a come gli animali imparano, attraverso prove ed errori, rappresenterebbe un'intelligenza che mima quella umana, ma soltanto superficialmente; e lo dimostrebbe la facilità con cui possono essere messi in crisi sistemi intelligenti come quelli che abbiamo oggi, basterebbe modificare di poco le richieste del problema a cui lavorano per farli fallire. L'intelligenza umana è lontana dall'essere rappresentata in quella che è la sua flessibilità e velocità nell'apprendere a partire da pochi dati essenziali. Un esempio: una rete richiede di essere allenata con magari 40 milioni di immagini di un certo soggetto per imparare a riconoscerlo mentre un bambino che impara a riconoscere un gelato avrà bisogno di vederlo anche una sola volta per fare la corretta generalizzazione.

Sempre secondo Hinton siamo lontani da una vera intelligenza poiché non è stato ancora compreso a fondo quale sia il vero funzionamento del nostro cervello. Soltanto quando saremo riusciti a creare un ponte fra neuroscienze e i computer potremo dire di avere una reale intelligenza artificiale. Nel frattempo dovremo rimettere in discussione tutto quello che è stato raggiunto fino ad oggi con backpropagation, ripensando l'apprendimento come

non supervisionato.

Per raggiungere risultati significativi dovremo aspettare che le idee rivoluzionarie come quella di Hinton e Rumelhart 30 anni fa maturino nei laboratori di ricerca, in attesa che le giuste condizioni si verifichino e rendano realtà un parallelo con la biologia che fin'ora è rimasto solo in superficie [30].

Bibliografia

[1] End-to-end deep learning platform. https://pytorch.org/features. [Online; visitato il: 14 Marzo 2019].

[2] Apache mxnet in aws. https://aws.amazon.com/it/mxnet/, 1999. [Online; visitato il: 8 Marzo 2019].

[3] History of neural networks. https://cs.stanford.edu/people/eroberts/courses/soco/projects/neural-networks/History/index.html, 2010. [Online; visitato il: 28 Febbraio 2019].

[4] https://groups.google.com/forum/#!topic/theano-users/7Poq8BZutbY, 2017. [Online; visitato il: 18 Marzo 2019].

[5] Top 8 deep learning frameworks. https://www.marutitech.com/top-8-deep-learning-frameworks/, 2018. [Online; visitato il: 15 Marzo 2019].

[6] Keras: The python deep learning library. https://keras.io/, 2019. [Online; visitato il: 18 Marzo 2019].

[7] Ricardo Brito, Simon Fong, Kyungeun Cho, Wei Song, Raymond Wong, Sabah Mohammed, and Jinan Fiaidhi. Gpu-enabled back-propagation artificial neural network for digit recognition in parallel. *The Journal of Supercomputing*, 72(10):3868–3886, 2016.

[8] David S Broomhead and David Lowe. Radial basis functions, multi-variable functional interpolation and adaptive networks. Technical report, Royal Signals and Radar Establishment Malvern (United Kingdom), 1988.

[9] N.G. Carr. *The Shallows: What the Internet is Doing to Our Brains*. W.W. Norton, 2010.

[10] Wikipedia contributors. Caffe (software). https://en.wikipedia.org/wiki/Caffe_(software), 2019. [Online; visitato il: 1 Marzo 2019].

[11] Jeffrey L Elman. Finding structure in time. *Cognitive science*, 14(2):179–211, 1990.

[12] Jim Gao. Machine learning applications for data center optimization. 2014.

[13] Ian Goodfellow, Jean Pouget-Abadie, Mehdi Mirza, Bing Xu, David Warde-Farley, Sherjil Ozair, Aaron Courville, and Yoshua Bengio. Generative adversarial nets. In *Advances in neural information processing systems*, pages 2672–2680, 2014.

[14] Donald O Hebb. *The organization of behavior*. Wiley, 1961.

[15] John J Hopfield. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the national academy of sciences*, 79(8):2554–2558, 1982.

[16] Andrej Karpathy. Biological motivation and connections. `http://cs231n.github.io/neural-networks-1/#bio`. [Online; visitato il: 15 Marzo 2019].

[17] Teuvo Kohonen. Correlation matrix memories. *IEEE transactions on computers*, 100(4):353–359, 1972.

[18] Alex Krizhevsky, Ilya Sutskever, and Geoffrey E Hinton. Imagenet classification with deep convolutional neural networks. In *Advances in neural information processing systems*, pages 1097–1105, 2012.

[19] Yann LeCun, Léon Bottou, Yoshua Bengio, Patrick Haffner, et al. Gradient-based learning applied to document recognition. *Proceedings of the IEEE*, 86(11):2278–2324, 1998.

[20] Ben Lorica. Why ai and machine learning researchers are beginning to embrace pytorch. `https://www.oreilly.com/ideas/why-ai-and-machine-learning-researchers-are-beginning-to-embrace-pytorch`, 2017. [Online; visitato il: 13 Marzo 2019].

[21] Warren S McCulloch and Walter Pitts. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *The bulletin of mathematical biophysics*, 5(4):115–133, 1943.

[22] Marvin Minsky and Seymour A Papert. *Perceptrons: An introduction to computational geometry*. MIT press, 2017.

[23] Michael A. Nielsen. *Neural Networks and Deep Learning*. Determination Press, 2015.

[24] Jean-Louis Queguiner. An answer to the question 'how is mxnet still surviving as a framework in front of tensorflow?'. `https://www.quora.com/How-is-MxNET-still-surviving-as-a-framework-in-front-of-Tensorflow`, 2018. [Online; visitato il: 15 Marzo 2019].

[25] Rajat Raina, Anand Madhavan, and Andrew Y Ng. Large-scale deep unsupervised learning using graphics processors. In *Proceedings of the 26th annual international conference on machine learning*, pages 873–880. ACM, 2009.

[26] Douglas L Reilly, Leon N Cooper, and Charles Elbaum. A neural model for category learning. *Biological cybernetics*, 45(1):35–41, 1982.

[27] David E Rumelhart, Geoffrey E Hinton, and Ronald J Williams. Learning internal representations by error propagation. Technical report, California Univ San Diego La Jolla Inst for Cognitive Science, 1985.

[28] Kazumi Saito and Ryohei Nakano. Partial bfgs update and efficient step-length calculation for three-layer neural networks. *Neural Computation*, 9(1):123–141, 1997.

[29] Amit Shekhar. Understanding the recurrent neural network. `https://medium.com/mindorks/understanding-the-recurrent-neural-network-44d593f112a2`, 2018. [Online; visitato il: 18 Marzo 2019].

[30] James Somers. Is ai riding a one-trick pony? `https://www.technologyreview.com/s/608911/is-ai-riding-a-one-trick-pony/`, 2017. [Online; visitato il: 20 Marzo 2019].

[31] The Facebook team. Caffe2 open source brings cross platform machine learning tools to developers. `https://caffe2.ai/blog/2017/04/18/caffe2-open-source-announcement.html`, 2017. [Online; visitato il: 14 Marzo 2019].

[32] The Facebook team. Caffe2 with c++. `https://caffe2.ai/docs/cplusplus_tutorial.html`, 2017. [Online; visitato il: 14 Marzo 2019].

[33] The Facebook team. What is caffe2? `https://caffe2.ai/docs/caffe-migration.html`, 2017. [Online; visitato il: 14 Marzo 2019].

[34] Theano Development Team. Theano: A Python framework for fast computation of mathematical expressions. *arXiv e-prints*, abs/1605.02688, May 2016.

[35] Subarna Tripathi, Gokce Dane, Byeongkeun Kang, Vasudev Bhaskaran, and Truong Nguyen. Lcdet: Low-complexity fully-convolutional neural networks for object detection in embedded systems. 05 2017.

[36] Fjodor van Veen. The neural network zoo. `https://cs.stanford.edu/people/eroberts/courses/soco/projects/neural-networks/History/index.html`, 2016. [Online; visitato il: 17 Marzo 2019].

[37] Bernard Widrow and Marcian E Hoff. Adaptive switching circuits. Technical report, STANFORD UNIV CA STANFORD ELECTRONICS LABS, 1960.

[38] Wikipedia. Tensorflow — wikipedia, l'enciclopedia libera. `http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=TensorFlow&oldid=101735405`, 2018. [Online; in data 14-marzo-2019].

[39] Wikipedia contributors. Types of artificial neural networks — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Types_of_artificial_neural_networks&oldid=885109562`, 2019. [Online; visitato il: 1 Marzo 2019].