Метод опорных векторов (Support Vector Machine, SVM)

Количественная аналитика — осень 2015

Основная идея

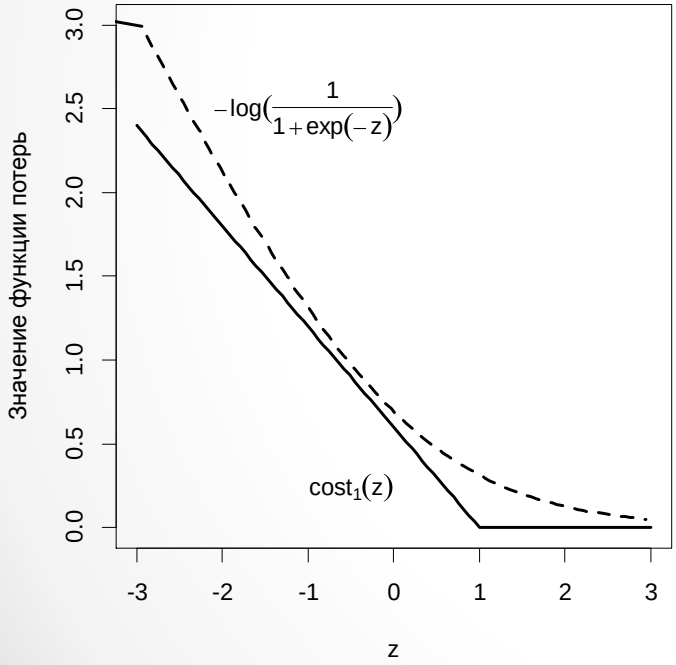
Основная идея состоит в нелинейной модификации регрессоров и переводе их в пространство более высокой размерности, что позволяет строить сложные и эффективные разделяющие границы

Модификация функции потерь

Ошибка на одном наблюдении в логистической регрессии:

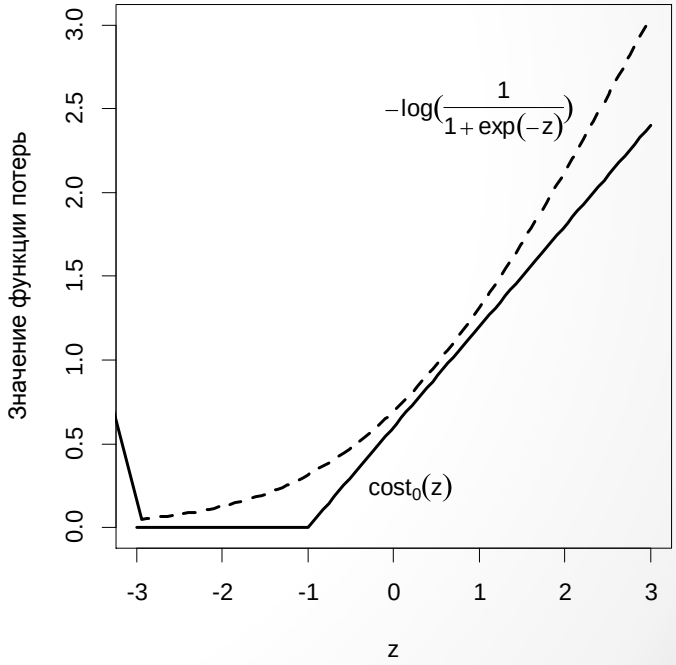
$$-y^{(i)} \log \frac{1}{1+e^{-\vec{\theta}^T \vec{x}^{(i)}}} - \left(1 - y^{(i)}\right) \log \left(1 - \frac{1}{1+e^{-\vec{\theta}^T \vec{x}^{(i)}}}\right)$$

Когда $y^{(i)} = 1$, мы хотим $\vec{\theta}^T \vec{x}^{(i)} \geq 0$,



но мы можем потребовать $\vec{\theta}^T \vec{x}^{(i)} \geq 1$

Когда $y^{(i)} = 0$, мы хотим $\vec{\theta}^T \vec{x}^{(i)} < 0$,



но мы можем потребовать $\vec{\theta}^T \vec{x}^{(i)} < -1$

Функция потерь SVM

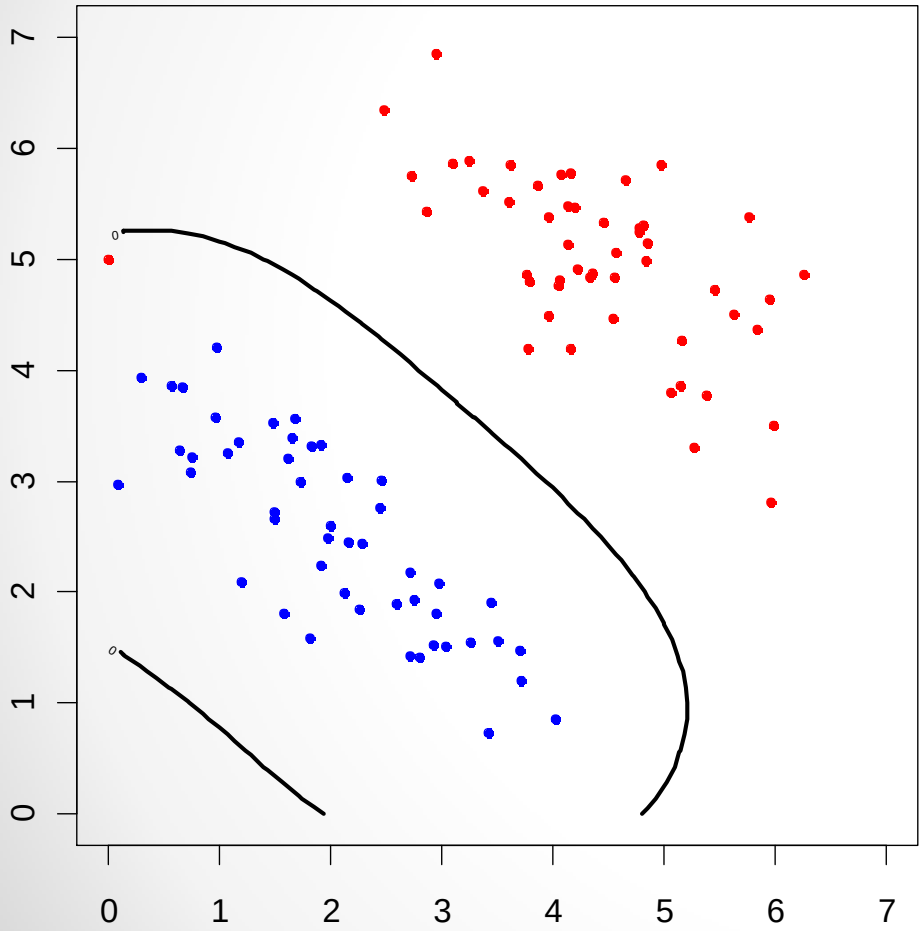
$$J(\vec{\theta}) = C \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(y^{(i)} cost_1\left(\vec{\theta}^T \vec{x}^{(i)}\right) + \left(1 - y^{(i)}\right) cost_0\left(\vec{\theta}^T \vec{x}^{(i)}\right) \right) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \theta_j^2 \to \min_{\vec{\theta}},$$

C — параметр регуляризации, $C \sim \frac{1}{\lambda}$

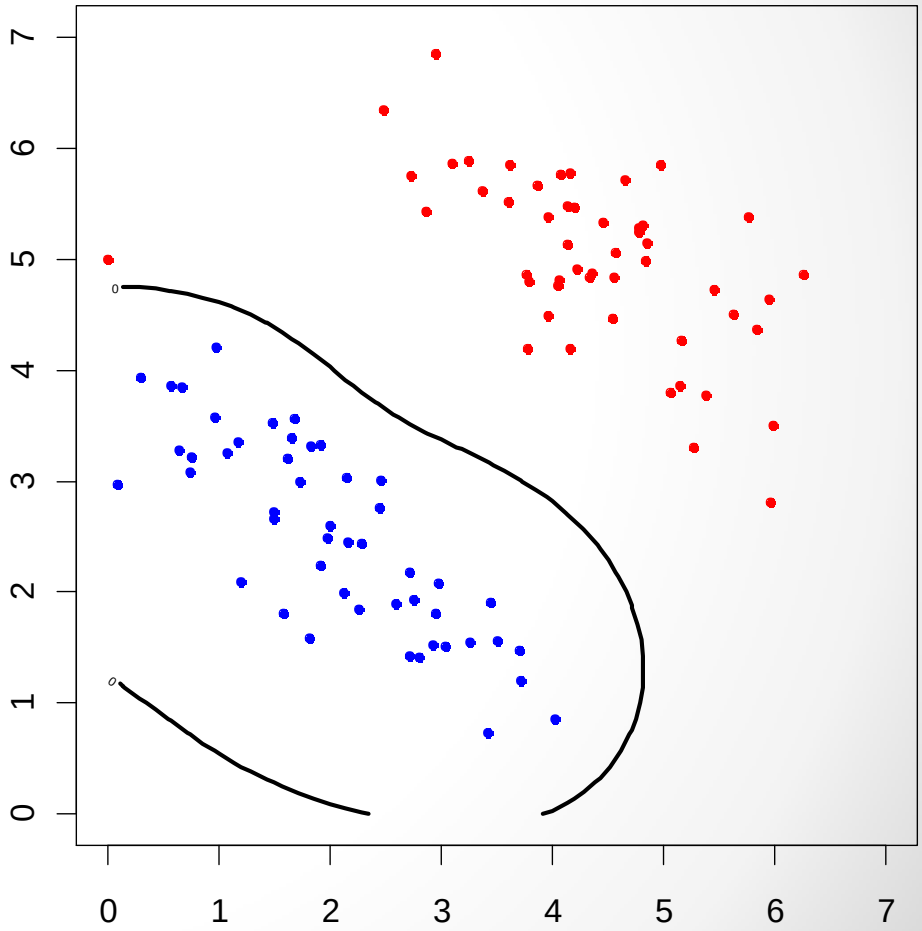
$$h_\theta\left(\vec{x}^{(i)}\right) = \begin{cases} 1, & \vec{\theta}^T \vec{x}^{(i)} \geq 0 \\ 0, & \vec{\theta}^T \vec{x}^{(i)} < 0 \end{cases}$$

Влияние регулязационного параметра на разделительную границу

$C = 1$



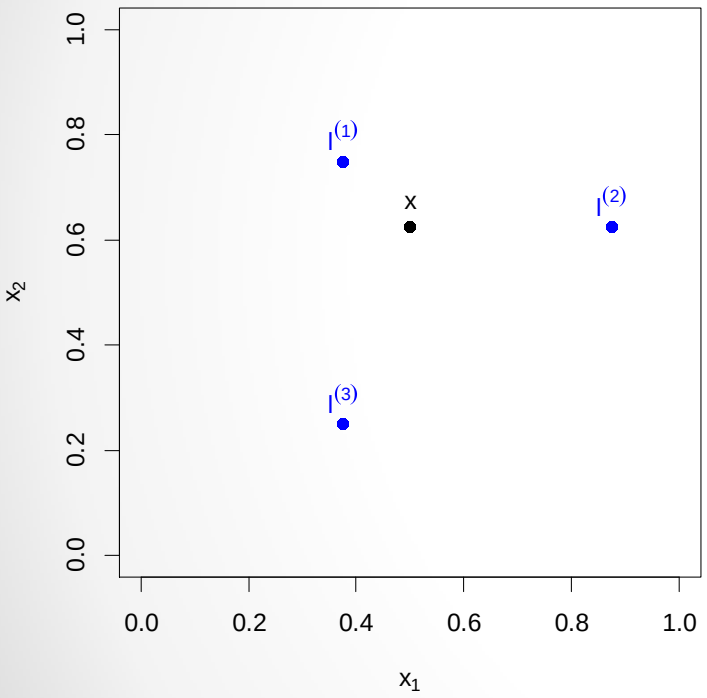
$C = 100$



Модифицирование регрессоров, Kernel SVM

$$f_i = \exp\left(-\frac{\|x - l^{(i)}\|^2}{2\sigma^2}\right) = \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - l_j^{(i)}\right)^2}{2\sigma^2}\right)$$

← ядро Гаусса



$x \approx l^{(i)} \Rightarrow f_i \approx 1$

x далеко от $l^{(i)} \Rightarrow f_i \approx 0$, т.е.

$f_1 \approx 1,\ f_2 \approx f_3 \approx 0$

$h_\theta = 1$, если $\theta_0 + \theta_1 f_1 + \theta_2 f_2 + \theta_3 f_3 \geq 0$

предсказание гипотезы зависит от того, насколько близко наблюдение находится к одним опорным точкам $l^{(i)}$ и насколько далеко от других

В качестве опорных точек обычно берётся обучающая выборка

Функция потерь SVM

$$\vec{x}^{(i)} \to \begin{pmatrix} f_0^{(i)}=1 \\ f_1^{(i)} \\ \dots \\ f_i^{(i)}=1 \\ \dots \\ f_m^{(i)} \end{pmatrix}, \ \vec{f}^{(i)} \in R^{m+1}$$

$$J(\vec{\theta}) = C \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(y^{(i)} cost_1\left(\vec{\theta}^T \vec{f}^{(i)}\right) + \left(1 - y^{(i)}\right) cost_0\left(\vec{\theta}^T \vec{f}^{(i)}\right) \right) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \theta_j^2 \to \min_{\vec{\theta}},$$

$\vec{\theta} \in R^{m+1}$,

$\vec{\theta}^T \vec{f} \geq 0 \Rightarrow h_\theta(\vec{f}) = 1$

Влияние параметров модели на ошибку и вариацию

Большое C → малая ошибка, высокая вариация
Малое C → большая ошибка, малая вариация

Большое σ → большая ошибка, малая вариация
Малое σ → малая ошибка, высокая вариация

Метод Kernel SMV следует применять, когда количество наблюдений m значительно превосходит их исходную размерность n

Метод опорных векторов в R

Пусть **X** — матрица регрессоров, **y** — вектор классов

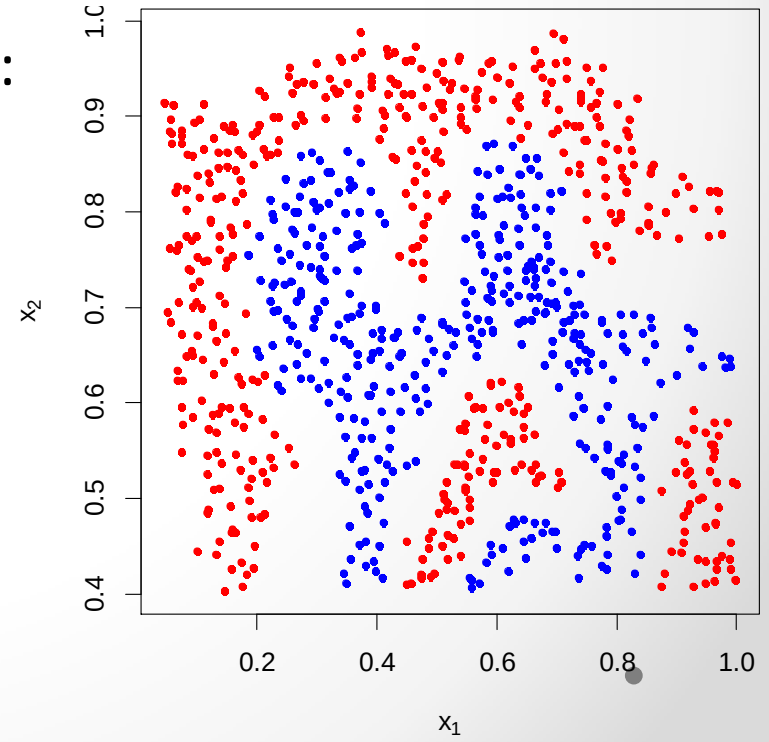
разделение выборки на обучающую и экзаменующую

```
m <- nrow(X)
m.train <- round(0.8*m); m.cv <- m - m.train
train.obs <- sample(1:m,size=m.train,replace=FALSE)
cv.obs <- (1:m)[-train.obs]
X.train <- X[train.obs,]; X.cv <- X[cv.obs,]
y.train <- y[train.obs]; y.cv <- y[cv.obs]
```

сетка экзогенных параметров модели:

C и σ

```
par <- c(0.01,0.05,0.1,0.5,1,5,10,50,
         100,500,1000)
par <- expand.grid(par,par)
# заголовки столбцов
dimnames(par)[[2]] <- c("C","sigma")
```



Моделирование

```
res <- NULL # в неё будут записаны результаты моделирования


library(kernlab)
source("SVM_func.r") # файл с пользовательскими функциями

for (i in 1:nrow(par)) {  # для каждой комбинации экз. параметров
  # подбор параметров θ⃗ на обучающей выборке
  model <- ksvm(X.train, y.train, type="C-svc",
                C = par$C[i], kern = "rbfdot",
                kpar = list(sigma=par$sigma[i]))
  # прогнозная классификация на экзаменующей выборке
  y.pred <- predict(model, newdata = X.cv, type = "response")
  # запись комбинации экзогенных параметров и статистик
  # прогноза, возвращаемых пользовательской функцией fitStats
  res <- rbind(res, c(par$C[i],par$sigma[i],fitStats(y.cv,y.pred)) )
}


dimnames(res)[[2]][1:2] <- c("C","sigma") # заголовки столбцов
```

Статистики прогноза

Для оценки качества бинарного классификационного алгоритма используют следующие показатели:

$$Accuracy = \frac{\#true\ pos. + \#true\ neg.}{m}$$ — точность алгоритма

$$Precision = \frac{\#true\ pos.}{\#true\ pos. + \#false\ pos.}$$ — безошибочность выявления моделируемого признака

$$Recall = \frac{\#true\ pos.}{\#true\ pos. + \#false\ neg.}$$ — способность выявлять моделируемый признак

$$F1.Score = 2\frac{Precision \cdot Recall}{Precision + Recall}$$ — общее качество алгоритма

		$\vec{y}_{cv}^{(i)}$	
		1	0
$h_\theta\left(\vec{x}_{cv}^{(i)}\right)$	1	true positive	false positive
	0	false negative	true negative

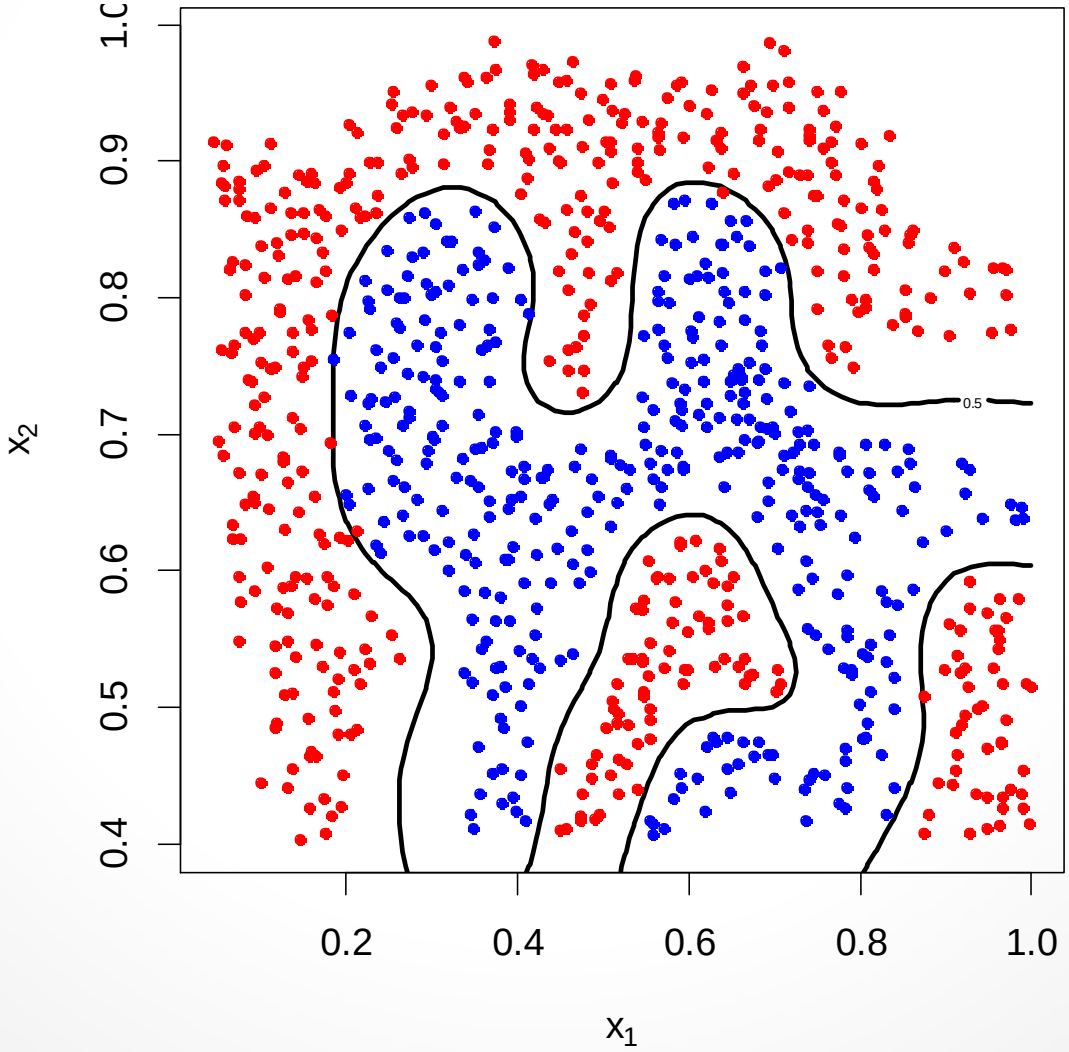
Функция fitSats

```
# расчёт статистик качества прогноза

fitStats <- function(y,y.pred) {
  ...
  if (precision + recall == 0) f1.score <- 0
  stat <- c(accuracy,precision,recall,f1.score)
  names(stat) <- c("accuracy","precision","recall","f1.score")
  stat
}
```

Выбор оптимальной комбинации экзогенных параметров

```
# номер комбинации параметров, максимизирующей f1.score
j <- which.max(res[,"f1.score"])
res[j,] # вывод на экран
```



Домашнее задание

В файле «elections_usa96_train.csv» находятся данные экзит-пулов, проведённых во время президентских выборов в США в 1996-м году, в которых соревновались Билл Клинтон и Боб Доул

Вашей задачей является предсказание выбора респондентов (значения «Clinton» или «Dole») из тестовой выборки «elections_usa96_test.csv»

Описание переменных

popul	TVnews	ClinLR	DoleLR	age	educ	income	vote
31	2	Lib	Con	36	BAdeg	$75K-$90K	Dole
22	7	sliLib	Mod	47	HS	$25K-$30K	Clinton
87	4	Mod	Con	41	Coll	$30K-$35K	Clinton
50	4	Lib	Con	44	HS	$50K-$60K	Clinton
9	7	extLib	Mod	79	MAdeg	$30K-$35K	Dole
75	4	Lib	extCon	62	BAdeg	$105Kplus	Dole

popul — население города, в котором проживает респондент, тыс. чел.

TVnews — количество вечеров, проведённых за просмотром новостей за последнюю неделю

ClinLR — оценка респондентом политических взглядов Билла Клинтона, упорядоченные значения: extLib (крайне либеральные) ➔ Lib (либеральные) ➔ sliLib (умеренно либеральные) ➔ Mod (в целом умеренные) ➔ sliCon (умеренно консервативные) ➔ Con (консервативные) ➔ extCon (крайне консервативные)

DoleLR — оценка респондентом политических взглядов Боба Дойла, та же шкала

age — возраст респондента

продолжение на следующем слайде

Описание переменных

начало на предыдущем слайде

educ — уровень образования респондента, упорядоченные значения: MS (начальная школа) ➔ HSdrop (неоконченное среднее) ➔ HS (среднее) ➔Coll (неоконченное высшее) ➔ CCdeg (оконченный двухлетний колледж) ➔ BAdeg (степень бакалавра) ➔ MAdeg (степень магистра)

income — уровень дохода респондента

vote — кандидат, за которого отдан голос