Курс «Введение в основы финансовой математики». Домашнее задание №1.

В.П. Закатов | Mandelbrot

Задача 1

> (i) Докажите формулу для плотности случайной величины S_n:
>
> $$f_{S_n}(t) = e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^{n-1}}{(n-1)!} \lambda(t).$$
>
> *Подсказка:* Доказательство можно провести по индукции. При доказательстве шага индукции используйте равенство
>
> $$\mathbb{P}\{N_t = n\} = \mathbb{P}\{S_n \leq t\} - \mathbb{P}\{S_{n+1} \leq t\}.$$
>
> (ii) Докажите, что справедлива формула
>
> $$\mathbb{P}\{\xi_{k+1} \leq t | S_k = s\} = 1 - e^{-\Lambda(s+t)+\Lambda(s)}$$
>
> (iii) Докажите формулу для функции распределения величины ξ_k для $k \geq 2$:
>
> $$F_{\xi_k} = 1 - \int_0^\infty e^{-\Lambda(t+s)} \frac{(\Lambda(s))^{k-2}}{(k-2)!} \lambda(s) ds.$$

Решение:

(i) Проведем доказательство по индукции. Докажем утверждение для базы индукции, которой является случай $n = 1$. В этом случае следует доказать

$$f_{S_1}(t) = e^{-\Lambda(t)} \cdot \lambda(t)$$

Это равенство, действительно, выполняется, так как...