Курс «Введение в основы финансовой математики». Домашнее задание №1.

В.П. Закатов | Mandelbrot

Задача 1

> Вычислить мартингальные вероятности для одношаговой биномиальной модели.

Решение:

В одношаговой биномиальной модели мы имеем два фиксированных момента времени $t = 0$ и $t = 1$, а также два актива: облигация (банковский счет с безрисковой ставкой R по депозиту) и акция (рискованный актив).

Цена облигации определена как

$$B_0 = 1$$

$$B_1 = 1 + R$$

Цена акции определена как

$$S_0 = s$$

$$S_1 = sZ,$$

где

$$Z = \begin{cases} u, \text{ с вероятностью } p_u \\ d, \text{ с вероятностью } p_d \end{cases}$$

Для того, чтобы на рынке отсутствовали арбитражные возможности, должно выполняться следующее неравенство:

$$d < (1 + R) < u \tag{1}$$

Легко показать, что при невыполнении данного условия можно построить портфель, который будет гарантированно приносить прибыль в момент времени $t = 1$ при нулевой стоимости в момент времени $t = 0$. Например, если $d \geq (1 + R)$, тогда, имея нулевой капитал в периоде $t = 0$, можно занять деньги на денежном рынке (продав облигацию) и использовать полученные средства на покупку акции. Тогда, даже при неблагоприятном исходе у инвестора будет достаточно средств в момент $t = 1$, чтобы расплатиться с долгом по облигации, а также будет ненулевая вероятность получения прибыли, так как $u > d \geq (1+R)$. Данная ситуация является арбитражной и должна быстро исчезнуть по закону спроса и предложения, когда достаточное количество инвесторов ей воспользуются. Ситуация $u \leq (1 + R)$ аналогична предыдущей, инвестору необходимо продать акцию и использовать средства на покупку облигации.

Таким образом, предполагая, что неравенство (1) выполняется, возможно найти такую пару чисел (q_u, q_d), так что $(1 + R)$ можно записать как следующую выпуклую комбинацию:

$$(1 + R) = q_u u + q_d d, \tag{2}$$

где $q_u, q_d \geq 0$ и $q_u + q_d = 1$. Получаем

$$(1 + R) = q_u u + (1 - q_u)d$$

$$q_u = \frac{(1 + R) - d}{u - d} \tag{3}$$

тогда

$$q_d = \frac{u - (1 + R)}{u - d} \tag{4}$$

Формулы (3) и (4) являются мартингальными вероятностями.

Задача 2

> Рассмотрим некоторый дериватив D_0 в одношаговой модели $(B; S)$ рынка (модели, описанной в лекции) без арбитражных возможностей. Зададим реплицирующую этот дериватив стратегию ϕ (напомним, что ее cash flow по определению соответствует таковому у дериватива). Покажите, что если $D_0 \neq V_0(\phi)$, то есть, цена дериватива не соответствует стоимости реплицирующего портфеля в нулевой момент времени, то на рынке возможен арбитраж для расширенной стратегии ($\hat{\phi}$) = (ϕ;γ), где γ — количество единиц дериватива в расширенном портфеле.

Решение:

Дериватив D_0 в одношаговой модели $(B; S)$ рынка без арбитражных возможностей имеет функцию выплат Φ. Если данное обязательство достижимо в момент времени $t = 1$, то существует такой портфель $h = (x, y)$, что

$$V_1^h = \Phi(u), \text{ если } Z = u$$

$$V_1^h = \Phi(d), \text{ если } Z = d$$

Данные уравнения можно записать следующей системной уравнений:

$$\begin{cases} (1+R)x + suy = \Phi(u) \\ (1+R)x + sdy = \Phi(d) \end{cases}$$

Данная система имеет единственное решение (предполагая $d < u$) и можно записать

$$x = \frac{1}{1+R}\frac{u\Phi(d) - d\Phi(u)}{u-d}$$

$$y = \frac{1}{s}\frac{\Phi(u) - \Phi(d)}{u-d}$$

Тогда наш реплицирующий портфель $h = (x, y)$ должен иметь следующую стоимость в момент времени $t = 0$

$$V_0^h = x + sy = \frac{1}{1+R}\left(\frac{(1+R)-d}{u-d}\Phi(u) + \frac{u-(1+R)}{u-d}\Phi(d)\right) = \frac{1}{1+R}E^Q[D_1] = D_0$$

Мы показали, что если существует портфель $h = (x, y)$, полностью реплицирующий выплаты по деривативу в момент $t = 1$, то стоимость деривативa D_0 и портфеля V_0^h должны быть равны в момент времени $t = 0$.

Если $D_0 \neq V_0(\phi)$, тогда можно будет составить такой портфель $(\hat{\phi})$ = $(\phi;\gamma)$ (где γ — количество единиц деривативa в расширенном портфеле), состоящий из деривативa и реплицирующего порфтеля, который принесет арбитражную прибыль.

К примеру, предположим $D_0 > V_0(\phi)$. Тогда возможно продать $\frac{V_0(\phi)}{D_0}$ единиц деривативa и купить 1 единицу реплицирующего портфеля. Тогда, в момент $t = 0$ стоимость такого портфеля будет равна нулю:

$$V_0(\phi) - \frac{V_0(\phi)}{D_0}D_0 = 0 \tag{5}$$

В момент времени $t = 1$ мы имеем

$$V_1(\phi) - \frac{V_0(\phi)}{D_0}D_1 = \left(1 - \frac{V_0(\phi)}{D_0}\right) \tag{6}$$

Так как $D_0 > V_0(\phi)$, то $\frac{V_0(\phi)}{D_0} < 1$. Следовательно, мы нулевой стоимости порфтеля в начальный момент времени, мы имеет положительную стоимость порфтеля в момент $t = 1$ с вероятностью 1. Данная ситуция является арбитражной.

Случай $D_0 < V_0(\phi)$ рассматривается аналогично, где мы купим 1 единицу деривативa и продадим $\frac{D_0}{V_0(\phi)}$.

Задача 3

> Докажите, что если в одношаговой биномиальной модели с вероятностью 1 выполняется $V_0(X) \neq X$, иначе говоря, стоимость портфеля в нулевой момент времени не равна суммарной стоимости его компонентов (B, облигаций и S, акций), то существует безрисковый доход.

Решение:

Для подхода к данной задаче мы можем рассматривать стоимость порфеля в момент времени $t = 0$ как некоторый дериватив, который реплицирует выплаты по составным частям портфеля в момент времени $t = 1$. Данную задачу можно свести к предыдущей, показав, что если $V_0(X) \neq X$, тогда всегда можно составить порфель, состоящий из изначального портфеля и его составлных частей, где будут куплены относительно недооцененные части и проданы относительно переоцененные части. Такой портфель всегда будет арбитражным, пока цены не вернутся к равновесным значением и не будет выполнятся условие $V_0(X) = X$.

Задача 4

> Цена акции в настоящий момент составляет \$40. Известно, что в конце месяца она составит либо \$42, либо \$38. Ставка дисконтирования равна 8% в год, считать, что она разбивается на 12 месячных ставок. Найти стоимость 1-месячного европейского опциона типа “колл” с ценой страйка, составляющей \$39 с помощью:
> - Создания реплицирующего портфеля.
> - Расчета риск-нейтральных вероятностей в одношаговой биномиальной модели.

Решение:

Мы имеем $s = 40$, $u = \frac{42}{40}$, $d = \frac{38}{40}$, $R = 0.08/12$, $K = 38$. Выплата опциона колл опрелена как $D_1 = \max(S_1 - K, 0)$ и равна в момент времени $t = 1$ $\Phi(u) = 3$ и $\Phi(d) = 0$ в благоприятном и неблагоприятном исходах, соответсвенно.

1. Найдем стоимость опциона колл с помощью реплицируешего портфеля. Рассмотрим портфель $h = (x, y)$, где

$$x = \frac{1}{1+R}\frac{u\Phi(d) - d\Phi(u)}{u-d} = -28.31$$

$$y = \frac{1}{s}\frac{\Phi(u) - \Phi(d)}{u-d} = 0.75$$

Стоимость портфеля в начальный момент времени составляет

$$V_0^h = x + sy = -28.31 + 40 * 0.75 = 1.68$$

2. Найдем стоимость опциона колл с помощью риск-нейтральных вероятностей в одношаговой биномиальной модели. Рассчитаем мартингальные вероятности:

$$q_u = \frac{(1+R)-d}{u-d} = 0.5(6)$$

тогда

$$q_d = \frac{u-(1+R)}{u-d} = 0.4(3)$$

Соответствующая стоимость опциона колл будет равна:

$$D_0 = \frac{1}{1+R}\Big(q_u\Phi(u) + q_d\Phi(d)\Big) = 1.68$$

Задача 5 (бонусная)

> Найти реплицирующую стратегию и оценить стоимость европейского платежного обязательства в биномиальной модели. Выплата по такому обязательству основывается только на состоянии рынка на момент даты экспирации, — таким образом, в одношаговой биномиальной модели реализация платежа по обязательству будет происходить в момент времени $t = 1$, а его размер будет зависеть от того, в какую сторону "сходит" рынок, задаваясь, таким образом, величинами H^u и H^d.

Решение:

Обозначим стоимость европейского платежного обязательства за H. Тогда в условиях полного рынка стоимость опциона в момент $t = 0$ можно записать

$$H = \alpha B_0 + \beta S_0$$

В момент времени $t = 1$ стоимость опциона составит

$$\begin{cases} \alpha(1+R) + \beta S_0 u = H^u \\ \alpha(1+R) + \beta S_0 d = H^d \end{cases}$$

Домножив первое равенство на d, второе на u, после вычитаняи одного из другого получаем

$$\alpha = \frac{1}{1+R}\frac{uH^d - dH^u}{u-d}$$

$$\beta = \frac{1}{S_0}\frac{H^u - H^d}{u-d}$$

Отсюда получаем стоимость опциона колл в момент времени $t = 0$:

$$H_0(\phi) = \alpha B_0 + \beta S_0 = \frac{1}{1+R}\left(\frac{(1+R)-d}{u-d}H^u + \frac{u-(1+R)}{u-d}H^d\right) = \frac{1}{1+R}E^Q\left[\frac{H}{1+R}\right]$$