Applied Fixed Income
Interest Rate Risk II
Convexity

Ряд Тейлора – первое приближение

$$P = f(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{CF_i}{(1+r)^{t_i}}$$

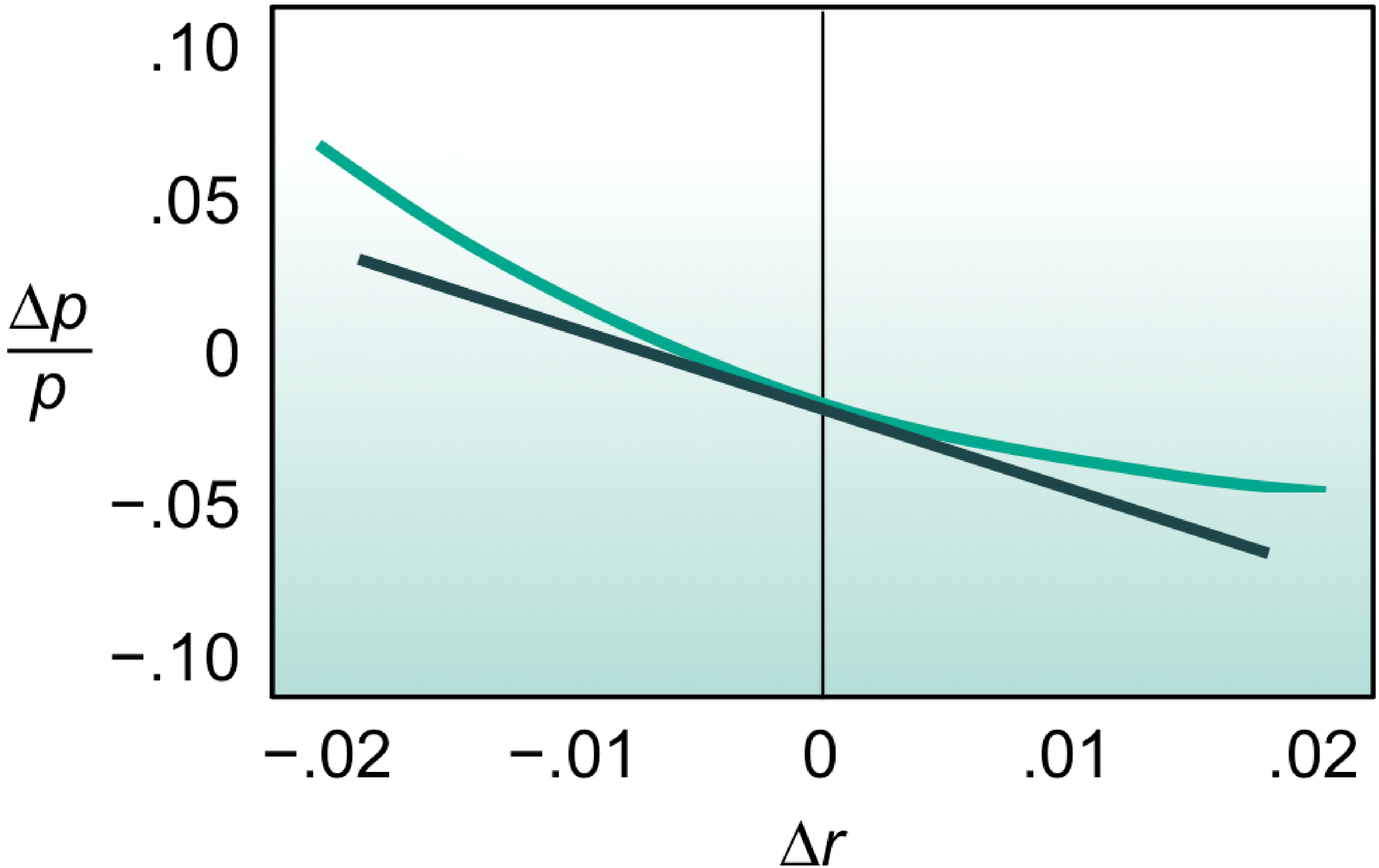
$$f\,(r) \approx f(r_0) + f'(r_0)(r - r_0)$$ *первое приближение*

$$f\,(r) - f(r_0) \approx f'(r_0)(r - r_0)$$ *Разделим обе части на* $f(r_0)$

$$\frac{f(r) - f(r_0)}{f(r_0)} \approx \frac{f'(r_0)}{f(r_0)}(r - r_0)$$

$$\frac{f(r) - f(r_0)}{f(r_0)} \approx -ModD(r_0)(r - r_0)$$

Duration approximation



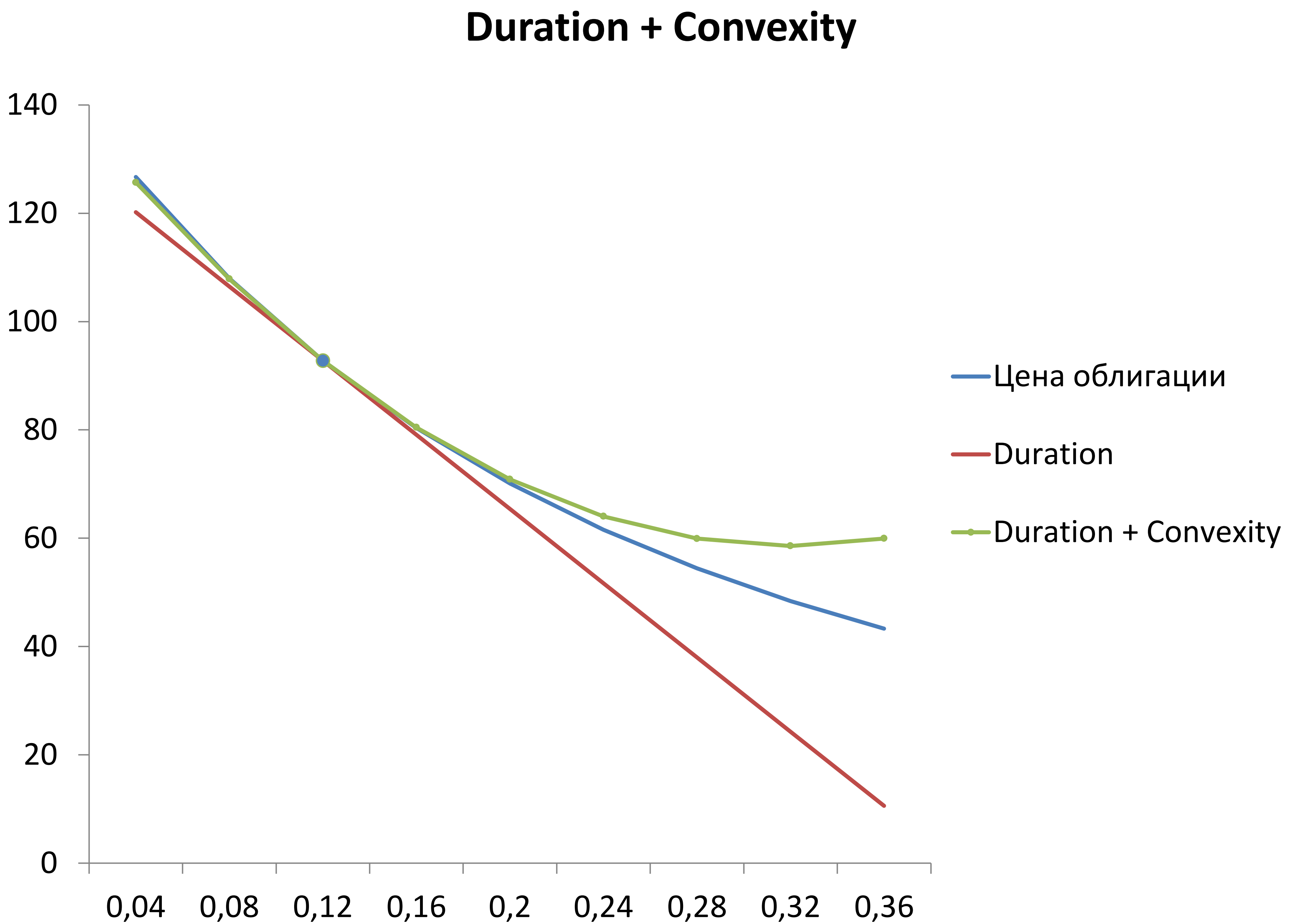
Ряд Тейлора – второе приближение

$$P = f(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{CF_i}{(1+r)^{t_i}}$$

$$f\,(r) - f(r_0) \approx f'(r_0)(r - r_0) + \frac{1}{2} f''(r_0)(r - r_0)^2$$

$$\frac{f(r) - f(r_0)}{f(r_0)} \approx \frac{f'(r_0)}{f(r_0)}(r - r_0) + \frac{1}{2}\,\frac{f''(r_0)}{f(r_0)}(r - r_0)^2$$

$$\frac{f(r) - f(r_0)}{f(r_0)} \approx -ModD(r_0)(r - r_0) + \frac{1}{2}\,Convexity(r_0)(r - r_0)^2$$



Duration + Convexity
140
120
100
80
60
40
20
0
0,04
0,08
0,12
0,16
0,2
0,24
0,28
0,32
0,36
Цена облигации
Duration
Duration + Convexity

Выпуклость (*Convexity*) — характеристика денежного потока (облигации), являющаяся мерой чувствительности его дюрации к процентным ставкам.

Позволяет уточнить (**поправка второго порядка**) влияние процентных ставок на текущую стоимость денежного потока (облигации). Поправка обусловлена тем, что зависимость текущей стоимости от процентной ставки (ставки дисконтирования) является нелинейной, поэтому линеаризация этой зависимости с помощью дюрации может недостаточно точно отразить влияние процентных ставок.

Учет выпуклости позволяет уточнить влияние процентных ставок, в том числе позволяет учесть асимметричность влияния ставок при увеличении и уменьшении ставок.

Пример №1

Портфель с рыночной стоимостью в $20 000 000
ModD портфеля = 7
Convexity портфеля = 100

Рассчитайте изменение стоимости портфеля при параллельном сдвиге кривой на 50 б.п.

$$\text{относительное изменение стоимости} = -ModD(r_0)(r - r_0) + \frac{1}{2}\,Convexity(r_0)(r - r_0)^2$$

$$= -7\,(0.005) + \frac{1}{2}\,100\,(0.005)^2 = -3.375\%$$

Выпуклость платежа

Найдем выпуклость платеже (бесконупонной облигации)

$$P = f(r) = \frac{N}{(1+r)^t}$$

$$Convexity(r_0) = \frac{f''(r_0)}{f(r_0)} = \frac{t(t+1)}{(1+r_0)^2} \frac{\boldsymbol{N}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{r_0})^{\boldsymbol{t}}} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{P}} = \frac{t(t+1)}{(1+r_0)^2}$$

Выпуклость портфеля платежей

Найдем выпуклость портфеля платежей (купонной облигации)

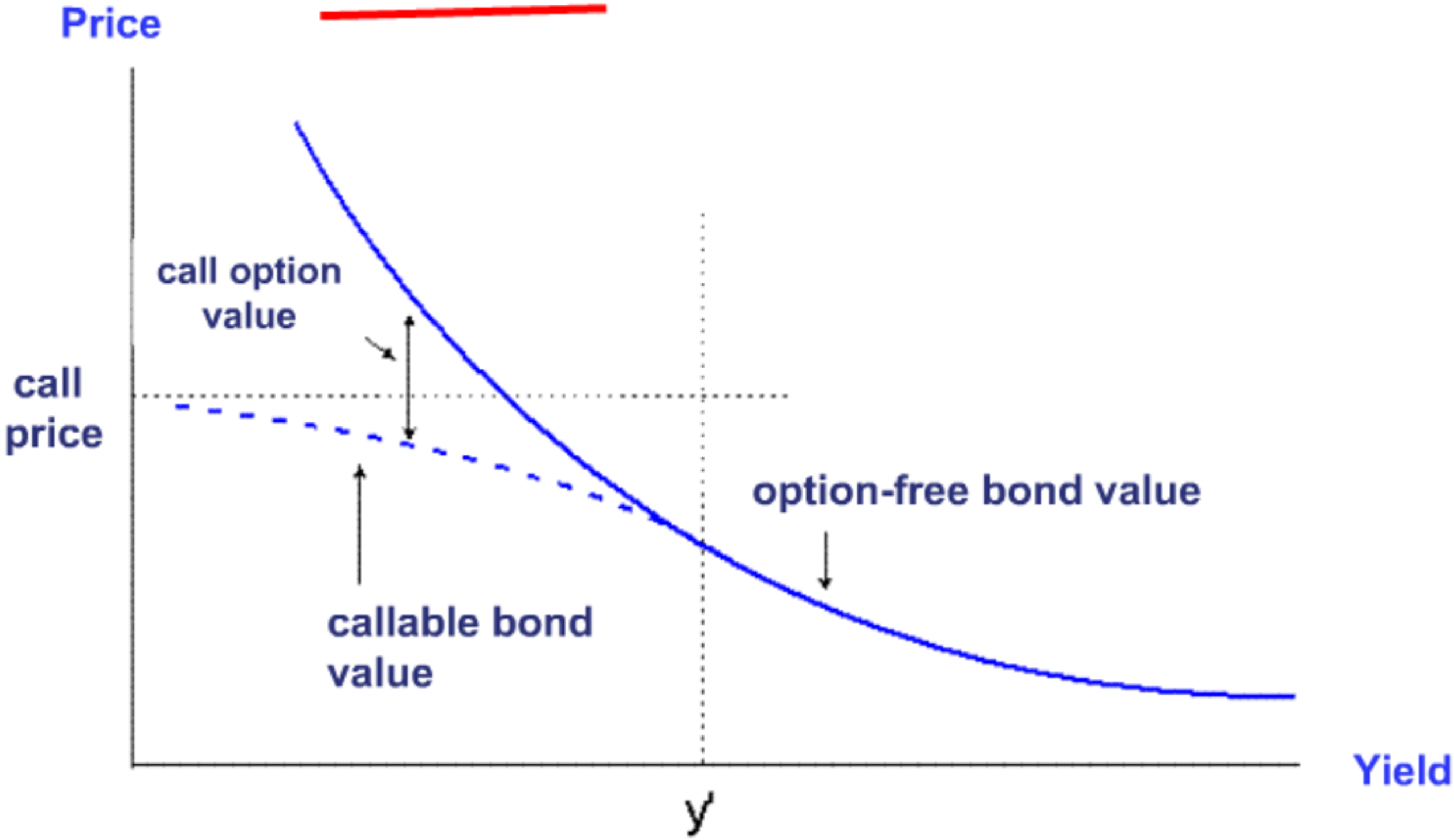
$$P = f(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{CF_i}{(1+r)^{t_i}}$$

$$Portfolio\ Convexity(r_0) = \frac{f''(r_0)}{f(r_0)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{CF_i}{P(1+r_0)^{t_i}} \frac{t_i(t_i+1)}{(1+r_0)^2} =$$

$$= \sum_{i}^{n} \omega_i \frac{t_i(t_i+1)}{(1+r_0)^2} = \sum_{i}^{n} \omega_i\, Convexity_i,$$

где $\omega_i = \dfrac{1}{P} \dfrac{CF_i}{(1+r_0)^{t_i}}$

Callable Bond Value



Эффективная Выпуклость

В некоторых случаях (когда у нас есть данные Price/YTM, или когда в облигацию встроены опционы) бывает удобнее считать «эффективную выпуклость»

$$Effective\ Convexity = \frac{D_{r-\Delta r} - D_{r+\Delta r}}{2\Delta r}$$

$$D_{r-\Delta r} = \frac{P_{r-\Delta r} - P_r}{P_r \Delta r}. \qquad D_{r+\Delta r} = \frac{P_r - P_{r+\Delta r}}{P_r \Delta r}.$$

$$Effective\ Convexity = \frac{P_{r-\Delta r} + P_{r+\Delta r} - 2P_r}{2P_r(\Delta r)^2}$$

$$\%\Delta P = -Effective\ Duration\ \Delta r + Effective\ Convexity(\Delta r)^2$$

Свойства показателя выпуклости

1. Чем больше внутренняя доходность портфеля платежей, тем меньше его показатель выпуклости.

2. Если все платежи по облигации отсрочить на t_0 лет, не изменяя ее внутренней доходности r_0, то показатель выпуклости увеличится на $\frac{{t_0}^2+t_0}{(1+r_0)^2}+\frac{t_0 modD}{(1+r_0)}$

3. Чем выше купонная ставка, тем ниже показатель выпуклости (убывающая функция купонной ставки)

Horizon rate of return

Horizon rate of return – ставка r_H которая преобразует стоимость облигации (P) в будущую стоимость (FV) за период H

$$FV = P\,(1 + r_H)^H$$

$$r_H = \left(\frac{FV}{P}\right)^{\frac{1}{H}} - 1$$

Если все купонные платежи реинвестируются, а горизонт инвестирования меньше срока погашения облигации, то при изменении ставок цена облигации измениться, а купонные платежи будут инвестироваться под другую ставку, и тогда r_H можно выразить

$$P_r(1 + r_H)^H = P_{r+\Delta r}(1 + r + \Delta r)^H \qquad r_H = \left(\frac{P_{r+\Delta r}}{P_r}\right)^{\frac{1}{H}}(1 + r + \Delta r)$$

Пример Horizon rate of return

Рассмотрим зависимость показателя horizon return от изменения процентной ставки на 100 базисных пунктов при инвестировании в следующую облигация :

Купонная ставка 7%
Погашение через 10
Цена 1154.44 (YTM = 5%)

Например, при горизонте инвестирования в 5 лет при увеличении процентной ставки на 1% цена облигации уменьшится до 1073.60

$$r_H = \left(\frac{1073.60}{1154.44}\right)^{\frac{1}{5}}(1.06) = 4.47\%$$

Horizon (years)		Interest rates		
		4%	5%	6%
1		12.01	5	-1.42
2	increasing	7.93	5	2.22
3	r_H	6.60	5	3.47
4		5.95	5	4.09
5		5.55	5	4.47
6		5.29	5	4.73
7		5.11	5	4.92
7.7		**5.006**	**5**	**5.006**
8		4.97	5	5.04
9		4.86	5	5.15
10		4.77	5	5.23
∞		4.00		6.00