Лекция 1
Введение в теорию арбитража

Финансовая математика

Евгений Лукаш | ЦМФ МГУ

CMF MSU
EDUCATIONAL PROGRAM

Москва, МГУ, 17 октября 2015 года

Литература

1. Бьорк Т. Теория арбитража в непрерывном времени / Перевод с англ. Я. И. Белопольской. — М.: МЦНМО, 2010 — 560 с.
2. Bernt Øksendal — Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications.
3. Brezniak and Zastawniak, «Basic stochastic processes».
4. Karatzas, Shreve — Brownian Motion and Stochastic Calculus.

О чем этот курс?

Что такое финансовая математика?

Ответ: наука, находящаяся на стыке математики и экономики (пропорция — согласно вашим предпочтениям).
Предметом интереса финансовой математики является динамика финансовых рынков.

Что будет изучено?

- Биномиальная модель ценообразования
- Теория арбитража
- Стохастические дифференциальные уравнения
- Случайное блуждание
- Полнота и хеджирование
- Мартингальный подход к теории арбитража
- Модель Блэка-Шоулза

Биномиальная модель: введение

Биномиальная модель работает в дискретном времени, но поднимает почти все основные вопросы, которые появятся у нас позднее при изучении моделей в непрерывном времени.

Вопрос

Настоящий рынок оперирует в дискретном времени. Следовательно, модели, работающие в дискретном времени, должны описывать его точнее, чем модели, работающие в непрерывном времени?
Не совсем так: модели в дискретном времени очень сложно параметризовать и вычислить, в итоге на практике почти всегда лучше справляются модели в непрерывном времени.

Дополнение

После вычисления параметров непрерывных моделей они крайне часто дискретизируются для того, чтобы найти численные ответы на поставленные задачи.

Одношаговая биномиальная модель

Фиксированы два момента времени $t = 0$ («сегодня») и $t = 1$ («завтра»).
Два актива: *облигации* (безрисковый актив) и *акции* (рисковый актив).
Цены активов в момент t: B_t (облигации), S_t (акции) описываются ценовыми процессами B и S.
Цена облигации соответствует соотношению:

$$B_0 = 1,$$
$$B_1 = 1 + R.$$

Здесь R — процентная ставка за период. Альтернативная интерпретация облигации: банковский счет со ставкой по депозиту, равной R.

Цена акции представляет собой случайный процесс:

$$S_0 - s,$$

$$S_1 = \begin{cases} su & \text{с вероятностью } p_u, \\ sd & \text{с вероятностью } p_d. \end{cases}$$

Его также можно записать в виде:

$$\begin{cases} S_0 = s, \\ S_1 = sZ, \end{cases}$$

где Z — случайная величина, определенная следующим образом:

$$Z = \begin{cases} u & \text{с вероятностью } p_u, \\ d & \text{с вероятностью } p_d. \end{cases}$$

Мы предполагаем, что известна текущая цена акции s, а также заданы константы u, d, p_u и p_d. Кроме того, будем считать, что выполняется равенство $p_u + p_d = 1$, где $d < u$.

Портфели и арбитраж

Определим портфель, как двумерный вектор $h = (x, y)$, где x — число облигаций, а y — количество акций в этом портфеле.

Базовые факты

1. Разрешены короткие позиции, а также дробные количества активов. Иначе говоря, $\forall h \in \mathbb{R}^2$ портфель h допустим.
2. Цена спроса и цена предложения на активы не отличаются (нет спрэда).
3. Транзакционные издержки отсутствуют.
4. Рынок полностью ликвиден, то есть, отсутствуют ограничения на размер позиции (всегда можно взять неограниченную ссуду в банке).

Определение

Капитал портфеля h определяется формулой $V_t^h = xB_t + yS_t, t = 0, 1$, или же

$$V_0^h = x + ys,$$
$$V_1^h = x(1 + R) + ysZ$$

Арбитраж

В наивных определениях арбитраж представляет собой возможность гарантированного заработка при ограниченном риске.

Определение

Арбитражный портфель h — это портфель, обладающий следующими свойствами:

$$V_0^h = 0,$$
$$V_1^h > 0 \text{ с вероятностью } 1.$$

Предложение

Определенная нами модель рынка является безарбитражной тогда и только тогда, когда выполняется следующий набор неравенств:

$$d \leq (1 + R) \leq u. \qquad (1)$$

Условие (1) в рамках экономики объясняется очень просто: доход по акциям не может превышать доход по облигациям в случае негативного исхода, и наоборот.

Покажем, что при нарушении неравенства (1) существует арбитражный портфель.
Пусть, например, $u < (1 + R)$. Тогда $s(1 + R) > su$, но при этом также $s(1 + R) > sd$, за счет чего облигации всегда более выгодны, чем акции.
В таком случае можно создать арбитражную стратегию, используя портфель $h = (s, -1)$. При этом стоимость портфеля в момент времени $t = 0$ будет равна 0 за счет равенства величин длинных и коротких позиций, а в точке $t = 1$ мы будем иметь:

$$V_1^h = s(1 + R) - sZ,$$

что, как было показано выше, всегда больше нуля. Следовательно, мы имеем арбитражный портфель.
Аналогичным образом, но в обратном порядке, доказывается и отсутствие арбитража при выполнении (1).

Мартингальная мера*

Заметим, что выполнение условия (1) эквивалентно утверждению о том, что $1+R$ является выпуклой комбинацией u и d, то есть,

$$1+R=q_u\cdot u+q_d\cdot d,$$

где $q_u, q_d\geq 0$, и $q_u+q_d=1$.
Рассмотрим новую вероятностную меру $\mathbb{Q}$, для которой $\mathbb{Q}(Z=u)=q_u, \mathbb{Q}(Z=d)=q_d$ (по сути, эта мера представляет собой некий новый способ рассмотрения исхода одношаговой модели). Рассчитывая математическое ожидание стоимости относительно этой меры, получим

$$\frac{1}{1+R}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_1]=\frac{1}{1+R}[q_u su+q_d sd]=\frac{1}{1+R}\cdot s(1+R)=s.$$

Отсюда имеем соотношение

$$s=\frac{1}{1+R}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_1]$$

Объяснение

Эта формула задает риск-нейтральную цену актива, определяя сегодняшнюю цену актива, как дисконтированную ожидаемую завтрашнюю цену. Использованная нами вероятностная мера называется мартингальной мерой.

Мартингальная мера

Определение

Вероятностная мера $\mathbb{Q}$ называется мартингальной мерой, если выполняется следующее условие:

$$s = \frac{1}{1+R}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_1]$$

Предложение

Модель рынка безарбитражна тогда и только тогда, когда существует мартингальная мера $\mathbb{Q}$.

Домашнее задание

Вычислить мартингальные вероятности для одношаговой биномиальной модели.

Определение

Случайное платежное обязательство (производная ценная бумага) — это произвольная случайная величина X вида $X = \Phi(Z)$, где Z — случайный процесс, моделирующий динамику цены акции, описанную выше.

ПРИМЕР СЛУЧАЙНОГО ПЛАТЕЖНОГО ОБЯЗАТЕЛЬСТВА

Определение

Говорят, что данное платежное обязательство достижимо, если существует такой портфель h, что с вероятностью 1 (строго говоря, *почти наверное*, однако об этом позже) выполняется равенство $V_1^h = X$. В этом случае портфель h называется хеджирующим или реплицирующим портфелем. Если все платежные обязательства на рынке реплицируемы, то говорят, что рынок полный.

Полнота рынка и реплицирующий портфель

Предложение

Предположим, что платежное обязательство X достижимо с помощью реплицирующего портфеля h. Тогда любая цена платежного обязательства X в момент времени $t = 0$, отличная от V_0^h, ведет к арбитражу.

Предложение

Предположим, что общая биномиальная модель безарбитражна. Тогда она также и полна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Предложение

Если биномиальная модель безарбитражна, то безарбитражная цена платежного обязательства X задается формулой:

$$\Pi(0; X) = \frac{1}{1+R}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X].$$

При этом мартингальная мера $\mathbb{Q}$ однозначно определена соотношением

$$S_0 = \frac{1}{1+R}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_1]$$

Платежное обязательство X можно реплицировать с помощью портфеля с весами инструментов, которые требуется вывести в домашнем задании.

Короткие выводы

- Объективная вероятность определяет, какие события возможны, а какие нет, строго говоря, определяя класс эквивалентных вероятностных мер.
- При вычислении безарбитражной цены производного инструмента вычисления проводятся так, как если бы мир был риск-нейтральным.
- При этом это не означает, что мир является риск-нейтральным.
- Формула, задающая цену, справедлива для всех инвесторов, независимо от их отношения к риску, если только они предпочитают максимизировать количество денег.
- Таким образом, выведенная формула является формулой цены, не зависящей от предпочтений.

Европейское платежное обязательство

Перейдем к вычислению стоимости европейского опциона H. Будем работать в рамках полноты рынка, за счет чего будет выполняться $H = \alpha_1 B_1 + \beta_1 S_1$. Запишем стоимость этой производной ценной бумаги во второй момент времени:

$$\alpha_1(1+R) + \beta_1 S_0 u = H^{(u)}$$
$$\alpha_1(1+R) + \beta_1 S_0 d = H^{(d)}$$

Домножим первое равенство на d, а второе на u, затем, после вычитания одного из другого, получим:

$$\alpha_1 = \frac{1}{1+R}\left(\frac{u \cdot H^{(d)} - d \cdot H^{(u)}}{u-d}\right)$$
$$\beta_1 = \frac{H^{(u)} - H^{(d)}}{(u-d)S_0}$$

Отсюда получим стоимость производного инструмента в первый момент времени:

$$H_0(\phi) = \alpha_1 B_1 + \beta_1 S_1 = \frac{1}{1+R}(p^* \cdot H^{(u)} + q^* \cdot H^{(d)}) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{1+R}\right]$$