

ЦМФ МГУ, «Введение в финансовую математику»

Домашнее задание №1

Задача 1

Вычислить мартингалльные вероятности для одношаговой биномиальной модели.

Задача 2

Рассмотрим некоторый дериватив D_0 в одношаговой модели (B, S) рынка (модели, описанной в лекции) без арбитражных возможностей. Зададим реплицирующую этот дериватив стратегию ϕ (напомним, что ее cash flow по определению соответствует таковому у дериватива). Покажите, что если $D_0 \neq V_0(\phi)$, то есть, цена дериватива не соответствует стоимости реплицирующего портфеля в нулевой момент времени, то на рынке возможен арбитраж для расширенной стратегии $\hat{\phi} = (\phi, \gamma)$, где γ — количество единиц дериватива в расширенном портфеле.

Задача 3

Докажите, что если в одношаговой биномиальной модели с вероятностью 1 выполняется $V_0(X) \neq X$, иначе говоря, стоимость портфеля в нулевой момент времени не равна суммарной стоимости его компонентов (B, облигаций и S, акций), то существует безрисковый доход.

Задача 4

Цена акции в настоящий момент составляет \$40. Известно, что в конце месяца она составит либо \$42, либо \$38. Ставка дисконтирования равна 8% в год, считать, что она разбивается на 12 месячных ставок. Найти стоимость 1-месячного европейского опциона типа «колл» с ценой страйка, составляющей \$39 с помощью:

- Создания реплицирующего портфеля.
- Расчета риск-нейтральных вероятностей в одношаговой биномиальной модели.

Бонусное необязательное задание (задача будет рассмотрена в дальнейших лекциях)

Найти реплицирующую стратегию и оценить стоимость европейского платежного обязательства в биномиальной модели. Выплата по такому обязательству основывается только на состоянии рынка на момент даты экспирации, — таким образом, в одношаговой биномиальной модели реализация платежа по обязательству будет происходить в момент времени $t = 1$, а его размер будет зависеть от того, в какую сторону «сходит» рынок, задаваясь, таким образом, величинами $H^{(u)}$ и $H^{(d)}$.