ЦМФ МГУ, «Введение в финансовую математику»
Домашнее задание №2

Задача 1

Вычислите интеграл $\int\limits_0^t e^{-s/2+W_s} dW_s$ с помощью использования формулы Ито.

Задача 2

Докажите, что при $m \geq 2$ имеет место следующее рекуррентное уравнение для степеней $(W_t)^m$ винеровского процесса: $W_t : d[(W_t)^m] = m[(W_t)^{m-1}]dW_t + \frac{m(m-1)}{2}[(W_t)^{m-2}]dt$.

Задача 3

Используя формулу Ито, покажите, что процессы $X_t = e^{t/2} \sin W_t$ и $Y_t = e^{t/2} \cos W_t$ являются мартингалами.

Задача 4

Вычислите стохастический дифференциал процесса Z, если $Z(t) = \frac{1}{X(t)}$ и X имеет стохастический дифференциал

$$dX(t) = \alpha X(t)dt + \sigma X(t)dW(t).$$

Используя представление $Z = X^{-1}$, можно представить правую часть дифференциала dZ в терминах самого Z (а не в терминах X). Таким образом, Z удовлетворяет некоторому стохастическому дифференциальному уравнению. Каков его вид?

Задача 5

Предположим, что процесс X имеет стохастический дифференциал вида $dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)$, и что для $\mu(t) \geq 0$ для всех t с вероятностью 1. Покажите, что отсюда вытекает, что X — субмартингал.

Задача 6

Пусть X и Y представляют собой решение следующей системы стохастических дифференциальных уравнений:

$$dX = \alpha X dt - Y dW, X(0) = x_0,$$
$$dY = \alpha Y dt + X dW, Y(0) = y_0.$$

Заметим, что начальные значения x_0 и y_0 — это неслучайные константы.

а) Докажите, что процесс R вида $R(t) = X^2(t) + Y^2(t)$ неслучаен.

б) Вычислите $\mathbb{E}[X(t)]$.