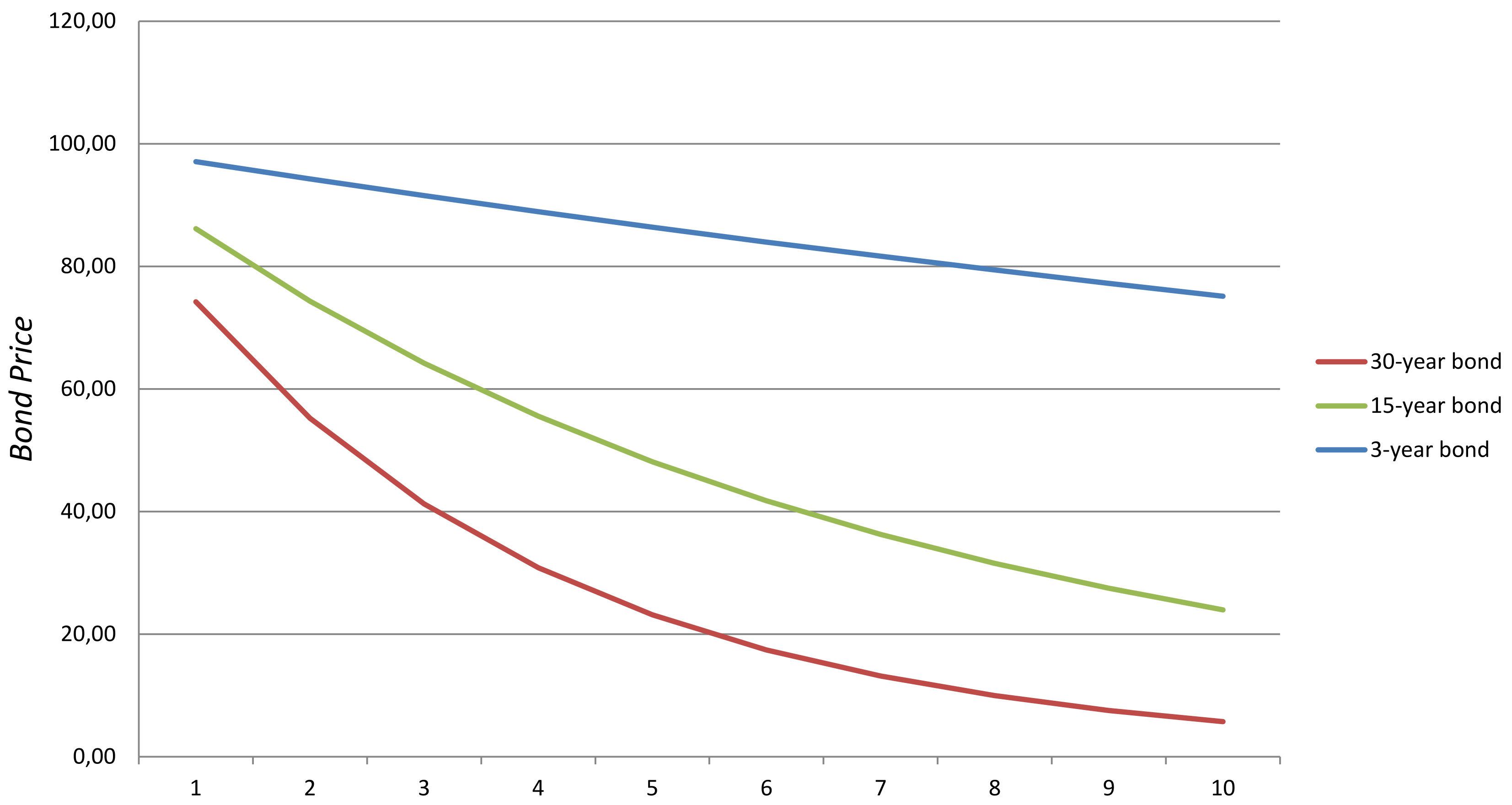
Applied Fixed Income
Interest Rate Risk I
Duration

Рассмотрим графики трех бескупонных облигаций со сроком 3, 15 и 30 лет до погашения. Как видно из графика, «длинные облигации» имеет более высокую чувствительность к изменению процентной ставки. Возникает необходимость в количественной оценке меры чувствительности цены облигации к изменению процентной ставки.



Дюрация бескупонной облигации

Цена бескупонной облигации: $P = \frac{N}{(1+r)^T}$

Возьмем производную по r: $\frac{dP}{dr} = \frac{-T}{1+r}\ \frac{N}{(1+r)^T} = \frac{-T}{1+r}\ P$

Перейдем от абсолютной чувствительности к относительной:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dr} = \frac{1}{P}\ \frac{-T}{1+r}\ \frac{N}{(1+r)^T} = \frac{1}{P}\ \frac{-T}{1+r}\ P = \frac{-T}{1+r}$$

Дюрация Маколея $MacD = \frac{-1}{P}\frac{dP}{dr}\ (1\ +\ r) = \mathrm{T}$

Модифицированная дюрация $ModD = \frac{-1}{P}\frac{dP}{dr} = \frac{T}{1+r}$

$MacD = ModD(1+r)$.

При непрерывном начислении $MacD = ModD$

Дюрация портфеля бескупонных облигаций

Найдем модифицированную дюрацию портфеля бескупонных облигаций. Пусть в момент времени t в нашем портфеле находится N_1 бескупонных облигаций P(t,T_1), N_2 бескупонных облигаций P(t,T_2), … и N_n бескупонных облигаций P(t,T_n).

Цена портфеля равна W(t) = N_1P(t,T_1) + N_2P(t,T_2) + … + N_nP(t,T_n)

$$\mathrm{M}odD(W(t)) = \frac{-1}{W(t)}\frac{dW(t)}{dr} = \frac{-1}{W(t)}\left[N_1\frac{dP(t,T_1)}{dr} + N_2\frac{dP(t,T_2)}{dr} + \cdots + N_n\frac{dP(t,T_n)}{dr}\right] =$$

$$= \frac{N_1P(t,T_1)}{W(t)}\left[\frac{-1}{P(t,T_1)}\frac{dP(t,T_1)}{dr}\right] + \frac{N_2P(t,T_2)}{W(t)}\left[\frac{-1}{P(t,T_2)}\frac{dP(t,T_2)}{dr}\right] + \cdots +$$

$$+ \frac{N_nP(t,T_n)}{W(t)}\left[\frac{-1}{P(t,T_n)}\frac{dP(t,T_n)}{dr}\right] = \omega_1 ModD_1 + \omega_2 ModD_2 + \ldots + \omega_n ModD_n,$$

где $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ - доли бумаг в портфеле.

Таким образом, дюрация портфеля бескупонных облигаций равна взвешенной дюрации бескупонных облигаций! Аналогично MacD

Дюрация купонной облигации

Цена купонной облигации:

$$P = \sum_{i}^{n} \frac{CF_i}{(1+r)^{t_i}}$$

$$ModD = \frac{-1}{P}\,\frac{dP}{dr} = \frac{1}{1+r}\sum_{i}^{n} \frac{CF_i}{P(1+r)^{t_i}}\,t_i = \frac{1}{1+r}\sum_{i}^{n} \omega_i\,t_i$$

$$MacD = \frac{-1}{P}\,\frac{dP}{dr}\,(1+r) = \sum_{i}^{n} \frac{CF_i}{P(1+r)^{t_i}}\,t_i = \sum_{i}^{n} \omega_i\,t_i$$

где $\omega_i = \frac{1}{P}\frac{CF_i}{(1+r)^{t_i}}$

Дюрация бессрочной облигации

Бессрочная облигация - бесконечный аннуитет.

$$P = \frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \cdots = \frac{A}{1+r}\left(1 + \frac{1}{(1+r)} + \frac{1}{(1+r)^2} + \cdots\right) =$$
$$= \frac{A}{(1+r)} \frac{1}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{A}{r}.$$

Найдем дюрации

$$ModD = \frac{-1}{P}\,\frac{dP}{dr} = -\frac{r}{A}\,\frac{-A}{r^2} = \frac{1}{r}.$$

$$MacD = \frac{-1}{P}\,\frac{dP}{dr}\,(1+r) = -\frac{r}{A}\,\frac{-A}{r^2}(1+r) = \frac{1+r}{r}.$$

Пример

$$ModD = \frac{-1}{P}\frac{dP}{dr}$$

$$\frac{dP}{P} = -ModD \ * dr$$

Пусть дюрация купонной облигации равна 3.62. Как изменится цена облигации при параллельном сдвиге процентных ставок вниз на 50 б.п.?

$$\frac{dP}{P} = -3.62 \ * (-0.005) = 0.0181$$

Ответ: цена вырастет на 1.81%.

Эффективная дюрация

В некоторых случаях (когда у нас есть данные Price/YTM, или когда в облигацию встроены опционы) бывает удобнее считать «эффективную дюрацию»

$$Effective\ Duration = \frac{P_{r-\Delta r} - P_{r+\Delta r}}{2P_r\ \Delta r}$$

10 летняя облигация стоит 70.
Если YTM увеличится на 1%, то облигация будет стоить 66, а если YTM уменьшится на 1%, то будет стоить 75.
Найдите эффективную дюрацию облигации.

$$Effective\ Duration = \frac{75 - 66}{2 * 70 * 0.01} \sim 6.43$$

Ответ: эффективная дюрация ~ 6.43

Дюрация портфеля

Как уже рассматривалось ранее на примере портфеля бескупонных облигаций, дюрация портфеля – это взвешенная дюрация всех его платежей. Рассмотрим следующие два примера

№1. Портфель состоит из двух позиций:
$400 инвестированы в облигации А (дюрация 5 лет)
$600 инвестированы в облигацию В (дюрация 3 года)
Найдите дюрацию портфеля.
*Решение: 400/(400+600) * 5 + 600/(400+600) * 3 = 3.8 года*

№2. Занята короткая позиция $400 по облигации А (дюрация 5 лет), а средства от короткой позиции инвестированы в облигацию В (дюрация 3 года). Найдите дюрацию портфеля.

*Решение: 400/(400-400) * 5 + 400/(400-400) * 3 = …*

Долларовая дюрация

В определении дюрации есть допущение, что цена облигации/портфеля облигаций не равна нулю. В тех случаях, когда мы имеем дело с long-short стратегиями цена портфеля может равняться нулю и тогда мы вынуждены работать с абсолютным значениями чувствительности.

Долларовой дюрацией называется величина

$$Dollar\ Duration = D^{\$} = -\frac{dP}{dr} = P\ ModD$$

$$DV01 = BPV = -dP = D^{\$}dr = 0.0001D^{\$} = 0.0001P\ ModD$$

Долларовая дюрация *портфеля*

$$D^{\$}(portfolio) = \sum_{i}^{n} N_i D_i^{\$}, \text{где } N_i \text{ количество бумаг в портфеле}$$

Долларовая дюрация

Вернемся к нашему примеру.
Занята короткая позиция $400 по облигации А (5 штук по 80) (дюрация 5 лет), а средства от короткой позиции инвестированы в облигацию В (4 штуки по 100) (дюрация 3 года). Найдите DV01 портфеля.

$$\mathrm{D}V01 = 0.0001D^{\$} = 0.0001\sum_{i}^{n} N_i D_i^{\$} =$$

$$= 0.0001(-5 \ * 80 * 5 + 4 * 100 * 3) = -0.08$$

Как интерпретировать?
Так как мы получили отрицательное значение дюрации, то мы имеем прямую зависимость, т.е. при увеличении процентных ставок на 0.01% портфель подорожает на $0.08, а при уменьшении на 0.01% подешевеет на $0.08.

Основные свойства дюрации. Свойство №1

Покажем, что дюрация облигации не зависит от номинала

$$MacD = \frac{-1}{P}\frac{dP}{dr}(1+r) = \left(\sum_{i}^{n}\frac{cN}{(1+r)^{t_i}}t_i + \frac{N}{(1+r)^{t_n}}t_n\right)\frac{1}{P} =$$

$$= \boldsymbol{N}\left(\sum_{i}^{n}\frac{c}{(1+r)^{t_i}}t_i + \frac{1}{(1+r)^{t_i}}t_n\right)\frac{1}{\boldsymbol{N}}\left(\sum_{i}^{n}\frac{c}{(1+r)^{t_i}} + \frac{1}{(1+r)^{t_n}}\right)^{-1}$$

$$ModD = \frac{-1}{P}\frac{dP}{dr} = \frac{1}{(1+r)}\left(\sum_{i}^{n}\frac{cN}{(1+r)^{t_i}}t_i + \frac{N}{(1+r)^{t_n}}t_n\right)\frac{1}{P} =$$

$$= \frac{\boldsymbol{N}}{(1+r)}\left(\sum_{i}^{n}\frac{c}{(1+r)^{t_i}}t_i + \frac{1}{(1+r)^{t_i}}t_n\right)\frac{1}{\boldsymbol{N}}\left(\sum_{i}^{n}\frac{c}{(1+r)^{t_i}} + \frac{1}{(1+r)^{t_n}}\right)^{-1}$$

Основные свойства дюрации. Свойство №2

Дюрация обычной (plain vanilla) облигации не превосходит срока до ее погашения t_n.

$$MacD = \frac{-1}{P}\frac{dP}{dr}(1+r) = \sum_{i}^{n} \frac{CF_i}{P(1+r)^{t_i}} t_i = \sum_{i}^{n} \omega_i t_i$$

где $\omega_i = \frac{1}{P}\frac{CF_i}{(1+r)^{t_i}}$

В силу $\sum_{i}^{n} \omega_i = 1,\ \omega_i \geq 0$ (для $plain\ vanilla$) и

$t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$ имеем

$$MacD = \sum_{i}^{n} \omega_i t_i \leq t_n,$$

$$ModD = \frac{MacD}{1+r} = \frac{1}{1+r}\sum_{i}^{n} \omega_i t_i \leq t_n,$$

Основные свойства дюрации. Свойство №3

Если все платежи по облигации отсрочить на t_0 лет, не изменяя ее внутренней доходности r, то дюрация увеличится на t_0 для дюрации MacD и на $\frac{t_0}{1+r}$ для ModD

$$MacD = \frac{-1}{P}\frac{dP}{dr}(1+r) = \sum_{i}^{n}\frac{CF_i}{P(1+r)^{t_i}}t_i = \sum_{i}^{n}\omega_i\, t_i$$

$$MacD_{new} = \sum_{i}^{n}\frac{CF_i}{P(1+r)^{(t_i+t_0)}}(t_i+t_0) = \sum_{i}^{n}\omega_i\,(t_i+t_0)$$

так как $\sum_{i}^{n}\omega_i = 1,$ то $MacD_{new} = MacD + t_0$

$$ModD_{new} = \frac{MacD + t_0}{(1+r)}$$

Основные свойства дюрации. Свойство №4

При росте доходности дюрация уменьшается (MacD и ModD убывающие функции от доходности r)

Для начала докажем свойство для дюрации Маколея

$$MacD = \sum_{i}^{n} \frac{CF_i}{P(1+r)^{t_i}} t_i.$$ Возьмем производную

$$\frac{dMacD}{dr} = \frac{1}{P^2}\left(-\sum_{i}^{n} t_i^2 \frac{CF_i}{(1+r)^{t_i+1}} \sum_{i}^{n} \frac{CF_i}{(1+r)^{t_i}} + \sum_{i}^{n} t_i \frac{CF_i}{(1+r)^{t_i}} \sum_{i}^{n} t_i \frac{CF_i}{(1+r)^{t_i+1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{(1+r)P^2}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{CF_i}{(1+r)^{t_i}} \right)^2 - \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \frac{CF_i}{(1+r)^{t_i}} \sum_{i=1}^{n} \frac{CF_i}{(1+r)^{t_i}} \right)$$

Рассмотрим выражение в скобках $\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\, a_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{n} t_i^2 a_i \sum_{i=1}^{n} a_i$

Основные свойства дюрации. Свойство №4

Покажем, что выполняется неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{t_i\, a_i}\right)^{2} - \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{t_i^2 a_i} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_i} < \boldsymbol{0}$$

Пусть

$\overrightarrow{a} = (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_n})$

$\overrightarrow{b} = (t_1\sqrt{a_1}, t_2\sqrt{a_2}, \dots, t_n\sqrt{a_n})$

$$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)^2 - (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b})(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) < 0$$

В силу неравенства Коши-Буняковского

$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)^2 \leq (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})\overrightarrow{(b}, \overrightarrow{b})$ *и неколлинеарности векторов, неравенство выполняется строго, а это значит, что производная дюрации Маколея отрицательная, т.е. функция дюрации является убывающей функцией от доходности.*

Основные свойства дюрации. Свойство №4

Докажем тоже свойство для $ModD$

$$ModD = \frac{MacD}{(1+r)}$$

Так как

$$MacD > 0, \qquad \frac{dMacD}{dr} < 0, \qquad (1+r) > 0,$$

То

$$\frac{dModD}{dr} = \frac{MacD'(1+r) - MacD}{(1+r)^2} < 0$$

Основные свойства дюрации. Свойство №5

Дюрация –убывающая функция купонной ставки (чем выше купонная ставка, тем ниже дюрация).

$$P = \sum_{i}^{n} \frac{cN}{(1+r)^{t_i}} + \frac{N}{(1+r)^{t_n}}$$

$$MacD = \frac{-1}{P}\frac{dP}{dr}(1+r) = \sum_{i}^{n} \omega_i t_i \qquad \text{где } \omega_i = \frac{1}{P}\frac{CF_i}{(1+r)^{t_i}}$$

Основные свойства дюрации. Свойство №6

Дюрация облигации/портфеля после выплаты купона/погашения облигации увеличивается, а долларовая дюрация уменьшается