Лекция 4
Модель Блека – Шоулза – Мертона

Финансовая математика

Евгений Лукаш | ЦМФ МГУ

Геометрическое броуновское движение задается следующим СДУ:

$$dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dW_t,$$
$$X_0 = x_0.$$

Можно записать это уравнение в виде

$$\dot{X}_t = (\alpha + \sigma \dot{W}_t) X_t,$$

где $\dot{W}_t$ представляет собой белый шум.

Как решить такое уравнение? Известно, что аналогичное линейное в качестве решения имеет экспоненциальную функцию времени. Поэтому рассмотрим преобразование исходного процесса, — процесс Z, определенный соотношением $Z_t = \ln X_t$, предполагая, что X является решением и что процесс X строго положителен.

Применяя формулу Ито, имеем:

$$dZ = \frac{1}{X} dX + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{X^2} \right\} [dX]^2 =$$
$$= \frac{1}{X} \{\alpha X dt + \sigma X dW\} + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{X^2} \right\} \sigma^2 X^2 dt = \{\alpha dt + \sigma dW\} - \frac{1}{2} \sigma^2 dt.$$

Геометрическое броуновское движение

Перегруппировав слагаемые в полученном результате, имеем

$$dZ_t = \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t,$$

$$Z_0 = \ln x_0.$$

Поскольку мы выделили Z на одну из сторон уравнения, мы можем решить его простым интегрированием, получив

$$Z_t = \ln x_0 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t$$

Применив обратное преобразование, получим

$$X_t = x_0 \exp\left\{\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right\}.$$

После этого достаточно подставить полученный результат в уравнение геометрического броуновского движения. При этом математическое ожидание процесса X будет задаваться соотношением

$$\mathbb{E}[X_t] = x_0 e^{\alpha t}$$

Содержание

Для интересующихся: Andreasen, Jensen, Poulsen (1998) - Eight Valuation Methods in Financial Mathematics. The Black-Scholes Formula as an Example

Предпосылки модели

Модель Блека – Шоулза – Мертона (БШМ) можно рассматривать как аналог биномиальной в непрерывном времени.

1. Цена базового актива следует модели логнормального случайного блуждания (геометрическое броуновское движение). То есть, БШМ будет настолько “хорошо” оценивать стоимость деривативa, насколько хорошо цена базового актива описывается геометрическим броуновским движением с заданными параметрами. В рассматриваемом случае в уравнении используются постоянные параметр сноса и волатильность.
2. Безрисковая ставка является известной функцией от времени. В частности, она может быть единой для всех теноров. На самом деле практически любая ставка на денежном рынке также имеет стохастическую природу.
3. Выплаты дивидендов (а в общем случае – получение какого-либо дохода, например, ставки денежного рынка в случае с валютным опционом) по базовому активу отсутствуют.

Предпосылки модели

(Продолжение списка)

4. Дельта-хеджирование происходит непрерывно в течение жизни деривatива (подробнее далее).
5. Отсутствие трансакционных издержек. Примеры: покупку и продажу базового актива можно совершать по одной и той же цене (отсутствие бид-аск спреда), на денежном рынке можно размещать и занимать средства по единой ставке.
6. Отсутствие арбитража (по аналогии с биномиальной моделью).

В данной лекции мы будем рассматривать европейские платежные обязательства.

Предположим, что априори заданный рынок состоит из двух активов, имеющих динамику:

$$\begin{aligned} dB(t) &= rB(t)dt, \\ dS(t) &= S(t)\alpha(t, S(t))dt + S(t)\sigma(t, S(t))d\bar{W}(t), \end{aligned}$$

где процентная ставка r — неслучайная константа

Функция цены опциона

Стоимость любого условного обязательства можно представить в виде некоторой функции V от рыночных случайных величин. В дату экспирации она представляет собой специфическую функцию выплат, характерную для каждого вида условного обязательства.

$$\text{Цена опциона} = V(S, t; \sigma, E, T, r) \tag{1}$$

Переменная величина изменяется в течение жизни дериватива, параметр – остается неизменным.

- (Переменная) S – цена базового актива на момент проведения оценки.
- (Переменная) t – время проведения оценки (в свою очередь, $T - t$ является временем до экспирации контракта).
- (Параметр) σ – волатильность из геометрического броуновского движения цены актива.
- (Параметр) E – цена страйк.
- (Параметр) T – время экспирации контракта.
- (Параметр) r – безрисковая ставка денежного рынка.

Построение хеджирующего портфеля

Для начала, как обычно, воспользуемся эвристическими рассуждениями. Известно, что опцион кол растет в цене при росте цены базового актива (обратное также верно). Таким образом, между ценой базового актива и ценой опциона есть корреляция.

Мы можем воспользоваться этим для построения специального портфеля. Определим П, — стоимость портфеля, состоящего из одной лонг-позиции опциона (в единичном количестве) и одной шорт-позиции базового актива в некотором количестве $Delta$:

- Оценка стоимости условного обязательства основывается на том, что его цена является зависимой величиной от величины стоимости базового актива.
- Мы предполагаем, что цена актива описывается геометрическим броуновским движением.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX. \tag{2}$$

- Пусть П – капитал портфеля, состоящего из длинной позиции по одному условному обязательству и короткой позиции по Δ базовых активов.

$$\Pi = V(S,t) - \Delta S. \tag{3}$$

- Изменение капитала портфеля, с учетом отсутствия изменения весов активов в портфеле, с t по $t + dt$ составит

$$d\Pi = dV(S,t) - \Delta dS. \tag{4}$$

- Согласно (2) и леммы Ито

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dSdS \\ &= \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(\mu^2 S^2 dtdt + 2\mu S^2 \sigma dtdX + \sigma^2 S^2 dXdX) \\ &= \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt \end{aligned} \tag{5}$$

- Таким образом, из (4) и (5) имеем

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt - \Delta dS \tag{6}$$

- В уравнение (6) входят как постоянные члены – с dt – так и случайные – с dS. Значение последних мы не знаем в момент времени t. После группировки они представляют собой

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right) dS. \tag{7}$$

- Случайные элементы несут в себе *риск* портфеля. Мы можем исключить его посредством выбора такого значения Δ, чтобы член из (7) стал равен нулю. Поэтому

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}. \tag{8}$$

- Сокращение / исключение случайности называется **хеджированием**. Процесс полного исключения риска с использованием зависимости между двумя финансовым инструментами называется **дельта-хеджированием**.
- Дельта-хеджирование является примером процесса **динамического хеджирования**. С течением времени аргументы функции $V(S,t)$ меняются, и вместе с ними меняются “чувствительности” цены опциона $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial S}$ к этим переменным. Поэтому для поддержания отсутствия риска портфеля веса активов необходимо со временем менять.

- Согласно (8) из (6) имеем

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \tag{9}$$

- Изменение портфеля (9) не несет в себе риска. Поэтому, для того, чтобы отсутствовал арбитраж, необходимо приравнять это изменение к приросту денежного баланса с безрисковой ставкой r, то есть

$$d\Pi = r\Pi dt. \tag{10}$$

- Подставляя величину капитала портфеля (3), количество базового актива в портфеле (8) и изменение портфеля (9) в (10), имеем

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt = r \left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) dt. \tag{11}$$

- При упрощении (11) мы получаем знаменитое уравнение БШМ (1973)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{12}$$

- Уравнение (12) является линейным параболическим дифференциальным уравнением в частных производных. Любая функция $V(S,t)$, являющаяся решением данного уравнения (с заданным ограничением), может быть использована для оценки стоимости условного обязательства. На практике такие уравнения поддаются решению относительно несложно с применением численных методов.
- Возникает вопрос, почему в итоговой формуле отсутствует параметр сноса μ из модели цены базового актива? Зависимость от сноса исчезает на этапе исключения риска портфеля в (8).
- Экономический смысл заключается в том, что при полном исключении риска мы не имеем права требовать премию за захеджированный риск, поэтому в уравнении присутствует только ставка безрисковой доходности r. Таким образом, при соглашении сторонами в сделке о величине *волатильности* базового актива, стороны согласовывают единую цену условного обязательства даже при наличии у них *расхождения в оценке параметра сноса* μ.

Риск-нейтральные цены

Теорема (о риск-нейтральной цене)

Безарбитражная цена платежного обязательства $\Phi(S(T))$ задается формулой $\Pi(t;\Phi) = F(t,S(t))$, где F имеет вид

$$F(t,s) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{Q}_{t,s}\left[\Phi(S(T))\right],$$

при этом динамика процесса S будет описываться уравнением

$$dS(t)dt = rS(t)dt + S(t)\sigma(t,S(t))dW(t)$$

Иначе говоря, если мы вычислим математическое ожидание выплаты актива в момент времени T в «правильной» мере, то цена деривативa будет определена простым дисконтированием этой величины в момент t. Поскольку мы работаем в мире с непрерывным накоплением процентов, то дисконтирование производится с использованием множителя $e^{-r(T-t)}$. Мера Q, использованная при этом, называется риск-нейтральной или мартингальной мерой.

Такое название эта мера получила благодаря тому, что дисконтированный процесс $\dfrac{S(t)}{B(t)}$ является мартингалом по мере Q.

Как решить уравнение Блэка-Шоулза?

Итак, выше мы вывели уравнение Блэка-Шоулза и указали на то, что безарбитражаная цена простого платежного обязательства $\Phi(S(T))$ задается формулой

$$e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{Q}_{t,s}\left[\Phi(S(T))\right],$$

причем динамика процесса S задается, как

$$dS(u) = rS(u) + S(t)\sigma S(u)dW(u),$$
$$S(t) = s.$$

Здесь мы вспоминаем о том, что это уравнение соответствует уравнению GBM и находим явный вид $S(T)$:

$$S(T) = s\exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma(W(T) - W(t))\right\}.$$

После этого мы получим формулу для цены:

$$F(t,s) = e^{-r(T-t)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(se^z)f(z)dz$$

$$Z \sim N\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right)$$

Выражение справа можно вычислить всегда, но с помощью численных методов. Аналитические решения могут быть найдены лишь в некоторых случаях, один из которых – это европейский колл-опцион, для которого функция $\Phi(x)$ имеет вид $\max[x-K,0]$. В этом случае мы имеем

$$\mathbb{E}^Q\left[[se^Z-K,0]\right]=0\cdot Q(se^Z\leq K)+\int_{\ln(K/s)}^{\infty}(se^z-K)f(z)dz.$$

Проведя некоторые вычисления, мы получаем формулу Блэка-Шоулза:

Формула

Цена европейского опциона кол с ценой исполнения K и моментом исполнения T задается формулой $\Pi(t)=F(t,S(t))$, где

$$F(t,s)=sN[d_1(t,s)]-e^{-e(T-t)}KN[d_2(t,s)].$$

Здесь N — функция распределения стандартного нормального закона $N[0,1]$ и

$$d_1(t,s)=\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left\{\ln\left(\frac{s}{K}\right)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right\},$$

$$d_2(t,s)=d_1(t,s)-\sigma\sqrt{T-t}.$$

Solving the Black-Scholes equation: a demystification Francois Coppex, 2009