

# Introducció als algorismes de Ray casting

Josep Boncompte Moya

9 de febrer de 2022

## 1 Objectius

En aquest treball vull estudiar els algorismes ray casting que creen imatges digitals amb un alt grau de realisme traçant raigs. Analitzaré l'algoritme amb les diferents variants que es poden derivar, veient les ventatges i inconvenients d'aquests. També implementaré aquest algoritme aplicant-li optimitzacions.

## 2 Principis de l'algoritme

En aquesta secció explicaré els conceptes bàsics d'un Ray-tracer.

Començem explicant com veiem imatges a la vida real.

Primer de tot necessitem una font d'il·luminació, la llum és essencial per poder-hi veure. Aquesta font d'il·luminació desprèn rajos de llum que impacten contra objectes i reboten. Al rebotar canvien el seu color. El que nosaltres percebem, pertant, són els rajos que van a parar al nostre ull.

En un Ray-tracer s'intenta simular el mateix. Creem una font d'il·luminació, uns objectes, una quadricula i un ull. En comptes de calcular tots els rajos que surten de la font d'il·luminació i quedar-nos amb els que arriben al ull, calculem els rajos en sentit contrari. D'aquesta manera el process és molt més eficient. Pertant, els rajos surten de l'ull i reboten contre els objectes i només tindran color aquells que arribin a la font d'il·luminació.

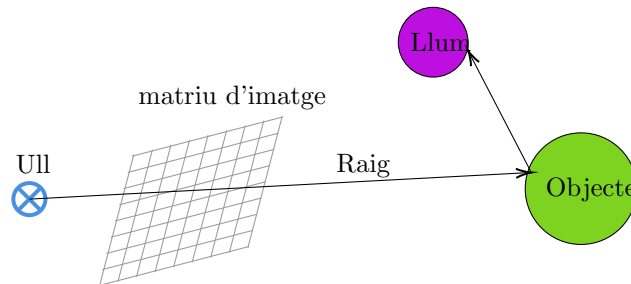


Figura 1: Representació del funcionament bàsic de l'algoritme de Ray casting

La quadricula representarà el conjunt de pixels de la imatge resultant.

Per cada pixel de la quadricula llencem un raig a traves, ens guardem el color dels objectes amb els que impacte. Per poder efectuar aquest algoritme ens caldrà calcular:

- a) La intersecció d'un raig amb un objecte.
- b) rebot d'un raig amb una superfície.
- c) repetir a) i b) amb un nou raig.

## 2.1 intersecció del raig amb objectes

Per saber si un raig intersecta amb un objecte ho podem fer de dues formés diferents:

### 2.1.1 Ray tracing

Ray tracing és una variant dels algorismes de ray casting que resol un sistema d'equacions per trobar la intersecció del raig amb l'objecte. Aquesta variant és molt eficient però està limitada a superfícies que podem parametritzar o que tinguin una fórmula senzilla.

- a) Començarem dibuixant esferes, ja que és el objecte més simple. Podem definir un raig amb l'equació d'una recta  $f(t) = dt + p$  on  $d = (d_1, d_2, d_3)$  és el vector director normalitzat, i  $p = (p_1, p_2, p_3)$  és el punt de la recta quan  $t = 0$ . Més endavant utilitzarem rajos no rectes per simular la curvatura de l'espai. Podem expressar la recta de la forma següent:

$$\begin{aligned}x &= p_1 + td_1 \\y &= p_2 + td_2 \\z &= p_3 + td_3\end{aligned}$$

Per una esfera de radi  $r$  i centre  $c = (c_1, c_2, c_3)$  podem definir-la com:

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + (z - c_3)^2 = r^2$$

Per trobar els punts d'intersecció només cal substituir  $x, y, z$  obtenint:

$$\begin{aligned}((p_1 - c_1) + td_1)^2 + ((p_2 - c_2) + td_2)^2 + ((p_3 - c_3) + td_3)^2 &= r^2 \iff \\(td_1)^2 + (td_2)^2 + (td_3)^2 + (p_1 - c_1)^2 + (p_2 - c_2)^2 + (p_3 - c_3)^2 + \\2(p_1 - c_1)td_1 + 2(p_2 - c_2)td_2 + 2(p_3 - c_3)td_3 - r^2 &= 0 \iff \\||d||^2 t^2 + ||p - c||^2 + 2t(< p - c, d >) - r^2 &= 0\end{aligned}$$

Obtenint una equació de segon grau  $at^2 + bt + c = 0$  on  $a = ||d||^2 = 1$  per definició,  $b = 2(< p - c, d >)$  i  $c = ||p - c||^2 - r^2$ .

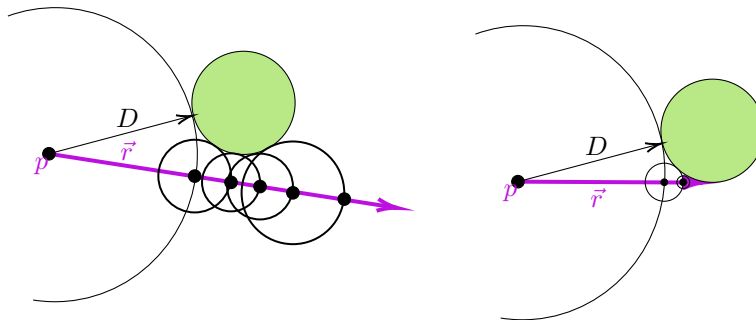


Figura 2: Càlcul d'intersecció utilitzant la variant Ray marching

Aquesta fórmula ens donarà 0, 1 o 2 solucions, que representen el temps  $t$  en el que la recta talla la esfera.

Per que el algoritme tingui sentit hem d'escollir la solució positiva més petita.

- b) Per calcular la intersecció d'un raig amb un cub tindrem els següents conceptes presents:

...

### 2.1.2 Ray marching

Ray marching és una altra variant dels algorismes de ray casting que calcula la intersecció d'un raig de forma recursiva a partir de la distància del raig al objecte. El mètode és el següent:

- Creem un raig  $f(t) = dt + p$  amb  $d$  la direcció i  $p$  la posició.
- calculem la distància  $D$  mínima entre  $p$  i el objecte.
- abancem en la direcció  $d$  aquesta distància i definim la nova posició com

$$p' = D \cdot d + p$$

- repetim aquest procés fins que la  $D = 0$  o fins que  $D = \infty$  ( en el cas que no interseccin ).

Aquesta variant de Ray casting és costosa computacionalment, però ens permet utilitzar objectes més complexos dels quals no podem trobar algebraicament la intersecció amb el raig.

## 2.2 Reflexió d'un raig amb una superfície

Donat un raig i una superfície que interseccin, volem trobar el vector director resultat de la reflexió.

Ens caldrà, pertant trobar el plà tangent de la superfície en el punt d'intersecció.

Sabem que troar el plà tangent és equivalent a trobar el vector normal de la superfície en aquell punt.

En el cas de l'esfera, el vector normal és el mateix que el vector posició. En el cas de superfícies parapetrizades  $X(u, v)$  el vector normal és:

$$N = \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v}$$

i en el cas general

$$\hat{N} = \hat{B} \times \hat{T}$$

on  $\hat{T}$  és el vector tangent unitari i  $\hat{B}$  és el vector binormal unitari.

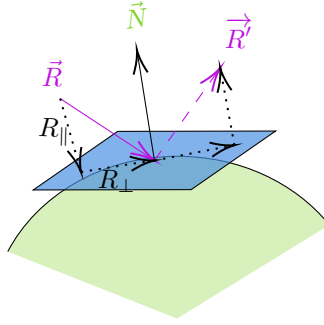


Figura 3: Reflexe d'un raig amb una esfera

Seguint la terminologia de la figura ref volem trobar el vector  $R'$  que descompon en

$$R' = R_{\perp} - R_{\parallel}$$

tals que  $R_{\parallel}$  sigui la projecció de  $R$  sobre  $N$  i  $R_{\perp}$  la component de  $R$  perpendicular a  $N$ .

El reflexe de  $R$  sobre la superfície només canvia la component  $R_{\parallel}$  (de sentit). La component  $R_{\perp}$  es manté igual.

Anem doncs a calcular  $R_{\parallel}$ .

$$R_{\parallel} = \|R\| \cos(\theta) N \quad (1)$$

$$\cos(\theta) = \langle -R, N \rangle \quad (2)$$

$$R_{\perp} = R - R_{\parallel} \quad (3)$$

on  $\theta$  és l'angle que formen el vector  $-R$  i  $N$  (producte escalar). Per tant el vector resultant és

$$R' = R - 2(\cos(\theta)N)$$

### 2.3 Repetir 2.1 i 2.2 per un nou raig

un com hem calculat la intersecció del raig amb l'objecte i tenim el vector de la reflexió, repetirem el procés amb el nou raig  $f(t) = dt + p$  on  $d$  és el vector resultat de la reflexió i  $p$  és el punt d'intersecció. Depen de l'escena que estiguem representant és possible que el raig reboti infinitament, pertant, haurem de posar-li un límit, el qual si s'assoleix, el color d'aquest pixel serà negre.

## 3 Component de la camara

Explicar obertura focal.

## 4 Suavitzat d'imatge, Metode de Monte Carlo

Donada una escena amb un conjunt d'objectes, és difícil simular la il·luminació indirecta. Ja que cada punt  $P$  d'una superfície rep llum indirecta de tots els altres objectes.

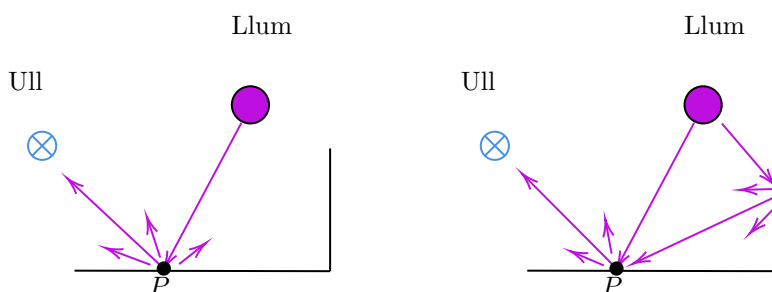


Figura 4: representació de la il·luminació directa i indirecta

El metode de Monte Carlo ens ajuda per solucionar aquest problema. Aquest metode consisteix en crear  $N$  vectors aleatoris  $D_i$  continguts en la semiesfera de centre  $P$  i radi 1 orientada amb el vector normal de la superfície, i agafar la llum procedent del raig  $raig(P, D_i)$ . La quantitat de llum que rebi serà la mitjana dels  $N$  rajos.

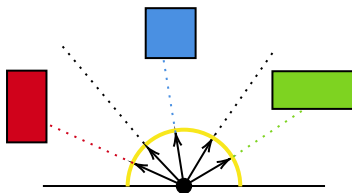


Figura 5: representació del metode de monteCarlo

$$Llum_P = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N raig(P, D_i) \quad (4)$$

Podem aplicar el Metode de MonteCarlo també al' hora de generar el raig que surt de la camera i que passa pel pixel. Si només escollim el raig que passa pel centre del pixel per pintar tot el pixel és possible que no sigui el millor color per representar l'escena, i obtiguem els bordes de la imatge següents:

#### IMATGE BORDES PIXELATS

Per evitar aixó podem generar  $N$  rajos que surtin de la camera i que passin per punts diferents del pixel de la quadricula. El color d'aquest pixel serà

$$ColorPixel_{ij} = \sum_{s=0}^N colorRaig(Camera, r_{ij}^s) \quad (5)$$

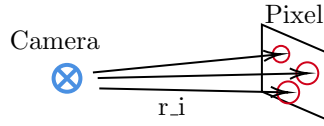


Figura 6: Metode de Monte Carlo aplicat al generador de rajos

## 5 Materials

### 5.1 Rugositat

### 5.2 Reflexió i refracció

la refracció és el canvi en la direcció d'una ona que passa d'un medi a un altre. Aquest fenomen segueix la llei de Snell.

**Teorema 5.1.** (*Llei d'Snell*) *La llei d'Snell estipula que la raó de l'angle d'incidència amb l'angle de refracció és igual a la raó de les velocitats de l'ona pels diferents medis (o la raó dels index de refracció).*

el Index de refracció està definit com

$$n = \frac{c}{v}$$

on  $c$  és la constant de la velocitat de la llum al buit i  $v$  és la velocitat de la llum en el medi.

$$\frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (6)$$

*Demostració.* Considerem dos rajos paral·lels  $A$  i  $B$  que passen del medi 1 al medi 2. Al arribar a la frontera segueixen el seu curs paral·lels amb direccions  $U$  i  $V$  respectivament. La velocitat al medi 1 és  $v_1 = \frac{c}{n_1}$  i al medi 2  $v_2 = \frac{c}{n_2}$ . Suposem que a temps  $= 0$  el raig  $A$  intersecta amb la frontera al punt  $C$ , i en aquest mateix instant, el raig  $B$  es troba al punt  $P$ .

$B$  viatja a velocitat  $v_1$  i arriba al punt  $D$  en  $t$  segons. Durant aquest interval de temps, el raig  $A$  ha viarjat a velocitat  $v_2$  i en temps  $= t$  es troba al punt  $Q$ . Veiem la figura: XXXXXX per veure la situació.

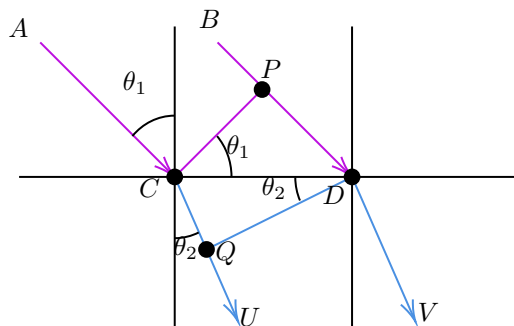


Figura 7: Representació de la demostració de la llei d'Snell

Ara només cal aplicar simple trigonometria. Sigui  $x$  la distància entre  $C$  i  $D$ ,

$$\begin{aligned} x \sin(\theta_1) &= \|PD\| = v_1 t = \frac{c}{n_1} t \\ x \sin(\theta_2) &= \|CQ\| = v_2 t = \frac{c}{n_2} t \end{aligned}$$

per tant

$$\begin{aligned} n_1 \sin(\theta_1) &= \frac{c}{x} t \\ n_2 \sin(\theta_2) &= \frac{c}{x} t \end{aligned}$$

D'on podem deduir la Llei d'Snell

$$\frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = \frac{n_2}{n_1}$$

□

En el nostre cas, tenim que el medi 1 és l'aire i el medi 2 podrà ser aigua, vidre, o el que decidim. Ara, utilitzant la llei d'Snell haurem de trobar el vector

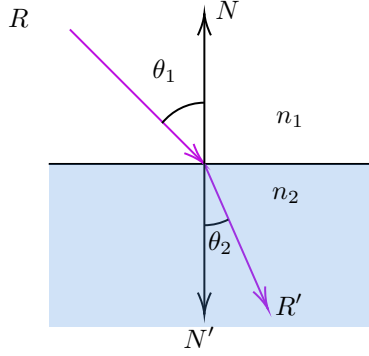


Figura 8: diagrama de la refracció d'un raig de llum sobre un material

director del raig un cop atravesat el segon medi. Veiguem el diagrama següent per fer els càlculs necessaris.

Per trobar  $R'$  primer el separarem en el component paral·lel i perpendicular a  $N'$ .

$$R = R_{\perp} + R_{\parallel}$$

$$R' = R'_{\perp} + R'_{\parallel}$$

com  $\sin(\theta_2) = \|R'_{\perp}\|$ , es compleix per la llei de Snell

$$\|R'_{\perp}\| = \frac{n_1}{n_2} \|R_{\perp}\|$$

i en particular

$$R'_{\perp} = -\frac{n_1}{n_2} R_{\perp}$$

també sabem que

$$R_{\perp} = -R - \cos(\theta_1)N$$

per tant

$$R'_{\perp} = \frac{n_1}{n_2} (R + \cos(\theta_1)N)$$

Com ja hem vist al apartat de Reflexió podem expressar el cossinus del angles entre dos vectors com  $\cos(\theta_1) = \langle -R, N \rangle$ .

Per trobar l'expressió de  $R'_{\parallel}$  tenim que

$$\begin{aligned} R'_{\parallel} &= \cos(\theta_2)N' \\ &= \sqrt{1 - \|\sin(\theta_2)\|^2}N' \\ &= -\sqrt{1 - \|R'_{\perp}\|^2}N \end{aligned}$$

Ja tenim els dos components d' $R'$  en funció d'  $R$  i  $N$ .

els índex de refracció més habituals i que posarem en practica són



- aire: 1
- aigua:  $4/3$
- vidre : 1.52

## 6 Objectes no parametrizables

### 6.1 julia set

### 6.2 aproximació del vector normal

### 6.3 quaternions