Introducció als algoritmes de Ray casting

Josep Boncompte Moya

12 de febrer de 2022

1 Objectius

En aquest treball vull estudiar els algoritmes ray casting que creen imatges digitals amb un alt grau de realisme traçant raigs. Analitzarè l'algoritme amb les diferents variants que es poden derivar, veient les avantatges i inconvenients d'aquests. També implementarè aquest algoritme aplicant-li optimitzacions.

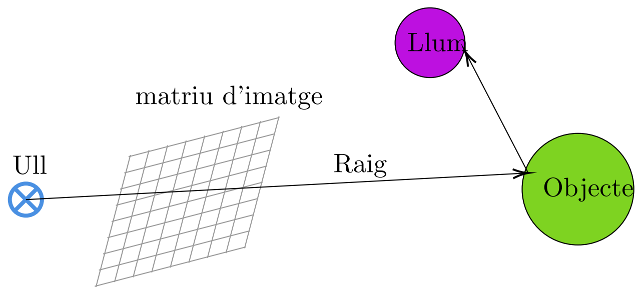

Figura 1: Representació del funcionament bàsic de l'algoritme de Ray casting

2 Principis de l'algoritme

En aquesta secció explicarè els conceptes bàsics d'un Ray casting. Comencem explicant com veiem imatges a la vida real.

Primer de tot necesitem una font d'il·luminació, la llum és essencial per poder-hi veure. Aquesta font d'il·luminació desprén raigs de llum que impacten contra objectes i reboten. Al rebotar canvien el seu color. El que nosaltres percebem, per tant, són els raigs que van a parar al noste ull.

En un Ray caster s'intenta simular el mateix. Creem una font d'il·luminació, uns objectes, una quadrícula i un ull. En comptes de calcular tots els raigs que surten de la font d'il·luminació i quedar-nos amb els que arriben a l'ull, calculem els raigs en sentit contrari. D'aquesta manera el process és molt més eficient. Per tant, els raigs surten de l'ull i reboten contra els objectes i només tindràn color aquells que arribin a la font d'il·luminació.

La quadrícula representarà el conjunt de píxels de la imatge resultant.

Per cada píxel de la quadrícula llencem un raig a través, ens guardem el color dels objectes amb els quals impacti. Per poder efectuar aquest algoritme ens caldrà calcular:

a) La intersecció d'un raig amb un objecte.

b) rebot d'un raig amb una superfície.

c) repetir a) i b) amb un nou raig.

2.1 intersecció del raig amb objectes

Per saber si un raig intersecta amb un objecte ho podem fer de dues formes diferents:

2.1.1 Ray tracing

Ray tracing és una variant dels algoritmes de ray casting que resol un sistema d'equacions per trobar la intersecció del raig amb l'objecte. Aquesta variant és molt eficient però està limitada a superfícies que podem parametritzar o que tinguin una fórmula senzilla.

a) Començarem dibuixant esferes, ja que és l'objecte més simple. Podem definir un raig amb l'equació d'una recta $f(t) = dt + p$ on $d = (d_1, d_2, d_3)$ és el vector director normalitzat, i $p = (p_1, p_2, p_3)$ és el punt de la recta quan $t = 0$. Més endavant utilitzarem raigs no rectes per simular la curvatura de l'espai. Podem expressar la recta de la forma següent:

$$\begin{aligned} x &= p_1 + td_1 \\ y &= p_2 + td_2 \\ z &= p_3 + td_3 \end{aligned}$$

Per una esfera de radi r i centre $c = (c_1, c_2, c_3)$ podem definir-la com:

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + (z - c_3)^2 = r^2$$

Per trobar els punts d'intersecció només cal substituir x, y, z obtenint:

$$\begin{aligned} ((p_1 - c_1) + td_1)^2 + ((p_2 - c_2) + td_2)^2 + ((p_3 - c_3) + td_3)^2 = r^2 \iff \\ (td_1)^2 + (td_2)^2 + (td_3)^2 + (p_1 - c_1)^2 + (p_2 - c_2)^2 + (p_3 - c_3)^2 + \\ 2(p_1 - c_1)td_1 + 2(p_2 - c_2)td_2 + 2(p_3 - c_3)td_3 - r^2 = 0 \iff \\ \|d\|^2 t^2 + \|p - c\|^2 + 2t(< p - c, d >) - r^2 = 0 \end{aligned}$$

Obtenint una equació de segon grau $at^2 + bt + c = 0$ on $a = \|d\|^2 = 1$ per definició, $b = 2(< p - c, d >)$ i $c = \|p - c\|^2 - r^2$.

Aquesta fórmula ens donarà 0, 1 o 2 solucions, que representen el temps t en el qual la recta talla l'esfera.

Perque l'algoritme tingui sentit hem d'escollir la solució positiva més petita.

b) Per calcular la intersecció d'un raig amb un cub tindrem els següents conceptes presents:

...

2.1.2 Ray marching

Ray marching és un altre variant dels algoritmes de ray casting que calcula la intersecció d'un raig de forma recursiva a partir de la distància del raig al objecte. El metode és el següent:

a) Creem un raig $f(t) = dt + p$. amb d la direcció i p la posició inicial.

b) Calculem la distància D minima entre p i el objecte.

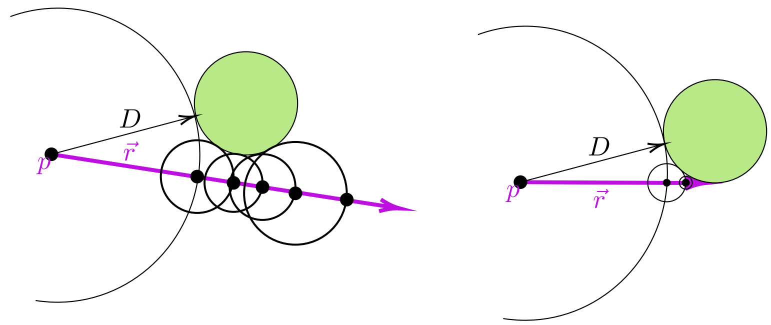

Figura 2: Calcul d'intersecció utilitzant la variant Ray marching

c) abançem en la direcció d aquesta distància i definim la nova posició com

$$p' = D \cdot d + p$$

d) repetim aquest procés fins que la $D = 0$ o fins que $D = \infty$ (en el cas que no intersectin).

Aquesta variant de Ray casting és costosa computacionalment, però ens permet utilitzar objectes més complexos dels quals no podem trobar algebraicament la intersecció amb el raig.

2.2 Reflexió d'un raig amb una superfície

Donat un raig i una superfície que intersequen, volem trobar el vector director resultant de la reflexió.

Ens caldrà, per tant trobar el plà tangent de la superfície en el punt d'intersecció.

Sabem que trobar el pla tangent és equivalent a trobar el vector normal de la superfície en aquell punt.

En el cas de l'esfera, el vector normal és el mateix que el vector posició (si l'esfera està centada en l'origen). En el cas de superfícies parapetritzades $X(u, v)$ el vector normal és:

$$N = \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v}$$

i en el cas general

$$\hat{N} = \hat{B} \times \hat{T}$$

on $\hat{T}$ és el vector tangent unitari i $\hat{B}$ és el vector binormal unitari.

Seguint la terminologia del la figura ref volem trobar el vector R' que descompon en

$$R' = R_{\perp} - R_{\parallel}$$

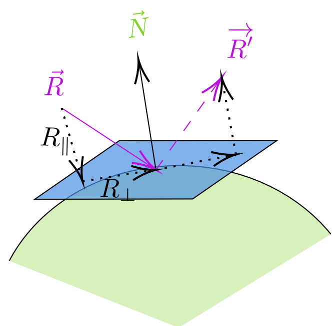

Figura 3: Reflex d'un raig amb una esfera

tals que $R_{\|}$ sigui la projecció de R sobre N i $R_{\perp}$ la component de R perpendicular a N.

El reflexe d' R sobre la superfície només canvia la component $R_{\|}$ (de sentit). La component $R_{\perp}$ es manté igual.

Anem doncs a calcular $R_{\|}$.

$$R_{\|} = \|R\| \cos(\theta) N \tag{1}$$

$$\cos(\theta) =< -R, N > \tag{2}$$

$$R_{\perp} = R - R_{\|} \tag{3}$$

on θ és l'angle que forman el vector $-R$ i N (producte escalar). Per tant el vector resultant és

$$R' = R - 2(\cos(\theta)N)$$

2.3 Repetir 2.1 i 2.2 per un nou raig

un cop hem calculat la intersecció del raig amb l'objecte i tenim el vector de la reflexió, repetirem el procés amb el nou raig $f(t) = dt + p$ on d és el vector resultat de la reflexió i p és el punt d'interseció. Depen de l'escena que estiguem representant és possible que el raig reboti infinitament, per tant, haurem de posar-li un limit, el qual si s'assoleix, el color d'aquest píxel serà negre.

3 Component de la camara

Explicar obertura focal.

4 Suavitzat d'imatge, Metode de Monte Carlo

Donada una escena amb un conjunt d'objectes, és difícil simular la il·luminació indirecta. Ja que cada punt P d'una superfície rep llum indirecta de tots els altres objectes.

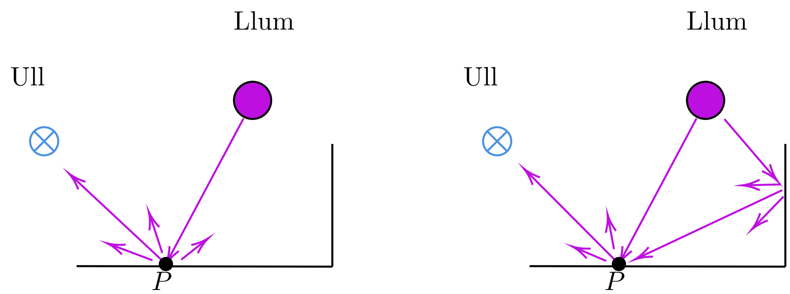

Figura 4: representació de la il·luminació directa i indirecta

El metode de Monte Carlo ens ajuda per solucionar aquest problema. Aquest metode consisteix en crear N vectors aleatoris D_i continguts en la semiesfera de centre P i radi 1 orientada amb el vector normal de la superfície, i agafar la llum procedent del raig $raig(P, D_i)$. La quantitat de llum que rebi serà la mitjana dels N raigs.

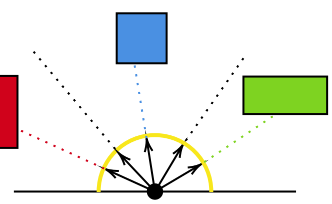

Figura 5: represerntació del metode de monteCarlo

$$Llum_P = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} raig(P, D_i) \tag{4}$$

Podem aplicar el Metode de MonteCarlo també a l'hora de generar el raig que surt de la camera i que passa pel píxel. Si només escollim el raig que passa pel centre del píxel per pintar tot el píxel és possible que no sigui el millor color per representar l'escena, i obtinguem les vores de objectes següents:

IMATGE vores PIXELAdes

Per evitar això podem generar N raigs que surtin de la camera i que passin per punts diferents del píxel de la quadrícula. El color d'aquest píxel serà

$$ColorPixel_{ij} = \sum_{s=0}^{N} colorRaig(Camera, r_{ij}^{s}) \tag{5}$$

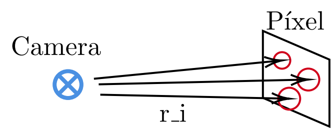

Figura 6: Metode de Monte Carlo aplicat al generador de raigs

5 Materials

5.1 Rugositat

5.2 Reflecció i refracció

la refracció és el canvi en la direcció d'una ona que passa d'un medi a un altre. Aquest fenomen segueix la llei de Snell.

Teorema 5.1. *(Llei d'Snell) La llei d'Snell estipula que la raó de l'angle d'incidència amb l'angle de refracció és igual a la raó de les velocitats de l'ona pels diferents medis (o la raó dels index de refracció).*

L'index de refracció està definit com

$$n = \frac{c}{v}$$

on c és la constant de la velocitat de la llum al buit i v és la velocitat de la llum en el medi.

$$\frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{6}$$

Demostració. Considerem dos raigs paral·lels A i B que passen del medi 1 al medi 2. Al arribar a la frontera segueixen el seu curs paral·lels amb direccions U i V respectivament. La velocitat al medi 1 és $v_1 = \frac{c}{n_1}$ i al medi 2 $v_2 = \frac{c}{n_2}$. Suposem que a temps $T = 0$ el raig A intersecta amb la frontera al punt C, i en aquest mateix instant, el raig B es troba al punt P.

B viatge a velocitat v_1 i arriba al punt D en t segons. Durant aquest interval de temps, el raig A ha viatjat a velocitat v_2 i en temps $T = t$ es troba al punt Q. Veiem la figura: XXXXXX per veure la situació.

Ara només cal aplicar simple trigonometria. Sigui x la distància entre C i D,

$$x\sin(\theta_1) = \|PD\| = v_1 t = \frac{c}{n_1}t$$
$$x\sin(\theta_2) = \|CQ\| = v_2 t = \frac{c}{n_2}t$$

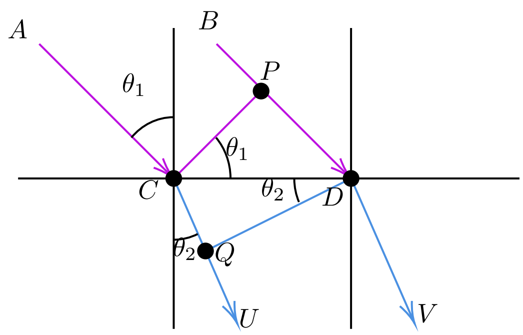

Figura 7: Representació de la demostració de la llei d'Snell

per tant

$$n_1 \sin(\theta_1) = \frac{c}{x}t$$
$$n_2 \sin(\theta_2) = \frac{c}{x}t$$

D'on podem deduir la Llei d'Snell

$$\frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = \frac{n_2}{n_1}$$

□

En el nostre cas, tenim que el medi 1 és l'aire i el medi 2 podrà ser aigua, vidre, o el que decidim. Ara, utilitzant la llei d'Snell haurem de trobar el vector director del raig un cop atravessat el segon medi. Vegem el diagrama següent per fer els càlculs necessaris.

Per trobar R' primer el sempararem en el component paral·lel i perpendicular a N'.

$$R = R_\perp + R_\parallel$$
$$R' = R'_\perp + R'_\parallel$$

com $sin(\theta_2) = \|R'_\perp\|$, es compleix per la llei de Snell

$$\|R'_\perp\| = \frac{n_1}{n_2}\|R_\perp\|$$

i en particular

$$R'_\perp = \frac{n_1}{n_2}R_\perp$$

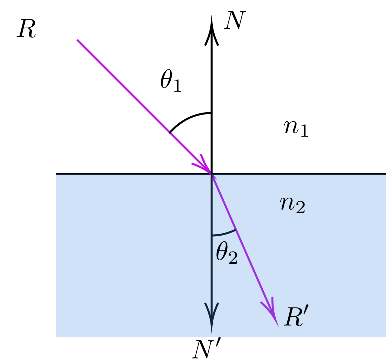

Figura 8: diagrama de la refracció d'un raig de llum sobre un material

També sabem que

$$R_\perp = -R - \cos(\theta_1)N$$

per tant

$$R'_\perp = -\frac{n_1}{n_2}(R + \cos(\theta_1)N)$$

Com ja hem vist a l'apartat de Reflexió podem expressar el cossinus de l'angles entre dos vectors com $\cos(\theta_1) =< -R, N >$.

Per trobar l'expresió de $R'_\parallel$ tenim que

$$\begin{aligned} R'_\parallel &= \cos(\theta_2)N' \\ &= \sqrt{1 - \|\sin(\theta_2)\|^2}N' \\ &= -\sqrt{1 - \|R'_\perp\|^2}N \end{aligned}$$

Ja tenim els dos components d'R' en funció d' R i N.

els index de refracció més abituals i que posarem en pràctica són

- aire ≈ 1
- aigua $= 4/3$
- vidre $= 1.52$

6 Objectes no parametritzables

6.1 julia set

6.2 aproximació del vector normal

6.3 quaternions