Problema 19

La urna 1 tiene 2 bolas blancas y 3 negras; la urna II, 4 blancas y 1 negra; y la urna III, 3 blancas y 4 negras. Se selecciona una urna aleatoriamente y una bola extraída aleatoriamente es blanca. Hallar la probabilidad de haber escogido la urna I.

Definimos los eventos

B: sea bola blanca

U₁: seleccionar la urna IU₂: seleccionar la urna IIU₃: seleccionar la urna III

Nos piden $P(U_1|B)$

Calculamos la probabilidad de seleccionar una urna

$$P(U_1) = \frac{1}{3}$$
; $P(U_2) = \frac{1}{3}$; $P(U_3) = \frac{1}{3}$

Calculamos la probabilidad de B dado que es sacada de una urna i

$$P(B|U_1) = \frac{2}{5}$$
; $P(B|U_2) = \frac{4}{5}$; $P(B|U_3) = \frac{3}{7}$

Aplicamos la Regla de Bayes

$$P(U_1|B) = \frac{P(U_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) \cdot P(B|U_1)}{P(U_1 \cap B) + P(U_2 \cap B) + p(U_3 \cap B)}$$

$$= \frac{P(B) \cdot P(B|U_1)}{P(U_1) \cdot P(B|U_1) + P(U_2) \cdot P(B|U_2) + P(U_3) \cdot P(B|U_3)}$$

$$= \frac{\binom{1}{3}\binom{2}{5}}{\binom{1}{3}\binom{2}{5} + \binom{1}{3}\binom{4}{5} + \binom{1}{3}\binom{3}{7}} = \frac{2}{\binom{1}{15} + 4}\frac{2}{15} = \frac{2}{15}\frac{19}{35} = \frac{14}{57} \approx 0.24$$

$$P(U_1|B) \cong 0.24$$