Actividad 2 correspondiente a la Unidad 4

Nombre: Meza Vargas Brandon David

Fecha: 27/04/21

Instrucciones: Resuelve cada uno de los problemas anotando cada paso empleado en su resolución.

Problema 1

3.47 La cantidad de queroseno, en miles de litros, en un tanque al principio de cualquier día es una cantidad aleatoria Y, de la que una cantidad aleatoria X se vende durante el día. Suponga que el tanque no se abastece durante el día, por lo que $x \leq y$, y suponga que la función de densidad conjunta de estas variables es

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

a) Determine si X y Y son independientes.

b) Encuentre $P(1/4 < X < 1/2 \mid Y = 3/4)$.

Solución

a)

$$g(x) = \int_{x}^{1} 2dy = 2y|_{x}^{1} = 2(1-x), para\ 0 < x < 1$$

$$h(y) = \int_{0}^{y} 2dy = 2y|_{0}^{y} = 2y, para\ 0 < y < 1$$

Como f(x,y) ≠ g(x)h(y), X y Y no son independientes

b)

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} = \frac{2}{2y} = \frac{1}{y}, para\ 0 < x < y$$

$$f(x|y) = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$$

$$Así\ tenemos, P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} \mid Y = \frac{3}{4}\right) = \int_{1/4}^{1/2} \frac{4}{3} dx = \frac{4}{3} x \mid_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{3}$$

Problema 2.

3.49 Sea X el número de veces que fallará cierta máquina de control numérico: 1, 2 0 3 veces en un día dado. Sea Y el número de veces que se llama a un técnico para una emergencia. Su distribución de probabilidad conjunta está dada como

$f(x,y)$		x = 1	2	3
	1	0.05	0.05	0.1
y	2	0.05	0.1	0.35
	3	0	0.2	0.1

a) Evalúe la distribución marginal de X.

b) Evalúe la distribución marginal de Y.

c) Encuentre $P(Y = 3 \mid X = 2)$.

Solución

a)

$$g(x) = \sum_{y=j}^{y=m} f(x, yj)$$

$$g(1) = \sum_{y=1}^{y=3} f(x, y) = 0.05 + 0.05 + 0 = 0.1$$

$$g(2) = \sum_{y=1}^{y=3} f(x, y) = 0.05 + 0.1 + 0.2 = 0.35$$

$$g(3) = \sum_{y=1}^{y=3} f(x, y) = 0.1 + 0.35 + 0.1 = 0.55$$

x	**1**	**2**	**3**
g(x)	0.1	0.35	0.55

b)

$$h(y) = \sum_{x=i}^{x=n} f(xi, y)$$

$$h(1) = \sum_{x=1}^{x=3} f(x, y) = 0.05 + 0.05 + 0.1 = 0.1$$

$$h(2) = \sum_{x=1}^{x=3} f(x,y) = 0.05 + 0.1 + 0.35 = 0.35$$

$$h(3) = \sum_{x=1}^{x=3} f(x,y) = 0 + 0.2 + 0.1 = 0.3$$

y	**1**	**2**	**3**
h(y)	0.2	0.5	0.3

c)

$$P(Y = 3|X = 2) = f(3|2) = \frac{0.2}{0.05 + 0.1 + 0.2} = 0.57$$

Problema 3.

3.58 La función de densidad conjunta de las variables aleatorias X y Y es

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 - x, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

a) Muestre que X y Y no son independientes.

b) Encuentre $P(X > 0.3 \mid Y = 0.5)$.

Solución

a)

$$h(y) = \int_{0}^{1-y} 6x dx = 3x^2 |_{0}^{1-y} = 3(1-y)^2, para\ 0 < y < 1$$

$$Como\ f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} = \frac{6x}{3(1-y)^2}, para\ 0 < x < 1 - y\ tiene\ la\ variable\ y, X\ y\ Y\ no\ son\ independientes.$$

b)

$$f(x|y) = \frac{6x}{3\left(1-(0.5)\right)^2} = 8x$$

$$P(X > 0.3|Y = 0.5) = \int_{0.3}^{0.5} 8x dx = 4x^2 |_{0.3}^{0.5} = 4(0.5^2 - 0.3^2) = \frac{16}{25}$$