Actividad de la Unidad 2 de Probabilidad y Estadística

Instrucciones: Primero ubique el tema al que corresponde cada problema y anótelo en el espacio correspondiente. Después resuelva cada uno de los siguientes problemas.

1. **Suponga que un distribuidor de joyería antigua está interesado en comprar un collar de oro para el que tiene 0.22 de probabilidades de venderlo con $250 de utilidad; 0.36 de venderlo con $150 de utilidad; 0.28 de venderlo al costo y 0.14 de venderlo con una pérdida de $150. ¿Cuál es su utilidad esperada?**

Valor esperado de una variable aleatoria discreta

Solución

Sea X= utilidad y la probabilidad de venderlo f(x), tenemos:

$$= E(x) = \sum_{x} xf(x)$$

$$= (\$250)(0.22) + (\$150)(0.36) + (0)(0.28) + (0.14)(-\$150)$$

$$= \$55 + \$54 + 0 - \$21 = \$88$$

$$\therefore \textit{La utilidad esperada es de } \$88$$

2. **Calcule el valor esperado de la variable aleatoria $g(x) = x^2$, donde *x* tiene la distribución de probabilidad**

$f(x) = \binom{3}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{3-x}$, para x=0, 1, 2, 3.

Valor esperado de una variable aleatoria discreta con distribución de probabilidad

Solución

Evaluamos x=0, 1, 2, 3 en f(x)

$$f(0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{3-0} = \frac{27}{64} \qquad f(1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}\left(\frac{3}{4}\right)^{3-1} = \frac{27}{64}$$

$$f(2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{3-2} = \frac{9}{64} \qquad f(3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{3-3} = \frac{1}{64}$$

Calculamos el valor esperado para variable aleatoria discreta:

$$\mu = E\big(g(x)\big) = \sum_{x} g(x)f(x) = \sum_{0}^{3}(x^2)f(x)$$

$$= (0)\left(\frac{27}{64}\right) + (1)\left(\frac{27}{64}\right) + (4)\left(\frac{9}{64}\right) + (9)\left(\frac{1}{64}\right)$$

$$= \frac{27}{64} + \frac{9}{16} + \frac{9}{64} = \frac{9}{8}$$

$$\therefore \textit{El valor esperado es de } \frac{9}{8}$$

3. **El tiempo que pasa, en horas, para que un radar detecte entre conductores sucesivos a los que exceden los límites de velocidad es una variable aleatoria continua con una función de distribución acumulativa:**

$$\boldsymbol{F(x)} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \boldsymbol{para\ x < 0} \\ \mathbf{1} - \boldsymbol{e^{-8x}}, & \boldsymbol{x \geq 0} \end{cases}$$

Calcule la probabilidad de que el tiempo que pase para que el radar detecte entre conductores sucesivos a los que exceden los límites de velocidad sea menor de 12 minutos.

a) **Usando la función de distribución acumulativa de x.**

Función acumulativa de probabilidad

Solución

Primeramente, calculamos a cuantas horas equivalen 12 minutos

$$\frac{12}{60} = 0.2hrs$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$P(X < 0.2) = F(0.2) = 1 - e^{-8(0.2)} = 0.7981$$

4. **Un embarque de 7 televisores contiene 2 unidades defectuosas. Un hotel compra 3 de los televisores al azar. Si *x* es el número de unidades defectuosas que compra el hotel,**

a) **Calcule la distribución de probabilidad de *X*.**

b) **Calcule la función de distribución acumulativa de la variable aleatoria *X* que represente el número de unidades defectuosas.**

c) **Utilice *F*(*x*) para calcular *a*)*P*(*X* = 1) y *P*(0 < *X* ≤ 2).**

Función masa de probabilidad y función acumulativa de probabilidad

Solución

Sea X: televisores defectuosos y N: televisores no defectuosos

Para resolver el problema de mejor forma realizamos la siguiente tabla:

Espacio muestral (X)	x	Probabilidad f(x)	F(x)
NNN	0	$f(0)=\frac{\binom{5}{3}\binom{2}{0}}{\binom{7}{3}}=\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$
XNN NXN NNX	1	$f(1)=\frac{\binom{5}{2}\binom{2}{1}}{\binom{7}{3}}=\frac{4}{7}$	$\frac{6}{7}$
XXN XNX NXX	2	$f(2)=\frac{\binom{5}{1}\binom{2}{2}}{\binom{7}{3}}=\frac{1}{7}$	1

a)

$$f(x)=\frac{\binom{5}{3-x}\binom{2}{x}}{\binom{7}{3}}$$

b)

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{2}{7}, & 0\le x\le 1\\ \frac{6}{7}, & 1\le x\le 2\\ 1, & 2\le x\end{cases}$$

c)

$$P(X=1)=P(X\le 1)-P(X\le 0)=\frac{6}{7}-\frac{2}{7}=\frac{4}{7}$$

$$P(0<X\le 2)=P(X\le 2)-P(X\le 0)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$