3.63 Dos componentes electrónicos de un sistema de proyectiles funcionan en conjunto para el éxito de todo el sistema. Sean X y Y la vida en horas de los dos componentes. La densidad conjunta de X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} ye^{-y(1+x)}, & x, y \geq 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Determine las funciones de densidad marginal para ambas variables aleatorias.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos componentes duren más de dos horas?

Recordemos que las funciones de densidad marginal están dadas por

$$g(x) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} f(x,y)dy \ , h(y) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} f(x,y)dx$$

a)

$$g(x) = \int_0^\infty ye^{-y(1+x)}dy - - - *$$

Resolviendo * por partes:

$$u = y \, ; du = dy$$

$$dv = e^{-y(1+x)} \, ; v = -\frac{e^{-y(1+x)}}{(1+x)}$$

Sustituyendo en *

$$g(x) = \int_0^\infty ye^{-y(1+x)}dy = -\frac{ye^{-y(1+x)}}{(1+x)} + \int \frac{e^{-y(1+x)}}{(1+x)}dy$$

$$= -\frac{ye^{-y(1+x)}}{(1+x)} + \frac{1}{(1+x)}\int e^{-y(1+x)} \, dy = \left(-\frac{ye^{-y(1+x)}}{(1+x)} - \frac{e^{-y(1+x)}}{(1+x)^2}\right)_0^\infty$$

Evaluando limites

$$= \left(\left(-\frac{\infty e^{-\infty(1+x)}}{(1+x)} - \frac{e^{-\infty(1+x)}}{(1+x)^2} \right) - \left(-\frac{(0)e^{-(0)(1+x)}}{(1+x)} - \frac{e^{-(0)(1+x)}}{(1+x)^2} \right) \right)$$

$$(0-0) - \left(0 - \frac{1}{(1+x)^2}\right) = \frac{1}{(1+x)^2} \therefore g(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \; para \; x \geq 0$$

Ahora h(y)

$$h(y) = \int_0^\infty y e^{-y(1+x)} dx = \int_0^\infty y e^{-y-yx} dx = y e^{-y} \int_0^\infty e^{-yx} dx$$

$$= \left(-e^{-y} e^{-yx}\right) \begin{matrix} \infty \\ 0 \end{matrix}$$

Evaluando limites

$$= \left(-e^{-y} e^{-y\infty}\right) - \left(\left(-e^{-y} e^{-y(0)}\right) = 0 - \left(-e^{-y}\right) = e^{-y}$$

$$\therefore h(y) = e^{-y} \; para \; y \geq 0$$

b)

$$P(X \geq 2, Y \geq 2) = \int_2^\infty \int_2^\infty y e^{-y(1+x)} \, dx dy$$

$$= \int_2^\infty \left(-e^{-y} e^{-yx}\right) \begin{matrix} \infty \\ 2 \end{matrix} dy = \int_2^\infty \left(-e^{-y} e^{-y\infty}\right) - \left(-e^{-y} e^{-y(2)}\right) dy$$

$$\int_2^\infty 0 - \left(-e^{-3y}\right) dy = \int_2^\infty e^{-3y} dy = \left(-\frac{e^{-3y}}{3}\right) \begin{matrix} \infty \\ 2 \end{matrix}$$

$$= \left(-\frac{e^{-3\infty}}{3}\right) - \left(-\frac{e^{-3(2)}}{3}\right) = \frac{e^{-6}}{3} \cong 8.26$$

$$\therefore \; P(X \geq 2, Y \geq 2) \cong 8.26$$